Домашня робота 4

1. $W = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$, $\cup := \mathrm{lcm}$, $\cap := \gcd$, $^{-} := \frac{30}{x}$, $x \in W$, $0 := 1$, $1 := 30$

   $(\mathcal{B}_2)$ $x \cup y = y \cup x \; - \; \mathrm{lcm}(x,\ y) = \mathrm{lcm}(y,\ x)$

   $m_1 = \mathrm{lcm}(x,\ y) \Leftrightarrow m_1 \,\vdots\, x,\ m_1 \,\vdots\, y,\ m_1 \; - \; \min$ таке число

   $m_2 = \mathrm{lcm}(y,\ x) \Leftrightarrow m_2 \,\vdots\, y,\ m_2 \,\vdots\, x,\ m_1 \; - \; \min$ таке число
   $\Rightarrow m_1 = m_2$

   $(\mathcal{B}_2')$ $x \cap y = y \cap x \; - \; \gcd(x,\ y) = \gcd(x,\ y)$

   $M_1 = \gcd(x,\ y) \Leftrightarrow x \,\vdots\, M_1,\ y \,\vdots\, M_1,\ M_1 \; - \; \max$ таке число

   $M_2 = \gcd(y,\ x) \Leftrightarrow y \,\vdots\, M_2,\ x \,\vdots\, M_2,\ M_2 \; - \; \max$ таке число
   $\Rightarrow M_1 = M_2$

   $(\mathcal{B}_5)$ $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (y \cup z) \; - \; \mathrm{lcm}(x,\ \gcd(y,\ z)) = \gcd(\mathrm{lcm}(x,\ y),\ \mathrm{lcm}(y,\ z)))$
   p - просте, $p_x = p_1^{x_1} \dots p_n^{x_n}$, $p_y = p_1^{y_1} \dots p_n^{y_n}$, $p_z = p_1^{z_1} \dots p_n^{z_n}$
   $\max(p_x,\ \min(p_y,\ p_z)) = \min(\max(p_x,\ p_y),\ \max(p_y,\ p_z))$
   $$\begin{cases} \min(p_y,\ p_z) = \min(p_z,\ p_y), & p_x < p_y p_z \\ p_z = p_z, & p_x > p_y p_z \end{cases} \Rightarrow \mathrm{lcm}(x, \gcd(y, z)) = \gcd(\mathrm{lcm}(x, y), \mathrm{lcm}(y, z)))$$

   $(\mathcal{B}_5')$ $x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (y \cap z) \; - \; \gcd(x,\ \mathrm{lcm}(y,\ z)) = \mathrm{lcm}(\gcd(x,\ y),\ \gcd(y,\ z)))$
   p - просте, $p_x = p_1^{x_1} \dots p_n^{x_n}$, $p_y = p_1^{y_1} \dots p_n^{y_n}$, $p_z = p_1^{z_1} \dots p_n^{z_n}$
   $\min(p_x,\ \max(p_y,\ p_z)) = \max(\min(p_x,\ p_y),\ \min(p_y,\ p_z))$
   $$\begin{cases} \max(p_y,\ p_z) = \max(p_y,\ p_z), & p_x > p_y p_z \\ p_x = p_x, & p_x < p_y p_z \end{cases}$$

   $(\mathcal{B}_7)$ $x \cup 0 = x \; - \; \mathrm{lcm}(x,\ 1) = 1$

   $\forall x \in \mathbb{N}_0 :\ x \,\vdots\, 1.\ m = \mathrm{lcm}(x,\ 1) \Leftrightarrow m \,\vdots\, x,\ m \,\vdots\, 1,\ m \; - \; \min$ таке число
   $\Rightarrow m = 1$

   $(\mathcal{B}_7')$ $x \cap 1 = x \; - \; \gcd(x,\ 30) = x$

   $\forall x \in W :\ 30 \,\vdots\, x(\frac{30}{1} = 1,\ \frac{30}{2} = 15, \frac{30}{3} = 10,\ \frac{30}{5} = 6)$

   $(\mathcal{B}_8)$ $x \cup \overline{x} = 1 \; - \; \mathrm{lcm}(x,\ \frac{30}{x}) = 30$
   x та $\frac{30}{x}$ - взаємнопрості $\Rightarrow \mathrm{lcm}(x,\ \frac{30}{x}) = x \cdot \frac{30}{x} = 30$

   $(\mathcal{B}_8')$ $x \cap \overline{x} = 0 \; - \; \gcd(x,\ \frac{30}{x}) = 1$
   $\gcd(1,\ \frac{30}{1}) = 1,\ \gcd(2,\ \frac{30}{2}) = 1,\ \gcd(3,\ \frac{30}{3}) = 1,\ \gcd(5,\ \frac{30}{5}) = 1$

   $W_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
   $(\mathcal{B}_2)$, $(\mathcal{B}_2')$, $(\mathcal{B}_5)$, $(\mathcal{B}_5')$ - справедливі $\forall W_n \subset \mathbb{N}$
   $(\mathcal{B}_7)$, $(\mathcal{B}_8)$ - справедливі для W_{12}, так як і у W, і у W_{12} $0 := \min\{\} = 1$
   $1 := \max\{W_{12}\} = 12$

   $(\mathcal{B}_7')$ $x \cap 1 \; - \; \gcd(x,\ 12) = x$

   $\forall x \in W_{12} :\ x \,\vdots\, 12(\frac{12}{1} = 12,\ \frac{12}{2} = 6,\ \frac{12}{3} = 4)$

   $(\mathcal{B}_8')$ $x \cap \overline{x} = 0 \; - \; \gcd(x,\ \frac{12}{x}) = 1$
   $\gcd(1,\ \frac{12}{1}) = 1,\ \gcd(2,\ \frac{12}{2}) = 1,\ \gcd(3,\ \frac{12}{3}) = 1$

2. (a) $(\overline{x} \cup \overline{y}) \cap (\overline{x} \cup y) = \overline{x} \cup (\overline{y} \cap y) = \overline{x} \cup 0 = \overline{x}$

   (b) $x \cup y \cup \overline{x \cap y} = x \cup y \cup \overline{x} \cup \overline{y} = 1 \cup 1 = 1$

   (c) $(\omega \cup \overline{x} \cup y \cup z) \cap y = ((\omega \cup \overline{x} \cup z) \cup y) \cap y = y$

   (d) $\overline{\overline{x} \cup \overline{x}} = x \cap x = x$

(e) $\overline{\omega} \cap \overline{(x \cap y \cap z \cap \omega)} = \overline{\omega} \cap ((\overline{x} \cup \overline{y} \cup \overline{z}) \cup \overline{\omega}) = \overline{\omega}$

(f) $\overline{x} \cup \overline{y} \cup (x \cap y \cap \overline{z}) =$

3. (a) $(\overline{x} \cap y) \cup (\overline{y} \cap z) \cup (\overline{x} \cap z) = (\overline{x} \cap y) \cup (\overline{y} \cap z)$
$(\overline{x} \cap y) \cup (\overline{y} \cap z) \cup (\overline{x} \cap z) = (\overline{x} \cap y) \cup (\overline{y} \cap z) \cup ((\overline{x} \cap y \cap z) \cup (\overline{x} \cap \overline{y} \cap z) =$
$= ((\overline{x} \cap y) \cup (\overline{x} \cap z)) \cap ((\overline{y} \cap z) \cup (\overline{y} \cap z) \cup \overline{z}) = (\overline{x} \cap y) \cup (\overline{y} \cap z)$

(b) $(\overline{x} \cap y) \cup (x \cap z) = (x \cap z) \cup (z \cap y) \cup (\overline{x} \cap \overline{z} \cap y)$
$(x \cap z) \cup (z \cap y) \cup (\overline{x} \cap \overline{z} \cap y) = (x \cap z) \cup (y \cap (z \cup \overline{x} \cap \overline{z})) = (x \cap z) \cup (y \cap (0 \cup \overline{x})) =$
$= (x \cap z) \cup (y \cap \overline{x})$

(c) $(x \cap \overline{z}) \cup (\overline{x} \cap \overline{y}) \cup (\overline{x} \cap z) \cup (\overline{y} \cap z) = \overline{y} \cup (\overline{x} \cap z) \cup (x \cap \overline{z})$
$(x \cap \overline{z}) \cup (\overline{x} \cap \overline{y}) \cup (\overline{x} \cap z) \cup (\overline{y} \cap z) = (x \cap \overline{z}) \cup (z \cap (\overline{x} \cup \overline{y})) \cup (\overline{x} \cap \overline{y}) =$
$= (x \cap \overline{z}) \cup (z \cap \overline{x} \cup (\overline{y} \cup (\overline{x} \cap \overline{y}))) = (x \cap \overline{z}) \cup (z \cap \overline{x}) \cup \overline{y} = \overline{y} \cup (\overline{x} \cap z) \cup (x \cap \overline{z})$

(d) $(\overline{x} \cap \overline{z}) \cup (y \cap \overline{z}) \cup (x \cap \overline{y})$

4. Обмежена решітка з доповненням, що є дистрибутивною - булева алгебра.
Нехай x елмент цієї решітки, а y, z - його доповнення. Доведемо, що $y = z$.
$y = y \cap 1,\ 1 = x \cup z,\ y \cap x = 0 \Rightarrow y = y \cap (x \cup z) = (y \cap x) \cup (y \cap z) = 0 \cup (y \cap z) = y \cap z$
Те сам для $z:\ z = z \cap y. \begin{cases} y = y \cap z \\ z = z \cap y \end{cases} \Rightarrow y = z$

5. $W = \{x,\ y,\ z\},\ (W, \cap, \cup, \bar{\ }, 0,\ 1)$
$x \cap (y \cup z) = x \cap 1 = x \neq 0 = 0 \cup 0 = (x \cap y) \cup (x \cap z)$