Математический анализ 2

Contents

Chapter 1

Неопределенный интеграл

1.1 Понятие первообразной и неопределеного интеграла

Функция $F(x)$ называется **первообразной** функции $f(x)$ на множестве $X \subset \mathbb{R}$, или $\forall x \in X \;\; F'(x) = f(x)$.

Theorem 1.1.1. *Если $F(x)$ - некоторая первообразная для $f(x)$ на множестве X, то любая другая первообразная имеет вид: $F(x) + c$, где $c = const$ - произвольная.*

Proof. Пусть $F(x)$ - первообразная функции $f(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)$; Тогда: $(F(x)+c)' = F'(x)+0 = f(x) \Rightarrow F(x)+c$ - первообразная для $f(x)(c = const)$.
Пусть $F_1(x)$ - тоже первообразная для $f(x)$, т.е. $F_1'(x) = f(x)$.
Рассмотрим разность: $F_1(x) - F(x)$;
$(F_1(x) - F(x))' = F_1'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow F_1(x) - F(x) = c = const$, т.е. :$F_1(x) = F(x) + c$ □

Таким образом множество всех первообразных функции $f(x)$ имеет вид $F(x) + c$.
Множество всех первообразных функции $f(x)$ называется **неопределенным интегралом** этой функции и обозначается $\int f(x)dx$.
$f(x)$ - подинтегральная функция, $f(x)dx$ - подинтегральное выражение, x - переменная инегрирования, $\int$ - неопределенный интеграл.

Example:

$$f(x) = sign(x) = \begin{bmatrix} 1, \;\; x > 0 \\ 0, \;\; x = 0 \\ -1, \;\; x < 0 \end{bmatrix}, \;\; x \in (-1;\, 1).$$

Предположим, что существует такая первообразная $\exists F(x) : \forall x \in (-1; 1) :$

$F'(x) = sign(x)$, т.е.

$$F'(x) = \left[\begin{array}{l} 1, \;\; x \in (0;\; 1) \\ 0, \;\; x = 0 \\ -1, \;\; x <\in (-1;\; 0) \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} F'(x) = 0 \\ F'_{-}(x) = -1 \\ F'_{+}(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$F'(0)$ - не существует $\Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow$ $F(x)$ не существует.

Remark. Достаточным условием существования первообразной у функции на данном множестве является ее непрерывность на этом множестве.

1.2 Свойства неопределенного интеграла

Пусть $\int f(x)dx = F(x) + c$ $(F'(x) = f(x))$.

1. Производная от неопределенного интеграла равна подинтегральной функции, дифференциал неопределенного интеграла равен подинтегральному выражению.

$$(\int f(x)dx)'_x = f(x); \;\; d(\int f(x)dx) = f(x)dx.$$

Proof. $(\int f(x)dx)'_x = (F(x) + c)'_x = F'(x) + c' = f(x)$;
$d(\int f(x)dx) = (\int f(x)dx)'_x dx = f(x)dx.$ □

2. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной.

$$\int d(F(x)) = F(x) + c.$$

Proof. $\int d(F(x)) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + c$ □

3. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx, \;\; a = const.$$

Proof. $\int af(x)dx = \int aF'(x)dx = \int (aFx)'dx = \int d(aF(x)) = (aF(x) +$
$+c_1) = a(F(x) + \frac{c_1}{a} = \left| c = \frac{c_1}{a} \right| = a(f(x) + c) = a\int f(x)dx$ □

4. Интеграл суммы двух функций равен сумме интегралов этих функций.

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(X)dx + \int g(x)dx.$$

Proof. Пусть $\int g(x)dx = G(x) + c$; тогда $\int (f(x) + g(x))dx = \int (F'(x) +$
$+G'(x))dx = \int (F(x) + G(x))'dx = \int d(F(x) + G(x)) = F(x) + G(x) + +c =$
$\left| c = c_1 + c_2 \right| = (F(x) + c_1) + (G(x)c_2) = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ □

Remark.

- свойство 4 справедливо для любого конечного числа слогаемых
- свойство 3-4 называются свойством линейности неопределенного интеграла
- свойство 1-2 отражают связь операций дифференцирования и интегрирования

1.3 Таблица основных неопределенных интегралов

1. $$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c; \ \ \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$$

2. $$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$$

3. $$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \ \ a > 0$$

4. $$\int e^x dx = e^x + c$$

5. $$\int \sin x\, dx = -\cos x + c$$

6. $$\int \cos x\, dx = \sin x + c$$

7. $$\int \frac{dx}{\cos^2 dx} = \tan x + c$$

8. $$\int \frac{dx}{\sin^x} = -\cot x + c$$

9. $$\int \mathrm{sh} x\, dx = \mathrm{ch}\, x + c$$

10. $$\int \mathrm{ch} x\, dx = \mathrm{sh}\, x + c$$

11. $$\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th}\, x + c$$

12. $$\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{cth}\, x + c$$

13.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{a-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c$$

14.
$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c$$
$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c$$

Дополнительные формулы:

15.
$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln |\frac{x-a}{x+a}| + c \text{ - высокий логарифм}$$

16.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}} = \ln |x + \sqrt{x^2+A}| + c \text{ - длинный логарифм}$$

17.
$$\int \sqrt{x^2+A}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+A} + \frac{A}{2} \ln |x + \sqrt{x^2+A}| + c$$

18.
$$\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + c$$

В этих формулах вместо x может быть записана произвольная дифференцируемая функция от x.

1.4 Основные примеры интегрирования

1.4.1 Непосредственное интегрирование

Непосредственное интегрирование заключается в использовании тождественных преобразований подинтегральной функции, свойства линейности интеграла и таблицы интегралов.

Example:

1. $\int (\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x}})^2 dx = \int \frac{x+2x^{\frac{1}{2}}+1}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int (x^{\frac{1}{3}} + 2x^{\frac{-1}{6}} + x^{\frac{-2}{3}}) dx = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + 2 \cdot \frac{x^{\frac{5}{6}}}{5} \cdot 6 +$

$x^{\frac{1}{3}} \cdot 3 + c$

2. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = |\cos^2 x + \sin^2 x = 1| = \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx + \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x - \cot x + c$

1.4.2 Замена переменной

Theorem 1.4.1. *Пусть на* $\forall x \in (a; b)$ $\int f(x)dx = F(x) + c$, *(на всем интервале* $(a;\ b)$ *известна первообразная функции):* $F'(x) = f(x)$ $x = \varphi(t)$ *- функция дифференцируемая; причем* $\varphi(t)$: $t \in (\alpha;\ \beta)$ *и* $\varphi : (\alpha;\ \beta) \to (a;\ b)$. *Тогда справедлива формула:*

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi_t'(t) dt = F(\varphi(t)) + c$$

Proof. $(f(\varphi(t)))_t' = F_\varphi'(\varphi(t)) \cdot \varphi_t'(t) = |\varphi(t) = x| = F_x'(x)\varphi_t'(t) = |F_x'(x) = f(x)| = f(x) \cdot \varphi(t) = |x = \varphi(t)| = f(\varphi(t)) \cdot \varphi_t'(t) \Rightarrow F(\varphi(t))$ первообразная для $f(\varphi(t)) \cdot \varphi_t'(t) \Rightarrow \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi_t'(t) dt = F(\varphi(t)) + c$ □

Remark.

$$\varphi_t'(t)dt = d(\varphi(t)) \Rightarrow \int f(\varphi(t)) \cdot d\varphi = F(\varphi) + c$$

1. **Внесения выражения под знак дифференциала**

$$\int f(x)dx = \int g(\varphi(x)) \cdot \varphi_x'(x)dx = \int g(\varphi)d\varphi = |G(x) - \text{известно} G'(x) = g(x)| =$$

$$= G(\varphi) + c = G(\varphi(x)) + c.$$

Часто используются преобразование дифференциала $dx = d(x + +a) = \frac{1}{k}d(kx) = \frac{1}{k}d(kx + b)$
$x^{n-1}dx = \frac{1}{n}d(x^n)$
Преобразования дифференциалов
$\sin x\, dx = -d(\cos x)$
$\cos x\, dx = d(\sin x)$
$\frac{dx}{\cos^2 x} = d(\tan x)$
$\frac{dx}{x} = d(\ln x)$
$\frac{dx}{1+x^2} = d(\arctan x)$
$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arcsin x)$

Example:

$\int \sin^3 x dx = \int \sin x \sin^2 x dx \int (1-\cos^2 x)\cdot(-d(\cos x)) = \int (\cos^2 - 1) d(\cos x) =$

$= \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + c.$

2. **Вынесения выражения из-под знак дифференциала**
$\int f(x)\,dx = |x = \varphi(t) \Rightarrow dx = \varphi'(t)dt| = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = |g(t) =$
$= G'(t)| = G(t) + c = |x = \varphi(t) \ \ t = \varphi^{-1}(x)| = G(\varphi^{-1}(x)) + c$

Example:

$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = |x = a \sin t dx = a \cos t dt| = \int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} a \cos t dt =$

$= a^2 \int \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot \cos t\, dt = a^2 \int \cos^{@} t\, dt = \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos^2 t) dt = \frac{a^2}{2}(t + \frac{\sin 2t}{2}) + c = \frac{a^2}{2}(t + \sin t \cos t) + c = |\cos t = \sqrt{1 - \sin t} \ \ \frac{x}{a}$
$t = \arcsin \frac{x}{a}| = \frac{a^2}{2}(\arcsin \frac{x}{a} + \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \cdot \frac{x}{a}) = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + c$

1.4.3 интегрирование по частям

Пусть $u = u(x),\ v = v(x)$ - две диффренцируемые функции.
по свойству дифференциала:
$d(uv) = udv + vdu \Rightarrow \int d(uv) = \int udv + \int vdu$ - формула интегрирования по частям.
В исходном интеграле $\int f(x)dx$ подинтегральное выражение представляется в виде двух сомножителей. Как правило, это можно сделать неоднозначно.
После того как u и dv выбраны, находим $du,\ v,\ ...$
$\int f(x)dx = |f(x) = u,\ dx = dv| \Rightarrow du = u'dx = ... \Rightarrow v = \int dv$
в результате применения формулы полученный интеграл оказывается более простым, чем исходный.
При необходимости формула интегрирования по частям применяется несколько раз.

$$\text{I. } \int P_n(x) \left\{ \begin{array}{l} \sin(kx+b) \\ \cos(kx+b) \\ a^{kx} \\ e^{kx} \\ \mathrm{sh} kx,\ \mathrm{ch}(kx) \end{array} \right\} dx \qquad U = Pn(x);\ \ dv = \{ \ldots \}$$

$$\text{II. } \int P_n(x) \left\{ \begin{array}{l} \arcsin x \\ \arccos x \\ \arctan x \\ \ln x \end{array} \right\} dx \qquad U = \{\dots\}; \ dv = Pn(x)dx$$

$$\text{III. } \int e^{kx} \left\{ \begin{array}{l} \sin(ax+b) \\ \cos(ax+b) \end{array} \right\} dx \qquad U = e^{kx}; \ dv = \{\dots\}dx$$

Example:

$\int_I e^x \sin 2x dx \underset{III}{=} \Big| u = e^x \Rightarrow du = e^x dx; \ \sin 2x dx = dv; \ v = \int \sin 2x dx =$
$= -\frac{\cos 2z}{2} \Big| = -\frac{e^x \cos 2x}{2} + \int \frac{\cos 2x}{2} \cdot e^x dx = \Big| u = e^x; \ du = e^x; \ dv = \cos 2x dx; \ v =$
$= \frac{\sin 2x}{2} \Big| = -\frac{e^x \cos 2x}{2} + \frac{1}{2}(\frac{e^x \sin 2x}{2} - \int \frac{\sin 2x}{2} \cdot e^x dx) = -\frac{e^x \cos 2x}{2} + \frac{1}{4} e^x \sin 2x -$
$- \frac{1}{4} \int e^x \underset{I}{\sin} 2x dx$
$I = -\frac{e^x \cos 2x}{2} + \frac{1}{4} e^x \sin 2x - \frac{1}{4} I; \ I = -\frac{e^x \cos 2x}{2} + \frac{1}{4} e^x \sin 2x.$
$I = \frac{4}{5}(\frac{1}{4} e^x \sin 2x - \frac{1}{2} e^x \cos 2x) + c$

1.5 Интегрирование рациональных функций

1.5.1 Основные сведения о рациональных функциях

1. **Многочлен(целая рациональная функция)**
   Многочленом $P_n(x)$ называется функция вида $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0$; где $n \in \ltimes, \ a_i \in \diagdown, \ i = \overline{0,n}$
   Корнем многочлена называется значение x_0(вообще говоря, комплексное) аргумента x, при котором многочлен обращается в ноль.
   x_0 - корень $P_n(x)$ или $P_n(x_0) = 0$

   Theorem 1.5.1.

   Если x_0—корень многочлена $P_n(x)$, то многочлен делится нацело на$(x - x_0)$,

   т.е. $P_n(x)$ представлется в виде: $P_n(x) = (x - x_0) \cdot Q_{n-1}(x)$,

   где Q — многочлен степени$n - 1$

   Theorem 1.5.2.

   Всякий многочлен степени $n > 0$ имеет по крайней мере один корень,

   действительный или комплексный

Consequence.

(1) Многочлен n-ой степени можно представить в виде: $P_n(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)$, где $x_1, \dots, x_n$ - корни $P_n(x)$, a_n - старший коэффициент

(2) Если среди корней многочлена имеются одинаковые, то объединим соответствующие или множители. Получим:
$P_n(x) = a_n(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2}\dots(x - x_n)^{k_m}$, где $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$.
для $x_i:\ (x - x_i)_i^k;\ k_i$ - кратность корня x_i.
Такое представление называется разложением многочлена на линейные множители.

Theorem 1.5.3.
Известно, что если многочлен имеет комплексный корень
$x_0 = a_i + ib(a,\ b \in \mathbb{R};\ x_0 \in \mathbb{C})$, *то комплексное спряженое число*
$\bar{x} = a - ib$ *- тоже корень* $P_n(x)$. *Таким образом, в разложении многочлена комплексно спряженные числа входят парами, перемножим:*
$(x - (a + ib))(x - (a - ib)) = x^2 - x(a + ib) - x(a - ib) + (a + ib)(a - ib) = x^2 - ax - ibx - ax + ibx + a^2 + b^2 = x^2 - 2ax + a^2 + b^2$.
Полученый трехчлен имеет действительный коэффициент, причем дискретный
$D = B^2 - 4A \cdot C = 4a^2 - 4(a^2 + b^2) = -4b^2 < 0$
Получаем, что пару множителей, соответсвующую двум комплексных сопряженным корням можно заменить квадратный трехчлен с действительным коэффициентом и $D < 0$.
Окончательно получим разложение на множители в виде:
$P_n(x) = (x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2}(x - x_5)^{k_5}(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1}\dots(x^2 p_m x + q_m)^{l_m}$,
где $x_1, \dots, x_5 \in \mathbb{R}$ *- корни многочлена* $Pn(x); p_i,\ q_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{1, m}$;
$D_i = p_i^2 - 4q_i < 0. \qquad k_1 + \dots + k_5 + 2(l_1 + \dots + l_m) = n$

Многочлен называется **тождественно равным нулю**

$$Pn(x) \equiv 0, \text{ если } \forall x \in \mathbb{R}\ \ Pn(x) = 0$$

Theorem 1.5.4.

Многочлен тожественно равен нулю тогда и только тогда, когда

все его коэффициенты равны нулю $a_i = 0,\ i = \overline{0, n}$

Consequence.
Два многочлена тождественно равны, если их степени одинаковы и имеют одинаковые коэффициенты при одинаковых степенях x

Proof. $P_n(x) \equiv Q_n(X)$
$P_n(x) - Q_n(x) \equiv 0$
$(\underset{=0}{a_n + b_n})x^n + (\underset{=0}{a_{n-1} + b_{n-1}})x^{n-1} + \cdots + (a_0 + b_0) = 0$ $\square$

Example:

$P_3(x) = 3x^2 - 2x + 4$
$Q_4(x) = a_4x^4 + a_3x^3 - a_2x^2 + a_1x + a_0$

$$P_3(x) \equiv Q_4(x) \Rightarrow \begin{cases} a_4 = 0 \\ a_3 = 3 \\ a_2 = 0 \\ a_1 = -2 \\ a_1 = 4 \end{cases}$$

2. **Дробная рациональная функция**
Дробной рациональной функцией называется отношение двух многочленов. $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} >$ многочлены $\{$ дробная рациональная функция, рациональная дробь. Если $n \geq m$, то рациональная дробь **неправильная**, если $n < m$ - **правильная**.

Theorem 1.5.5.

Неправильная рациональная дробь может быть представлена в виде

суммы многочлена и правильной рациональной дроби.

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \underset{\text{многочлен}}{\overset{\text{целая часть}}{L_{n-m}(x)}} + \frac{R_k(x)}{Q_m(x)},\ k < m,\ R_n(x) \text{ - многочлен.}$$

Элементарные(простейшие) рациональные дроби:

I.
$$\frac{A}{x-a} \qquad A,\ a \in \mathbb{R}$$

II.
$$\frac{A}{(x-a)^k} \qquad k \in \mathbb{N},\ k > 1,\ A,\ a \in \mathbb{R}$$

III.
$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q} \qquad M,\ n,\ p,\ q \in \mathbb{R},\ D = p^2 - 4q < 0$$

IV.

$$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} \qquad M,\ n,\ p,\ q\in\mathbb{R},\ D=p^2-4q<0,\ k\in\mathbb{N},\ k>1$$

Theorem 1.5.6.
Пусть $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ *- правильная рациональная дробь*($n<m$)*, и знаменатель дроби* $Q_m(x)$ *разложен на множители:*

$$Q_m(x) = \underbrace{(x-x_1)^{k_1}\dots(x-x_5)^{k_5}}_{\text{действительные корни}}\underbrace{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\dots(x^2+p_mx+q_m)^{l_m}}_{D<0}$$

Тогда заданная дробь раскладывается в сумму простых дробей следующего вида:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{(x-x_1)^2}+\dots+\frac{A_{k_1}}{(x-x_1)^{k_1}}+\dots+$$

$$+\frac{F_1}{x-x_5}+\frac{F_2}{(x-x_5)^2}+\dots+\frac{F_{k_5}}{(x-x_5)^{k_5}}+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+p_1x+q_1)}+\dots+\frac{M_{l_1}+N_l}{(x^2+p_lx+q_l)^l}+$$

При этом:

$$(x-x_i)^{k_i}\leftrightarrow\frac{A_1}{x-x_i}+\frac{A_2}{(x-x_i)^2}+\dots+\frac{A_{k_i}}{(x-x_i)^K};$$

$$(x^2+p_jx+q_j)^{l_j}\leftrightarrow\frac{M_1x+N_1}{(x^2+p_jx+q_j)}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_jx+q_j)}+\dots+\frac{M_{l_j}x+N_{l_j}}{(x^2+p_jx+q_j)}$$

В разложении появляются так называемые неопределенные коэффициенты, которые подлежат дальнейшиму определению.

Example:

$$\frac{3x-2}{(x-1)^3(x+2)(x^2+1)(x^2+2x+3)^2}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{A_3}{(x-1)^3}+\frac{B}{x+2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}+\frac{Ex+F}{x^2+2x+3}+$$
$$+\frac{Mx+N}{(x^2+2x+3)^2}$$

Для того, чтобы найти неопределенные коэффициенты в полученном выражении, умножают обе части тождества на знаменатель левой части. Таким образом, получают 2 тождественно равных многочлена. Раскрывая скобки справа, после сего приравнивают коэффициенты при одинаковых степенях. Получают систему линейных уравнений для определения неизвестных коэффициентов.

Example:

$\frac{x^4+2x^3+5x^2-1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2} \Big| x(x^2+1)^2$

$x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 1 = a(x^2+1)^2 + (Bx+C)x(x^2+1) + (Dx+E)x =$
$= A(x^4 + 2x^2 + 1) + (Bx+C)(x^3+x) + Dx^2 + Ex =$
$= Ax^4 + 2Ax^2 + A + Bx^4 + Cx^3 + Bx^2 + Cx + Dx^2 + Ex =$
$= (A+B)x^4 + Cx^3) + (2A+B+D)x^2 + (E+C)x + A.$

$$\begin{cases} x^4: & A+B=1 & A=1 \\ x^3: & C=2 & B=2 \\ x^2: & 2A+B+D=5 & C=2 \\ x^1: & C+E=0 & D=5 \\ x^0: & A=-1 & E=-2 \end{cases}$$

$\frac{x^4+2x^3+5x^2-1}{x(x^2+1)^2}$