КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Кафедра прикладних інформаційних систем

Звіт до лабораторної роботи №8

з курсу

«Системний аналіз та теорія прийняття рішень »

Студентки 3 курсу
групи ПП-31
спеціальності 122 «Комп'ютерні науки»
ОП «Прикладне програмування»
Матвіїв Анастасії Юріївни

Викладач:
Білий Р.О.

Київ – 2023

Тема: транспортна задача.

Мета: вивчення методів розв’язання транспортних задач.

Хід роботи

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	a_i
a_1	4	8	13	2	7	300
a_2	9	4	11	9	17	250
a_3	3	16	10	1	4	200
b_j	210	150	120	135	135	

Цільова функція F – загальна вартість перевезень, яку слід мінімізувати, виражається через введені змінні у вигляді

$F = 4x_{11} + 8x_{12} + 13x_{13} + 2x_{14} + 7x_{15} +$

$+ 9x_{21} + 4x_{22} + 11x_{23} + 9x_{24} + 17x_{25} +$

$+ 3x_{31} + 16x_{32} + 10x_{33} + 1x_{34} + 4x_{35}$ -> min

Визначаємо тип даної транспортної задачі.

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 300 + 250 + 200 = 750$$

$$\sum_{j=1}^{5} b_j = 210 + 150 + 120 + 135 + 135 = 750$$

Оскільки загальний запас продукції у всіх пунктах відправлення дорівнює сумарній потребі усіх пунктів споживання:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

то ця задача є *збалансованою* або *закритою*.

Початковий опорний план перевезень побудуємо методом північно-західного кута.

План починається заповнюватися з верхнього лівого кута.

Шуканий елемент дорівнює c_{11} = 4. Для цього елемента запаси дорівнюють 300, потреби 210. Оскільки мінімальним є 210, то віднімаємо його.

x_{11} = min(300,210) = 210.

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	a_i
a_1	**4**	8	13	2	7	**300 - 210 = 90**
a_2	x	4	11	9	17	250
a_3	x	16	10	1	4	200
b_j	**210 - 210 = 0**	150	120	135	135	

Шуканий елемент дорівнює x_{12}

x_{12} = min(90,150) = 90.

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	a_i
a_1	4	**8**	x	x	x	**90 - 90 = 0**
a_2	x	4	11	9	17	250
a_3	x	16	10	1	4	200
b_j	0	**150 - 90 = 60**	120	135	135	

Шуканий елемент дорівнює x_{22}

x_{22} = min(250,60) = 60.

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	a_i
a_1	4	8	x	x	x	0
a_2	x	**4**	11	9	17	**250 - 60 = 190**
a_3	x	x	10	1	4	200

b_j	0	**60 - 60 = 0**	120	135	135	

Шуканий елемент дорівнює x_{23}

x_{23} = min(190,120) = 120.

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	a_i
a_1	4	8	x	x	x	0
a_2	x	4	**11**	9	17	**190 - 120 = 70**
a_3	x	x	x	1	4	200
b_j	0	0	**120 - 120 = 0**	135	135	

Шуканий елемент дорівнює x_{24}

x_{24} = min(70,135) = 70.

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	a_i
a_1	4	8	x	x	x	0
a_2	x	4	11	**9**	x	**70 - 70 = 0**
a_3	x	x	x	1	4	200
b_j	0	0	0	**135 - 70 = 65**	135	

Шуканий елемент дорівнює x_{34}

x_{34} = min(200,65) = 65.

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	a_i
a_1	4	8	x	x	x	0
a_2	x	4	11	9	x	0
a_3	x	x	x	**1**	4	**200 - 65 = 135**

b_j	0	0	0	**65 - 65 = 0**	135	

Шуканий елемент дорівнює x_{35}

x_{35} = min(135,135) = 135.

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	a_i
a_1	4	8	x	x	x	0
a_2	x	4	11	9	x	0
a_3	x	x	x	1	**4**	**135 - 135 = 0**
b_j	0	0	0	0	**135 - 135 = 0**	

Таким чином, отримано опорний план :

пс / пв	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	4 **210**	8 **90**	13	2	7	300
A_2	9	4 **60**	11 **120**	9 **70**	17	250
A_3	3	16	10	1 **65**	4 **135**	200
b_j	210	150	120	135	135	

F(x) = 4*210 + 8*90 + 4*60 + 11*120 + 9*70 + 1*65 + 4*135 = 4355

Нехай u_1 =0, тоді

$u_1 + v_1 = 4 \Rightarrow v_1 = 4$

$u_1 + v_2 = 8 \Rightarrow v_2 = 8$

$u_2 + v_2 = 4 \Rightarrow u_2 = -4$

$u_2 + v_3 = 11 \Rightarrow v_3 = 15$

$u_1 + v_4 = 9 \Rightarrow v_4 = 13$

$u_3 + v_4 = 1 \Rightarrow u_3 = -12$

$u_3 + v_5 = 4 \Rightarrow v_5 = 16$

пс / пв	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i	U_i
A_1	4 **210**	8 **90**	13	2	7	300	0
A_2	9	4 **60**	11 **120**	9 **70**	17	250	-4
A_3	3	16	10	1 **65**	4 **135**	200	-12
b_j	210	150	120	135	135		
V_i	4	8	15	13	16		

Опорний план не є оптимальним, тому що існують оцінки вільних клітин, для яких $u_i + v_j - c_{ij} > 0$

$\Delta_{13} = 0 + 15 – 13 = 2 > 0$

$\Delta_{14} = 0 + 13 – 2 = 11 > 0$

$\Delta_{15} = 0 + 16 – 7 = 9 > 0$

max(2,11,9) = 11

Вибираємо максимальну оцінку вільної клітини (1; 4): 2

Для цього в перспективну клітину (1; 4) поставимо знак «+», а в інших вершинах багатокутника знаки «-», «+», «-».

пс / пв	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	4 **210**	8 **90** –	13	2 +	7	300
A_2	9	4 **60** +	11 **120**	9 **70** –	17	250
A_3	3	16	10	1 **65**	4 **135**	200
b_j	210	150	120	135	135	

З вантажів x_{ij} які у мінусових клітинах, вибираємо найменше, тобто. y = min (2, 4) = 70. Додаємо 70 до обсягів вантажів, що стоять у плюсових клітинах і віднімаємо 70 з X_{ij}, що стоять у мінусових клітинах. В результаті отримаємо новий опорний план.

пс / пв	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i	U_i
A_1	4 **210**	8 **20**	13	2 **70**	7	300	0
A_2	9	4 **130**	11 **120**	9	17	250	-4
A_3	3	16	10	1 **65**	4 **135**	200	-1
b_j	210	150	120	135	135		
V_j	4	8	15	2	5		

$\Delta_{13} = 0 + 15 - 13 = 2 > 0$

$\Delta_{33} = -1 + 15 - 10 = 4 > 0$

пс / пв	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	4 **210**	8 **20** –	13	2 **70** +	7	300
A_2	9	4 **130** +	11 **120** –	9	17	250
A_3	3	16	10 +	1 **65** –	4 **135**	200
b_j	210	150	120	135	135	

Опорний план є оптимальним, тому всі оцінки вільних клітин задовольняють умову $u_i + v_j - c_{ij} > 0$

$F(x) = 4*210 + 2*90 + 4*150 + 11*100 + 10*20 + 1*45 + 4*135 = 3505$

Далі вирішила завдання за допомогою Python.

```
costs = [[4, 8, 13, 2, 7],
         [9, 4, 11, 9, 17],
         [3, 16, 10, 1, 4]]

supply = [300, 250, 200]

demand = [210, 150, 120, 135, 135]

num_supply = len(supply)
num_demand = len(demand)

nwc = [[0] * num_demand for _ in range(num_supply)]

i, j = 0, 0  # індекси для відстеження постачальників і споживачів

while i < num_supply and j < num_demand:
    x = min(supply[i], demand[j])  # визначення кількості товарів, що можуть бути
відправлені
    supply[i] -= x
    demand[j] -= x
    nwc[i][j] = x

    print(f"Крок: ({i + 1}, {j + 1}) - Відправлено: {x}")
    print("Опорний план:")
    for row in nwc:
        print(row)
    print("\nЗалишок постачальників:", supply)
    print("Залишок споживачів:", demand)
    print("-" * 30)

    if supply[i] == 0:
        i += 1
    if demand[j] == 0:
        j += 1

total_cost = sum(nwc[i][j] * costs[i][j] for i in range(num_supply) for j in
range(num_demand))

print("\nОстаточний опорний план:")
for row in nwc:
    print(row)
```

```python
print("\nTotal cost =", total_cost)
```

```
Крок: (1, 1) - Відправлено: 210
Опорний план:
[210, 0, 0, 0, 0]
[0, 0, 0, 0, 0]
[0, 0, 0, 0, 0]

Залишок постачальників: [90, 250, 200]
Залишок споживачів: [0, 150, 120, 135, 135]
------------------------------
Крок: (1, 2) - Відправлено: 90
Опорний план:
[210, 90, 0, 0, 0]
[0, 0, 0, 0, 0]
[0, 0, 0, 0, 0]

Залишок постачальників: [0, 250, 200]
Залишок споживачів: [0, 60, 120, 135, 135]
------------------------------
Крок: (2, 2) - Відправлено: 60
Опорний план:
[210, 90, 0, 0, 0]
[0, 60, 0, 0, 0]
[0, 0, 0, 0, 0]

Залишок постачальників: [0, 190, 200]
Залишок споживачів: [0, 0, 120, 135, 135]
```

```
Крок: (2, 3) - Відправлено: 120
Опорний план:
[210, 90, 0, 0, 0]
[0, 60, 120, 0, 0]
[0, 0, 0, 0, 0]

Залишок постачальників: [0, 70, 200]
Залишок споживачів: [0, 0, 0, 135, 135]
------------------------------
Крок: (2, 4) - Відправлено: 70
Опорний план:
[210, 90, 0, 0, 0]
[0, 60, 120, 70, 0]
[0, 0, 0, 0, 0]

Залишок постачальників: [0, 0, 200]
Залишок споживачів: [0, 0, 0, 65, 135]
------------------------------
Крок: (3, 4) - Відправлено: 65
Опорний план:
[210, 90, 0, 0, 0]
[0, 60, 120, 70, 0]
[0, 0, 0, 65, 0]

Залишок постачальників: [0, 0, 135]
Залишок споживачів: [0, 0, 0, 0, 135]
```

```
------------------------------
Крок: (3, 5) - Відправлено: 135
Опорний план:
[210, 90, 0, 0, 0]
[0, 60, 120, 70, 0]
[0, 0, 0, 65, 135]

Залишок постачальників: [0, 0, 0]
Залишок споживачів: [0, 0, 0, 0, 0]
------------------------------

Остаточний опорний план:
[210, 90, 0, 0, 0]
[0, 60, 120, 70, 0]
[0, 0, 0, 65, 135]

Total cost = 4355
```

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	a_i
a_1	27	36	35	31	29	250
a_2	22	23	26	32	35	200
a_3	35	42	38	32	39	200
b_j	120	130	100	160	140	

Цільова функція F – загальна вартість перевезень, яку слід мінімізувати, виражається через введені змінні у вигляді

$F = 27x_{11} + 36x_{12} + 35x_{13} + 21x_{14} + 29x_{15} +$

$+ 22x_{21} + 23x_{22} + 26x_{23} + 32x_{24} + 35x_{25} +$

$+ 35x_{31} + 42x_{32} + 38x_{33} + 32x_{34} + 39x_{35} \quad -> \min$

Визначаємо тип даної транспортної задачі.

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 250 + 200 + 200 = 650$$

$$\sum_{j=1}^{5} b_j = 120 + 130 + 100 + 160 + 140 = 650$$

Оскільки загальний запас продукції у всіх пунктах відправлення дорівнює сумарній потребі усіх пунктів споживання:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

то ця задача є *збалансованою* або *закритою*.

Початковий опорний план перевезень побудуємо методом мінімальної вартості. Для цього, заповнення таблиці починаємо з клітини, якій відповідає найменша вартість c_{ij} з усієї матриці вартостей.

Шуканий елемент дорівнює c_{21} = 22. Для цього елемента запаси дорівнюють 200, потреби 120. Оскільки мінімальним є 120, то віднімаємо його.

x_{21} = min(200,120) = 120.

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	a_i
a_1	x	36	35	31	29	250
a_2	**22**	23	26	32	35	**200 - 120 = 80**
a_3	x	42	38	32	39	200
b_j	**120 - 120 = 0**	130	100	160	140	

У частині таблиці, що залишилась, найменшою є вартість x_{22}

x_{22} = min(80,130) = 80.

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	a_i
a_1	x	36	35	31	29	250
a_2	22	**23**	x	x	x	**80 - 80 = 0**
a_3	x	42	38	32	39	200
b_j	0	**130 - 80 = 50**	100	160	140	

У частині таблиці, що залишилась, найменшою є вартість x_{15}

x_{15} = min(250,140) = 140.

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	a_i
a_1	x	36	35	31	**29**	**250 - 140 = 110**
a_2	22	23	x	x	x	0
a_3	x	42	38	32	x	200

b_j	0	50	100	160	**140 - 140 = 0**	

У частині таблиці, що залишилась, найменшою є вартість x_{14}

$x_{14} = \min(110,160) = 110.$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	a_i
a_1	x	x	x	**31**	29	**110 - 110 = 0**
a_2	22	23	x	x	x	0
a_3	x	42	38	32	x	200
b_j	0	50	100	**160 - 110 = 50**	0	

У частині таблиці, що залишилась, найменшою є вартість x_{34}

$x_{34} = \min(200,50) = 50.$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	a_i
a_1	x	x	x	31	29	0
a_2	22	23	x	x	x	0
a_3	x	42	38	**32**	x	**200 - 50 = 150**
b_j	0	50	100	**50 - 50 = 0**	0	

У частині таблиці, що залишилась, найменшою є вартість x_{33}

$x_{33} = \min(150,100) = 100.$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	a_i
a_1	x	x	x	31	29	0
a_2	22	23	x	x	x	0

a_3	x	42	**38**	32	x	**150 - 100 = 50**
b_j	0	50	**100 - 100 = 0**	0	0	

У частині таблиці, що залишилась, найменшою є вартість x_{32}

$x_{32} = \min(50,50) = 50$.

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	a_i
a_1	x	x	x	31	29	0
a_2	22	23	x	x	x	0
a_3	x	**42**	38	32	x	**50 - 50 = 0**
b_j	0	**50 - 50 = 0**	0	0	0	

Таким чином, отримано опорний план :

пс / пв	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	27	36	35	31 **110**	29 **140**	250
A_2	22 **120**	23 **80**	26	32	35	200
A_3	35	42 **50**	38 **100**	32 **50**	39	200
b_j	120	130	100	160	140	

$F(x) = 31*110 + 29*140 + 22*120 + 23*80 + 42*50 + 38*100 + 32*50 = 19450$

Нехай $u_1 = 0$, тоді

$u_1 + v_4 = 31 \Rightarrow v_4 = 31$

$u_3 + v_4 = 32 \Rightarrow u_3 = 1$

$u_3 + v_2 = 42 \Rightarrow v_2 = 41$

$u_2 + v_2 = 23 \Rightarrow u_2 = -18$

$u_2 + v_1 = 22 \Rightarrow v_1 = 40$

$u_3 + v_3 = 38 \Rightarrow v_3 = 37$

$u_1 + v_5 = 29 \Rightarrow v_5 = 29$

ПС / ПВ	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i	U_i
A_1	27	36	35	31 **110**	29 **140**	250	0
A_2	22 **120**	23 **80**	26	32	35	200	-18
A_3	35	42 **50**	38 **100**	32 **50**	39	200	1
b_j	120	130	100	160	140		
V_j	40	41	37	31	21		

Опорний план не є оптимальним, тому що існують оцінки вільних клітин, для яких $u_i + v_j - c_{ij} > 0$

$\Delta_{11} = 0 + 40 - 27 = 13 > 0$

$\Delta_{12} = 0 + 41 - 36 = 5 > 0$

$\Delta_{13} = 0 + 37 - 35 = 2 > 0$

$\Delta_{31} = 1 + 40 - 35 = 6 > 0$

max(13,5,2,6) = 13

Вибираємо максимальну оцінку вільної клітини (1; 1): 27

Для цього в перспективну клітину (1; 1) поставимо знак «+», а в інших вершинах багатокутника знаки «-», «+», «-».

пс / пв	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	27 +	36	35	31 **110** –	29 **140**	250
A_2	22 **120** –	23 **80** +	26	32	35	200
A_3	35	42 **50** –	38 **100**	32 **50** +	39	200
b_j	120	130	100	160	140	

З вантажів x_{ij} які у мінусових клітинах, вибираємо найменше, тобто. y = min (3, 2) = 50. Додаємо 50 до обсягів вантажів, що стоять у плюсових клітинах і віднімаємо 50 з X_{ij}, що стоять у мінусових клітинах. В результаті отримаємо новий опорний план.

пс / пв	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i	U_i
A_1	27 **50**	36	35	31 **60**	29 **140**	250	0
A_2	22 **70**	23 **130**	26	32	35	200	-5
A_3	35	42	38 **100**	32 **100**	39	200	1
b_j	120	130	100	160	140		
V_j	27	28	37	31	29		

$\Delta_{13} = 0 + 37 - 35 = 2 > 0$

$\Delta_{23} = -5 + 37 - 26 = 6 > 0$

пс / пв	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	27 **50** +	36	35	31 **60** –	29 **140**	250
A_2	22 **70** –	23 **130**	26 +	32	35	200
A_3	35	42	38 **100** –	32 **100** +	39	200
b_j	120	130	100	160	140	

ПС ПВ	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i	U_i
A_1	27 **110**	36	35	31	29 **140**	250	0
A_2	22 **10**	23 **130**	26 **60**	32	35	200	-5
A_3	35	42	38 **40**	32 **160**	39	200	7
b_j	120	130	100	160	140		
V_j	27	28	31	25	29		

F(x) = 27*110 + 29*140 + 22*10 + 23*130 + 26*60 + 38*40 + 32*160 = 18440

Далі вирішила завдання за допомогою Python.

```python
import numpy as np
from scipy.optimize import linprog

costs = np.array([[27, 36, 35, 31, 29],
                  [22, 23, 26, 32, 35],
                  [35, 42, 38, 32, 39]])

supply = np.array([250, 200, 200])
demand = np.array([120, 130, 100, 160, 140])

# Розгортаємо матрицю вартостей для використання в функції лінійного програмування
c = costs.flatten()

# Матриця обмежень (A_eq) та права частина рівняння (b_eq)
A_eq = np.zeros((len(supply) + len(demand), len(c)))
b_eq = np.zeros(len(supply) + len(demand))

# Додаємо обмеження на постачання та на попит
for i in range(len(supply)):
    A_eq[i, i * len(demand):(i + 1) * len(demand)] = 1
    b_eq[i] = supply[i]

for j in range(len(demand)):
    A_eq[len(supply) + j, j:len(c):len(demand)] = 1
    b_eq[len(supply) + j] = demand[j]

# Розв'язуємо задачу лінійного програмування
result = linprog(c, A_eq=A_eq, b_eq=b_eq, method='highs')
solution = result.x.reshape(costs.shape)

print("Оптимальний план:")
```

```
print(solution)
print("\nTotal Cost:", result.fun)
```

```
...   Оптимальний план:
     [[110.   0.   0.   0. 140.]
      [ 10. 130.  60.   0.   0.]
      [  0.   0.  40. 160.   0.]]

     Total Cost: 18440.0
```

Висновок:

Під час виконання лабораторної роботи я ознайомилася з різними мктодами розвязування транспортних задач та застосувала це на практиці.