Дискретна математика 2

Лекция начинается

-Сегодня у нас клуб упоротых любителей математики.

Contents

Chapter 1

Лекція 1

1.1 Подільність чисел

- властивості натуральних чисел
  $\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3, \dots\}$
  $\mathbb{N}_0 = \{0,\ 1,\ 2,\ 3, \dots\}$
  $\mathbb{Z} = \{-1,\ 0,\ 1, -2,\ 2, \dots\}$

Definition 1.1.1. *a ділиться на b* $-$ $a \vdots b$ *або b ділить a(b є дільникома)* $b|a$.
$a \vdots b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : \ \ a = kb$

Property.

1. $a \neq 0,\ \ a \vdots 0$
2. $a \neq 0,\ \ 0 \vdots a$
3. $a \vdots b,\ b \vdots c \Rightarrow a \vdots c$
4. $a \vdots 1$
5. $a \vdots c,\ b \vdots c \Rightarrow (\alpha a \pm \beta b) \vdots c$
6. $a \vdots b \Leftrightarrow ac \vdots bc,\ c > 0$

Theorem 1.1.1 (про ділення з остачею)**.**

$$\forall a,\ b \in \mathbb{Z}\ \exists! q,\ r\ :\ q \in \mathbb{Z},\ r \in \mathbb{N}\ \ 0 \leq r \leq |b|\ \ a = bq + r$$

Proof.

1. Існування
   $bq,\ q \in \mathbb{Z}$ - росте необмежено. $\exists q\ ;\ bq \leq a \leq b(q+1),\ r = a - bq$.
2. Єдиність
   Нехай $a = bq + r,\ \ a = bq' + r'$
   $0 = b(q - q') + (r - r') \Rightarrow (r - r') \vdots b,\ -|b| < r - r' < |b| \Rightarrow$
   $\Rightarrow r - r' = 0,\ q = q'$.

□

$q = \lfloor \frac{a}{b} \rfloor$ - частка.
$r = a + b \cdot \lfloor \frac{a}{b} \rfloor$ - остача $= a \mod b$.

1.2 Найбільший спільний дільник

Найбільший спільний дільник: НСД(a, b)(українська нотація), $\gcd(a, b)$(англійська нотація), $(a,\ b)$(спеціальзована література з теорії чисел).

Definition 1.2.1. $\gcd(a,\ b) = d:$

1. $a \vdots d,\ b \vdots d$

2. $d\ -\ \max$ *додатне число, яке задовільняє 1.*

Property.

1. $\gcd(a,\ b) = b \Leftrightarrow a \vdots b$

2. $a \neq 0:\ \gcd(a, 0) = a$

3. $\gcd(a,\ b)$ *поділяється на довільний спільний дільник a та b*

4. $c > 0:\ gcd(ac,\ bc) = c\gcd(a,\ b)$

5. $d = \gcd(a,\ b) \Rightarrow \gcd(\frac{a}{d},\ \frac{b}{d})$

Lemma 1.2.1.

$$\gcd(a,\ b) = \gcd(b,\ a - b)$$

Proof.
$d = \gcd(a,\ b),\ d' = \gcd(b,\ a - b)$
Нехай $d > d'$
$a \vdots d,\ b \vdots d \Rightarrow (a - b) \vdots d \Rightarrow d$ - спільний дільник b та a-b $\Rightarrow d' \vdots d$ - Упс!
Нехай $d < d'$
$b \vdots d',\ a - b \Rightarrow b + (a - b) = a \vdots d'$ - Упс! $\square$

Consequence. $a \geq b: \ \gcd(a,\ b) = (b,\ a \mod b)$

Proof. $a = bq + r$
$\gcd(a,\ b) \underbrace{= \cdots =}_{q \text{ разів}} \gcd(r,\ b)$ $\square$

1.3 Алгоритм Евкліда

Вхід: $a,\ b \in \mathbb{N}$
Вихід: $d = \gcd(a,\ b)$

$$\begin{aligned}
&r_0 := a,\ r_1 := b \\
&r_0 = r_1 q_1 + r_2 \\
&r_1 = r_2 q_2 + r_3 \\
&r_2 = r_3 q_3 + r_4 \\
&\quad \vdots \\
&r_{n-1} = r_n q_n,\ \ r_n = d
\end{aligned}$$

Proof. $r_{i+1} = r_i \mod r_{i-1}$
$r_0 \geq r_1 > r_2 > \cdots > r_n > r_{n+1} = 0$
$\gcd(a,\ b) - \gcd(r_0,\ r_1) = \gcd(r_1,\ r_2) = \gcd(r_2,\ r_3) = \cdots =$
$= gcd(r_{n-1},\ r_n) = \gcd(r_n,\ 0) = 0$ $\square$

Lemma 1.3.1.

$$\forall i,\ r_{i+2} < \frac{r_i}{2}$$

Proof. $r_i = r_{i+1} q_{i+1} + r_{i+2} \geq r_{i+1} + r_{i+2} > r_{i+2} + r_{i+2} = 2r_{i+2}$ $\square$

$\Rightarrow$ АЕ зробить $\leq 2\lceil \log_2 a \rceil$ кроків.

> **Example:**
> $\gcd(123,\ 456)$.
> $123 = 456 \cdot 0 + 123$

$456 = 3 \cdot 123 + 87$
$123 = 87 \cdot 1 + 36$
$87 = 36 \cdot 2 + 15$
$36 = 15 \cdot 2 + 6$
$15 = 6 \cdot 2 + 3$
$6 = 3 \cdot 2 \Rightarrow \text{gcd} = 3$

Example:

Для яких n : $\frac{3n+1}{5n+1}$ - скоротний?
$5n + 2 = (3n + 1) \cdot 1 + (2n + 1)$
$3n + 1 = (2n + 1) \cdot 1 + n$
$2n + 1 = n \cdot 2 + 1$
$n = 1 \cdot n \Rightarrow \text{gcd}(3n + 1,\ 5n + 2) = 1$

Chapter 2

Лекція 2

2.1 Найменше спільне кратне

Definition 2.1.1. $a,\ b \in \mathbb{N}$
M = НСК(a, b), lcm(a, b), [a, b]

1. $M \vdots a,\ \ M \vdots b$
2. $M\ -\ \min$ *таке число*

Property.

1. $\mathrm{lcm}(a,\ 0)$ - *'на доске был нарисован грустный смайлик'*
2. $\mathrm{lcm}(a,\ b) = a \Leftrightarrow a \vdots b$
3. $a,\ b$ *-взаємнопрості* $\Rightarrow \mathrm{lcm}(a,\ b) = a \cdot b$
4. *Довільне спільне кратне a та b* $\vdots\ \mathrm{lcm}(a,\ b)$
5. $\forall c > 0,\ \mathrm{lcm}(ac,\ bc) = c\,\mathrm{lcm}(a,\ b)$
6. $\frac{\mathrm{lcm}(a,\,b)}{a}$ *та* $\frac{\mathrm{lcm}(a,\,b)}{b}$ - *взаємнопрості*

Theorem 2.1.1.

$$\forall a,\ b \in \mathbb{N}:\ \ \gcd(a,\ b) \cdot \mathrm{lcm}(a,\ b) = a \cdot b$$

Proof. Нехай $d = \gcd(a,\ b),\ a = a_1 \cdot d,\ b = b_1 \cdot d.$
$\gcd(a_1,\ b_1) = 1,\ \mathrm{lcm}(a_1,\ b_1) = a_{,1} \cdot b_1,\ \mathrm{lcm}(a,\ b) = d \cdot a_1 \cdot b_1$
$d \cdot \mathrm{lcm}(a,\ b) = (a_1 \cdot d) \cdot (b_1 \cdot d) = a \cdot b$ □

Theorem 2.1.2.

$$\forall a,\ b \in \mathbb{N}:\ \ \gcd(a,\ b,\ c) = \gcd(\gcd(a,\ b),\ c) = \gcd(a,\ \gcd(b,\ c))$$

Proof. $d = \gcd(a,\ b,\ c)$
$d' = \gcd(a,\ b) \Rightarrow d' \vdots d,\ c \vdots d \Rightarrow d = \gcd(c,\ d')$ □

$$\operatorname{lcm}(a,\ b,\ c) = \operatorname{lcm}(\operatorname{lcm}(a,\ b),\ c) = \operatorname{lcm}(a,\ \operatorname{lcm}(b,\ c)$$

Theorem 2.1.3.

$$\forall a,\ b,\ c \in \mathbb{N}:\ \ \operatorname{lcm}(a,\ b,\ c) = \frac{a \cdot b \cdot c \cdot \gcd(a,\ b,\ c)}{\gcd(a,\ b) \cdot \gcd(b,\ c) \cdot \gcd(c,\ a)}$$

Решітка(*lattice*) - $< A,\ \leq,\ \sup,\ \inf >$

Example:

1. множини, $\subseteq,\ \cap,\ \cup$
   $|A| + |B| = |A \cup B| + |A \cap B|$
2. $\mathbb{R},\ \leq,\ \max,\ \min$
   $a + b = \max\{a,\ b\} + \min\{a,\ b\}$
3. $\mathbb{N},\ \vdots,\ \operatorname{lcm},\ \gcd$
   $a \cdot b = \operatorname{lcm}(a, \underline{\ }) \cdot \gcd(a,\ b)$

$\max\{a_1, \ldots, a_n\} = a_1 + \cdots + a_n - \min\{a_1,\ a_2\} - \cdots - \min\{a_{n-1},\ a_n\} + \min\{a_1,\ a_2,\ a_3\} - \min\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4\}$

2.2 Евклідові послідовності

Definition 2.2.1. *Послідовність* $a_0,\ a_1, \ldots,\ a_i \in \mathbb{R}$ *- евклідова, якщо* $\forall n,\ m \in \mathbb{N}_0\ \ n > m:\ \ \gcd(a_n,\ a_m) = \gcd(a_m,\ a_{n-m}) \Rightarrow \gcd(a_n,\ a_m) = \gcd(a_m,\ a_{n \bmod m})$

Theorem 2.2.1.

$$(a_i)\ \text{- евклідова і } a_0 = 0,\ \text{ то } \forall n,\ m:\ \ \gcd(a_n,\ a_m) = a_{\gcd(n,\, m)}$$

Proof.
$n = m$ - очевидна.

$n > m:$

$d = \gcd(n,\ m,)$ AE породжує послідовність $r_0,\ r_1,\ \ldots, r_t$, де $r_0 = n$,
$r_1 = m,\ r_t = d,\ r_{t+1} = 0,\ r_{i+1} = r_{i-1} \mod r_i$
$\gcd(a_n, a_m) = \gcd(a_{r_0}, a_{r_1} = \gcd(a_n, a_m) = \gcd(a_{r_1}, a_{r_2} = \cdots = \gcd(a_{t_0}, a_{t_{i+1}}) = a_{r_t} = a_0$ □

Consequence.
Якщо додатково $a_1 = 1,$ *то* $\gcd(n,\ m) = 1 \Rightarrow \gcd(a_n,\ a_m)$

Example:
$a_k = k$

Example:
$a_k = 2_k - 1$
$\gcd(a_n,\ a_m) =^? \gcd(a_m,\ a_{n-m})$
$a_n = 2^n - 1 = 2^n - 2^m - 1 = 2^m(2^{n-m} - 1) + (2^m - 1) = 2^m \cdot a_{n-m} + a_m = a_n$
$\gcd(2^n - 1,\ 2^m - 1) = 2^{\gcd(n,\ m)} - 1$

Example:
$a_k = \alpha^k - 1,\ \alpha \in \mathbb{N},\ \alpha \geq 2$
$a_0 = 0,\ a_1 = \alpha - 1 \neq 1$

Example:
$a_k = \alpha^k - \beta^k,\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{N},\ \alpha > \beta \geq 2$

(a_i) - евклідова і $a_0 = 0,$ то $\forall n > m: \ \gcd(a_n,\ a_m) = 1$

Chapter 3

Лекція 3

3.1 Розширений алгоритм Евкліда

Theorem 3.1.1 (лема Безу)**.**

$$\forall a,\ b \in \mathbb{N},\ d = \gcd(a,\ b) \quad \exists u,\ v \in \mathbb{Z},\ d = au + bv$$

Proof.
$r_0 = r_1 q_1 + r_2$
$r_1 = r_2 q_2 + r_3$
$r_2 = r_4 q_4 + r_5$
$\vdots$
$r_{n-3} = r_{n-2} q_{n-2} + r_{n-1}$
$r_{n-2} = r_{n-1} q_{n-1} + r_n$
$r_{n-1} = r_n q_n$
Тоді $d = r_n = r_{n-2} - r_{n-1} q_{n-1} = r_{n-2} - q_{n-1}(r_{n-3} - r_{n-2} q_{n-2}) = \cdots =$
$= u \cdot r_0 + v \cdot r_1$ □

Consequence.

1. $d = au + bv \Rightarrow$ *одне з чисел* u, v *- недодатне, а інше - невід'ємне.*
2. $d = \gcd(x1, x_2, \ldots, x_k) \Rightarrow a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{Z} :\ d = a_1 x_1 + a_2 + x_2 + \cdots + a_k x_k$
3. $\forall i :\ \ u_i,\ v_i \in \mathbb{Z}\ r_i = au_i + bv_i \Rightarrow u_0 = 1,\ v_0 = 0,\ u_1 = 0,\ v_1 = 1$
   $u_{i+1} = u_{i-1} - u_i q_i,\ v_{i+1} = v_{i-1} - v_i q_i,\ r_{i+1} = r_{i-1} - q_i r_i = (au_{i-1} + bv_{i-1}) -$
   $- q_i(au_i + bv_i) = a \underbrace{(u_{i-1} - q_i u_i)}_{u_{i+1}} + b \underbrace{(v_{i-1} - q_i v_i)}_{vi+1}$

Example:

gcd(123, 456).

$123 = 456 \cdot 0 + 123$

$456 = 3 \cdot 123 + 87 \qquad q_1 = 3$

$123 = 87 \cdot 1 + 36 \qquad q_2 = 1$

$87 = 36 \cdot 2 + 15 \qquad q_3 = 2$

$36 = 15 \cdot 2 + 6 \qquad q_4 = 2$

$15 = 6 \cdot 2 + 3 \qquad q_5 = 2$

$6 = 3 \cdot 2 \qquad q_6 = 2 \Rightarrow \text{gcd} = 3$

		q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	
		3	1	2	2	2	
u_i	1	0	1	-1	3	-7	17
v_i	0	1	-3	4	-11	26	-63

Theorem 3.1.2.

$$\text{gcd}(a,\ b)\ -\ \min\ \textit{додатне число , яке має форму } au + bv,\ \ u,\ v \in \mathbb{Z}$$

Proof.

1. $C = \{au + bv \mid u,\ v \in \mathbb{Z}\}$

   $d' = \min\{d' > 0\},\ d \in C$ тоді $\forall d \in C:\ c \,\vdots\, d'$

   Нехай $c' = au' + bv',\ c' \,\vdots\, d'$, тоді $c = q'd' + r',\ 0 < r' < d'$
   $r' = c' - q'd' = (au' + bv') - q'(au'_\alpha + bv'_\alpha) =$
   $= a(u' = -q'u'_\alpha) + b(v' - q'v'_\alpha)$ - Упс!

2. $d = au + bv = \text{gcd}(a,\ b) \Rightarrow d \,\vdots\, d'$

   $a = a \cdot 1 + b \cdot 0 \Rightarrow a \,\vdots\, d',\ \ b = a \cdot 0 + b \cdot 1 \Rightarrow b\ \cdots\ d'$

   $\Rightarrow d'$ - спільний дільник a та $b \Rightarrow d' = au'_\alpha + bv'_\alpha \,\vdots\, d \Rightarrow d = d'$

□

3.2 Лінійні діафантові рівняння

Definition 3.2.1. $f(x_1,\ x_2\,,\ldots,\ x_n) = 0,\ x_i \in \mathbb{Z}$
$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = c,\ a_i \in \mathbb{Z},\ c \in \mathbb{Z}$
$ax + by = c,\ \ a,\ b,\ c \in \mathbb{Z}$ - *коефіцієнти*, $x,\ y \in \mathbb{Z}$ - *невідомі.*

Theorem 3.2.1.

$$\textit{Нехай} ax + by = c \;\; d = \gcd(a,\, b)$$

1. *рівняння має розв'язки* $\Leftrightarrow c \,\vdots\, d$
2. $a = a_0 \cdot d,\; b = b_0 \cdot d,\; c = c_0 \cdot d,\; (x_0,\, y_0)$ *- якийсь розв'язок рівняння. Тоді довільний розв'язок* $(x,\, y)$ *:*
$\begin{cases} x = x_0 + b_0 \cdot t \\ y = y_0 - a_0 \cdot t \end{cases} \quad t \in \mathbb{Z}$

Proof.

1. Якщо $c \,\bar{\vdots}\, d$, але $ax + by \,\vdots\, d$ то Упс!
Якщо $c \,\vdots\, d$, то $a_0x + b_0y = c_0$ - еквівалентне рівняння
$1 = a_ou + b_0v \Rightarrow x_0 = u \cdot c_0,\; y_0v \cdot c_0$ - розв'язки.
2. $ax + by = a(x_0 + b_0t) + b(y_0 - a_0t) = \underbrace{(ax_0 + by_0)}_{=c} + \underbrace{(ab_0t - ba_0t)}_{a_0b_0dt - a_ob_0dt} = c$

Нехай $(x,\, y)$ - розв'язок рівняння
$ax + by = 0,\; ax_0 + by_0 = c \Rightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow a_0(x - x_0) + b_0(y - y_0) = 0 \; \gcd(a_0,\, b_0) = 1 \Rightarrow 1 = a_0u + b_0v \Rightarrow$
$\Rightarrow 0 = \underbrace{a_0u}_{=(1-b_0v)}(x - x_0) + b_0v(y - y_0) = (x - x_0) + b_0(u(y - y_0) - v(x - x_0)) \Rightarrow$
$\Rightarrow x - x_0 \,\vdots\, b_0,\; x - x_0 = b_0 \cdot t,\; t \in \mathbb{Z} \Rightarrow a_0 \cdot b_0t + b_0(y - y_0) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow y - y_0 = a_0t$ □

Example:
$15x + 9y = 27$
$15 = 9 \cdot 1$
$9 = 6 \cdot 1 + 3$
$6 = 3 \cdot 2 \Rightarrow 3 = 15 \cdot (-1) + 9 \cdot 2$
$27 \,\vdots\, 3 \Rightarrow$ розв'язки існують
$5x + 3y = 9$
$1 = 5 \cdot (-1) + 3 \cdot 2$
$x_0 = 9,\; y_0 = 18$
$\begin{cases} x = -9 + 3 \cdot t \\ y = 18 - 5 \cdot t \end{cases}$
$t = 10: \quad x = -9 + 30 = 21,\; y = 18 - 50 = -32$

$5 \cdot 21 - 3 \cdot 32 = 105 - 96 = 9$

$?t : \qquad x > 0,\ y > 0$

$$\begin{cases} -9 + 3t > 0 \\ 18 - 5t > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t > 3 \\ t < 3,6 \end{cases}$$

Chapter 4

Лекція 4

4.1 Прості числа

Definition 4.1.1. *$n \in \mathbb{N}$ - просте $\Leftrightarrow$ має рівно два дільники 1 та n*
$n \in \mathbb{N}$ - складене $\Leftrightarrow \exists a: \; 1 < a < n \quad n \,\vdots\, a$

1 - не просте, не складене

Lemma 4.1.1.

$$n \in \mathbb{N}: \; \gcd(n,\, n+1) = 1$$

Theorem 4.1.2 (Евклід)**.**

Якщо $A = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ - скінченна сукупність простих чисел, то існує просте $\underline{P} \notin A$

Proof.
$Q = p_1 p_2 p_3 \dots p_n + 1 \Rightarrow Q \,\bar{\vdots}\, p_i,\; n = \overline{1, n}$
Q - або просте, або має простий дільник ☐

Consequence.
Простих чисел нескінченно багато

Lemma 4.1.3.

$$n \in \mathbb{N} \text{ - \textit{складене} } d > 1 - \min \text{ \textit{дільник} } n \Rightarrow d \text{ - \textit{просте}}$$

Proof.
Нехай d - складене, $d = a \cdot b, \;\; a,\; b \neq 1,\; d \,\vdots\, a,\; n \,\vdots\, d \Rightarrow n \,\vdots\, a$ - Упсв! ☐

4.2 Розподіл простих чисел

Сито Ератросфена(пошук простих чисел?)
2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
// Беремо перше число яке тут є. Це число 2 - воно просте. Після чого беремо і викреслюємо кожне друге число.
2 3 ~~4~~ 5 ~~6~~ 7 ~~8~~ 9 ~~10~~ 11 ~~12~~ 13 ~~14~~ 15 ~~16~~ 17 ~~18~~ 19 ~~20~~
// Беремо перше незакреслене число. Це число 3 - воно просте. Викреслюємо кожне третє число в цьому ряду.
2 3 ~~4~~ 5 ~~6~~ 7 ~~8~~ ~~9~~ ~~10~~ 11 ~~12~~ 13 ~~14~~ ~~15~~ ~~16~~ 17 ~~18~~ 19 ~~20~~
// Беремо настпуне. Це 5 - просте. Викреслюємо кожне п'яте число. Ну вони вже викреслині. Тому далі уже нічого не викреслюєтся.
2 3 ~~4~~ 5 ~~6~~ 7 ~~8~~ ~~9~~ ~~10~~ 11 ~~12~~ 13 ~~14~~ ~~15~~ ~~16~~ 17 ~~18~~ 19 ~~20~~

Lemma 4.2.1.

$$n = a \cdot b,\ \ 1 < a,\ b < n \Rightarrow \min\{a,\ b\} \le \sqrt{n} \le \max\{a,\ b\}$$

Proof. Від супротивного ☐

Consequence.
У ситі Ератросфена для $2 \dots N$ *після викреслень чисел* $\le \sqrt{n}$ *залишаются прості.*

Example:
$\forall m \in \mathbb{N}$: існують m послідовних натуральних складених чисел.
$(m+1)! \vdots 2,\ (m+1)! \vdots 3,\ (m+1)! \vdots 5,\ \dots,\ (m+1)! \vdots (m+1).$

Example:
Прості числа-близнюки $p,\ q$: прості, $p - q = 2$
Наразі найбільша відома пара чисел близнюків: $2996863034895 \cdot 2^{1290000} \pm 1$

Example:
Прості числа Мерсена: $M_p = 2^p - 1$ - просте, $M_n = 2^n - 1$ - складене

Lemma 4.2.2.

$$M_p \text{ - \textit{просте} } \Rightarrow p \text{ - \textit{просте} }.\ p = a \cdot b \Rightarrow M_p = 2^{ab} - 1 \vdots 2^a - 1$$

Постулат Бертрана
$\forall n \in \mathbb{N}, \geq 4.$ інтервал $n \dots 2n-2$ містить просте число.

Функція розподіла простих чисел $\Pi(x)$
$\Pi(x) =$ кількість простих чисел $< x$.
$\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{\log_2 x} \leq \Pi(x) \leq 5 \cdot \frac{x}{log_2 x} \to \alpha \cdot \frac{x}{\ln x} \leq \Pi(x) \leq \beta \cdot \frac{x}{\ln x}, \;\; \alpha = 0.92129, \; \beta = 1,10555$

Theorem 4.2.3 (Адамер, Вале)**.**

$$\Pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}(\Pi(x) \sim \int\limits_2^x \frac{dt}{\ln t}) \Rightarrow p_n \sim n \cdot \ln n$$

Theorem 4.2.4 (Діріхле)**.**

Якщо $\gcd(a,\, b) = 1,$ *то існує* ∞*простих чисел виду* $a \cdot m + b$

4.3 Основна теорема арифметики

Lemma 4.3.1 (Euclid)**.**

$$p \text{ - просте, } ab \,\vdots\, p \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a \,\vdots\, p \\ b \,\vdots\, p \end{array}\right.$$

Proof.

Нехай $ab \,\vdots\, p$, але $a \,\bar{\vdots}\, p \Rightarrow \gcd(a,\, p) = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists u,\, v, \quad au + pv = 1 \Rightarrow \underbrace{ab}_{\vdots\, p} \cdot u + \underbrace{p}_{\vdots\, p} \cdot bv = \underbrace{b}_{\vdots\, p}$ □

Theorem 4.3.2 (основна теорема арифметики)**.**

$\forall n \in \mathbb{N} : n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_t^{\alpha_t}$, *де* $p_1 < p_2 < \dots < p_t -$ *- прості,* $\alpha_i \geq 1$ *- натуральні.*

Proof.

1. Існування
   Нехай все вірне , n_0 $-$ min чысло, яке не розкладаэться$\Rightarrow$ n_0 - складене
   $\Rightarrow \exists a : \;\; 1 < a < n_0 : \;\; n = a \cdot b$

2. Єдність
   Нехай $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_t^{\alpha_t} = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \dots q_t^{\beta_t}$, $n \vdots p_1 \Rightarrow q_1^{\beta_1} \dots q_t^{\beta_t} \vdots p_1 \exists i : \ q_i^{p_i} \vdots p_1 \Rightarrow$
   $\Rightarrow q_i = p_i$

$\square$

Example:

Приклад Гільберта

Розглянемо числа виду $4k + 1$

5, 9, 13, 17, 21, 25

$((4k_1 + 1)(4k_2 + 1) = 4(\dots) + 1$

Example:

1. $d \mid n \Rightarrow d = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \dots q_t^{\beta_t}, \ \ 0 \le \beta_i \le \alpha_i$
2. $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_t^{\alpha_t}, \ \ \alpha_i \ge 0, \qquad b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_t^{\beta_t}, \ \ \beta_i \ge 0$
   $\gcd(a,\ b) = \prod_{i=1}^{t} p_i^{\min\{\alpha_i,\ \beta_i\}}, \qquad \mathrm{lcm}(a,\ b) \prod_{i=1}^{t} p_i^{\min\{\alpha_i,\ \beta_i\}}$
3. $a \vdots b, \ a \vdots c, \ \gcd(b,\ c) = 1 \Rightarrow a \vdots (b \cdot c)$

Chapter 5

Лекція 5

5.1 Мультиплікативні функції

$f(n)$ - мультіплікативна:

1. $f(n) \not\equiv$
2. $\forall a,\ b \in \mathbb{N}: \qquad \gcd(a,\ b) = 1 \Rightarrow f(ab) = f(a)f(b)$

Example:

$f(n) = 1$
$f(n) = n$
$f(n) = n^S$

Property.

1. $f(1) = 1;\ f(n) = f(n \cdot 1) = f(n)f(1)$

2. *Якщо* $x_1, x_2, \dots, x_t$ *- попарно взаємнопрості, то* $f(x_1 x_2 \dots x_t) = f(x_1) \dots f(x_t)$

3. *Якщо* $f(n), g(n)$ *- мультиплікативні, то* $h(n) = f(n) \cdot g(n)$ *- мультиплікативна*

4. $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_t^{\alpha_t},\ \ f(n) = f(p_1^{\alpha_1}) \cdot f(p_2^{\alpha_2}) \dots f(p_t^{\alpha_t})$

Definition 5.1.1. $f(n)$ *- мультиплікативна. Числовий інтеграл* $g(n) = \sum\limits_{d \mid n} f(d)$

Theorem 5.1.1 (S).

$$f(n) \text{ - мультиплікативна} \Rightarrow g(n) \text{ - також.}$$

Proof.
$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_t^{\alpha_t},\ \ d \mid n \Rightarrow d = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_t^{\beta_t},\ \ 0 \le \beta_i \le \alpha_i$
$g(n) = \sum\limits_{d \mid n} f(d) = \sum\limits_{\beta_1=0}^{\alpha_1} \sum\limits_{\beta_2=0}^{\alpha_2} \cdots \sum\limits_{\beta_t=0}^{\alpha_t} f(p_1^{\beta_1} \dots p_t^{\beta_t}) =$
$= \sum\limits_{\beta_1} \cdots \sum\limits_{\beta_t} \prod i = 1^t f(p_i^{\beta_t}) = \prod\limits_{i=1}^{t} \sum\limits_{\beta_i=0}^{\alpha_i} f(p_i^{\beta_i})$ □

$$g(n) = \prod_{i=1}^{t} \sum_{\beta_i=0}^{\alpha_i} f(p_i^{\beta_i})$$

5.2 Кількість та сума дільників

Кількість дільників $\tau(n) = \sum\limits_{d \mid n} 1$
Сума дільників $\sigma(n) = \sum\limits_{d \mid n} d$

Proposition.

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_t^{\alpha_t}, \qquad p_t^{\alpha_t} :\ \ \tau(n) = (1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\dots(1+\alpha_t)$$

$$\sigma = \prod_{i=0}^{t} \frac{p_i^{\alpha+1}}{p_i - 1}$$

Proof.
p - просте. $\qquad \tau(p) = 2 \qquad \tau(p^\alpha) = 1 + \alpha$
$\tau(n) = \tau(p_1^{\alpha_1}) \dots \tau(p_t^{\alpha_t}) = (1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\dots(1+\alpha_t)$
$\sigma(p) = 1 + p \qquad \sigma = 1 + p + p^2 = \dots + p^\alpha = \frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1}$
$\sigma(n) = \sigma(p_1^{\alpha_1})\sigma(p_2^{\alpha_2})\dots\sigma(p_t^{\alpha_t})$ □

Example:
$n = 1000 = 2^3 5^3$
$\tau(1000) = (1+3)(1+3) = 16$
$\sigma(1000) = \frac{2^4-1}{2-1} \cdot \frac{5^4-1}{5-1} = 2340$

Example:
$n = 1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$
$\tau(1001) = (1+1)(1+1)(1+1) = 8$
$\sigma(1001) = (1+7)(1+11)(1+13) = 1344$

Property.

1. $\tau(n) \le 2\sqrt{n}$
   $n \,\vdots\, d \Rightarrow n = d \cdot d'$
   $\sigma(n) \ge n + 1$
2. $\tau(n)$ *- непарне* $\Leftrightarrow n = m^2$
3. σ *- непарне* $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2 \\ 2m^2 \end{array}\right.$

5.3 Досконалі числа

Definition 5.3.1. *Досконале число n:*
n = сумі усіх дільників окрім власне n або $\sigma(n) = 2n$

> **Example:**
> $n = 6: \qquad 1 + 2 + 3 = 6$

> **Example:**
> $n = 28: \qquad 1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$

Theorem 5.3.1 (Евклід-Ойлер)**.**

Парне n - досконале $\Leftrightarrow n = 2^{p-1} \cdot M_p$, де $M_p = 2^p - 1$ - просте число Марсена

Proof.

1. $n = 2^{p-1} \cdot M_p, \qquad p > 2$
   $\sigma(n) = \sigma(2^{p-1} \cdot M_p) = \sigma(2^{p-1})\sigma(M_p) = (2^p - 1)(M_p + 1) = 2^p(2^p - 1) = n$
2. Нехай n - парне досконале, $n = 2^k \cdot b$, b - непарне
   $\sigma(n) = \sigma(2^k \cdot b) = (2^k - 1) \cdot \sigma(b) = 2^k \cdot b = 2n \Rightarrow$
   $\Rightarrow b \,\vdots\, (2^k - 1),\ b = (2^k - 1) \cdot c \qquad (2^k - 1)\sigma(b) = 2^k(2^k - 1) \cdot c$
   $\sigma(b) = 2^k \cdot c = (2^k - 1 + 1) \cdot c = b + c$
   $b \,\vdots\, c,\ c \ne 1,\ c \ne b \Rightarrow \sigma(b) > 1 + b + c \Rightarrow c = 1.$
   $b = 2^k - 1,\ \sigma(b) = b + 1 \Rightarrow b$ - просте. $n = 2^{k-1}\underbrace{(2^k - 1)}_{\text{просте}}$

□

5.4 Функція Мебіуса

Definition 5.4.1. $\mu(n)$:

$$\mu(p^\alpha) = \begin{cases} -1, & \alpha = 1 \\ 0, & \alpha > 1 \end{cases} \Rightarrow M(n) = \begin{cases} (-1)^k, & n = p_1 p_2 \dots p_t \\ 0, & n \,\vdots\, a^2 \end{cases}$$

Lemma 5.4.1 (характерізаційна властивість μ)**.**

$$\sum_{d \mid n} M(d) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}$$

Proof. p^α : $\mu(1) + \mu(p) + \mu(p^2) + \dots + \mu(p^\alpha) = 1 + (-1) + 0 + 0 + \dots + 0 = 0$
За теоремою 5.1.1 $\sum\limits_{d \mid n} \mu(d) = \prod\limits_i \sum\limits_\beta \mu(p_i^\beta)$ □

Proposition. $f(n)$ - *мультіплікативна,* $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_t^{\alpha_t}$

$$\sum_{d \mid n} M(d) f((d) = (1 - f(p_1))(1 - f(p_2)) \dots (1 - f(p_t))$$

Proof. За теоремою 5.1.1 $\sum\limits_\beta \mu(p_1^\beta) f({p_i}^\beta) = \mu(1) f(1) + \mu(p_i) f(p_i) +$
$+ \mu(p_i^2) f(p_i^2) + \dots = 1 + (-1) f(p_i) = 1 - f(p_i)$ □

Theorem 5.4.2 (закон обертання Мебіуса)**.**

$$f(n) \text{ - мультіплікативна, } g(n) = \sum_{d \mid n} f(d) \Rightarrow f(n) = \sum_{d \mid n} M(d) \cdot g(\frac{n}{d})$$

Proof. $\sum\limits_{d \mid n} M(d) \cdot \sum\limits_{\delta \mid \frac{n}{d}} f(\delta) = \sum\limits_{(d, \delta),\, d\delta \mid n} \mu(d \cdot f(\delta) = \sum\limits_{\delta \mid n} \sum\limits_{d \mid \frac{n}{\delta}} \mu(d) f(\delta) =$
$= \sum\limits_{\delta \mid n} f(\delta) \cdot \sum\limits_{d \mid \frac{n}{d} = 1 \Rightarrow \delta = n} \mu(d) = f(n)$ □

Example:
$a_0, \ a_1, \ \dots, \ a_n$
$A(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ - ряд Діріхле. $B(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$
$C(s) = A(s) \cdot B(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s} \Rightarrow C_n = \sum\limits_{d \mid n} a_d \cdot b_{\frac{n}{d}}$ $\xi(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^S}$
$\frac{1}{\xi(s)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^S}$ $C(s) = A(s) \cdot \xi(s)$ $C_n = \sum\limits_{d \mid n} a_d$

$$A(s) = C(s) \cdot (\xi(s))' \Rightarrow a_n = \sum_{d \mid n} \mu(d) c_{\frac{n}{d}}$$