Домашня робота 1

1. (a) $(L_1L_2)^*L_1 = L_1(L_2L_1)^*$
   $\Leftarrow L_1L_2 = \{xy|\, x \in L_1,\ y \in L_2\};$
   $(L_1L_2)^* = \{xy,\ xyxy,\ xyxyxy, ...|\, x \in L_1,\ y \in L_2\};$
   $(L_1L_2)^*L_1 = \{xyx,\ xyxyx,\ xyxyxyx, ...|\, x \in L_1,\ y \in L_2\}.$
   $\Rightarrow L_2L_1 = \{yx|\, x \in L_1,\ y \in L_2\};$
   $(L_2L_1)^* = \{yx,\ yxyx,\ yxyxyx, ...|\, x \in L_1,\ y \in L_2\};$
   $L_1(L_2L_1)^* = \{xyx,\ xyxyx,\ xyxyxyx, ...|\, x \in L_1,\ y \in L_2\}.$
   Легко бачити, що $(L_1L_2)^*L_1 = L_1(L_2L_1)^*$

   (b) $(L_1^R \cap L_2^R)^* = (L_1^* \cap L_2^*)^R$
   $\Leftarrow L_1^R \cap L_2^R = \{x^R|\, x \in L_1\ \wedge\ x \in L_2\};$
   $(L_1^R \cap L_2^R)^* = \{x^R, x^Rx^R, x^Rx^Rx^R, ...|\, x \in L_1\ \wedge\ x \in L_2\}.$
   $\Rightarrow L_1^* \cap L_2^* = \{x,\ xx,\ xxx, ...|\, x \in L_1\ \wedge\ x \in L_2\};$
   $(L_1^* \cap L_2^*)^R = \{(x)^R,\ (xx)^R,\ (xxx)^R, ...|\, x \in L_1 \wedge\ x \in L_2\} =$
   $= \{x^R,\ x^Rx^R, x^Rx^Rx^R, ...|\, x \in L_1\ \wedge\ x \in L_2\}.$
   Легко бачити, що $(L_1^R \cap L_2^R)^* = (L_1^* \cap L_2^*)^R$

2. $L_{pref}^R(x) = L_{suf}(x^R).$
   Нехай $x = \alpha_1\alpha_2\alpha_3$...Тоді: $x^R = ...\alpha_3\alpha_2\alpha_1; L_{pref}(x) = \{\alpha_1, \alpha_1\alpha_2, \alpha_1\alpha_2\alpha_3, ...\};$
   $L_{pref}^R = \{...,\ \alpha_3\alpha_2\alpha_1,\ \alpha_2\alpha_1,\ \alpha_1\};\ L_{suf}(x^R) = \{...,\ \alpha_3\alpha_2\alpha_1,\ \alpha_2\alpha_1,\ \alpha_1\} \Rightarrow$
   $L_{pref}^R(x) = L_{suf}(x^R).$

3. $L_1^{**} = L_1^*.$
   Доведемо, що $L_1^* \subseteq L_1^{**}:$
   $L_1^{**} = \{\varepsilon\} \cup L_1^* \cup (L_1^*)^2 \cup ... \Rightarrow L_1^* \subseteq L_1^{**}.$
   Доведемо, що $L_1^{**} \subseteq L_1^*:$
   Нехай існує таке $a \in L_1^{**},$ що $a \in L_1^*$
   $L_1^{**} = \bigcup\limits_{m=0}^{\infty}(L_1^*)^m = \bigcup\limits_{m=0}^{\infty}(\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}L_1^n)^m \Rightarrow a \in L_1^{m_1}||L_1^{m_2}||...||L_1^{m_n},$
   за властивостями кратної канкатенації: $x \in L_1^{m_1+m_1+...+m_n},$
   $L_1^{m_1+m_1+...+m_n} \subseteq L_1^*.$
   $L_1^* \subseteq L_1^{**}\ \&\ L_1^{**} \subseteq L_1^* \Rightarrow L_1^{**} = L_1^*.$

4. $\Sigma^1 = \{0,\ 1\},\ \Sigma^2 = \{00,\ 01\ ,10,\ 11\},$
   $\Sigma^3 = \{000,\ 001,\ 010,\ 011,\ 100,\ 101,\ 110,\ 111\}$
   $\Sigma^4 = \{0000,\ 0001,\ 0010,\ 0011,\ 0100,\ 0101,\ 0110,\ 0111,\ 1000,\ 1001,$
   $1010,\ 1011,\ 1100,\ 1101,\ 1111\}$
   $\Sigma^5 = \{00000,\ 00001,\ 00010,\ 00011,\ 00100,\ 00101,\ 00110,\ 00111\, 01000,$
   $01001, 01010, 01011, 01100, 01101, 01111, 10000, 10001, 10010, 10011, 10100,$
   $10110,\ 11000,\ 11001,\ 11010,\ 11011,\ 11100,\ 11101,\ 11111\ \}.$

Σ^2 – 2 безквадратних слова, Σ^3 – 2 безквадратних слова, Σ^5 – 0 безквадратних слова. Після Σ^4 усюди буде 0 без квадратних слів. Отже, загалом: $2+2+2 = 6+\varepsilon$(порожне слово) $= 7$.

5. (a) $(x^R)^R = x$. Доведемо від супротивного:
   $(x^R)^R \neq x$. Нехай $x = ab,\ \ x^R = ba$,
   $(x^R)^R = ab = x \Rightarrow$ протиріччя.

   (b) $(xy)^R = y^R x^R$. Доведемо від супротивного:
   $(xy)^R \neq y^R x^R$. Нехай $x = ab,\ \ y = cd,\ \ (xy)^R = (abcd)^R = dcba$.
   $y^R x^R = dcba = (xy)^R \Rightarrow$ протиріччя.

6. 1. $n = 2$. $L \subseteq \{01,\ 10,\ 0101,\ 0110,\ 1010, 1001\}$.
   $x = 01,\ \ 0010 \notin L_1,\ \ 1011 \notin L_1$. $x = 10,\ \ 1101 \notin L_1,\ \ 0100 \notin L_1$.
   2. $L_1 \subseteq \{01,\ 10\}^n,\ \ n \geq 2 \Rightarrow\ \ 0x0 \notin L_1,\ \ 1x1 \notin L_1$.
   3. $\{01,\ 10\}^{n+1} = \{01,\ 10\}^n\{01,\ 10\}$.
   $L_1 \subseteq \{01,\ 10\}^n \Rightarrow L_1 \subseteq \{01,\ 10\}^n\{01,\ 10\}. \Rightarrow 0x0 \notin L_1,\ \ 1x1 \notin L_1$.