Домашня робота 1

1.2(b) Довести, що $(n^2 + (n+1)^2) \mod 4 = 1$:

$n^2 + (n+1)^2 = 2n^2 + 2n + 1 = 2 \cdot n(n+1) + 1;\ \ 2n(n+1) \,\vdots\, 2 \Rightarrow n(n+1) \,\vdots\, 2?$

$n(n+1) \,\vdots\, 2$ як два послідовні натуральні числа $\Rightarrow 2n(n+1) \,\vdots\, 4 + 1$

$\Rightarrow (n^2 + (n+1)^2) \mod 4 = 1$

1.3(b) Довести, що $p^2 \mod 24 = 1,\ p \geq 5$: $(p+1)(p-1) \,\vdots\, 8$, p - просте$\Rightarrow p+1,\ p-1$ - парні $p \mod 3 = 1$ або $2 \Rightarrow$ або $p - 1 \,\vdots\, 3$, або $p + 1 \,\vdots\, 3 \Rightarrow (p+1)(p-1) \,\vdots\, 8 \cdot 3 \Rightarrow (p+1)(p-1) \,\vdots\, 24$

1.4(b) Довести, що числа виду $2^{4^n} - 5,\ n \geq 1$ закінчуються на 1:

1. $n = 1 :\ 2^{4^1} - 5 = 16 - 5 = 11$ - ok
2. Нехай умова виконуєтся для $n \Rightarrow 2^{4^n}$ - закінчується на 6.
   $(x \cdot 10 + 1 - 5 = (x-1)10 + 10 + 1 - 5 = (x-1)10 + 6)$
3. Доведемо для $n+1$:
   $2^{4^{n+1}} - 5 = 2^{4^n \cdot 4} = (\underbrace{2^{4^n}}_{\text{зак. на 6}})^4 - 5;$
   $2^{4^n} = 10 \cdot q + 6,\ q \in \mathbb{N}$
   $\left(2^{4^n}\right)^4 = 10000q^4 + 24000q^3 + 21600^2 + 8640q + 1290 + 6 =$
   $= 10\underbrace{(1000q^4 + 2400q^3 + 2160^2 + 864q + 129)}_{t \in \mathbb{N}} + 6$
   $\Rightarrow \left(2^{4^n}\right) + 5$ - закінчується на 1.

1.5 Знайти всі натуральні n такі, що $(1 + 2 + \cdots + n) \mod 5 = 1$.

Ариф. прог.: $a_n = 1 + (n-1) \cdot 1$

$(1 + 2 + \cdots + n) = S_n = \frac{n(2a_1 + (n-1)d}{2} = \frac{2n + n(n-1)}{2} \mod 5 = 1$

$\frac{2n + n^2 - n - 2}{2} \mod 5 = 0,\ n^2 + n - 2 \mod 5 = 0,\ n = \overline{0,4}$

$n = 1 :\quad 1 + 1 - 2 \mod 5 = 0 \mod 5 = 0$

$n = 2 :\quad 4 + 2 - 2 \mod 5 = 4 \mod 5 \neq 0$

$n = 3 :\quad 9 + 3 - 2 \mod 5 = 10 \mod 5 = 0$

$n = 4 :\quad 16 + 4 - 2 \mod 5 = 18 \mod 5 \neq 0$

Отже підходить $n = 1,\ n = 33$

1.6 Довести, що для всіх натуральних n виконуються такі співвідношення:

b) $10^n + 18n - 1 \,\vdots\, 27$

1. $n = 1 :\quad 10 + 18 - 1 = 27 \,\vdots\, 27$
2. Нехай $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = 10^n + 18n - 1 \,\vdots\, 27$
3. Для $n+1$:
   $x_{n+1} - x_n = 10^{n+1} + 18(n+1) - 1 - (10^n + 18n - 1) = 9 \cdot 10^n + 18 =$
   $= 9 \cdot (10^n + 2) \,\vdots\, 9,\qquad (10^n + 2) \,\vdots\, 3?\qquad 10^n + 2 = 100\ldots002 \Rightarrow$
   $\Rightarrow 1 + 0 + 0 + \cdots + 0 + 0 + 2 = 3 \,\vdots\, 3 \Rightarrow x_{n+1} \,\vdots\, 27$

c) $3^{2n+3} + 40n - 27 \,\vdots\, 64$

1. $n = 1 :\quad 3^{2+3} + 40 - 27 = 64 \cdot 4 \,\vdots\, 64$

2. Нехай $\forall n \in \mathbb{N},\ 3^{2n+3} + 40n - 27 \,\vdots\, 64$

3. Для $n+1:$ $\quad 3^{2(n+1)+3} + 40(n+1) - 27 = 9 \cdot (\underbrace{3^{2n+3}}_{64k} + 40n - 27) - 320n + 256 =$

$= 9 \cdot 64k - 320n + 256 = 576k - 320n + 256 = 64 \cdot (9k - 5n + 4) \,\vdots\, 64$

d) $n(n^2+5) \,\vdots\, 6$

1. $n = 1:$ $\quad 1(1+5) = 6 \,\vdots\, 6$

2. Нехай $\forall n \in \mathbb{N},\ n(n^2+5) \,\vdots\, 6$

3. Для $n+1:$
$(n+1)((n+1)^2+5) = \underbrace{n(n^2+5)}_{6k} + 3n^2 + 3n + 6 = 6(k + \frac{n(n+1))}{2} + 1)$

$\frac{n(n+1)}{2}$ - ціле, бо $n(n+1) \,\vdots\, 2 \Rightarrow 6(k + \frac{n(n+1))}{2} + 1) \,\vdots\, 6$

1.7(b) Довести $n = n_0 + 10n_1 + \cdots + 10^k n_k,\ S(n) = n_0 + n_1 + \cdots + n_k$

if $S(a) = S(b) \Rightarrow a - b \,\vdots\, 9$

$a - S(a) \,\vdots\, 9,\ b - S(b) \,\vdots\, 9 \Rightarrow a - S(a) - (b - S(b)) \,\vdots\, 9 \underline{=} a - b \,\vdots\, 9$

1.8 Довести $a,\ b$ - непарні натуральні $\Rightarrow \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} \,\vdots\, 2,\ \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} \,\vdots\, 4$

Нехай $a = 2n + 1,\ b = 2k + 1 \Rightarrow \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} = \frac{(2k+1)^2-(2n+1)^2}{(2k+1)^2+(2n+1)^2} = \frac{2(n^2+n-k^2-k)}{2(n^2+n-k^2-k)+1} \,\vdots\, 2$

$\frac{n^2+n-k^2-k}{2(n^2+n-k^2-k)+1} \,\vdots\, 2(2(n^2+n-k^2-k)+1$ - не парне$)\Rightarrow \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} \,\vdots\, 2,\ \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} \,\vdots\, 4$

1.9 Довести $n = k + 10k + \cdots + 10^{3^k} k \,\vdots\, 3^k$

1. $k = 1:$ $\quad n = 1 + 10 + 100 + 1000 = 1111 \,\vdots\, 1$

2. Нехай $n_k = \sum_{i=1}^{3^k} 10^{i-1},\ n \,\vdots\, 3^k$

3. Для $k+1:$
$n_1 + n_2 10^{3^k} + \cdots + n_k 10^{2\cdot 3^k} = \underbrace{1 + 10 + \cdots + 10^{3^k-1}}_{n} + 10^{3^k}(1 + 10 + \cdots + 10^{3^k-1}) \,\vdots\, 10^{3^k} +$

$+ 10^{2\cdot 3^k}(1 + 10 + \cdots + 10^{3^k-1}) \,\vdots\, 10^{3^k}$

1.10 Довести, що сума $2n+1$ послідовних натуральних чисел поділяються на $2n+1$

Почнемо з якогось $a \Rightarrow a,\ a+1,\ \ldots,\ a+2n \Rightarrow S(a_n) = (2n+1)a + \frac{2n(2n+1)}{2} =$

$= (2n+1)(a+n) \,\vdots\, (2n+1)$

1.12(b) $a,\ b \in \mathbb{Z}$. Довети $2a - b \,\vdots\, 11 \Rightarrow 51a - 8b \,\vdots\, 11$

Контрприклад: $a = 20,\ b = 7 \Rightarrow 2 \cdot 20 - 7 = 33 \,\vdots\, 11,\ 51 \cdot 20 - 8 \cdot 7 = 964 \,\overline{\vdots}\, 11$