Роботу виконала студентка

Національного університету «Одеська політехніка»

"Прикладної математики"

Матиченко А.Д.

Машина опорних векторів

ЗАВДАННЯ 1

На вхід машини опорних векторів з двома нейронами у прихованому шарі подали вектор ознак $x(1,2)$. Функція ядра - гауссівська з $\sigma=1$ Центри функцій ядра вибрані як $(0,0),(1,1)$. Визначити вихід мережі, якщо вагові коефіцієнти задані як $\omega_1=1, \omega_2=0.5, b=2$.

Розв'язання

1. Обчислимо значення у прихованому шарі мережі:

$$K\left(x_i, x_j\right)=e^{\frac{\left(-\left\|x_i-x_j\right\|^2\right)}{2\sigma^2}}, \sigma=1$$

   a. $K\left(x,t_1\right)=e^{-\frac{\left((1-0)^2+(2-0)^2\right)}{2}}=e^{-2.5}=0.082$

   b. $K\left(x,t_2\right)=e^{-\frac{\left((1-1)^2+(2-1)^2\right)}{2}}=e^{-0.5}=0.6$

2. $y=1\cdot 0.082+0.5\cdot 0.6+2=2.382$
3. Оскільки більше 0, тому об'єкт належить першому класу.

ЗАВДАННЯ 2

Задано навчальну вибірку: 1-й клас: $(-2,-2),(1,1)$;2-й клас: $(-2,1),(1,-2)$. Визначити нелінійне перетворення векторів-ознак навчальних прикладів так, щоб їх можна було розділити прямою.

Розв'язання

Класи об'єктів нелінійно розділяються і потрібно побудувати поверхню, що розділяє. В окремі випадки лінійна роздільність образів забезпечується лише нелінійною освітою без підвищення розмірності прихованого простору. Визначимо нелінійне перетворення прикладів навчальної вибірки за допомогою двох радіальних базисних функцій $\varphi_1(x)=e^{\left(\|x-t_1\|^2\right)}$, $\varphi_2(x)=e^{\left(\|x-t_2\|^2\right)}$.

$t_1(1,1)-center\ \varphi_1(x)$		$t_2(-2,-2)-center\ \varphi_2(x)$	
$\varphi_1(1,1)=e^{\left(-\left((1-1)^2+(1-1)^2\right)\right)}=1$		$\varphi_2(1,1)=e^{\left(-\left((1+2)^2+(1+2)^2\right)\right)}=0$	
$\varphi_1(-2,-2)=e^{\left(-\left((-2-1)^2+(-2-1)^2\right)\right)}=0$		$\varphi_2(-2,-2)=e^{\left(-\left((-2+2)^2+(-2+2)^2\right)\right)}=1$	
$\varphi_1(-2,1)=e^{\left(-\left((-2-1)^2+(1-1)^2\right)\right)}=0.0001$		$\varphi_2(-2,1)=e^{\left(-\left((-2+2)^2+(1+2)^2\right)\right)}=0.05$	
$\varphi_1(1,-2)=e^{\left(-\left((1-1)^2+(-2-1)^2\right)\right)}=0.0001$		$\varphi_2(1,-2)=e^{\left(-\left((1+2)^2+(-2+2)^2\right)\right)}=0.05$	
$\omega_1\varphi_1+\omega_2\varphi_2=0$			
$\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}0.0001\\0.05\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}0.0001\\0.05\end{pmatrix}$

Тоді для побудови розділяючої поверхні можна застосувати одношаровий персептрон. Код програми:

```
import numpy as np


class Perceptron():
    def __init__(self, num_features = 2):
        self.num_features = num_features
        self.weights = np.zeros((num_features, 1), dtype=float)
        self.bias = np.zeros(1, dtype=np.float)

    def forward(self, x):
        linear = np.dot(x, self.weights)+self.bias
```

```
        predictions = np.where(linear > 0, 1, 0)
        return predictions

    def backward(self, x, y):
        predictions = self.forward(x)
        errors = y - predictions
        return errors

    def train(self, x, y, epochs=1000):
        for e in range(epochs):
            for i in range(y.shape[0]):
                errors = self.backward(x[i].reshape(1, self.num_features), y[i]).reshape(-1)
                self.weights += (errors * x[i]).reshape(self.num_features, 1)
                self.bias += errors

    def evaluate(self, x, y):
        predictions = self.forward(x).reshape(-1)
        accuracy = np.sum(predictions == y)/ y.shape[0]
        return accuracy
```

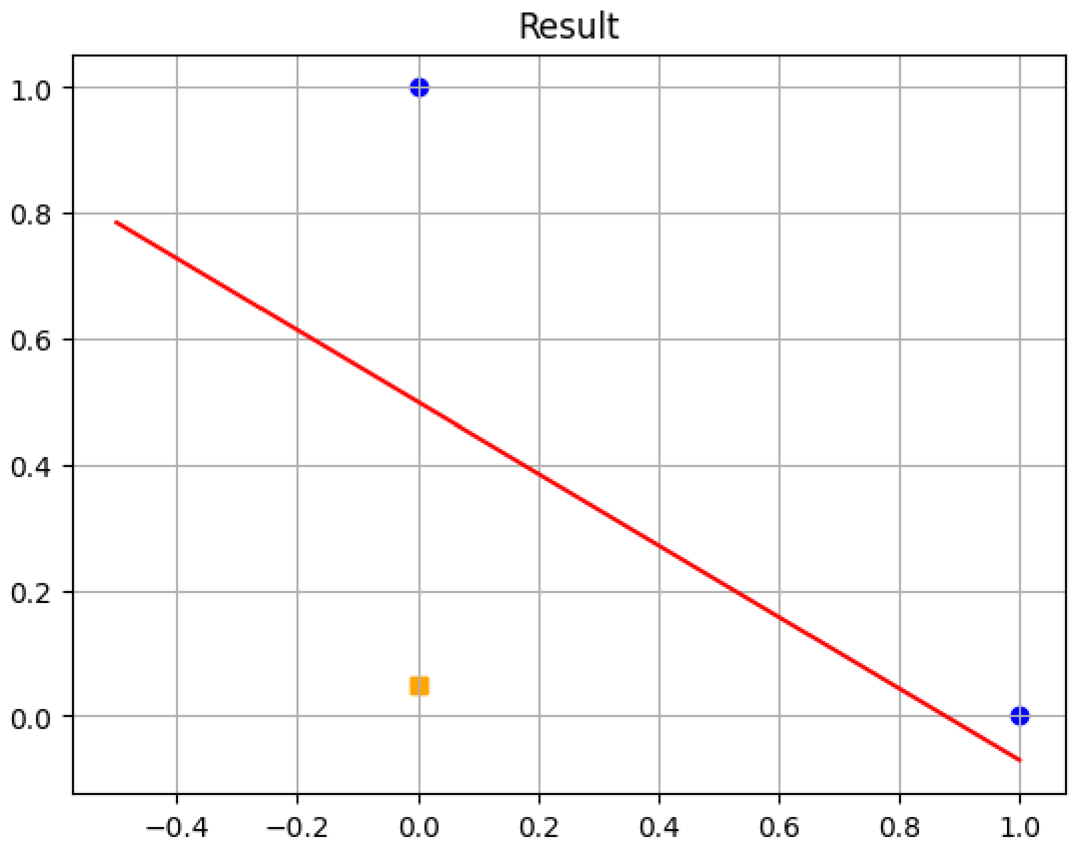
Параметри моделі: $\omega_1 = -0.57, \omega_2 = -1, b = 0.5$.

Площина: $-0.57x_1 - x_2 + 0.5 = 0$

Код графіка:

```
import matplotlib.pyplot as plt

x_min, x_max = -0.5,1
x=np.linspace(x_min,x_max)
y=np.array([-0.57*temp+0.5 for temp in x])
plt.plot(x,y,color='red')
plt.scatter(X_train[y_train == 0, 0], X_train[y_train == 0, 1], label='class 0', marker='o', color='blue')
plt.scatter(X_train[y_train == 1, 0], X_train[y_train == 1, 1], label='class 1', marker='s', color='orange')
plt.title('Result')
plt.grid()
```


Result
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−0.4
−0.2
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

ЗАВДАННЯ 3

Задано навчальну вибірку: 1-й клас: $(1,1),(0,0)$, 2-й клас: $(1,0),(0,1)$. Побудувати розділяючу поверхню у прихованому просторі ознак.

Розв'язання

Класи об'єктів нелінійно розділяються і потрібно побудувати поверхню, що розділяє. В окремі випадки лінійна роздільність образів забезпечується лише нелінійною освітою без підвищення розмірності прихованого простору. Визначимо нелінійне перетворення прикладів навчальної вибірки за допомогою двох радіальних базисних функцій $\varphi_1(x)=e^{\left(\|x-t_1\|^2\right)}$, $\varphi_2(x)=e^{\left(\|x-t_2\|^2\right)}$.

<table>
<tr><td colspan="2">$t_1(1,1)-center\ \varphi_1(x)$</td><td colspan="2">$t_2(0,0)-center\ \varphi_2(x)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\varphi_1(1,1)=e^{\left(-\left((1-1)^2+(1-1)^2\right)\right)}=1$</td><td colspan="2">$\varphi_2(1,1)=e^{\left(-\left((1-0)^2+(1-0)^2\right)\right)}=0.135$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\varphi_1(0,0)=e^{\left(-\left((0-1)^2+(0-1)^2\right)\right)}=0.125$</td><td colspan="2">$\varphi_2(0,0)=e^{\left(-\left((1-0)^2+(1-0)^2\right)\right)}=1$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\varphi_1(0,1)=e^{\left(-\left((0-1)^2+(1-1)^2\right)\right)}=0.367$</td><td colspan="2">$\varphi_2(0,1)=e^{\left(-\left((0-0)^2+(1-0)^2\right)\right)}=0.367$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\varphi_1(1,0)=e^{\left(-\left((1-1)^2+(0-1)^2\right)\right)}=0.367$</td><td colspan="2">$\varphi_2(1,0)=e^{\left(-\left((1-0)^2+(0-0)^2\right)\right)}=0.367$</td></tr>
<tr><td colspan="4">$\omega_1\varphi_1+\omega_2\varphi_2=0$</td></tr>
<tr><td>$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0.135\\1\end{pmatrix}$</td><td>$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1\\0.135\end{pmatrix}$</td><td>$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0.367\\0.367\end{pmatrix}$</td><td>$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0.367\\0.367\end{pmatrix}$</td></tr>
</table>

Тоді для побудови розділяючої поверхні можна застосувати одношаровий персептрон. Код програми:

```python
import numpy as np


class Perceptron():
    def __init__(self, num_features = 2):
        self.num_features = num_features
        self.weights = np.zeros((num_features, 1), dtype=float)
        self.bias = np.zeros(1, dtype=np.float)

    def forward(self, x):
        linear = np.dot(x, self.weights)+self.bias
        predictions = np.where(linear > 0, 1, 0)
        return predictions
```

```
    def backward(self, x, y):
        predictions = self.forward(x)
        errors = y - predictions
        return errors

    def train(self, x, y, epochs=1000):
        for e in range(epochs):
            for i in range(y.shape[0]):
                errors   =   self.backward(x[i].reshape(1,   self.num_features),
y[i]).reshape(-1)
                self.weights += (errors * x[i]).reshape(self.num_features, 1)
                self.bias += errors

    def evaluate(self, x, y):
        predictions = self.forward(x).reshape(-1)
        accuracy = np.sum(predictions == y)/  y.shape[0]
        return accuracy
```

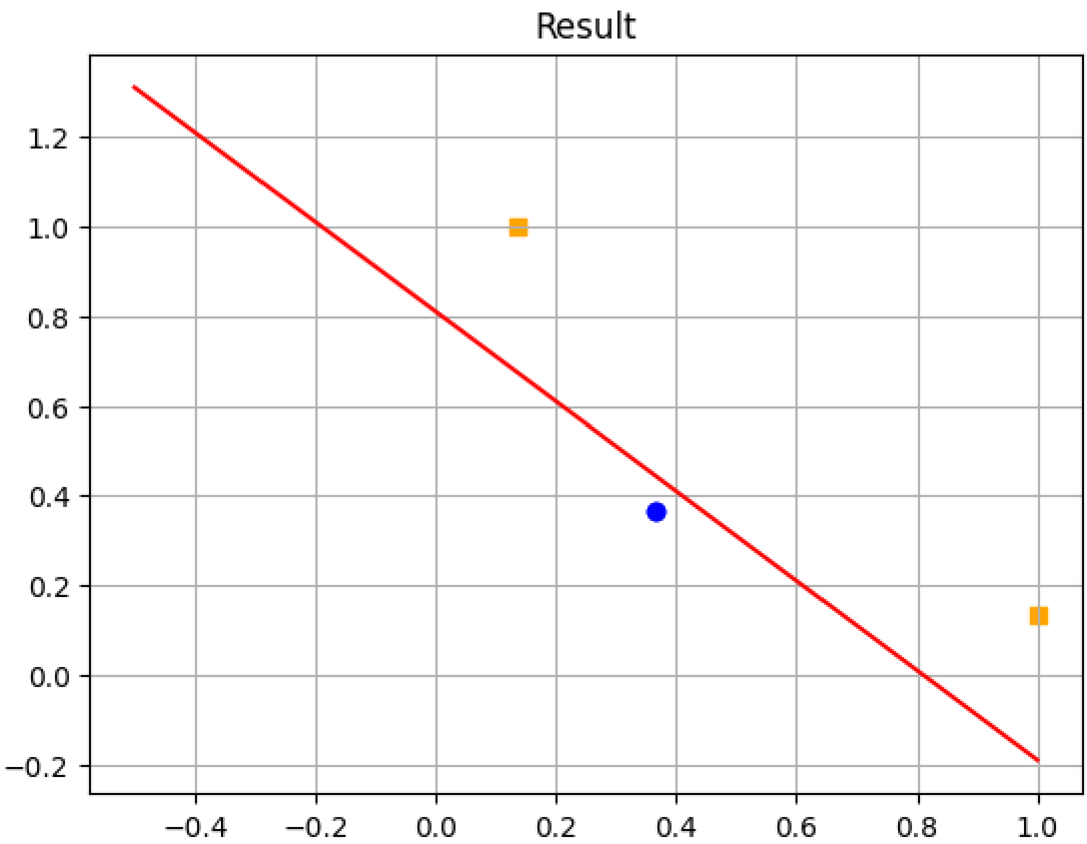
Параметри моделі: $\omega_1 = -1.237, \omega_2 = -1.237, b = 1$

Площина: $x_2 + x_1 - 0.81 = 0$

Код площини:

```
import matplotlib.pyplot as plt

x_min, x_max = -0.5,1
x=np.linspace(x_min,x_max)
y=np.array([-1*temp+0.81 for temp in x])
plt.plot(x,y,color='red')
plt.scatter(X_train[y_train == 0, 0], X_train[y_train == 0, 1], label='class
0', marker='o', color='blue')
plt.scatter(X_train[y_train == 1, 0], X_train[y_train == 1, 1], label='class
1', marker='s', color='orange')
plt.title('Result')
plt.grid()
```


Result
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−0.2
−0.4
−0.2
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

ЗАВДАННЯ 4

На вхід машини опорних векторів з трьома нейронами у прихованому шарі подали вектор ознак $x=(1,2)$. Функція ядра – гаусівська з $\sigma=1$. Центри функцій ядра вибрані як $(0,0),(1,1),(3,4)$ Визначити вихід мережі, якщо вагові коефіцієнти задані як $\omega_1=1, \omega_2=0.5, \omega_3=-0.5, b=3$.

Розв'язання

1. Обчислимо значення у прихованому шарі мережі $K(x_i,x_j)=e^{\frac{\left(-\|x_i-x_j\|^2\right)}{2\sigma^2}}, \sigma=1$:
   a. $K(x,t_1)=e^{-\frac{\left((1-0)^2+(2-0)^2\right)}{2}}=e^{-2.5}\approx 0.82$
   b. $K(x,t_2)=e^{-\frac{\left((1-1)^2+(2-1)^2\right)}{2}}=e^{-0.5}\approx 0.6$
   c. $K(x,t_2)=e^{-\frac{\left((1-3)^2+(2-4)^2\right)}{2}}=e^{-2.5}=0.01$
2. $y=1\cdot 0.82+0.5\cdot 0.6-0.5\cdot 0.01+3=1.115$