Филиппова Анастасия

Домашнее задание 1

1 Пункт назначения

Пусть a_i – приблизительное расстояние от человека до i-ого объекта, (x_i, y_i) – координаты объекта, (x, y) – координаты человека, которые необходимо определить.

$r_i((x, y), (x_i, y_i)) = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$ – расстояние между человеком и объектом, в предположении , что координаты человека есть (x, y). Целевая функция: $f : R \to R$, $f(x, y) = |r_1 - a_1| + \cdots + |r_n - a_n|$.

$$f(x, y) \to \min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}$$

Существует только одна точка, такая, что расстояние от нее до всех объектов инимально, поэтому минимизируя данную функцию, находим координаты человека наилучших образом.

2 Посели меня если сможешь

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - студенты, $y_1, \ldots, y_n$ - комнаты, $|y_k|$ - количество жильцов в комнате k. Задача состоит в том, чтобы раселить людей наилучшим образом. Предположим, что для студентов одинаково важны как соседи, так и комната (нет приоритетов). Будем оптимизировать следующую функцию:

$$-f(x) \to \min_{\vec{x}}$$

$$s.t. |y_k| \le 3, \forall k \in \overline{1, n}$$

$f(x_i, x_j, x_l, y_k) = p_{ij} + p_{jl} + p_{ji} + p_{lj} + p_{il} + p_{li} + b_{ik} + b_{jk} + b_{lk}$.

Таким образом при поселении мы учитываем желание людей жить вместе, а также желание жить в конкретной комнате.

3 Задача про магазины и склады

Пусть всего n складов с товарами. Пусть x_{ij} – количество единиц товара, которые с $i-$ого склада перевозят в $j-$ый магазин. Рассмотрим функции $f_1(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij}c_{ij}$ – суммарные затраты на перевозки, $f_2(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij}t_{ij}$ – время, потраченное на перевозки.

Целая фнкция зависимост от политики компании, занимающейся перевозками (что им выгоднее экономить - время или деньги). Чтобы учитывать предпочтения компании, зададим веса (S, T). Тогда задача оптимизации будет выглядеть следующим образом:

$$S \cdot f_1(x) + T \cdot f_2(x) \to \min_{x\in\mathbb{R}^{n\times m}}$$

$$s.t \sum_i x_{ij} = b_j \ \forall i, \sum_j x_{ij} \le a_i \ \forall j$$

5 Напоминание фактов из линейной алгебры

1. Норма вектора – функционал $p : X \to \mathbb{R}$, обладающий следующими свойствами:

   1) $\forall x \in X \hookrightarrow p(x) \ge 0$,

   2) $\forall x \in X \hookrightarrow p(x) = 0 \Rightarrow x = 0$,

   3) $\forall x \in X, \forall a \in \mathbb{R} \hookrightarrow p(ax) = ap(x)$,

   3) $\forall x, y \in X, p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$ (неравенство треугольника);

Нормы $p(x)$ и $q(x)$ называются эквивалентными, если существуют такие положительные константы $C_1, C_2 : \forall x \in X \hookrightarrow C_1 p(x) \leq q(x) \leq C_2 p(x)$.

Норма $\|x\|_{l_1} = \sum |x_i|$ - манхэтоновское расстояние, $\|x\|_{l_2} = \sqrt{\sum x_i^2}$ - евклидова норма, $\|x\|_{l_\infty} = max|x_i|$.

Докажем, что выше указанные нормы эквивалентны:

$\|x\|_\infty \leq \sum\limits_i |x_i| \leq \|x\|_1 \leq \sum\limits_i max|x_i| \leq n\|x\|_\infty \Rightarrow$ нормы l_1, l_∞ эквивалентны.

$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{\sum\limits_i max|x_i|} = \sqrt{n}\|x\|_\infty \Rightarrow$ нормы l_2, l_∞ экивалентны.

$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2 \Rightarrow$ нормы l_2, l_1 эквивалентны.

2. Нормой матрицы, порожденной векторной нормой $\|x\|$ называется $\|A\| = \max\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|$ или $\sup\limits_{\|x\|>0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$.

   Нормой Фробениуса матрицы называется : $\|A\|_F = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij}^2}$. Векторная норма l_2 является аналогом нормы Фробениуса.

   Выведем нормы матриц, порожденные указанными выше нормами: 1) $\|x\|_\infty = \max\limits_i |x_i|$.

   $y = Ax = (\sum\limits_j a_{1j}x_j, \ldots, \sum\limits_j a_{nj}x_j), \|y\|_\infty = \max\limits_i |\sum a_{ij}x_j| \leq \max\limits_i \sum |a_{ij}||x_j| \leq \max\limits_i \sum |a_{ij}| \max\limits_j |x_j| \Rightarrow$

   $\|A\| \leq \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{m} |a_{ij}|$.

   Покажем, что существует такой x, при которм супремум достигается и неравенство превращается в равенство: возьмем $x_j = sign(a_{lj}$, где l - это индекс, при котором выражение $\max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{m} |a_{ij}|$ достигает своего максимума. Получаем $\|A\|_\infty = \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{m} |a_{ij}|$

   2) $\|x\|_1 = \sum |x_i|$.

   $y = Ax = (\sum\limits_j a_{1j}x_j, \ldots, \sum\limits_j a_{nj}x_j), \|y\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |(\sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij}x_j)| \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m} |a_{ij}||x_j| \leq \max\limits_j \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}| \cdot \sum\limits_{j=1}^{m} |x_j| =$

   $\max\limits_j \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}| \cdot \|x\|_1$.

   Покажем, что равенство достигается. Пусть $\max\limits_j \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ достигается при $j = l$. Тогда возьмем вектор x, у которого все компоненты 0 и $l-$ая равна 1. Получаем: $\|A\|_1 = \max\limits_j \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$.

   3) $\|x\|_{l_2} = \sqrt{\sum x_i^2}$.

   $\|x\|_2^2 = (x, x) \Rightarrow \|Ax\|_2^2 = (Ax, Ax) = x^T A^T Ax = (A^T Ax, x)$. Пусть характеристический многочлен матрицы $A^T A$ не имеет кратных корней, тогда существует в пространстве базис из собственных векторов, в котором матрица имеет диагональный вид. $A-$ матрица размера $(n \times m)$, тогда $A^T A$ имеет размер $(m \times m)$. В базисе из собственных векторов имеем: $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots +_m e_m, (A^T Ax, x) = \sum\limits_j \lambda_j x_j^2$.

   $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \frac{\sqrt{\sum\limits_j \lambda_j x_j^2}}{\sqrt{\sum x_j^2}} \leq \sqrt{\max\limits_k |\lambda_k|}$.

   Равенсто будет достигаться, если взять в качестве вектора x вектор, у которого все компаненты будут 0, кроме x_k, где k - индекс максимального собственного значения по модулю. $x_k = 1$. $\|A\|_2 = \sqrt{\max\limits_k |\lambda_k|}$.

3. Разрежённая матрица — это матрица с преимущественно нулевыми элементами.

   Возможный способ хранения - по строкам матрицы, например. То есть в каждой строке хранится список не нулевых элементов этой строки и список их индексов. Также можно хранить с помощью словаря, где ключом будет номер строки, а данными, которые будут хранится по ключу - кортеж из ненулевого элемента и индекс его столбца.

   Плюсы такого хранения в том, что по сравнению с двумерными массивами, они занимают гораздо меньше памяти.

4. Матричное умножение ассоциативно: $\forall A_{n\times m}, B_{m\times k}, C_{k\times r} \hookrightarrow A(BC) = (AB)C$.

   Доказательство:

   Пусть $AB = D, DC = F, BC = E, AE = H$. Требуется доказать, что $f_{ij} = h_{ij}$.

   $f_{ij} = \sum\limits_{s=1}^{k} d_{is}c_{sj}, d_{is} = \sum\limits_{p=1}^{m} a_{ip}b_{pj} \Rightarrow f_{ij} = \sum\limits_{p=1}^{m}\sum\limits_{s=1}^{k} a_{ip}b_{ps}c_{sj}$.

   $h_{ij} = \sum\limits_{s=1}^{m} a_{ip}e_{pj}, e_{pj} = \sum\limits_{s=1}^{k} b_{is}c_{sj} \Rightarrow h_{ij} = \sum\limits_{p=1}^{m}\sum\limits_{s=1}^{k} a_{ip}b_{ps}c_{sj}$.

   Получаем, что $f_{ij} = h_{ij} \Rightarrow (AB)C = A(BC)$.

6 Диаграмма Воронова

1. Рассмотрим сначала случай при $n = 2$. Множество точек, которые находятся к точке x_0 ближе чем к x_1 есть полуплоскость, граница полуплоскости - прямая, которая является серединным перпендикуляром к отрезку (x_0, x_1). Вектор нормали есть $\vec{n} = \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_0}{\|\vec{x}_0 - \vec{x}_1\|_2}$, точка $M = \frac{\vec{x}_0 + \vec{x}_1}{2}$ лежит на серединном перпендикуляре. Тогда полуплоскость задается неравенством :$\langle \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_0}{\|\vec{x}_0 - \vec{x}_1\|_2}, \vec{x} \rangle \le -C$, где C находится из принадлежности точки M. То есть $C = \langle \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_0}{\|\vec{x}_0 - \vec{x}_1\|_2}; \frac{x_1 + x_0}{2} \rangle$. Получаем плоскость.

   При $i = \overline{1,k}$ искомое множество есть многоугольник, вершины которого есть пересечение построенных серединных перпендикуляров.

   При $n > 2$ действуем аналогично.

   Запишем получившиеся множество точек ввиде $Ax \le b$:

   $\langle \frac{\vec{x}_i - \vec{x}_0}{\|\vec{x}_0 - \vec{x}_i\|_2}, \vec{x} \rangle \le -\langle \frac{\vec{x}_i - \vec{x}_0}{\|\vec{x}_0 - \vec{x}_i\|_2}; \frac{x_i + x_0}{2} \rangle$ - неравенство для $i-$ой точки, тогда $A : a_i = (\frac{\vec{x}_i - \vec{x}_0}{\|\vec{x}_0 - \vec{x}_i\|_2})^T$ - i-ая строка матрицы, $-\langle \frac{\vec{x}_i - \vec{x}_0}{\|\vec{x}_0 - \vec{x}_i\|_2}; \frac{x_i + x_0}{2} \rangle$ - i-ая компонента вектора b.

2. Для нахождения точек по известным вершинам многоугольника решаем систему уравнений:
   $\|x_0 - y_i\| = \|x_i - y_i\|$ (индекс 2-нормы опускаем)
   $\|x_0 - y_{i+1}\| = \|x_i - y_{i+1}\|$
   $i = 1, ..., k-1$, где y_i - вершины многоугольника.

3. Диаграмма Вороного конечного множества точек S на плоскости представляет такое разбиение плоскости, при котором каждая область этого разбиения образует множество точек, более близких к одному из элементов множества S, чем к любому другому элементу множества. Каждая область разбиения называется ячейкой Вронского.

   Тогда $V_j = \{x \in R^n | \|x_j - x\| \le \|x_i - x\| \forall i \in \overline{1,k}, j$ не равно $i\}$ - $j-$ая ячейка.

   Пусть мы знаем $y_{i1}, \ldots, y_{im}$ - вершины многогранника для $i-$ой ячейки. Решая систему как в пункте 2, находим координаты $i-$ой точки множества. Далее находим m соседних точек ("центров"соседних ячеек), проведя перпендикуляр из найденной точки к стороне многогранника, зная расстояние от точки до стороны многогранника, находим "соседний"центр. Таким образом, решив всего одну систему уравнений и зная координаты вершин ячейки Вронского для одной точки, можем найти координаты остальных точек конечного множества S.

4. Мне сложно придумать, как еще можно использовать диаграмму Воронова, потому что она уже применяется во многих областях: в картографии, медицине, биологии. На мой взгляд, самое интересное применение - моделирование реальных процессов и объектов, таких как клетки организма.

7 Доказать, что множество $C = \{x | x^T Ax + b^T x + c \leq 0, A > 0\}$ выпукло.

Пусть $x_1, x_2 \in C$, докажем, что $\forall \lambda \in [0,1] \hookrightarrow \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in C$.

$(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)^T A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) + b^T(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) + c = \lambda^2 x_1^T Ax_1 + (1-\lambda)^T x_2^T Ax_2 + \lambda(1-\lambda)x_1^T Ax_2 + \lambda(1-\lambda)x_2^T Ax_1 + \lambda b^T x_1 + (1-\lambda)b^T x_2 + c.(1)$

$\lambda^2 x_1^T Ax_1 = -\lambda(1-\lambda)x_1^T Ax_1 +_1^T Ax_1.(2)$

$(1-\lambda)^2 x_2^T Ax_2 = (1-\lambda)x_2^T Ax_2 - \lambda(1-\lambda)x_2^T Ax_2.(3)$

Подставляя (2) и (3) в (1) получаем:

$\lambda x_1^T Ax_1 - \lambda(1-\lambda)x_1^T Ax_1 + (1-\lambda)x_2^T ax_2 - \lambda(1-\lambda)x_2^T Ax_2 + \lambda(1-\lambda)x_1^T Ax_2 + \lambda(1-\lambda)x_2^T Ax_1 + \lambda b^T x_1 + (1-\lambda)b^T x_2 + \lambda c + (1-\lambda)c$. Пусть $X = \lambda x_1^T Ax_1 + \lambda b^T x_1 + \lambda c, Y = (1-\lambda)x_2^T ax_2 + (1-\lambda)b^T x_2 + (1-\lambda)c$. Так как $x_1, x_2 \in C \Rightarrow a, b \leq 0$.

Получаем: $X + Y + -\lambda(1-\lambda)x_1^T Ax_1 - \lambda(1-\lambda)x_2^T Ax_2 + \lambda(1-\lambda)x_1^T Ax_2 + \lambda(1-\lambda)x_2^T Ax_1 = X + Y - \lambda(1-\lambda)(x_1^T Ax_1 + x_2^T Ax_2 - x_1^T Ax_2 - x_2^T Ax_1)$.

Рассмотрим $x_1^T Ax_1 + x_2^T Ax_2 - x_1^T Ax_2 - x_2^T Ax_1 = \sum a_{ij}x_i^1 x_j^1 + \sum a_{ij}x_i^2 x_j^2 - \sum a_{ij}x_i^1 x_j^2 - \sum a_{ij}x_j^1 x_i^2$, где верхний индекс означает номер. Несложно видеть, что при $i = j$ можно выделить полные квадраты разностей. С учетом того, что для положительно определенных форм выполнено: $a_{ij} \leq \frac{a_{ii}+a_{jj}}{2}$, приходим к тому, что $(1) \leq 0$, то есть множество выпукло.

8 Выпуклый, аффинный, конический

1. На семнаре было доказано, что полуплоскость является выпуклым множеством. Данное множество является пересечением полуплоскостей $a^T x \leq \beta$ и $a^T x \geq$. Так как любое конечное или бесконечное пересение выпуклых множеств выпукло, следовательно множество выпукло.

   Докажем, что не аффинно: не умаляя общности , предположим, что $, \beta > 0$, возьмем точку $x_1 : a^T x_1 = \beta$ и $x_2 : a^T x_2 =$. Рассмотрим элемент $2x_2 - x_1$:

   $2a^T x_2 - a^T x_1 = 2\beta - > \beta$. Следовательно, множество не аффинно.

   Докажем, что не конус: возьмем $\theta = 2$ и $x : a^T x = \beta$

   $\theta a^T x = 2\beta > \beta$. Следовательно, не является конусом.

2. Выпукло, так как является пересечением выпуклых множеств.

   Не аффино: возьмем $x_1 : a_1^T x_1 = b_1, x_2 : a_1^T x_2 < b_1$, пусть $\theta = 2 : 2x_1 - x_2 : 2a_1^T x_1 - a_1^T x_2 > b_1 \Rightarrow$ не аффинно.

   Не конус: $x : a_1^T x = b_1, \theta = 2$, если $b_1 > 0$ и $\theta = 0.2$, если $b_1 < 0 : \theta a_1^T x = \theta b_1 > b_1$. Если же $b_1 = 0$, то делаем аналогично для b_2.

   Если же $b_1 = 0, b_2 = 0$, то является конусом.

3. Рассмотрим сначала множество $\|x - x_0\| \leq \|x - y_0\|$, где $y_0 -$ какой-то фиксированный элемент из множества S. Очевидно, что данное множество задает гиперполуплоскость в $\mathbb{R}^{\ltimes}$. Тогда, получается, $\|x - x_0\| \leq \|x - y\|, \forall y \in S$ является пересечением полоплоскостей. Так как пересечение любого числа выпуклых множеств выпукло и так как полуплоскость является выпуклым множеством, получаем, что множество выпукло.

   Докажем, что не аффинно. $x_o \in \|x - x_0\| \leq \|x - y\|$,пусть $P_{x_0}-$ проекция x_0 на множество S. Пусть x_1 - это середина отрезка, соединяющего P_{x_0} и x_0, то есть $x = (P_{x_0} - x_0)/2 + x_0 =$

$(P_{x_0}+x_0)/2$. Рассмотрим элемент $2x-x_0=P_{x_0}$. Очевидно, что не лежит во множестве, следовательно, не аффинно.

Докажем, что не конус. Для этого возьмем $x:\|x-x_0\|=\|x-y\|, y \in S$ (на границе). Тогда существует такое $\lambda>0$,для которого не выполнено $\|\lambda x-x_0\| \leq \|\lambda x-y\|$, (берем λ таким, чтобы сдвинуть точку x ближе к множеству S). То есть множество не является конусом.

4. Докажем, что пересечение любого конечного или бесконечного числа аффиных множеств является аффинным.

   Пусть $\{X_n\}-$ аффинные множества. Рассмотрим их счетное пересечение $\overset{n=1}{\underset{\infty}{\cap}} X_n$. Если пересечение пусто, то утверждение верно, так как пустое множество является аффиным. Пусть $x_1, x_2 \in \overset{n=1}{\underset{\infty}{\cap}} X_n$, тогда x_1, x_2 пренадлежат всем $X_i, i \in \overline{1,n}$. Тогда $\lambda x_1+(1-\lambda)x_2 \in X_i, i \in \overline{1,n}$, так как все X_i аффинны по построению. Следовательно, $\lambda x_1+(1-\lambda)x_2 \in \overset{n=1}{\underset{\infty}{\cap}} X_n$.

5. Докажем, что пересечение любого числа выпуклым конусов, выпуклый конус.

   Так как пересечение любого числа выпуклых мнжеств является выпуклым множеством, то осталось доказать, что множество, полученное пересечением выпуклых конусов остается конусом. Действуем аналогично предыдущему пункту. Получаем, что утверждение верно.

9 Сумма Минковского

1. Необходимо найти сумму Минковского множеств: $M_1=\{x|x_1^2+x_2^2=1\}, M_2=\{x|x_1^2+x_2^2=4\}$. ${x_{max}}_1^2+{x_{max}}_2^2=9, {x_{min}}_1^2+{x_{min}}_2^2=1$. Не сложно заметить, что $M=M_1+M_2$ - это кольцо $K=\{x|1 \leq x_1^2+x_2^2 \leq 9\}$.

2. Возьмем за множество $A=\{\|x\|_2=1\}$ - окружность с центром в 0 и радиусом 1. $B=\{\|x\|_2 \leq 1\}$ - круг с центром в 0 и радиусом 1. Очевидно, что множество A не выпукло, но $A+B=B$ - выпукло.

10

1.

2. Найти проекцию матрицы $A \in S^n$ на конус S_+^n.

   Так как А - симметричная, следовательно, имеет базис из собственных векторов и может быть приведена к диагональному виду:$A=ULU^T$, где U - ортогональная матрица. Пусть $\{\lambda\}_i^n$ - собственные значения и пусть матрица L такова, что $\lambda_1 \geq \ldots 0 \geq \lambda_m \cdots \geq \lambda_n$. Докажем, что $Pr=U\tilde{L}U^T$ будет проекцией (если все собственные числа матрицы больше 0, следовательно, $A \in S_+^n$). Критерий:$\langle X-Pr, Pr-A\rangle \geq 0$. Поопределению скалярного произведения матриц: $\langle X-Pr, Pr-A\rangle = tr(X^TPr)-tr(X^TA)-\|Pr\|_F^2-tr(Pr^TA) = tr(UIU^TU\tilde{L}U^T)-tr(UIU^TULU^T)-tr(U\tilde{L}^2U^T)-tr(U\tilde{L}U^TULU^T) = tr(IL)-tr(\tilde{L}^2)-tr(IL)+tr(\tilde{L}L) = tr(I(\tilde{L}-L))$. Матрица $X \in S_+^n$, поэтому все ее собственные числа не отрицательны. $\tilde{L}-L=diag(0,0,\ldots,-\lambda_{m+1},\ldots,-\lambda_n)$. Следовательно, по критерию проекции получаем, что $Pr=U\tilde{L}U^T$ - проекция.

3. Данное множество в пространсве - это "угол"из двух плоскостей. Очевидно, что его аффинная оболочка есть $\mathbb{R}^3$. Следовательно, $relint\ G=\emptyset$.

11 Марковские цепи

Чтобы доказать, что у матрицы P максимальное собственное значение равно 1, достаточно доказать данное утверждение для матрицы P^T, так как их собственные числа совпадают. Предположим, что существует $\lambda \in R \hookrightarrow |\lambda|>1$ и пусть x - это собственный вектор, отвечающий данному собственному значнию. $P^T x = \lambda x$, тогда $|\lambda x_j| = |\sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_j| \leq max|x_j| \sum |p_{ij}| = max|x_j|$. Получаем, что $|\lambda||x_j| \leq max|x_i|$. Но так как $|\lambda| > 1 \Rightarrow$ получаем противоречие. Сделовательно, максимальное собственное значение равно единице, так как $P^T \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1}$.

По лемме Фаркаша система $Px = x, x_i \geq 0$ совместна тогда и только тогда, когда не совместна система $y^T P \geq 0, \langle y, x \rangle$ не совместна.

1. Пусть некоторая система S может находиться в одном из состояний конечного (или счетного) множества возможных состояний $S_1, S_2, \ldots, S_n$, а переход из одного состояния в другое возможен только в определенные дискретные моменты времени $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$ называемые шагами.

   Если система переходит из одного состояния в другое случайно, то говорят, что имеет место случайный процесс с дискретным временем.

   Случайный процесс называется марковским, если вероятность перехода из любого состояния S_i в любое состояние S_j не зависит от того, как и когда система S попала в состояние S_i (т.е. в системе S отсутствует последствие). В таком случае говорят, что функционирование системы S описывается дискретной цепью Маркова.

2. PageRank – это алгоритм ссылочного ранжирования, разработанный для определения относительной важности объекта, связанного с сетью объектов. Чем больше ссылок на страницу, тем она важнее. Кроме того, вес страницы А определяется весом ссылки, передаваемой страницей B. Таким образом, PageRank — это метод вычисления веса страницы путём подсчёта важности ссылок на неё.

3. Дословные перевод - ранг страницы. Что логично, так как алгоритм ранжирует страницы по важности, то есть по количеству ссылок на нее. То есть каждая страница получает, условно говоря, некий ранг.

4. (https://habr.com/ru/post/455762/) PageRank пытается решить следующую задачу: как нам ранжировать имеющееся множество (мы можем допустить, что это множество уже отфильтровано, например, по какому-то запросу) с помощью уже существующих между страницами ссылок?

   Чтобы решить эту задачу и иметь возможность отранжировать страницы, PageRank приблизительно выполняет следующий процесс. Мы считаем, что произвольный пользователь Интернета в исходный момент времени находится на одной из страниц. Затем этот пользователь начинает случайным образом начинает перемещаться, щёлкая на каждой странице по одной из ссылок, которые ведут на другую страницу рассматриваемого множества (предполагается, что все ссылки, ведущие вне этих страниц, запрещены). На любой странице все допустимые ссылки имеют одинаковую вероятность нажатия.

   Так мы задаём цепь Маркова: страницы — это возможные состояния, переходные вероятности задаются ссылками со страницы на страницу (взвешенными таким образом, что на каждой странице все связанные страницы имеют одинаковую вероятность выбора), а свойства отсутствия памяти чётко определяются поведением пользователя. Если также предположить, что заданная цепь положительно возвратная и апериодичная (для удовлетворения этим требованиям применяются небольшие хитрости), тогда в длительной перспективе распределение вероятностей «текущей страницы» сходится к стационарному распределению. То есть какой бы ни была начальная страница, спустя длительное время каждая страница имеет вероятность (почти фиксированную) стать текущей, если мы выбираем случайный момент времени.

   В основе PageRank лежит такая гипотеза: наиболее вероятные страницы в стационарном распределении должны быть также и самыми важными (мы посещаем эти страницы часто, потому что они получают ссылки со страниц, которые в процессе переходов тоже часто посещаются). Тогда стационарное распределение вероятностей определяет для каждого состояния значение PageRank.

12 Альтернатива Фредгольма

Чтобы использовать лемму Фаркаша, нам нужно переписать уравнение $Ax = b$ так, чтобы получить уравнение с ограничениями . Введем две новые переменные $u \geq 0$ и $v \geq 0$, $x + v = u$. Тогда $A(u - v) = b$. Будем искать решение $\begin{pmatrix} A & -A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix}^T \geq 0$.

По лемме Фаркаша система совместна тогда и только тогда, когда система $y^T \begin{pmatrix} A, & -A \end{pmatrix} \geq 0$, $y^T b < 0$ не совместна. $y^T A \geq 0, -y^T A \geq 0 \Rightarrow y^T A = 0$. То есть исходная система соместна тогда и только тогда, когда не совместна система $y^T A = 0, y^T b < 0$. Подставляя $-y$ получаем $y^T A = 0, y^T b$ не равно 0. Утверждение доказано.

13 Сопряги это

1. $\{0\}$

   Данное множество - конус, поэтому мопряженное множество $M = \{p | p^T x, x \in \{0\}\}$. Очевидно, что $M = R^n$.

2. $X = \{Ax | x_i \geq 0, x \in R^n\}$.

   Докажем, что множество $X-$ конус. $A\theta x = \theta Ax \in X$. Докажем, что множество $M = \{A^T p \geq 0\}$ есть сопряженное.

   1) Пусть p в сопряженном множество. Тогда $(p, Ax) \geq 0, (A^T p, x) \geq 0$, так как $x_i 0 \Rightarrow A^T p \geq 0$. Следовательно, $p \in M \Rightarrow X^* \in M$.

   2) В обратную строну, пусть существует $p \in M : p \in \overline{X^*}$. Тогда $(p, Ax) < 0 \Rightarrow (A^T p, x) < 0$, так как $x_i \geq 0$, получаем противоречие условию $A^T p \geq 0$.

3. $X = \{x | x = x_0 + \lambda s, s \in R^n, \lambda \in R\}$

   X - прямая в пространстве. По определению сопряженного множества: $X^* = \{p | \langle p, x_0 \rangle + \lambda \langle p, s \rangle \geq -1\}$. То есть $\forall p \in X^* \hookrightarrow \langle p, x_0 \rangle + \lambda \langle p, s \rangle \geq -1, \ \forall \lambda \in R$. Так как коэффицент λ произволен, следовательно, $\langle p, s \rangle = 0$. Получаем $X^* \subset \{p | \langle p, x_0 \rangle \geq -1, \langle p, s \rangle = 0\}$. С другой стороны, $\forall p \in \{p | \langle p, x_0 \rangle \geq -1, \langle p, s \rangle = 0\} \hookrightarrow \{p | \langle p, x_0 \rangle + \lambda \langle p, s \rangle \geq -1\} \Rightarrow \{p | \langle p, x_0 \rangle \geq -1, \langle p, s \rangle = 0\} \subset X^*$. Получаем, $X^* = \{p | \langle p, x_0 \rangle \geq -1, \langle p, s \rangle = 0\}$.

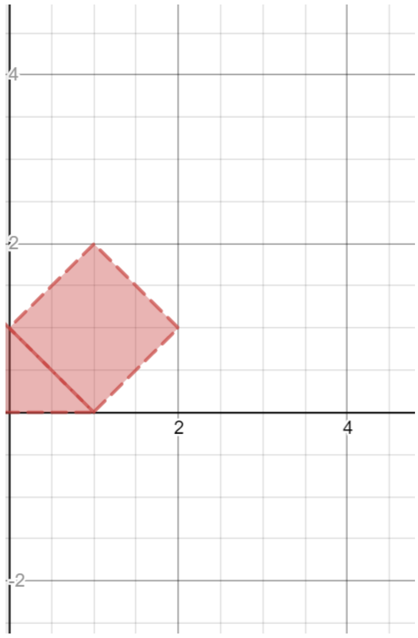
4. Докажем, что $X^* = \{\|x\|_\infty \leq 1\} = M$. Сначала докажем, что $\forall y \notin M \hookrightarrow y \notin X^*$. $y \notin M \Rightarrow \exists i \in \overline{1, n} : |y_i| > 1$. Возьмем $x = (0, 0, \ldots, -sign(y_i), \ldots, 0)$. Тогда $y^T x < -1 \Rightarrow y \notin X^* \Rightarrow X^* \subset M$.

   Докажем обратное вложение: $y \in M, x \in X : y^T x = \sum y_i x_i \geq \sum -sign(x_i) x_i \geq -\sum |x_i| \geq -1 \Rightarrow M \subset X^*$.

   Получаем, $M = X^* = \{\|x\|_\infty \leq 1\}$.

5. $G = \{x \in \mathbb{R}^2 | |x_1 - 1|^{1/5} + |x_2 - 1|^{1/5} \le 1\}$

На рисинке ниже изображено множество $cl(conv(G \cup 0))$.



$G^* = cl(conv(G \cup \{0\}))^*$. $G^{**} = cl(conv(G \cup \{0\})) = \{x | x \ge 0, \|x\|_1 \le 1\} \cup \{x | \|x - 1\|_1 \le 1\}$. Докажем, что $G^* = G^{***}$. Для этого достаточно доказать, что G^* является выпуклым замкнутым множеством, содержащее начало коортинат. Очевидно, $0 \in G^*$. Рассмотрим $x_1, x_2 \in G^*$. $\forall y \in G \hookrightarrow \langle \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, y\rangle = \lambda\langle x_1, y\rangle + (1-\lambda)\langle x_2, y\rangle \ge -\lambda - 1 + \lambda \Rightarrow G^*$ выпукло. Докажем, что оно также замкнуто, то есть содержит все свои предельные точки. Для этого возьмем последовательность $z_k \in G^*$, $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = z_0$. $\langle z_k, y\rangle \ge -1 \Rightarrow \langle z_0, y\rangle \ge -1 \Rightarrow$ G^* замкнуто. Доказали, что $G^* = G^{***}$.

Теперь найдем $G^* = G^{***} = cl(conv(G \cup \{0\}))^*$. По определению сопряженного множества: $G^* = \{p | \langle p, y\rangle \ge -1, \forall y \in G^{**}\}$. Следовательно, для любого вектора p сумма произведений координат вектора на координаты вершин многогранника должно быть не меньше -1. $M = \{p | p_2 \ge -1, p_1 + 2p_2 \ge -1, 2p_1 + p_2 \ge -1\ p_1 \ge -1\}$.