ДОМАШНЯ КОНТРОЛЬНА РОБОТА З ПРЕДМЕТУ "КЛАСИЧНА МЕХАНІКА"

ФІ-12 Бекешева Анастасія

2. Знайти вирази для швидкості і прискорення частки в сферичній системі координат (орти: $\vec{e_r}$, $\vec{e_\theta}$, $\vec{e_\phi}$).

Швидкість частинки:

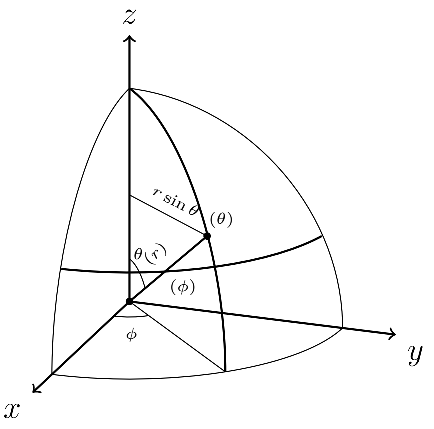

Рис. 1: Сферична с-ма координат.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}\dot{\theta} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}\dot{\phi} = v_r\vec{e_r} + v_\theta\vec{e_\theta} + v_\phi\vec{e_\phi} \tag{1}$$

$$v_{q_i} = \vec{v} \cdot \vec{e_i} = H_i\dot{i}, i \in \{r, \theta, \phi\} \tag{2}$$

Модуль швидхості вирахуємо так:

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2 + v_\phi^2} = \sqrt{H_r^2\dot{r}^2 + H_\theta^2\dot{\theta}^2 + H_\phi^2\dot{\phi}^2} \tag{3}$$

Щоб знайти розташування частки, потрібно знайти коефіцієнти Ламе:
$x = r\sin\theta\cos\phi, y = r\sin\theta\sin\phi, z = r\cos\theta$;
$H_r = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = \sqrt{\sin^2\theta\cos^2\phi + \sin^2\theta\sin^2\phi + \cos^2\theta} = 1$;
$H_\theta = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = \sqrt{r^2\sin^2\theta\cos^2\phi + r^2\sin^2\theta\sin^2\phi} = r\sin\theta$
$H_\phi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = \sqrt{r^2\cos^2\theta\cos^2\phi + r^2\cos^2\theta\sin^2\phi + r^2\sin^2\theta} = r$
За виразом 2 порахуємо компоненти щвидкості у сферичній с-мі координат $v_r = \dot{r}, v_\theta = \dot{\theta}r, v_\phi = \dot{\phi}r\sin\phi$. За виразом 3 порахуємо модуль швидкості $v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\sin^\phi + r^2\dot{\theta}^2}$. Прискорення у сферичних координатах:

$$\vec{a} = a_r\vec{e_r} + a\theta\vec{e_\theta} + a_\phi\vec{e_\phi} \tag{4}$$

Компоненти прискорень частки: $a_r = \ddot{r} - r\left(\dot{\phi}^2\sin^2\theta - \dot{\theta}^2\right)$, $\quad a_\theta = \ddot{\phi}r\sin\theta + 2\dot{\phi}\left(\dot{r}\sin\theta + \right.$ $\left. + \dot{\theta}r\cos\theta\right)$, $\quad a_\phi = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\left(\ddot{\theta} + \dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta\right)$.
За виразами 1 та 4 порахуємо відповідь:

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e_r} + \dot{\theta}r\vec{e_\theta} + \dot{\phi}r\sin\phi\vec{e_\phi}$$

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r(\dot{\phi}^2\sin^2\theta - \dot{\theta}^2)\right)\vec{e_r} + \left(\ddot{\phi}r\sin\theta + 2\dot{\phi}(\dot{r}\sin\theta + \dot{\theta}r\cos\theta)\right)\vec{e_\theta} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r(\ddot{\theta} + \dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta)\right)\vec{e_\phi}$$

5. Знайдіть величину швидкості частки та проекції її прискорення на дотичні до координатних ліній наступних криволінійних ортогональних координат:
Швидкість:
$$v^2 = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial q_i}\right)^2 q_i^2 \tag{5}$$
Прискорення:
$$a_i = \frac{1}{2H_i}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial v^2}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial v^2}{\partial q}\right) \tag{6}$$

(a) $\rho, \phi, z : x = \rho\cos\phi, y = \rho\sin\phi, z = z$
За виразом 5 вирахуємо швидкість: $v^2 = \left(\frac{\partial(\rho\cos\phi)}{\partial\phi}\right)^2 \dot{\phi}^2 + \left(\frac{\partial(\rho\sin\phi)}{\partial\phi}\right)^2 \dot{\phi}^2 + + \left(\frac{\partial z)}{\partial\phi}\right)^2 \dot{\phi}^2 + \left(\frac{\partial(\rho\cos\phi)}{\partial\rho}\right)^2 \dot{\rho}^2 + \left(\frac{\partial(\rho\sin\phi)}{\partial\rho}\right)^2 \dot{\rho}^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\rho}\right)^2 \dot{\rho}^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2 \dot{z}^2 = = \rho^2\sin^2\phi\dot{\phi}^2 + \rho^2\cos^2\phi\dot{\phi}^2 + \cos^2\phi\dot{\rho}^2 + \sin^2\phi\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2 = \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{\rho}^2 + \dot{z}^2$. Шукаємо коефіцієнти: $H_\rho = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho}\right| = \sqrt{\cos^2\phi + \sin^2\phi} = 1$; $H_\phi = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\phi}\right| = = \sqrt{\rho^2(\sin^2\phi + \cos^2\phi)} = \rho$; $H_z = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial z}\right| = \sqrt{0+0+1} = 1$. За виразом 6: $a_\rho = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dt}2\dot{\rho} - 2\rho\dot{\phi}\right) = \ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2$; $a_\phi = \frac{1}{2\rho}\left(\frac{d}{dt}2\rho^2\dot{\phi} - 0\right) = \frac{1}{\rho}\left(\frac{d}{dt}\rho^2\dot{\phi}\right)$;
$a_z = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dt}2\dot{z} - 0\right) = \ddot{z}$

(b) $r, \theta, \phi : x = r\sin\theta\cos\phi, y = r\sin\theta\sin\phi, z = r\cos\theta$
За виразом 5 вирахуємо швидкість: $v^2 = \left(\frac{\partial(r\sin\theta\cos\phi)}{\partial r}\right)^2 \dot{r}^2 + + \left(\frac{\partial(r\sin\theta\sin\phi)}{\partial r}\right)^2 \dot{r}^2 + \left(\frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial r}\right)^2 \dot{r}^2 + \left(\frac{\partial(r\sin\theta\cos\phi)}{\partial\phi}\right)^2 \dot{\phi}^2 + + \left(\frac{\partial(r\sin\theta\sin\phi)}{\partial\phi}\right)^2 \dot{\phi}^2 + \left(\frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial\phi}\right)^2 \dot{\phi}^2 + \left(\frac{\partial(r\sin\theta\cos\phi)}{\partial r\theta}\right)^2 \dot{\theta}^2 + + \left(\frac{\partial(r\sin\theta\sin\phi)}{\partial\theta}\right)^2 \dot{\theta}^2 + \left(\frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial\theta}\right)^2 \dot{\theta}^2 = \dot{r}^2\left(\sin^2\theta\cos^2\phi + \sin^2\theta\sin^2\phi + \cos^2\theta\right) + + \dot{\phi}^2\left(-r^2\sin^2\theta\sin^2\phi + r^2\sin^2\theta\cos^2\phi\right) + \dot{\theta}^2\left(r^2\cos^2\theta\cos^2\phi + r^2\cos^2\theta\sin^2\phi + r^2\sin^2\theta\right) = \dot{r}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2 + r^2\dot{\theta}^2$. Коефіцієнти візьмемо з Завдання 2: $H_r = 1$; $H_\theta = r\sin\theta$; $H_\phi = r$. За виразом 6: $a_r = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dt}2\ddot{r} + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) = = \ddot{r} + r^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta)$; $a_\theta = \frac{1}{2r}\left(\frac{d}{dt}2r^2\dot{\theta} - r^2\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2\right) = \frac{1}{r}\left(\frac{d}{dt}r^2\dot{\theta} - - r^2\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2\right)$; $a_\phi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{d}{dt}\left(r^2\sin^2\theta\dot{\phi}\right)$

Відповідь : (a)

$$v = \sqrt{\rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{\rho}^2 + \dot{z}^2}$$
$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2$$
$$a_\phi = \frac{1}{\rho}\left(\frac{d}{dt}\rho^2\dot{\phi}\right)$$
$$a_z = \ddot{z}$$

(b)

$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2 + r^2\dot{\theta}^2}$$
$$a_r = \ddot{r} + r^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}$$
$$a_\theta = \frac{1}{r}\left(\frac{d}{dt}r^2\dot{\theta} - r^2\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2\right)$$
$$a_\phi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{d}{dt}\left(r^2\sin^2\theta\dot{\phi}\right)$$

10. Знайти прискорення частки, що рухається по еліпсу із сталою відносно фокуса еліпса секторіальною швидкістю $\sigma = const$. Півосі еліпса a, b, рівняння еліпса $\rho = = p(1 + e\cos\phi)^{-1}$.

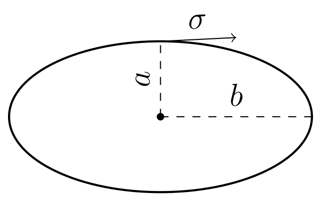

Рис. 2: Частка, що рухається по еліпсу.

$\rho, \phi : x = \rho\cos\phi, y = \rho\sin\phi$
Знайдемо швидкість: $\sigma = |\sigma_z| = \frac{1}{2}|x\dot{y} - \dot{x}y| = \frac{1}{2}\left|\rho\cos\phi\frac{d}{dt}(\rho\sin\phi) - \rho\sin\phi\frac{d}{dt}(\rho\cos\phi)\right| = = \frac{1}{2}\left|\dot{\rho}\rho\sin\phi\cos\phi + \rho^2\dot{\phi}\cos^2\phi - \dot{\rho}\rho\sin\phi\cos\phi - \rho^2\dot{\phi}\sin^2\phi\right| = \frac{1}{2}\rho^2|\dot{\phi}|$. Знаємо, що $a_\phi = = \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\phi}) = 0$, отже $\dot{\phi} > 0$. Виразимо $\dot{\phi}$:

$$\dot{\phi} = \frac{2\sigma}{\rho^2} \tag{7}$$

Формула для прискорення:

$$\vec{a} = a_\rho\vec{e_\rho} + a_\phi\vec{e_\phi} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\vec{e_\rho} \tag{8}$$

Знайдемо $\ddot{\rho}$: $\dot{\rho} = \frac{pe\sin\phi\dot{\phi}}{(1 + e\cos\phi)^2} = \frac{pe\sin\phi}{(1 + e\cos\phi)^2}\frac{2\sigma}{(1 + e\cos\phi)^{-2}p^2} = \frac{2\sigma e\sin\phi}{p}$;
$\ddot{\rho} = \frac{2\sigma e\cos\phi\dot{\phi}}{p} = \frac{4\sigma^2 e\cos\phi}{\rho^2 p}$. Скористуємось рівнянням еліпсу з умови: $e\cos\phi = \frac{p}{\rho} - 1$.
За виразом 7 та 8:

$$a_\rho = \frac{4\sigma^2}{\rho^2 p}\left(\frac{p}{\rho} - 1\right) - \rho\frac{4\sigma^2}{\rho^2} \tag{9}$$

Відповідь : вираз 9

19. Частка маси m рухається під дією сили $\vec{F} = F(x)\vec{e}_x$, вздовж осі x. Знайти закон руху за умов $(t_0) = x_0, \dot{x}(t_0) \equiv \dot{x_0}, F(x) \geq 0$.
У випадку цієї задачі сила F залежить від координати x. Отже зробимо такий перехід:

$$F(x) = m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \tag{10}$$

Розв'яжемо рівняння руху відносно швидкості та застосуємо формулу 10:
$F(x)dx = mv \cdot dv;$ $\quad \frac{2}{m}\int\limits_{x_0}^{x} F(\xi)d\xi = v^2 - \dot{x}_0^2$. Врахуємо початкову умову ($F(x) \geq 0$) та те, що $v = \dfrac{dx}{dt}$:

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{2}{m}\int\limits_{x_0}^{x} F(\xi)d\xi + \dot{x}_0^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{11}$$

Проінтегруємо вираз 11: $\int\limits_{t_0}^{t} dt = \int\limits_{x_0}^{x}\left(\frac{2}{m}\int\limits_{x_0}^{x} F(\xi)d\xi + \dot{x}_0^2\right)^{-\frac{1}{2}} dx.$

$$\textbf{Відповідь}: t - t_0 = \int\limits_{x_0}^{x}\left(\frac{2}{m}\int\limits_{x_0}^{x} F(\xi)d\xi + \dot{x}_0^2\right)^{-\frac{1}{2}} dx$$

22. Заряд e, маса якого m, рухається в однорідних сталих полях тя-жіння і магнітному полі: $\vec{g} = (0, 0, -g), \vec{B} = (0, B, 0)$. Початкові умови: $\vec{r}(0) = (0, 0, h), \vec{v}(0) = (0, 0, v_0)$. Знайдіть межі області руху по координаті z і закон руху.

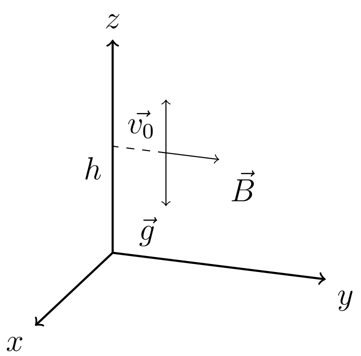

Рис. 3: Рух заряду.

Запишемо закон руху:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_\mu + m\vec{g} = \frac{e}{c} \cdot \vec{v} \times \vec{B} + m\vec{g} \tag{12}$$

Знайдемо векторний добуток $\vec{v} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & B & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}(0 - v_zB) - \vec{j}(0) + \vec{k}(v_xB).$

Підставимо в 12: $\begin{cases} m\dfrac{v_x}{dt} = -\dfrac{e}{c}v_z B \\ m\dfrac{dv_y}{dt} = 0 \\ m\dfrac{dv_z}{dt} = \dfrac{e}{c}v_x B - mg \end{cases}$; $\quad \dfrac{dv_x}{dt} = -\dfrac{e}{c}\dfrac{B}{m}\dfrac{dz}{dt}; \quad \omega = \dfrac{eB}{mc};$

$v_x = \omega(h-z); \quad \dfrac{dv_z}{dt} = \omega^2(h-z) - g = -\omega^2 z + (\omega^2 h - g)$. Зробимо заміну $\omega^2 h - g = A$. Складемо диференціальне рівняння:

$$\ddot{z} + \omega^2 z = A \tag{13}$$

Рівняння 13 є диференціальним рівнянням другого порядку. Складемо характеристичне рівняння: $\lambda^2 + w^2 = 0; \quad \lambda = \sqrt{-\omega^2} = \pm\omega i$. Загальне рішення: $z_0 = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$. Часткове рішення знайдемо за допомогою методу невизначених коефіцієнтів: $\ddot{z}_1 + \omega^2 z_1 = A; \quad B\omega^2 = A; \quad B = \dfrac{A}{\omega^2}; \quad z_1 = \dfrac{A}{\omega^2}$. Загальне рішення:

$$z = z_0 + z_1 = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t + \frac{A}{\omega^2} \tag{14}$$

Отже, щоб отримати v_z продиференціюємо 14: $v_z = -C_1\omega\sin\omega t + C_2\omega\cos\omega t$. Щоб знайти коефіцієнти вирішемо 14 за початкових умов $(t=0)$: $h = C_1 + \dfrac{A}{\omega^2}$;
$C_1 = h - \dfrac{A}{\omega^2} = \dfrac{g}{\omega^2}; \quad v_0 = C_1\omega; \quad C_1 = \dfrac{v_0}{\omega}$. Перепишемо загальне рішення:

$$z = \frac{g}{\omega^2}\cdot\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\cdot\sin\omega t + \frac{A}{\omega^2} \tag{15}$$

Підставимо 15 у $v_x = \omega(h-z)$: $\dot{x} = \omega h - \dfrac{g}{\omega}\cos\omega t - v_o\sin\omega t + \dfrac{g}{\omega} - \omega h$;
$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{g}{\omega}(1-\cos\omega t) - v_0\sin\omega t$. Проінтегруємо і отримаємо: $x(t) = \dfrac{g}{\omega} - \dfrac{g}{\omega^2}\sin\omega t +$
$+\dfrac{v_0}{\omega}\cos\omega t + C; \quad C = -\dfrac{v_0}{\omega}$. За законом збереження енергії: $mgh + \dfrac{mv_0^2}{2} = mgz_0 + \dfrac{mv_x^2}{2}$;
$gh + \dfrac{v_0^2}{2} = gz_0 + \dfrac{\omega^2(h^2+2hz_0+z_0^2)}{2}; \quad -(2gh+v_0^2) + 2gz_0 + \omega^2h^2 - 2\omega^2hz_0 + \omega^2z_0^2 = 0;$
$\omega^2z_0^2 + 2z_0(g-\omega^2h) + (\omega^2h^2 - 2gh + v_0^2) = 0; \quad z_0^2 + 2z_0\left(\dfrac{g}{\omega^2} - h\right) + (h^2 - 2h\dfrac{g}{\omega^2} + \dfrac{v_0^2}{\omega^2} = 0;$
$z_{1,2} = h - \dfrac{g}{\omega^2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{g}{\omega^2} - h\right)^2 - h^2 + 2h\dfrac{g}{\omega^2} - \dfrac{v_0^2}{\omega^2}}$

Відповідь : $z_{1,2} = h - \dfrac{g}{\omega^2} \pm \sqrt{\dfrac{g}{\omega^4} - \dfrac{v_0^2}{\omega^2}}, \quad \omega = \dfrac{eB}{mc}$

25. Парашутист маси m стрибає з літака, який летить горизонтально на висоті H із швидкістю v_0. По якій траєкторії рухається парашутист під час затягнутого стрибка (до моменту розкриття парашута), якщо сила опору повітря $F = -\beta v$, де v- швидкість парашутиста, $\beta = const$. Прискорення вільного падіння g вважати сталим. Із знайденого рівняння шляхом граничного переходу $\beta \to 0$ знайти рівняння траєкторії за відсутності сили опору.

З рисунка 4 запишемо закон руху:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - \beta\vec{v} \tag{16}$$

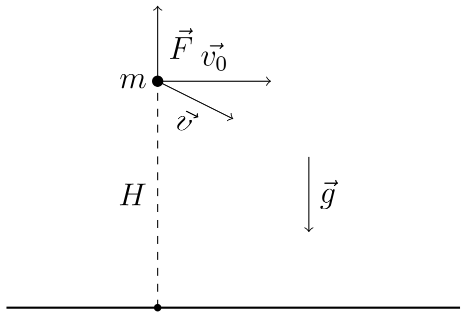

Рис. 4: Парашутист стрибає з літака

Перепишемо 16 з урахуванням проекцій $\vec{v}$ на осі:

$$\begin{cases} m\frac{v_x}{dt} = -\beta v_x & (17) \\ m\frac{dv_y}{dt} = -mg - \beta v_y & (18) \end{cases}$$

Складемо диференціальне рівняння з 17:

$$\ddot{x} + \frac{\beta}{m}\dot{x} = 0 \tag{19}$$

Характеристичне рівняння для 19: $\lambda^2 + \frac{\beta}{m}\lambda = 0;\quad \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -\frac{\beta}{m}$. Загальне рішення:

$$x(t) = C_1 + C_2 e^{-\frac{\beta t}{m}} \tag{20}$$

Складемо диференціальне рівняння з 18:

$$\dot{v_y} + g + \frac{\beta}{m}v_y = 0 \tag{21}$$

З 21 знайдемо v_y: $\frac{dv_y}{dt} = -\frac{\beta}{m}v_y - g;\quad \int \frac{dv_y}{-\frac{\beta}{m}v_y - g} = -\frac{m}{\beta}\int \frac{d(-\frac{\beta}{m}v_y - g)}{-\frac{\beta}{m}v_y - g} =$
$= -\frac{m}{\beta}\ln\left|-\frac{\beta}{m}v_y - g\right| = t + C$. Отже:

$$v_y = -\frac{m}{\beta}\left(e^{-\frac{\beta}{m}t+C} + g\right) \tag{22}$$

Розглянемо 22 коли $t = 0$: $v(0) = -\frac{\beta}{m}\left(e^{0+C} + g\right);\quad C = \ln g$. Отже:

$$v_y = -\frac{mg}{\beta}\left(e^{-\frac{\beta}{m}t} + 1\right) \tag{23}$$

З 22 знайдемо y: $y = \int v dt = -\frac{mg}{\beta}\left(\int e^{-\frac{\beta}{m}t} + t\right) = -\frac{mg}{\beta}\left(-\frac{m}{\beta}e^{-\frac{\beta}{m}t} + t\right) + C$.
Розглянемо $t = 0$: $y(0) = H = -\frac{mg}{\beta}\left(-\frac{m}{\beta}e^{-\frac{\beta}{m}0} + 0\right) + C;\quad C = H - \frac{m^2 g}{\beta^2}$. Отже:

$$y(t) = \frac{m^2 g}{\beta^2}\left(e^{-\frac{\beta}{m}t} + 1\right) + H - \frac{mgt}{\beta} \tag{24}$$

Виразимо t з 20: Розглянемо $t=0$: $x(0)=C_1+C_2e^0$; $\quad C_1=-C_2$. Отже $x(t)=C_2(e^{-\frac{\beta t}{m}}-1)$. Для того щоб знайти C_2 розглянемо швидкість: $v_x=\dot{x}=-\dfrac{\beta}{m}C_2e^{-\frac{\beta t}{m}}$. Розглянемо $t=0$: $v_x(0)=v_0=-\dfrac{\beta}{m}C_2e^0$; $\quad C_2=-\dfrac{v_0m}{\beta}$. Отже:

$$x(t)=-\frac{v_0m}{\beta}\left(e^{-\frac{\beta t}{m}}-1\right) \tag{25}$$

Виразимо t з 25: $-\dfrac{\beta x}{v_0m}+1=e^{-\frac{\beta t}{m}}$. Отже:

$$t=-\frac{m}{\beta}\ln\left|-\frac{\beta x}{v_0m}+1\right| \tag{26}$$

Підставимо 26 у 24: $y=\dfrac{m^2g}{\beta^2}\left(e^{-\frac{\beta}{m}\left(-\frac{m}{\beta}\ln\left|-\frac{\beta x}{v_0m}+1\right|\right)}-1\right)+H-\dfrac{mg}{\beta}\left(-\frac{m}{\beta}\ln\left|-\frac{\beta x}{v_0m}+1\right|\right)$

$$y=\frac{mgx}{\beta v_0}+H+\frac{m^2g}{\beta^2}\ln\left|-\frac{\beta x}{v_0m}+1\right| \tag{27}$$

Розглянемо 27 при $\beta\to0$: Розпишемо $\ln|z+1|$ за $f(z)=f(0)+f'(0)+\dfrac{1}{2}f''(0)z^2$: $\ln|z+1|=z-\dfrac{1}{2}z^2$. Отже $y\to H+\dfrac{mgx}{\beta v_0}+\dfrac{m^2g}{\beta^2}\left(-\dfrac{\beta x}{v_0m}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\beta^2x^2}{v_0^2m^2}\right)=H+\dfrac{mgx}{\beta v_0}-$
$-\dfrac{m^2g}{\beta^2}\dfrac{\beta x}{v_0m}-\dfrac{1}{2}\dfrac{gx^2}{v_0^2}$

$$\beta\to0: y\to H-\frac{gx^2}{2v_0^2} \tag{28}$$

Відповідь : вирази $27, 28$

29. Електрон рухається в однорідному сталому магнітному полі, індукція якого $\vec{B}=(0,B,0)$, і електричному полі квадрупольного конденсатора, потенціал якого $\Phi=\dfrac{U_0(x^2-y^2)}{2a^2}$, $(a,U_0=const)$. Знайдіть закон руху $\vec{r}=\vec{r}(t)$ за умови $B>\dfrac{c}{a}\sqrt{\dfrac{mU_0}{e}}$, де c - швидкість світла.

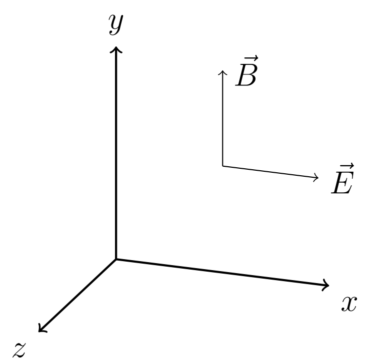

Рис. 5

$$E=-\nabla\Phi \tag{29}$$

Запишемо компоненти $\vec{E}$: $E_x = -\dfrac{U_0 x}{a^2}$; $\quad E_y = \dfrac{U_0 y}{a^2}$. Так як $z = const$: $\dfrac{dx}{E_x} = \dfrac{dy}{E_y} = \dfrac{dz}{0}$. Можна зробити висковок, що E лежить у площині xy. Запишемо закон руху:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = e\vec{E} + e \cdot \vec{v} \times \vec{B}, \quad e = -|e| \tag{30}$$

Порахуємо векторний добуток і перепишемо 30 як:
$\vec{v} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & B & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}(0 - v_z B) - \vec{j}(0) + \vec{k}(v_x B).$

$$\begin{cases} m\dfrac{dv_x}{dt} = eE_x - ev_z B = -\dfrac{eU_x}{a^2} - ev_z B & (31) \\ m\dfrac{dv_y}{dt} = eE_y = \dfrac{eU_0 y}{a^2} & (32) \\ m\dfrac{dv_z}{dt} = ev_x B & (33) \end{cases}$$

Розглянемо 33: $\dfrac{d}{dt}\left(v_z + \dfrac{|e|Bx}{m}\right) = 0$; $\quad v_z + \dfrac{|e|B}{m}x = C$; $\quad v_z = C - \dfrac{|e|B}{m}x$.
Складемо диференціальне рівняння з 31: $m\ddot{x} = \dfrac{|e|U_0 x}{a^2} + |e|BC - \dfrac{e^2B^2x}{m}$. Зробимо наступні заміни $\omega = \dfrac{|e|B}{m}$, $\quad \omega_2^2 = \dfrac{|e|U_0}{ma^2}$, $\quad \omega_1^2 = \omega^2 - \omega_2^2$. Підставимо і запишемо:

$$\ddot{x} + x(\omega^2 - \omega_2^2) = \omega C \tag{34}$$

Характеристичне рівняння 34: $\lambda^2 + (\omega^2 - \omega_2^2) = 0$; $\quad \lambda = \omega_1 i$. Знайдемо часткове рішення 34: $x_1 = \dfrac{\omega C}{\omega^2 - \omega_2^2} = C\dfrac{\omega}{\omega_1^2}$. Загальне рішення:

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + C\frac{\omega}{\omega_1^2} \tag{35}$$

Розглянемо 32: $\ddot{y} + \dfrac{|e|U_0 y}{ma^2} = 0$; $\quad \ddot{y} + \omega_2^2 y = 0 = 0$. Характеристичне рівняння: $\lambda^2 + \omega_2^2 = 0$; $\quad \lambda = \omega_2 i$. Загальне рішення:

$$y(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2) \tag{36}$$

Розглянемо 33: $v_z = \dot{z} = C - \omega x = C - \omega\left(A_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + C\dfrac{\omega}{\omega_1^2}\right)$. Проінтегруємо v_z і отримаємо:

$$z(t) = z_0 + \frac{Ct\omega^2}{\omega_1^2} - A_1\frac{\omega}{\omega_1}\sin(\omega_1 t + \alpha_1) + z_0 \tag{37}$$

Відповідь : дивітся у виразах $35, 36, 37$

31. 1. Вивести рівняння руху тіла зі змінною масою (рівняння Мещерського) і формулу для потужності внутрішніх сил

$$P = -\frac{1}{2}u^2\frac{dm}{dt}$$

Тут u - швидкість Δm відносно тіла. Розглянемо тіло змінної маси M. Нехай за деякий проміжок часу dt до тіла доєднуется невелика маса dm_1, що мала швидкість $\vec{v_1}$ та віокремлюєтся dm_2, що матиме швидкість $\vec{v_2}$. За законом зьереження імпульсу запишемо:

$$M\vec{v} + dm_1\vec{v_1} = M\vec{v} + d(M\vec{v}) + dm_2\vec{v_2} \tag{38}$$

Знаємо, що $d(M\vec{v}) = dM\vec{v} + Md\vec{v}$. Підставимо це у 38: $dm_1\vec{v_1} = dM\vec{v} + Md\vec{v} + dm_2\vec{v_2}$. Так як $dM = dm_1 - dm_2$: $dm_1(\vec{v}_1 - \vec{v}) = Md\vec{v} + dm_2(\vec{v_2} - \vec{v})$. Зробимо заміну $\vec{u_1} = (\vec{v}_1 - \vec{v}), \vec{u_2} = (\vec{v}_2 - \vec{v})$ і отримаємо рівняння Мещерського:

$$M\frac{dv}{dt} = \vec{u_1}\frac{dm_1}{dt} - \vec{u_2}\frac{dm_2}{dt} + F, \quad \text{де } F \text{ - результуюча зовнішних сил.} \tag{39}$$

Розглянемо $\dfrac{d\vec{P}}{du} = \vec{F}, F = \mu u$: $P = \displaystyle\int F du; \quad P = \mu\frac{u^2}{m}$. Отримаємо:

$$P = -\frac{1}{2}u^2\frac{dm}{dt} \tag{40}$$

2. Знайти, як змінюються з часом маса ракети при вертикальному підйомі в однорідному полі тяжіння у випадках:
   З рисунку 6 запишемо:

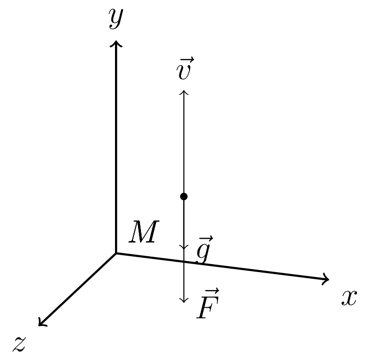

Рис. 6: Ракета при вертикальному підйомі.

$$M\frac{dv}{dt} = -mg - u\frac{dm}{dt} \tag{41}$$

(a) стала швидкість підйому; швидкість витікання газів стала;
    Враховуючи початкову умову запишемо 41 як: $mg = -u\dfrac{dm}{dt}$;
    $-\dfrac{g}{u}\displaystyle\int dt = \int_{m_0}^{m}\frac{dm}{m}; \quad -\frac{g}{u}\ln|\frac{m}{m_0}|$. Отже маса змінюється за:

$$m(t) = m_0 e^{-\frac{g}{u}t} \tag{42}$$

(b) стале прискорення підйому; швидкість витікання газів стала;
    Враховуючи початкову умову запишемо 41 як: $ma + mg = -u\dfrac{dm}{dt}$;
    $m(g+a) = -u\dfrac{dm}{dt}; \quad -\dfrac{g+a}{u}\displaystyle\int dt = \int_{m_0}^{m}\frac{dm}{m}; \quad -\frac{g+a}{u}t = \ln|\frac{m}{m_0}|$. Маса:

$$m(t) = m_0 e^{-\frac{g+a}{u}t} \tag{43}$$

(c) стала потужність в струмені газів.

Скористуємось виразом 40 і запишемо: $u = \sqrt{-2P\dfrac{dt}{dm}}$. Врахуємо умови і запишемо 41 як: $m(\ddot{z}+g) = -\sqrt{-2P\dfrac{dt}{dm}}\dfrac{dm}{dt}$; $\quad m^2(\ddot{z}+g)^2 = 2P\dfrac{dm}{dt}$;
$\dfrac{1}{2P}\int\limits_0^t(\ddot{z}+g)^2dt = \int\limits_{m_0}^{m}\dfrac{dm}{m^2}$; $\quad \dfrac{1}{m_0} - \dfrac{1}{m} = -\dfrac{1}{2P}\int\limits_0^t(\ddot{z}+g)^2dt$. Маса:

$$m(t) = m_0\left(1 - \frac{m_0}{2P}\int\limits_0^t(\ddot{z}+g)^2dt\right)^{-1} \tag{44}$$

Відповідь : $(a) : 42, (b) : 43, (c) : 44.$

39. Частка маси m рухається В потенціальному полі $U(x) = -U_0e^{\frac{x}{\alpha}}, \alpha, U_0$ - сталі. Знайти $x(t)$. Початкові умови $x(0) = 0, \dot{x} = v_0 \geq \sqrt{\dfrac{2U_0}{m}}$.

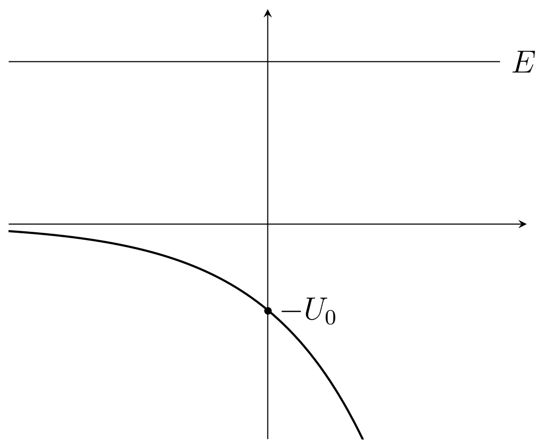

Рис. 7: $U(x) = -U_0e^{\frac{x}{\alpha}}$

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) \tag{45}$$

(a) $E > 0$

Рух інфінітний. Перепишемо 45 як: $\dfrac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\dfrac{2}{m}(E - U(x))}$. Розглянемо точку $x(0)$: $E = \dfrac{mv_0^2}{2} - U_0e^{\frac{0}{\alpha}} \geq 0$; $\quad v_0^2 \geq \dfrac{2}{m}U_0$. Отже $\dfrac{dx}{dt} = \sqrt{\dfrac{2}{m}(E - U(x))}$. Проінтегруємо:

$$\sqrt{\frac{m}{2}}\int\limits_0^x\frac{dx}{\sqrt{E - U_0e^{\frac{x}{\alpha}}}} = \int\limits_0^t dt \tag{46}$$

Розглянемо інтеграл $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{E - U_0e^{\frac{x}{\alpha}}}}$: Зробимо наступну заміну: $z = \sqrt{\dfrac{E}{U_0} + e^{\frac{x}{\alpha}}}$, $x = \alpha\ln|z^2 - \dfrac{E}{U_0}|$, $\quad dx = \dfrac{\alpha}{e^{\frac{x}{\alpha}}}zdz$. Підставимо: $\dfrac{2\alpha}{\sqrt{U_0}}\displaystyle\int\frac{zdz}{z\left(z^2 - \frac{E}{U_0}\right)} =$

$= \dfrac{2\alpha}{\sqrt{U_0}} \dfrac{1}{2\sqrt{\frac{E}{U_0}}} \ln\left|\dfrac{z-\sqrt{\frac{E}{U_0}}}{z+\sqrt{\frac{E}{U_0}}}\right| + C$. Отже, 46 представимо як:

$$t = \alpha\sqrt{\frac{m}{2E}} \ln\left|\frac{\sqrt{\frac{E}{U_0}+e^{\frac{x}{\alpha}}}-\sqrt{\frac{E}{U_0}}}{\sqrt{\frac{E}{U_0}+e^{\frac{x}{\alpha}}}+\sqrt{\frac{E}{U_0}}}\right|\Bigg|_0^x = \alpha\sqrt{\frac{m}{2E}} \ln\left|\frac{\sqrt{E+U_0e^{\frac{x}{\alpha}}}-\sqrt{E}}{\sqrt{E+U_0e^{\frac{x}{\alpha}}}+\sqrt{E}}\right| + t_0 \tag{47}$$

Знову розглянемо точку $x(0)$ та знайдемо t_0:

$$t_0 = \alpha\sqrt{\frac{m}{2E}} \ln\left|\frac{\sqrt{E+U_0}-\sqrt{E}}{\sqrt{E+U_0}+\sqrt{E}}\right| \tag{48}$$

Нехай $u = e^{\frac{x}{\alpha}}; v = e^{\left(\frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{2E}{m}}(t-t_0)\right)} = \left|\dfrac{\sqrt{E+U_0u}-\sqrt{E}}{\sqrt{E+U_0u}+\sqrt{E}}\right| =$
$= \dfrac{U_0u}{2E+U_0u+2\sqrt{E^2+EU_0u}}$. Порахуємо: $\dfrac{U_0u}{v} = 2E+U_0u+2\sqrt{E^2+EU_0u}$;
$U_0u\left(\dfrac{1}{v}-1\right) - 2E = 2\sqrt{E^2+EU_0u}$; $\quad U_0^2u^2\left(\dfrac{1}{v}-1\right)^2 - 2U_0u\left(\dfrac{1}{v}-1\right)\cdot 2E - 4E^2 =$
$= 4(E^2+EU_0u)$. E^2 взаємознищуються, ділимо на u та виражаємо u:

$$u = \frac{4E}{U_0\frac{1}{v}\left(\frac{1}{v}-1\right)^2} \tag{49}$$

З 49 та раніше зробленої заміни отримаємо: $x = \alpha\ln\left(\dfrac{4E}{U_0\frac{1}{v}\left(\frac{1}{v}-1\right)^2}\right) =$
$= \alpha\ln\left(\dfrac{4E}{U_0\left(\frac{1}{\sqrt{v}}-\sqrt{v}\right)^2}\right)$. Розпишемо $\dfrac{1}{\sqrt{v}} - \sqrt{v} = \dfrac{1}{\sqrt{e^{\left(\frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{2E}{m}}(t-t_0)\right)}}} -$
$- \sqrt{e^{\left(\frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{2E}{m}}(t-t_0)\right)}} = 2\,\mathrm{sh}\left(\dfrac{1}{\alpha}\sqrt{\dfrac{E}{2m}}(t-t_0)\right)$. Отже:

$$x(t) = \alpha\ln\left(\frac{E}{U_0\,\mathrm{sh}\left(\frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{E}{2m}}(t-t_0)\right)}\right) \tag{50}$$

(b) $E = 0$

Рух інфінітний. Перепишемо 45 як: $\dfrac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\dfrac{2}{m}U_0e^{\frac{x}{\alpha}}}$. Проінтегруємо :

$$\sqrt{\frac{m}{2U_0}}\int_0^x e^{-\frac{x}{2\alpha}}dx = \int_0^t dt \tag{51}$$

$$t=-\alpha\sqrt{\frac{m}{2U_0}}\int\limits_0^x e^{-\frac{x}{2\alpha}}d\left(-\frac{x}{2\alpha}\right)=-\alpha\sqrt{\frac{m}{2U_0}}\cdot e^{-\frac{x}{2\alpha}}\Big|_0^x=-a\sqrt{\frac{m}{2U_0}}\left(e^{-\frac{x}{2\alpha}}-1\right).$$ З 45 $U_0=\frac{mv_0^2}{2}$. Отже $t=-2\frac{\alpha}{v_0}\left(e^{-\frac{x}{2\alpha}}-1\right)$.

$$x(t)=-2\alpha\ln\left|1-t\frac{v_0}{2\alpha}\right| \tag{52}$$

Відповідь : $(a):50,(b):52$

40. Частка маси m рухається В потенціальному полі $U(x)=-U_0\operatorname{ch}^{-2}kx$, початкові умови $x(0)=-l, v(0)=v_0, kl=const\gg 1$. Повна енергія частки дорівнює E_0. Знайти час руху частки від точки $x=-l$ до точки $x=l$.

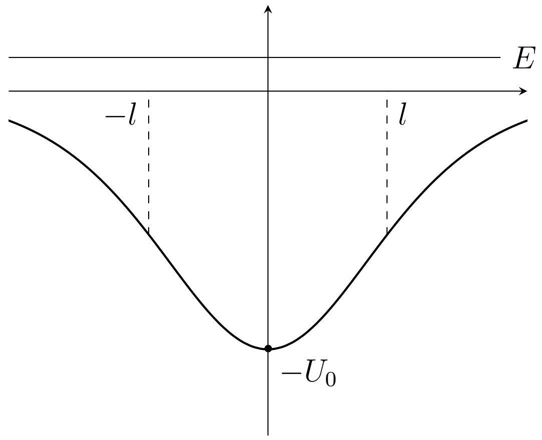

Рис. 8: $U(x)=-U_0\operatorname{ch}^{-2}kx$

$$E=\frac{m\dot{x}^2}{2}+U(x) \tag{53}$$

(a) $E_0>0$

Рух інфінітний. Перепишемо 53 як $\frac{dx}{dt}=\sqrt{\frac{2}{m}(E_0+U_0\operatorname{ch}^{-2}kx)}$. Проінтегруємо:

$$\sqrt{\frac{m}{2}}\int\limits_{-l}^{l}\frac{dx}{\sqrt{E_0+U_0\operatorname{ch}^{-2}kx}}=\int\limits_0^t dt \tag{54}$$

Розглянемо інтеграл $\int\limits_{-l}^{l}\frac{dx}{\sqrt{E_0+U_0\operatorname{ch}^{-2}kx}}=\frac{1}{\sqrt{E_0}}\int\limits_{-l}^{l}\frac{\operatorname{ch}kx\,dx}{\sqrt{\operatorname{ch}^2kx+\frac{U_0}{E_0}}}$. Зробимо заміну $z^2=\frac{E_0}{E_0+U_0}(\operatorname{ch}^2kx-1)$: $\frac{1}{k}\int\limits_{-z_0}^{z_0}\frac{dz}{\sqrt{z^2+1}}$. Отже 54 представимо як:

$$t=\frac{1}{k}\sqrt{\frac{m}{2E_0}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+z^2}+z}{\sqrt{1+z^2}-z}\right|\Bigg|_{-z_0}^{z_0} \tag{55}$$

Розглянемо $\ln\left|\frac{\sqrt{1+z_0^2}+z_0}{\sqrt{1+z_0^2}-z_0}\right| = \ln\left|4\frac{E_0}{E_0+U_0}\operatorname{sh}^2 kl\right| = \ln\left|\frac{E_0}{E_0+U_0}e^{2kl}\right|$.
Підставимо у 55:

$$\tau = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{m}{2E_0}}\left(2kl + \ln\frac{E_0}{E_0+U_0}\right) \tag{56}$$

(b) $E_0 < 0$

Рух фінітний. Перепишемо 53 як $\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(-E_0 + U_0 \operatorname{ch}^{-2} kx)}$. Проінтегруємо:

$$\sqrt{\frac{m}{2}}\int\limits_{-l}^{l}\frac{dx}{\sqrt{-E_0 + U_0\operatorname{ch}^{-2} kx}} = \int\limits_0^t dt \tag{57}$$

Розглянемо інтеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{-E_0+U_0\operatorname{ch}^{-2}kx}} = \frac{1}{\sqrt{E_0}}\int\limits_{-l}^{l}\frac{\operatorname{ch} kx dx}{\sqrt{-E_0\operatorname{ch}^2 kx + U_0}} =$
$= \frac{1}{k}\int\frac{d(\operatorname{sh} kx)}{U_0 - E_0(1+\operatorname{sh}^2 kx)}$. Зробимо заміну $z^2 = \frac{E_0}{-E_0+U_0}(\operatorname{ch}^2 kx - 1)$:
$\frac{1}{k\sqrt{E_0}}\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{k\sqrt{E_0}}\arcsin z$. Отже 57 представимо як:

$$t = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{m}{E_0}}\arcsin z \tag{58}$$

Виразимо z: $z = \sin\omega t = \operatorname{sh} kx\sqrt{\frac{E_0}{-E_0+U_0}}, \quad \omega = \frac{k}{2}\sqrt{\frac{2E}{m}}$. Знаємо, що $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$:

$$\tau = \frac{\pi}{k}\sqrt{\frac{m}{2E_0}} \tag{59}$$

Відповідь : $(a) : 56, (b) : 59$

41. Частка маси m рухається в потенціальному поолі $U(x) = -E\cos\frac{x}{l}$, де l - стала, E - повна енергія. Початкові умови $x(0) = 0, \dot{x}(0) = v_0 = \frac{2E}{m}$. Знайти $x(t)$.

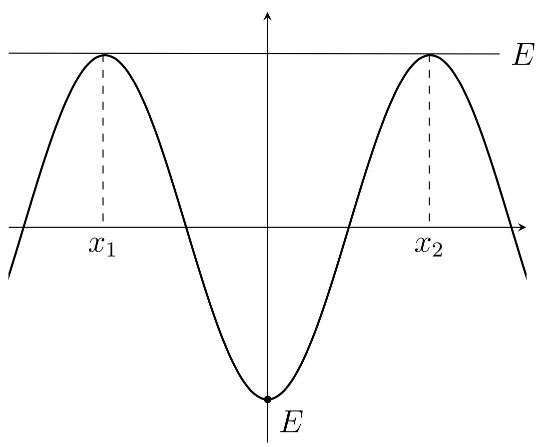

Рис. 9: $U(x) = -E\cos\frac{x}{l}$

$$E=\frac{m\dot{x}^2}{2}+U(x) \tag{60}$$

Рух інфінітний. Перепишемо 60 як: $\dfrac{dx}{dt}=\sqrt{\dfrac{2}{m}(E+E\cos\dfrac{x}{l}}$. Проінтегруємо:

$$\sqrt{\frac{m}{2E}}\int\limits_0^x\frac{dx}{\sqrt{1+\cos\frac{x}{l}}}=\int\limits_0^t dt \tag{61}$$

Розглянемо інтеграл $\displaystyle\int\limits_0^x\frac{dx}{\sqrt{1+\cos\frac{x}{l}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^x\frac{dx}{\cos\frac{x}{2l}}=\frac{l}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+\sin\frac{x}{2l}}{1-\sin\frac{x}{2l}}\right|$. Отже 61 представимо як:

$$t=\frac{l}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{m}{2E}}\ln\left|\frac{1+\sin\frac{x}{2l}}{1-\sin\frac{x}{2l}}\right|=\frac{l}{v_0}\ln\left|\frac{1+\sin\frac{x}{2l}}{1-\sin\frac{x}{2l}}\right| \tag{62}$$

Перепишемо 62: $e^{\dfrac{v_0t}{l}}=\dfrac{1+\sin\frac{x}{2l}}{1-\sin\frac{x}{2l}}$; $\quad e^{\dfrac{v_0t}{l}}-e^{\dfrac{v_0t}{l}}\sin\frac{x}{2l}=1+\sin\frac{x}{2l}$; $\quad \sin\frac{x}{2l}=\dfrac{e^{\dfrac{v_0t}{l}}-1}{e^{\dfrac{v_0t}{l}}+1}=$

$=\tanh\dfrac{v_0t}{2l}$. Отже:

$$x(t)=2l\arcsin\left(\tanh\frac{v_0t}{2l}\right) \tag{63}$$

47. Покажіть, що при русі частки в полі $U(r)=-\dfrac{\alpha}{r}(\alpha>0)$, існує інтеграл руху $\vec{\Lambda}=\vec{v}\times\vec{M}-\alpha\dfrac{\vec{r}}{r}=const$, де $\alpha=const$, M - момент імпульсу. Інтеграл руху Λ інколи називають вектором Лапласа, а інколи - вектором Рунге-Ленца.
Задача зводиться до доведення $\dfrac{d\vec{\Lambda}}{dt}=0$. Тоді рівняння буде інтегралом руху. Знаємо, що $\vec{M}=\vec{r}\times\vec{v_m}=const$, також $ma=m\ddot{r}=-\nabla U$. Продиференціюємо вектор Лапласа:

$$\frac{d\vec{\Lambda}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}\times\vec{M}\right)-\frac{d}{dt}\left(\alpha\frac{\vec{r}}{r}\right)=\frac{d\vec{v}}{dt}\times\vec{M}-\frac{d\vec{M}}{dt}\times\vec{v}-\frac{d}{dt}\left(\alpha\frac{\vec{r}}{r}\right) \tag{64}$$

Розглянемо 64 детальніше: $\dfrac{d\vec{M}}{dt}=0$ - рух у полі центральних сил, $\dfrac{d}{dt}\left(\alpha\dfrac{\vec{r}}{r}\right)=0$ - не залежить від t. Підставимо і отримаємо:

$$\frac{d\vec{\Lambda}}{dt}=m\vec{r}\cdot\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}\right)-m\vec{v}\cdot\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{r}\right)=0 \tag{65}$$

що дорівняє нулю, адже скалярний добуток асоціативний.
Таким чином ми довели, що існує $\vec{\Lambda}=\vec{v}\times\vec{M}-\alpha\dfrac{\vec{r}}{r}=const$ при русі частки в полі $U(r)=-\dfrac{\alpha}{r}(\alpha>0)$.

49. (a) Покажіть, що величина вектора Лапласа $\vec{\Lambda}$ може дорівнювати $|\vec{\Lambda}| = \alpha$, де ексцентриситет еліпса $e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}$, E - енергія та m - маса частки.
Пам'ятаємо:

$$\vec{\Lambda} = \vec{v} \times \vec{M} - \alpha \frac{\vec{r}}{r} \tag{66}$$

Отже: $\Lambda^2 = \left(\vec{v} \times \vec{M}\right)^2 - \left(\alpha \frac{\vec{r}}{r}\right)^2 - 2\left(\vec{v} \times \vec{M}\right)\left(\alpha \frac{\vec{r}}{r}\right) = v^2M^2 + \alpha^2 - \frac{2\alpha}{rm}\vec{M}\left(m\vec{r} \times \vec{v}\right) =$
$= v^2M^2 + \alpha^2 - \frac{2\alpha}{rm}\vec{M} = v^2m^2 - \frac{2\alpha M^2}{mr} + \alpha^2 = \alpha^2 + 2M^2\left(\frac{mv^2}{2} - \frac{\alpha}{r}\right) =$
$= \alpha^2\left(1 + \frac{2M^2E}{\alpha^2 m}\right)$. Врахуємо початкові умови і отримаємо:

$$|\vec{\Lambda}| = \alpha\sqrt{1 + \frac{2M^2E}{\alpha^2 m}} = \alpha e \tag{67}$$

(b) Покажіть, що в полярних координатах вектор Лапласа має вигляд:

$$\vec{\Lambda} = (r\dot{\phi}M - \alpha)\vec{e_r} - \dot{r}M\vec{e_\phi} \tag{68}$$

Розглянемо момент імпульсу: $\vec{M} = m\vec{r} \times \vec{v} = m(r\vec{e_r}) \times (\dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\phi}\vec{e_\phi}) = mr\dot{r}\vec{e_r} \times \vec{e_\phi} +$ $+ mr^2\dot{\phi}\vec{e_r} \times \vec{e_\phi} = mr^2\dot{\phi}\vec{e_r} \times \vec{e_\phi}$. Зробимо заміну $\vec{e_z} = \vec{e_r} \times \vec{e_\phi}$ Далі знайдемо векторний добуток $\vec{v} \times \vec{M} = (\dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\phi}\vec{e_\phi}) \times (mr^2\vec{e_z}) = \dot{r}\vec{e_r}mr^2\dot{\phi}\vec{e_r} \times \vec{e_z} + mr^3\dot{\phi}^2\vec{e_z} \times \vec{e_\phi} =$ $-\dot{r}mr^2\dot{\phi}\vec{e_\phi} + mr^3\dot{\phi}^2\vec{e_\phi} = Mr\dot{\phi}\vec{e_r} - M\dot{r}\vec{e_\phi}$. Отже отримаємо:

$$\vec{\Lambda} = Mr\dot{\phi}\vec{e_r} - M\dot{r}\vec{e_\phi} - \alpha\frac{\vec{r}}{r} = (r\dot{\phi}M - \alpha)\vec{e_r} - \dot{r}M\vec{e_\phi} \tag{69}$$

127. Бусинка маси m рухається без тертя по дротяному колу радіуса R, площина якого перпендикулярна до поверхні Землі. Дріт обертається зі сталою кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ навколо діаметра, напрямок якого збігається з напрямком сили тяжіння тд. Знайти функцію Лагранжа для миттєвого положення $A(t)$ бусинки на колі (початок координат в центрі кола), узагальнену енергію і записати рівняння Лагранжа.

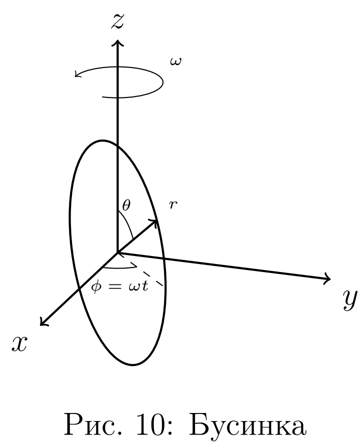

Рис. 10: Бусинка

Запишемо функцію Лагранжа:

$$L = \frac{m}{2}\left((R\dot{\theta})^2 + (R\omega\sin(\theta))^2\right) - mgR\cos\theta \tag{70}$$

За домомогою 70 запишемо узагальнену енергію:

$$E = \frac{m}{2}\left((R\dot{\theta})^2 - (R\omega\sin(\theta))^2\right) - mgR\cos\theta \tag{71}$$

Так як $r = const, \phi = \omega t$ складемо рівняння Лагранжа для θ: $\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}(2R^2\dot{\theta}\right) -$
$- \frac{m}{2}\left(2\cos\theta\sin\theta R^2\omega^2\right) - mg\sin\theta = 0$. Порахуємо і перепишемо:

$$R^2\ddot{\theta} - \sin\theta\left(\cos\theta R^2\omega^2 + gR\right) \tag{72}$$

Відповідь : вирази $70, 71, 72$

130. Точка підвісу математичного маятника маси m та довжини l рухається у вертикальному напрямку (поле тяжіння $\vec{g} = const$) за відомим законом $S = S(t)$. Знайдіть функцію Лагранжа та рівняння руху частки.

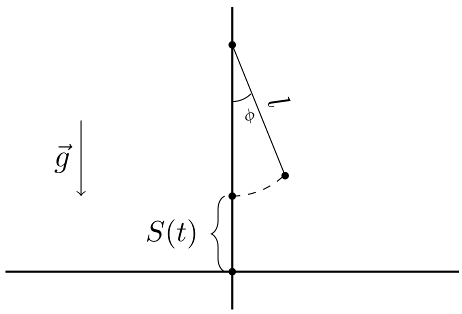

Рис. 11: Мат. маятник

Запишемо координати для математичного маятника:

$$\begin{cases} x = l\sin\phi \\ y = l\cos\phi + S(t) \end{cases} \tag{73}$$

З 73 потенціальна енергія дорівнюватиме mgy. Запишемо функцію Лагранжа:
$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mg(l\cos\phi + S(t))$, що можна представити як:

$$L = \frac{m}{2}\left((l\dot{\phi}\cos\phi)^2 + (-l\dot{\phi}\sin\phi + \dot{S}(t))^2\right) + mgl\cos\phi \tag{74}$$

Розглянемо швидкість детальніше: $v = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = (l\dot{\phi}\cos\phi)^2 + (-l\dot{\phi}\sin\phi + \dot{S}(t))^2 =$
$= l^2\dot{\phi}^2\cos^{\phi} + l^2\dot{\phi}^2\sin^2\phi - 2l\dot{\phi}\sin\phi\dot{S}(t) + \ddot{S} = l^2\dot{\phi}^2(\cos^2\phi + \sin^2\phi) - 2l\ddot{S}\cos\phi$.
Перепишемо 74:

$$L = \frac{m}{2}\left(l^2\dot{\phi}^2 + 2l\ddot{S}\cos\phi\right) + mgl\cos\phi = \frac{m}{2}l^2\dot{\phi}^2 + m(g + \ddot{S})l\cos\phi \tag{75}$$

Складемо рівняння Лагранжа: $\frac{m}{2}\frac{d}{dt}(2l^2\dot{\phi}^2) + m(g + \ddot{S})l\sin\phi = ml^2\ddot{\phi} + m(g +$
$+ \ddot{S})l\sin\phi = 0$. Перепишемо

$$\ddot{\phi} + \frac{g + \ddot{S}}{l}\sin\phi = 0 \tag{76}$$

Відповідь : вирази $75, 76$