ДОМАШНЯ РОБОТА №10
З ПРЕДМЕТУ
"ТЕОРІЯ ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ"

ФІ-12 Бекешева Анастасія

1. (a) $f(z) = z^4 - 4z^3 + 3z^2 = z^2(z^2 - 4z + 3) = z^2(z-1)(z-3)$
$z = 0: \quad f(z) = z^2 g(z), \quad g(z) = (z-1)(z-3), \quad g(0) \neq 0, \quad g(z)$ - аналітична в $z = 0 \Longrightarrow z = 0$ нуль II порядку.
$z = 1: \quad f(z) = (z-1)g(z), \quad g(z) = z^2(z-3), \quad g(1) \neq 0, \quad g(z)$ - аналітична в $z = 1 \Longrightarrow z = 1$ нуль I порядку.
$z = 3: \quad f(z) = (z-3)g(z), \quad g(z) = z^2(z-1), \quad g(3) \neq 0, \quad g(z)$ - аналітична в $z = 3 \Longrightarrow z = 3$ нуль I порядку.

(b) $f(z) = e^{2z} - 1 = (e^z - 1)(e^z + 1)$
$e^z = 1, \quad z_k = 0 + i(0 + 2\pi ik) = 2\pi ik, k \in \mathbb{Z}$ - нуль I порядку.
$e^z = -1, \quad z_k = 0 + i(\pi + 2\pi k) = i\pi(1 + 2k), k \in \mathbb{Z}$ - нуль I порядку.

(c) $f(z) = z \sin \pi z$

$$\left[\begin{array}{l} z = 0 \\ z_k = k \end{array}\right. , k \in \mathbb{Z}, \qquad \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} m_1 = 1 \\ m_2 = 1 \end{cases} & \text{- нуль II порядку} \\ \begin{cases} m_1 = 0 \\ m_2 = 1 \end{cases} & \text{- нуль I порядку} \end{array}\right.$$

(d) $f(z) = z^3 \operatorname{sh} 3\pi z$

$$\left[\begin{array}{l} z = 0 \\ z = \dfrac{1}{3}ik \end{array}\right. , k \in \mathbb{Z} \qquad \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} m_1 = 1 \\ m_2 = 3 \end{cases} & \text{- нуль IV порядку} \\ \begin{cases} m_1 = 0 \\ m_2 = 1 \end{cases} & \text{- нуль I порядку} \end{array}\right.$$

2. (a) $$f(z) = \frac{\sin z^4 - z^4}{\operatorname{sh} z - z - \frac{z^3}{6}} = \frac{z^4 - \frac{z^{12}}{6} + \dots - z^4}{z + \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{24} + \dots - z - \frac{z^3}{6}} = \frac{\frac{z^{12}}{6} + \dots}{\frac{z^5}{24} + \dots} = \frac{z^{12}\left(\frac{1}{6} + \dots\right)}{z^5\left(\frac{1}{24} + \dots\right)} =$$
$$= \frac{z^{12} g_1(z)}{z^5 g_2(z)}, \quad m_1 = 12, m_2 = 5 \Longrightarrow m_1 > m_2 \text{ - усувна особлива точка.}$$

(b) $$f(z) = \frac{\cos 5z - 1}{\operatorname{ch} z - 1 - \frac{z^2}{2}} = \frac{1 - \frac{z^2}{2} + \dots - 1}{1 + \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} + \dots - 1 - \frac{z^2}{2}} = \frac{-\frac{z^2}{2} + \dots}{\frac{z^4}{24} + \dots} = \frac{z^2\left(-\frac{1}{2} + \dots\right)}{z^4\left(\frac{1}{24} + \dots\right)} =$$
$$= \frac{z^2 g_1(z)}{z^4 g_2(z)}, \quad m_1 = 2, m_2 = 4 \Longrightarrow m_1 < m_2 \text{ - полюс функції } f(z) \text{ порядку 2.}$$

(c) $$f(z) = ze^{\left(\frac{4}{z^3}\right)} = z\left(1 + \frac{4}{z^3} + \frac{4^2}{2z^6} + \dots\right) = z + \frac{4}{z^2} + \frac{4^2}{2z^5} + \dots, \quad z_0 = 0$$
нескінченна кількість доданків в головній частині $\Longrightarrow z_0$ - істотно особлива.

3. (a) $$f(z) = \frac{\cos \pi z}{(4z^2 - 1)(z^2 + 1)} = \frac{\cos \pi z}{(2z-1)(2z+1)(z-i)(z+i)}$$
$z = \frac{1}{2}: \quad m_1 = 1, m_2 = 1: \quad$ - усувна.
$z = -\frac{1}{2}: \quad m_1 = 1, m_2 = 1: \quad$ - усувна.
$z = i: \quad m_1 = 0, m_2 = 1: \quad$ полюс I порядку.
$z = -i: \quad m_1 = 0, m_2 = 1: \quad$ полюс I порядку.

(b) $$f(z) = \frac{1}{\cos z - 1}$$
$\cos z - 1 = 0, \quad \cos z = 1, \quad z_k = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ - нулі знаменика.
$(\cos z - 1)'\big|_{z_k} = -\sin(z_k) = -\sin(2\pi k) = 0, \quad z_k = 2\pi, k \in \mathbb{Z}ik$

$(\cos z - 1)''\big|_{z_k} = -\cos z_k = -1 \neq 0 \neq 1, \quad m_1 = 0, \quad m_2 = 2,$
m_1, m_2 - полюс II порядку.

(c) $f(z) = z^2 \sin\frac{1}{z} = z^2\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} + \dots\right) = z + \frac{1}{3!z} + \frac{1}{5!z^3} + \dots$
нескінченна кількість доданків в головній частині $\Longrightarrow z = 0$ - істотно особлива.

(d) $f(z) = \operatorname{tg}^2 2z = \frac{\sin^2 2z}{\cos^2 2z}$
$\cos^2 2z = 0, \quad z_k = \frac{\pi}{2}k + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}, \quad \sin(z_k) \neq 0, \qquad m_1 = 0, \quad m_2 = 2,$
$m_2 > m_1, \quad z_k$ - полюс II порядку.