

Теорія функції комплексної змінної

Зміст

1	Комплексні числа та функції комплексної змінної	3
1.1	Основні поняття	3
1.2	Операції над комплексними числами	4
1.3	Послідовності комплексних чисел	6

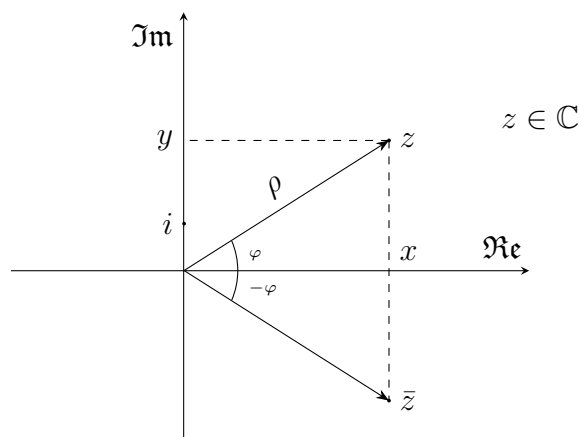
ЧАСТИНА 1

Комплексні числа та функції комплексної змінної

1.1 Основні поняття

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{N} & \subset & \mathbb{Z} & \subset & \mathbb{Q} & \subset & \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \\ \text{натуральні} & & \text{цілі} & & \text{раціональні} & & \text{дійсні} & & \text{комплексні} \end{array}$$

$(x, y) : x, y \in \mathbb{R}$ - пара дійсних чисел.



$z = x + iy$ - алгебраїчна форма z

Якщо $y = 0$, то $z = x \in \mathbb{R}$. $\operatorname{Re} z = x$ - дійсна частина z . Якщо $x = 0$, то $z = iy$ - чисто уявне число. $\operatorname{Im} z = y$ - уявна частина z . Значення $x, y \in \mathbb{R}$ - дійсні. Для $z = i : x = 0, y = 1, i$ - уявна одиниця. Якщо $z = x + iy$, то $\bar{z} = x - iy$ - спряжене до z . Нехай ρ, φ - полярні координати. Тоді модуль $z : |z| = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. $|z| \geq 0, \forall z \in \mathbb{C}$. Якщо $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$. φ - аргумент z (кут, утворений радіус-вектором, проведеним в точку z у додатньому напрямку з осі Ox).

$\operatorname{Arg} z$ - множина значень аргумента z . $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, $\arg z$ - головне значення аргумента. $\arg z = \varphi \in (-\pi, \pi]$

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, x > 0 & (I, IV \text{ чв.}) \\ \frac{y}{x} + \pi, x < 0, y > 0 & (II \text{ чв.}) \\ \frac{y}{x} - \pi, x < 0, y < 0 & (III \text{ чв.}) \end{cases}, \quad \arg z \text{ визначений для } z \neq 0!$$

$$z = \begin{cases} x = |z| \cos \varphi \\ y = |z| \sin \varphi \end{cases} = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) - \text{тригонометрична форма числа } z.$$

Теорема 1.1 (Формула Ойлера).

$$e^{iy} = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad (\varphi \in \mathbb{R})$$

Наслідок 1.1.

$z = |z|e^{i\varphi}$ - показникова форма z . $\bar{z} = |z|(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)) = |z|(\cos \varphi - i \sin \varphi)$.
не тригонометрична форма

$$\bar{z} = |z|e^{-i\varphi}$$

1.2 Операції над комплексними числами

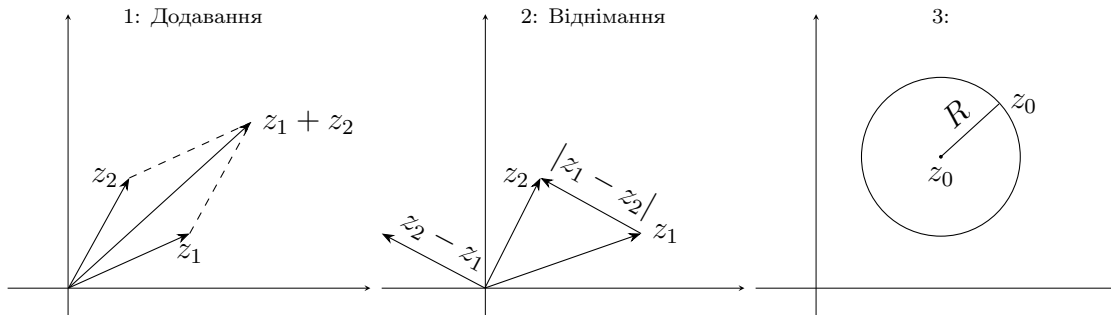
1. Порівняння

В комплексній області відношення " $>$ " чи " $<$ " не визначено. Числа порівнюють тільки за допомогою відношення " $=$ " або " \neq ".

$$z_1 = z_2 \text{ у алгебраїчній формі} \iff \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$$

$$z_1 = z_2 \text{ у тригонометричній формі} \iff \begin{cases} |z_1| = |z_2| \\ \varphi = \varphi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

2. Додавання/Віднімання



$$1 : z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$2 : z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

$$2 : |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} - \text{відстань між } z_1, z_2$$

$$3 : |z - z_0| = R$$

3. Множення/ділення і піднесення до степеню

$$\text{def} \quad z_1 \cdot z_2 = \underbrace{x_1x_2 - y_1y_2}_{\Re z} + i \underbrace{(x_1y_2 + x_2y_1)}_{\Im z}$$

Наслідок 1.2. для $z_1 = z_2 = i : i^2 = -1 \quad (x_1 = x_2 = 0, y_1 = y_2 = 1)$

Наслідок 1.3. $z_1 \cdot z_2 = x_1 x_2 + i^2 y_1 y_2 + i x_1 y_2 + i x_2 y_1 = x_1(x_2 + i y_2) + i y_1(x_2 + i y_2) = (x_1 + i y_1)(x_2 + i y_2)$

Таким чином, комплексні числа перемножуються як звичайні і при цьому зберігаються усі формули скороченого множення.

$$\text{def} \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + i y_1}{x_2 + i y_2} \cdot \frac{x_2 - i y_2}{x_2 - i y_2} = \frac{A + i B}{x_2^2 + y_2^2} = X + i Y$$

$$\text{def} \quad z^n = (x + i y)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (i y)^{n-k}, \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\left[\begin{array}{l} i = i \\ i^2 = -1 \\ i^3 = -i \\ i^4 = i \\ i^5 = 1 \end{array} \right. \quad \dots \quad \left[\begin{array}{l} i^{4k} = 1 \\ i^{4k+1} = i \\ i^{4k+2} = -1 \\ i^{4k+3} = -i \end{array} \right.$$

4. Множення/ділення і піднесення до степеню (в тригонометричній і показниковій формі)

$z_1 = |z_1|(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = |z_2|(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$. Тоді у тригонометричній формі: $z_1 \cdot z_2 = |z_1|(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot |z_2|(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + i \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + i \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + i^2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) = |z_1| \cdot |z_2| \cdot ((\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)) = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

$$\text{def} \quad z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

Наслідок 1.4. $z_1 = z, z_2 = \bar{z} \Rightarrow z \cdot \bar{z} = |z|^2(\cos 0 + i \sin 0) = |z|^2$

У показниковій формі(множення): $z_1 = |z_1| \cdot e^{i\varphi_1}, z_2 = |z_2| \cdot e^{i\varphi_2}$

$$\text{def} \quad z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

У тригонометричній формі(ділення): $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot \frac{\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1}{\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot$

$$\frac{(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)}{\cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot (\cos(-\varphi_2) + i \sin(-\varphi_2))$$

$$\text{def} \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)), \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \varphi = \varphi_1 - \varphi_2$$

У показниковій формі(ділення):

$$\text{def} \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

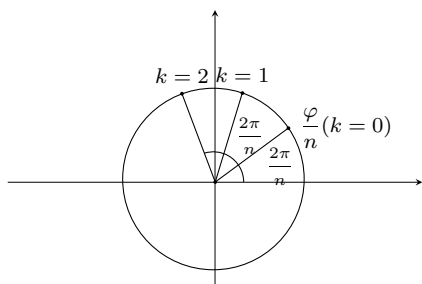
$$\text{def} \quad z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_{n \text{ разів}} = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = |z|^n \cdot e^{in\varphi}, \forall n \in \mathbb{Z}$$

5. Винесення з під кореня $\sqrt[n]{z}$

$$\text{def} \quad W = \sqrt[n]{z}, \text{ якщо } W^n = z.$$

Нехай обидва записані у тригонометричній формі: $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$,
 $W = |W|(\cos \psi + i \sin \psi)$, $W^n = |W|^n(\cos n\psi + i \sin n\psi)$. Умова "=" в тригоно-

-метричній формі: $W^n = z \Rightarrow \begin{cases} |W|^n = |z| \\ n\psi = \varphi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |W| = \sqrt[n]{|z|} \\ \psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

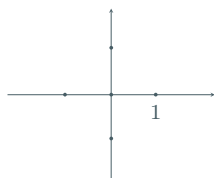


$$\sqrt[n]{z} = W = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right)$$

$$k = 0, 1, \dots, n-1$$

$$\psi_k = \frac{\varphi}{n} + 2\pi \frac{k}{n}, \quad \Delta\psi = \frac{2\pi}{n}$$

Приклад:



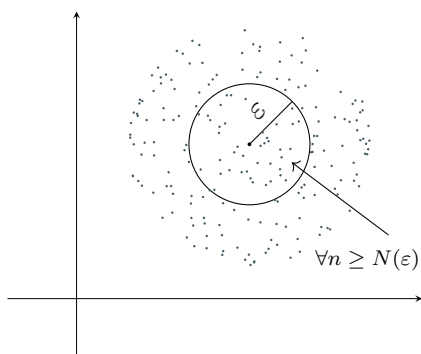
$$\sqrt[4]{1} = \Delta\varphi = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

1.3 Послідовності комплексних чисел

Послідовність комплексних чисел — це комплекснозначна функція натурального аргумента. $\{z_n\}$ - послідовність.

def $n \in \mathbb{N} \rightarrow f(n) = z_n \in \mathbb{C}$

1.

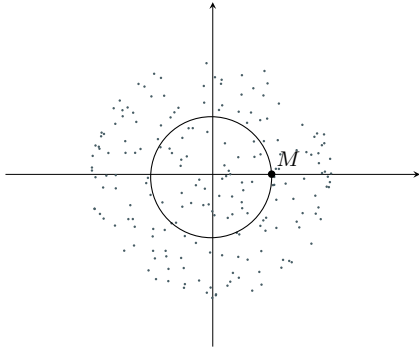


$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0, z_0 \in \mathbb{C}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N(\varepsilon) |z_n - z_0| < \varepsilon$$

2.

 z_n - обмежена, якщо

$$\exists M > 0 \forall n \in \mathbb{N} |z_n| < M$$

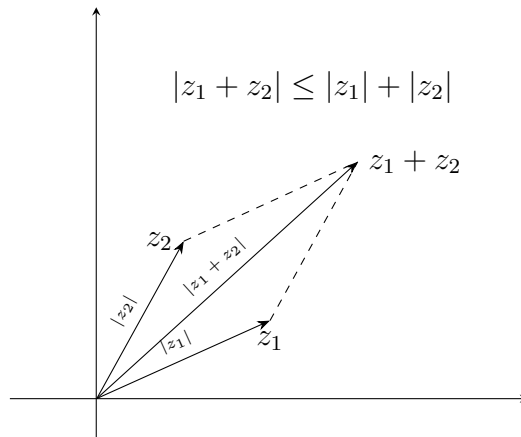
Теорема 1.2.

$$\text{Нехай } z_n = x_n + iy_n,$$

$$z_0 = x_0 + iy_0,$$

$$(x_n, y_n, x_0, y_0 \in \mathbb{R})$$

$$\text{Тоді: } \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0 \iff \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0 \end{cases}$$

**Доведення.**

а) необхідність:

$$\text{нехай } \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0, \text{ тобто } \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n \geq N(\varepsilon) |z_n - z_0| < \varepsilon$$

$$|z_n - z_0| = |(x_n + iy_n) - (x_0 + iy_0)| = |(x_n - x_0) + i(y_n - y_0)| \implies \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} < \varepsilon, \quad (x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2 < \varepsilon^2 \implies$$

$$\implies \begin{cases} (x_n - x_0)^2 < \varepsilon^2 \\ (y_n - y_0)^2 < \varepsilon^2 \end{cases} \implies \begin{cases} |x_n - x_0| < \varepsilon \\ |y_n - y_0| < \varepsilon \end{cases}, \forall n \geq N(\varepsilon) \iff$$

$$\iff \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0 \end{cases}$$

| *b) достатність:*