ДОМАШНЯ РОБОТА №5
З ПРЕДМЕТУ
"ТЕОРІЯ ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ"

ФІ-12 Бекешева Анастасія

1. (a) $f(z) = \bar{z}^2 = (x - iy)^2 = x^2 - y^2 - 2xyi, \quad u(x,y) = x^2 - y^2, \quad v(x,y) = -2xy,$
$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -2y,$
$\begin{cases} 2x = -2x \\ 2y = -2y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Longrightarrow$
функція диференційовна при $z = 0$ та не аналітична.

(b) $f(z) = \mathfrak{Im} z^2 = \mathfrak{Im}(x^2 - y^2 + 2xyi) = x^2 - y^2, \quad u(x,y) = x^2 - y^2, \quad v(x,y) = 0$
$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$
$\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Longrightarrow$
функція диференційовна при $z = 0$, функція не аналітична.

2. (a) $f(z) = y + i\lambda x, \quad u(x,y) = y, \quad v(x,y) = \lambda x$
$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \lambda,$
$\begin{cases} 0 = 0 \\ -1 = \lambda \end{cases} \Longrightarrow \lambda = -1 \Longrightarrow$ функція диференційовна при $\lambda = -1$.

3. (a) $f = z\mathfrak{Re} z = (x + iy) \cdot x = x^2 + xyi, \quad u(x,y) = x^2, \quad v(x,y) = xyi,$
$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = xi, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = yi,$
$\begin{cases} 2x = xi \\ 0 = yi \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$
функція диференційовна при $z = 0$ та не аналітична.

(b) $f = \frac{1}{z^2} = \rho^{-2} e^{-2i\varphi} = \rho^{-2}(\cos 2\varphi - i \sin 2\varphi),$
$u(\rho, \varphi) = \rho^{-2} \cos 2\varphi, \quad v(\rho, \varphi) = -\rho^{-2} \sin 2\varphi$
$\frac{\partial u}{\partial \rho} = -2\rho^{-3} \cos 2\varphi, \quad \frac{\partial v}{\partial \varphi} = -2\rho^{-2} \cos 2\varphi, \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -2\rho^{-2} \sin 2\varphi, \quad \frac{\partial v}{\partial \rho} = 2\rho^{-3} \sin 2\varphi,$
$\begin{cases} -2\rho^{-3} \cos 2\varphi = -2\rho^{-3} \cos 2\varphi \\ 2\rho^{-3} \cos 2\varphi = 2\rho^{-3} \cos 2\varphi \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \rho \in \mathbb{R} \\ \varphi \in \mathbb{R} \end{cases}, \quad \rho \neq 0$
функція є диференційовною і аналітичною при $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

4. (a) $f(z) = \cos z, \quad u(x,y) = \cos x \operatorname{ch} y, \quad v(x,y) = -\sin x \operatorname{sh} y$
$\frac{\partial u}{\partial x} = -\sin x \operatorname{ch} y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\sin x \operatorname{ch} y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \cos x \operatorname{sh} y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\cos x \operatorname{sh} y,$
$\begin{cases} -\sin x \operatorname{ch} x = -\sin x \operatorname{ch} x \\ \cos x \operatorname{sh} y = \cos x \operatorname{sh} y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$
функція є диференційовною і аналітичною при $z \in \mathbb{C}$.
$f'(z) = -\sin x \operatorname{ch} y - i \cos x \operatorname{sh} y = -\sin x \cos iy - \cos x \sin iy = -(\sin x \cos iy +$
$+ \cos x \sin iy) = -\sin(x + iy) = -\sin z$

(b) $f(z) = \operatorname{sh} z, \quad u(x,y) = \operatorname{sh} x \cos y, \quad v(x,y) = \sin y \operatorname{ch} x$
$\frac{\partial u}{\partial x} = \operatorname{ch} x \cos y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \operatorname{ch} x \cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\operatorname{sh} x \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \operatorname{sh} x \sin y,$
$\begin{cases} \operatorname{ch} x \cos y = \operatorname{ch} x \cos y \\ \operatorname{sh} x \sin y = \operatorname{sh} x \sin y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$
функція є диференційовною і аналітичною при $z \in \mathbb{C}$.

$f'(z) = \operatorname{ch} x \cos y + i \operatorname{sh} x \sin y = \cos ix \cos y + \sin ix \sin y = \cos(ix - y) =$
$= \cos(i(x+iy)) = \operatorname{ch}(x+iy) = \operatorname{ch} z$

(c) $f(z) = z^n = \rho^n e^{in\varphi} = \rho^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$,
$u(\rho, \varphi) = \rho^n \cos n\varphi, \quad v(\rho, \varphi) = \rho^n \sin n\varphi$,
$\dfrac{\partial u}{\partial \rho} = n\rho^{n-1} \cos n\varphi, \quad \dfrac{\partial v}{\partial \varphi} = n\rho^n \cos n\varphi, \quad \dfrac{\partial u}{\partial \varphi} = -n\rho^n \sin n\varphi, \quad \dfrac{\partial v}{\partial \rho} = n\rho^{n-1} \sin n\varphi$,
$$\begin{cases} n\rho^{n-1} \cos n\varphi = n\rho^{n-1} \cos n\varphi \\ -n\rho^{n-1} \sin n\varphi = -n\rho^{n-1} \sin n\varphi \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \rho \in \mathbb{R} \\ \varphi \in \mathbb{R} \end{cases}$$
функція є диференційовною і аналітичною при $z \in \mathbb{C}$.
$f'(z) = -\dfrac{\rho}{z}\left(n\rho^{n-1} \cos n\varphi + in\rho^{n-1} \sin n\varphi\right) = -\dfrac{n}{z}(\rho^n \cos n\varphi + i\rho^n \sin n\varphi) = nz^{n-1}$

5. (a) $f(z) = \dfrac{z^3+1}{z^2(z^2-3z+2)}$,
$z^2(z^2-3z+2) = 0, \quad z^2(z-2)(z-1) = 0 \Longrightarrow z = 0, z = 1, z = 2$.
функція аналітична на $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1, 2\}$.

(b) $f(z) = \operatorname{ctg}\left(\dfrac{z}{2}\right)$,
$\operatorname{ctg}\left(\dfrac{z}{2}\right) = \dfrac{\cos\left(\frac{z}{2}\right)}{\sin\left(\frac{z}{2}\right)}, \quad \sin\left(\dfrac{z}{2}\right) = 0, \quad \dfrac{z}{2} = \pi k, k \in \mathbb{Z}, \quad z = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
функція аналітична на $z \in \mathbb{C} \setminus \{2\pi k\}, k \in \mathbb{Z}$.

6. (a) $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$,
$u'_x = 3(x^2-y^2), \quad u'_y = -6xy, \quad u'_x = v'_y, v'_x = -u'_y \Longrightarrow v = 3\displaystyle\int (x^2-y^2)\, dy =$
$= 3\left(x^2y - \dfrac{1}{3}y^3\right) + C(x) = 3x^2y - y^3 + C(x) \Longrightarrow v'_x = 6xy + C'(x), \quad v'_x = -u'_y \Longrightarrow$
$6xy + C'(x) = -(-6xy) \Longrightarrow C'(x) = 0, \quad C(x) = C, \quad v = 3x^2y - y^3 + C$,
$f(z) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3 + C) = x^3 - 3xy^2 + 3x^2yi - iy^3 + Ci = (x+iy)^3 + Ci =$
$= z^3 + Ci$

(b) $v(x,y) = 2xy + 3x$,
$v'_x = 2y + 3, \quad v'_y = 2x, \quad u'_x = v'_y, v'_x = -u'_y \Longrightarrow u = \displaystyle\int 2x\, dx = x^2 + C(y) \Longrightarrow$
$u'_y = C'(y), \quad -C'(y) = 2y + 3, \quad C(y) = -y^2 - 3y + C$,
$f(z) = x^2 - y^2 - 3y + C + i(2xy + 3x) = x^2 - y^2 - 3y + C + 2xyi + 3xi = (x+iy)^2 +$
$+ 3i(x+iy) + C = z^2 + 3iz + C$

(c) $v(x,y) = x + y$
$v'_x = 1, \quad v'_y = 1, \quad u'_x = v'_y, v'_x = -u'_y \Longrightarrow u = \displaystyle\int 1\, dx = x + C(y) \Longrightarrow u'_y = C'(y)$,
$-C'(y) = 1, \quad C(y) = -y + C$,
$f(z) = x - y + C + i(x+y) = x - y + C + xi + yi = (x+iy) + i(x+iy) + C = z + iz + C$