Теорія функції комплексної змінної

Зміст

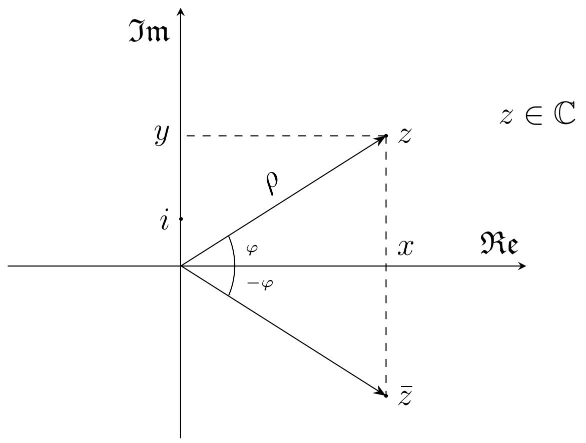
Частина 1

Комплексні числа та функції комплексної змінної

1.1 Основні поняття

$$\underset{\text{натуральні}}{\mathbb{N}} \subset \underset{\text{цілі}}{\mathbb{Z}} \subset \underset{\text{раціональні}}{\mathbb{Q}} \subset \underset{\text{дійсні}}{\mathbb{R}} \subset \underset{\text{комплексні}}{\mathbb{C}}$$

$(x, y) : x, y \in \mathbb{R}$ - пара дійсних чисел.



$$z = x + iy \text{ - алгебраїчна форма } z$$

Якщо $y = 0$, то $z = x \in \mathbb{R}$. $\mathfrak{Re} z = x$ - дійсна частина z. Якщо $x = 0$, то $z = iy$ - чисто уявне число. $\mathfrak{Im} z = y$ - уявна частина z. Значення $x, y \in \mathbb{R}$ - дійсні. Для $z = i : x = 0, y = 1, i$ - уявна одиниця. Якщо $z = x + iy$, то $\bar{z} = x - iy$ - спряжене до z. Нехай ρ, φ - полярні координати. Тоді модуль $z : |z| = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. $|z| \geq 0, \forall z \in \mathbb{C}$. Якщо $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$. φ - аргумент z (кут, утворений радіус-вектором, проведеним в точку z у додатньому напрямку з осі Ox).
Arg z - множина значень аргумента z. Arg $z = \arg z + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \arg z$ - головне значення аргумента. $\arg z = \varphi \in (-\pi, \pi]$

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \frac{x}{y}, x > 0 \quad (I, IV \text{ чв.}) \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, x < 0, y > 0 \quad (II \text{ чв.}) \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi, x < 0, y < 0 \quad (III \text{ чв.}) \end{cases}, \quad \arg z \text{ визначений для } z \neq 0!$$

$$z = \begin{vmatrix} x = |z| \cos\varphi \\ y = |z| \sin\varphi \end{vmatrix} = |z|(\cos\varphi + i \sin\varphi) \text{ - тригонометрична форма числа } z.$$

Теорема 1.1 (Формула Ойлера)**.**

$$e^{iy} = \cos\varphi + i\sin\varphi \quad (\varphi \in \mathbb{R})$$

Наслідок 1.1.
$z = |z|e^{i\varphi}$ *- показникова форма z.* $\bar{z} = |z|(\cos(-\varphi + i\sin(-\varphi)) = \underbrace{|z|(\cos\varphi - i\sin\varphi)}_{\text{не тригонометрична форма}}$.

$$\bar{z} = |z|e^{-i\varphi}$$

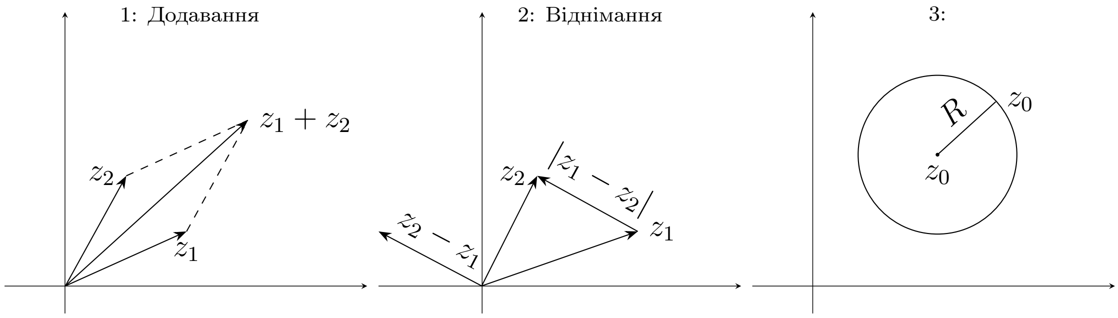
1.2 Операції над комплексними числами

1. Порівняння
   В комплексній області відношення " $>$ " чи $<$ не визначено. Числа порівнюють тільки за допомогою відношення " $=$ " або " $\neq$ ".

$$z_1 = z_2 \text{ у алгебраїчній формі } \iff \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$$

$$z_1 = z_2 \text{ у тригонометричній формі } \iff \begin{cases} |z_1| = |z_2| \\ \varphi = \varphi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

2. Додавання/Віднімання



$$1 : z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$2 : z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

$$2 : |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \text{ - відстань між } z_1, z_2$$

$$3 : |z - z_0| = R$$

3. Множення/ділення і підносення до степеню

def $\quad z_1 \cdot z_2 = \underbrace{x_1x_2 - y_1y_2}_{\Re z} + i\underbrace{(x_1y_2 + x_2y_1)}_{\Im z}$

Наслідок 1.2. *для* $z_1 = z_2 = i : i^2 = -1 \quad (x_1 = x_2 = 0, y_1 = y_2 = 1)$

Наслідок 1.3. $z_1 \cdot z_2 = x_1x_2 + i^2y_1y_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 = x_1(x_2+iy_2) + iy_1(x_2+iy_2) = (x_1+iy_1)(x_2+iy_2)$

Таким чином, комплексні числа перемножаються як звичайні і при цьому зберігаються усі формули скороченого множення.

def $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2} \cdot \dfrac{x_2-iy_2}{x_2-iy_2} = \dfrac{A+iB}{x_2^2+y_2^2} = X+iY$

def $z^n = (x+iy)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^k (iy)^{n-k}, \quad C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

$$\left[\begin{array}{l} i = i \\ i^2 = -1 \\ i^3 = -i \\ i^4 = i \\ i^5 = 1 \end{array}\right. \quad \dots \quad \left[\begin{array}{l} i^{4k} = 1 \\ i^{4k+1} = i \\ i^{4k+2} = -1 \\ i^{4k+3} = -i \end{array}\right.$$

4. Множення/ділення і підносення до степеню (в тригонометричнії і показниковій формі) $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Тоді у тригономтричній формі: $z_1 \cdot z_2 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + i^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2) = |z_1| \cdot |z_2| \cdot ((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2) = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)$

def $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$
$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \varphi = \varphi_1 + \varphi_2$

Наслідок 1.4. $z_1 = z, z_2 = \bar{z} \Rightarrow z \cdot \bar{z} = |z|^2(\cos 0 + i\sin 0) = |z|^2$

У показниковій формі(множення): $z_1 = |z_1| \cdot e^{i\varphi_1}, z_2 = |z_2| \cdot e^{i\varphi_2}$

def $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot e^{i(\varphi_! + \varphi_2)}$

У тригонометричній формі(ділення): $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} \cdot \dfrac{\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} \cdot \dfrac{(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} \cdot (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot (\cos(-\varphi_2) + i\sin(-\varphi_2))$

def $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2))), \quad \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}, \varphi = \varphi_1 - \varphi_2$

У показниковій формі(ділення):

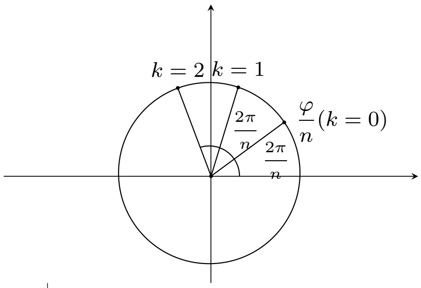
def $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} \cdot e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$

def $z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_{n \text{ разів}} = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = |z|^n \cdot e^{in\varphi}, \forall n \in \mathbb{Z}$

5. Винесення з під кореня $\sqrt[n]{z}$

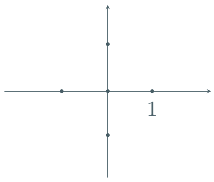
def $W = \sqrt[n]{z}$, якщо $W^n = z$.

Нехай обидва записані у тригонометричній формі: $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $W = |W|(\cos\psi + i\sin\psi), W^n = |W|^n(\cos n\psi + i\sin n\psi)$. Умова "=" в тригоно- -метричній формі: $W^n = z \Rightarrow \begin{cases} |W|^n = |z| \\ n\psi = \varphi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |W| = \sqrt[n]{|z|} \\ \psi = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$



$$\sqrt[n]{z} = W = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$$
$$k = 0, 1, \ldots, n-1$$
$$\psi_k = \frac{\varphi}{n} + 2\pi\frac{k}{n}, \quad \Delta\psi = \frac{2\pi}{n}$$

Приклад:



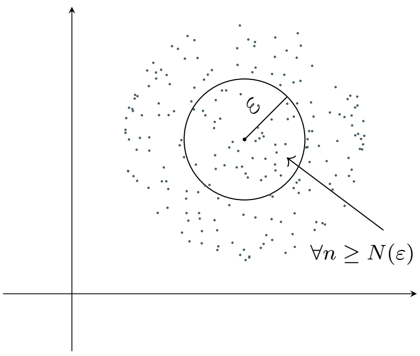
$$\sqrt[4]{1} = \Delta\varphi = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

1.3 Послідовності комплексних чисел

Послідовність комплексних чисел — це комплекснозначна функція натурального аргумента. $\{z_n\}$ - послідовність.

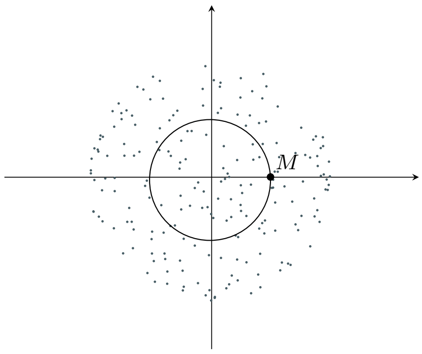
def $\quad n \in \mathbb{N} \to f(n) = z_n \in \mathbb{C}$

1.



$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0, z_0 \in \mathbb{C}$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall\varepsilon \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N(\varepsilon) \quad |z_n - z_0| < \varepsilon$$

2.



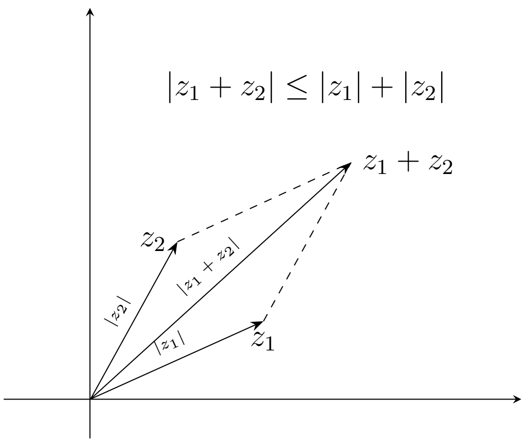
z_n - обмежена, якщо

$$\exists M > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |z_n| < M$$

Теорема 1.2.

Нехай $z_n = x_n + iy_n,$
$z_0 = x_0 + iy_0, \qquad (x_n, y_n, x_0, y_0 \in \mathbb{R})$

Тоді: $$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \iff \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0 \end{cases}$$



До доведення Теорема 1.2

Доведення.

a) *необхідність:*

Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$, *тобто* $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n \ge N(\varepsilon) \quad |z_n - z_0| < \varepsilon$

$$|z_n - z_0| = |(x_n + iy_n) - (x_0 + iy_0)| = |(x_n - x_0) + i(y_n - y_0)| \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \sqrt{(x_n - x_0)^2 + i(y_n - y_0)^2} < \varepsilon, \quad (x_n - x_0)^2 + i(y_n - y_0)^2 < \varepsilon^2 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} (x_n - x_0)^2 < \varepsilon^2 \\ (y_n - y_0)^2 < \varepsilon^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} |x_n - x_0| < \varepsilon \\ |y_n - y_0| < \varepsilon \end{cases} , \forall n \ge N(\varepsilon) \quad \iff$$

$$\iff \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0 \end{cases}$$

b) достатність:

Нехай $\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0 \end{cases}$ $\quad \forall\varepsilon > 0: \begin{array}{l} \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_1(\varepsilon) \quad |x_n - x_0| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_2(\varepsilon) \quad |y_n - y_0| < \frac{\varepsilon}{2} \end{array}$

$|z_n - z_0| = |(x_n + iy_n) - (x_0 + iy_0)| = |(x_n - x_0) + i(y_n - y_0)| \leq$

$\leq |x_n - x_0| + |i| \cdot |y_n - y_0| = |x_n - x_0| + |y_n - y_0| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

при $\forall n \geq \max(N_1, N_2) \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$

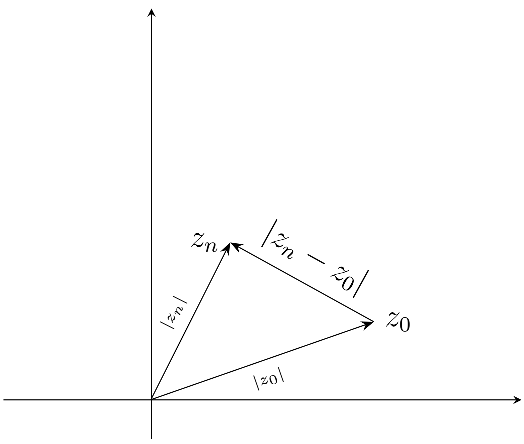
Твердження 1.1.

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \iff \lim_{n\to\infty} |z_n - z_0| = 0$$

Доведення.
$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N(\varepsilon) \quad |z_n - z_0| < \varepsilon.$ *Тоді:* $||z_n - z_0| - 0| = |z_n - z_0| < \varepsilon$

Теорема 1.3.

$$\textit{Якщо } \lim_{n\to\infty} z_n = z_0, \textit{ то } \lim_{n\to\infty} |z_n| = |z_0|$$



До доведення Теорема 1.3

Доведення.
Покажемо, що $\lim\limits_{n\to\infty} ||z_n| - |z_0|| = 0$ *(у зворотний бік невірно).*

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{Нерівність } \triangle \textit{ для } |z_n|: & |z_n| \leq |z_0| + |z_n - z_0| \\ & |z_n| - |z_0| \leq |z_n - z_0| \\ \textit{Нерівність } \triangle \textit{ для } |z\_0|: & |z_0| \leq |z_n| + |z_n - z_0| \\ & |z_0| - |z_n| \leq |z_n - z_0| \end{array}\right\} \Longrightarrow ||z_n| - |z_0|| \leq |z_n - z_0|$$

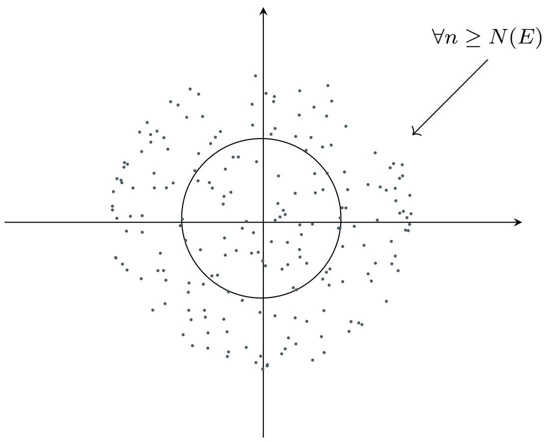
Окрім того, $0 \leq ||z_n| - |z_0|| \leq |z_n - z_0| \Longrightarrow (\lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0, \lim\limits_{n\to\infty} |z_n - z_0| = 0$ *- за умовою)* $\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} ||z_n| - |z_0|| = 0 \iff \lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = |z_0|$

Теорема 1.4.

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = |z_0| \\ \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi_0 \end{cases} \xRightarrow[\substack{z_n=|z_n|\cdot e^{i\varphi_n} \\ z_0=|z_0|\cdot e^{i\varphi_0}}]{} \lim_{n\to\infty} z_n = z_0$$

Доведення. *З арифметичних властивостей* $\lim z_n$

1.4 Розширена множина $\mathbb{C}$. Нескінченно віддалена точка.

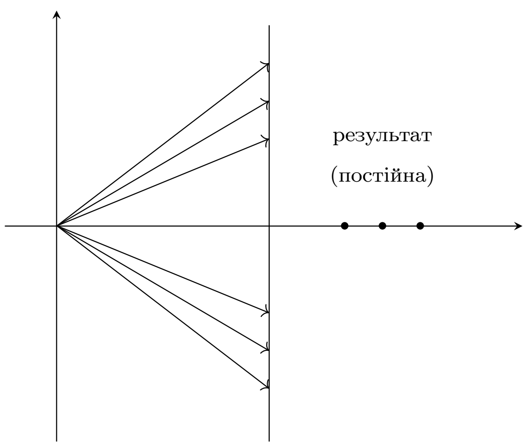


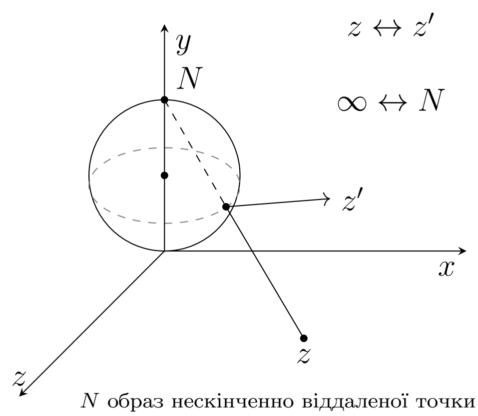
$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty \Leftrightarrow \forall E > 0 \quad \exists N(E) \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq N(E) \quad |z_n| > E$. Невласне комплексне число ∞: поняття дійсної та уявної частини, а також, аргумента - невизначені. $|\infty| = \infty$. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = +\infty$. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{z_n} = 0$

Операції над "∞" і $a \in \mathbb{C}$:

def "$\infty \pm a$" $= \infty$
def "$\infty \cdot a = \infty, \quad a \neq 0$"
def "$\dfrac{\infty}{a}$" $= \infty$
def "$\dfrac{a}{\infty}$" $= 0$
def "$\infty \cdot \infty$" $= \infty$

Невизначеності:
$0 \cdot \infty, \quad \dfrac{\infty}{\infty}, \quad \dfrac{0}{0}, \quad \infty + \infty, \quad \infty - \infty.$



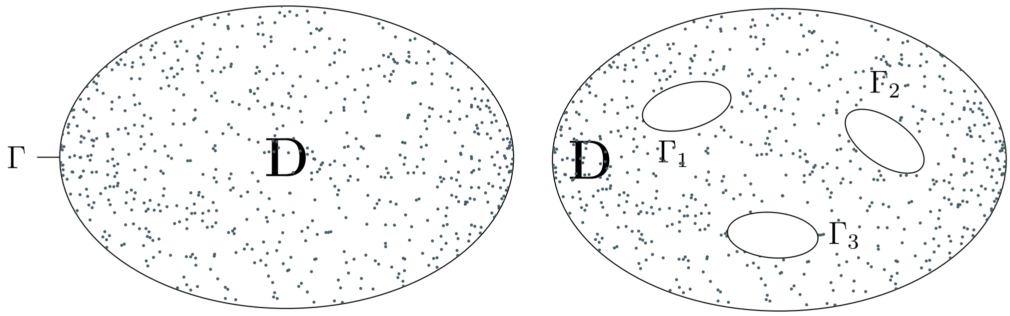


N образ нескінченно віддаленої точки

1.5 Множина на комплексній площині

Областю на комплексній площині називається множина точок, що володіє властивостями відкритості та зв'язності. Відкритість означає, що будь-яка точка множини належить їй разом з деяким околом. Зв'язність означає, що будь-які дві точки множини можна з'єднати лінією, що складається цілком з точок цієї ж множини. Точка, що сама не належить області, але будь-якій її окіл має в собі точки цієї області, називається граничною точкою області. Сукупність граничних точок області називається границею області.
Далі будемо вважати, що границя області може складатись із скінченого числа замкнутих ліній (контурів), незамкнутих ліній (розрізів) та окремих точок. Область називається обмеженою, якщо її можна укласти всередину деякого кола з центром у початку координат. Область разом з приєднаною до неї границею називається замкненою областю.

Позначення.
D, G - області. Γ, γ, L, l - границі області. $\overline{D} = D \cup \Gamma$ - замкнена область.



однозв'язна область n-зв'язна область

Порядком зв'язності області називається число зв'язних елементів її границі. Додатнім напрямком обходу границі рахуєьтся той, при котрому область залишається зліва.

2-зв'язна область не область

1.6 Поняття функції комплексної змінної

$z \xmapsto{f} W = f(z) \in \mathbb{C}, \quad z \in \mathbb{C}$

Приклад:

$$\left.\begin{array}{l} f(z) = \mathfrak{Re} z \\ f(z) = \mathfrak{Im} z \\ f(z) = |z| \end{array}\right\} \in \mathbb{R}, \text{ однозначні}$$

Приклад:

$$\left.\begin{matrix} f(z) = z^n \\ \bar{z} \end{matrix}\right\} \in \mathbb{C}, \text{ однозначні}$$

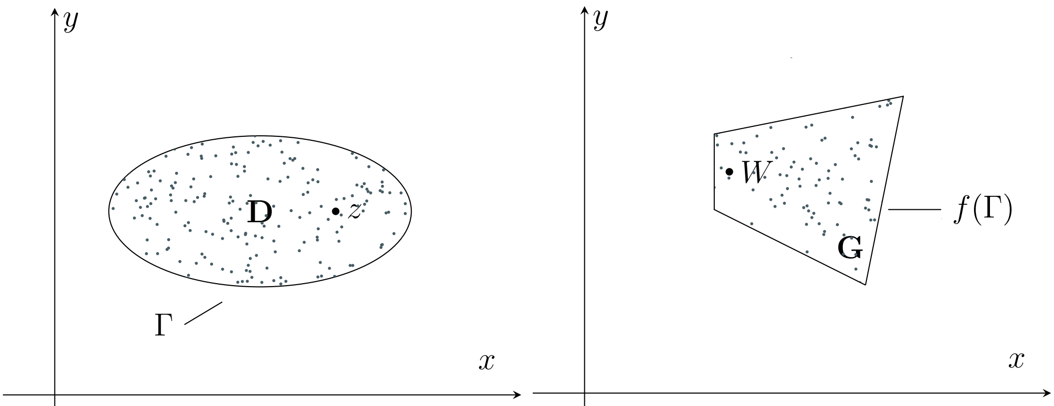
Приклад:

$f(z) = \mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ - многозначна(нескінченна кількість значень)

Приклад:

$f(z) = \sqrt[n]{z} \in \mathbb{C}$, - многозначна ($n$ - значна)

$W = f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \quad u, v \in \mathbb{R}$



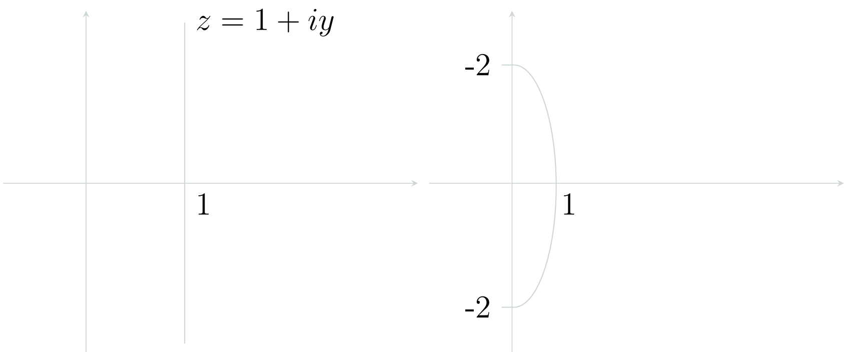
$z = x + iy, z \in D$ $\qquad$ $W \in G = f(D), W = f(z) = u + iv$

Приклад:

$\Gamma : x = 1, f(z) = z^2, f(\Gamma) - ?$

$z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy|_{x=1} = \underbrace{1 - y^2}_{u} + \underbrace{2iy}_{v}$

$y \in \mathbb{R} \Rightarrow v \in \mathbb{R}, y = \dfrac{v}{2} \Rightarrow u = 1 - \dfrac{v^2}{4}$



1.7 A