Домашня робота 2

1. (a) $(P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$

   ПДЗ: $(((P \vee Q) \vee (\neg R)) \wedge (((\neg P) \vee (\neg Q)) \vee R)) = A$

   Порядок: $\underset{+1}{(}\underset{+1}{(} P \vee Q \underset{-1}{)} \vee \underset{+1}{(} \neg R \underset{-1}{)}\underset{-1}{)} \wedge \underset{+1}{(}\underset{+1}{(}\underset{+1}{(} \neg P \underset{-1}{)} \vee \underset{+1}{(} \neg Q \underset{-1}{)}\underset{-1}{)} \vee R \underset{-1}{)}\underset{-1}{)} \qquad = 3$

   Довжина: $\overset{1}{(}\overset{2}{(}\overset{3}{(}\overset{4}{P} \overset{5}{\vee} \overset{6}{Q}\overset{7}{)} \overset{8}{\vee} \overset{9}{(}\overset{10}{\neg}\overset{11}{R}\overset{12}{)}\overset{13}{)} \overset{14}{\wedge} \overset{15}{(}\overset{16}{(}\overset{17}{(}\overset{18}{\neg}\overset{19}{P}\overset{20}{)} \overset{21}{\vee} \overset{22}{(}\overset{23}{\neg}\overset{24}{Q}\overset{25}{)}\overset{26}{)} \overset{27}{\vee} \overset{28}{R}\overset{29}{)}\overset{30}{)} \qquad = 30$

   Степінь: $(P \overset{1}{\vee} Q \overset{2}{\vee} \overset{3}{\neg} R) \overset{4}{\wedge} (\overset{5}{\neg} P \overset{6}{\vee} \overset{7}{\neg} Q \overset{8}{\vee} R) \qquad = 8$

   $\mathcal{T}(A) = \{\underbrace{P,\ Q,\ R}_{0},\ \underbrace{\neg P,\ \neg Q,\ \neg R,\ P \vee Q}_{1},\ \underbrace{P \vee Q \vee \neg R,\ \neg P \vee \neg Q \vee R}_{2},$
   $\underbrace{(P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)}_{3}\}$

   (b) $((P \leftrightarrow (Q \wedge \neg R)) \vee (P \wedge Q)) \to (P \vee (\neg Q \wedge R))$

   ПДЗ: $(((P \leftrightarrow (Q \wedge (\neg R))) \vee (P \wedge Q)) \to (P \vee ((\neg Q) \wedge R))) = A$

   Порядок: $\underset{+1}{(}\underset{+1}{(}\underset{+1}{(} P \leftrightarrow \underset{+1}{(} Q \wedge \underset{+1}{(} \neg R \underset{-1}{)}\underset{-1}{)}\underset{-1}{)} \vee \underset{+1}{(} P \wedge Q \underset{-1}{)}\underset{-1}{)} \to \underset{+1}{(} P \vee \underset{+1}{(}\underset{+1}{(} \neg Q \underset{-1}{)} \wedge R \underset{-1}{)}\underset{-1}{)}\underset{-1}{)} \quad = 5$

   Довжина: $\overset{1}{(}\overset{2}{(}\overset{3}{(}\overset{4}{P} \overset{5}{\leftrightarrow} \overset{6}{(}\overset{7}{Q} \overset{8}{\wedge} \overset{9}{(}\overset{10}{\neg}\overset{11}{R}\overset{12}{)}\overset{13}{)}\overset{14}{)} \overset{15}{\vee} \overset{16}{(}\overset{17}{P} \overset{18}{\wedge} \overset{19}{Q}\overset{20}{)}\overset{21}{)} \overset{22}{\to} \overset{23}{(}\overset{24}{P} \overset{25}{\vee} \overset{26}{(}\overset{27}{(}\overset{28}{\neg}\overset{29}{Q}\overset{30}{)} \overset{31}{\wedge} \overset{32}{R}\overset{33}{)}\overset{34}{)}\overset{35}{)} \qquad = 35$

   Степінь: $((P \overset{1}{\leftrightarrow} (Q \overset{2}{\wedge} \overset{3}{\neg} R)) \overset{4}{\vee} (P \overset{5}{\wedge} Q)) \overset{6}{\to} (P \overset{7}{\vee} (\overset{8}{\neg} Q \overset{9}{\wedge} R)) \qquad = 9$

   $\mathcal{T}(A) = \{\underbrace{P,\ Q,\ R}_{0},\ \underbrace{\neg R,\ P \vee Q}_{1},\ \underbrace{Q \wedge \neg R,\ \neg Q \wedge R}_{2},\ \underbrace{P \leftrightarrow (Q \wedge \neg R),\ P \vee (\neg Q \wedge R)}_{3},$
   $\underbrace{(P \leftrightarrow (Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q)}_{4},\ \underbrace{((P \leftrightarrow (Q \wedge \neg R)) \vee (P \wedge Q)) \to (P \vee (\neg Q \wedge R))}_{5}\}$

2. (a) $((P \to (Q \to (R))) \to ((P \to (\neg R)) \to (P \to \neg(Q))))$

   $(P \to (Q \to R)) \to (P \to \neg R) \to P \to \neg Q$

   (b) $(((P \vee Q) \vee (\neg R)) \vee (\neg S)) \to (P \wedge R)$

   $P \vee Q \vee \neg R \vee \neg S \to P \wedge R$

3. (a) $\neg P \to \neg Q \wedge \neg S$

   $A_1 = \neg P \to (\neg Q \wedge \neg S)$

   Графічно не еквівалентні $A_1:\ \ A_2 = \neg(P \to \neg Q) \wedge \neg S,\ \ A_3 = \neg P \to \neg(Q \wedge \neg S),$
   $A_4 = \neg(P \to \neg Q \wedge \neg S),\ \ A_5 = \neg(P \to \neg(Q \wedge \neg S)),\ \ A_6 = (\neg P \to \neg Q) \wedge \neg S,$
   $A_7 = \neg(P \to (\neg Q \wedge \neg S))$

   $\Rightarrow$ Загалом попарно не еквівалентних формул 7.

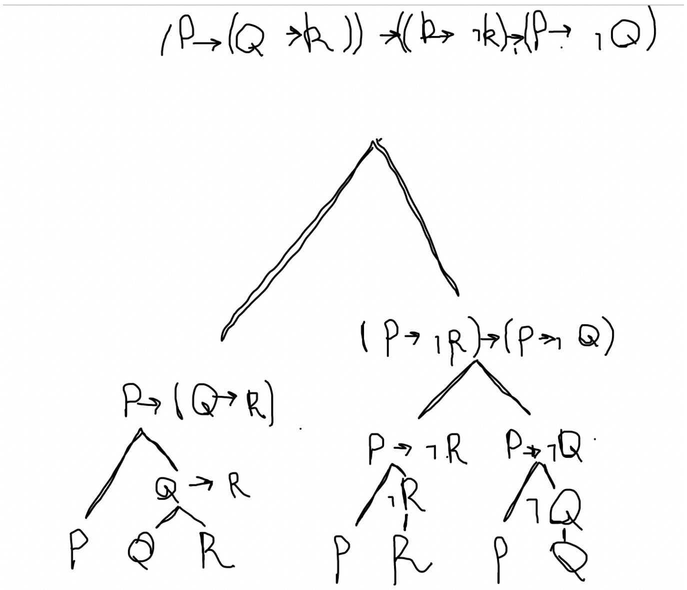
   (b) $P \to \neg Q \to \neg P \to S$

   $A_1 = P \to \neg(Q \to \neg P \to S)$

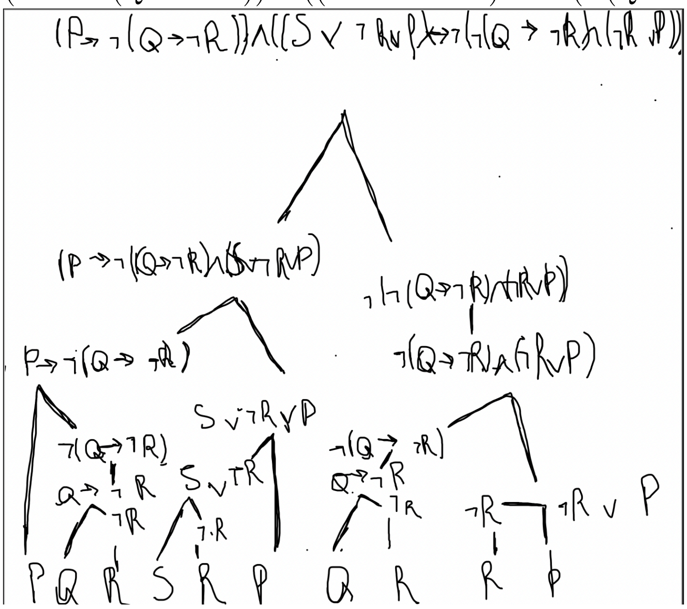
   Графічно не еквівалентні $A_1:\ \ A_2 = P \to \neg(Q \to \neg P) \to S,$
   $A_3 = P \to \neg(Q \to \neg(P \to S)),\ \ A_4 = P \to \neg(Q \to (\neg P \to S)),$
   $A_5 = P \to \neg Q \to \neg(P \to S),\ \ A_6 = P \to \neg Q \to \neg P \to S,$
   $A_7 = P \to (\neg Q \to \neg P) \to S,\ \ A_8 = P \to (\neg Q \to \neg P \to S)$
   $A_9 = P \to (\neg Q \to \neg(P \to S)),\ \ A_{10} = P \to (\neg Q \to (\neg P \to S))$

4. (a) $(P \to (Q \to R)) \to ((P \to \neg R) \to (P \to \neg Q))$

   Побудова: $P,\ Q,\ R,\ Q \to R,\ \neg R,\ \neg Q,\ P \to (Q \to R),\ P \to \neg R,\ P \to \neg Q,$
   $(P \to \neg R) \to (P \to \neg Q),\ (P \to (Q \to R)) \to ((P \to \neg R) \to (P \to \neg Q))$



(b) $(P \to \neg(Q \to \neg R)) \wedge ((S \vee \neg R \vee P) \leftrightarrow \neg(\neg(Q \to \neg R) \wedge (\neg R \vee P)))$
Побудова: P, Q, R, S, $\neg R$, $Q \to \neg R$, $S \vee \neg R$, , $\neg R \vee P$, $\neg(Q \to \neg R)$, $S \vee \neg R \vee P$, $P \to \neg(Q \to \neg R)$, $\neg(Q \to \neg R) \wedge (\neg R \vee P)$, $\neg(\neg(Q \to \neg R) \wedge (\neg R \vee P))$, $(P \to \neg(Q \to \neg R)) \wedge ((S \vee \neg R \vee P)$,
$(P \to \neg(Q \to \neg R)) \wedge ((S \vee \neg R \vee P) \leftrightarrow \neg(\neg(Q \to \neg R) \wedge (\neg R \vee P)))$



5. Максимальна кількість підфорумул -2^a при $a = n - k$

   (a) $k = n - 1$ - формула розкладається на дві підформули(2^1)

   (b) Нехай $k = n - a$, тоді максимальна кількість підформул 2^a

   (c) Доведемо для $k = n - a + 1$: $2^{a+1} = 2^a \cdot 2 \to \underbrace{2^a}_{\text{за прип.}} \cdot \underbrace{2}_{\text{+підформула}}$

6. Кількість вузлів до $\log_2 m$-арного рівня: $\sum\limits_{i=0}^{\log_2 m} 2^i$

   На $\log_2 m + 1$-тому рівні ще $+k$ вузлів

   На останньрму рівні n узлів

   Загальна кількість вузлів: $\sum\limits_{i=0}^{\log_2 m} 2^i + k + n$

   Значення порядку $==$ висота дерева

   Максимальна висота $= a - 1$, де $a =$к-ть вершин $\Rightarrow = \sum\limits_{i=0}^{\log_2 m} 2^i + k + n - 1$

   Максимальна висота $= \log_2 a$, де $a =$к-ть вершин $\Rightarrow = \log_2 (\sum\limits_{i=0}^{\log_2 m} 2^i + k + n) =$

   $= \log_2 2 + \log_2 2^2 + \cdots + \log_2 2^m + \log_2 n + \log_2 k = 1 + 2 + \cdots + m + \log_2 k + \log_2 n =$

   $= \sum\limits_{i=0}^{m} i + \log_2 k + \log_2 n.$