ДОМАШНЯ КОНТРОЛЬНА РОБОТА
З ПРЕДМЕТУ
"ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ"

Варіант №15

ФІ-12 Бекешева Анастасія

1. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння:

$$y' = \frac{x^2 + 2xy - y^2}{2x^2 - 2xy}$$

Запишемо у вигляді: $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{x^2 + 2xy - y^2}{2x^2 - 2xy}$. Зробимо заміну $y = xv$, тоді $\frac{\partial y}{\partial x} = x\frac{\partial v}{\partial x} + v$. Підставимо: $x\frac{\partial v}{\partial x} + v = \frac{x^2 + 2x^2v - (xv)^2}{2x^2 - 2x^2v}$; $x\frac{\partial v}{\partial x} + v = \frac{1 + 2v - v^2}{2 - 2v}$; $\frac{1}{x}\partial x = = \frac{1}{\left(\frac{1 + 2v - v^2}{2 - 2v} - v\right)}\partial v$; $\int \frac{1}{x}\partial x = \int \frac{2 - 2v}{1 + v^2}\partial v$; $\ln|x| = \int \frac{2\partial v}{1 + v^2} - -\int \frac{\partial(v^2 + 1)}{1 + v^2} = 2\arctan(v) - \ln|1 + v^2| + C_1$; $\ln|x| - 2\arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \ln\left|1 + \frac{y^2}{x^2}\right| = C_1$.

$$\textbf{Відповідь: } \ln|x| - 2\arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \ln\left|1 + \frac{y^2}{x^2}\right| = C_1.$$

2. Розв'язати задачу Коші:

$$y' + \frac{2}{x}y = x^3,\ y(1) = -\frac{5}{6}$$

Вихідне рівняння є рівнянням Бернуллі. Стандартна заміна $y = uv$. Підставимо: $u'v + v'u + \frac{2}{x}uv = x^3$; $\left(u' + \frac{2}{x}u\right)v + uv' = x^3$. Шукаємо частковий розв'язок рівняння: $u' + \frac{2}{x}u = 0$; $\frac{\partial u}{u} = -2\frac{\partial x}{x}$; $\int \frac{\partial u}{u} = -2\int \frac{\partial x}{x}$; $\ln|u| = \ln x^{-2}$ $u = x^{-2}$. Підставимо: $x^{-2}v' = x^3$; $\int \partial v = \int x^5\partial x$; $v = \frac{x^6}{6} + C_1$; $y = x^{-2}\left(\frac{x^6}{6} + C_1\right)$. Врахуємо початкову умову: $-\frac{5}{6} = 1\left(\frac{1}{6} + C_1\right)$; $C_1 = -1$.

$$\textbf{Відповідь: } y = x^{-2}\left(\frac{x^6}{6} - 1\right)$$

3. Розв'язати задачу Коші:

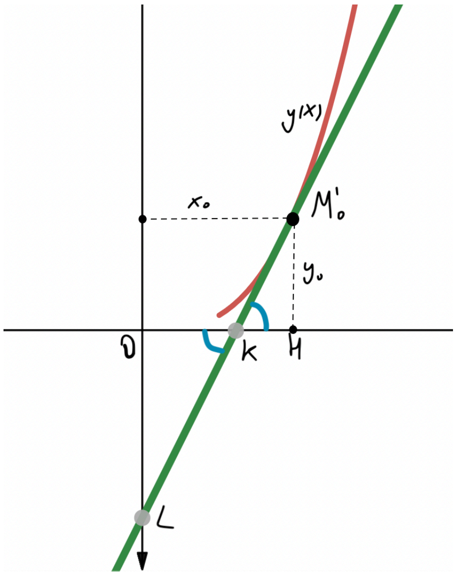
$$y' - y = 2xy^2, y(0) = \frac{1}{2}$$

Вихідне рівняння є рівнянням Бернуллі. Стандартна заміна $y = \frac{1}{t}, t' = -\frac{y'}{y^2}$. Поділемо рівняння на y^2: $\frac{y'}{y^2} - \frac{1}{y} = 2x$. Підставимо: $t' + t = -2x$. Зробимо заміну $t = uv$. $u'v + v'u + uv = -2x$; $(u' + u)v + v'u = -2x$. Шукаємо частковий розв'язок рівняння: $u' + u = 0$; $\int \frac{\partial u}{u} = -\partial x$; $u = e^{-x}$. Підставимо: $e^{-x}v' = -2x$; $\int \partial v = -\int 2e^x\partial x$; $v = -2e^x(x - 1) + C_1$; $t = -2(x - 1) + C_1e^{-x}$; $y = \frac{1}{-2(x - 1) + C_1e^{-x}}$; $0 = \frac{1}{-2\left(\frac{1}{2} - 1\right) + C_1e^{-\frac{1}{2}}}$; $C_1 = 0$.

$$\textbf{Відповідь: } y = \frac{1}{-2(x - 1)}.$$

4. Знайти рівняння лінії, що проходить через точку M_0, якщо відрізок її дотичної між точкою дотику та віссю OY ділиться в точці перетину з віссю абсцис у відношенні $a : b$ (якщо рахувати від осі OY):

$$M_0(1, -1), a : b = 1 : 3$$



Розглянемо трикутники OKL і $KM_0'H$, що подібні по двум кутам, тобто їх сторони пропорціональні: $\dfrac{|KL|}{|KM_0'|} = \dfrac{|OK|}{|KH|} = 3$. Рівняння дотичної у точці $M_0'(x_0, y_0) : y - y_0 = = y'(x_0)(x - x_0)$. Щоб знайти де пряма пересікає вісь абсцис вирішемо с-му рівнянь: $\begin{cases} y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0) \\ y = 0 \end{cases}$; $\quad -y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$; $\quad xy'(x_0) = x_0 y'(x_0) - y_0$;

$x = x_0 - \dfrac{y_0}{y'(x_0)}$. Таким чином: $K\left(x_0 - \dfrac{y_0}{y'(x_0)}, 0\right)$. Знайдемо довільну точку $M(x, y)$ прямої (для зручності зробимо заміну $x_0 = x, y_0 = y$): $|OK| = \left|x - \dfrac{y}{y'}\right|$;

$|KH| = \left|x - \left(x - \dfrac{y}{y'}\right)\right| = \left|\dfrac{y}{y'}\right|$; $\quad |OK| = 3|KH|$; $\quad \left|x - \dfrac{y}{y'}\right| = 3\left|\dfrac{y}{y'}\right|$;

$x - \dfrac{y}{y'} = \pm 3\dfrac{y}{y'}$; $\quad \begin{cases} x = 4\dfrac{y}{y'} \\ x = -2\dfrac{y}{y'} \end{cases}$; $\quad \begin{cases} \displaystyle\int \frac{\partial y}{y} = 4 \int \frac{\partial x}{x} \\ \displaystyle\int \frac{\partial y}{y} = -2 \int \frac{\partial x}{x} \end{cases}$; $\quad \begin{cases} \ln|y| = \ln|C_1 x^4| \\ \ln|y| = \ln|C_2 x^{-2}| \end{cases}$.

Врахуємо точку $M_0(1, -1)$: $\begin{cases} -1 = C_1^3 \\ -1 = C_2 1^{-2} \end{cases}$; $\quad C_1 = C_2 = -1$; $\quad y_1 = -x^4$, $y_2 = -x^2$.

Відповідь: $y_1 = -x^4, y_2 = -x^2$.

5. Розв'язати задачу Коші:

$$y''y^3 + 25 = 0, y(2) = -5, y'(2) = -1$$

Вихідне рівняння має вид: $F(y, y', y'') = 0$ і для зниження порядку покладемо $y' = p$. Тоді: $y'' = pp'$; $\quad pp'y^3 = -25$; $\quad p\partial p = -25\dfrac{\partial y}{y^3}$; $\quad p^2 = 25y^{-2} + C_1$. Врахуємо початкову умову: $1 = 25 \cdot (-5)^{-2} + C_1$; $\quad C_1 = 0$. Тож: $y' = \dfrac{5}{y}$. Звідси: $y\partial y = 5\partial x$; $\displaystyle\int y\partial y = 5\int \partial x$; $\quad y^2 = 10x + C_2$. Врахуємо початкову умову: $25 = 10 \cdot 2 + C_2$; $\quad C_2 = 5$

Відповідь: $y^2 - 10x - 5 = 0$.

6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y''' + 4y'' + 4y' = (9x + 15)e^x$$

Складемо характеристичне рівняння: $\lambda^3 + 4\lambda^2 + 4\lambda = 0$; $\quad \lambda(\lambda + 2)^2 = 0$; $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -2$. Загальне рішення однорідного рівняння: $y_0 = C_1 + (C_2 + C_3x)e^{-2}$. Шукаємо частковий розв'язок $y_1 = (Ax + B)e^x$; $\quad y_1' = (Ax + A + B)e^x$; $y_1'' = (Ax + 2A + B)e^x$; $\quad y_1''' = (Ax + 3A + B)e^x$. Підставимо в початкове рівняння: $Ax + 3A + B + 4Ax + 8A + 4B + 4Ax + 4A + 4B = 9x + 15$; $\quad \begin{cases} 9A = 9 \\ 15A + 17B = 15 \end{cases}$; $A = 1, B = 0$. Підставимо: $y_1 = xe^x$. Загальне рішення: $y = y_1 + y_0 = xe^xC_1 + (C_2 + C_3x)e^{-2}$.

Відповідь: $y = xe^xC_1 + (C_2 + C_3x)e^{-2}$.

7. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y''' - 16y' = 48e^{4x} + 64\cos 4x - 64\sin 4x$$

Складемо характеристичне рівняння: $\lambda^3 - 16\lambda = 0$; $\quad \lambda_1 = -4, \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 4$. Загальне рішення однорідного рівняння: $y_0 = C_1e^{-4x} + C_2 + C_3e^{4x}$. Шукаємо частковий розв'язок $y_1 = Axe^{4x} + B\cos 4x + C\sin 4x$; $\quad y_1' = Ae^{4x} + 4Axe^{4x} - 4B\sin 4x + 4C\cos 4x$; $\quad y_1'' = 8Ae^{4x} + 16Axe^{4x} - 16B\cos 4x - 16C\sin 4x$; $\quad y_1''' = 48Ae^{4x} + 64Axe^{4x} - 64B\sin 4x + 64C\cos 4x$. Підставимо в початкове рівняння: $48Ae^{4x} + 64Axe^{4x} - 64B\sin 4x + 64C\cos 4x - 16Ae^{4x} - 64Axe^{4x} + 64B\sin 4x - 64C\cos 4x = 48e^{4x} + 64\cos 4x - 64\sin 4x$; $\quad -48e^{4x} + 32Ae^{4x} - 64\cos 4x - 128C\cos 4x + 64\sin 4x + 128B\sin 4x = 0$; $\quad e^{4x}(32A - 48) - \cos 4x(128C + 64) + \sin 4x(128B + 64) = 0$

$\begin{cases} 32A - 48 = 0 \\ 128B + 64 = 0 \\ 128C + 64 = 0 \end{cases}$; $\quad \begin{cases} A = \dfrac{3}{2} \\ B = -\dfrac{1}{2} \\ C = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$. Підставимо: $y_1 = \dfrac{3}{2}xe^{4x} + -\dfrac{1}{2}\cos 4x + -\dfrac{1}{2}\sin 4x$.

Загальне рішення: $y = y_1 + y_0 = \dfrac{3}{2}xe^{4x} + -\dfrac{1}{2}\cos 4x + -\dfrac{1}{2}\sin 4x + C_1e^{-4x} + C_2 + C_3e^{4x}$

Відповідь: $y = \dfrac{3}{2}xe^{4x} + -\dfrac{1}{2}\cos 4x + -\dfrac{1}{2}\sin 4x + C_1e^{-4x} + C_2 + C_3e^{4x}$.

8. Розв'язати задачу Коші:

$$y'' + 4y = 4\cot 2x, y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3, y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$$

Складемо характеристичне рівняння: $\lambda^2 + 4 = 0$; $\quad \lambda_1 = -2i, \lambda_2 = 2i$. Загальне рішення однорідного рівняння: $y_0 = C_1\sin 2x + C_2\cos 2x$. Складемо матрицю Вронського: $W = \begin{pmatrix} \sin 2x & \cos 2x \\ 2\cos 2x & -2\sin 2x \end{pmatrix}$; $\quad W^{-1} = \begin{pmatrix} \sin 2x & \dfrac{\cos 2x}{2} \\ \cos(2x) & -\dfrac{\sin 2x}{2} \end{pmatrix}$;

$$\overline{C}' = \begin{pmatrix} \sin 2x & \dfrac{\cos 2x}{2} \\ \cos(2x) & -\dfrac{\sin 2x}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4\cot 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2\cos^2 2x}{\sin 2x} \\ -2\cos 2x \end{pmatrix}; \qquad \overline{C} = \begin{pmatrix} \displaystyle\int \dfrac{2\cos^2 2x}{\sin 2x} \partial x \\ \displaystyle\int -2\cos 2x \partial x \end{pmatrix}.$$

$$\int \frac{2\cos^2 2x}{\sin 2x}\partial x = \int \frac{\cos^2 2x}{\sin 2x}\partial(2x) = \int \cos 2x \cot 2x \partial(2x) = -\int \sin 2x \partial(2x) +$$
$$+\int \frac{1}{\sin 2x}\partial(2x) = \cos 2x - \ln|\cot x| + C_1.$$
$$\int -2\cos 2x \partial x = -\int \cos 2x \partial(2x) = -\sin 2x + C_2.$$

$\overline{C} = \begin{pmatrix} \cos 2x - \ln|\cot x| \\ -\sin 2x \end{pmatrix} + C$. Шукаємо частковий розв'язок $y_1 = -\cos 2x \sin 2x + {}$ $+ 2\left(\dfrac{1}{2}\cos 2x - \dfrac{1}{2}\ln|\cot x|\right)\sin 2x = -\ln|\cot x| \cdot \sin 2x$. Загальне рішення: $y = y_1 + {}$ $+ y_0 = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x - \sin 2x \ln|\cot x|$. Врахуємо початкову умову:

$$\begin{cases} 3 = C_1 \sin\left(2\cdot\dfrac{\pi}{4}\right) + C_2 \cos\left(2\cdot\dfrac{\pi}{4}\right) - \sin\left(2\cdot\dfrac{\pi}{4}\right)\ln\left|\cot\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right| \\ 2 = -2\cos\left(2\cdot\dfrac{\pi}{4}\right)\ln\left|\cot\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right| + \dfrac{\sin\left(2\cdot\dfrac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)} - 2C_1 \sin\left(2\cdot\dfrac{\pi}{4}\right) + 2C_2\cos\left(2\cdot\dfrac{\pi}{4}\right) \end{cases}.$$

$C_1 = 0, C_2 = 3; \qquad y = -\sin 2x(\ln|\cot x| - 3).$

Відповідь: $y = -\sin 2x(\ln|\cot x| - 3)$.