Лекция 2. Комбинаторика. Свойства биномиальных коэффициентов. Подсчет сумм и метод производящих функций. Полиномиальные коэффициенты. Оценки биномиальных и полиномиальных коэффициентов. Асимптотические оценки биномиальных коэффициентов и их сумм.

Лектор - доцент Селезнева Светлана Николаевна

Лекции по “Дискретным моделям”.
Магистратура, 1-й курс,
факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте http://mathcyb.cs.msu.su

Биномиальные коэффициенты

Напомним, что **биномиальный коэффициент** C_n^k равен числу сочетаний из n по k. Другое обозначение: $\binom{n}{k}$.

По теореме 1.4 верно $C_n^k = \frac{(n)_k}{k!}$.
Откуда получаем

$$\frac{(n)_k}{k!} = \frac{(n)_k \cdot (n-k)!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Следовательно,

Свойство 2.1. *Для всех* $0 \leq k \leq n$ *верно* $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Последовательности биномиальных коэффициентов

Теорема 2.2. *При каждом $n \geq 1$ (конечная) последовательность биномиальных коэффициентов*

$$C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^r, \ldots, C_n^{n-1}, C_n^n$$

возрастает, если $r < \frac{n-1}{2}$, и убывает, если $r > \frac{n-1}{2}$.

Доказательство. Рассмотрим отношение $\frac{C_n^{r+1}}{C_n^r}$, $0 \leq r \leq n-1$:

$$\frac{C_n^{r+1}}{C_n^r} = \frac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!} : \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n-r}{r+1}.$$

Определим, когда это отношение больше единицы:

$$\frac{n-r}{r+1} > 1, \text{ если } r < \frac{n-1}{2}.$$

Последовательности биномиальных коэффициентов

Доказательство (продолжение). Получаем, что
при $r < \frac{n-1}{2}$ последовательность возрастает,
при $r > \frac{n-1}{2}$ последовательность убывает.

$\square$

Пример 2.1.
Пусть $n = 3$. Тогда последовательность такова: $1, \ 3, \ 3, \ 1$.
Пусть $n = 4$. Тогда последовательность такова: $1, \ 4, \ 6, \ 4, \ 1$.

Максимальные значения

Следствие 2.2.1. *При четных значениях n максимальное значение среди биномиальных коэффициентов C_n^r, $r = 0, 1, \ldots, n$, достигается только при $r = \frac{n}{2}$;*

при нечетных значениях n максимальное значение среди биномиальных коэффициентов C_n^r, $r = 0, 1, \ldots, n$, достигается при $r = \frac{n-1}{2}$ и при $r = \frac{n+1}{2}$.

Доказательство. По теореме 2.2 если $n \geq 1$, то при $r < \frac{n-1}{2}$ последовательность C_n^r, $r = 0, 1, \ldots, n$, возрастает и при $r > \frac{n-1}{2}$ последовательность C_n^r, $r = 0, 1, \ldots, n$, убывает.

Максимальные значения

Доказательство. Если значение n четно, то число $\frac{n-1}{2}$ нецелое; поэтому максимальное значение достигается при $r = \lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor + 1 = \frac{n}{2}$;

если значение n нечетно, то число $\frac{n-1}{2}$ целое; следовательно, $C_n^{\frac{n-1}{2}} = C_n^{\frac{n+1}{2}}$, и максимальное значение достигается при $r = \frac{n-1}{2}$ и при $r = \frac{n+1}{2}$.

$\square$

Следствие 2.2.2. *Для всех $n \geq 1$ и $0 \leq r \leq n$ верно $C_n^r \leq C_n^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}$.*

Суммы биномиальных коэффициентов

Напомним формулу бинома Ньютона (теорема 1.5):

При $n \geq 1$ *верно* $(x+y)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k$.

Из нее следуют два свойства сумм биномиальных коэффициентов:

Теорема 2.3. *Для всех* $n \geq 1$ *верно*

1. $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$.

2. $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$.

Доказательство.

1. $(1+1)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$.

2. $(1+(-1))^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k = 0$. $\square$

Подсчет сумм биномиальных коэффициентов

Можно находить значения других сумм биномиальных коэффициентов, сводя их к суммам теорем 1.5 и 2.3.

Пример 2.2. Найти значение суммы $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^k$, где $a \in \mathbb{R}$.

Например, если $n = 2$, $a = 2$, то надо найти значение суммы $C_2^0 \cdot 2^0 + C_2^1 \cdot 2^1 + C_2^2 \cdot 2^2 = 1 + 4 + 4 = 9$.

Решение. Несложно заметить, что указанная сумма непосредственно сворачивается по теореме 1.5:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^k \cdot 1^{n-k} = (a+1)^n.$$

Подсчет сумм биномиальных коэффициентов

Пример 2.3. Найти значение суммы $\sum\limits_{k=0}^{n} k \cdot C_n^k$.

Например, если $n = 3$, то надо найти значение суммы $0 \cdot C_3^0 + 1 \cdot C_3^1 + 2 \cdot C_3^2 + 3 \cdot C_3^3 = 0 + 3 + 6 + 3 = 12$.

Решение. Заметим, что при $k \geq 1$ верно

$$k \cdot C_n^k = k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} =$$

$$= n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = n \cdot C_{n-1}^{k-1}.$$

Слагаемое при $k = 0$ обнуляется. Поэтому, получаем

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot C_n^k = \sum_{k=1}^{n} k \cdot C_n^k = \sum_{k=1}^{n} n \cdot C_{n-1}^{k-1} = n \cdot \sum_{l=0}^{n-1} C_{n-1}^{l} = n \cdot 2^{n-1}.$$

Подсчет сумм биномиальных коэффициентов

Пример 2.4. Найти значение суммы $\sum\limits_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^{2k}$.

Например, если $n = 4$, то надо найти значение суммы
$C_4^0 + C_4^2 + C_4^4 = 1 + 6 + 1 = 8$.
Если $n = 5$, то надо найти значение суммы
$C_5^0 + C_5^2 + C_5^4 = 1 + 10 + 5 = 16$.

Решение. По теореме 2.3 (п. 2) верно $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$.

Поэтому $\sum\limits_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^{2k} = \sum\limits_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^{2k+1}$.
Следовательно,

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^{2k} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} C_n^k = \frac{1}{2} \cdot 2^n = 2^{n-1}.$$

Производящие функции

Одним из методов получения значения комбинаторных сумм и тождеств является метод **производящих функций**.

Для последовательности чисел $\{a_n\}$ (конечной или бесконечной) рассмотрим формальную сумму (конечную или бесконечную) $\sum a_n x^n$, где $x \in \mathbb{R}$.

Если последовательность $\{a_n\}$ конечна, то эта сумма всегда определяет функцию

$$F(x) = \sum a_n x^n,$$

которая называется **производящей функцией** для последовательности $\{a_n\}$.

Рассмотрим пример подсчета комбинаторной суммы при помощи производящей функции.

Применение производящих функций

Вернемся к **примеру 2.3**: нам надо найти значение суммы $\sum\limits_{k=0}^{n} k \cdot C_n^k$.

Решение. Рассмотрим конечную последовательность биномиальных коэффициентов $C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^n$ и ее производящую функцию $F(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^k$. Из примера 2.2 следует, что $F(x) = (x+1)^n$.

Функция $F(x)$ дифференцируема в $\mathbb{R}$. Найдем ее производную.

С одной стороны, $F'(x) = ((x+1)^n)' = n(x+1)^{n-1}$.

С другой стороны, $F'(x) = \left(\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^k\right)' = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k k x^{k-1}$.

Подставляя в оба полученные выражения для производной $F'(x)$ значение $x = 1$, получаем $\sum\limits_{k=0}^{n} k \cdot C_n^k = n \cdot 2^{n-1}$.

Обобщение формулы бинома Ньютона

А можно ли найти формулу для степени суммы вида $(x_1 + \dots + x_m)^n$, аналогичную формуле бинома Ньютона?

Интуитивно кажется, что можно. И в самом деле это так.

Теорема 2.4'. *Для всех* $n \geq 1$, $m \geq 2$ *верно* $(x_1 + \dots + x_m)^n =$

$$\sum_{k_1=0}^{n} \sum_{k_2=0}^{n-k_1} \cdots \sum_{k_{m-1}=0}^{n-k_1-\dots-k_{m-2}} C_n^{k_1} C_{n-k_1}^{k_2} \dots C_{n-k_1-\dots-k_{m-2}}^{k_{m-1}} x_1^{k_1} \dots x_{m-1}^{k_{m-1}} x_m^{k_m},$$

где $k_m = n - k_1 - \dots - k_{m-2} - k_{m-1}$.

Доказательство можно провести индукцией по m, применяя формулу бинома Ньютона (теорему 1.5).

□

Преобразование коэффициентов

Рассмотрим подробнее коэффициент при степенях переменных. Воспользуемся формулой $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ и проведем цепочку рассуждений:

$$C_n^{k_1} C_{n-k_1}^{k_2} \dots C_{n-k_1-\dots-k_{m-2}}^{k_{m-1}} = \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!} \cdot \frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2)!} \dots$$

$$\dots \frac{(n-k_1-\dots-k_{m-2})!}{k_{m-1}!(n-k_1-\dots-k_{m-2}-k_{m-1})!} = \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_{m-1}!k_m!},$$

где $k_m = n - k_1 - \dots - k_{m-2} - k_{m-1}$.

Т.е.

$$C_n^{k_1} C_{n-k_1}^{k_2} \dots C_{n-k_1-\dots-k_{m-2}}^{k_{m-1}} = \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_{m-1}!k_m!}.$$

Полученное равенство можно строго доказать индукцией по m.

Полиномиальные коэффициенты

Комбинаторное число $\frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_{m-1}!k_m!}$, где $n \geq 1$, $0 \leq k_1, \ldots, k_m \leq n$ и $\sum\limits_{i=1}^{m} k_i = n$, называется **полиномиальным коэффициентом** и обозначается $C(k_1, \ldots, k_m)$.

Т.е.

$$C(k_1, \ldots, k_m) = \frac{(k_1 + \cdots + k_m)!}{k_1!k_2! \ldots k_{m-1}!k_m!}.$$

Через полиномиальные коэффициенты формулу из теоремы 2.4' можно переписать в следующем виде.

Теорема 2.4. *Для всех* $n \geq 1$, $m \geq 2$ *верно*

$$(x_1 + \cdots + x_m)^n = \sum_{\substack{k_1, \ldots, k_m \geq 0, \\ k_1 + \cdots + k_m = n}} C(k_1, \ldots, k_m)\, x_1^{k_1} \ldots x_m^{k_m}.$$

Формула квадрата суммы трех переменных

Пример 2.5. Найдем формулу для выражения $(x+y+z)^2$.

Решение. В соответствии с теоремой 2.4 сначала нам нужно найти всевозможные разбиения числа $n=2$ на *упорядоченные* суммы трех $(m=3)$ неотрицательных чисел.

Таких разбиений шесть:
$2 = 0{+}0{+}2 = 0{+}1{+}1 = 0{+}2{+}0 = 1{+}0{+}1 = 1{+}1{+}0 = 2{+}0{+}0.$

Теперь для каждой суммы надо найти соответствующий полиномиальный коэффициент:

$$C(0,0,2) = C(0,2,0) = C(2,0,0) = \frac{2!}{0!0!2!} = 1;$$
$$C(0,1,1) = C(1,0,1) = C(1,1,0) = \frac{2!}{0!1!1!} = 2.$$

Следовательно, получаем формулу

$$(x+y+z)^2 = z^2 + 2yz + y^2 + 2xz + 2xy + x^2.$$

Сумма полиномиальных коэффициентов

Аналогично теореме 2.3 можно получить значение суммы полиномиальных коэффициентов.

Теорема 2.5. *Для всех* $n \geq 1$, $m \geq 2$ *верно*

$$\sum_{\substack{k_1, \ldots, k_m \geq 0, \\ k_1 + \cdots + k_m = n}} C(k_1, \ldots, k_m) = m^n.$$

Доказательство. Подставим в формулу из теоремы 2.4 значения $x_1 = \cdots = x_n = 1$.

$\square$

Число полиномиальных коэффициентов

Несложно увидеть, что в сумме $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k$ слагаемых в точности $n+1$.

А сколько слагаемых в сумме $\sum\limits_{\substack{k_1,\ldots,k_m \geq 0, \\ k_1+\cdots+k_m=n}} C(k_1,\ldots,k_m)$?

Понятно, что их столько же, сколько разбиений числа n на *упорядоченные* суммы m неотрицательных чисел.

А их столько же, сколько **сочетаний с повторениями** из m элементов по n (Почему?). Следовательно, верно следующее

Свойство 2.6. *При каждых $n \geq 1$, $m \geq 2$ число полиномиальных коэффициентов $C(k_1,\ldots,k_m)$ при $k_1+\cdots+k_m=n$, $k_1,\ldots,k_m \geq 0$, равно $\bar{C}_m^n$.*

Число полиномиальных коэффициентов

Пример 2.6. При помощи теоремы 1.7 и свойства 2.6 найдем число полиномиальных коэффициентов при некоторых n и m.

1. Для $n = 2$ и $m = 3$ (пример 2.5) получаем:
$\bar{C}_3^2 = C_{3+2-1}^2 = C_4^2 = 6$.

2. Для $n = 3$ и $m = 3$ получаем: $\bar{C}_3^3 = C_{3+3-1}^3 = C_5^3 = \frac{5\cdot 4}{2!} = 10$.

Изучение комбинаторных чисел

Точные формулы для нахождения биномиальных или полиномиальных коэффициентов, других комбинаторных чисел не всегда позволяют **качественно** оценить их значения.

Иногда важно знать верхнюю или нижнюю оценки комбинаторных чисел, а иногда необходимы их **порядок** или **асимптотика**.

Оценки биномиальных коэффициентов

Теорема 2.7. *Для всех $n \geq 1$, $0 \leq k \leq n$ C_n^k верно $C_n^k \leq \frac{n^n}{k^k(n-k)^{n-k}}$ (по определению полагаем, что $0^0 = 1$).*

Доказательство. Сначала заметим, что для всех $n \geq 1$ верно $C_n^0 = 1 \leq \frac{n^n}{n^n \cdot 1^1} = 1$, т.е. при $k = 0$ утверждение теоремы 2.4 верно.

Доказательство для $n \geq 1$ при всех k, $1 \leq k \leq n$ проведем индукцией по значению n.

Базис индукции. Если $n = 1$, то $C_n^1 = 1 \leq \frac{1^1}{0^0 \cdot 1^1} = 1$.

Индуктивный переход. Предположим, что для некоторого $n \geq 1$ при всех k, $1 \leq k \leq n$, утверждение теоремы 2.1 верно. Рассмотрим $n+1$. Тогда

$$C_{n+1}^k = \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = \frac{n+1}{k} \cdot \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{n+1}{k} \cdot C_n^{k-1}.$$

Оценки биномиальных коэффициентов

Доказательство (продолжение). Воспользуемся предположением индукции, что $C_n^{k-1} \leq \frac{n^n}{(k-1)^{k-1}(n-k+1)^{n-k+1}}$, и проведем рассуждения:

$$\frac{n+1}{k} \cdot C_n^{k-1} \leq \frac{n+1}{k} \cdot \frac{n^n}{(k-1)^{k-1}(n-k+1)^{n-k+1}} \cdot \frac{(n+1)^n}{(n+1)^n} \cdot \frac{k^k}{k^k} =$$

$$= \frac{(n+1)^{n+1}}{k^k(n-k+1)^{n-k+1}} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{k^{k-1}}{(k-1)^{k-1}} =$$

$$= \frac{(n+1)^{n+1}}{k^k(n-k+1)^{n-k+1}} \cdot \frac{\left(1+\frac{1}{k-1}\right)^{k-1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \leq \frac{(n+1)^{n+1}}{k^k(n-k+1)^{n-k+1}}.$$

В завершающем переходе мы воспользовались тем, что последовательность $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ возрастает. $\square$

Оценки полиномиальных коэффициентов

Следствие 2.7.1. *Для всех* $m \geq 2$ *и* $k_1, \ldots, k_m \geq 0$ *верно*

$$C(k_1, \ldots, k_m) \leq \frac{(k_1 + \cdots + k_m)^{k_1 + \cdots + k_m}}{k_1^{k_1} \ldots k_m^{k_m}}$$

(*по определению полагаем, что* $0^0 = 1$).

Доказательство можно провести индукцией по m.
Базис индукции: $m = 2$ составляет теорема 2.7.

$\square$

Исследование полученных оценок

Сложно понять, насколько верхние оценки, полученные в теореме 2.7 и следствии 2.7.1 точны.

Например, если n – четное число, и $k = \frac{n}{2}$, по теореме 2.7 находим

$$C_n^{\frac{n}{2}} \leq \frac{n^n}{\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}} = 2^n.$$

Т.е. оценка достаточно "груба", т.к. мы знаем, что

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \leq 2^n.$$

Иногда требуются более "тонкие" оценки. Они, как правило, асимптотические.

O-символика

Напомним некоторые определения из математического анализа. Мы будем изучать поведение функций натурального аргумента n при $n \to \infty$.

Пишут $\varphi(n) = O(\psi(n))$, если существует такая положительная константа C, что $\varphi(n) \leq C \cdot \psi(n)$.

Если одновременно выполняются условия $\varphi(n) = O(\psi(n))$ и $\psi(n) = O(\varphi(n))$, то говорят, что функции $\varphi(n)$ и $\psi(n)$ имеют **одинаковый порядок (равны по порядку)**, и пишут $\varphi(n) \asymp \psi(n)$.

Пишут $\varphi(n) = o(\psi(n))$, если существует такая функция $\chi(n)$, $\chi(n) \to 0$ при $n \to \infty$, что $\varphi(n) = \chi(n) \cdot \psi(n)$.

Говорят, что функции $\varphi(n)$ и $\psi(n)$ **эквивалентны (асимптотически равны)**, и пишут $\varphi(n) \sim \psi(n)$, если $\varphi(n) = \psi(n) + o(\psi(n))$.

Асимптотика биномиальных коэффициентов

Находят **асимтотику** или хотя бы **порядок** комбинаторных чисел.

Например, для биномиальных коэффициентов выполняются

Теорема 2.8. *При $k \to \infty$ и $n - k \to \infty$ верно*

$$C_n^k \sim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi k(n-k)}} \cdot \frac{n^n}{k^k(n-k)^{n-k}}.$$

Следствие 2.8.1. *При $n \to \infty$ для четных значений n верно*

$$C_n^{\frac{n}{2}} \sim \frac{2^n}{\sqrt{\pi \frac{n}{2}}}.$$

Асимптотика сумм биномиальных коэффициентов

Теорема 2.9. *Если $\varphi(n)$ – произвольная сколь угодно медленно растущая функция натурального аргумента, то*

$$\sum_{k=\lfloor\frac{n}{2}\rfloor-\varphi(n)\sqrt{n}}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+\varphi(n)\sqrt{n}} C_n^k \sim 2^n.$$

Доказательство. Пусть $K < \lfloor\frac{n}{2}\rfloor$. Рассмотрим сумму $\sum\limits_{k=0}^{K} C_n^k$.

Сначала заметим, что для произвольного k, $0 \leq k < K$, верно

$$\frac{C_n^k}{C_n^K} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{K!(n-K)!}{n!} =$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)\dots K}{(n-K+1)(n-K+2)\dots(n-k)} \leq \left(\frac{K}{n-K}\right)^{K-k}.$$

Асимптотика сумм биномиальных коэффициентов

Доказательство (продолжение). Т.к. $K < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, верно $\frac{K}{n-K} < 1$. Тогда

$$\sum_{k=0}^{K} C_n^k = C_n^K + C_n^{K-1} + \dots \le C_n^K \left(1 + \left(\frac{K}{n-K}\right) + \left(\frac{K}{n-K}\right)^2 \dots\right).$$

В больших скобках стоит сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $\frac{K}{n-K} < 1$. Найдем ее:

$$\frac{1}{1 - \frac{K}{n-K}} = \frac{n-K}{n-2K}.$$

Откуда получаем оценку:

$$\sum_{k=0}^{K} C_n^k \le C_n^K \cdot \frac{n-K}{n-2K}.$$

Асимптотика сумм биномиальных коэффициентов

Доказательство (продолжение). С другой стороны, пользуясь свойством 2.1 и следствием 2.2.1, получаем $C_n^K \cdot (n-2K) = \underbrace{C_n^K + \cdots + C_n^K}_{n-2K} \le C_n^K + C_n^{K+1} + \cdots + C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + \cdots + C_n^{n-K} \le 2^n$

Получили оценку:

$$\sum_{k=0}^{K} C_n^k \le 2^n \cdot \frac{n-K}{(n-2K)^2}.$$

Теперь, если $K = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - \varphi(n)\sqrt{n} - 1$, то при $n \to \infty$ верно $\sum\limits_{k=0}^{K} C_n^k = o(2^n)$. А по свойству 2.1 верно $\sum\limits_{k=n-K}^{n} C_n^k = o(2^n)$.

Этим завершается доказательство теоремы 2.9 (Почему?).

$\square$

Как распределяются значения биномиальных коэффициентов?

Теорема 2.9 имеет простой содержательный смысл: в значение суммы всех биномиальных коэффициентов при достаточно больших n основной вклад вносят коэффициенты с большим значением k (примерно половина n плюс-минус корень из n).

И наоборот, коэффициенты с малым значением k никакого существенного вклада в значение суммы не вносят (они все есть всего лишь o-маленькое от 2^n).

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти значение суммы $\sum\limits_{k=0}^{n} k(k-1)C_n^k$.

2. Найти значение суммы $\sum\limits_{k=0}^{n} k2^k$.

Литература к лекции 2

1. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М.: Высшая школа, 2001. Ч. II, с. 197-200, 202-214.

2. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по дискретной математике. М.: Физматлит, 2004. Гл. VIII 1.13, 1.18, 3.10.

3. Селезнева С.Н. Основы дискретной математики. М.: МАКС Пресс, 2010 (http://mathcyb.cs.msu.su/paper/selezn/selezn-odm.pdf). Ч. 2.3, с. 28-31.

Конец лекции 2