1. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{4n+3}\right)^{n^2}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n}{4n+3}\right)^{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{4n+3}\right)^{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{4+\frac{3}{n}}\right)^{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0<1$
$\Rightarrow$ ряд збіжний

(b) $\sum\limits_{n=4}^{\infty}\frac{n+1}{(5n^2-9)\ln(n-2)}$

$\int\limits_4^{\infty}\frac{\mathbf{d}x}{(x-2)\ln(x-2)}=\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_4^{b}\frac{\mathbf{d}x}{(x-2)\ln(x-2)}=|t=\ln(x-2)|=\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_{\ln 2}^{\ln(b-2)}\frac{\mathbf{d}t}{t}=$

$=\lim\limits_{b\to\infty}\ln|t|\Big|_{\ln 2}^{\ln(b-2)}=\lim\limits_{b\to\infty}\ln\ln\left(\frac{b}{2}-1\right)=\infty\Rightarrow$ ряд розбіжний

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n^7+4n^2+5}}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{n^2}{\sqrt{n^7+4n^2+5}}}{\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^{\frac{7}{2}}}{\sqrt{n^7+4n^2+5}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4}{n^5}+\frac{5}{n^7}}}\right)=1$
$\Rightarrow$ ряд збіжний

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+2n+\ln n}{n^5+ne^n+3n}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{3(n+1)^2+2(n+1)+\ln(n+1)}{(n+1)^5+(n+1)e^(n+1)+3(n+1)}}{\frac{3n^2+2n+\ln n}{n^5+ne^n+3n}}=\frac{1}{e}$
$\Rightarrow$ ряд збіжний

(e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$

$n\to\infty:\qquad \sqrt{n}\to\infty$

$\frac{1}{n}\to 0$

$\cos\frac{1}{n}\to 1$

$\sqrt{n}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)\to$ невизначено

$\Rightarrow$ ряд розбіжний

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin 3^n}{3^n},\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin 3^n|}{3^n}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ - збіжний при $q=\frac{1}{3}<1,|\sin 3^n|\leq 1\Rightarrow\frac{|\sin 3^n|}{3^n}\leq\frac{1}{3^n}\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin 3^n|}{3^n}$ - збіжний

$\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin 3^n}{3^n}$ - також збіжний

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(4n-1)2^n}(x+2)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n t^n, a_n = \dfrac{(-1)^n}{4n-1}, t = \dfrac{x+2}{2}$

$$a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{4n}, \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{4n}}{\frac{(-1)^n}{4n-1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| -\frac{4n-1}{4n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| -\frac{4-\frac{1}{n}}{4} \right| = 1 \Rightarrow t \in (-1,1)$$

$t = 1 : \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{4n-1}$ - збіжний, $t = -1 : \sum\limits_{n=1}^{\infty} -\dfrac{(-1)^n}{4n-1}$ - умовно збіжний $\Rightarrow t \in [-1,1)$

$-1 < \left(\dfrac{x+2}{2}\right) \leq 1 \Rightarrow x \in (-4, 0]$

Область збіжності: $x \in [-4, 0]$

4. $f(x) = 1 + \cos 3x$

$f'(x) = -3\sin 3x$

$f''(x) = -9\cos 3x$

$f'''(x) = 27\sin 3x$

$f^{IV}(x) = 81\cos 3x$

$$f(x) = 1 + \cos 3x = 2 + 0 + \frac{-9}{2}x^2 + 0 + \frac{81}{8}x^4 + \dots = 2 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{81}{8}x^4 + \dots$$

5. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n}{n^2+15}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{(n+1)^2+15}}{\frac{(-1)^n n}{n^2+15}} = \lim_{n\to\infty} -\frac{n^3+n^2+15n+15}{n^3+2n^2+16n} = -1$$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n \cos n}{n!}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}\cos(n+1)}{(n+1)!}}{\frac{2^n \cos n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cos(n+1)}{(n+1)\cos n} = 0 \Rightarrow \text{ряд збіжний}$$