Математический анализ 2

Contents

Chapter 1

Неопределенный интеграл

1.1 Понятие первообразной и неопределеного интеграла

Функция $F(x)$ называется **первообразной** функции $f(x)$ на множестве $X \subset \mathbb{R}$, или $\forall x \in X \ \ F'(x) = f(x)$.

Theorem 1.1.1. *Если $F(x)$ - некоторая первообразная для $f(x)$ на множестве X, то любая другая первообразная имеет вид: $F(x) + c$, где $c = const$ - произвольная.*

Proof. Пусть $F(x)$ - первообразная функции $f(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)$; Тогда: $(F(x)+c)' = F'(x)+0 = f(x) \Rightarrow F(x)+c$ - первообразная для $f(x)(c = const)$.
Пусть $F_1(x)$ - тоже первообразная для $f(x)$, т.е. $F_1'(x) = f(x)$.
Рассмотрим разность: $F_1(x) - F(x)$;
$(F_1(x) - F(x))' = F_1'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow F_1(x) - F(x) = c = const$, т.е. :$F_1(x) = F(x) + c$ □

Таким образом множество всех первообразных функции $f(x)$ имеет вид $F(x) + c$.
Множество всех первообразных функции $f(x)$ называется **неопределенным интегралом** этой функции и обозначается $\int f(x)dx$.
$f(x)$ - подинтегральная функция, $f(x)dx$ - подинтегральное выражение, x - переменная инегрирования, $\int$ - неопределенный интеграл.

Example:

$$f(x) = sign(x) = \begin{bmatrix} 1, \ \ x > 0 \\ 0, \ \ x = 0 \\ -1, \ \ x < 0 \end{bmatrix}, \ \ x \in (-1;\ 1).$$

Предположим, что существует такая первообразная $\exists F(x) : \forall x \in (-1; 1) :$

$F'(x) = sign(x)$, т.е.

$$F'(x) = \left[\begin{array}{l} 1,\ \ x \in (0;\ 1) \\ 0,\ \ x = 0 \\ -1,\ \ x <\in (-1;\ 0) \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} F'(x) = 0 \\ F'_-(x) = -1 \\ F'_+(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$F'(0)$ - не существует $\Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow$ $F(x)$ не существует.

Remark. Достаточным условием существования первообразной у функции на данном множестве является ее непрерывность на этом множестве.

1.2 Свойства неопределенного интеграла

Пусть $\int f(x)dx = F(x) + c\ (F'(x) = f(x))$.

1. Производная от неопределенного интеграла равна подинтегральной функции, дифференциал неопределенного интеграла равен подинтегральному выражению.

$$(\int f(x)dx)'_x = f(x);\ \ d(\int f(x)dx) = f(x)dx.$$

Proof. $(\int f(x)dx)'_x = (F(x)+c)'_x = F'(x) + c' = f(x)$;
$d(\int f(x)dx) = (\int f(x)dx)'_x dx = f(x)dx$. □

2. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной.

$$\int d(F(x)) = F(x) + c.$$

Proof. $\int d(F(x)) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + c$ □

3. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx,\ \ a = const.$$

Proof. $\int af(x)dx = \int aF'(x)dx = \int (aFx)'dx = \int d(aF(x)) = (aF(x) + $
$+c_1) = a(F(x) + \frac{c_1}{a} = \left|c = \frac{c_1}{a}\right| = a(f(x)+c) = a\int f(x)dx$ □

4. Интеграл суммы двух функций равен сумме интегралов этих функций.

$$\int (f(x)+g(x))dx = \int f(X)dx + \int g(x)dx.$$

Proof. Пусть $\int g(x)dx = G(x) + c$; тогда $\int (f(x)+g(x))dx = \int (F'(x) +$
$+G'(x))dx = \int (F(x)+G(x))'dx = \int d(F(x)+G(x)) = F(x)+G(x)++c =$
$\left|c = c_1 + c_2\right| = (F(x)+c_1) + (G(x)c_2) = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ □

Remark.

- свойство 4 справедливо для любого конечного числа слогаемых
- свойство 3-4 называются свойством линейности неопределенного интеграла
- свойство 1-2 отражают связь операций дифференцирования и интегрирования

1.3 Таблица основных неопределенных интегралов

1. $$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c; \quad \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$$

2. $$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$$

3. $$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \quad a > 0$$

4. $$\int e^x dx = e^x + c$$

5. $$\int \sin x\, dx = -\cos x + c$$

6. $$\int \cos x\, dx = \sin x + c$$

7. $$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c$$

8. $$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c$$

9. $$\int \mathrm{sh} x\, dx = \mathrm{ch}\, x + c$$

10. $$\int \mathrm{ch} x\, dx = \mathrm{sh}\, x + c$$

11. $$\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th}\, x + c$$

12. $$\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{cth}\, x + c$$

13.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{a-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c$$

14.
$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c$$
$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c$$

Дополнительные формулы:

15.
$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c \text{ - высокий логарифм}$$

16.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}} = \ln|x+\sqrt{x^2+A}| + c \text{ - длинный логарифм}$$

17.
$$\int \sqrt{x^2+A}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+A} + \frac{A}{2} \ln|x+\sqrt{x^2+A}| + c$$

18.
$$\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + c$$

В этих формулах вместо x может быть записана произвольная дифференцируемая функция от x.

1.4 Основные примеры интегрирования

1.4.1 Непосредственное интегрирование

Непосредственное интегрирование заключается в использовании тождественных преобразований подинтегральной функции, свойства линейности интеграла и таблицы интегралов.

Example:

1. $\int (\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x}})^2 dx = \int \frac{x+2x^{\frac{1}{2}}+1}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int (x^{\frac{1}{3}} + 2x^{\frac{-1}{6}} + x^{\frac{-2}{3}}) dx = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + 2 \cdot \frac{x^{\frac{5}{6}}}{5} \cdot 6 +$

$x^{\frac{1}{3}} \cdot 3 + c$

2. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = |\cos^2 x + \sin^2 x = 1| = \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx + \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x - \cot x + c$

1.4.2 Замена переменной

Theorem 1.4.1. *Пусть на* $\forall x \in (a; b)$ $\int f(x)dx = F(x) + c$, *(на всем интервале* $(a;\ b)$ *известна первообразная функции):* $F'(x) = f(x)$ $x = \varphi(t)$ *- функция дифференцируемая; причем* $\varphi(t)\ :\ t \in (\alpha;\ \beta)$ *и* $\varphi\ :\ (\alpha;\ \beta) \to (a;\ b)$. *Тогда справедлива формула:*

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'_t(t) dt = F(\varphi(t)) + c$$

Proof. $(f(\varphi(t)))'_t = F'_\varphi(\varphi(t)) \cdot \varphi'_t(t) = |\varphi(t) = x| = F'_x(x)\varphi'_t(t) = |F'_x(x) = f(x)| = f(x) \cdot \varphi(t) = |x = \varphi(t)| = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'_t(t) \Rightarrow F(\varphi(t))$ первообразная для $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'_t(t) \Rightarrow \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'_t(t) dt = F(\varphi(t)) + c$ □

Remark.

$$\varphi'_t(t) dt = d(\varphi(t)) \Rightarrow \int f(\varphi(t)) \cdot d\varphi = F(\varphi) + c$$

1. **Внесения выражения под знак дифференциала**

$$\int f(x)dx = \int g(\varphi(x)) \cdot \varphi'_x(x) dx = \int g(\varphi) d\varphi = |G(x) - \text{известно} G'(x) = g(x)| =$$

$$= G(\varphi) + c = G(\varphi(x)) + c.$$

Часто используются преобразование дифференциала $dx = d(x + +a) = \frac{1}{k} d(kx) = \frac{1}{k} d(kx + b)$
$x^{n-1} dx = \frac{1}{n} d(x^n)$
Преобразования дифференциалов
$\sin x\, dx = -d(\cos x)$
$\cos x\, dx = d(\sin x)$
$\frac{dx}{\cos^2 x} = d(\tan x)$
$\frac{dx}{x} = d(\ln x)$
$\frac{dx}{1+x^2} = d(\arctan x)$
$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arcsin x)$

Example:

$\int \sin^3 x dx = \int \sin x \sin^2 x dx \int (1-\cos^2 x)\cdot(-d(\cos x)) = \int (\cos^2 -1) d(\cos x) =$

$= \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + c.$

2. **Вынесения выражения из-под знак дифференциала**
$\int f(x)\, dx = |x = \varphi(t) \Rightarrow dx = \varphi'(t)dt| = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = |g(t) =$
$= G'(t)| = G(t) + c = |x = \varphi(t) \;\; t = \varphi^{-1}(x)| = G(\varphi^{-1}(x)) + c$

Example:

$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = |x = a \sin t dx = a \cos t dt| = \int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} a \cos t dt =$

$= a^2 \int \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot \cos t\, dt = a^2 \int \cos^{@} t\, dt = \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos^2 t) dt = \frac{a^2}{2}(t +$
$\frac{\sin 2t}{2}) + c = \frac{a^2}{2}(t + \sin t \cos t) + c = |\cos t = \sqrt{1 - \sin t} \;\; \frac{x}{a}$
$t = \arcsin \frac{x}{a}| = \frac{a^2}{2}(\arcsin \frac{x}{a} + \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \cdot \frac{x}{a}) = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + c$

1.4.3 Интегрирование по частям

Пусть $u = u(x),\ v = v(x)$ - две диффренцируемые функции.
по свойству дифференциала:
$d(uv) = udv + vdu \Rightarrow \int d(uv) = \int udv + \int vdu$ - формула интегрирования по частям.
В исходном интеграле $\int f(x)dx$ подинтегральное выражение представляется в виде двух сомножителей. Как правило, это можно сделать неоднозначно.
После того как u и dv выбраны, находим du, v, ...
$\int f(x)dx = |f(x) = u,\ dx = dv| \Rightarrow du = u'dx = ... \Rightarrow v = \int dv$
в результате применения формулы полученный интеграл оказывается более простым, чем исходный.
При необходимости формула интегрирования по частям применяется несколько раз.

I. $\int P_n(x) \left\{ \begin{array}{l} \sin(kx+b) \\ \cos(kx+b) \\ a^{kx} \\ e^{kx} \\ \mathrm{sh} kx,\ \mathrm{ch}(kx) \end{array} \right\} dx \qquad U = Pn(x);\ \ dv = \{\dots\}$

II. $\int P_n(x) \left\{ \begin{array}{l} \arcsin x \\ \arccos x \\ \arctan x \\ \ln x \end{array} \right\} dx \qquad U = \{\dots\};\ dv = Pn(x)dx$

III. $\int e^{kx} \left\{ \begin{array}{l} \sin(ax+b) \\ \cos(ax+b) \end{array} \right\} dx \qquad U = e^{kx};\ dv = \{\dots\}dx$

Example:

$\int_I e^x \sin 2x dx \underset{III}{=} \left| u = e^x \Rightarrow du = e^x dx;\ \sin 2x dx = dv;\ v = \int \sin 2x dx = \right.$

$= -\frac{\cos 2z}{2} \left| = -\frac{e^x \cos 2x}{2} + \int \frac{\cos 2x}{2} \cdot e^x dx = \right| u = e^x;\ du = e^x;\ dv = \cos 2x dx;\ v =$

$= \frac{\sin 2x}{2} \left| = -\frac{e^x \cos 2x}{2} + \frac{1}{2}(\frac{e^x \sin 2x}{2} - \int \frac{\sin 2x}{2} \cdot e^x dx) = -\frac{e^x \cos 2x}{2} + \frac{1}{4} e^x \sin 2x - \right.$

$- \frac{1}{4} \int \underset{I}{e^x \sin 2x dx}$

$I = -\frac{e^x \cos 2x}{2} + \frac{1}{4} e^x \sin 2x - \frac{1}{4} I;\ I = -\frac{e^x \cos 2x}{2} + \frac{1}{4} e^x \sin 2x.$

$I = \frac{4}{5}(\frac{1}{4} e^x \sin 2x - \frac{1}{2} e^x \cos 2x) + c$

1.5 Интегрирование рациональных функций

1.5.1 Основные сведения о рациональных функциях

1. **Многочлен(целая рациональная функция)**
   Многочленом $P_n(x)$ называется функция вида $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0$; где $n \in \ltimes,\ a_i \in \searrow,\ i = \overline{0,n}$
   Корнем многочлена называется значение x_0(вообще говоря, комплексное) аргумента x, при котором многочлен обращается в ноль.
   x_0 - корень $P_n(x)$ или $P_n(x_0) = 0$

   Theorem 1.5.1.

   Если x_0—корень многочлена $P_n(x)$, то многочлен делится нацело на$(x - x_0)$,

   т.е. $P_n(x)$ представлется в виде: $P_n(x) = (x - x_0) \cdot Q_{n-1}(x)$,

   где Q — многочлен степени$n - 1$

   Theorem 1.5.2.

   Всякий многочлен степени $n > 0$ имеет по крайней мере один корень,

   действительный или комплексный

Consequence.

(1) Многочлен n-ой степени можно представить в виде: $P_n(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)$, где $x_1, \dots, x_n$ - корни $P_n(x)$, a_n - старший коэффициент

(2) Если среди корней многочлена имеются одинаковые, то объединим соответствующие или множители. Получим:
$P_n(x) = a_n(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\dots(x-x_n)^{k_m}$, где $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$.
для $x_i :\ (x - x_i)^k_i$; k_i - кратность корня x_i.
Такое представление называется разложением многочлена на линейные множители.

Theorem 1.5.3.
Известно, что если многочлен имеет комплексный корень
$x_0 = a_i + ib(a,\ b \in \mathbb{R};\ x_0 \in \mathbb{C})$, *то комплексное спряженое число*
$\bar{x} = a{-}ib$ *- тоже корень* $P_n(x)$. *Таким образом, в разложении многочлена комплексно спряженные числа входят парами, перемножим:*
$(x - (a + ib))(x - (a - ib)) = x^2 - x(a + ib) - x(a - ib) + (a + ib)(a - ib) = x^2 - ax - ibx - ax + ibx + a^2 + b^2 = x^2 - 2ax + a^2 + b^2$.
Полученый трехчлен имеет действительный коэффициент, причем дискретный
$D = B^2 - 4A \cdot C = 4a^2 - 4(a^2 + b^2) = -4b^2 < 0$
Получаем, что пару множителей, соответсвующую двум комплексных сопряженным корням можно заменить квадратный трехчлен с действительным коэффициентом и $D < 0$.
Окончательно получим разложение на множители в виде:
$P_n(x) = (x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2}(x - x_5)^{k_5}(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1}\dots(x^2 p_m x + q_m)^{l_m}$,
где $x_1, \dots, x_5 \in \mathbb{R}$ *- корни многочлена* $Pn(x); p_i,\ q_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{1, m}$;
$D_i = p_i^2 - 4q_i < 0. \qquad k_1 + \dots + k_5 + 2(l_1 + \dots + l_m) = n$

Многочлен называется **тождественно равным нулю**

$$Pn(x) \equiv 0, \text{ если } \forall x \in \mathbb{R}\ \ Pn(x) = 0$$

Theorem 1.5.4.

Многочлен тожественно равен нулю тогда и только тогда, когда

все его коэффициенты равны нулю $a_i = 0,\ i = \overline{0, n}$

Consequence.
Два многочлена тождественно равны, если их степени одинаковы и имеют одинаковые коэффициенты при одинаковых степенях x

Proof. $P_n(x) \equiv Q_n(X)$
$P_n(x) - Q_n(x) \equiv 0$
$(\underbrace{a_n + b_n}_{=0})x^n + (\underbrace{a_{n-1} + b_{n-1}}_{=0})x^{n-1} + \dots + (a_0 + b_0) = 0$ $\square$

> **Example:**
>
> $P_3(x) = 3x^2 - 2x + 4$
> $Q_4(x) = a_4x^4 + a_3x^3 - a_2x^2 + a_1x + a_0$
> $$P_3(x) \equiv Q_4(x) \Rightarrow \begin{cases} a_4 = 0 \\ a_3 = 3 \\ a_2 = 0 \\ a_1 = -2 \\ a_1 = 4 \end{cases}$$

2. **Дробная рациональная функция**
Дробной рациональной функцией называется отношение двух многочленов. $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} >$ многочлены $\{$ дробная рациональная функция, рациональная дробь. Если $n \geq m$, то рациональная дробь **неправильная**, если $n < m$ - **правильная**.

Theorem 1.5.5.

Неправильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби.

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \overset{\text{целая часть}}{\underset{\text{многочлен}}{L_{n-m}(x)}} + \frac{R_k(x)}{Q_m(x)},\ k < m,\ R_n(x) \text{ - многочлен.}$$

Элементарные(простейшие) рациональные дроби:

I.
$$\frac{A}{x-a} \qquad A,\ a \in \mathbb{R}$$

II.
$$\frac{A}{(x-a)^k} \qquad k \in \mathbb{N},\ k > 1,\ A,\ a \in \mathbb{R}$$

III.
$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q} \qquad M,\ n,\ p,\ q \in \mathbb{R},\ D = p^2 - 4q < 0$$

IV.

$$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} \qquad M,\ n,\ p,\ q \in \mathbb{R},\ D = p^2-4q<0,\ k \in \mathbb{N},\ k>1$$

Theorem 1.5.6.
Пусть $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ - правильная рациональная дробь($n < m$), и знаменатель дроби $Q_m(x)$ разложен на множители:

$$Q_m(x) = \underbrace{(x-x_1)^{k_1}\dots(x-x_5)^{k_5}}_{\text{действительные корни}}\underbrace{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\dots(x^2+p_mx+q_m)^{l_m}}_{D<0}$$

Тогда заданная дробь раскладывается в сумму простых дробей следующего вида:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \dots + \frac{A_{k_1}}{(x-x_1)^{k_1}} + \dots +$$

$$+\frac{F_1}{x-x_5}+\frac{F_2}{(x-x_5)^2}+\dots+\frac{F_{k_5}}{(x-x_5)^{k_5}}+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+p_1x+q_1)}+\dots+\frac{M_{l_1}+N_l}{(x^2+p_lx+q_l)^l}+$$

При этом:

$$(x-x_i)^{k_i} \leftrightarrow \frac{A_1}{x-x_i} + \frac{A_2}{(x-x_i)^2} + \dots + \frac{A_{k_i}}{(x-x_i)^K};$$

$$(x^2+p_jx+q_j)^{l_j} \leftrightarrow \frac{M_1x+N_1}{(x^2+p_jx+q_j)} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_jx+q_j)} + \dots + \frac{M_{l_j}x+N_{l_j}}{(x^2+p_jx+q_j)}$$

В разложении появляются так называемые неопределенные коэффициенты, которые подлежат дальнейшиму определению.

Example:

$$\frac{3x-2}{(x-1)^3(x+2)(x^2+1)(x^2+2x+3)^2} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{(x-1)^3} + \frac{B}{x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{x^2+2x+3} + $$
$$+ \frac{Mx+N}{(x^2+2x+3)^2}$$

Для того, чтобы найти неопределенные коэффициенты в полученном выражении, умножают обе части тождества на знаменатель левой части. Таким образом, получают 2 тождественно равных многочлена. Раскрывая скобки справа, после сего приравнивают коэффициенты при одинаковых степенях. Получают систему линейных уравнений для определения неизвестных коэффициентов.

Example:

$\frac{x^4+2x^3+5x^2-1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2} \Bigg| x(x^2+1)^2$

$x^4+2x^3+5x^2-1 = a(x^2+1)^2 + (Bx+C)x(x^2+1) + (Dx+E)x =$
$= A(x^4+2x^2+1) + (Bx+C)(x^3+x) + Dx^2 + Ex =$
$= Ax^4 + 2Ax^2 + A + Bx^4 + Cx^3 + Bx^2 + Cx + Dx^2 + Ex =$
$= (A+B)x^4 + Cx^3) + (2A+B+D)x^2 + (E+C)x + A.$

$$\begin{cases} x^4: & A+B=1 & A=1 \\ x^3: & C=2 & B=2 \\ x^2: & 2A+B+D=5 & C=2 \\ x^1: & C+E=0 & D=5 \\ x^0: & A=-1 & E=-2 \end{cases}$$

$\frac{x^4+2x^3+5x^2-1}{x(x^2+1)^2} = -\frac{1}{x} + \frac{2x+2}{x^2+1} + \frac{5x-2}{(x^2+1)^2}$

В некоторых случаях для нахождения неопределенных коэффициентов можно воспользоваться так называемым методом частных значений аргумента. Он состоит в том, что аргументу x придаются конкретные числовые значения столько раз, сколько содержится неизвестных коэффициентов в разложении. При этом удобно выбирать x равным значению действительного корня знаменателя.

Example:

$\frac{3x-4}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1}$

$A = \frac{3x-4}{(x-2)(x+1)}\Big|_{x=0} = \frac{-4}{-2\cdot 1} = 2$

$B = \frac{3x-4}{x(x+1)}\Big|_{x=2} = \frac{6-4}{2\cdot 3} = \frac{1}{3}$

$C = \frac{3x-4}{x(x-2)}\Big|_{x=-1} = \frac{-3-4}{-1\cdot(-3)} = -\frac{7}{3}$

Example:

$\frac{x^2+1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$

$A = \frac{x^2+1}{(x-1)^2}\Big|_{x=0} = 1$

$C = \frac{x^2+1}{x}\Big|_{x=1} = 2$

$$\left|\begin{array}{l}\text{при } x=2:\\ B=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}-2=0\end{array}\right.$$

1.5.2 Интегрирование простейших дробей

I. $\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + c$

II. $\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int (x-a)^{-k}d(x-a) = A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + c$

III. $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} = \int \frac{Mx+N}{x^2+2x\cdot\frac{p}{2}+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q} = M\int \frac{x+\frac{p}{2}-\frac{p}{2}}{(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}}d(x+\frac{p}{2}) +$
$+N\int \frac{d(x+\frac{p}{2})}{(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}} = M\int \frac{(x+\frac{p}{2}-\frac{p}{2})d(x+\frac{p}{2})}{(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}} + (N-\frac{Mp}{2})\int \frac{d(x+\frac{p}{2})}{(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}} = \left|\begin{array}{l}(x+\frac{p}{2})=t\\ q-\frac{p^2}{4}=a^2\end{array}\right| =$
$M\int \frac{tdt}{t^2+a^2} + (N-\frac{Mp}{2})\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{M}{2}(\int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^k}) + (N-\frac{Mp}{2})\cdot I_k = \frac{M}{2}\frac{(t^2+a^2)^{-k+1}}{-k+1} +$
$+ (N-\frac{Mp}{2})\cdot I_k$

Найдем $I_k = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k} = \left|\begin{array}{l}U=\frac{1}{(t^2+a^2)^k} \Rightarrow dU = -k(t^2+a^2)^{-k-1}\\ dV=dt;\ V=t;\ 2tdt = -2k\frac{tdt}{(t^2+a^2)^{k+1}}\end{array}\right| =$
$= \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + \int t\cdot 2k\frac{tdt}{(t^2+a^2)^k} = \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + 2k\int \frac{(t^2+a^2-a^2)dt}{(t^2+a^2)^{k+1}} = \frac{t}{(t^2+a^2)^k} +$
$+ 2k\int \left(\frac{1}{(t^2+a^2)^k} - \frac{a^2}{(t^2+a^2)^{k+1}}\right)dt = \frac{t}{t^2+a^2} + 2k\left(I_k - a^2 I_{k+1}\right) =$
$= \frac{t}{t^2+a^2} + 2kI_k - 2ka^2I_{k+1} \Rightarrow 2ka^2I_{k+1} = \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + I_k(2k-1);$

Пусть $k+1=n \Rightarrow k=n-1$
Получим: $I_n = \frac{1}{a^2(2n-2)}\cdot\frac{t}{(t^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{1}{a^2}\cdot I_{n-1};\ n>2$

1.5.3 Общая схема интегрирования рациональных дробей

1. Если дробь неправильная, то разделить числитель на знаменатель и выделить целую часть(т. е. представить дробь в форме многочлена и правильной рациональной дроби).

2. Знаменатель правильной рациональной дроби раскладываем на множители и записываем разложение правильной дроби в сумму простейших дробей.

3. Находим неопределенные коэффициенты этого разложения.

4. Интегрируем полученный многочлен и сумму полученных дробей.

Remark. интеграл от рациональной функции всегда выражается через элементарные функции.

Example:

$$\int \frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}dx =$$

$$\begin{array}{l} \left(x^5 \qquad + 2x^3 \qquad + 4x + 4 \right) : \left(x^4 + 2x^3 + 2x^2 \right) = x - 2 + \dfrac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2} \\ \underline{-x^5 - 2x^4 - 2x^3} \\ \qquad -2x^4 \\ \qquad \underline{2x^4 + 4x^3 + 4x^2} \\ \qquad\qquad 4x^3 + 4x^2 + 4x + 4 \end{array}$$

$$= \int \left((x-2) + \frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2} \right) dx =$$

$$\frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2} = \frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^2(x^2+2x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+2} \tag{1.1}$$

$B = \frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^2+2x+2}\Big|_{x=0} = 2$

при $x = 1 : (1.1)$

$\frac{16}{5} = A + 2 + \frac{C+D}{2}\Big| \cdot 5; \qquad 16 = 5A + 10 + C + D; \qquad 5a + C + D = 6$

при $x = -1 :$

$0 = -A + 2 + D - C; \qquad A + C - D = 2; \qquad A + C - D = 2$

при $x = -2 :$

$\frac{-32+16-8+4}{16-16+8} = -\frac{A}{2} + \frac{2}{4} + \frac{D-2C}{2}\Big| \cdot 2; \qquad -5 = -A + 1 + D - 2C; \Rightarrow$

$\Rightarrow A = 0;\ B = 2;\ C = 4;\ D = 2$

$$\int \left(x - 2 + \frac{2}{x^2} + \frac{4x+2}{x^2+2x+2} \right) dx = \frac{2}{x^2} - 2x + 2 \int \frac{2x+2-1}{(x^2+2x+2)} dx =$$

$$= \frac{2}{x^2} - 2x - \frac{2}{x} + 2 \left(\underbrace{\int \frac{d(x^2+2x+2)}{x^2+2x+2}}_{\ln(x^2+2x+2)} - \underbrace{\int \frac{d(x+1)}{(x+2)^2+1}}_{\arctan(x+1)} \right) =$$

$$\frac{2}{x^2} - 2x - \frac{2}{x} + 2\ln(x^2+2x+2) - 2\arctan(x+1)$$

1.6 Интегрирование тригонометрических функций

1.6.1 Универсальная тригонометрическая замена

Пусть $R(\sin x; \cos x)$ - рациональная функция от $\sin x, \cos x$.
Замена: $t = \tan \frac{x}{2}$
Тогда:

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\cos\frac{x^2}{2} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{1+\tan^2\frac{x}{2}} - 1 = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$x = 2\arctan t;$ $\qquad dx = \frac{2}{1+t^2}dt$
Получаем:

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2}{1+t^2}dt = \int R_1(t)dt$$

Remark. этот способ позволяет найти первообразную, но полученная функция $f(t)$ может оказаться слишком громаздкой.

1.6.2 Другие виды подстановок

1. Если подинтегральная функция является нечетной относительно $\sin x$, т. е. $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то используется замена $t = \cos x$. Фактически это означает внесения $\cos x$ под знак дифференциала.

2. Если подинтегральная функция является нечетной относительно $\cos x$, т. е. $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то используется замена $t = \sin x$. Фактически это означает внесения $\sin x$ под знак дифференциала.

3. Если подинтегральная функция является одновременно четной относительно $\sin x, \cos x$ то выполняется замена $t = \tan x$(внесение $\frac{1}{\cos^2 x}$ под знак дифференциала).

Remark.
Для $\int R(\tan x)dx$ замена $\tan x = t \Rightarrow x = \arctan t$; $dx = \frac{dt}{1+t^2}$;
и $\int R(\tan x)dx = \int R(t) \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int R_1(t)dt$

1.6.3 Использования формул тригонометрии

1.
$$\int \cos^2 x dx, \int \sin^2 x dx \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

2.
$$\int \cos \alpha x \cos \beta x dx \Rightarrow \cos \alpha x \sin \beta x = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)x + \cos(\alpha+\beta)x)$$

$$\int \sin \alpha x \sin \beta x dx \Rightarrow \sin \alpha x \sin \beta x = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x)$$

$$\int \sin \alpha x \cos \beta x dx \Rightarrow \sin \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)x + \sin(\alpha+\beta)x)$$

Example:

$\int \frac{dx}{3+\sin x+\cos x} = \left| \begin{array}{c} t=\tan\frac{x}{2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{2dt}{(1+t^2)(3+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2})} = 2\int \frac{dt}{3+3t^2+2t+1-t^2} =$
$= 2\int \frac{dt}{2t^2+2t+4} = 2\int \frac{dt}{t^2+t+2} = \int \frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}} = \int \frac{d(t+\frac{1}{2})}{(t+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{7}}{2})^2} = \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan(2\frac{t+\frac{1}{2}}{\sqrt{7}}) +$
$c =$
$= \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan(2\frac{\tan x+\frac{1}{2}}{\sqrt{7}}) + c$

Example:

$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}+\tan^2 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \left|\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}\right| = \int \frac{1}{1+2\tan^2 x} d(\tan x) =$
$|\tan x = t| = \int \frac{dt}{1+2t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d(\sqrt{2}t)}{1+(\sqrt{2}t)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}t) + c =$
$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}\tan x) + c$

Example:

$\int \cos^2 x \sin^4 x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos^2 2x)(1-\cos 2x) dx =$

$= \frac{1}{8}\int (1-\cos 2x - \cos^2 x + \cos^3 2x) dx = \frac{1}{8}(x - \frac{\sin 2x}{2} - \int \cos^2 2x dx + \int \cos^3 2x dx) =$

$= \frac{1}{8}x - \frac{\sin 2x}{16} - \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} - \frac{1}{16}\int (1-\sin^2 x) d(\sin 2x) = \frac{x}{16} - \frac{\sin 2x}{16} - \frac{\sin 4x}{16} + \frac{\sin 2x}{16} -$
$- \frac{1}{16}\frac{\sin^3 2x}{3} + c = \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{16} - \frac{1}{16}\frac{\sin^3 2x}{3} + c$

Example:

$\int \sin^4 x \cos^5 x = |\sin x = t| = \int \sin^4 x \cos^4 x \underbrace{\cos x dx}_{d(\sin x)} = \int \sin^4 x (\cos^2 x)^2 d(\sin x) =$

$= \int \sin^4 x (1 - \sin^2 x)^2 d(\sin x) = \int t^4 (1 - 2t^2 - t^4) dt = \int (t^4 - 2t^6 + t^8) dt =$

$= \frac{t^5}{5} - \frac{2t^7}{7} + \frac{t^9}{9} + c = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{2\sin^7 x}{7} + \frac{\sin^9 x}{9} + c$