# Домашня робота 1

1.2(b) Довести, що $(n^2+(n+1)^2) \mod 4 = 1:$

$$n^2+(n+1)^2 = 2n^2+2n+1 = 2\cdot n(n+1)+1;\;\; 2n(n+1) \vdots 2 \Rightarrow n(n+1)\vdots 2?$$

$n(n+1)\vdots 2$ як два послідовні натуральні числа $\Rightarrow 2n(n+1)\vdots 4+1$

$\Rightarrow (n^2+(n+1)^2) \mod 4 = 1$

1.3(b) Довести, що $p^2 \mod 24 = 1,\; p\geq 5:$

Перевіримо

1.4(b) Довести, що числа виду $2^{4^n}-5,\; n\geq 1$ закінчуються на 1:

1. $n=1:\; 2^{4^1}-5 = 16-5 = 11$ - ok
2. Нехай умова виконуєтся для $n \Rightarrow 2^{4^n}$ - закінчується на 6.
   $(x\cdot 10+1-5 = (x-1)10+10+1-5 = (x-1)10+6)$
3. Доведемо для $n+1:$
   $2^{4^{n+1}}-5 = 2^{4^n\cdot 4} = (\underbrace{2^{4^n}}_{\text{зак. на 6}})^4-5;$
   $2^{4^n} = 10\cdot q+6,\; q\in\mathbb{N}$
   $\left(2^{4^n}\right)^4 = 10000q^4+24000q^3+21600^2+8640q+1290+6 =$
   $= 10\underbrace{(1000q^4+2400q^3+2160^2+864q+129)}_{t\in\mathbb{N}}+6$
   $\Rightarrow \left(2^{4^n}\right)+5$ - закінчується на 1.

1.5 Знайти всі натуральні $n$ такі, що $(1+2+\cdots+n) \mod 5 = 1.$

Ариф. прог.: $a_n = 1+(n-1)\cdot 1$

$(1+2+\cdots+n) = S_n = \frac{n(2a_1+(n-1)d}{2} = \frac{2n+n(n-1)}{2} \mod 5 = 1$

$\frac{2n+n^2-n-2}{2} \mod 5 = 0,\; n^2+n-2 \mod 5 = 0,\; n=\overline{0,4}$

$n=1:\quad 1+1-2 \mod 5 = 0 \mod 5 = 0$

$n=2:\quad 4+2-2 \mod 5 = 4 \mod 5 \neq 0$

$n=3:\quad 9+3-2 \mod 5 = 10 \mod 5 = 0$

$n=4:\quad 16+4-2 \mod 5 = 18 \mod 5 \neq 0$

Отже підходить $n=1,\; n=33$

1.6 Довести, що для всіх натуральних $n$ виконуються такі співвідношення:

b) $10^n+18n-1\vdots 27$

   1. $n=1:\quad 10+18-1 = 27\vdots 27$
   2. Нехай $\forall n\in\mathbb{N},\; x_n = 10^n+18n-1\vdots 27$
   3. Для $n+1:$
      $x_{n+1}-x_n = 10^{n+1}+18(n+1)-1-(10^n+18n-1) = 9\cdot 10^n+18 =$
      $= 9\cdot(10^n+2)\vdots 9,\qquad (10^n+2)\vdots 3?\qquad 10^n+2 = 100\ldots 002 \Rightarrow$
      $\Rightarrow 1+0+0+\cdots+0+0+2 = 3\vdots 3 \Rightarrow x_{n+1}\vdots 27$

c) $3^{2n+3}+40n-27\vdots 64$

   1. $n=1:\quad 3^{2+3}+40-27 = 64\cdot 4\vdots 64$
   2. Нехай $\forall n\in\mathbb{N},\; 3^{2n+3}+40n-27\vdots 64$

3. Для $n+1$ : $\quad 3^{2(n+1)+3} + 40(n+1) - 27 = 9 \cdot (\underbrace{3^{2n+3} + 40n - 27}_{64k}) - 320n + 256 =$

$= 9 \cdot 64k - 320n + 256 = 576k - 320n + 256 = 64 \cdot (9k - 5n + 4) \,\vdots\, 64$

d) $n(n^2+5) \,\vdots\, 6$

1. $n = 1$ : $\quad 1(1+5) = 6 \,\vdots\, 6$
2. Нехай $\forall n \in \mathbb{N},\ n(n^2+5) \,\vdots\, 6$
3. Для $n+1$ :
$(n+1)((n+1)^2+5) = \underbrace{n(n^2+5)}_{6k} + 3n^2 + 3n + 6 = 6(k + \frac{n(n+1))}{2} + 1)$

$\frac{n(n+1)}{2}$ - ціле, бо $n(n+1) \,\vdots\, 2 \Rightarrow 6(k + \frac{n(n+1))}{2} + 1) \,\vdots\, 6$

1.7(b) Довести $n = n_0 + 10n_1 + \cdots + 10^k n_k,\ S(n) = n_0 + n_1 + \cdots + n_k$
if $S(a) = S(b) \Rightarrow a - b \,\vdots\, 9$

$a - S(a) \,\vdots\, 9,\ b - S(b) \,\vdots\, 9 \Rightarrow a - S(a) - (b - S(b)) \,\vdots\, 9 = a - b \,\vdots\, 9$

1.8 Довести $a,\ b$ - непарні натуральні $\Rightarrow \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} \,\vdots\, 2,\ \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} \,\vdots\, 4$

Нехай $a = 2n+1,\ b = 2k+1 \Rightarrow \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} = \frac{(2k+1)^2-(2n+1)^2}{(2k+1)^2+(2n+1)^2} = \frac{2(n^2+n-k^2-k)}{2(n^2+n-k^2-k)+1} \,\vdots\, 2$

$\frac{n^2+n-k^2-k}{2(n^2+n-k^2-k)+1} \,\vdots\, 2 (2(n^2+n-k^2-k)+1$ - не парне$) \Rightarrow \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} \,\vdots\, 2,\ \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} \,\vdots\, 4$

1.9 Довести $n = k + 10k + \cdots + 10^{3^k} k \,\vdots\, 3^k$

1. $k = 1$ : $\quad n = 1 + 10 + 100 + 1000 = 1111 \,\vdots\, 1$
2. Нехай $n_k = \sum\limits_{i=1}^{3^k} 10^{i-1},\ n \,\vdots\, 3^k$
3. Для $k+1$ :
$n_1 + n_2 10^{3^k} + \cdots + n_k 10^{2\cdot 3^k} = \underbrace{1 + 10 + \cdots + 10^{3^k-1}}_{n} + 10^{3^k}(1 + 10 + \cdots + 10^{3^k-1}) \,\vdots\, 10^{3^k} +$

$+ 10^{2\cdot 3^k}(1 + 10 + \cdots + 10^{3^k-1}) \,\vdots\, 10^{3^k}$

1.10 Довести, що сума $2n+1$ послідовних натуральних чисел поділяються на $2n+1$

Почнемо з якогось $a \Rightarrow a,\ a+1,\ \ldots,\ a+2n \Rightarrow S(a_n) = (2n+1)a + \frac{2n(2n+1)}{2} =$

$= (2n+1)(a+n) \,\vdots\, (2n+1)$

1.12(b) $a,\ b \in \mathbb{Z}$. Довети $2a - b \,\vdots\, 11 \Rightarrow 51a - 8b \,\vdots\, 11$

Контрприклад: $a = 20,\ b = 7 \Rightarrow 2 \cdot 20 - 7 = 33 \,\vdots\, 11,\ 51 \cdot 20 - 8 \cdot 7 = 964 \,\overline{\vdots}\, 11$