ДОМАШНЯ КОНТРОЛЬНА РОБОТА З ПРЕДМЕТУ "КЛАСИЧНА МЕХАНІКА 2"

ФІ-12 Бекешева Анастасія

– 168 –

Знайти закон вимушених коливань частки маси m під дією сили $F(t)$, якщо в початковий момент $t = 0$ частка знаходилась в положенні рівноваги ($x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$), для випадків

a) $F = F_0 = const$

b) $F = at, \ a = const$

c) $F = F_0 \exp(-\alpha t), \ \alpha, F_0 = const$

Запишемо рівняння руху для части, що коливається під дією сили:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F}{m} \tag{1}$$

a) Врахуємо початкову умову, що $F = F_0 = const$ та розв'яжемо вираз. (1):
$x_0 = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t, \quad x_1 = a = \dfrac{F_0}{m\omega^2}, \quad x = x_0 + x_1$. Отже для x отримаємо:

$$x = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t + \frac{F_0}{m\omega^2} \tag{2}$$

Знайдемо значення довільних сталих: $x(0) = C_1 + \dfrac{F_0}{m\omega^2} = 0 \Longrightarrow C_1 = -\dfrac{F_0}{m\omega^2}$, $\dot{x}(0) = \omega C_2 = 0 \Longrightarrow C_2 = 0$. Тобто маємо:

$$x = (1 - \cos\omega t)\frac{F_0}{m\omega^2} \tag{3}$$

b) Врахуємо початкову умову, що $F = at, \ a = const$ та розв'яжемо вираз. (1):
$x_0 = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t, \quad x_1 = bt + c, \quad \omega^2(bt + c) = \dfrac{at}{m} \Longrightarrow c = 0, b = \dfrac{a}{m\omega}$. Отже для x отримаємо:

$$x = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t + \frac{at}{m\omega^2} \tag{4}$$

Знайдемо значення довільних сталих: $x(0) = C_1 = 0, \quad \dot{x}(0) = \omega C_2 + \dfrac{a}{m\omega^2} = 0 \Longrightarrow C_2 = -\dfrac{a}{m\omega^3}$. Тобто маємо:

$$x = (\omega t - \sin\omega t)\frac{a}{m\omega^3} \tag{5}$$

c) Врахуємо початкову умову, що $F = F_0 \exp(-\alpha t), \alpha, F_0 = const$ та розв'яжемо вираз. (1):
$x_0 = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t, \quad x_1 = a \exp(-\alpha t), \quad a\alpha^2 \exp(-\alpha t) + a\omega^2 \exp(-\alpha t) = = \dfrac{F_0 \exp(-\alpha t)}{m}, \quad a = \dfrac{F_0}{m(\omega^2 + \alpha^2)}$. Отже для x отримаємо:

$$x = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t + \frac{F_0 \exp(-\alpha t)}{m(\omega^2 + \alpha^2)} \tag{6}$$

Знайдемо значення довільних сталих: $x(0) = C_1 + \dfrac{F_0}{m(\omega^2 + \alpha^2)} = 0 \Longrightarrow C_1 = \dfrac{-F_0}{m(\omega^2 + \alpha^2)}$, $\dot{x}(0) = \omega C_2 - \dfrac{\alpha F_0}{m(\omega^2 + \alpha^2)} \Longrightarrow C_2 = \dfrac{\alpha F_0}{m\omega(\omega^2 + \alpha^2)}$. Тобто маємо:

$$x = \left(\exp(-\alpha t) + \frac{\alpha}{\omega}\sin\omega t - \cos\omega t\right)\frac{F_0}{m(\omega^2 + \alpha^2)} \tag{7}$$

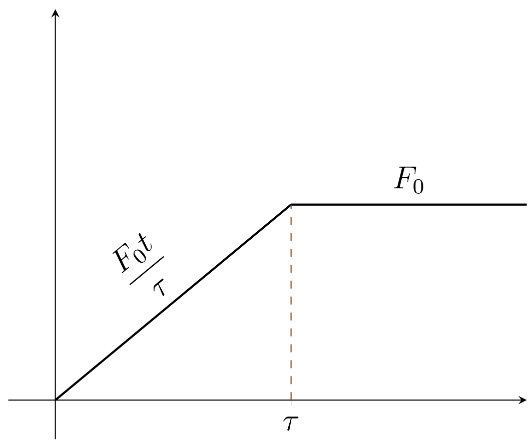
Відповідь: (a): вираз. (3), (b): вираз. (5), (c): вираз. (7)

– 169 –

Визначити кінцеву амплітуду коливань частки маси m під дією сили

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \dfrac{F_0 t}{\tau} & 0 < t < \tau \\ F_0 & t > \tau \end{cases}$$

Власна частота коливань частки ω. До момента $t = 0$ система знаходилась в стані рівноваги.



Скористаємось вираз. (5) і запишемо закон руху для $0 < t < \tau$:

$$x = (\omega t - \sin\omega t)\frac{F_0}{\tau m\omega^3} \tag{8}$$

Знайдемо вираз. (8) у τ та похідну у тій самій точці:

$$\begin{cases} x(\tau) = (\omega\tau - \sin\omega\tau)\dfrac{F_0}{\tau m\omega^3} \\ \dot{x}(\tau) = (1 - \cos\omega\tau)\dfrac{F_0}{\tau m\omega^2} \end{cases} \tag{9}$$

Скористаємось вираз. (3) для рівняння руху при $t > \tau$. З граничних умов вираз. (8) знайдемо константи. $x(\tau) = C_1\cos\omega\tau + C_2\sin\omega\tau + \dfrac{F_0}{m\omega^2} = \dfrac{F_0}{m\omega^2} - \dfrac{F_0}{\tau m\omega^3}\sin\omega\tau,\quad \dot{x}(\tau) =$ $= -C_1\omega\sin\omega\tau + C_2\omega\cos\omega\tau = (1 - \cos\omega\tau)\dfrac{F_0}{\tau m\omega^2}$. Маємо:

$$\begin{cases} C_1\cos\omega\tau + C_2\sin\omega\tau = -\dfrac{F_0}{\tau m\omega^3}\sin\omega\tau \\ -C_1\omega\sin\omega\tau + C_2\omega\cos\omega\tau = (1 - \cos\omega\tau)\dfrac{F_0}{\tau m\omega^2} \end{cases} \tag{10}$$

Щоб знайти константи розв'яжемо вираз. (10) за допомогою метода Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos\omega\tau & \sin\omega\tau \\ -\omega\sin\omega\tau & \omega\cos\omega\tau \end{vmatrix} = \omega$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -\dfrac{F_0}{\tau m\omega^3}\sin\omega\tau & \sin\omega\tau \\ -\omega\sin\omega\tau & (1-\cos\omega\tau)\dfrac{F_0}{\tau m\omega^2} \end{vmatrix} = -\frac{F_0}{\tau m\omega^2}\sin\omega\tau$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos\omega\tau & -\dfrac{F_0}{\tau m\omega^3}\sin\omega\tau \\ -\omega\sin\omega\tau & (1-\cos\omega\tau)\dfrac{F_0}{\tau m\omega^2} \end{vmatrix} = (\cos\omega\tau - 1)\frac{F_0}{\tau m\omega^2}$$

Тобто константи:

$$\begin{cases} C_1 = -\dfrac{F_0}{\tau m\omega^3}\sin\omega\tau \\ C_2 = (\cos\omega\tau - 1)\dfrac{F_0}{\tau m\omega^3} \end{cases} \tag{11}$$

Підставимо вираз. (11) у закон руху: $x = \dfrac{F_0}{\tau m\omega^3}(-\sin\omega\tau\cos\omega t + \cos\omega\tau\sin\omega t - \sin\omega t) + + \dfrac{F_0}{m\omega^1} = \dfrac{F_0}{\tau m\omega^3}\left(\sin(\omega t - \omega\tau) - \sin\omega t\right) + \dfrac{F_0}{m\omega^3} = -\dfrac{2F_0}{\tau m\omega^3}\sin\omega\tau\cdot\cos\left(\omega t - \dfrac{\omega\tau}{2}\right) + \dfrac{F_0}{m\omega^2}$. Таким чином кінцева амплітуда:

$$A = \frac{2F_0}{\tau m\omega^3}\sin\omega\tau \tag{12}$$

Відповідь: вираз. (12)

– 178 –

Частка рухається в полі з потенціалом

$$U(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2) + x^2y - \frac{1}{3}y^3$$

Знайдіть стаціонарні точки (точки рівноваги). Які з них є стійкими?

Почнемо з знаходження критичних точок.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + 2xy = 0 \\ y + x^2 - y^2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow x(1+2y) = 0 \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ y = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Знайдемо значення y при $x = 0$: $y - y^2 = y(1-y) = 0$, отже $y = 0$, $y = 1$. Знайдемо значення x при $y = -\dfrac{1}{2}$: $-\dfrac{1}{2} + x^2 - \dfrac{1}{4} = 0$, отже $x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Таким чином маємо наступні критичні точки:

$$(0,0), \quad (0,1), \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right), \quad \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) \tag{13}$$

Порахуємо другі похідні щоб знайти характер точок з вираз. (13).

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 1 + 2y, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 1 - 2y, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 2x$$

$\Delta = \begin{vmatrix} 1+2y & 2x \\ 2x & 1-2y \end{vmatrix} = 1 - 4y^2 - 4x^2$ - підставимо сюди вираз. (13) і точку стійкої рівноваги.

- $(0,0)$: $\Delta(0,0) = 1 - 4 \cdot 0 - 4 \cdot 0 = 1 > 0, \quad 1 + 2 \cdot 0 = 1 > 0$ - локальний мінімум.
- $(0,1)$: $\Delta(0,1) = 1 - 4 \cdot 0 - 4 \cdot 1 = -3 < 0$ - не екстремум.
- $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$: $\Delta = 1 - 4 \cdot \frac{3}{4} - 4 \cdot \frac{1}{4} = -3 < 0$ - не екстремум.

– 190 –

Обчислити тензори інерції для наступних тіл маси m з однорідним розподілом маси в системі координат, початок якої розташовано в геометричному центрі тіла (розміри тіла відомі): а) кулі; б) куба; в) прямокутного паралелепіпеда; г) прямого круглого циліндра.

Запишемо загальну формулу для інерції:

$$I_{ij} = \int (r^2 \delta_{ij} - x_i x_j) \ \mathrm{d}m \ , \quad ij \in \{x, y, z\} \tag{14}$$

a) Маємо кулю радіуса R. Враховуючи симетрію: $I = I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{1}{3}(I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}) = \frac{1}{3}\int (3r^2 - r^2) \ \mathrm{d}m = \frac{2}{3}\int r^2 \ \mathrm{d}m = \frac{2}{3} \cdot \frac{3m}{4\pi R^3} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{R} r^4 \rho \sin\theta \ \mathrm{d}r \ \ \mathrm{d}\theta \ \ \mathrm{d}\varphi = \frac{m}{2\pi R^3} \cdot \frac{R^5}{5}\Big|_0^R (-\cos\theta)\big|_0^{\pi} \ \varphi\big|_0^{2\pi} = \frac{m}{2\pi R^3} \cdot \frac{R^5}{5} \cdot 2 \cdot 2\pi$. Отже отримаємо:

$$I = \frac{2}{5} m R^2 \tag{15}$$

b) Маємо куб ребра a. Враховуючи симетрію: $I = \frac{2}{3}\int r^2 \ \mathrm{d}m = \frac{2m}{3a^3} \int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} (x^2 + y^2 + z^2) \ \mathrm{d}x \ \ \mathrm{d}y \ \ \mathrm{d}z = \frac{2m}{3a^3} \cdot 2^3 \ x^3\big|_0^{\frac{a}{2}} \ y\big|_0^{\frac{a}{2}} \ z\big|_0^{\frac{a}{2}} = \frac{2m}{3a^3} \cdot 2^3 \cdot \frac{a^3}{8} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}$.. Отже отримаємо:

$$I = \frac{ma^2}{6} \tag{16}$$

c) Маємо прямокутний паралелепіпед з ребрами a, b, c. Розглянемо дві ситуації. В ситуації коли $i \neq j$: $I_{ij} = \int -xy \ \mathrm{d}m = -\frac{m}{abc} \int\limits_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \int\limits_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} xy \ \mathrm{d}x \ \ \mathrm{d}y \ \ \mathrm{d}z$. Скориставшись властивостями непарної функції легко побачити, що:

$$I_{ij} = 0, \quad i \neq j$$

Далі розглянемо при $i = j$: $I_{xx} = \dfrac{m}{abc} \int\limits_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \int\limits_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} (y^2 + z^2) \ \mathrm{d}x \ \ \mathrm{d}y \ \ \mathrm{d}z \ = \dfrac{m}{abc} \cdot 2^3 \cdot$ $\cdot \dfrac{a}{2} \int\limits_{0}^{\frac{c}{2}} \int\limits_{0}^{\frac{b}{2}} (y^2+z^2) \ \mathrm{d}y \ \ \mathrm{d}z \ = \dfrac{m}{bc} \cdot 2^2 \cdot \dfrac{b}{2} \int\limits_{0}^{\frac{c}{2}} \left(\dfrac{b^2}{3 \cdot 2^2} + cz^2 \right) \ \mathrm{d}z \ = \dfrac{m}{c} \cdot 2 \cdot \dfrac{c}{2} \left(\dfrac{b^2}{3 \cdot 2^2} \cdot + \dfrac{c^2}{3 \cdot 2^2} \right) =$ $= \dfrac{m}{12}(b^2 + c^2)$. Враховуючи симетрію запишемо:

$$I_{xx} = b^2 + c^2, \quad I_{yy} = a^2 + c^2, \quad I_{zz} = a^2 + b^2 \tag{17}$$

d) Маємо циліндр висоти H та з радіусом основи R. $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $z = z$.
При $i \neq j$:

$$I_{xy} = I_{yx} = -\frac{m}{\pi R^2 h} \int xy \ \mathrm{d}x \ \ \mathrm{d}y \ \ \mathrm{d}z \ = -\frac{m}{\pi R^2 h} \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int\limits_{0}^{2\pi} \int\limits_{0}^{R} \rho^3 \cos \varphi \sin \varphi \ \mathrm{d}\rho \ \ \mathrm{d}\varphi \ \ \mathrm{d}z \ =$$

$$= -\frac{m}{\pi R^2 h} \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int\limits_{0}^{2\pi} \int\limits_{0}^{R} \rho^3 \underbrace{\sin 2\varphi}_{0,\, \varphi \to \pi_n} \ \mathrm{d}\rho \ \ \mathrm{d}\varphi \ \ \mathrm{d}z \ = 0$$

$$I_{yz} = I_{zy} = -\frac{m}{\pi R^2 h} \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int\limits_{0}^{2\pi} \int\limits_{0}^{R} \rho^2 z \sin \varphi \ \mathrm{d}\rho \ \ \mathrm{d}\varphi \ \ \mathrm{d}z \ = 0$$

$$I_{xz} = I_{zx} = -\frac{m}{\pi R^2 h} \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int\limits_{0}^{2\pi} \int\limits_{0}^{R} \rho^2 z \cos \varphi \ \mathrm{d}\rho \ \ \mathrm{d}\varphi \ \ \mathrm{d}z \ = 0$$

При $i = j$:

$$I_{xx} = \int (\rho^2 + z^2 - \rho^2 \cos^2 \varphi) \ \mathrm{d}m \ = \frac{m}{\pi R^2 h} \int\limits_{0}^{2\pi} \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int\limits_{0}^{R} \left(\frac{\rho^3}{2}(1 - \cos 2\varphi) + z^2 \right) \ \mathrm{d}\rho \ \ \mathrm{d}\varphi \ \ \mathrm{d}z \ =$$

$$= \frac{m}{\pi R^2 h} \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int\limits_{0}^{R} \left(\frac{R^4}{8}(1 - \cos 2\varphi) \right) \ \mathrm{d}\varphi \ \ \mathrm{d}z \ = \frac{m}{\pi R^2 h} \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{\pi R^4}{4} + \pi R^2 z^2 \right) \ \mathrm{d}x \ =$$

$$= \frac{m}{\pi R^2 h} \cdot 2\pi R^2 \left(\frac{R^2 h}{2^3} + \frac{h^3}{2^3 \cdot 3} \right) = \frac{m}{12}(3R^2 + h^2)$$

$$I_{yy} = \int (\rho^2 + z^2 - \rho^2 \sin^2 \varphi)\ \mathrm{d}m\ = \frac{m}{\pi R^2 h} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int\limits_0^{R} \left(\frac{\rho^3}{2}(1 + \cos 2\varphi) + z^2 \right)\ \mathrm{d}\rho\ \ \mathrm{d}\varphi\ \ \mathrm{d}z\ =$$

$$= \frac{m}{\pi R^2 h} \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int\limits_0^{R} \left(\frac{R^4}{8}(1 + \cos 2\varphi) \right)\ \mathrm{d}\varphi\ \ \mathrm{d}z\ = \frac{m}{\pi R^2 h} \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{\pi R^4}{4} + \pi R^2 z^2 \right)\ \mathrm{d}x\ =$$

$$= \frac{m}{\pi R^2 h} \cdot 2\pi R^2 \left(\frac{R^2 h}{2^3} + \frac{h^3}{2^3 \cdot 3} \right) = \frac{m}{12}(3R^2 + h^2)$$

$$I_{zz} = \int (\rho^2 + z^2 - z^2)\ \mathrm{d}m\ = \frac{m}{\pi R^2 h} \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{R} \rho^3\ \mathrm{d}\rho\ \ \mathrm{d}\varphi\ \ \mathrm{d}z\ =$$

$$= \frac{m}{\pi R^2 h} \cdot 2\pi \cdot h \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{m}{2} R^2$$

Отже отримаємо:

$$I_{xx} = \frac{m}{12}(3R^2 + h^2), \quad I_{yy} = \frac{m}{12}(3R^2 + h^2), \quad I_{zz} = \frac{m}{2} R^2 \tag{18}$$

Відповідь: (a): вираз. (15), (b): вираз. (16), (c): вираз. (17), (d): вираз. (18)

– 255 –

Знайти твірну функцію $\psi_2(q, P)$ для перетворення з твірною функцією

$$\psi_1(q, P) = \frac{1}{2} m\omega q^2 \cot Q$$

Функції $\psi_1(q, Q)$ та $\psi(q, Q)$ пов'язані наступним чином:

$$\psi_2(q, P) = \psi_1(q, P) + QP \tag{19}$$

Знайдемо Q: $P = -\dfrac{\partial \psi_1}{\partial Q} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{m\omega q^2}{\sin^2 Q}$, $\quad \sin Q = \sqrt{\dfrac{m\omega q^2}{2P}}$. Таким чином:

$$Q = \arcsin \sqrt{\frac{m\omega q^2}{2P}}$$

За допомогою тригонометричних перетворень виразимо $\cot Q$: $1 + \cot^2 Q = \dfrac{1}{\sin^2 Q}$.

$$\cot Q = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 Q} - 1} = \sqrt{\frac{2P}{m\omega q^2} - 1}$$

Підставимо Q у вираз. (19) і отримаємо:

$$\psi_2(q, P) = \frac{1}{2} m\omega q^2 \sqrt{\frac{2P}{m\omega q^2} - 1} + P \arcsin \sqrt{\frac{m\omega q^2}{2P}} \tag{20}$$

Відповідь: вираз. (20)

– 256 –

Знайти розв'язок канонічних рівнянь для осцилятора

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}$$

методом канонічних перетворень з твірною функцією вираз. (20)

Знайдемо Q з вираз. (20): $Q = \dfrac{\partial \psi_2}{\partial P} = \dfrac{1}{2} m\omega q \dfrac{\partial}{\partial P}\left(\sqrt{\dfrac{2P}{m\omega} - q^2}\right) + P \arcsin \dfrac{q}{\sqrt{\dfrac{2P}{m\omega}}} -$

$- \dfrac{Pq}{\sqrt{1 - \dfrac{q^2}{\dfrac{2P}{m\omega}}}} \cdot \dfrac{1}{\dfrac{2P}{m\omega}} \cdot \dfrac{\partial}{\partial P}\left(\sqrt{\dfrac{2P}{m\omega}}\right) = \dfrac{1}{2} q \sqrt{\dfrac{m\omega}{2P}} + P \arcsin \sqrt{\dfrac{m\omega q^2}{2P}} -$

$- \dfrac{q}{\sqrt{1 - \dfrac{q^2}{2P}}} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{2P}{m\omega} - q^2}} = \arcsin \dfrac{q}{\sqrt{\dfrac{2P}{m\omega}}}$. Далі знайдемо $q = \dfrac{2P}{m\omega} \sin Q$.

Отже $p = \dfrac{\partial \psi_2}{\partial q} = \dfrac{2P}{\sqrt{\dfrac{2P}{m\omega}}} \cos Q = \sqrt{2Pm\omega} \cos Q$. Тобто Q, q, p :

$$Q = \arcsin \frac{q}{\sqrt{\frac{2P}{m\omega}}}, \quad q = \frac{2P}{m\omega} \sin Q, \quad p = \sqrt{2Pm\omega} \cos Q \tag{21}$$

Підставимо значення з вираз. (21) у функцію Гамільтона:

$$\mathcal{H} = \frac{2Pm\omega}{2m} \cos^2 Q + \frac{1}{2} m\omega^2 \cdot \frac{2P}{m\omega^2} \sin^2 Q = \omega P \tag{22}$$

Запишемо рівняння Гамільтона:

$$\begin{cases} \dot{Q} = \omega \\ \dot{P} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} Q = \omega t + \varphi_0 \\ P = const = \dfrac{E}{\omega} \end{cases} \tag{23}$$

Відповідь: вираз. (23)

Запишемо формулу для обчислення дужок Пуассона в загальному випадку:

$$[\varphi, \psi] = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \frac{\partial \psi}{\partial q_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\partial \psi}{\partial p_i} \right) \tag{24}$$

– 262 –

Обчисліть дужки Пуассона для функцій:

a) $\varphi = q^2 + p^2, \quad \psi = \arctan\frac{p}{q}$

b) $\varphi = q\cos\omega t + \frac{p}{\omega}\sin\omega t, \quad \psi = p\cos\omega t - q\omega\sin\omega t, \quad \omega = const$

c) $\varphi = \cos\sum_{i=1}^{n}(p_i^2 + q_i^2), \quad \psi = \sin\sum_{i=1}^{n}(p_i^2 + q_i^2)$

a) Порахуємо часткові похідні:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p} = 2p, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial q} = 2q, \quad \frac{\partial\psi}{\partial p} = \frac{1}{q}\cdot\frac{1}{\frac{p^2}{q^2}+1} = \frac{q}{p^2+q^2}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial q} = -\frac{p}{q}\cdot\frac{1}{\frac{p^2}{q^2}+1} = -\frac{p}{p^2+q^2} \tag{25}$$

Підставимо вираз. (25) в вираз. (24):

$$[\varphi,\psi] = -2p\cdot\frac{p}{p^2+q^2} - 2q\frac{q}{p^2+q^2} = -2 \tag{26}$$

b) Порахуємо часткові похідні:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p} = \frac{\sin\omega t}{\omega}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial q} = \cos\omega t, \quad \frac{\partial\psi}{\partial p} = \cos\omega t, \quad \frac{\partial\psi}{\partial q} = -\omega\sin\omega t \tag{27}$$

Підставимо вираз. (27) в вираз. (24):

$$[\varphi,\psi] = -\frac{\sin\omega t}{\omega}\cdot\omega\sin\omega t - \cos^2\omega t = 1 \tag{28}$$

c) Порахуємо часткові похідні:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial p_i} = -2p_i\sin\sum_{i=1}^{n}(p_i^2+q_i^2), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial q_i} = -2q_i\sin\sum_{i=1}^{n}(p_i^2+q_i^2) \\ \frac{\partial\psi}{\partial p_i} = 2p_i\cos\sum_{i=1}^{n}(p_i^2+q_i^2), \quad \frac{\partial\psi}{\partial q_i} = 2q_i\cos\sum_{i=1}^{n}(p_i^2+q_i^2) \end{aligned} \tag{29}$$

Підставимо вираз. (29) в вираз. (24):

$$[\varphi,\psi] = -4p_iq_i\sin\sum_{i=1}^{n}(p_i^2+q_i^2)\cos\sum_{i=1}^{n}(p_i^2+q_i^2) + 4p_iq_i\sin\sum_{i=1}^{n}(p_i^2+q_i^2)\cos\sum_{i=1}^{n}(p_i^2+q_i^2) = 0 \tag{30}$$

Відповідь: (a): вираз. (26), (b): вираз. (28), (c): вираз. (30)

a)

– 268 –

Скласти рівняння Гамільтона-Якобі, знайти його повний інтеграл і знайти закон руху частки маси т у полі тяжіння $g = const$:

a) в декартових координатах

b) в циліндричних координатах

– 273 –

Зайдіть повний інтеграл рівняння Гамільтона-Якобі для заряду e масою m, який рухається в однорідному сталому електричному полі . Знайдіть закон руху заряду. Початкові дані: $\vec{r_0}\vec{p_0}$. Розгляньте два випадки:

a) $\varphi \neq 0, \quad \vec{A} = 0$

b) $\varphi = 0, \quad \vec{A} \neq 0$

де φ і A - електричний і векторний магнітний потенціали.

Запишемо напруженість електричного поля:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{31}$$

Запишемо функцію Гамільтона:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)^2 + e\varphi \tag{32}$$

a) Враховуючи початкови умови, вираз. (31) і вираз. (32):

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi, \quad \varphi = -\vec{E}\vec{r}, \quad \mathcal{H} = \frac{\vec{p}^2}{2m} - e\vec{E}\vec{r}$$

Запишемо рівняння Гамільтона-Якобі:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathcal{H} = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\vec{\nabla}S\right)^2 - e\vec{E}\vec{r} \tag{33}$$