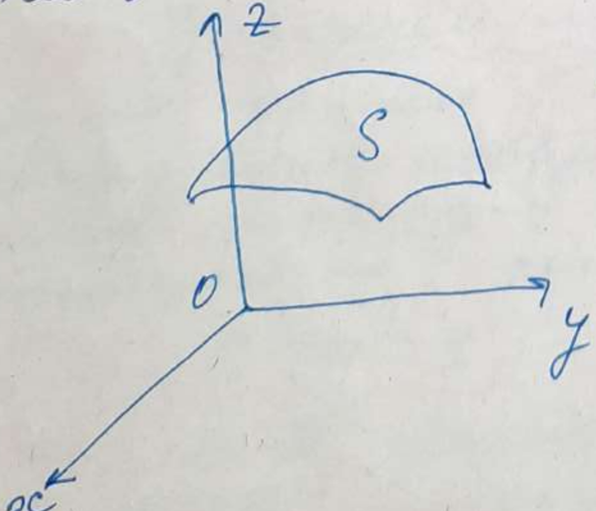
Лекция №4

Элементы аналитической геометрии.

§1. Понятие об уравнении линии на плоскости и поверхности в пространстве, и линии в пространстве.

Прежде чем приступить к изучению конкретных геометрических объектов и их свойств, отметим, что аналитическая геометрия рассматривает уравнение этих объектов в координатном пространстве $\mathbb{R}^3$ (или $\mathbb{R}^2$), т.е. в некоторой 3^x-мерной декартовой системе координат $Oxyz$ (или Oxy). Причём, под уравнением геометрических объектов (прямой, плоскости, гиперболы, конуса, сферы и т.д.) мы будем понимать всякое уравнение, устанавливающее связь между координатами (x, y, z) всех точек, принадлежащих данному геометрическому объекту. Итак, аналитическая геометрия изучает геометрические объекты и их св-ва аналитически, т.е. путём анализа их уравнений.



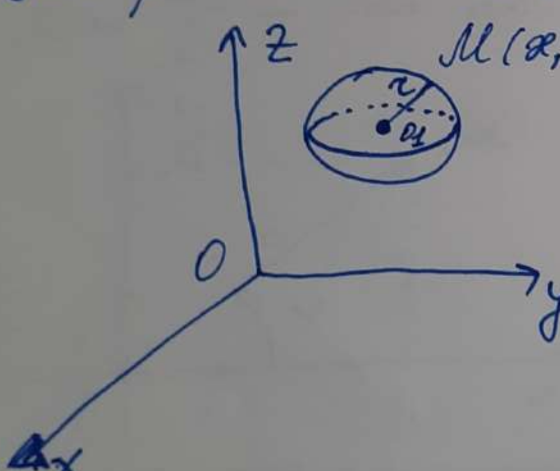
$\exists$ задана прямоугольная система координат $Oxyz$, произвольная поверхность S и уравнение

$$\boxed{F(x, y, z) = 0} \quad (1)$$

Опр говорят, что уравнение (1) является уравнением поверхности S в заданной системе координат, если ему удовлетворяют координаты $\forall$ т. $M(x, y, z) \in S$ и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на этой поверхности.

Т. о., поверхность S есть множество точек, координаты которых удовл-т ур-нию (1). Переменные x, y и z в ур-нии (1) наз-ся текущими координатами точек пов-ти.

Пр-р $\exists$ в $\mathbb{R}^3$ задана декартова прямоугольная система координат. $\exists$ сферу радиуса r с центром в т. $O_1(a, b, c)$.



$M(x, y, z)$ $\quad |\overline{O_1M}| = r$ или

$$r = \sqrt{\overline{O_1M} \cdot \overline{O_1M}} = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$$

— уравнение сферы в ДПСК.

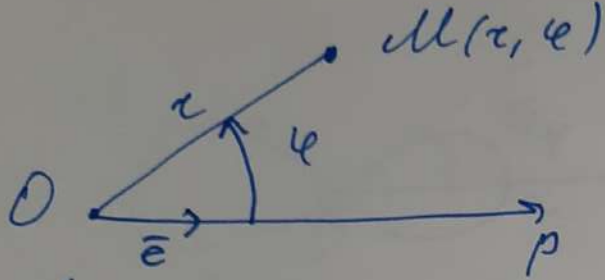
Опр Уравнением линии на плоскости Oxy наз-ся ур-ние $\boxed{F(x, y) = 0}$ (2), которому удовлетворяют координаты x и y $\forall$ точки линии и не уд-т координаты $\forall$ точки, не лежащей на этой линии.

Пр-р $\boxed{x^2 + y^2 = 1.}$

Зам В $\mathbb{R}^2$ график функции опр-ся соотношением $y = f(x)$. С другой стороны, можно считать, что $\boxed{y = f(x)}$ есть ур-е линии.

Важной системой координат является полярная система координат, которая задаётся т. O, называемой полюсом, лучом Op, наз-м полярной осью.

$\exists\, M \neq O$.

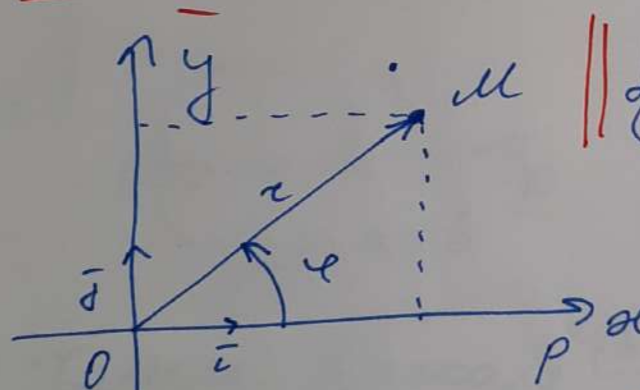


Опр Числа r и φ наз-ся полярными координатами т. M; r is полярным радиусом, φ – полярным углом,

$$\begin{cases} -\pi < \varphi \le \pi \quad (0 \le \varphi < 2\pi). \\ 0 \le r < \infty. \end{cases} \Rightarrow \forall \text{ т. } M \text{ соотв-т}$$

единственная пара чисел r и φ, и обратно.

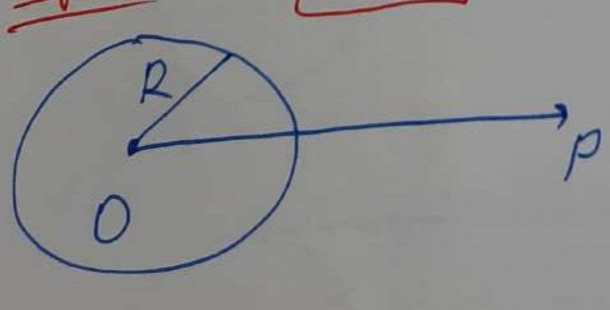
$\exists$ x и y – прямоугольные координаты т. M; r и φ – её полярные координаты.

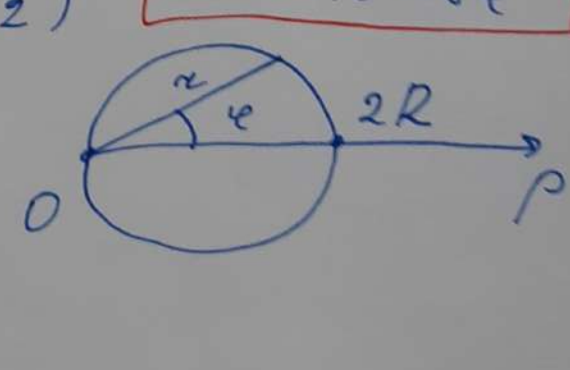


$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ tg\,\varphi = \dfrac{y}{x} \end{cases},$$

Опр Уравнение $F(r, \varphi) = 0$ is ур-м линии в полярной системе координат, если координаты $\forall$ т., лежащей на этой линии, и только они, удовлетворяют этому уравнению.

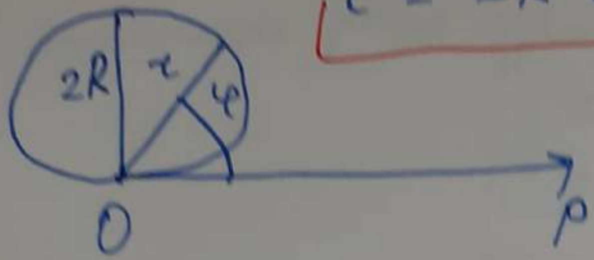
Пр-р 1) $\boxed{r = R}$ 2) $\boxed{r = 2R\cos\varphi}$





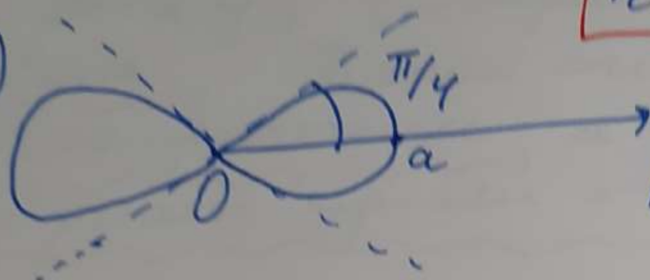
3)

$r = 2R \sin \varphi$



4)

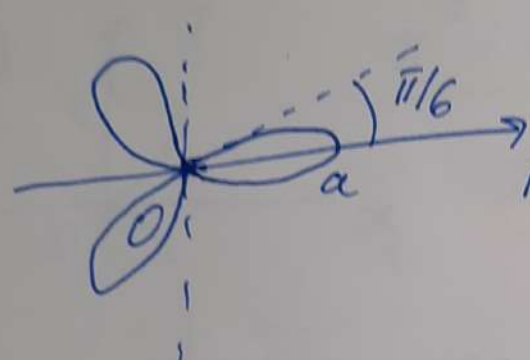
$r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$, $a > 0$



Лемниската Бернулли

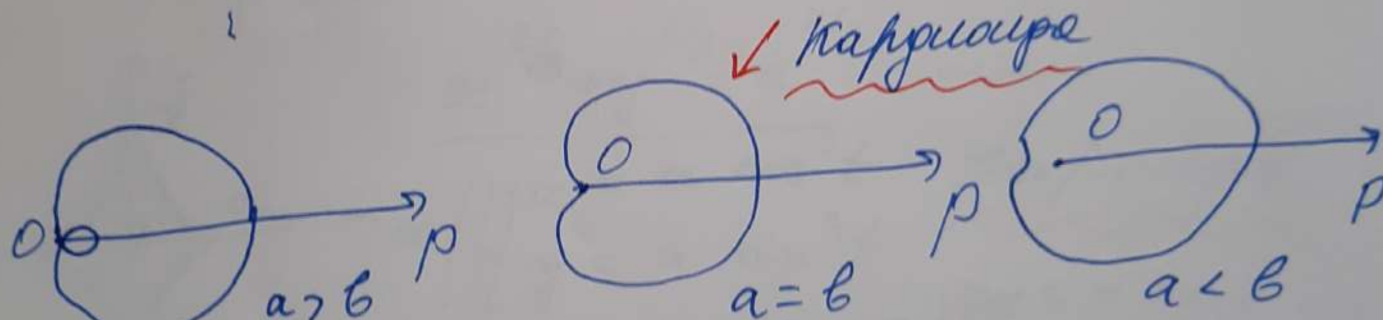
5)

$r = a \cos 3\varphi$, $a > 0$



Трёхлепестковая роза

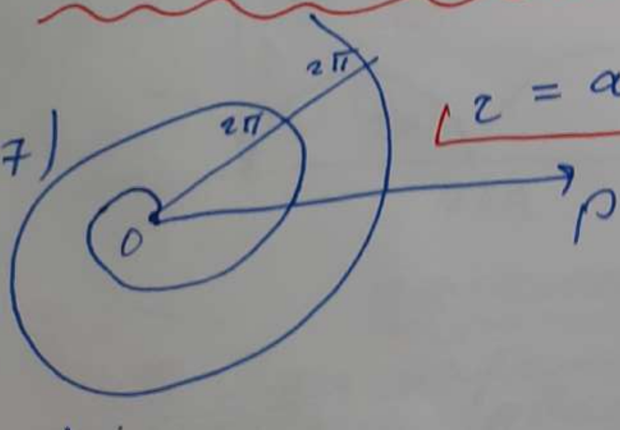
6)



Улитка Паскаля $r = b + a\cos\varphi$.

7)

$r = a\varphi$, $a > 0$ Спираль Архимеда



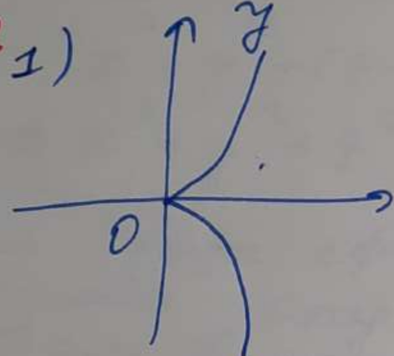
8)

Зам Линию на плоскости можно задать при помощи двух уравнений:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad (3)$$

где $M(x, y)$, t — переменная, наз-мая параметром. Такой способ задания линии наз-ся параметрическим, а ур-ние (3) — параметрическими ур-ми линии.

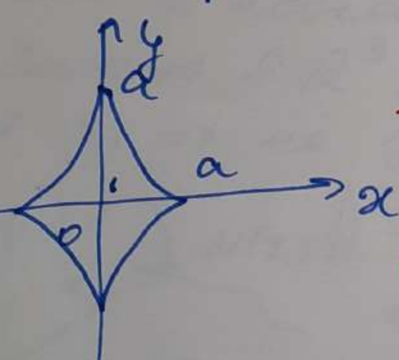
Пр-р 1)



$y^2 = x^3$ или $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$

Полукубическая парабола

2)



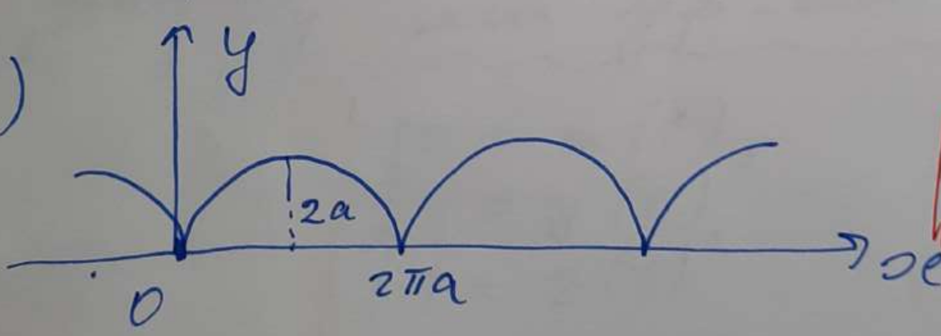
$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ или

$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ $a > 0$

Астроида

4) $\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}$

3)



$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$ $a > 0$

Циклоида

Зам При параметрическом задании линия — траектория движущейся точки. В к момент времени t известно положение т., т.е. её координаты относительно выбранной СК.

Опр Линию в пространстве можно Э как пересечение двух поверхностей, т.е. как множ-во точек находящихся одновременно на двух поверхностях => линию можно определить заданием двух ур-ний

$$\boxed{\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}} \quad (4)$$

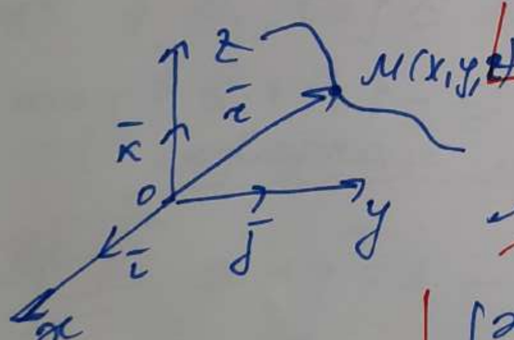
, v is ур-ии линии L в $\mathbb{R}^3$.

Пр-р
$$\begin{cases} x^2+y^2+(z-3)^2=10, \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Rightarrow$$

ур-е двух сфер определяют лежащую в плоскости Oxy окружность с $r=1$ и центром в начале координат.

Зам Линию в $\mathbb{R}^3$ можно Э как траекторию движение т., => её задают векторным ур-м

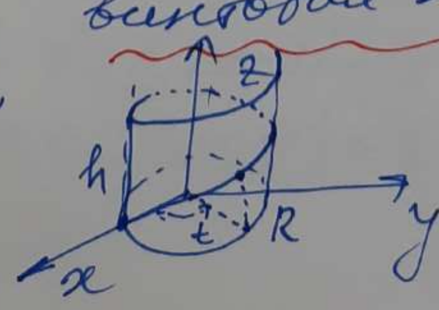
$$\bar{r}=\bar{r}(t)$$



или параметрическими ур-ми:

$$\boxed{\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \\ z=z(t). \end{cases}}$$

Пр-р
$$\begin{cases} x=R\cos t, \\ y=R\sin t, \\ z=\frac{h}{2\pi}t, \end{cases}$$
винтовая линия



Опр Алгебраической поверхностью наз. множество, v в какой-нибудь ДПСК может быть задано ур-нием вида

$$A_1 x^{k_1} y^{l_1} z^{m_1} + \ldots + A_s x^{k_s} y^{l_s} z^{m_s} = 0, \quad (5)$$

где $\{k_i, l_i, m_i\} \in \mathbb{Z}_+ + \{0\}$, $A_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = \overline{1,s}$, $\max\limits_{i=\overline{1,s}} (k_i + l_i + m_i)$ наз. степенью уравнения или порядком алгебраической поверхности.

Пр-р сфера – алг. пов-ть 2-го порядка.

Опр Алгебраической линией на плоскости наз. множ-во, v в какой-нибудь ПДСК на плоскости может быть задано ур-нием вида

$$A_1 x^{k_1} y^{l_1} + \ldots + A_s x^{k_s} y^{l_s} = 0, \quad (6)$$

где $\{k_i, l_i\} \in \mathbb{Z}_+ + \{0\}$, $\forall i = \overline{1,s}$,
$\max\limits_{i=\overline{1,s}} \{k_i + l_i\}$ – наз. степенью уравнения или порядком линии.

Пр-р $x^2 + y^2 = 1$ – алгебраическая линия на $\mathbb{R}^2$.

Зам Алгебраическая пов-ть не обязательно будет поверхностью с точки зрения интуитивного понимания.

Пр-р ① $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0 \Rightarrow \nexists M(x,y,z) \in S$.

② $(x^2 + y^2 + z^2)\left[(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2\right] = 0$,

$\Rightarrow$ т. $O(0,0,0)$, $A(1,1,1) \in S$.

Опр Уравнение вида

$$\begin{cases} x = \varphi(t_1, t_2), \\ y = \psi(t_1, t_2), \\ z = \chi(t_1, t_2) \end{cases}$$

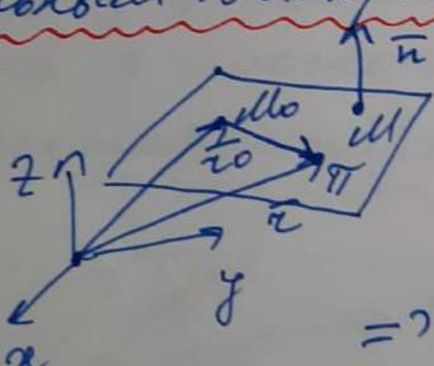
is параметрическими уравн-ми поверхности, если ∀ т. M на пов-ти ∃ пара чисел t_1 и t_2, при ∨ координаты т. M получаются из этих уравнений и наоборот, ∀ т. $M' \notin S$ такой пары чисел ∄.

§2. Уравнение плоскости.

Положение плоскости в $\mathbb{R}^3$ можно задать различными способами.

1. Векторное ур-ние плоскости.

Плоскость вполне определяется заданием её фиксированной точки и ненулевого вектора $\bar{n}$: $\bar{n} \perp \pi$ (плоскость). Такой в-р is нормальным вектором.



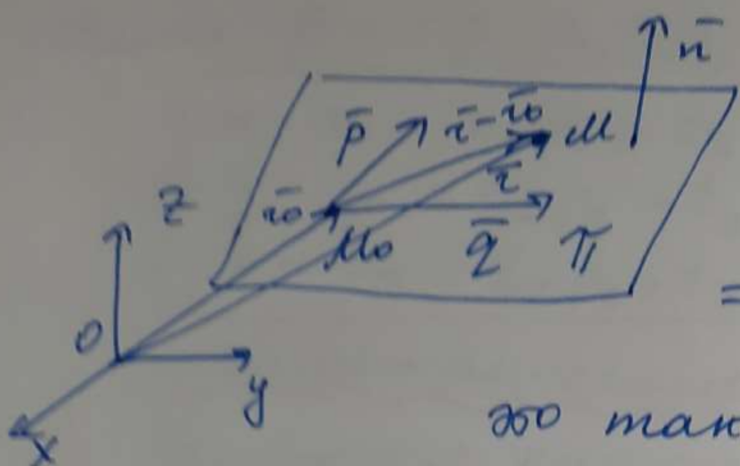
∃ $\bar{r}$ – радиус в-р т. $M \in \pi$, $\bar{r}_0$ – радиус в-р т. $M_0 \in \pi$;

$\Rightarrow \bar{r} - \bar{r}_0 \in \pi \Rightarrow (\bar{r} - \bar{r}_0) \perp \bar{n}$

$$\Rightarrow \boxed{(\bar{r} - \bar{r}_0) \cdot \bar{n} = 0} \qquad (1)$$

это ур-е is векторным ур-м плоскости.

Если $\bar{p}$ и $\bar{q}$ – направляющие в-ры плоскости, то $\bar{p} \times \bar{q} = \bar{n}$



т.к.

$(\bar r - \bar r_0)\cdot \bar n = 0$

$\Rightarrow (\bar r - \bar r_0)\cdot(\bar p \times \bar q) = 0$

$\Rightarrow \boxed{(\bar r - \bar r_0)\,\bar p\, \bar q = 0}$ (2)

это также векторное ур-е пл-ти.

2. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку.

из ур-я (1) $\Rightarrow \boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0}$, (3)

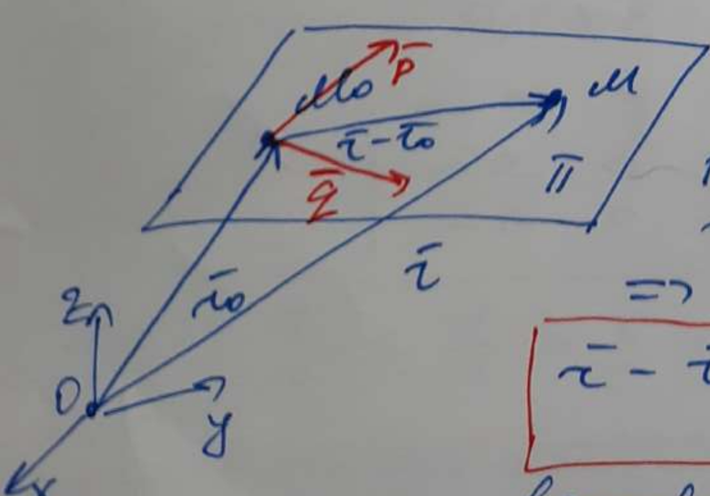
где $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $\bar n = (A, B, C)$.

] $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0 \Rightarrow \boxed{Ax+By+Cz+D=0}$ (4)

ур-е (4) is общим ур-м плоскости.

Утв. Общее ур-ние плоскости линейно относительно переменных x, y, z. Обратно, $\forall$ линейному ур-нию (4) в $\mathbb{R}^3$ соотв-т плоскость. (Упр).

3. Векторно-параметрическое ур-ние пл-ти.



] $\bar p, \bar q$ – напр. в-ры пл-ти, т. M – $\forall$т. $\in \pi$; $\bar p \nparallel \bar q$, т. M_0 – фикс. т. $\in \pi$; $\bar r - \bar r_0 \in \pi$; Если т. $M \in \pi$ $\Rightarrow \exists\, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$:

$\boxed{\bar r - \bar r_0 = t_1 \bar p + t_2 \bar q}$ (5)

векторно-пар-кое ур-е пл-ти.

Если $\bar{p} = (p_1, p_2, p_3)$, $\bar{q} = (q_1, q_2, q_3)$, $\Rightarrow$

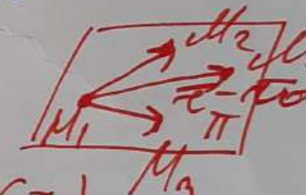
$$\boxed{\begin{cases} x - x_0 = t_1 p_1 + t_2 q_1, \\ y - y_0 = t_1 p_2 + t_2 q_2, \\ z - z_0 = t_1 p_3 + t_2 q_3. \end{cases}} \quad (6)$$

параметрические ур-ние плоскости.

4. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки.

Пусть $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ не лежат на одной прямой. Пусть т. M_1 – фикс., $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$ – напр-щие в-ры; т. к.

$\pi: (\bar{r} - \bar{r}_0, \bar{p}, \bar{q}) = 0 \Rightarrow$



$$\boxed{\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0} \quad (7)$$

5. Уравнение плоскости в отрезках.

Пусть плоскость отсекает на осях Ox, Oy, Oz соотв-но отрезки $|a|$, $|b|$, $|c|$, т.е. проходит через точки $M_1(a, 0, 0)$, $M_2(0, b, 0)$, $M_3(0, 0, c)$. $\overset{(7)}{\Rightarrow}$

$$\begin{vmatrix} x - a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow bcx + acy + abz - abc = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.} \quad (8)$$

Утв. Если пл-ть им-т ур-е вида (8) в ДПСК, то числа a, b, c по абсолютной величине равны длинам отрезков отсекаемых плоскостью на осях координат; знаки этих чисел зависят от того, на какой полуоси (положительной или отрицательной) лежат эти отрезки.

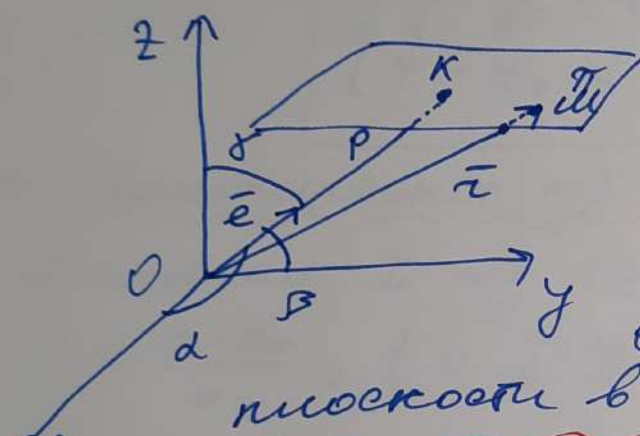
6. Нормальное ур-ние плоскости.

Положение плоскости вполне определяется заданием единичного вектора $\bar{e}$:

$$\bar{e} \uparrow\uparrow \overline{OK}, \quad \overline{OK} \perp \pi, \quad \text{т.} K \in \pi,$$

и длиной $|\overline{OK}| = p$; $\exists\, \alpha = (\widehat{\bar{e}, O_x})$, $\beta = (\widehat{\bar{e}, O_y})$, $\gamma = (\widehat{\bar{e}, O_z}) \Rightarrow \bar{e} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

$\exists\, M(x, y, z) \in \pi$.



$\forall$ т. $M \in \pi \Rightarrow \boxed{\text{пр}_{\bar{e}}\, \bar{r} = p} \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{r} \cdot \bar{e} = p \Rightarrow$

$$\boxed{\bar{r} \cdot \bar{e} - p = 0} \quad (9)$$

это нормальное ур-ние плоскости в векторной форме.

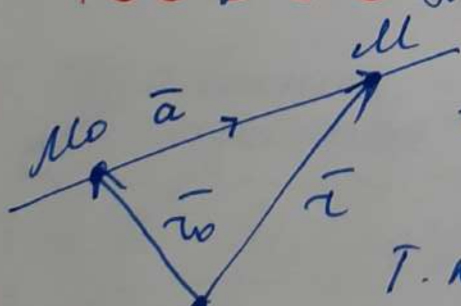
(10)

Т.к. $\bar{r} = (x, y, z) \Rightarrow \boxed{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0}$

это нормальное ур-ние пл-ти в координатной форме.

§3. Уравнение прямой в пространстве.

1. Векторное ур-ние прямой.



$\bar{a} \parallel l$, $\bar{a} \neq \bar{0}$.

l $\quad \bar{a}$ is направляющим вектором прямой.

Т.к. $\bar{a} \parallel (\bar{r} - \bar{r}_0) \Rightarrow \boxed{(\bar{r} - \bar{r}_0) \times \bar{a} = \bar{0}}$

(1)

2. Векторно-параметрическое ур-е прямой

Т.к. $\overline{M_0M} \parallel \bar{a} \Rightarrow \boxed{\bar{r}-\bar{r}_0 = t\bar{a}}$ $t \in \mathbb{R}$, (2)

t – параметр.

3. Параметрические ур-ния прямой

Пусть $\bar{r}=(x,y,z)$, $\bar{r}_0=(x_0,y_0,z_0)$, $\bar{a}=(a_1,a_2,a_3)$; $\overset{(2)}{\Rightarrow}$

$$\boxed{\begin{cases} x-x_0 = a_1 t, \\ y-y_0 = a_2 t, \\ z-z_0 = a_3 t, \end{cases}} \quad (3)$$

4. Канонические ур-ния прямой

Исключая t из (3), получим:

$t = \dfrac{x-x_0}{a_1}$, $t=\dfrac{y-y_0}{a_2}$, $t=\dfrac{z-z_0}{a_3}$, пусть $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, $a_3 \neq 0$.

$$\Rightarrow \boxed{\frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}} \quad (4)$$

Зам. Пусть $a_1 = 0 \overset{(4)}{\Rightarrow}$ $\boxed{x = x_0, \quad \dfrac{y-y_0}{a_2} = \dfrac{z-z_0}{a_3}}$

5. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.

Пусть в $\mathbb{R}^2$ $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, пусть $\overline{M_1M_2} \neq \bar{0}$

$$\overset{(4)}{\Rightarrow} \boxed{\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}} \quad (5)$$

6. Общее ур-ние прямой.

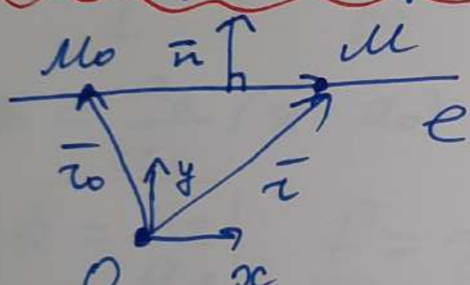
] $\Pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$
$\Pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$ $\Rightarrow$] $\begin{cases}\Pi_1 \nparallel \Pi_2\\ \Pi_1 \neq \Pi_2\end{cases}$

$$\boxed{\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\end{cases}} \quad (6)$$

§4. Уравнение прямой на плоскости.

] $l \in \mathbb{R}^2$,

1. Векторное ур-ние прямой.



$\bar r - \bar r_0 \perp \bar n \Rightarrow \boxed{(\bar r - \bar r_0)\cdot \bar n = 0}$ (1)

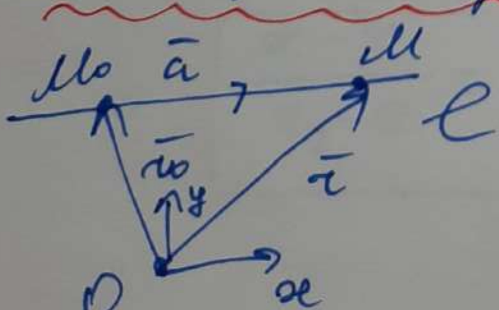
2. Ур-ние прямой, проходящей через данную точку.

$\overset{(1)}{\Rightarrow} \boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)=0}$ (2), $M_0(x_0, y_0)$, $\bar n = (A, B)$.

$\overset{(2)}{\Rightarrow} \boxed{Ax+By+C=0}$ (3) $C=-Ax_0-By_0$

общее ур-ние прямой.

3. Векторно-параметрическое ур-ние пр-й.



$\boxed{\bar r - \bar r_0 = t\bar a}$, (4) $t \in \mathbb{R}$

4. Параметрические ур-ние прямой.

③ $\Rightarrow$ $\boxed{\begin{cases} x-x_0=a_1 t, \\ y-y_0=a_2 t, \end{cases}}$ (5) $\bar{a}=(a_1,a_2)$, $t\in\mathbb{R}$.

5. Каноническое ур-ние прямой

④ $\Rightarrow$ $\boxed{\dfrac{x-x_0}{a_1}=\dfrac{y-y_0}{a_2}}$ (6), $a_1\neq 0$, $a_2\neq 0$.

6. Уравнение прямой с угловым коэф-м.

$] \ \ell: \begin{cases} x-x_0=a_1 t, \\ y-y_0=a_2 t, \end{cases}$ $] \ a_1\neq 0 \Rightarrow$

$y-y_0=\dfrac{a_2}{a_1}(x-x_0) \Rightarrow \boxed{y=kx+b,}$ (7)

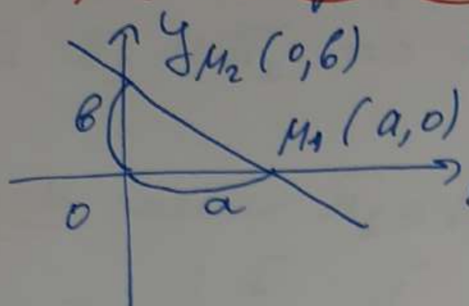
где $\boxed{k=\dfrac{a_2}{a_1}}$, $b=y_0-\dfrac{a_2 x_0}{a_1}$; k is угловым коэф-том прямой, b - ордината точки пересечение прямой с осью ординат.

Зам Если $\ell \parallel Oy \Rightarrow a_1=0 \Rightarrow \ell: \boxed{x=x_0}$, где x_0 - абсцисса точки пересечение прямой с осью Ox.

7. Ур-ние прямой, проходящей через две заданные точки.

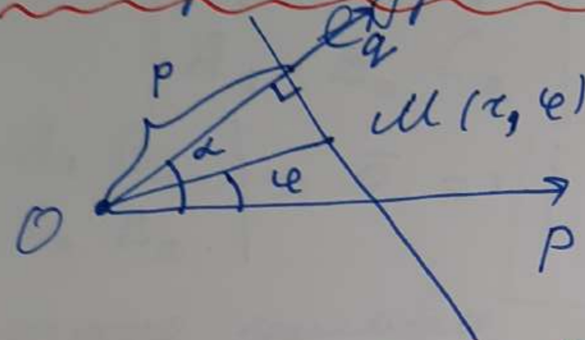
(6) $\Rightarrow$ $\boxed{\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}}$ (8) $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$

8. Ур-ние прямой в отрезках.



$\overset{(7)}{\Rightarrow}$ $\boxed{\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1.}$ (9)

9. Полярное ур-ние прямой



$\forall$ т. $M \in l \Rightarrow$ $\boxed{пр_q \overline{OM} = p}$

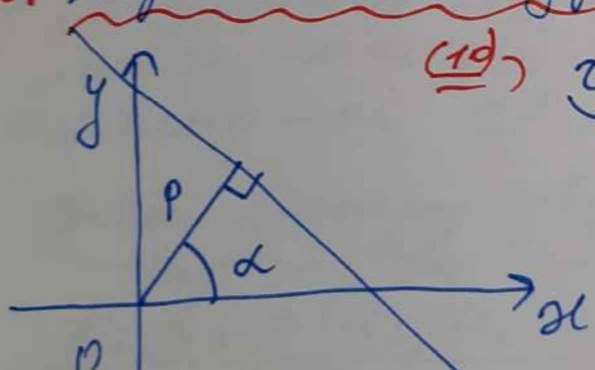
с др. стороны,

$пр_q \overline{OM} = |\overline{OM}|\cos(\alpha-\varphi) =$

$= r\cos(\varphi-\alpha) \Rightarrow$ $\boxed{r\cos(\varphi-\alpha) = p.}$ (10)

это ур-ние прямой в полярных координатах.

10. Нормальное ур-ние прямой.



$\overset{(10)}{\Rightarrow}$ $\underbrace{r\cdot\cos\varphi}_{=x}\cos\alpha + \underbrace{r\sin\varphi}_{=y}\sin\alpha - p = 0$

(11)

$\Rightarrow$ $\boxed{x\cdot\cos\alpha + y\cdot\sin\alpha - p = 0.}$

нормальное ур-е прямой

§5. Некоторые задачи о прямых и плоскостях.

1 Угол между плоскостями.

$\widehat{\Pi_1,\Pi_2} = (\widehat{\bar{n}_1,\bar{n}_2}) = \varphi$ — наименьший.

$\exists\ \Pi_1:\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$

$\Pi_2:\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

$\Rightarrow$ $\boxed{\cos\varphi = \dfrac{|\bar{n}_1\cdot\bar{n}_2|}{|\bar{n}_1|\,|\bar{n}_2|}}$ (12)

② Условие параллельности двух плоскостей.

$\exists\ \pi_1 \parallel \pi_2 \Rightarrow \bar{n}_1 \parallel \bar{n}_2 \Rightarrow \boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}}$ (13)

Зам если $\bar{n}_1 \parallel \bar{n}_2 \Rightarrow \bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = \bar{0} \Rightarrow$

$$\bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} +$$

$$+\bar{k}\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \bar{0} \Rightarrow \boxed{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0}$$ (14)

это тоже условие ||-сти плоскостей.

③ Условие перпендикулярности двух плоскостей.

$\exists\ \pi_1 \perp \pi_2 \Rightarrow \bar{n}_1 \perp \bar{n}_2 \Rightarrow \bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2 = 0 \Rightarrow$

$$\boxed{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0.}$$ (15)

Зам условие (13) или (14), (15) не только необходимы, но и достаточны для пар-сти или перпенд-сти $2^х$ плоск-тей соотв-но.

④ Угол между двумя прямыми.

$\widehat{l_1, l_2} = (\widehat{\bar{a}_1, \bar{a}_2}) = \varphi$ – наименьший.

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{|\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2|}{|\bar{a}_1|\,|\bar{a}_2|}}$$ (16)

⑤ Условие ||-сти $2^х$ прямых

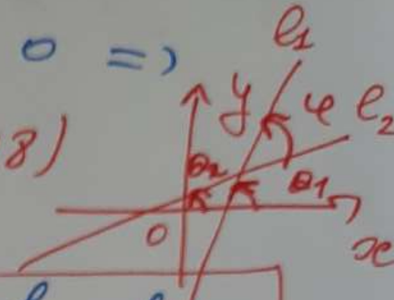
$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \bar{a}_1 \parallel \bar{a}_2 \Rightarrow \exists \begin{cases} \bar{a}_1 = (m_1, n_1, p_1), \\ \bar{a}_2 = (m_2, n_2, p_2) \end{cases} \Rightarrow$

$$\boxed{\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}}$$ (17)

6 Условие ⊥-ти 2-х прямых

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \bar{a}_1 \perp \bar{a}_2 \Leftrightarrow \bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0.} \quad (18)$$

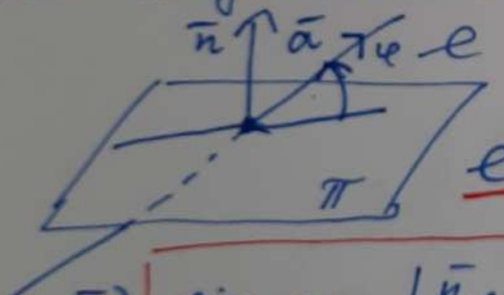


Зам Пусть $l_1: y = k_1 x + b_1,$
$l_2: y = k_2 x + b_2,$ $\Rightarrow \boxed{tg\, \varphi = \pm \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}, \quad \varphi \neq \frac{\pi}{2}}$ (19)

Если $\boxed{k_1 k_2 + 1 = 0} \Rightarrow l_1 \perp l_2,$

7 Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.

Опр 7.1. Углом между прямой и плоскостью $\underline{\underline{is}}$ угол между прямой и её проекцией на эту плоскость.



Пусть $\pi: Ax + By + Cz + D = 0,$
$\bar{n} = (A, B, C),$

$l: \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\sin \varphi = \frac{|\bar{n} \cdot \bar{a}|}{|\bar{n}||\bar{a}|}} = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}; \quad (20)$$

7.2 $l \parallel \pi \Leftrightarrow \bar{a} \perp \bar{n} \Rightarrow \boxed{\bar{a} \cdot \bar{n} = 0}$ (21)

7.2 $l \perp \pi \Leftrightarrow \bar{a} \parallel \bar{n} \Rightarrow \boxed{\bar{a} \times \bar{n} = \bar{0}}$ (22) $\Rightarrow$

$$\boxed{\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}}$$

8 Расстояние от точки до плоскости.

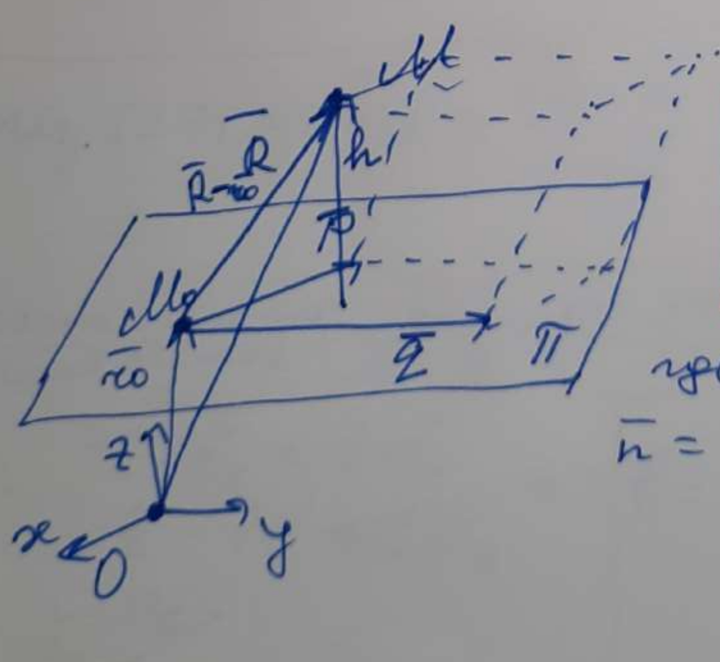
$\exists\ \pi: \boxed{(\bar{r}-\bar{r}_0)\bar{p}\,\bar{q}=0}$, $\exists$ т. $M(\bar{R})$, где $\bar{R}$ – радиус-вектор т. M. $\Rightarrow$

$$h=\frac{V_{пар-да}(\bar{R}-\bar{r}_0,\bar{p},\bar{q})}{S_{осн.}}\Rightarrow$$

$$\boxed{h=\frac{|(\bar{R}-\bar{r}_0)\bar{p}\,\bar{q}|}{|\bar{p}\times\bar{q}|}}\quad(23)$$

Т. к. $\forall\ \bar{n}\perp\pi\ \exists\ \bar{p},\bar{q}: \bar{p}\times\bar{q}=\bar{n}\Rightarrow$

$$\boxed{h=\frac{|(\bar{R}-\bar{r}_0)\cdot\bar{n}|}{|\bar{n}|}}\quad(24)$$



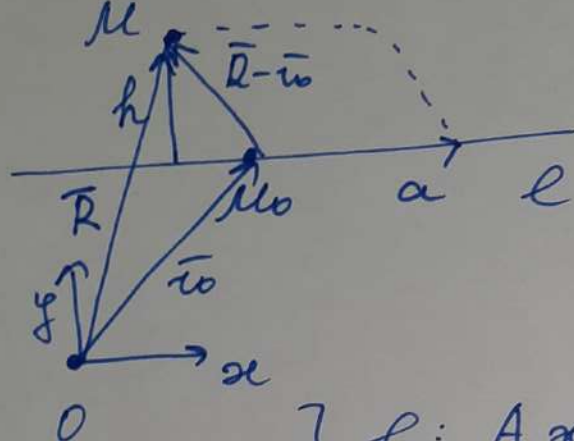
$\exists\ M(X,Y,Z)\overset{(24)}{\Rightarrow}$

$$\boxed{h=\frac{|AX+BY+CZ+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}\quad(25)$$

где $D=-(\bar{r}_0,\bar{n})$, $\bar{n}=(A,B,C)$.

9 Расстояние от точки до прямой на $\mathbb{R}^2$.

] $M(\bar{R})$,



$$h = \frac{S_{пар}(\bar{R}-\bar{r}_0, \bar{a})}{|\bar{a}|} \Rightarrow$$

$$\boxed{h = \frac{|(\bar{R}-\bar{r}_0)\times\bar{a}|}{|\bar{a}|}} \quad (26)$$

] $\ell: Ax + By + C = 0$,] $\bar{a} = (-B, A)$

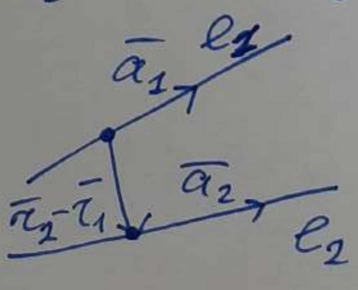
$$\Rightarrow h = \frac{|(X-x_0)A - (Y-y_0)(-B)|}{\sqrt{A^2+B^2}} \overset{(27)}{=} \frac{|AX+BY+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{h = \frac{|AX+BY+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}} \quad (28)$$, где $C = -Ax_0 - By_0$.

Зам из (27) $\Rightarrow$ $\boxed{h = \frac{(\bar{R}-\bar{r}_0)\cdot\bar{n}}{|\bar{n}|}}$ (29)

10 Расстояние между непараллельными прямыми в $\mathbb{R}^3$

] $\ell_1: \bar{r}-\bar{r}_1 = t\bar{a}_1$
$\ell_2: \bar{r}-\bar{r}_2 = t\bar{a}_2$ $\Rightarrow$ $\boxed{h = \frac{|(\bar{r}_2-\bar{r}_1)\,\bar{a}_1\,\bar{a}_2|}{|\bar{a}_1\times\bar{a}_2|}}$ (30)



Зам $\ell_1 \cap \ell_2 \Leftrightarrow h = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} (\bar{r}_2-\bar{r}_1, \bar{a}_1\ \bar{a}_2) = 0 \\ \bar{a}_1\times\bar{a}_2 \neq \bar{0} \end{cases}$$