Теорія функції комплексної змінної

Зміст

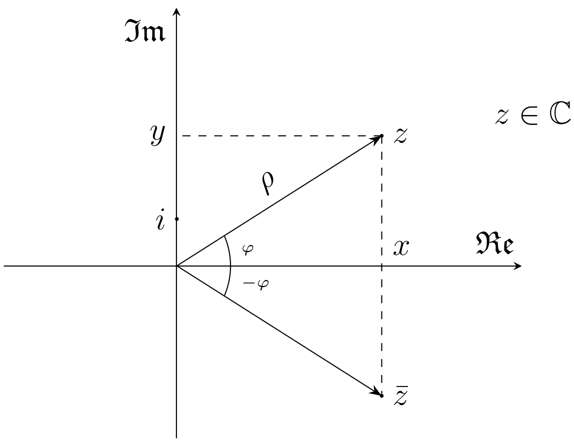
Частина 1

Комплексні числа та функції комплексної змінної

1.1 Основні поняття

$$\underset{\text{натуральні}}{\mathbb{N}} \subset \underset{\text{цілі}}{\mathbb{Z}} \subset \underset{\text{раціональні}}{\mathbb{Q}} \subset \underset{\text{дійсні}}{\mathbb{R}} \subset \underset{\text{комплексні}}{\mathbb{C}}$$

$(x, y) : x, y \in \mathbb{R}$ - пара дійсних чисел.



$$z = x + iy \text{ - алгебраїчна форма } z$$

Якщо $y = 0$, то $z = x \in \mathbb{R}$. $\mathfrak{Re} z = x$ - дійсна частина z. Якщо $x = 0$, то $z = iy$ - чисто уявне число. $\mathfrak{Im} z = y$ - уявна частина z. Значення $x, y \in \mathbb{R}$ - дійсні. Для $z = i : x = 0, y = 1, i$ - уявна одиниця. Якщо $z = x + iy$, то $\bar{z} = x - iy$ - спряжене до z. Нехай ρ, φ - полярні координати. Тоді модуль $z : |z| = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. $|z| \geq 0, \forall z \in \mathbb{C}$. Якщо $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$. φ - аргумент z (кут, утворений радіус-вектором, проведеним в точку z у додатньому напрямку з осі Ox).

$\operatorname{Arg} z$ - множина значень аргумента z. $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \arg z$ - головне значення аргумента. $\arg z = \varphi \in (-\pi, \pi]$

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \frac{x}{y}, x > 0 \quad (I, IV \text{ чв.}) \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, x < 0, y > 0 \quad (II \text{ чв.}) \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi, x < 0, y < 0 \quad (III \text{ чв.}) \end{cases}, \quad \arg z \text{ визначений для } z \neq 0!$$

$$z = \begin{vmatrix} x = |z| \cos \varphi \\ y = |z| \sin \varphi \end{vmatrix} = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) \text{ - тригонометрична форма числа } z.$$

Теорема 1.1 (Формула Ойлера)**.**

$$e^{iy} = \cos\varphi + i\sin\varphi \quad (\varphi \in \mathbb{R})$$

Наслідок 1.1.
$z = |z|e^{i\varphi}$ *- показникова форма* z*.* $\bar{z} = |z|(\cos(-\varphi + i\sin(-\varphi)) = \underbrace{|z|(\cos\varphi - i\sin\varphi)}_{\textit{не тригонометрична форма}}$.

$$\bar{z} = |z|e^{-i\varphi}$$

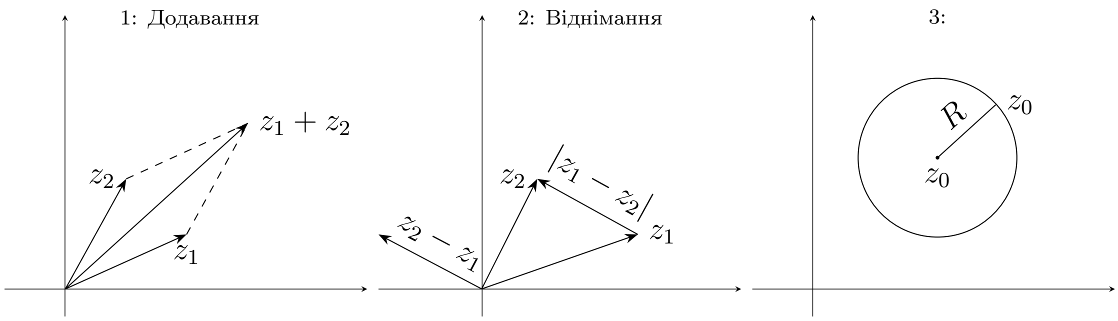
1.2 Операції над комплексними числами

1. Порівняння
   В комплексній області відношення " > " чи < не визначено. Числа порівнюють тільки за допомогою відношення " = " або " $\neq$ ".

$$z_1 = z_2 \text{ у алгебраїчній формі} \iff \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$$

$$z_1 = z_2 \text{ у тригонометричній формі} \iff \begin{cases} |z_1| = |z_2| \\ \varphi = \varphi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

2. Додавання/Віднімання



$$1 : z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$2 : z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

$$2 : |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \text{ - відстань між } z_1, z_2$$

$$3 : |z - z_0| = R$$

3. Множення/ділення і підносення до степеню

def $\quad z_1 \cdot z_2 = \underbrace{x_1x_2 - y_1y_2}_{\mathfrak{Re} z} + i\underbrace{(x_1y_2 + x_2y_1)}_{\mathfrak{Im} z}$

Наслідок 1.2. *для* $z_1 = z_2 = i : i^2 = -1 \quad (x_1 = x_2 = 0, y_1 = y_2 = 1)$

Наслідок 1.3. $z_1 \cdot z_2 = x_1x_2 + i^2y_1y_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 = x_1(x_2+iy_2) + iy_1(x_2+iy_2) = = (x_1+iy_1)(x_2+iy_2)$

Таким чином, комплексні числа перемножаються як звичайні і при цьому зберігаються усі формули скороченого множення.

def $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2} \cdot \dfrac{x_2-iy_2}{x_2-iy_2} = \dfrac{A+iB}{x_2^2+y_2^2} = X+iY$

def $z^n = (x+iy)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^k (iy)^{n-k}, \quad C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

$$\left[\begin{array}{l} i = i \\ i^2 = -1 \\ i^3 = -i \\ i^4 = i \\ i^5 = 1 \end{array}\right. \quad \dots \left[\begin{array}{l} i^{4k} = 1 \\ i^{4k+1} = i \\ i^{4k+2} = -1 \\ i^{4k+3} = -i \end{array}\right.$$

4. Множення/ділення і підносення до степеню (в тригонометричнії і показниковій формі) $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Тоді у тригономтричній формі: $z_1 \cdot z_2 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot|z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = |z_1|\cdot|z_2|\cdot(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + i^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2) = |z_1|\cdot|z_2|\cdot((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2) = |z_1|\cdot|z_2|\cdot(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)$

def $z_1 \cdot z_2 = |z_1|\cdot|z_2|\cdot(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$
$|z_1 \cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2|, \varphi = \varphi_1 + \varphi_2$

Наслідок 1.4. $z_1 = z, z_2 = \bar{z} \Rightarrow z\cdot\bar{z} = |z|^2(\cos 0 + i\sin 0) = |z|^2$

У показниковій формі(множення): $z_1 = |z_1|\cdot e^{i\varphi_1}, z_2 = |z_2|\cdot e^{i\varphi_2}$

def $z_1 \cdot z_2 = |z_1|\cdot|z_2|\cdot e^{i(\varphi_! + \varphi_2)}$

У тригонометричній формі(ділення): $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}\cdot\dfrac{\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}\cdot$ $\dfrac{(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot(\cos(-\varphi_2) + i\sin(-\varphi_2))$

def $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2))), \quad \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}, \varphi = \varphi_1 - \varphi_2$

У показниковій формі(ділення):

def $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}\cdot e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$

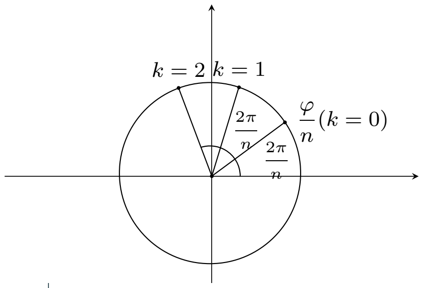
def $z^n = \underbrace{z\cdot z\cdot z\cdot\dots\cdot z}_{n \text{ разів}} = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = |z|^n\cdot e^{in\varphi}, \forall n \in \mathbb{Z}$

5. Винесення з під кореня $\sqrt[n]{z}$

def $W = \sqrt[n]{z}$, якщо $W^n = z$.

Нехай обидва записані у тригонометричній формі: $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $W = |W|(\cos\psi + i\sin\psi), W^n = |W|^n(\cos n\psi + i\sin n\psi)$. Умова "=" в тригоно-

-метричній формі: $W^n = z \Rightarrow \begin{cases} |W|^n = |z| \\ n\psi = \varphi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |W| = \sqrt[n]{|z|} \\ \psi = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

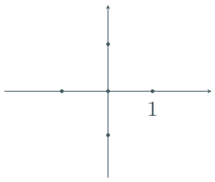


$$\sqrt[n]{z} = W = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$$

$k = 0, 1, \ldots, n-1$

$$\psi_k = \frac{\varphi}{n} + 2\pi\frac{k}{n}, \quad \Delta\psi = \frac{2\pi}{n}$$

Приклад:



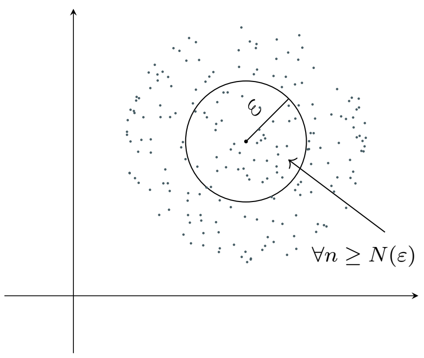
$$\sqrt[4]{1} = \Delta\varphi = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

1.3 Послідовності комплексних чисел

Послідовність комплексних чисел — це комплекснозначна функція натурального аргумента. $\{z_n\}$ - послідовність.

def $n \in \mathbb{N} \to f(n) = z_n \in \mathbb{C}$

1.

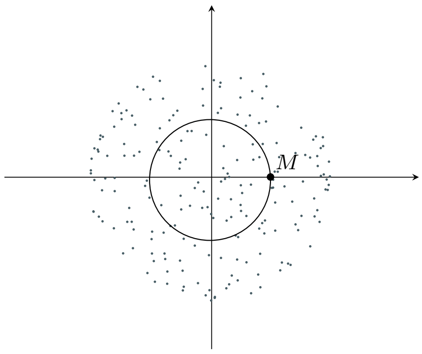


$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0, z_0 \in \mathbb{C}$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall\varepsilon \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N(\varepsilon) \quad |z_n - z_0| < \varepsilon$$

2.



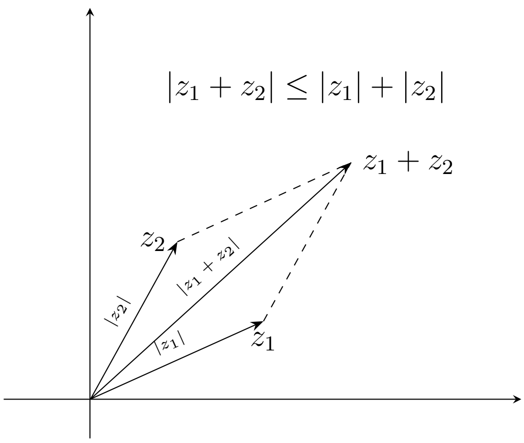
z_n - обмежена, якщо

$$\exists M > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |z_n| < M$$

Теорема 1.2.

Нехай $z_n = x_n + iy_n,$
$z_0 = x_0 + iy_0, \qquad (x_n, y_n, x_0, y_0 \in \mathbb{R})$

Тоді: $$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \iff \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0 \end{cases}$$



До доведення Теорема 1.2

Доведення.

a) *необхідність:*

Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$, *тобто* $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N(\varepsilon) \quad |z_n - z_0| < \varepsilon$

$$|z_n - z_0| = |(x_n + iy_n) - (x_0 + iy_0)| = |(x_n - x_0) + i(y_n - y_0)| \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \sqrt{(x_n - x_0)^2 + i(y_n - y_0)^2} < \varepsilon, \quad (x_n - x_0)^2 + i(y_n - y_0)^2 < \varepsilon^2 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} (x_n - x_0)^2 < \varepsilon^2 \\ (y_n - y_0)^2 < \varepsilon^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} |x_n - x_0| < \varepsilon \\ |y_n - y_0| < \varepsilon \end{cases}, \forall n \geq N(\varepsilon) \quad \iff$$

$$\iff \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0 \end{cases}$$

b) достатність:

Нехай $\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0 \end{cases}$ $\quad \forall\varepsilon > 0: \begin{array}{ll} \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_1(\varepsilon) & |x_n - x_0| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_2(\varepsilon) & |y_n - y_0| < \frac{\varepsilon}{2} \end{array}$

$|z_n - z_0| = |(x_n + iy_n) - (x_0 + iy_0)| = |(x_n - x_0) + i(y_n - y_0)| \leq$
$\leq |x_n - x_0| + |i| \cdot |y_n - y_0| = |x_n - x_0| + |y_n - y_0| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

при $\forall n \geq \max(N_1, N_2) \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$

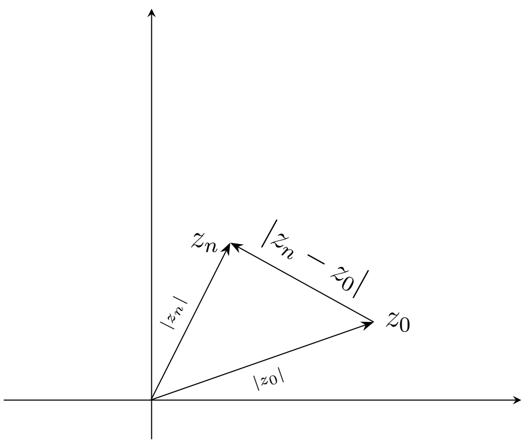
Твердження 1.1.

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \iff \lim_{n\to\infty} |z_n - z_0| = 0$$

Доведення.
$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N(\varepsilon) \quad |z_n - z_0| < \varepsilon.$ *Тоді:* $||z_n - z_0| - 0| = |z_n - z_0| < \varepsilon$

Теорема 1.3.

$$\text{\textit{Якщо}} \lim_{n\to\infty} z_n = z_0, \ \text{\textit{то}} \lim_{n\to\infty} |z_n| = |z_0|$$



До доведення Теорема 1.3

Доведення.
Покажемо, що $\lim\limits_{n\to\infty} ||z_n| - |z_0|| = 0$ *(у зворотний бік невірно).*

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Нерівність } \triangle \text{ для } |z_n|: & |z_n| \leq |z_0| + |z_n - z_0| \\ & |z_n| - |z_0| \leq |z_n - z_0| \\ \text{Нерівність } \triangle \text{ для } |z\_0|: & |z_0| \leq |z_n| + |z_n - z_0| \\ & |z_0| - |z_n| \leq |z_n - z_0| \end{array}\right\} \Longrightarrow ||z_n| - |z_0|| \leq |z_n - z_0|$$

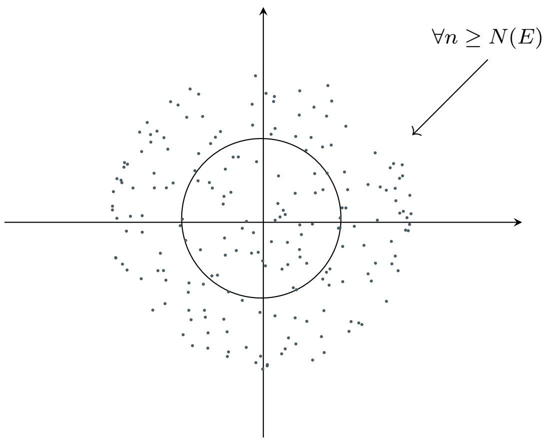
Окрім того, $0 \leq ||z_n| - |z_0|| \leq |z_n - z_0| \Longrightarrow (\lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0, \lim\limits_{n\to\infty} |z_n - z_0| = 0$ *- за умовою)* $\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} ||z_n| - |z_0|| = 0 \iff \lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = |z_0|$

Теорема 1.4.

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = |z_0| \\ \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi_0 \end{cases} \xRightarrow[\substack{z_n=|z_n|\cdot e^{i\varphi_n} \\ z_0=|z_0|\cdot e^{i\varphi_0}}]{} \lim_{n\to\infty} z_n = z_0$$

Доведення. *З арифметичних властивостей* $\lim z_n$

1.4 Розширена множина $\mathbb{C}$. Нескінченно віддалена точка.

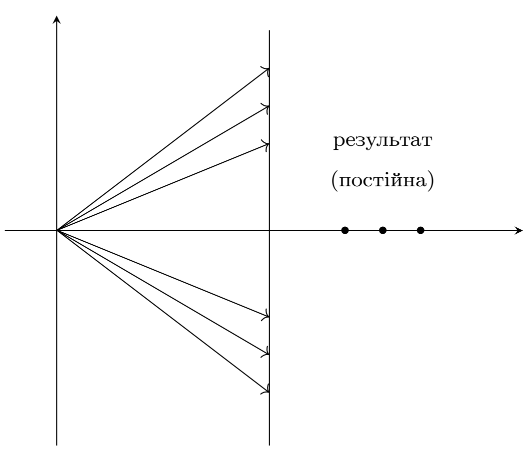


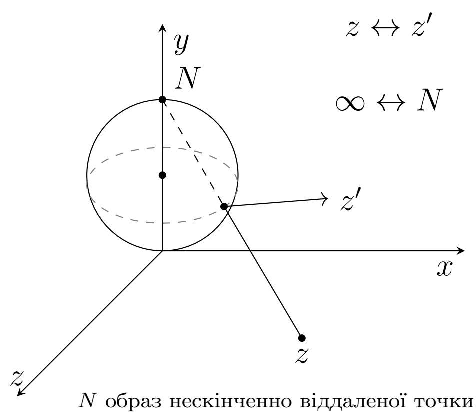
$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty \Leftrightarrow \forall E > 0 \quad \exists N(E) \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq N(E) \quad |z_n| > E$. Невласне комплексне число ∞: поняття дійсної та уявної частини, а також, аргумента - невизначені. $|\infty| = \infty$. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty \Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = +\infty$. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{z_n} = 0$

<u>Операції</u> над "∞" і $a \in \mathbb{C}$:

def "$\infty \pm a$" $= \infty$
def "$\infty \cdot a = \infty, \quad a \neq 0$"
def "$\dfrac{\infty}{a}$" $= \infty$
def "$\dfrac{a}{\infty}$" $= 0$
def "$\infty \cdot \infty$" $= \infty$

<u>Невизначеності</u>:
$0 \cdot \infty$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\dfrac{0}{0}$, $\infty + \infty$, $\infty - \infty$.





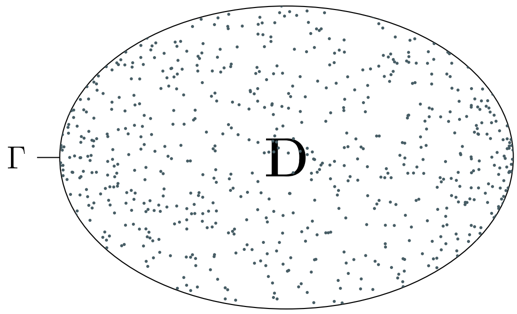
N образ нескінченно віддаленої точки

1.5 Множина на комплексній площині

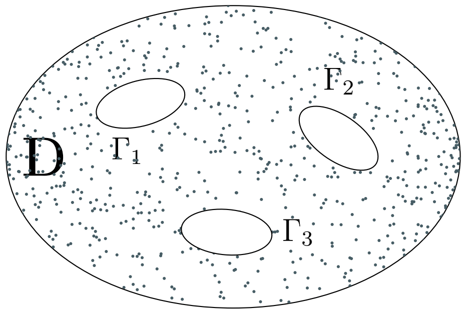
Областю на комплексній площині називається множина точок, що володіє властивостями відкритості та зв'язності. Відкритість означає, що будь-яка точка множини належить їй разом з деяким околом. Зв'язність означає, що будь-які дві точки множини можна з'єднати лінією, що складається цілком з точок цієї ж множини. Точка, що сама не належить області, але будь-якій її окіл має в собі точки цієї області, називається граничною точкою області. Сукупність граничних точок області називається границею області.

Далі будемо вважати, що границя області може складатись із скінченого числа замкнутих ліній (контурів), незамкнутих ліній (розрізів) та окремих точок. Область називається обмеженою, якщо її можна укласти всередину деякого кола з центром у початку координат. Область разом з приєднаною до неї границею називається замкненою областю.

Позначення.
D, G - області. Γ, γ, L, l - границі області. $\overline{D} = D \cup \Gamma$ - замкнена область.

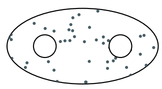


однозв'язна область

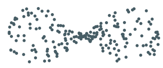


n-зв'язна область

Порядком зв'язності області називається число зв'язних елементів її границі. Додатнім напрямком обходу границі рахуєьтся той, при котрому область залишається зліва.



2-зв'язна область



не область

1.6 Поняття функції комплексної змінної

$z \overset{f}{\longmapsto} W = f(z) \in \mathbb{C}, \quad z \in \mathbb{C}$

Приклад:

$$\left.\begin{array}{l} f(z) = \mathfrak{Re}\, z \\ f(z) = \mathfrak{Im}\, z \\ f(z) = |z| \end{array}\right\} \in \mathbb{R}, \text{ однозначні}$$

Приклад:

$$\left.\begin{array}{l} f(z) = z^n \\ \bar{z} \end{array}\right\} \in \mathbb{C}, \text{ однозначні}$$

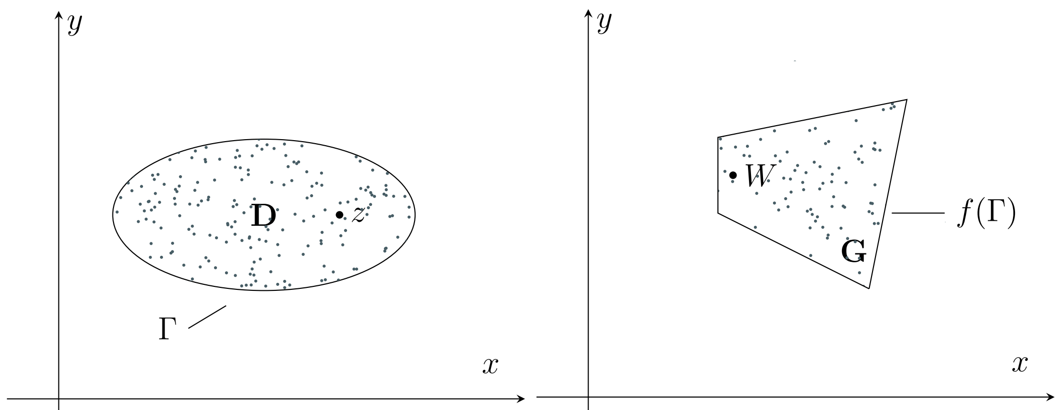
Приклад:

$f(z) = \operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ - многозначна(нескінченна кількість значень)

Приклад:

$f(z) = \sqrt[n]{z} \in \mathbb{C}$, - многозначна ($n$ - значна)

$W = f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \quad u, v \in \mathbb{R}$



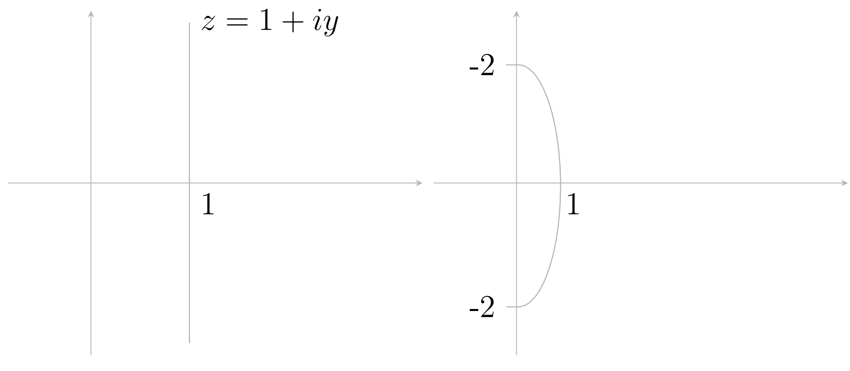
$z = x + iy, z \in D$ $\quad$ $W \in G = f(D), W = f(z) = u + iv$

Приклад:

$\Gamma : x = 1, f(z) = z^2, f(\Gamma) - ?$

$z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy|_{x=1} = \underbrace{1 - y^2}_{u} + \underbrace{2iy}_{v}$

$y \in \mathbb{R} \Rightarrow v \in \mathbb{R}, y = \dfrac{v}{2} \Rightarrow u = 1 - \dfrac{v^2}{4}$



1.7 Основні елементарні функції комплексної змінної

1.7.1 Показникова функція $\exp z$

$z \in \mathbb{C}, \quad z = xiy$

def $\quad \exp z = e^x(\cos y + isiny)$

Основні властивості:

1. При $z = x \in \mathbb{R}$ співпадає з e^x.

   Доведення. $\exp z|_{z=x} = \exp x = \langle y = 0 \rangle = e^x$

2. При $z = iy$ $(x = 0)$: $\quad \exp iy = e^0(\cos y + i \sin y) = e^{iy}$ - формула Ойлера.

3. Зберігається властивість:

$$\exp z_1 \cdot \exp z_2 = exp(z_1 + z_2)$$

   Доведення.
   $\exp z_1 \cdot \exp z_2 = e^{x_1}(\cos y_1 + i \sin y_1) \cdot e^{x_2}(\cos y_2 + i \sin y_2) = e^{x_1+x_2} (\cos(y_1 + + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)) \underset{\text{def exp}}{=\!=} = \exp(x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)) = \exp(z_1 + z_2)$

   Зауваження. $\exp z = \exp(x + iy) = \exp z \cdot \exp iy = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + isiny)$

4. $\forall z \quad \exp z \neq 0.$

   Доведення.
   Відомо, що $W = 0 \Longleftrightarrow |W| = 0. \quad |\exp z| = |e^x(\cos y + isiny)| = |e^x| \cdot \cdot \underbrace{|\cos y + isiny|}_{|e^{i\varphi}|} = |e^x| \cdot \sqrt{\cos^y + \sin^2 y} = e^x > 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}.$

5. Періодична $T = 2\pi i$.

   Доведення.

   (a) Нехай $W = \exp z$.

   Тоді для $z + 2\pi ik : \quad \exp(z + 2\pi ik) = \exp(z + i(y + 2\pi k)) = e^x(\cos(y + \cancel{2\pi k}) + i \sin(y + \cancel{2\pi k})) = \exp z = W$

   (b) Нехай $W = \exp z_1$ *і* $W = \exp z_2$.

   $e^{x_1}(\cos y_1 + i \sin y_1) = e^{x_2}(\cos y_2 + i \sin y_2) \Longrightarrow$
   $\begin{cases} e^{x_1} = e^{x_2} \\ y_2 = y_1 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$
   $\Longrightarrow x_1 = x_2$. *Тоді* $z_2 - z_1 = x_2 + iy_2 - (x_1 + iy_1) = x_1 + i(y_1 + 2\pi k) - (x_1 + iy_1) = 2\pi ik$

1.7.2 Логарифмічна функція $\mathrm{Ln}\, z$

$z \in \mathbb{C}, \quad (z = x + iy)$

def $W = \mathrm{Ln}\, z$, якщо $\exp W = z$ **Основні властивості**:

1. $\mathrm{Ln}\, z$ - багатозначна, бо exp - періодична функція.

2. Визначена на $\forall z \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$ (exp не може перетворюватись на 0).

3. При $z = x \in \mathbb{R}$ співпадає з $\mathrm{Ln}\, x$ (тому що e^x буде обереною функцією).

4. Зберігається властивість:

$$\mathrm{Ln}\,(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Ln}\, z_1 + \mathrm{Ln}\, z_2$$

> **Доведення.**
> *Нехай* $W_1 = Ln\, z_1,\ W_2 = Ln\, z_2 \iff z_1 = \exp W_1,\ z_2 = \exp W_2$. *Знайдемо* $z_1 \cdot z_2:\quad z_1 \cdot z_2 = \exp W_1 \cdot \exp W_2 = \exp(W_1 + W_2)$. *Тоді* $Ln\,(z_1 \cdot z_2) = W_1 + W_2 = Ln\, z_1 + Ln\, z_2$.

5. Усі значення $\mathrm{Ln}\, z$:

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i\ \mathrm{Arg}\, z$$

> **Доведення.** $Ln\, z = \langle z = |z|(\cos(\arg z + 2\pi k) + i \sin(\arg z + 2\pi k))\rangle = Ln\,(|z| \exp(i\ Arg\, z) =$
> $= Ln\,|z| + Ln\,(\exp(\ Arg\, z)) = \langle |z| \in \mathbb{R},\ |z| > 0,\ z \neq 0 \Rightarrow Ln\,|z| = \ln|z|\rangle = \ln|z| + i\ Arg\, z$

6.

1.7.3 Тригонометричні функції

$z \in \mathbb{C}, \quad (z = x + iy)$

def
$$\sin z = \frac{1}{2i}(\exp(iz) - \exp(-iz))$$
$$\cos z = \frac{1}{2}(\exp(iz) - \exp(-iz))$$
$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

Основні властивості:

1. Визначені на $\forall z \in \mathbb{C}$:

$$\sin(-z) = -\sin z, \quad \cos(-z) = \cos z$$

2. При $z = x \in \mathbb{R}$ співпадає з $\sin x,\ \cos x$.

> **Доведення.**
> $\sin z|_{z=x} = \frac{1}{2i}(\exp(ix) - \exp(-ix)) = \frac{1}{2i}(\cos x + i \sin x - (cosx - i \sin x)) = \sin x.$

Аналогічно з $\cos z|_{z=x} = \cos x$.

3. ($\exp z$ - період $T = 2\pi i \Longrightarrow \exp iz : T = 2\pi$)

$$T_{\sin z, \cos z} = 2\pi, \quad T_{\tan z, \cot z} = \pi$$

4. Зберігаються усі тригинометричні формули. Зокрема:

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 + \sin z_1 \sin z_2$$

Доведення.

$$\textbf{\textit{def}} \quad \sin z,\ \cos z \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{ll} \textit{1)}\ \exp iz = \cos z + i \sin z & (*) \\ \textit{2)}\ \exp(-iz) = \cos z - i \sin z & (**) \end{array}$$

При $z = z_1 + z_2$:

1) $\exp i(z_1 + z_2) \underset{\textit{в-сть} \exp}{=\!=} \exp iz_1 \cdot \exp iz_2 \underset{(*)}{=\!=} (\cos z_1 + i \sin z_1)(\cos z_2 + i \sin z_2) =$
$= \cos z_1 \cdot \cos z_2 - \sin z_1 \cdot \sin z_2 + i(\sin z_1 \cdot \cos z_2 + \cos z_2 \cdot \sin z_2)$

2) $\exp(-i(z_1 + z_2)) = \exp(-iz_1) \cdot \exp(-iz_2) = (\cos z_1 + i \sin z_1)(\cos z_2 + i \sin z_2) =$
$= \cos z_1 \cdot \cos z_2 - \sin z_1 \cdot \sin z_2 - i(\sin z_1 \cdot \cos z_2 + \cos z_2 \cdot \sin z_2)$

$\dfrac{(1) + (2)}{2}$: $\quad \cos z_1 \cdot \cos z_2 - \sin z_1 \cdot \sin z_2 = \dfrac{1}{2}(\exp i(z_1 + z_2) + \exp(-i(z_1 + z_2)) \underset{\text{def}}{=\!=}$ $= \cos(z_1 + z_2)$

$\dfrac{(1) - (2)}{2}$: $\quad \sin z_1 \cdot \cos z_2 + \cos z_1 \cdot \sin z_2 = \dfrac{1}{2i}(\exp i(z_1 + z_2) - \exp(-(z_1 + z_2)) \underset{\text{def}}{=\!=}$ $= \sin(z_1 + z_2)$

Надаючи z_1 та z_2 різні значення, можжна отримати усі інші тригонометричні формули. При $z = z_1 = z_2$: $\quad \sin z \cdot \cos z + \cos z \cdot \sin z = 2 \sin z \cdot \cos z = \sin 2z$.
При $z_1 = z, z_2 = -z : \cos z \cdot \cos(-z) - \sin z \cdot \sin(-z) = \cos^2 z + \sin^2 z = 1 = \cos 0$.
При $z_1 = \dfrac{\pi}{2}, z_2 = z : \sin \dfrac{\pi}{2} \cdot \cos z + \cos \dfrac{\pi}{2} \cdot \sin z = \cos z = \sin \left(\dfrac{\pi}{2} + z \right)$

5.

$$\sin z = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad z = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$
$$\cos z = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad z = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Доведення.

1) $\sin z = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \dfrac{1}{2i}(\exp(iz) - \exp(-iz)) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \exp i(x + iy) =$
$= \exp(-i(x + iy)$. $\quad \exp(-y + ix) = \exp(y - ix)$. $\quad \Longleftrightarrow \quad e^{-y} =$

$= (\cos x + i\sin x) = e^y(\cos(-x) + i\sin(-x)) \iff$ *"=" в триг формі.* $\begin{cases} e^{-y} = e^y \\ x = -x + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases}$, $\begin{cases} y = 0 \\ x\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases}$,

$z = x + iy = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$

2) $\cos z = \sin\left(\frac{\pi}{2} + z\right) = 0 \; \frac{\pi}{2} + z = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad z = -\frac{\pi}{2} + \pi k =$
$= \pi - \frac{\pi}{2} + \pi(k-1) = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$

6. $\sin z$, $\cos z$ не обмежені.
   Наприклад для $z = \frac{\pi}{2} + iy, \quad y \in \mathbb{R}: \quad \sin z = \sin\left(\frac{\pi}{2} + iy\right) = \frac{1}{2i}\left(\exp\left(i\left(\frac{\pi}{2} + iy\right)\right) - \right.$
   $\left. -\exp\left(-i\left(\frac{\pi}{2} + iy\right)\right)\right) = \frac{1}{2i}\left(\exp\left(i\frac{\pi}{2} - y\right) - \exp\left(y - i\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{-y}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) - \right.$
   $\left. -\, e^{-y}\left(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(e^{-y} + e^{y}\right).$

1.7.4 Гіперболічні функції

$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}$

def $\operatorname{sh} z = \frac{1}{2}(\exp z - \exp(-z))$

$\operatorname{ch} z = \frac{1}{2}(\exp z + \exp(-z)$

$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$

$\operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}$

Основні властивості:

1. Визначені на $\forall z \in \mathbb{C}$:
$$\operatorname{sh}(-z) = -\operatorname{sh}(z), \quad \operatorname{ch}(-z) = \operatorname{ch}(z)$$
2. При $z = x \in \mathbb{R}$ співпадає з $\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x$

   Доведення. *В цьому випадку* $\exp x = e^x$, *і звідци це встановлюється.*
3. Періодичні:
$$T_{\text{sh,ch}} = 2\pi i, \quad T_{\text{ th , cth }} = \pi i$$
4. Зв'язок з тригонометричними функціями:
$$\sin iz = i\operatorname{sh} z, \quad \cos iz = i\operatorname{ch} z$$

Обернені тригонометричні і гіперболічні функції:

def $W = \arcsin z, \quad \sin W = z$

1.7.5 Степінь з комплексним показником. Загальна степенева (z^α) та показникова α^z функції

Нехай $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, α^β - множина значень. В загальному випадку $\alpha^{\beta_1} \cdot \alpha^{\beta_2} \neq \alpha^{\beta_1+\beta_2}$.

def $\alpha^\beta = \exp(\beta \text{ Ln}\, \alpha)$

Загальна степенева функція:

def $f(z) = z^\alpha = \exp(\alpha \text{ Ln}\, z), \quad \alpha \in \mathbb{C}$

$z^\alpha = \exp(\alpha \text{ Ln}\, z) = \langle \alpha = a + ib, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad z = |z| \cdot e^{i\varphi} \rangle = \exp((a+ib)(\ln|z| +$
$+ i(\varphi + 2\pi k))) = \exp(a \ln|z| - b(\varphi + 2\pi k) + i(a(\varphi + 2\pi k) + b \ln|z|)) = e^{a\ln|z| - b(\varphi+2\pi k)} \cdot$
$\cdot (\cos(a(\varphi + 2\pi k) + b\ln|z|) + i \sin(a(\varphi + 2\pi k) + b \ln|z|))$

При $\alpha \in \mathbb{R}$:

- якщо $\alpha = n \in \mathbb{Z}\ (a = n \in \mathbb{Z}, b = 0)$:
  $z^\alpha|_{\alpha=n} = e^{n\ln|z|} \cdot (\cos(n(\varphi + 2\pi k))) + i \sin(n(\varphi + 2\pi k)) = e^{n\ln|z|} \cdot (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) =$
  $= |z|^n, \quad n \in \mathbb{Z}$
- якщо $\alpha = \dfrac{1}{n} \in \mathbb{R}\ \left(a = \dfrac{1}{n} \in \mathbb{Z}, b = 0\right)$:
  $z^\alpha|_{\alpha=\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln|z|} \cdot \left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\varphi + 2\pi k\right) + i \sin\left(\dfrac{1}{n}(\varphi + 2\pi k)\right)\right) = |z|^{\frac{1}{n}} \left(\cos \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n} +\right.$
  $\left. + i \sin \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) = \sqrt[n]{z}$

Загальна показникова функція:

def $f(z) = \alpha^z = \exp(z \text{ Ln}\, \alpha), \quad a \in C$

$\alpha^z = \exp(z \text{ Ln}\, \alpha) = \langle z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad \alpha = |z| e^{i\psi} \rangle = \exp((x + iy)(\ln|\alpha| +$
$+ i(\psi + 2\pi k))) = \exp(x \ln|\alpha| - u(\psi + 2\pi k) + i(y \ln|\alpha| + x(\psi + 2\pi k))) = e^{x\ln|\alpha| - y(\psi + 2\pi k)} \cdot$
$\cdot (\cos(y \ln|\alpha| + x(\psi + 2\pi k)) + i \sin(y \ln|\alpha| + x(\psi + 2\pi k)))$

При $\alpha \in \mathbb{R}$: $\quad (|e| = e, \psi = 0)$

- $e^z = e^{x\ln e - y\cdot 2\pi k} \cdot (\cos(y \ln e + x \cdot 2\pi k) + i \sin(y + x \cdot 2\pi k))$
- При $k = 0$: $\quad e^z|_{k=0} = e^x \cdot (\cos y + i \sin y) = \exp z$