Теорія функції комплексної змінної

Зміст

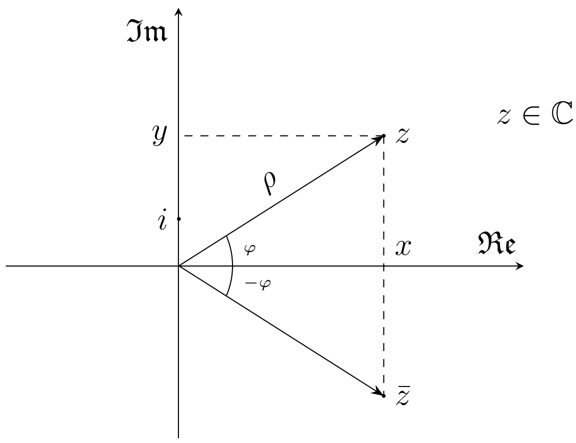
Частина 1

Комплексні числа та функції комплексної змінної

1.1 Основні поняття

$$\underset{\text{натуральні}}{\mathbb{N}} \subset \underset{\text{цілі}}{\mathbb{Z}} \subset \underset{\text{раціональні}}{\mathbb{Q}} \subset \underset{\text{дійсні}}{\mathbb{R}} \subset \underset{\text{комплексні}}{\mathbb{C}}$$

$(x, y) : x, y \in \mathbb{R}$ - пара дійсних чисел.



$$z = x + iy \text{ - алгебраїчна форма } z$$

Якщо $y = 0$, то $z = x \in \mathbb{R}$. $\mathfrak{Re} z = x$ - дійсна частина z. Якщо $x = 0$, то $z = iy$ - чисто уявне число. $\mathfrak{Im} z = y$ - уявна частина z. Значення $x, y \in \mathbb{R}$ - дійсні. Для $z = i : x = 0, y = 1, i$ - уявна одиниця. Якщо $z = x + iy$, то $\bar{z} = x - iy$ - спряжене до z. Нехай ρ, φ - полярні координати. Тоді модуль $z : |z| = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. $|z| \geq 0, \forall z \in \mathbb{C}$. Якщо $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$. φ - аргумент z (кут, утворений радіус-вектором, проведеним в точку z у додатньому напрямку з осі Ox).
Arg z - множина значень аргумента z. Arg $z = \arg z + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \arg z$ - головне значення аргумента. $\arg z = \varphi \in (-\pi, \pi]$

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \frac{x}{y}, x > 0 \quad (I, IV \text{ чв.}) \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, x < 0, y > 0 \quad (II \text{ чв.}) \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi, x < 0, y < 0 \quad (III \text{ чв.}) \end{cases} \quad , \quad \arg z \text{ визначений для } z \neq 0!$$

$$z = \begin{vmatrix} x = |z| \cos \varphi \\ y = |z| \sin \varphi \end{vmatrix} = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) \text{ - тригонометрична форма числа } z.$$

Теорема 1.1 (Формула Ойлера)**.**

$$e^{iy} = \cos\varphi + i\sin\varphi \quad (\varphi \in \mathbb{R})$$

Наслідок 1.1.
$z = |z|e^{i\varphi}$ *- показникова форма* z*.* $\bar{z} = |z|(\cos(-\varphi + i\sin(-\varphi)) = \underbrace{|z|(\cos\varphi - i\sin\varphi)}_{\text{не тригонометрична форма}}$.

$$\bar{z} = |z|e^{-i\varphi}$$

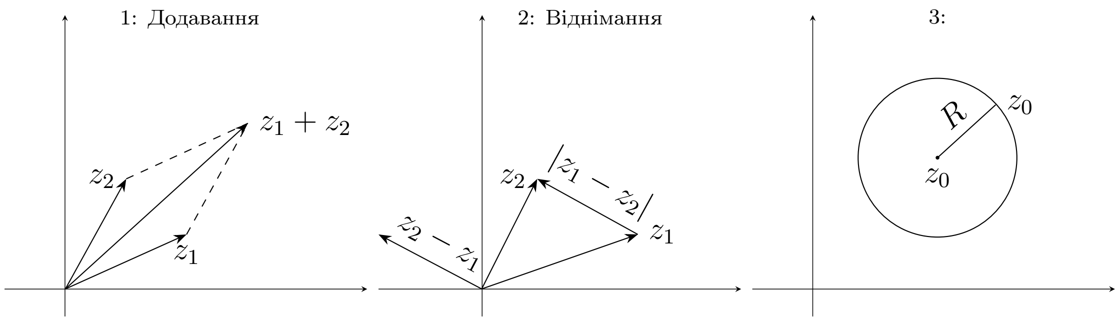
1.2 Операції над комплексними числами

1. Порівняння
   В комплексній області відношення " $>$ " чи $<$ не визначено. Числа порівнюють тільки за допомогою відношення " $=$ " або " $\neq$ ".

$$z_1 = z_2 \text{ у алгебраїчній формі} \iff \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$$

$$z_1 = z_2 \text{ у тригонометричній формі} \iff \begin{cases} |z_1| = |z_2| \\ \varphi = \varphi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

2. Додавання/Віднімання



$$1 : z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$2 : z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

$$2 : |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \text{ - відстань між } z_1, z_2$$

$$3 : |z - z_0| = R$$

3. Множення/ділення і підносення до степеню

def $\quad z_1 \cdot z_2 = \underbrace{x_1x_2 - y_1y_2}_{\Re z} + i\underbrace{(x_1y_2 + x_2y_1)}_{\Im z}$

Наслідок 1.2. *для* $z_1 = z_2 = i : i^2 = -1 \quad (x_1 = x_2 = 0, y_1 = y_2 = 1)$

Наслідок 1.3. $z_1 \cdot z_2 = x_1x_2 + i^2y_1y_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 = x_1(x_2+iy_2) + iy_1(x_2+iy_2) = (x_1+iy_1)(x_2+iy_2)$

Таким чином, комплексні числа перемножаються як звичайні і при цьому зберігаються усі формули скороченого множення.

def $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2} \cdot \frac{x_2-iy_2}{x_2-iy_2} = \frac{A+iB}{x_2^2+y_2^2} = X+iY$

def $z^n = (x+iy)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^k (iy)^{n-k}, \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$$\left[\begin{array}{l} i=i \\ i^2=-1 \\ i^3=-i \\ i^4=i \\ i^5=1 \end{array}\right. \quad \dots \quad \left[\begin{array}{l} i^{4k}=1 \\ i^{4k+1}=i \\ i^{4k+2}=-1 \\ i^{4k+3}=-i \end{array}\right.$$

4. Множення/ділення і підносення до степеню (в тригонометричнії і показниковій формі) $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Тоді у тригономтричній формі: $z_1 \cdot z_2 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot|z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = |z_1|\cdot|z_2|\cdot(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + i^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2) = |z_1|\cdot|z_2|\cdot((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2) = |z_1|\cdot|z_2|\cdot(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)$

def $z_1 \cdot z_2 = |z_1|\cdot|z_2|\cdot(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$
$|z_1\cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2|, \varphi = \varphi_1+\varphi_2$

Наслідок 1.4. $z_1 = z, z_2 = \bar{z} \Rightarrow z\cdot\bar{z} = |z|^2(\cos 0 + i\sin 0) = |z|^2$

У показниковій формі(множення): $z_1 = |z_1|\cdot e^{i\varphi_1}, z_2 = |z_2|\cdot e^{i\varphi_2}$

def $z_1\cdot z_2 = |z_1|\cdot|z_2|\cdot e^{i(\varphi_! + \varphi_2)}$

У тригонометричній формі(ділення): $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\cdot\frac{\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\cdot \frac{(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot(\cos(-\varphi_2) + i\sin(-\varphi_2))$

def $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2))), \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \varphi = \varphi_1 - \varphi_2$

У показниковій формі(ділення):

def $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\cdot e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$

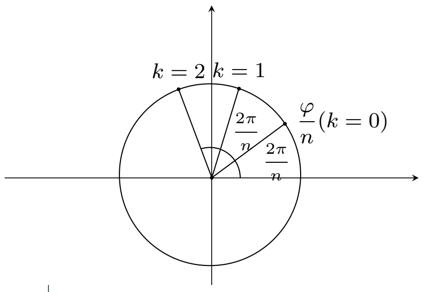
def $z^n = \underbrace{z\cdot z\cdot z\cdot\dots\cdot z}_{n \text{ разів}} = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = |z|^n\cdot e^{in\varphi}, \forall n\in\mathbb{Z}$

5. Винесення з під кореня $\sqrt[n]{z}$

def $W = \sqrt[n]{z}$, якщо $W^n = z$.

Нехай обидва записані у тригонометричній формі: $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $W = |W|(\cos\psi + i\sin\psi), W^n = |W|^n(\cos n\psi + i\sin n\psi)$. Умова "=" в тригоно-

-метричній формі: $W^n = z \Rightarrow \begin{cases} |W|^n = |z| \\ n\psi = \varphi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |W| = \sqrt[n]{|z|} \\ \psi = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

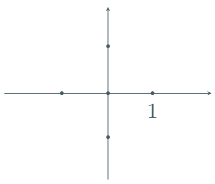


$$\sqrt[n]{z} = W = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$$

$k = 0, 1, \ldots, n-1$

$$\psi_k = \frac{\varphi}{n} + 2\pi\frac{k}{n}, \quad \Delta\psi = \frac{2\pi}{n}$$

Приклад:



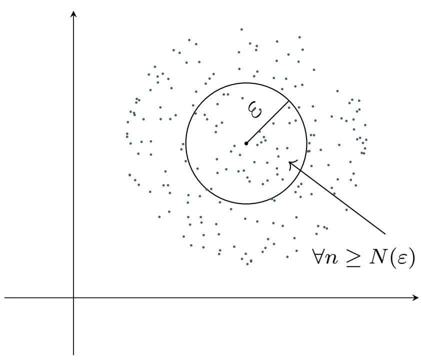
$$\sqrt[4]{1} = \Delta\varphi = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

1.3 Послідовності комплексних чисел

Послідовність комплексних чисел — це комплекснозначна функція натурального аргумента. $\{z_n\}$ - послідовність.

def $n \in \mathbb{N} \to f(n) = z_n \in \mathbb{C}$

1.

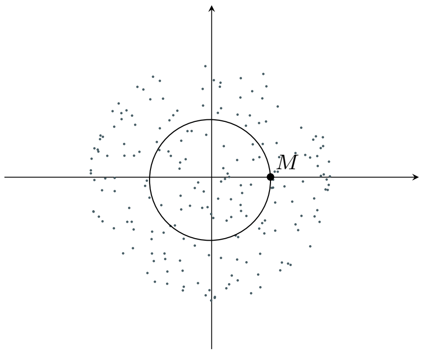


$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0, z_0 \in \mathbb{C}$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall\varepsilon \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N(\varepsilon) \quad |z_n - z_0| < \varepsilon$$

2.



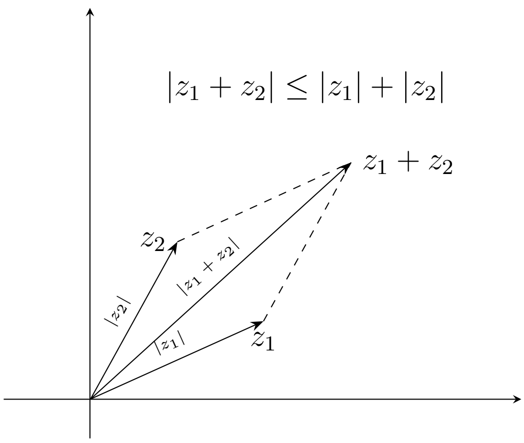
z_n - обмежена, якщо

$$\exists M > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |z_n| < M$$

Теорема 1.2.

Нехай $z_n = x_n + iy_n,$
$z_0 = x_0 + iy_0,$ $\qquad (x_n, y_n, x_0, y_0 \in \mathbb{R})$

Тоді: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0 \iff \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0 \end{cases}$



До доведення Теорема 1.2

Доведення.

а) необхідність:

Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$, *тобто* $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N(\varepsilon) \quad |z_n - z_0| < \varepsilon$

$$|z_n - z_0| = |(x_n + iy_n) - (x_0 + iy_0)| = |(x_n - x_0) + i(y_n - y_0)| \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \sqrt{(x_n - x_0)^2 + i(y_n - y_0)^2} < \varepsilon, \quad (x_n - x_0)^2 + i(y_n - y_0)^2 < \varepsilon^2 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} (x_n - x_0)^2 < \varepsilon^2 \\ (y_n - y_0)^2 < \varepsilon^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} |x_n - x_0| < \varepsilon \\ |y_n - y_0| < \varepsilon \end{cases} , \forall n \geq N(\varepsilon) \quad \iff$$

$$\iff \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0 \end{cases}$$

b) достатність:

Нехай $\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0 \end{cases}$ $\quad \forall\varepsilon > 0 : \begin{array}{ll} \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_1(\varepsilon) & |x_n - x_0| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_2(\varepsilon) & |y_n - y_0| < \frac{\varepsilon}{2} \end{array}$

$|z_n - z_0| = |(x_n + iy_n) - (x_0 + iy_0)| = |(x_n - x_0) + i(y_n - y_0)| \leq$
$\leq |x_n - x_0| + |i| \cdot |y_n - y_0| = |x_n - x_0| + |y_n - y_0| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

при $\forall n \geq \max(N_1, N_2) \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$

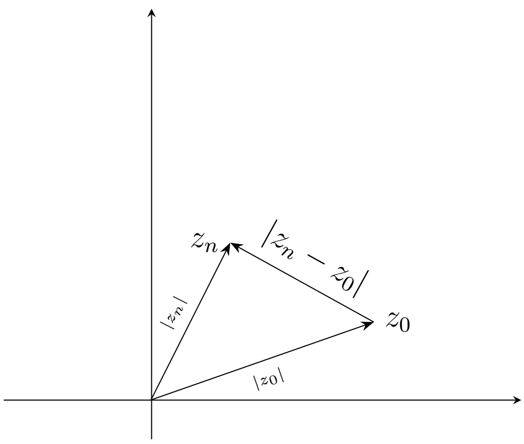
Твердження 1.1.

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \iff \lim_{n\to\infty} |z_n - z_0| = 0$$

Доведення.
$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N(\varepsilon) \quad |z_n - z_0| < \varepsilon.$ *Тоді:* $||z_n - z_0| - 0| = |z_n - z_0| < \varepsilon$

Теорема 1.3.

$$\textit{Якщо } \lim_{n\to\infty} z_n = z_0, \textit{ то } \lim_{n\to\infty} |z_n| = |z_0|$$



До доведення Теорема 1.3

Доведення.
Покажемо, що $\lim\limits_{n\to\infty} ||z_n| - |z_0|| = 0$ *(у зворотний бік невірно).*

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{Нерівність } \triangle \textit{ для } |z_n| : & |z_n| \leq |z_0| + |z_n - z_0| \\ & |z_n| - |z_0| \leq |z_n - z_0| \\ \textit{Нерівність } \triangle \textit{ для } |z\_0| : & |z_0| \leq |z_n| + |z_n - z_0| \\ & |z_0| - |z_n| \leq |z_n - z_0| \end{array}\right\} \Longrightarrow ||z_n| - |z_0|| \leq |z_n - z_0|$$

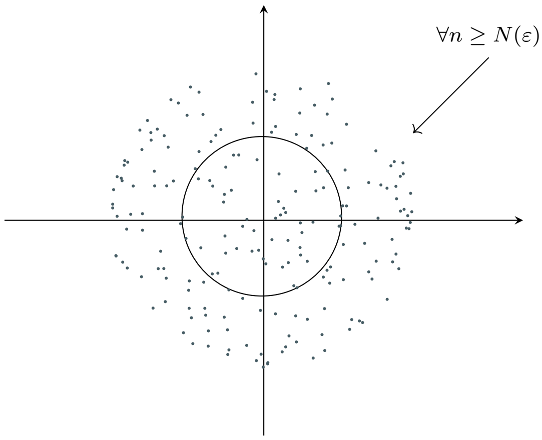
Окрім того, $0 \leq ||z_n| - |z_0|| \leq |z_n - z_0| \Longrightarrow (\lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0, \lim\limits_{n\to\infty} |z_n - z_0| = 0$ *- за умовою)* $\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} ||z_n| - |z_0|| = 0 \iff \lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = |z_0|$

Теорема 1.4.

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = |z_0| \\ \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi_0 \end{cases} \xrightarrow[\substack{z_n = |z_n|\cdot e^{i\varphi_n} \\ z_0 = |z_0|\cdot e^{i\varphi_0}}]{} \lim_{n\to\infty} z_n = z_0$$

Доведення. *З арифметичних властивостей* $\lim z_n$

1.4 Розширена множина $\mathbb{C}$. Нескінченно віддалена точка.



$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty \Leftrightarrow \forall E > 0 \quad \exists N(E) \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq N(E) \quad |z_n| > \varepsilon$. Невласне комплексне число ∞: поняття дійсної та уявної частини, а також, аргумента - невизначені. $|\infty| = \infty$. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty \Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = +\infty$. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{z_n} = 0$

1.5