Математический анализ 2

Contents

1 Неопределенный интеграл **5**

1.1 Понятие первообразной и неопределеного интеграла 5
1.2 Свойства неопределенного интеграла 7
1.3 Таблица основных неопределенных интегралов 8
1.4 Основные примеры интегрирования 9
1.4.1 Непосредственное интегрирование 9
1.4.2 Замена переменной 10
1.4.3 Интегрирование по частям 11
1.5 Интегрирование рациональных функций 12
1.5.1 Основные сведения о рациональных функциях 12
1.5.2 Интегрирование простейших дробей 17
1.5.3 Общая схема интегрирования рациональных дробей . . . 17
1.6 Интегрирование тригонометрических функций 19
1.6.1 Универсальная тригонометрическая замена 19
1.6.2 Другие виды подстановок 19
1.6.3 Использования формул тригонометрии 20
1.7 Интегрирование некоторых иррациональных и транцедентных функций 21
1.7.1 Дробно-линейная подстановка для интегралов 21
1.7.2 Квадратичные иррациональности 22
1.7.3 Инегрирование диффереционального бинома 24
1.7.4 Интегралы вида $\int R(e^x)\ \mathbf{d}x, \int R(\sqrt{e^x+e})\ \mathbf{d}x$ 25
1.8 Интегралы, не выражающиеся в элементарных функциях 25

2 Определенный интеграл **27**

2.1 Определение определенного интеграла(Римана) 27
2.2 Суммы Дарбу и их свойства 29
2.3 Необходимое и достаточное условие интегрируемости функции $f(x)$ на $[a,\ b]$ 31
2.4 Некоторые классы интегрируемых функций 31
2.4.1 Интегрируемость непрерывных функций 31
2.4.2 Интегрирование монотонных ограниченных функций . . 32

Chapter 1

Неопределенный интеграл

1.1 Понятие первообразной и неопределеного интеграла

Функция $F(x)$ называется **первообразной** функции $f(x)$ на множестве $X \subset \mathbb{R}$, или $\forall x \in X \ \ F'(x) = f(x)$.

Theorem 1.1.1. *Если $F(x)$ - некоторая первообразная для $f(x)$ на множестве X, то любая другая первообразная имеет вид: $F(x) + c$, где $c = const$ - произвольная.*

Proof. Пусть $F(x)$ - первообразная функции $f(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)$; Тогда: $(F(x)+c)' = F'(x)+0 = f(x) \Rightarrow F(x)+c$ - первообразная для $f(x)(c = const)$.
Пусть $F_1(x)$ - тоже первообразная для $f(x)$, т.е. $F_1'(x) = f(x)$.
Рассмотрим разность: $F_1(x) - F(x)$;
$(F_1(x) - F(x))' = F_1'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow F_1(x) - F(x) = c = const$, т.е. :$F_1(x) = F(x) + c$ □

Таким образом множество всех первообразных функции $f(x)$ имеет вид $F(x) + c$.
Множество всех первообразных функции $f(x)$ называется **неопределенным интегралом** этой функции и обозначается $\int f(x)dx$.
$f(x)$ - подинтегральная функция, $f(x)dx$ - подинтегральное выражение, x - переменная инегрирования, $\int$ - неопределенный интеграл.

Example:

$$f(x) = sign(x) = \begin{bmatrix} 1, \ \ x > 0 \\ 0, \ \ x = 0 \\ -1, \ \ x < 0 \end{bmatrix}, \ \ x \in (-1;\ 1).$$

Предположим, что существует такая первообразная $\exists F(x) : \forall x \in (-1; 1) :$

$F'(x) = sign(x)$, т.е.

$$F'(x) = \left[\begin{array}{l} 1, \;\; x \in (0;\; 1) \\ 0, \;\; x = 0 \\ -1, \;\; x <\in (-1;\; 0) \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} F'(x) = 0 \\ F'_-(x) = -1 \\ F'_+(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$F'(0)$ - не существует $\Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow$ $F(x)$ не существует.

Remark. Достаточным условием существования первообразной у функции на данном множестве является ее непрерывность на этом множестве.

1.2 Свойства неопределенного интеграла

Пусть $\int f(x)\ \mathbf{d}x = F(x) + c\ (F'(x) = f(x))$.

1. Производная от неопределенного интеграла равна подинтегральной функции, дифференциал неопределенного интеграла равен подинтегральному выражению.

$$(\int f(x)\ \mathbf{d}x)'_x = f(x); \quad \mathbf{d}(\int f(x)\ \mathbf{d}x) = f(x)\ \mathbf{d}x.$$

Proof. $(\int f(x)\ \mathbf{d}x)'_x = (F(x)+c)'_x = F'(x) + c' = f(x)$;
$\mathbf{d}(\int f(x)\ \mathbf{d}x) = (\int f(x)\ \mathbf{d}x)'_x\ \mathbf{d}x = f(x)\ \mathbf{d}x$. □

2. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной.

$$\int\ \mathbf{d}(F(x)) = F(x) + c.$$

Proof. $\int\ \mathbf{d}(F(x)) = \int F'(x)\ \mathbf{d}x = \int f(x)\ \mathbf{d}x = F(x) + c$ □

3. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

$$\int af(x)\ \mathbf{d}x = a\int f(x)\ \mathbf{d}x,\ \ a = const.$$

Proof. $\int af(x)\ \mathbf{d}x = \int aF'(x)\ \mathbf{d}x = \int (aFx)'\ \mathbf{d}x = \int\ \mathbf{d}(aF(x)) = (aF(x)+$
$+c_1) = a(F(x) + \frac{c_1}{a} = \left|c = \frac{c_1}{a}\right| = a(f(x)+c) = a\int f(x)\ \mathbf{d}x$ □

4. Интеграл суммы двух функций равен сумме интегралов этих функций.

$$\int (f(x)+g(x))dx = \int f(X)dx + \int g(x)dx.$$

Proof. Пусть $\int g(x)\ \mathbf{d}x = G(x) + c$; тогда $\int(f(x)+g(x))\ \mathbf{d}x = \int(F'(x)+$
$+G'(x))\ \mathbf{d}x = \int(F(x)+G(x))'\ \mathbf{d}x = \int\ \mathbf{d}(F(x)+G(x)) = F(x)+G(x)+$
$+c = \left|c = c_1 + c_2\right| = (F(x)+c_1) + (G(x)c_2) = \int f(x)\ \mathbf{d}x + \int g(x)\ \mathbf{d}x$ □

Remark.

- свойство 4 справедливо для любого конечного числа слогаемых
- свойство 3-4 называются свойством линейности неопределенного интеграла
- свойство 1-2 отражают связь операций дифференцирования и интегрирования

1.3 Таблица основных неопределенных интегралов

1. $$\int x^{\alpha}\ \mathbf{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c;\ \ \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$$

2. $$\int \frac{\mathbf{d}x}{x} = \ln|x| + c$$

3. $$\int a^{x}\ \mathbf{d}x = \frac{a^{x}}{\ln a} + c,\ \ a > 0$$

4. $$\int e^{x}\ \mathbf{d}x = e^{x} + c$$

5. $$\int \sin x\ \ \mathbf{d}x = -\cos x + c$$

6. $$\int \cos x\ \ \mathbf{d}x = \sin x + c$$

7. $$\int \frac{\mathbf{d}x}{\cos^2 x} = \tan x + c$$

8. $$\int \frac{\mathbf{d}x}{\sin^2 x} = -\cot x + c$$

9. $$\int \mathrm{sh}x\ \ \mathbf{d}x = \mathrm{ch}\,x + c$$

10. $$\int \mathrm{ch}x\ \ \mathbf{d}x = \mathrm{sh}\,x + c$$

11. $$\int \frac{\mathbf{d}x}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th}\,x + c$$

12. $$\int \frac{\mathbf{d}x}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{cth}\,x + c$$

13.

$$\int \frac{\mathbf{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$$

$$\int \frac{\mathbf{d}x}{\sqrt{a-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c$$

14.

$$\int \frac{\mathbf{d}x}{1+x^2} = \arctan x + c$$

$$\int \frac{\mathbf{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c$$

Дополнительные формулы:

15.

$$\int \frac{\mathbf{d}x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln |\frac{x-a}{x+a}| + c \text{ - высокий логарифм}$$

16.

$$\int \frac{\mathbf{d}x}{\sqrt{x^2+A}} = \ln |x + \sqrt{x^2+A}| + c \text{ - длинный логарифм}$$

17.

$$\int \sqrt{x^2+A}\ \ \mathbf{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+A} + \frac{A}{2} \ln |x + \sqrt{x^2+A}| + c$$

18.

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\ \ \mathbf{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + c$$

В этих формулах вместо x может быть записана произвольная дифференцируемая функция от x.

1.4 Основные примеры интегрирования

1.4.1 Непосредственное интегрирование

Непосредственное интегрирование заключается в использовании тождественных преобразований подинтегральнной функции, свойства линейности интеграла и таблицы интегралов.

Example:

1. $\int (\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x}})^2\ \mathbf{d}x = \int \frac{x+2x^{\frac{1}{2}}+1}{\sqrt[3]{x^2}}\ \mathbf{d}x = \int (x^{\frac{1}{3}} + 2x^{\frac{-1}{6}} + x^{\frac{-2}{3}})\ \mathbf{d}x =$

$= \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + 2 \cdot \frac{x^{\frac{5}{6}}}{5} \cdot 6 + x^{\frac{1}{3}} \cdot 3 + c$

2. $\int \frac{\mathbf{d}x}{\sin^2 x \cos^2 x} = |\cos^2 x + \sin^2 x = 1| = \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\ \mathbf{d}x = \int \frac{1}{\sin^2 x}\ \mathbf{d}x + \int \frac{1}{\cos^2 x}\ \mathbf{d}x = \tan x - \cot x + c$

1.4.2 Замена переменной

Theorem 1.4.1. *Пусть на* $\forall x \in (a; b)$ $\int f(x)dx = F(x)+c$, *(на всем интервале* $(a;\ b)$ *известна первообразная функции):* $F'(x) = f(x)$ $x = \varphi(t)$ *- функция дифференцируемая; причем* $\varphi(t)\ :\ t \in (\alpha;\ \beta)$ *и* $\varphi : (\alpha;\ \beta) \to (a;\ b)$. *Тогда справедлива формула:*

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'_t(t)dt = F(\varphi(t)) + c$$

Proof. $(f(\varphi(t)))'_t = F'_\varphi(\varphi(t)) \cdot \varphi'_t(t) = |\varphi(t) = x| = F'_x(x)\varphi'_t(t) = |F'_x(x) = f(x)| = f(x) \cdot \varphi(t) = |x = \varphi(t)| = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'_t(t) \Rightarrow F(\varphi(t))$ первообразная для $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'_t(t) \Rightarrow \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'_t(t)dt = F(\varphi(t)) + c$ □

Remark.

$$\varphi'_t(t)\ \mathbf{d}t = \ \mathbf{d}(\varphi(t)) \Rightarrow \int f(\varphi(t)) \cdot\ \mathbf{d}\varphi = F(\varphi) + c$$

1. **Внесения выражения под знак дифференциала**

$$\int f(x)\ \mathbf{d}x = \int g(\varphi(x))\cdot\varphi'_x(x)\ \mathbf{d}x = \int g(\varphi)\ \mathbf{d}\varphi = |G(x) - \text{известно} G'(x) = g(x)| =$$

$$= G(\varphi) + c = G(\varphi(x)) + c.$$

Часто используются преобразование дифференциала $\mathbf{d}x = \ \mathbf{d}(x + +a) = \frac{1}{k}\ \mathbf{d}(kx) = \frac{1}{k}\ \mathbf{d}(kx + b)$
$x^{n-1}\ \mathbf{d}x = \frac{1}{n}\ \mathbf{d}(x^n)$
Преобразования дифференциалов
$\sin x\ \ \mathbf{d}x = -\ \mathbf{d}(\cos x)$
$\cos x\ \ \mathbf{d}x = \ \mathbf{d}(\sin x)$
$\frac{\mathbf{d}x}{\cos^2 x} = \ \mathbf{d}(\tan x)$
$\frac{\mathbf{d}x}{x} = \ \mathbf{d}(\ln x)$
$\frac{\mathbf{d}x}{1+x^2} = \ \mathbf{d}(\arctan x)$
$\frac{\mathbf{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \ \mathbf{d}(\arcsin x)$

Example:

$\int \sin^3 x \;\mathbf{d}x = \int \sin x \sin^2 x \;\mathbf{d}x \int (1-\cos^2 x)\cdot(-\;\mathbf{d}(\cos x)) = \int (\cos^2 - 1)\;\mathbf{d}(\cos x) =$

$= \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + c.$

2. **Вынесения выражения из-под знак дифференциала**
$\int f(x)\;\mathbf{d}x = |x = \varphi(t) \Rightarrow \;\mathbf{d}x = \varphi'(t)\;\mathbf{d}t| = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\;\mathbf{d}t = |g(t) =$
$= G'(t)| = G(t) + c = |x = \varphi(t)\;\; t = \varphi^{-1}(x)| = G(\varphi^{-1}(x)) + c$

Example:

$\int \sqrt{a^2 - x^2}\;\mathbf{d}x = |x = a\sin t\;\mathbf{d}x = a\cos t\;\mathbf{d}t| = \int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} a\cos t\;\mathbf{d}t =$

$= a^2 \int \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot \cos t \;\;\mathbf{d}t \;=\; a^2 \int \cos^2 t \;\;\mathbf{d}t \;=\; \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos^2 t)\;\mathbf{d}t \;=$
$\frac{a^2}{2}(t + \frac{\sin 2t}{2}) + c = \frac{a^2}{2}(t + \sin t \cos t) + c = |\cos t = \sqrt{1 - \sin t}\;\; \frac{x}{a}$
$t = \arcsin \frac{x}{a}| = \frac{a^2}{2}(\arcsin \frac{x}{a} + \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \cdot \frac{x}{a}) = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + c$

1.4.3 Интегрирование по частям

Пусть $u = u(x),\; v = v(x)$ - две диффренцируемые функции.
по свойству дифференциала:
$\mathbf{d}(uv) = u\;\mathbf{d}v + v\;\mathbf{d}u \Rightarrow \int\;\mathbf{d}(uv) = \int u\;\mathbf{d}v + \int v\;\mathbf{d}u$ - формула интегрирования по частям.
В исходном интеграле $\int f(x)\;\mathbf{d}x$ подинтегральное выражение представляется в виде двух сомножителей. Как правило, это можно сделать неоднозначно.
После того как u и $\mathbf{d}v$ выбраны, находим $\mathbf{d}u,\; v,\; ...$
$\int f(x)\;\mathbf{d}x = |f(x) = u,\;\; \mathbf{d}x = \;\mathbf{d}v| \Rightarrow \;\mathbf{d}u = u'\;\mathbf{d}x = ... \Rightarrow v = \int\;\mathbf{d}v$
в результате применения формулы полученный интеграл оказывается более простым, чем исходный.
При необходимости формула интегрирования по частям применяется несколько раз.

$$\text{I. } \int P_n(x) \left\{ \begin{array}{l} \sin(kx + b) \\ \cos(kx + b) \\ a^{kx} \\ e^{kx} \\ \mathrm{sh}kx,\ \mathrm{ch}(kx) \end{array} \right\} \mathbf{d}x \qquad U = Pn(x); \quad \mathbf{d}v = \{\ldots\}$$

$$\text{II.}\ \int P_n(x) \begin{Bmatrix} \arcsin x \\ \arccos x \\ \arctan x \\ \ln x \end{Bmatrix} \mathbf{d}x \qquad U = \{\dots\}; \quad \mathbf{d}v = Pn(x)\ \mathbf{d}x$$

$$\text{III.}\ \int e^{kx} \begin{Bmatrix} \sin(ax+b) \\ \cos(ax+b) \end{Bmatrix} \mathbf{d}x \qquad U = e^{kx}; \quad \mathbf{d}v = \{\dots\}\ \mathbf{d}x$$

Example:

$\int_I e^x \sin 2x\ \mathbf{d}x \underset{III}{=} \Big| u = e^x \Rightarrow\ \mathbf{d}u = e^x\ \mathbf{d}x; \sin 2x\ \mathbf{d}x =\ \mathbf{d}v; v = \int \sin 2x\ \mathbf{d}x =$

$= -\frac{\cos 2x}{2} \Big| = -\frac{e^x \cos 2x}{2} + \int \frac{\cos 2x}{2} \cdot e^x dx = \Big| u = e^x;\ \mathbf{d}u = e^x;\ \mathbf{d}v = \cos 2x\ \mathbf{d}x; v =$

$= \frac{\sin 2x}{2} \Big| = -\frac{e^x \cos 2x}{2} + \frac{1}{2}(\frac{e^x \sin 2x}{2} - \int \frac{\sin 2x}{2} \cdot e^x\ \mathbf{d}x) = -\frac{e^x \cos 2x}{2} + \frac{1}{4} e^x \sin 2x -$

$- \frac{1}{4} \int e^x \underset{I}{\sin} 2x\ \mathbf{d}x$

$I = -\frac{e^x \cos 2x}{2} + \frac{1}{4} e^x \sin 2x - \frac{1}{4} I;\ \ I = -\frac{e^x \cos 2x}{2} + \frac{1}{4} e^x \sin 2x.$

$I = \frac{4}{5}(\frac{1}{4} e^x \sin 2x - \frac{1}{2} e^x \cos 2x) + c$

1.5 Интегрирование рациональных функций

1.5.1 Основные сведения о рациональных функциях

1. **Многочлен(целая рациональная функция)**
   Многочленом $P_n(x)$ называется функция вида $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0$; где $n \in \mathbb{N},\ \ a_i \in \mathbb{R},\ \ i = \overline{0,n}$
   Корнем многочлена называется значение x_0(вообще говоря, комплексное) аргумента x, при котором многочлен обращается в ноль.
   x_0 - корень $P_n(x)$ или $P_n(x_0) = 0$

   Theorem 1.5.1.

   Если x_0−корень многочлена $P_n(x)$, то многочлен делится нацело на$(x - x_0)$,

   т.е. $P_n(x)$ представлется в виде: $P_n(x) = (x - x_0) \cdot Q_{n-1}(x)$,

   где Q − многочлен степени$n - 1$

   Theorem 1.5.2.

   Всякий многочлен степени $n > 0$ имеет по крайней мере один корень,

   действительный или комплексный

Consequence.

(1) Многочлен n-ой степени можно представить в виде: $P_n(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)$, где $x_1, \dots, x_n$ - корни $P_n(x)$, a_n - старший коэффициент

(2) Если среди корней многочлена имеются одинаковые, то объединим соответствующие или множители. Получим:
$P_n(x) = a_n(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2}\dots(x - x_n)^{k_m}$, где $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$.
для $x_i: \ (x - x_i)_i^k$; k_i - кратность корня x_i.
Такое представление называется разложением многочлена на линейные множители.

Theorem 1.5.3.
Известно, что если многочлен имеет комплексный корень
$x_0 = a_i + ib(a, \ b \in \mathbb{R}; \ x_0 \in \mathbb{C})$, *то комплексное спряженое число*
$\bar{x} = a - ib$ *- тоже корень* $P_n(x)$. *Таким образом, в разложении многочлена комплексно спряженные числа входят парами, перемножим:*
$(x - (a + ib))(x - (a - ib)) = x^2 - x(a + ib) - x(a - ib) + (a + ib)(a - ib) = x^2 - ax - ibx - ax + ibx + a^2 + b^2 = x^2 - 2ax + a^2 + b^2$.
Полученый трехчлен имеет действительный коэффициент, причем дискретный
$D = B^2 - 4A \cdot C = 4a^2 - 4(a^2 + b^2) = -4b^2 < 0$
Получаем, что пару множителей, соответсвующую двум комплексных сопряженным корням можно заменить квадратный трехчлен с действительным коэффициентом и $D < 0$.
Окончательно получим разложение на множители в виде:
$P_n(x) = (x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2}(x - x_5)^{k_5}(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1}\dots(x^2 p_m x + q_m)^{l_m}$,
где $x_1, \dots, x_5 \in \mathbb{R}$ *- корни многочлена* $Pn(x); p_i, \ q_i \in \mathbb{R}, \ i = \overline{1, m}$;
$D_i = p_i^2 - 4q_i < 0. \qquad k_1 + \dots + k_5 + 2(l_1 + \dots + l_m) = n$

Многочлен называется **тождественно равным нулю**

$$Pn(x) \equiv 0, \text{ если } \forall x \in \mathbb{R} \ \ Pn(x) = 0$$

Theorem 1.5.4.

Многочлен тожественно равен нулю тогда и только тогда, когда

все его коэффициенты равны нулю $a_i = 0, \ i = \overline{0, n}$

Consequence.
Два многочлена тождественно равны, если их степени одинаковы и имеют одинаковые коэффициенты при одинаковых степенях x

Proof. $P_n(x) \equiv Q_n(X)$
$P_n(x) - Q_n(x) \equiv 0$
$(\underset{=0}{a_n + b_n})x^n + (\underset{=0}{a_{n-1} + b_{n-1}})x^{n-1} + \cdots + (a_0 + b_0) = 0$ $\square$

> **Example:**
>
> $P_3(x) = 3x^2 - 2x + 4$
> $Q_4(x) = a_4x^4 + a_3x^3 - a_2x^2 + a_1x + a_0$
> $$P_3(x) \equiv Q_4(x) \Rightarrow \begin{cases} a_4 = 0 \\ a_3 = 3 \\ a_2 = 0 \\ a_1 = -2 \\ a_1 = 4 \end{cases}$$

2. **Дробная рациональная функция**
Дробной рациональной функцией называется отношение двух многочленов. $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} >$ многочлены $\{$ дробная рациональная функция, рациональная дробь. Если $n \geq m$, то рациональная дробь **неправильная**, если $n < m$ - **правильная**.

Theorem 1.5.5.

Неправильная рациональная дробь может быть представлена в виде

суммы многочлена и правильной рациональной дроби.

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \overset{\text{целая часть}}{\underset{\text{многочлен}}{L_{n-m}(x)}} + \frac{R_k(x)}{Q_m(x)},\ k < m,\ R_n(x) \text{ - многочлен.}$$

Элементарные(простейшие) рациональные дроби:

I.
$$\frac{A}{x-a} \qquad A,\ a \in \mathbb{R}$$

II.
$$\frac{A}{(x-a)^k} \qquad k \in \mathbb{N},\ k > 1,\ A,\ a \in \mathbb{R}$$

III.
$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q} \qquad M,\ n,\ p,\ q \in \mathbb{R},\ D = p^2 - 4q < 0$$

IV.

$$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} \qquad M,\ n,\ p,\ q \in \mathbb{R},\ D = p^2 - 4q < 0,\ k \in \mathbb{N},\ k > 1$$

Theorem 1.5.6.
Пусть $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ - правильная рациональная дробь($n < m$), и знаменатель дроби $Q_m(x)$ разложен на множители:

$$Q_m(x) = \underbrace{(x-x_1)^{k_1}\dots(x-x_5)^{k_5}}_{\text{действительные корни}}\underbrace{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\dots(x^2+p_mx+q_m)^{l_m}}_{D<0}$$

Тогда заданная дробь раскладывается в сумму простых дробей следующего вида:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \dots + \frac{A_{k_1}}{(x-x_1)^{k_1}} + \dots +$$

$$+\frac{F_1}{x-x_5}+\frac{F_2}{(x-x_5)^2}+\dots+\frac{F_{k_5}}{(x-x_5)^{k_5}}+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+p_1x+q_1)}+\dots+\frac{M_{l_1}+N_l}{(x^2+p_lx+q_l)^l}+$$

При этом:

$$(x-x_i)^{k_i} \leftrightarrow \frac{A_1}{x-x_i} + \frac{A_2}{(x-x_i)^2} + \dots + \frac{A_{k_i}}{(x-x_i)^K};$$

$$(x^2+p_jx+q_j)^{l_j} \leftrightarrow \frac{M_1x+N_1}{(x^2+p_jx+q_j)} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_jx+q_j)} + \dots + \frac{M_{l_j}x+N_{l_j}}{(x^2+p_jx+q_j)}$$

В разложении появляются так называемые неопределенные коэффициенты, которые подлежат дальнейшиму определению.

Example:

$$\frac{3x-2}{(x-1)^3(x+2)(x^2+1)(x^2+2x+3)^2} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{(x-1)^3} + \frac{B}{x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{x^2+2x+3} +$$
$$+ \frac{Mx+N}{(x^2+2x+3)^2}$$

Для того, чтобы найти неопределенные коэффициенты в полученном выражении, умножают обе части тождества на знаменатель левой части. Таким образом, получают 2 тождественно равных многочлена. Раскрывая скобки справа, после сего приравнивают коэффициенты при одинаковых степенях. Получают систему линейных уравнений для определения неизвестных коэффициентов.

Example:

$\frac{x^4+2x^3+5x^2-1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2} \Big| x(x^2+1)^2$

$x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 1 = a(x^2+1)^2 + (Bx+C)x(x^2+1) + (Dx+E)x =$
$= A(x^4 + 2x^2 + 1) + (Bx+C)(x^3+x) + Dx^2 + Ex =$
$= Ax^4 + 2Ax^2 + A + Bx^4 + Cx^3 + Bx^2 + Cx + Dx^2 + Ex =$
$= (A+B)x^4 + Cx^3) + (2A+B+D)x^2 + (E+C)x + A.$

$$\begin{cases} x^4: & A+B=1 & A=1 \\ x^3: & C=2 & B=2 \\ x^2: & 2A+B+D=5 & C=2 \\ x^1: & C+E=0 & D=5 \\ x^0: & A=-1 & E=-2 \end{cases}$$

$\frac{x^4+2x^3+5x^2-1}{x(x^2+1)^2} = -\frac{1}{x} + \frac{2x+2}{x^2+1} + \frac{5x-2}{(x^2+1)^2}$

В некоторых случаях для нахождения неопределенных коэффициентов можно воспользоваться так называемым методом частных значений аргумента. Он состоит в том, что аргументу x придаются конкретные числовые значения столько раз, сколько содержится неизвестных коэффициентов в разложении. При этом удобно выбирать x равным значению действительного корня знаменателя.

Example:

$\frac{3x-4}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1}$

$A = \frac{3x-4}{(x-2)(x+1)}\Big|_{x=0} = \frac{-4}{-2\cdot 1} = 2$

$B = \frac{3x-4}{x(x+1)}\Big|_{x=2} = \frac{6-4}{2\cdot 3} = \frac{1}{3}$

$C = \frac{3x-4}{x(x-2)}\Big|_{x=-1} = \frac{-3-4}{-1\cdot(-3)} = -\frac{7}{3}$

Example:

$\frac{x^2+1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$

$A = \frac{x^2+1}{(x-1)^2}\Big|_{x=0} = 1$

$C = \frac{x^2+1}{x}\Big|_{x=1} = 2$

$$\left| \begin{array}{l} \text{при } x = 2: \\ B = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} - 2 = 0 \end{array} \right.$$

1.5.2 Интегрирование простейших дробей

I. $\int \frac{A}{x-a}\, \mathbf{d}x = A\int \frac{\mathbf{d}(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + c$

II. $\int \frac{A}{(x-a)^k}\, \mathbf{d}x = A\int (x-a)^{-k}\, \mathbf{d}(x-a) = A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + c$

III. $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\, \mathbf{d}x = \int \frac{Mx+N}{x^2+2x\cdot\frac{p}{2}+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q}\, \mathbf{d}x = M\int \frac{x+\frac{p}{2}-\frac{p}{2}}{(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}}\, \mathbf{d}(x+\frac{p}{2}) +$
$+N\int \frac{\mathbf{d}(x+\frac{p}{2})}{(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}} = M\int \frac{(x+\frac{p}{2}-\frac{p}{2})\, \mathbf{d}(x+\frac{p}{2})}{(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}} + (N-\frac{Mp}{2})\int \frac{\mathbf{d}(x+\frac{p}{2})}{(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}} = \left| \begin{array}{l} (x+\frac{p}{2}) = t \\ q-\frac{p^2}{4} = a^2 \end{array} \right| =$
$M\int \frac{t\, \mathbf{d}t}{t^2+a^2} + (N-\frac{Mp}{2})\int \frac{\mathbf{d}t}{t^2+a^2} = \frac{M}{2}(\int \frac{\mathbf{d}(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^k}) + (N-\frac{Mp}{2})\cdot I_k = \frac{M}{2}\frac{(t^2+a^2)^{-k+1}}{-k+1} +$
$+ (N-\frac{Mp}{2})\cdot I_k$

Найдем $I_k = \int \frac{\mathbf{d}t}{(t^2+a^2)^k} = \left| \begin{array}{l} U = \frac{1}{(t^2+a^2)^k} \Rightarrow\ \mathbf{d}U = -k(t^2+a^2)^{-k-1} \\ \mathbf{d}V = \mathbf{d}t;\ V = t;\ 2t\ \mathbf{d}t = -2k\frac{t\ \mathbf{d}t}{(t^2+a^2)^{k+1}} \end{array} \right| =$
$= \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + \int t\cdot 2k\frac{t\, \mathbf{d}t}{(t^2+a^2)^k} = \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + 2k\int \frac{(t^2+a^2-a^2)\, \mathbf{d}t}{(t^2+a^2)^{k+1}} = \frac{t}{(t^2+a^2)^k} +$
$+ 2k\int \left(\frac{1}{(t^2+a^2)^k} - \frac{a^2}{(t^2+a^2)^{k+1}}\right)\, \mathbf{d}t = \frac{t}{t^2+a^2} + 2k\left(I_k - a^2 I_{k+1}\right) =$
$= \frac{t}{t^2+a^2} + 2kI_k - 2ka^2 I_{k+1} \Rightarrow 2ka^2 I_{k+1} = \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + I_k(2k-1);$

Пусть $k+1 = n \Rightarrow k = n-1$
Получим: $I_n = \frac{1}{a^2(2n-2)}\cdot\frac{t}{(t^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{1}{a^2}\cdot I_{n-1};\ n > 2$

1.5.3 Общая схема интегрирования рациональных дробей

1. Если дробь неправильная, то разделить числитель на знаменатель и выделить целую часть(т. е. представить дробь в форме многочлена и правильной рациональной дроби).

2. Знаменатель правильной рациональной дроби раскладываем на множители и записываем разложение правильной дроби в сумму простейших дробей.

3. Находим неопределенные коэффициенты этого разложения.

4. Интегрируем полученный многочлен и сумму полученных дробей.

Remark. Интеграл от рациональной функции всегда выражается через элементарные функции.

Example:

$$\int \frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}\,\mathbf{d}x =$$

$$\begin{array}{l}
\big(\quad x^5 \qquad\quad +2x^3 \qquad\quad +4x+4\big) : \big(x^4+2x^3+2x^2\big) = x-2+\dfrac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2} \\
\underline{\;-x^5-2x^4-2x^3\;} \\
\qquad -2x^4 \\
\qquad \underline{\;\;2x^4+4x^3+4x^2\;} \\
\qquad\qquad 4x^3+4x^2+4x+4
\end{array}$$

$$= \int \left((x-2)+\frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}\right)\,\mathbf{d}x =$$

$$\frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2} = \frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^2(x^2+2x+2)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+2} \qquad (1.1)$$

$B = \frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^2+2x+2}\Big|_{x=0} = 2$

при $x = 1 : (1.1)$

$\frac{16}{5} = A+2+\frac{C+D}{2}\Big| \cdot 5; \qquad 16 = 5A+10+C+D; \qquad 5a+C+D = 6$

при $x = -1 :$

$0 = -A+2+D-C; \qquad A+C-D = 2; \qquad A+C-D = 2$

при $x = -2 :$

$\frac{-32+16-8+4}{16-16+8} = -\frac{A}{2}+\frac{2}{4}+\frac{D-2C}{2}\Big| \cdot 2; \qquad -5 = -A+1+D-2C; \Rightarrow$

$\Rightarrow A = 0;\ B = 2;\ C = 4;\ D = 2$

$$\int \left(x-2+\frac{2}{x^2}+\frac{4x+2}{x^2+2x+2}\right)\,\mathbf{d}x = \frac{2}{x^2}-2x+2\int \frac{2x+2-1}{(x^2+2x+2)}\,\mathbf{d}x =$$

$$= \frac{2}{x^2}-2x-\frac{2}{x}+2\left(\underset{\ln(x^2+2x+2)}{\int \frac{\mathbf{d}(x^2+2x+2)}{x^2+2x+2}} - \underset{\arctan(x+1)}{\int \frac{\mathbf{d}(x+1)}{(x+2)^2+1}}\right) =$$

$$\frac{2}{x^2}-2x-\frac{2}{x}+2\ln(x^2+2x+2)-2\arctan(x+1)$$

1.6 Интегрирование тригонометрических функций

1.6.1 Универсальная тригонометрическая замена

Пусть $R(\sin x; \cos x)$ - рациональная функция от $\sin x, \cos x$.
Замена: $t = \tan \frac{x}{2}$
Тогда:

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \tan \frac{x}{2} \cos \frac{x^2}{2} = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} - 1 = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$x = 2 \arctan t;$ $\quad \mathbf{d}x = \frac{2}{1+t^2} \ \mathbf{d}t$
Получаем:

$$\int R(\sin x, \cos x) \ \mathbf{d}x = \int R\left(\frac{2}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2}{1+t^2} \ \mathbf{d}t = \int R_1(t) \ \mathbf{d}t$$

Remark. Этот способ позволяет найти первообразную, но полученная функция $f(t)$ может оказаться слишком громаздкой.

1.6.2 Другие виды подстановок

1. Если подинтегральная функция является нечетной относительно $\sin x$, т. е. $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то используется замена $t = \cos x$. Фактически это означает внесения $\cos x$ под знак дифференциала.

2. Если подинтегральная функция является нечетной относительно $\cos x$, т. е. $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то используется замена $t = \sin x$. Фактически это означает внесения $\sin x$ под знак дифференциала.

3. Если подинтегральная функция является одновременно четной относительно $\sin x, \cos x$ то выполняется замена $t = \tan x$(внесение $\frac{1}{\cos^2 x}$ под знак дифференциала).

Remark.
Для $\int R(\tan x) \ \mathbf{d}x$ замена $\tan x = t \Rightarrow x = \arctan t;$ $\ \mathbf{d}x = \frac{\mathbf{d}t}{1+t^2};$
и $\int R(\tan x) \ \mathbf{d}x = \int R(t) \cdot \frac{\mathbf{d}t}{1+t^2} = \int R_1(t) \ \mathbf{d}t$

1.6.3 Использования формул тригонометрии

1.

$$\int \cos^2 x \ \mathbf{d}x, \int \sin^2 x \ \mathbf{d}x \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

2.

$$\int \cos\alpha x \cos\beta x \ \mathbf{d}x \Rightarrow \cos\alpha x \sin\beta x = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)x + \cos(\alpha+\beta)x)$$

$$\int \sin\alpha x \sin\beta x \ \mathbf{d}x \Rightarrow \sin\alpha x \sin\beta x = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x)$$

$$\int \sin\alpha x \cos\beta x \ \mathbf{d}x \Rightarrow \sin\alpha x \cos\beta x = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)x + \sin(\alpha+\beta)x)$$

Example:

$\int \frac{\mathbf{d}x}{3+\sin x+\cos x} = \left| \begin{array}{c} t = \tan\frac{x}{2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{2\ \mathbf{d}t}{(1+t^2)(3+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2})} = 2\int \frac{\mathbf{d}t}{3+3t^2+2t+1-t^2} =$
$= 2\int \frac{\mathbf{d}t}{2t^2+2t+4} = 2\int \frac{\mathbf{d}t}{t^2+t+2} = \int \frac{\mathbf{d}t}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}} = \int \frac{\mathbf{d}(t+\frac{1}{2})}{(t+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{7}}{2})^2} = \frac{2}{\sqrt{7}}\arctan(2\frac{t+\frac{1}{2}}{\sqrt{7}}) + c =$
$= \frac{2}{\sqrt{7}}\arctan(2\frac{\tan x+\frac{1}{2}}{\sqrt{7}}) + c$

Example:

$\int \frac{\mathbf{d}x}{1+\sin^2 x} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}+\tan^2 x}\cdot\frac{\mathbf{d}x}{\cos^2 x} = \left|\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}\right| = \int \frac{1}{1+2\tan^2 x}\ \mathbf{d}(\tan x) =$
$|\tan x = t| = \int \frac{\mathbf{d}t}{1+2t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\mathbf{d}(\sqrt{2}t)}{1+(\sqrt{2}t)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}t) + c =$
$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan x) + c$

Example:

$\int \cos^2 x \sin^4 x \ \mathbf{d}x = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 \ \mathbf{d}x = \frac{1}{8}\int (1-\cos^2 2x)(1-\cos 2x)\ \mathbf{d}x =$

$= \frac{1}{8}\int (1-\cos 2x - \cos^2 x + \cos^3 2x)\ \mathbf{d}x = \frac{1}{8}(x - \frac{\sin 2x}{2} - \int \cos^2 2x \ \mathbf{d}x + \int \cos^3 2x \ \mathbf{d}x) =$

$= \frac{1}{8}x - \frac{\sin 2x}{16} - \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} - \frac{1}{16}\int (1-\sin^2 x)\ \mathbf{d}(\sin 2x) = \frac{x}{16} - \frac{\sin 2x}{16} - \frac{\sin 4x}{16} + \frac{\sin 2x}{16} -$
$- \frac{1}{16}\frac{\sin^3 2x}{3} + c = \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{16} - \frac{1}{16}\frac{\sin^3 2x}{3} + c$

Example:

$\int \sin^4 x \cos^5 x \ \mathbf{d}x = |\sin x = t| = \int \sin^4 x \cos^4 x \underbrace{\cos x \ \mathbf{d}x}_{\mathbf{d}(\sin x)} = \int \sin^4 x (\cos^2 x)^2 \ \mathbf{d}(\sin x) =$

$= \int \sin^4 x (1-\sin^2 x)^2 \ \mathbf{d}(\sin x) = \int t^4(1-2t^2-t^4) \ \mathbf{d}t = \int (t^4 - 2t^6 + t^8) \ \mathbf{d}t =$

$= \frac{t^5}{5} - \frac{2t^7}{7} + \frac{t^9}{9} + c = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{2\sin^7 x}{7} + \frac{\sin^9 x}{9} + c$

1.7 Интегрирование некоторых иррациональных и транцедентных функций

1.7.1 Дробно-линейная подстановка для интегралов

$\int R(x; \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}} \ \mathbf{d}x,$

$a, b, c, d \in \mathbb{R}; \qquad m_1, n_1, \dots, m_k, n_k \in \mathbb{N}$

Remark.

1. $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^m}$

2. Частичными случаи таких дробей являются

   $ax+b(c=0, \ d=1), \qquad x = (c=0, \ d=1, \ b=0, \ a=1)$

   Замена:

   $\frac{ax+b}{cx+d} = t^l$, где $l = \mathrm{lcm}(n_2, \ n_2, \dots, \ n_k) \Rightarrow \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_i}{n_i}} = t^{\frac{m_i}{n_i}l} = t^{p_i}, \ p_i \in \mathbb{Z}$

   $ax+b = t^l cx + dt^l; \ x = (t^l c - a) = b - d \cdot t^l \Rightarrow x = \frac{b-dt^l}{ct^l-a}$

   $\mathbf{d}x = \left(\frac{b-dt^l}{ct^l-a}\right)'_t \ \mathbf{d}t = \frac{-dl \cdot t^{l-1}(ct^l-a)-(b-dt^l)\cdot c \cdot l \cdot t^{l-1}}{(ct^l-a)^2} = \frac{-lt^{l-1}(cdt^l-ad+bc-cdt^l}{(ct^l-a)^2} = \frac{-lt^{l-1}(bc-ad)}{(ct^l-a)^2}$

   Таким образом, подинтегральная функция будет являтся рациональной функцией от t.

Example:

$$\int \frac{\mathbf{d}x}{\sqrt[3]{(2x+1)^2} - \sqrt{2x+1}} = \left| \begin{array}{lll} n_1 = 3; & \text{Замена:} & 2x+1 = t^6 \\ n_2 = 2 & & x = \frac{t^6-1}{2} \\ \mathrm{lcm} = 6 & & \mathbf{d}x = 3t^5 \ \mathbf{d}t \end{array} \right| = \int \frac{3t^5 \ \mathbf{d}t}{(t^6)^{\frac{2}{3}} + (t^6)^{\frac{1}{2}}} =$$

$3\int \frac{t^5 \ \mathbf{d}t}{t^4 - t^3} =$

$$= 3\int \frac{t^2}{t-1} \ \mathbf{d}t \underset{\text{выделяем целую часть}}{\Longrightarrow} \begin{array}{r} \big(\quad t^2\big) : \big(-1 + 1t\big) = \frac{1}{\frac{1}{-1+1t}} t^2 = \\ \underline{-\,t^2} \\ 0 \end{array}$$

$= 3\int (t + 1 + \frac{1}{t-1}) \ \mathbf{d}t = 3\left(\frac{t^2}{2} + t + \ln|t-1|\right) + c = |t = \sqrt[6]{2x+1}| =$

$= \frac{3}{2}\sqrt[3]{2x+1} + 3\sqrt[6]{2x+1} + 3\ln|\sqrt[6]{2x+1} - 1| + c$

Example:

$$\int \frac{1}{(x-1)^2\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}}\ \mathbf{d}x = \left| \begin{array}{ll} \frac{x+1}{x-1} = t^3 \Rightarrow & \mathbf{d}x = \left(\frac{t^3+1}{t^3-1}\right)\ \mathbf{d}t \\ x+1 = xt^3 - t^3 & \\ x = \frac{t^3+1}{t^3-1} & = \frac{-6t^2\ \mathbf{d}t}{(t^3-1)^2} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{1}{\left(\frac{t^3+1}{t^3-1} - 1\right)^2} \cdot t \cdot \frac{-6t^2\ \mathbf{d}t}{(t^3-1)^2} = -6\int \frac{1 \cdot t^3\ \mathbf{d}t}{\frac{2^2}{(t^3-1)}} \cdot (t^3-1)^2 = -\frac{6}{4} \cdot \frac{t^4}{4} = -\frac{3}{8} \cdot \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{4}{3}} + c$$

1.7.2 Квадратичные иррациональности

1. Частные случаи

   (a) Интегралы вида $\int R(x,\ \sqrt{x^2 \pm a^2})\ \mathbf{d}x,\ \int R(x,\ \sqrt{a^2 - x^2})\ \mathbf{d}x$
   $R()$ - знак рациональной функции.
   Для преобразования таких интегралов к интегралам рациональной функции испльзуется замена.

   - для $R(x,\ \sqrt{a^2 - x^2})\ :\ x = a\sin t$
   - для $R(x,\ \sqrt{x^2 + a^2})\ :\ x = at\tan t;\ (1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t})$
   - для $R(x,\ \sqrt{x^2 - a^2})\ :\ x = \frac{a}{\sin t}$

   (b) Интегралы вида $\int \frac{\mathbf{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}};\ \int \sqrt{ax^2+bx+c}\ \mathbf{d}x;\ \int \frac{(mx+n)\ \mathbf{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ можно свести к табличному или к пункту (a) выделением полного квадрата.
   $ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$
   $= a\left(x^2 + \frac{b}{a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$; замена: $\left(x + \frac{b}{2a}\right) = t$

   (c) Интегралы вида $\int \frac{P_n(x)\ \mathbf{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $P_n(x)$ - многочлен n-ой степени, можно вычислить поп формуле:
   $\int \frac{P_n(x)\ \mathbf{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q_{n-1}(x) \cdot \sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda\int \frac{\mathbf{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, где $Q_{n-1}(x)$ - многочлен с непоределенными коэффициентами. λ - неопределенный коэффициент. Неопределенный коэффициенты находим, дифференцируя обе части этой формулы и умножая полученный результат на знаменатель.
   $\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q'_{n-1}(x) \cdot \sqrt{ax^2+bx+c} + Q_{n-1}(x) frac2ax + b\sqrt{ax^2+bx+c} +$
   $\lambda \cdot \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}} =$ умножаем на $\sqrt{ax^2+bx+c}$, из полученного находим неопределенные коэффициенты.

Example:

$$\int \frac{\mathbf{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \left| \begin{array}{l} x = \frac{a}{\sin t} \\ \mathbf{d}x = -\frac{a\cos t}{\sin t}\ \mathbf{d}t \end{array} \right| = \int \frac{-a\cos t\ \mathbf{d}t}{\sqrt{\frac{a^2}{\sin^2 t}-a^2}\cdot\sin t} = -\int \frac{\cos t\ \mathbf{d}t}{\sqrt{\frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}}\cdot\sin^2 t} =$$

$$= -\int \frac{\mathbf{d}t}{\sin t}\cdot\frac{\sin t}{\sin t} = \int \frac{\mathbf{d}(\cos t)}{1-\sin^2 t} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos t}{1+\cos t}\right| + c =$$

$$= \left| \left(\begin{array}{l} \sin t = \frac{a}{x}; \\ t = \arcsin\frac{a}{x} \end{array} \right) \begin{array}{l} \cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} \\ \sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}} = \sqrt{\frac{x^2-a^2}{x^2}} \end{array} \right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}}{1+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}}\right| + c =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-\sqrt{x^2-a^2}}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\right| + c$$

Example:

$$\int \frac{x+4}{\sqrt{6-2x-x^2}}\ \mathbf{d}x = \left| \begin{array}{l} 6-2x-x^2 = -((x^2+2x+1)-7) = -(x+1)^2+7 = \\ = 7-(x+1)^2 = (\sqrt{7})^2-(x+1)^2 \end{array} \right| =$$

$$= |x+1=t| = \int \frac{t+3}{\sqrt{(\sqrt{7})^2+(t^2)}}\ \mathbf{d}t = \int \frac{t\ \mathbf{d}t}{\sqrt{7-t^2}} + 3\int \frac{\mathbf{d}t}{\sqrt{7-t^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{\mathbf{d}(7-t^2)}{\sqrt{7-t^2}} +$$

$$+ 3\arcsin\frac{t}{\sqrt{7}} = -\sqrt{7-t^2} + 3\arcsin\frac{t}{\sqrt{7}} + c = -\sqrt{6-2x-x^2} +$$

$$+ 3\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{7}} + c$$

Example:

$$\int \frac{x^2\ \mathbf{d}x}{\sqrt{1-2x-x^2}} = (Ax+B)\sqrt{1-2x-x^2} + \lambda\int \frac{\mathbf{d}x}{\sqrt{1-2x-x^2}}\Bigg|' = \frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}} =$$

$$= A\sqrt{1-2x-x^2} + (Ax+B)\cdot\frac{-2-2}{2\sqrt{1-2x-x^2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{1-2x-x^2}}\Bigg|\cdot\sqrt{1-2x-x^2}$$

$$x^2 = A - 2Ax - Ax^2 - Ax^2 - Ax - Bx - B + \lambda$$

$$\begin{cases} -2A = 1 \\ -3A + B = 0 \\ A - B + \lambda = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = -\frac{1}{2} \\ B = \frac{3}{2}\lambda = 2 \end{cases}$$

$$\underbrace{\left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right)\sqrt{1-2x-x^2}}_{F(x)} + 2\int \frac{\mathbf{d}x}{\sqrt{2-(x+1)^2}} = F(x) + 2\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}} + c$$

2. Интегралы общего вида
   $\int R(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c})\ \mathbf{d}x$

Способ 1 Выделим под знаком радикала полный квадрат и выполняем замену: $x + \frac{b}{2a} = t$; интеграл сводится к к одному из интегралов $\int R(t, \sqrt{t^2 \pm a^2})\ \mathbf{d}t$, $\int R(t, \sqrt{a^2-t^2})\ \mathbf{d}t$, которые находятся при помощи тригонометрической подстановки.

Способ 2 Использование подстановки Эйлера

- если $a > 0$, то $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x + t :\ (t \pm \sqrt{a}x)$
- если $c > 0$, то $\sqrt{ax^2+bx+c} = tx \pm \sqrt{c}$
- если $D > 0$, то $\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)\cdot t$,
  где α - корень $ax^2+bx+c|_{x=\alpha} = 0$.

Remark. По крайней мере одно из условий будет выполнено всегда; т.к.

ситуация $\begin{cases} a < 0 \\ c < 0 \\ D < 0 \end{cases} \Rightarrow ax^2+bx+c < 0$ запрещена по ОДЗ.

Example:

$$\int \frac{\mathbf{d}x}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}} = \left| \begin{array}{l} a < \\ D > 0, \\ \text{корни иррац.} \\ c > o \end{array} \right| \ominus$$

Замена: $\sqrt{1-x-x^2} = tx + 1$;

$1 - x - x^2 = tx^2 + 2tx + 1| : x, \qquad -1 - x = t^2x + 2t$

$x(t^2+1) = -2t - 1, \qquad x = -\frac{2t+1}{t^2+1}, \qquad t = \frac{\sqrt{1-x-x^2}-1}{x}$

$\mathbf{d}x = \left(-\frac{2t+1}{t^2+1}\right)'\ \mathbf{d}t = -\frac{2(t^2+1)-(2t+1)\cdot 2t}{(t^2+1)^2}\ \mathbf{d}t = \frac{2t^2+2t-2}{(t^2+1)^2}\ \mathbf{d}t$

$\ominus \int \frac{2(t^2+t-1)\ \mathbf{d}t}{(t^2+1)^2\left(\frac{1-2t+1}{t^2+1}\right)\left(t\cdot\frac{-(2t+1)}{t^2+1}+1\right)} = \int \frac{2(t^2+t-1)\ \mathbf{d}t}{t(t-2)(-t^2-t+1)} = -2\int \frac{\mathbf{d}t}{t(t-2)} =$

$= -2\int \left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t-2}\right)\ \mathbf{d}t = \int \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-2}\right)\ \mathbf{d}t = \ln|t| - \ln|t-2| + c =$

$= \ln\left|\frac{\sqrt{1-x-x^2}-1}{x}\right| - \ln\left|\frac{\sqrt{1-x-x^2}-1}{x} - 2\right| + c = \ln\left|\frac{\frac{\sqrt{1-x-x^2}-1}{x}}{\frac{\sqrt{1-x-x^2}-1}{x}-2}\right| + c$

1.7.3 Инегрирование дифферециального бинома

Интеграл $\int x^m(a+bx^n)^p\ \mathbf{d}x,\ m,\ n,\ p \in \mathbb{Q};\ a,\ b \in \mathbb{R}$
этот интеграл сводится к к интегралу от рациональной функции и первообразная выражается в элементарных функциях только в следующих случаях:

1. $p \in \mathbb{Z}$
2. $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$
3. $\left(\frac{m+1}{n} + p\right) \in \mathbb{Z}$

При этом для сведения заданого интеграла к интегралу от рациональной функции используются подстановки:

1. $p \in \mathbb{Z}$ Замена: $x = t^k$, где $k = \mathrm{lcm}(m,\ n)$
2. $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$ Замена: $a + bx^n = t^s$, где s - знам. p
3. $\left(\frac{m+1}{n} + p\right) \in \mathbb{Z}$ Замена: $a + bx^n = t^s x^n$, где s - знам. p

В остальных случиях первообразная в элементарных функциях не выражается. Этот результат носит название теоремы Чебышева.

Example:

$$\int \frac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}+1}}{\sqrt{x}}\ \mathbf{d}x = \int x^{-\frac{1}{2}}(1 + x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{4}}\ \mathbf{d}x = \left| \begin{array}{l} m = -\frac{1}{2} \\ n = \frac{1}{4} \\ p = \frac{1}{3} \end{array} \right| \ominus$$

1. $p \notin \mathbb{Z}$
2. $\frac{m+1}{n} = \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 2 \in \mathbb{Z}$ - второй случай.
   Замена: $1 + x^{\frac{1}{4}} = t^3,\ x = (t^3 - 1)^4;\ \ \mathbf{d}x = 4(t^3 - 1)^3 \cdot 3t^2\ \mathbf{d}t$

$$\ominus \int \left((t^3 - 1)^4\right)^{-\frac{1}{2}} (t^3)^{\frac{1}{3}} \cdot 12t^2(t^3 - 1)^3\ \mathbf{d}t = 12\int (t^3 - 1)t^3\ \mathbf{d}t = 12\left(\frac{t^7}{4} - \frac{t^4}{4}\right) + c =$$

$$= \frac{12}{7}\left(1 + x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{7}{3}} - 3\left(1 + x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{4}{3}} + c$$

1.7.4 Интегралы вида $\int R(e^x)\ \mathbf{d}x, \int R(\sqrt{e^x + e})\ \mathbf{d}x$

1. Замена: $e^x = t \Rightarrow x = \ln t,\ \mathbf{d}x = \frac{\mathbf{d}t}{t}$
   $\int R(e^x)\ \mathbf{d}x = \int R(t)\frac{\mathbf{d}t}{t} = \int R_1(t)\ \mathbf{d}t$
2. Замена: $\sqrt{e^x + e} = t \Rightarrow e^x = t^2 - a,\ x = \ln(t^2 - a),\ \mathbf{d}x = \frac{2t\ \mathbf{d}t}{t^2 - a}$
   $\int R(\sqrt{e^x + e})\ \mathbf{d}x = \int R(t) \cdot \frac{2t\ \mathbf{d}t}{t^2 - a} = \int R_1(t)\ \mathbf{d}t$

1.8 Интегралы, не выражающиеся в элементарных функциях

В интегральном исчислении строго доказывается, что первообразные от некоторых элементарных функций хотя и существуют, но не могут быть выражены элементарной функцией (т.е. как конечное число арифметических операций и композиций над основными элементарными функциями(даже если известно, что первообразная существует)).
К таким интегралам относятся:

$$\int e^{-x^2}\ \mathbf{d}x \text{ интеграл Пуассона(теория вероятностей)}$$

$$\int \frac{\mathbf{d}x}{\ln x} \text{ интегральный логарифм(теория чисел)}$$

$$\int \frac{\sin x}{x}\ \mathbf{d}x, \int \frac{\cos x}{x}\ \mathbf{d}x, \int \frac{e^x}{x}\ \mathbf{d}x \text{ интегральный синус, косинус, показательная функция}$$

$$\int \sqrt{1-k^2\sin^2 x}\ \mathbf{d}x, \int \frac{\mathbf{d}x}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}, |k|<1 \text{ элиптические интегралы}$$

$$\int \cos(x^2)\ \mathbf{d}x, \int \sin(x^2)\ \mathbf{d}x \text{ интегралы Фринеля(физика, оптика)}$$

$$\int x^\alpha \sin x\ \mathbf{d}x, \int x^\alpha \cos x\ \mathbf{d}x,\ \alpha \neq 0, 1, 2\ldots \qquad \text{и другие}$$

Такие функции называются специальными. Для них существуют специальные таблицы для определения значений функции.

Chapter 2

Определенный интеграл

2.1 Определение определенного интеграла(Римана)

Пусть функция: $f(x)$; $f(x)\ :\ [a,\ b] \to \mathbb{R}\ (a < b)$
произвольными точками разобьем отрезок $[a,\ b]$ на n частичных отрезков: $[x_0,\ x_1],\ [x_1,\ x_2], \ldots,\ [x_{n-1},\ x_n]$
Разбиение будем обозначать T, T - разбиение $[a,\ b]$; $x_0,\ x_1, \ldots, x_n$ - точки разбиения T.
Величина $\Delta x_n = x_k - x_{k-1},\ k = \overline{1, n}$ называется **длинной** k-го частичного отрезка $[x_{k-1},\ x_k]$.
Диаметр разбиение $T\ :\ d(T) = \max\limits_{1 \le k \le n} \Delta x_k$ - длина наибольшего частичного отрезка T.

Remark. $d(T) \to 0 \Rightarrow n \to \infty$

Разбиение T' называется **дроблением** разбиения $T(T' \succ T)$, если его точками разбиения являются все точки разбиения T и, по крайней мере, одна дополнительная.
Пусть есть некоторое разбиение T отрезка $[a,\ b]$. На каждом частичном отрезке выберем произвольную точку $\xi_k : \forall k \xi_k \in [x_{k-1}, x_k], k = \overline{1, n}$. Эти точки назовем **отмеченными**. Пара $(T,\ \xi)$ означает разбиение T с отмеченными точками.
Интегральной суммой для функции $f(x)$ на отрезке $[a,\ b]$ для выбранного разбиения T с отмеченными точка $(T,\ \xi)$ называется

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k = \sigma(f \mid T, \xi)$$

Число $I(f)$ называется **пределом** интегральных сумм $\sigma(f|T, \xi)$ при $\alpha(T) \to 0$ если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое положительное δ, зависящее от ε что для любых разбиений, для которых $\alpha(T) < \delta(\varepsilon)$ значение интегральных сумм независимо от выбранных точек удовлетворяют неравенству : $|\sigma(f|T,\xi)- I(f)| < \varepsilon$

$$\lim_{\alpha(T)\to 0} \sigma(f|t,\xi) = I(f) \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 \forall(T,\xi)\alpha(T) < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \sigma(f|T,\xi) - I(f) < \varepsilon$$

Если такое число $I(F)$ существует (т.е существует и является конечным указанный предел интегральных сумм), то это число и называют определенным интегралом функции $f(x)$ на отрезке $[a,\ b]$.

$$\int_a^b f(x)\ \mathbf{d}x \equiv I(f) = \lim_{\alpha(T)\to 0} \sigma(f\ |t\ ,\ \xi) = \lim_{\alpha(T)\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k); \Delta x_k (n \to \infty)$$

При этом функция $f(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a,\ b]$:

Theorem 2.1.1 (необходимое условие интегрируемости функции на отрезке)**.**

Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то $f(x)$ - ограничена на $[a,b]$.

Если$f(x) \in R([a,\ b])$, то $f(x)$ - ограничена на отрезке $[a,\ b]$

Proof. Пусть $f(x) \in R([a,\ b]) \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0\ > \forall(T,\ \xi)\ \alpha(T) < \delta(\varepsilon) \Rightarrow$
$|\sigma(f\mid T,\ \xi) - I(f)| < \varepsilon \Rightarrow I(f) - \varepsilon < \sigma(f\mid T,\xi) < I(f) + \varepsilon$
т.е. $\sigma(f\mid T,\ \xi)$ - ограничена. далее от противного:
Предположим, что функция $f(x)$ не ограничена на $[a,\ b]$, т.е. $\exists x_0 \in [a,\ b]$ $\forall M > 0\ \exists\Theta(x_0)\ \forall x \in \Theta(x_0)\ |f(x)| > M$. при любом разбиение T отрезка $[a,\ b]$ точка x_0 попадает в некоторый частичный отрезок $[x_{k-1},\ x_k]$. В этот же отрезок попадает либо вся окрестность точки x_0 $\Theta(x_0)$, в которой функция не ограничена, либо часть этой окрестности. Тогда выбирая на этом отрезке точку $\xi_k \in \Theta(x_0)$ из такой окрестности получим: $f(\xi_k)$ может быть как угодно велико(по модулю) следовательно, $f(\xi_k)$ - неограничено $\Rightarrow$ $f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$ - неограничено, т.е. $\sigma(f|T,\xi)$ - неограничена - противоречие, следовательно, $f(x)$ - ограничена на $[a,\ b]$. □

Это условие необходимое, но не является достаточным.

Remark. Если предел $I(f)$ не существует или являются бесконечным, то $f(x) \notin R([a,\ b])$

Example:

$$\underset{\text{ф-я Дирихле}}{D(x)} = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{если } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$\forall [a,\ b]\ \forall T:$

1. если $\xi_k = q_k \in \mathbb{Q}, k = \overline{1, n}$, то $\sigma(D \mid T,\ q) = \sum\limits_{k=1}^{n} \Delta x_k = b - a$

2. если $\xi_k = r_k \notin \mathbb{Q},\ r_k \in \setminus,\ k = \overline{1,\ n}$, то $\sigma(D \mid T,\ r) = 0$

$I(D)$ - не существует. $D(x) \notin R([a,\ b])\ \forall [a,\ b]$

2.2 Суммы Дарбу и их свойства

Пусть функция $f(x)$ - ограничена на $[a,\ b]]$, T - выбранное разбиения отрезка $[a, b]$.. На каждом частичном отрезке разбиения функция имеет точную верхнюю и нижнюю грань. Обозначим m_k и M_k:

$$m_k = \inf_{x \in [x_{k-1},\ x_k]} f(x) \qquad m_k = \sup_{x \in [x_{k-1},\ x_k]} f(x)$$

Нижней и **верхней** сумами Дарбу Функции $f(x)$ на отрезке $[a,\ b]$ при данном разбиении T называются:

$$\sigma_*(f \mid T) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k \qquad \sigma^*(f \mid T) = \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot \Delta x_k$$

$$\forall (T,\ \xi)\ \ \sigma_*(f \mid T) \leq \sigma^*(f \mid T)$$

Theorem 2.2.1 (Свойство суммы Дарбу)**.**

1. *Если $T' \succ T$(T' - дробление разбиения T), то $\sigma_*(f \mid T') \geq \sigma_*(f \mid T)$.*

2. *Если $T' \succ T$, то $\sigma^*(f \mid T') \leq \sigma^*(f \mid T)$*

3. *$\forall T_1,\ T_2 \qquad \sigma_*(f \mid T_1) \leq \sigma^*(f \mid T_2)$*

Proof.

1. Поскольку разбиение T' можно получить из разбиения T, последовательно добавляя к нему по одной новой точке, то утверждение достаточно доказать для случая, когда T' содержит только одну дополнительную точку по сравнению с T. Тогда:
$\sigma_*(f \mid T) = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k \cdot \Delta x_k$
Пусть дополнит точка разбиение $x' :\ x' \in [x_{k-1},\ x_k]$.
Тогда $\sigma_*(f \mid T) = \sum\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq r}}^{n} m_k \cdot \Delta x_k + m_r \cdot \Delta x_r,\ \sigma_*(f \mid T') = \sum\limits_{k=1} m_k \cdot \Delta x_k +$

$+ \inf_{x\in[x_{k-1},\, x_k]} f(x) \cdot (x' - x_{k-1}) + \inf_{x\in[x_{k-1},\, x_k]} f(x)(x_r - x')) =$

$$\left.\begin{matrix} \inf\limits_{x\in[x_{r-1},\, x']} f(x) \geq \inf\limits_{x\in[x_{r-1},\, x_r]} f(x) = m_r \\ \inf\limits_{x\in[x',\, x_r]} f(x) \geq \inf\limits_{x\in[x_{r-1},\, x_r]} f(x) = m_r \end{matrix}\right\} \geq \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq 2}}^{n} m_k \Delta x_k + m_r(x' - x_{r-1} + x_r - x') =$$

$$= \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq 2}}^{n} m_k \cdot \Delta x_k + m_r \cdot \Delta x_r = \sigma_*(f \mid T)$$

2. аналогично 1
3. Возьмем $T = T_1 \cup T_2$;
   Тогда $T \succ T_1,\ T \succ T_2 . \sigma_*(f \mid T_) \leq \sigma_*(f \mid T) \leq \sigma^* \leq \sigma(f \mid T_2)$

□

Consequence. Таким образом, множество всех нижних сумм Дарбу для различных разбиений заданого отрезка является ограниченными сверху(любой верхней суммой Дарбу). Поэтому это множество имеет точную верхнюю грань:

$$\exists \sup_T \sigma_*$$

Это значение называется **нижним интегралом** $I_*(f)$. Аналогично, множество всех верхних сумм Дарбу для различных разбиений отрезка является ограниченным снизу любой нижней суммой Дарби. ПОэтому множество имеет точную нижнюю грань:

$$\exists \inf_T \sigma^*$$

Это значение называется **верхним интегралом** $I^*(f)$.
Обозначим:

$$\sup_T \sigma_*(f \mid T) \equiv I_*(f) \equiv \int_a^b f(x)\ \mathbf{d}x(\text{нижний интеграл})$$

$$\inf_T \sigma^*(f \mid T) \equiv I^*(f) \equiv \int_a^b f(x)\ \mathbf{d}x(\text{верхний интеграл})$$

Тогда:

$$\forall T: \ \ \sigma_*(f \mid T) \leq I_*(f) \leq I^*(f) \leq \sigma^*(f \mid T)$$

Колибанием сумм Дарбу для данного разбиения называется величина:

$$\Omega(f \mid T) = \sigma^*(f \mid T) - \sigma_*(f \mid T)$$

Тогда:

$$\Omega(f \mid T) \geq 0; \qquad 0 \leq I^*(f) - I_*(f) \leq \Omega(f \mid T)$$

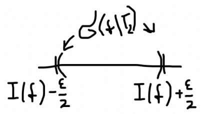
2.3 Необходимое и достаточное условие интегрируемости функции $f(x)$ на $[a,\, b]$

Theorem 2.3.1 (Критерий интегрируемости функции на отрезке). *Для того, чтобы функция $f(x)$, заданая на отрезке $[a, b]$, была интегрируема по Риману, необходимо и достаточно, чтобы предел колебания суммы Дарбу равнялся нулю, когда диаметр разбиения стремился к нулю:*

$$f(x):\ [a,\, b] \to R,\ f(x) \in R([a,\, b]) \Leftrightarrow \lim_{\alpha(T)\to o} \Omega(f \mid T) = 0$$

Remark. $\lim \Omega(f \mid T) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0\ \forall T\ \alpha(T) < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \Omega(f \mid T) < \varepsilon$

Proof.
Необходимое:
Пусть $f(X) \in R([a,\, b]) \Rightarrow \exists I(f) = const$:
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0\ \forall (T,\, \xi)\ \alpha(T) < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |\sigma(f \mid T,\, \xi) - I(f)| < \frac{\varepsilon}{4}$
Из модуля: $I(f) - \frac{\varepsilon}{4} < \sigma(f \mid T,\, \xi) < I(f)$
Так как: $\sigma_*(f \mid T) \leq \sigma(f \mid T,\, \xi)) \leq \sigma^*(f \mid T)\ \forall T$



$\Rightarrow I(f) - \frac{\varepsilon}{4} \leq \sigma_*(f \mid T) \leq \sigma(f \mid T,\, \xi) \leq \sigma^*(f \mid T) \leq I(f) + \frac{\varepsilon}{4}$
$\Rightarrow \Omega(f \mid T) - \sigma^*(f \mid T) - \sigma_*(f \mid T) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \forall \varepsilon$
$\alpha(T) < \delta(\varepsilon) \to \lim\limits_{\alpha(t)\to 0} \Omega(f \mid t) = 0$

Достаточное
Пусть $\lim\limits_{\alpha(t)\to 0} \Omega(f \mid t) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{\alpha(t)\to 0} \sigma_*(f \mid T) = \lim\limits_{\alpha(t)\to 0} \sigma^*(f \mid t) = const$
Так как: $\sigma_*(f \mid T) \leq \sigma(f \mid T,\, \xi) \leq \sigma^*(f \mid T)\ \forall T \Rightarrow \exists \lim\limits_{\alpha(T)\to 0} \sigma(f \mid T,\, \xi) = const =$
$= I(f)$, т.е. $f(x) \in R([a,\, b])$ □

2.4 Некоторые классы интегрируемых функций

2.4.1 Интегрируемость непрерывных функций

Theorem 2.4.1. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\, b]$, то она интегрируема на этом отрезке.*

$$f(x) \in C([a,\, b]) \Rightarrow f(x) \in R([a,\, b])$$

Proof. $f(x) \in C([a,\, b]) \underset{\text{т. Кантора}}{\Longrightarrow} f(x)$ - равномерно непрерывна на $[a,\, b]$. т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon)\ \forall x_1,\, x_2 \in [a,\, b]\ |x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon)\ |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \cdot \frac{1}{b-a}$
Зафиксируем некоторое ε и найдем по нему $\delta(\varepsilon)$.

Выберем разбиение T отрезка $[a,\, b]$, так чтобы $\alpha(T) < \delta(\varepsilon)$.
Тогда: $\Omega(f \mid T) = \sum\limits_{k=1}^{n} M_k \cdot \Delta x_k - \sum\limits_{k=1}^{n} m_k \cdot \Delta x_k =$

$$= \left| \begin{array}{ccc} m_k = \inf\limits_{x \in [x_{k-1},\, x_k]} f(x) & & m_k = \min\limits_{x \in [x_{k-1},\, x_k]} f(x) \\ & f(x) \in C([a,\, b]) \Rightarrow & \\ M_k = \sup\limits_{x \in [x_{k-1},\, x_k]} f(x) & & M_k = \max\limits_{x \in [x_{k-1},\, x_k]} f(x) \end{array} \right| =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \cdot \Delta x_k = \left| \begin{array}{c} \Delta x_k < \delta(\varepsilon) \text{ - выбрано} \\ \Downarrow \text{равномерно непрерывна} \\ M_k - m_k < \varepsilon \frac{1}{b-a} \end{array} \right| < \sum_{k=1}^{n} \tfrac{\varepsilon}{b-a} \cdot \Delta x_k =$$

$$= \tfrac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \tfrac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon.$$

$\alpha(T) < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \Omega(f \mid T) < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{\alpha(T) \to 0} \Omega(f \mid T) = 0 \Rightarrow f \in R([a,\, b]$ □

2.4.2 Интегрирование монотонных ограниченных функций

Пусть функция $f(x)$ такая, что:

$$f(x) \;:\; [a,\, b] \to R,\; f(x) \text{ - монотонна}$$

Remark. Т. к. функция $f(x)$ монотонна на отрезке $[a,\, b]$, то все ее значения заключены между $f(a)$ и $f(b)$, таким образом, функция ограничена на отрезке.

Theorem 2.4.2. *Если функция $f(x)$ монотонна на отрезке $[a,\, b]$, то $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,\, b]$*

$$f(x) \text{ - \textit{монотонна}} \Rightarrow f(x) \in R([a,\, b])$$

Proof. для $f \uparrow$: $f \uparrow \Rightarrow f(b) - f(a) > 0$
Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и возьмем $T : \alpha(T) < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} = \delta(\varepsilon)$
Тогда: $\Omega(f \mid T) = \sum\limits_{k-1}^{n} (M_k - m_k) \cdot \Delta x_k < \sum\limits_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \cdot \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$ □