

Домашня робота 3

1. (a) $(\neg(Q \rightarrow (\neg((\neg P) \leftrightarrow (\neg R)))) \rightarrow (((\neg P) \vee Q) \vee R));$
 $(\neg(\mathbb{F} \rightarrow (\neg((\neg \mathbb{T}) \leftrightarrow (\neg \mathbb{T})))) \rightarrow (((\neg \mathbb{T}) \vee \mathbb{F}) \vee \mathbb{T}));$
 $(\neg(\mathbb{F} \rightarrow (\neg \mathbb{T})) \rightarrow (\mathbb{F} \vee \mathbb{T})); \quad \underbrace{((\neg \mathbb{T}) \rightarrow \mathbb{F})}_{\mathbb{T}}$

(b) $((P \vee (\neg((\neg S) \rightarrow (\neg R)))) \leftrightarrow ((\neg P) \rightarrow Q));$
 $((\mathbb{T} \vee (\neg((\neg \mathbb{F}) \rightarrow (\neg \mathbb{T})))) \leftrightarrow ((\neg \mathbb{T}) \rightarrow \mathbb{F}));$
 $((\mathbb{T} \vee (\neg \mathbb{F})) \leftrightarrow \mathbb{T}); \quad \underbrace{(\mathbb{T} \leftrightarrow \mathbb{T})}_{\mathbb{T}}$

2. (a) $A = P \wedge Q; B = (P \vee Q) \rightarrow (\neg P \rightarrow \neg Q)$

P	Q	$P \wedge Q$
\mathbb{T}	\mathbb{T}	\mathbb{T}
\mathbb{T}	\mathbb{F}	\mathbb{F}
\mathbb{F}	\mathbb{T}	\mathbb{F}
\mathbb{F}	\mathbb{F}	\mathbb{F}

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \vee Q$	$\neg P \vee \neg Q$	B
\mathbb{T}	\mathbb{T}	\mathbb{F}	\mathbb{F}	\mathbb{T}	\mathbb{T}	\mathbb{T}

\Rightarrow Якщо A приймає значення \mathbb{T} , то і B приймає значення \mathbb{T} .

(b) $A = P \vee Q; B = P \leftrightarrow Q$

P	Q	$P \vee Q$
\mathbb{T}	\mathbb{T}	\mathbb{T}
\mathbb{T}	\mathbb{F}	\mathbb{T}
\mathbb{F}	\mathbb{T}	\mathbb{T}
\mathbb{F}	\mathbb{F}	\mathbb{F}

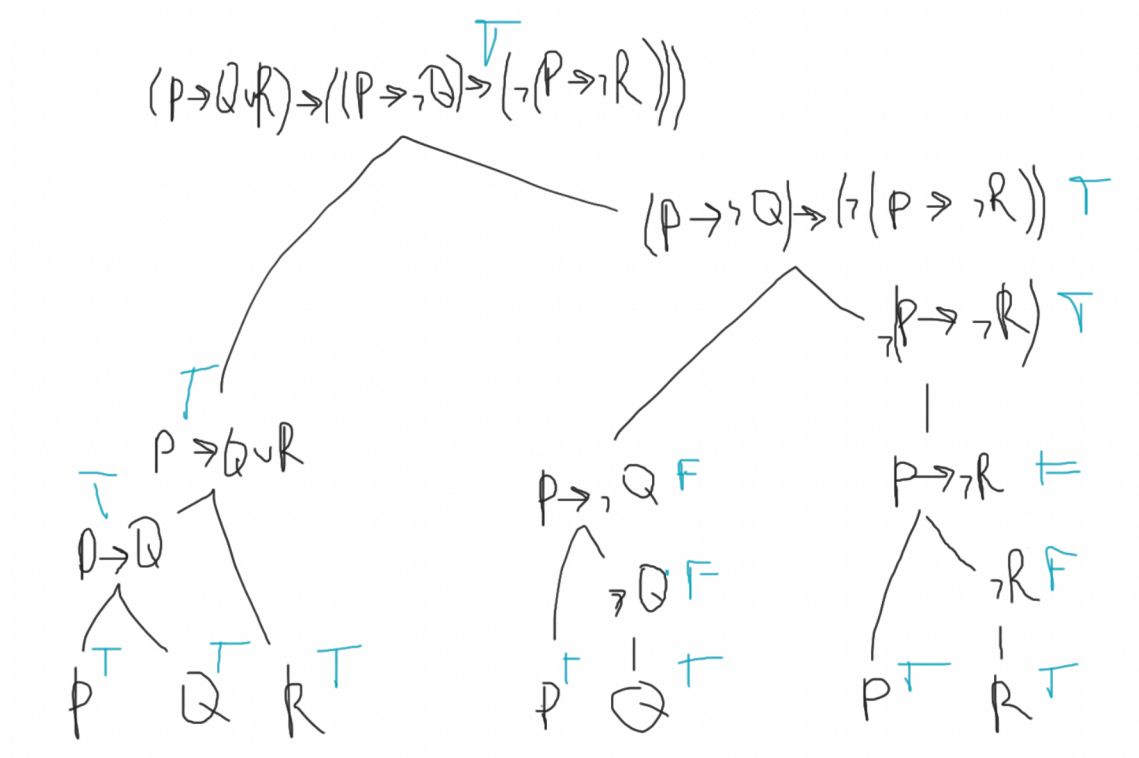
P	Q	$P \leftrightarrow Q$
\mathbb{T}	\mathbb{T}	\mathbb{T}
\mathbb{T}	\mathbb{F}	\mathbb{F}
\mathbb{F}	\mathbb{T}	\mathbb{F}

\Rightarrow нічого не можна сказати.

3. $((P \rightarrow Q) \vee R) \rightarrow \underbrace{((P \rightarrow (\neg Q)) \rightarrow (\neg(P \rightarrow (\neg R))))}_{=B} = A$

P	Q	R	$\neg Q$	$\neg R$	$P \rightarrow Q$	$P \rightarrow Q \vee R$	$P \rightarrow \neg Q$	$P \rightarrow \neg R$	$\neg(P \rightarrow \neg R)$	B	A
\mathbb{T}	\mathbb{T}	\mathbb{T}	\mathbb{F}	\mathbb{F}	\mathbb{T}	\mathbb{T}	\mathbb{F}	\mathbb{F}	\mathbb{T}	\mathbb{T}	\mathbb{T}
\mathbb{T}	\mathbb{T}	\mathbb{F}	\mathbb{F}	\mathbb{T}	\mathbb{T}	\mathbb{T}	\mathbb{F}	\mathbb{T}	\mathbb{F}	\mathbb{T}	\mathbb{T}
\mathbb{T}	\mathbb{F}	\mathbb{T}	\mathbb{T}	\mathbb{F}	\mathbb{F}	\mathbb{T}	\mathbb{T}	\mathbb{F}	\mathbb{T}	\mathbb{T}	\mathbb{T}
\mathbb{T}	\mathbb{F}	\mathbb{F}	\mathbb{T}	\mathbb{T}	\mathbb{F}	\mathbb{F}	\mathbb{T}	\mathbb{T}	\mathbb{F}	\mathbb{F}	\mathbb{T}
\mathbb{F}	\mathbb{T}	\mathbb{T}	\mathbb{F}	\mathbb{F}	\mathbb{T}	\mathbb{T}	\mathbb{T}	\mathbb{T}	\mathbb{F}	\mathbb{F}	\mathbb{F}
\mathbb{F}	\mathbb{T}	\mathbb{F}	\mathbb{F}	\mathbb{T}	\mathbb{T}	\mathbb{T}	\mathbb{T}	\mathbb{T}	\mathbb{F}	\mathbb{F}	\mathbb{F}
\mathbb{F}	\mathbb{F}	\mathbb{T}	\mathbb{T}	\mathbb{F}	\mathbb{T}	\mathbb{T}	\mathbb{T}	\mathbb{T}	\mathbb{F}	\mathbb{F}	\mathbb{F}
\mathbb{F}	\mathbb{F}	\mathbb{F}	\mathbb{T}	\mathbb{T}	\mathbb{T}	\mathbb{T}	\mathbb{T}	\mathbb{T}	\mathbb{F}	\mathbb{F}	\mathbb{F}

Моделі: $\{P, Q, R\}, \{P, \neg Q, R\}, \{P, Q, \neg R\}, \{P, \neg Q, \neg R\}$



5. (a) $(A \rightarrow (P \vee Q)) \rightarrow ((A \rightarrow P) \rightarrow Q)$

P	Q	A	$P \vee Q$	$A \rightarrow (P \vee Q)$	$(A \rightarrow P)$	$(A \rightarrow P) \rightarrow Q$	$(A \rightarrow (P \vee Q)) \rightarrow ((A \rightarrow P) \rightarrow Q)$
T	T	T	F	T	T	F	F
T	T	F	F	F	F	T	T
T	F	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	F	F
F	T	F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

P	Q	A_1
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

P	Q	A_2
T	T	F
T	F	F
F	T	T
F	F	T

P	Q	A_3
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

P	Q	A_4
T	T	F
T	F	F
F	T	F
F	F	T

(b) $((\neg P) \vee (\neg Q) \wedge A) \rightarrow (A \rightarrow (P \wedge Q)) = F$

P	Q	A	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$	$(\neg P \vee \neg Q) \wedge A$	$P \wedge Q$	$A \rightarrow (P \wedge Q)$	F
T	T	T	F	F	T	F	F	T	T
T	T	F	F	F	T	T	F	F	F
T	F	T	F	T	T	F	F	T	T
T	F	F	F	T	T	T	F	F	F
F	T	T	T	F	T	F	F	T	T
F	T	F	T	F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	F	F	T	T	T
F	F	F	T	T	F	T	T	T	T

P	Q	A_1
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	F

P	Q	A_2
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

P	Q	A_3
F	F	F
F	T	F
T	F	T
T	T	F

P	Q	A_1
F	F	F
F	T	F
T	F	T
T	T	T

6. (a) $\neg(P \vee Q) \models \neg P \vee Q$

P	Q	R	$P \vee Q$	$\neg(P \vee Q)$
T	T	T	T	F
T	T	F	T	F
T	F	T	T	F
T	F	F	T	F
F	T	T	T	F
F	T	F	T	F
F	F	T	F	T
F	F	F	F	T

P	Q	R	$\neg P$	$\neg P \vee R$
F	F	T	T	T
F	F	F	T	T

\Rightarrow логічне слідування є.

(b) $(P \wedge Q) \vee R \models P \vee (Q \rightarrow R)$

P	Q	R	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \vee R$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	T
T	F	T	F	T
T	F	F	F	F
F	T	T	F	T
F	T	F	F	F
F	F	T	F	T
F	F	F	F	F

P	Q	R	$Q \rightarrow R$	$P \vee (Q \rightarrow R)$
T	T	T	T	T
T	T	F	F	T
T	F	T	T	T
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

\Rightarrow логічне слідування є.

7. J - Джек вкрав. B - Боб вкрав. F - Фред вкрав. T - Том вкрав.

$Jack :$ $\neg T \rightarrow B$

$Bob :$ $\neg J \rightarrow T = \mathbb{F}$

$Fred :$ $\neg T \rightarrow J$

$Tom :$ $\neg B \rightarrow T$

$\neg T \rightarrow B$	$\neg J \rightarrow T$	$\neg T \rightarrow J$	$\neg B \rightarrow T$
\downarrow	\Downarrow	\downarrow	\downarrow
$B = \mathbb{T}$	$T = \mathbb{F}, J = \mathbb{F}$	$\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{F}$	$T = \mathbb{F}$
\Downarrow	\Downarrow	\Downarrow	\Downarrow
\mathbb{T}	\mathbb{F} (за умови)	\mathbb{F}	\mathbb{T}

\Rightarrow Можна зробити висновок, що Фред брехав, а Джек і Том казали правду.
До того ж можна зробити висновок, що машину вкрав Боб.

9. (a) Частковий порядок: рефлексивне, антисиметричне, транзитивне.

i. Рефлексивне: $A \models A$. Перевіримо за ТІ:

A	$A \rightarrow A$
\mathbb{T}	\mathbb{T}
\mathbb{F}	\mathbb{T}

ii. Антисиметричне: $B \models, A \models B \Rightarrow A = B$. Перевіримо за ТІ:

A	B	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow A$	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
\mathbb{T}	\mathbb{T}	\mathbb{T}	\mathbb{T}	\mathbb{T}
\mathbb{T}	\mathbb{F}	\mathbb{F}	\mathbb{T}	\mathbb{F}
\mathbb{F}	\mathbb{T}	\mathbb{T}	\mathbb{F}	\mathbb{F}
\mathbb{F}	\mathbb{F}	\mathbb{T}	\mathbb{T}	\mathbb{T}

iii. Транзитивне: $A \models B, B \models C \Rightarrow A \models C$. Перевіримо за ТІ:

A	B	C	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow C$	$A \rightarrow C$	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)$	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \wedge (A \rightarrow C)$
\mathbb{T}	\mathbb{T}	\mathbb{T}	\mathbb{T}	\mathbb{T}	\mathbb{T}	\mathbb{T}	\mathbb{T}
\mathbb{T}	\mathbb{T}	\mathbb{F}	\mathbb{T}	\mathbb{F}	\mathbb{F}	\mathbb{F}	\mathbb{F}
\mathbb{T}	\mathbb{F}	\mathbb{T}	\mathbb{F}	\mathbb{T}	\mathbb{T}	\mathbb{F}	\mathbb{F}
\mathbb{T}	\mathbb{F}	\mathbb{F}	\mathbb{F}	\mathbb{T}	\mathbb{F}	\mathbb{F}	\mathbb{F}
\mathbb{F}	\mathbb{T}	\mathbb{T}	\mathbb{T}	\mathbb{T}	\mathbb{T}	\mathbb{T}	\mathbb{T}
\mathbb{F}	\mathbb{T}	\mathbb{F}	\mathbb{T}	\mathbb{F}	\mathbb{F}	\mathbb{F}	\mathbb{F}
\mathbb{F}	\mathbb{F}	\mathbb{T}	\mathbb{T}	\mathbb{T}	\mathbb{T}	\mathbb{T}	\mathbb{T}
\mathbb{F}	\mathbb{F}	\mathbb{F}	\mathbb{T}	\mathbb{T}	\mathbb{T}	\mathbb{T}	\mathbb{T}

iv.

(b) Еквівалентність: рефлексивне, симетричне, транзитивне.

i. Рефлексивне: $A = A$ (очевидно)

ii. Симетричне: $A = B \Rightarrow B = A$

A	B	$A = B$	$B = A$	$(A = B) \wedge (B = A)$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	F
F	T	F	F	F
F	F	T	T	T

iii. Транзитивне: $A = B, B = C \Rightarrow A = C$

A	B	C	$A = B$	$B = C$	$A = C$	$(A = B) \wedge (B = C) \wedge (A = C)$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	F	F
F	T	F	F	F	T	F
F	F	T	T	F	F	F
F	F	F	T	T	T	T

10. $(P \vee R) \rightarrow (P \wedge Q) \models A$

P	R	Q	$P \vee R$	$P \wedge Q$	$(P \vee R) \rightarrow (P \wedge Q)$
T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F
T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	T	F	F
F	T	F	T	F	F
F	F	T	F	F	T
F	F	F	F	F	T

\Rightarrow при 4 інтерпритація $T \Rightarrow 2^4 = 16$

8.

$A \rightarrow C^{(ii)}$	$B \rightarrow D^{(i)}$	$C \leftrightarrow (A \wedge \neg D^{(iii)})$	$B \rightarrow (\neg C \vee \neg A)$	$\neg D \vee (C \wedge B)$														
\Downarrow	\Downarrow	\Downarrow	\Downarrow	\Downarrow														
<table><tr><td>$A = \mathbb{F}, C = \mathbb{F}$</td></tr><tr><td>$(iii) A = \mathbb{F}, C = \mathbb{T}$</td></tr><tr><td>$A = \mathbb{T}, C = \mathbb{T}$</td></tr></table>	$A = \mathbb{F}, C = \mathbb{F}$	$(iii) A = \mathbb{F}, C = \mathbb{T}$	$A = \mathbb{T}, C = \mathbb{T}$	<table><tr><td>$D = \mathbb{F}, C = \mathbb{F}, B = \mathbb{F}$</td></tr><tr><td>$(ii) D = \mathbb{T}, C = \mathbb{T}, B = \mathbb{T}$</td></tr><tr><td>$D = \mathbb{F}, C = \mathbb{T}, B = \mathbb{T}$</td></tr></table>	$D = \mathbb{F}, C = \mathbb{F}, B = \mathbb{F}$	$(ii) D = \mathbb{T}, C = \mathbb{T}, B = \mathbb{T}$	$D = \mathbb{F}, C = \mathbb{T}, B = \mathbb{T}$	<table><tr><td>$A = \mathbb{F}, C = \mathbb{F}, D = \mathbb{F}$</td></tr><tr><td>$A = \mathbb{T}, C = \mathbb{T}, D = \mathbb{T}$</td></tr></table>	$A = \mathbb{F}, C = \mathbb{F}, D = \mathbb{F}$	$A = \mathbb{T}, C = \mathbb{T}, D = \mathbb{T}$	<table><tr><td>усі окрім $A = \mathbb{T}, B = \mathbb{T}, C = \mathbb{T}$</td></tr></table>	усі окрім $A = \mathbb{T}, B = \mathbb{T}, C = \mathbb{T}$	<table><tr><td>$(iii) D = \mathbb{T}, C = \mathbb{T}, B = \mathbb{T}$</td></tr><tr><td>$(i) D = \mathbb{F}, C = \mathbb{T}, B = \mathbb{T}$</td></tr><tr><td>$D = \mathbb{F}, C = \mathbb{T}, B = \mathbb{F}$</td></tr><tr><td>$(i) D = \mathbb{F}, C = \mathbb{F}, B = \mathbb{T}$</td></tr><tr><td>$D = \mathbb{F}, C = \mathbb{F}, B = \mathbb{F}$</td></tr></table>	$(iii) D = \mathbb{T}, C = \mathbb{T}, B = \mathbb{T}$	$(i) D = \mathbb{F}, C = \mathbb{T}, B = \mathbb{T}$	$D = \mathbb{F}, C = \mathbb{T}, B = \mathbb{F}$	$(i) D = \mathbb{F}, C = \mathbb{F}, B = \mathbb{T}$	$D = \mathbb{F}, C = \mathbb{F}, B = \mathbb{F}$
$A = \mathbb{F}, C = \mathbb{F}$																		
$(iii) A = \mathbb{F}, C = \mathbb{T}$																		
$A = \mathbb{T}, C = \mathbb{T}$																		
$D = \mathbb{F}, C = \mathbb{F}, B = \mathbb{F}$																		
$(ii) D = \mathbb{T}, C = \mathbb{T}, B = \mathbb{T}$																		
$D = \mathbb{F}, C = \mathbb{T}, B = \mathbb{T}$																		
$A = \mathbb{F}, C = \mathbb{F}, D = \mathbb{F}$																		
$A = \mathbb{T}, C = \mathbb{T}, D = \mathbb{T}$																		
усі окрім $A = \mathbb{T}, B = \mathbb{T}, C = \mathbb{T}$																		
$(iii) D = \mathbb{T}, C = \mathbb{T}, B = \mathbb{T}$																		
$(i) D = \mathbb{F}, C = \mathbb{T}, B = \mathbb{T}$																		
$D = \mathbb{F}, C = \mathbb{T}, B = \mathbb{F}$																		
$(i) D = \mathbb{F}, C = \mathbb{F}, B = \mathbb{T}$																		
$D = \mathbb{F}, C = \mathbb{F}, B = \mathbb{F}$																		

\Rightarrow є інтерпритації при яких данна множина висловлювань є сумісною