ДОМАШНЯ РОБОТА №10
З ПРЕДМЕТУ
"ТЕОРІЯ ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ"

ФІ-12 Бекешева Анастасія

1. (a) $f(z)=z^4-4z^3+3z^2=z^2(z^2-4z+3)=z^2(z-1)(z-3)$

$z=0:\quad f(z)=z^2g(z),\quad g(z)=(z-1)(z-3),\quad g(0)\neq 0,\quad g(z)$ - аналітична в $z=0\Longrightarrow z=0$ нуль II порядку.

$z=1:\quad f(z)=(z-1)g(z),\quad g(z)=z^2(z-3),\quad g(1)\neq 0,\quad g(z)$ - аналітична в $z=1\Longrightarrow z=1$ нуль I порядку.

$z=3:\quad f(z)=(z-3)g(z),\quad g(z)=z^2(z-1),\quad g(3)\neq 0,\quad g(z)$ - аналітична в $z=3\Longrightarrow z=3$ нуль I порядку.

(b) $f(z)=e^{2z}-1$

$e^z-1=0,\quad e^z=1,\quad z=\ \mathrm{Ln}(\ 1)=\ln 1+i(\arg 1+2\pi k)=2\pi ik, k\in\mathbb{Z}$

$(f(z))'\big|_{z_k}=e^{z_k}=e^{2\pi ik}=\cos 2\pi k+i\sin 2\pi k=1+0=1$

точки z_k нулі I порядку.

(c) $f(z)=z\sin\pi z$

$$\left[\begin{array}{l} z=0 \\ z_k=k \end{array}\right., k\in\mathbb{Z},\qquad \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} m_1=1 \\ m_2=1 \end{cases} & \text{- нуль II порядку} \\ \begin{cases} m_1=0 \\ m_2=1 \end{cases} & \text{- нуль I порядку} \end{array}\right.$$

(d) $f(z)=z^3\,\mathrm{sh}\,3\pi z$

$$\left[\begin{array}{l} z=0 \\ z=\dfrac{1}{3}ik \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}\qquad \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} m_1=1 \\ m_2=3 \end{cases} & \text{- нуль IV порядку} \\ \begin{cases} m_1=0 \\ m_2=1 \end{cases} & \text{- нуль I порядку} \end{array}\right.$$

2. (a) $$f(z)=\frac{\sin z^4-z^4}{\mathrm{sh}\,z-z-\dfrac{z^3}{6}}=\frac{z^4-\dfrac{z^{12}}{6}+\dots-z^4}{z+\dfrac{z^3}{6}+\dfrac{z^5}{24}+\dots-z-\dfrac{z^3}{6}}=\frac{\dfrac{z^{12}}{6}+\dots}{\dfrac{z^5}{24}+\dots}=\frac{z^{12}\left(\dfrac{1}{6}+\dots\right)}{z^5\left(\dfrac{1}{24}+\dots\right)}=$$

$=\dfrac{z^{12}g_1(z)}{z^5g_2(z)},\quad m_1=12, m_2=5\Longrightarrow m_1>m_2$ - усувна особлива точка.

(b) $$f(z)=\frac{\cos 5z-1}{\mathrm{ch}\,z-1-\dfrac{z^2}{2}}=\frac{1-\dfrac{z^2}{2}+\dots-1}{1+\dfrac{z^2}{2}+\dfrac{z^4}{24}+\dots-1-\dfrac{z^2}{2}}=\frac{-\dfrac{z^2}{2}+\dots}{\dfrac{z^4}{24}+\dots}=\frac{z^2\left(-\dfrac{1}{2}+\dots\right)}{z^4\left(\dfrac{1}{24}+\dots\right)}=$$

$=\dfrac{z^2g_1(z)}{z^4g_2(z)},\quad m_1=2, m_2=4\Longrightarrow m_1<m_2$ - полюс функції $f(z)$ порядку 2.

(c) $$f(z)=ze^{\left(\frac{4}{z^3}\right)}=z\left(1+\frac{4}{z^3}+\frac{4^2}{2z^6}+\dots\right)=z+\frac{4}{z^2}+\frac{4^2}{2z^5}+\dots,\quad z_0=0$$

нескінченна кількість доданків в головній частині $\Longrightarrow z_0$ - істотно осболива.

3. (a) $$f(z)=\frac{\cos\pi z}{(4z^2-1)(z^2+1)}=\frac{\cos\pi z}{(2z-1)(2z+1)(z-i)(z+i)}$$

$z=\dfrac{1}{2}:\quad m_1=1, m_2=1:\quad$ - усувна.

$z=-\dfrac{1}{2}:\quad m_1=1, m_2=1:\quad$ - усувна.

$z=i:\quad m_1=0, m_2=1:\quad$ полюс I порядку.

$z=-i:\quad m_1=0, m_2=1:\quad$ полюс I порядку.

(b) $f(z)=\dfrac{1}{\cos z-1}$

$\cos z-1=0,\quad \cos z=1,\quad z_k=2\pi k, k\in\mathbb{Z}$ - нулі знаменика.

$(\cos z-1)'\big|_{z_k}=-\sin(z_k)=-\sin(2\pi k)=0$

(c) $f(z) = z^2 \sin\frac{1}{z} = z^2\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} + \dots\right) = z + \frac{1}{3!z} + \frac{1}{5!z^3} + \dots$
нескінченна кількість доданків в головній частині $\Longrightarrow z = 0$ - істотно особлива.

(d) $f(z) = \operatorname{tg}^2 2z = \frac{\sin^2 2z}{\cos^2 2z}$
$\cos 2z = 0, \quad z_k = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = \pm 1 \neq 0, \quad m_1 = 1, m_2 = 0,$
$m_1 = 0, m_2 = 1 \cdot 2 = 2, \quad m_1 < m_2$ полюс II порядку.