ДОМАШНЯ РОБОТА №15
З ПРЕДМЕТУ
"ТЕОРІЯ ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ"

ФІ-12 Бекешева Анастасія

1. $f(x)$ - непарна.

$$b(\omega)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha|x|}\sin(\beta x)\sin(\omega x)\ \mathrm{d}x\ =-\frac{1}{4}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha|x|}(e^{-i\beta x}-e^{i\beta x})(e^{-i\omega x}-e^{i\omega x}))=$$

$$=-\frac{1}{4}\left(\int\limits_0^{+\infty} e^{x(-\alpha-i\beta-i\omega)}\ \mathrm{d}x\ -\int\limits_0^{+\infty} e^{x(-\alpha-i\beta+i\omega)}\ \mathrm{d}x\ -\int\limits_0^{+\infty} e^{x(-\alpha+i\beta-i\omega)}\ \mathrm{d}x\ +\int\limits_0^{+\infty} e^{x(-\alpha+i\beta+i\omega)}\ \mathrm{d}x\right)=$$

$$=-\frac{1}{4}\left(\frac{e^{x(-\alpha-i\beta-i\omega)}}{-\alpha-i\beta-i\omega}-\frac{e^{x(-\alpha-i\beta+i\omega)}}{-\alpha-i\beta+i\omega}-\frac{e^{x(-\alpha+i\beta-i\omega)}}{-\alpha+i\beta-i\omega}+\frac{e^{x(-\alpha+i\beta+i\omega)}}{-\alpha+i\beta+i\omega}\right)\Bigg|_0^{+\infty}=$$

$$=\langle x\to+\infty:\ e^x\to 0,\quad x\to 0:\ e^x\to 1\rangle=-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\alpha+i\beta+i\omega}+\frac{1}{-\alpha-i\beta+i\omega}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{-\alpha+i\beta-i\omega}+\frac{1}{\alpha-i\beta-i\omega}\right)=\frac{2\alpha\beta\omega}{(\alpha^2+\beta^2)+2\omega^2(\alpha^2-\beta^2)+\omega^4}$$

2. $f(x)$ - непарна.

$$b(\omega)=\int\limits_0^{+\infty} f(x)\sin(\omega x)\ \mathrm{d}x\ =\int\limits_0^{1}\sin(\omega x)\ \mathrm{d}x\ +\int\limits_1^{+\infty} 0\ \mathrm{d}x\ =-\frac{1}{\omega}\cos(\omega x)\Big|_0^1=\frac{1-\cos(\omega)}{\omega}$$

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{1-\cos(\omega x)}{\omega}\sin(\omega x)\ \mathrm{d}\omega$$

3. $$F(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}\ \mathrm{d}x\ =\int\limits_0^{1} xe^{-i\omega x}\ \mathrm{d}x\ =\left\langle\begin{array}{cc} u=x & \mathrm{d}v\ =e^{-i\omega x}\ \mathrm{d}x\\ \mathrm{d}u\ =\ \mathrm{d}x & v=\dfrac{1}{i\omega}e^{-i\omega x}\end{array}\right\rangle=$$

$$=\frac{x}{i\omega}e^{-i\omega x}\Big|_0^1+\frac{1}{i\omega}\int\limits_0^1 e^{-i\omega x}\ \mathrm{d}x\ =\frac{1}{i\omega}(e^{-i\omega}-0)+\frac{1}{\omega^2}e^{-i\omega x}\Big|_0^1=\frac{1}{i\omega}e^{-i\omega}+\frac{1}{\omega^2}(e^{-i\omega}-1)=$$

$$=\frac{(i\omega+1)e^{-i\omega}-1}{\omega^2}$$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(i\omega+1)e^{-i\omega}-1}{\omega^2}e^{i\omega x}\ \mathrm{d}\omega$$

4. $$a(\omega)=\int\limits_0^{+\infty} f(x)\cos(\omega x)\ \mathrm{d}x\ =\int\limits_0^{1}\cos(\omega x)\ \mathrm{d}x\ +0=\frac{1}{\omega}\sin(\omega x)\Big|_0^1=\frac{\sin\omega}{\omega}$$

5. $$b(\omega)=\int\limits_0^{+\infty} f(x)\sin(\omega x)\ \mathrm{d}x\ =\int\limits_0^{+\infty}(x+1)\sin(\omega x)\ \mathrm{d}x\ =\left\langle\begin{array}{cc} u=x & \mathrm{d}x\ =\sin(\omega x)\ \mathrm{d}x\\ \mathrm{d}u\ =\ \mathrm{d}x & -\dfrac{1}{\omega}\cos(\omega x)\end{array}\right\rangle=$$

$$-\frac{x}{\omega}\cos(\omega x)\Big|_0^1+\frac{1}{\omega^2}\int\limits_0^1\cos(\omega x)\ \mathrm{d}(\omega x)\ +\int\limits_0^1\sin(\omega x)\ \mathrm{d}x\ =\left(-\frac{x}{\omega}\cos(\omega x)+\frac{1}{\omega^2}\sin(\omega x)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\omega}\cos(\omega x)\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{\omega^2}(-\omega\cos(\omega)+\sin(\omega)-\omega\cos(\omega)+0-\sin 0+\omega\cos 0)=\frac{\sin\omega+\omega-2\omega\cos\omega}{\omega^2}$$