Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

А. Р. МИРОТИН, Ж. Н. КУЛЬБАКОВА

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Лабораторный практикум
для студентов математического факультета
специальности 1-31 03 01 Математика

Гомель 2009

УДК 517 (075.08)
ББК 22.11 я 73
М 644

Рецензенты:
Ю. В. Малинковский, профессор, доктор физико-математических наук;
В. Н. Семенчук, профессор, доктор физико-математических наук.

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Миротин, А. Р.
М 644 Функциональный анализ и интегральные уравнения: лабораторный практикум: для студентов математического факультета специальности 1-31 03 01 Математика / А. Р. Миротин, Ж. Н. Кульбакова; М-во образования РБ, Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2009. 60 с.

Практическое пособие подготовлено в соответствии с программой курса «Функциональный анализ и интегральные уравнения» для студентов специальности 1-31 03 01 Математика. Оно содержит решения типовых примеров и задания лабораторных работ.

УДК 517517 (075.08)
ББК 22.11 я 73

Введение

Учебная программа курса «Функциональный анализ и интегральные уравнения» предполагает в качестве формы контроля знаний выполнение лабораторных работ. Целью этих работ является закрепление теоретического материала путем самостоятельного решения задач. Настоящее пособие призвано оказать помощь студентам в овладении основными приемами и методами решения задач по функциональному анализу. Оно содержит задания лабораторных работ 5 семестра, взятые из пособия [3], а также примеры решения типовых задач. При этом важно отметить следующее:

– каждая лабораторная работа рассчитана на 4 – 6 часов аудиторных занятий (в зависимости от ее объема). На первом занятии обсуждаются узловые вопросы темы, а второе (и третье) отводятся для завершения работы и защиты отчета;

– задание каждой лабораторной работы, как правило, выполняется группой из 2 – 3 человек;

– лабораторная работа засчитывается, если должное владение материалом продемонстрировали все члены группы;

– количество защищенных лабораторных работ учитывается на экзамене в рамках рейтинговой накопительной системы оценки знаний студента.

Отчет по лабораторной работе должен быть оформлен в соответствии со следующими требованиями:

– он выполняется письменно каждым членом группы в специальной тетради;

– решение каждой задачи должно быть подробно обосновано и содержать ссылки на все используемые определения и теоремы.

Лабораторная работа 1

Метрические пространства. Сходящиеся последовательности в метрических пространствах

Примеры решения задач

Задача 1 Проверить, сходится ли заданная последовательность x_n точек метрического пространства X к точке a.

Пример 1 $x_n = \dfrac{1}{n^2}\sqrt{n^4t^2+1}$, $a = |t|$, $X = C[-4;4]$.

Решение. Рассмотрим расстояние $\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{C}}(x_n, a) = \max\limits_{t\in[-4,4]} |x_n(t) - a(t)|$. Так как при всех $t \in [-4, 4]$

$$|x_n(t) - a(t)| = \left| \frac{1}{n^2}\sqrt{n^4t^2+1} - |t| \right| = \sqrt{t^2+\frac{1}{n^4}} - |t| = \frac{t^2+\frac{1}{n^4}-t^2}{\sqrt{t^2+\frac{1}{n^4}}+|t|} \le \frac{\frac{1}{n^4}}{\sqrt{\frac{1}{n^4}}} = \frac{1}{n^2} \quad \to 0$$

при $n \to \infty$, то $\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{C}}(x_n,a) \to 0$ $(n \to \infty)$. Значит, x_n сходится к a в $C[-4;4]$.

Пример 2 $x_n(t) = \boldsymbol{t^n - t^{n+1} + t}$, $a(t) = \boldsymbol{t}$, $X = C[0;1]$.

Решение. Рассмотрим $\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{C}}(x_n, a) = \max\limits_{0\le t\le 1} |\mathrm{t}^{\mathrm{n}} - \mathrm{t}^{\mathrm{n+1}}|$. Обозначим $\mathrm{t}^{\mathrm{n}} - \mathrm{t}^{\mathrm{n+1}}$ через $\Delta_{\mathrm{n}}(\mathrm{t})$ и найдем наибольшее значение функции $|\Delta_{\mathrm{n}}(\mathrm{t})| = \Delta_{\mathrm{n}}(\mathrm{t}) = \mathrm{t}^{\mathrm{n}} - \mathrm{t}^{\mathrm{n+1}}$ на отрезке $[0,1]$. Имеем $\Delta_{\mathrm{n}}'(t) = \mathrm{nt}^{\mathrm{n-1}} - (\mathrm{n+1})\mathrm{t}^{\mathrm{n}}$, $\Delta_{\mathrm{n}}'(t) = 0$, если $\mathrm{t} = 0$ или $\mathrm{t} = \dfrac{n}{n+1} \in [0,1]$,

$$\Delta_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(1-\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\frac{1}{n+1}.$$

$\Delta_{\mathrm{n}}(0) = 0$, $\Delta_{\mathrm{n}}(1) = 0$.
Значит (по правилу нахождения наибольшего значения функции на отрезке),

$$\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{C}}(x_n,a) = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\frac{1}{n+1} \to \frac{1}{e}0 = 0,$$

а потому x_n сходится к a в $C[0;1]$.

Пример 3 $x_n = \left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}}}_{n^2 \, раз}, 0, 0, \ldots \right)$, $a = (0,0,0,\ldots)$, $X = l_3$.

Решение.

$$\rho_3(x_n, a) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left| x_{n_i} - a_i \right| \right)^{1/3} = \left(n^2 \left| \frac{1}{\sqrt{n}} - 0 \right|^3 \right)^{1/3} = \left(\frac{n^2}{n^{3/2}} \right)^{1/3} = n^{\frac{1}{6}} \to \infty \text{ при n } \to \infty.$$

Так как $\rho_3(x_n, a)$ не стремится к нулю, то x_n не сходится к a в l_3.

Пример 4 $x_n = \left(\underbrace{\frac{\sin n}{n}, \ldots, \frac{\sin n}{n}}_{n \, раз}, 0, 0, \ldots \right)$, $a = (0,0,0,\ldots)$, $X = l_2$.

Решение.

$$\rho_2(x_n, a) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left| x_{n_i} - a_i \right|^3 \right)^{1/2} = \left(n \frac{\sin^2 n}{n^2} \right)^{1/2} = \left(\frac{\sin^2 n}{n} \right)^{1/2} = \frac{|\sin n|}{n} \to 0 \text{ при n } \to \infty.$$

Значит, x_n сходится к a в l_2.

Пример 5 $x_n = n\left(\sqrt{t + 1/n} - \sqrt{t} \right)$, $a = 1/2\sqrt{t}$, $X = L_1[0;1]$.

Решение.

$$\rho_{L_1}(x_n, a) = \int_0^1 | x_n(t) - a(t) | \, dt = \int_0^1 \left| n\left(\sqrt{t + 1/n} - \sqrt{t} \right) - 1/2\sqrt{t} \right| dt =$$

$$= \int_0^1 \left| \frac{1}{\sqrt{t + 1/n} + \sqrt{t}} - \frac{1}{2\sqrt{t}} \right| dt = \int_0^1 \left(\frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{t + 1/n} + \sqrt{t}} \right) dt.$$

Применим теорему Беппо Леви о предельном переходе под знаком интеграла. Обозначим $f_n(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{t + 1/n} + \sqrt{t}}$. Функция $f_n(t)$ является интегрируемой на [0;1] для любого $n \in N$, и $0 \le f_1(x) \le f_2(x) \le \ldots \le f_n(t) \le \ldots$. Кроме того, $f_n(t) \to 0 \ (n \to \infty)$. Значит, по теореме Б. Леви

$$\lim_{n\to\infty} \rho_{L_1}(x_n, a) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(t) dt \, dt = 0.$$

Следовательно, x_n сходится к a в $L_1[0;1]$.

Пример 6 $x_n(t) = n\sin {t}/{n}$, $a(t) = t$, $X = L_1[0;1]$.

Решение.

$$\rho_{L_1}(x_n, a) = \int_0^1 \left| n\sin {t}/{n} - t \right| dt = \left[\quad \left| n\sin {t}/{n} \right| \le n\frac{t}{n} \le t \quad \right] = \int_0^1 \left(t - n\sin {t}/{n} \right) dt =$$

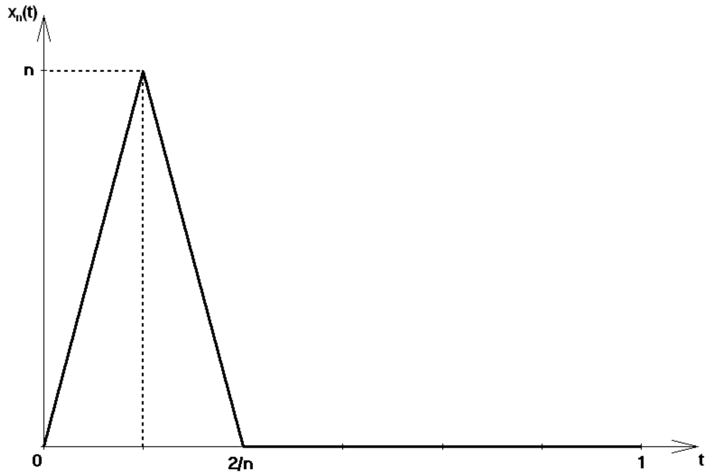
$$= \left({t^2}/{2} + n^2\cos {t}/{n} \right) \Big|_0^1 = {1}/{2} + n^2\cos {1}/{n} - n^2 = {1}/{2} + n^2\left(\cos {1}/{n} - 1 \right) = \frac{1}{2} - 2n^2\sin^2\frac{1}{2n} \to 0$$

при $n \to \infty$ (мы воспользовались тем, что $\sin x \sim x$ при $x \to 0$). Значит, x_n сходится к a в $L_1[0;1]$.

Задача 2 Является ли данное условие: а) необходимым, б) достаточным, в) необходимым и достаточным для сходимости последовательности x_n в метрическом пространстве X ?

Пример 1 $X = C_L[a;b]$ – пространство непрерывных функций с метрикой $\boldsymbol{\rho}_L(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)|\,dt.$ Условие: последовательность $x_n(t)$ поточечно сходится к непрерывной функции $a(t)$.

Решение. Не нарушая общности, можем считать, что a=0, b=1. Покажем, что условие не является ни необходимым, ни достаточным. Для выяснения достаточности условия рассмотрим следующую последовательность x_n, заданную на [0;1] графически:



Последовательность x_n сходится к $a \equiv 0$ поточечно на [0;1] (почему?), но

$$\boldsymbol{\rho}_L(x_n, a) = \int_0^1 |x_n(t) - 0|\,dt = \int_0^{2/n} x_n(t)\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n}\cdot n = 1,$$

то есть $\boldsymbol{\rho}_L(x_n, a)$ не стремится к нулю. Значит, данное условие не является достаточным для сходимости последовательности x_n в метрическом пространстве C_L[a;b].

Теперь допустим, что $x_n \to a$ в $C_L[0;1]$, то есть $\int_0^1 |x_n(t) - a(t)|\,dt \to 0$ при $n \to \infty$. Покажем на примере, что отсюда не следует поточечная сходимость x_n к a. Рассмотрим последовательность $x_n(t) = t^{\mathbf{n}}$ и функцию $a(t) \equiv 0$. Имеем

$$\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{L}}(x_n\,,\,a) = \int\limits_0^1 t^n\,dt = \left.\frac{t^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 = \frac{1}{n+1} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Значит, $x_n \to a$=0 в $C_{\mathrm{L}}[0;1]$. Но $t^{\mathbf{n}}$ не сходится к a= 0 поточечно, так как $t^{\mathbf{n}} \to 1$ при t = 1. Значит, данное условие не является необходимым для сходимости последовательности x_n в метрическом пространстве C_{L}[a;b].

.

Пример 2 X = l_2. Условие: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left|x_n(k)-a(k)\right|\right)=0$, где $a=(a_{1,}a_{2,...,}a_k,...)$.

Решение. Положим $\alpha_n := \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left|x_n(k)-a(k)\right|$. Тогда данное условие означает, что $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$. Докажем, что это условие является достаточным для сходимости последовательности x_n к a в пространстве l_2. Поскольку при выполнении этого условия α_n <1 при достаточно больших n, то при этих n и при всех k имеем $\left|x_n(k)-a(k)\right| < 1$. Поэтому $\left|x_n(k)-a(k)\right|^2 \le \left|x_n(k)-a(k)\right|$ при этих n и при всех k. Значит, $\boldsymbol{\rho}_2(x_n\,,\,a)^2 \le \alpha_n \to 0\ (n \to \infty)$, а это значит, что $\boldsymbol{\rho}_2(x_n\,,\,a) \to 0$. Следовательно, $x_n \to a$ в l_2. Достаточность доказана.

Теперь покажем, что условие не является необходимым. Рассмотрим последовательность $x_n = \left(1,\frac{1}{2},...,\frac{1}{n},0,0,0,...\right)$ и точку $a = \left(1,\frac{1}{2},...,\frac{1}{n},\frac{1}{n+1},...\right)$ из l_2. Имеем $\boldsymbol{\rho}_2(x_n\,,\,a)$ = $\left(\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)^{1/2} \to 0\ (n \to \infty)$ как остаток сходящегося ряда. Значит, $x_n \to a$ в l_2. Но в этом примере $\alpha_n = \infty$ (сравните с гармоническим рядом), а потому данное условие не выполняется.

Задача 3 Найти предел последовательности x_n в метрическом пространстве X, если он существует.

Пример 1 X = l_1, $x_n = \left(\frac{1}{2},\frac{4}{5},...,\frac{n^2}{n^2+1},0,0,...\right)$.

Решение. 1 способ. Допустим, x_n сходится к некоторому a в l_1. Так как для любого k справедливо неравенство $\left|x_n(k)-a(k)\right| \le \boldsymbol{\rho}_1(x_n\,,\,a) \to 0\ (n \to \infty)$, то имеем и покоординатную сходимость x_n к a. Но покоординатно x_n сходится к последовательности $\left(\frac{1}{2},\frac{4}{5},...,\frac{n^2}{n^2+1},\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+1},...\right)$, которая не принадлежит пространству l_1 (ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^2+1}$ расходится по необходимому признаку). Мы пришли к противоречию. Значит, x_n не сходится в l_1.

2 способ. Так как $\boldsymbol{\rho}_1(x_n\,,\,x_{n+1}) = \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+1} \to 1$ при $n \to \infty$, последовательность x_n не является фундаментальной. Следовательно, x_n не сходится в l_1.

Пример 2 $X = l_\infty$, $x_n = \; 1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, ..., \sqrt[n]{n}, 0, 0, ...$.

Решение. 1 способ. Допустим, x_n сходится к некоторому a в l_∞. Так как $\left|x_n(k) - a(k)\right| \le \rho_\infty(x_n, a) \to 0 \; (n \to \infty)$ для любого k, то имеем покоординатную сходимость x_n к a. Но покоординатно x_n сходится к последовательности

$a = \; 1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, ..., \sqrt[n]{n}, \sqrt[n+1]{n+1}, ... \in l_\infty$, для которой $\rho_\infty(x_n, a) = \sup\limits_{k \ge n+1} \left|\sqrt[k]{k}\right| = \sqrt[n+1]{n+1} \to 1$ (почему?) при $n \to \infty$. Следовательно, x_n не сходится к a в l_∞, - противоречие.

2 способ. Заметим, что последовательность x_n не является фундаментальной в l_∞. Действительно, $x_{n+1} = \; 1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, ..., \sqrt[n]{n}, \sqrt[n+1]{n+1}, 0, 0, ...$, $\boldsymbol{\rho}(x_n, x_{n+1}) = \sqrt[n+1]{n+1} \to 1$ при $n \to \infty$. Так как x_n не фундаментальна в l_∞, то она не сходится в l_∞.

Задания лабораторной работы

Задача 1 Проверить, сходится ли заданная последовательность x_n точек метрического пространства X к точке a, если выполнены следующие условия.

а)

№	X	x_n	a
1.1.1	$C[0;2]$	$tn^2+1 \;/\; n^2+t$	t
1.1.2	$C[0;5]$	$nt^2+n^2t \;/\; n^2t+1$	1
1.1.3	$C[-3;3]$	$\sqrt{t^2+1/n^3}$	$\|t\|$
1.1.4	$C[0;8]$	$t/8^{\;n} - t/8^{\;2n} + t$	t
1.1.5	$C[0;1]$	$t^{2n} - t^{n+1} + t$	t
1.1.6	$C[1;2]$	$n \; \sqrt{1/n + t} - \sqrt{t}$	$1/2\sqrt{t}$

б)

№	X	x_n	a
1.2.1	l_∞	$\left(\underbrace{\left(\frac{4n+1}{4n+3}\right)^n, ..., \left(\frac{4n+1}{4n+3}\right)^n}_{n}, 0, 0, ...\right)$	$e^{-1/2}, e^{-1/2}, ...$

1.2.2	$l_{8/5}$	$\left(\underbrace{\frac{\cos(1/n)}{n},\dots,\frac{\cos(1/n)}{n}}_{n},0,0,\dots\right)$	$0,0,0,\dots$
1.2.3	l_1	$\left(\underbrace{\sin\frac{1}{2^n},\dots,\sin\frac{1}{2^n}}_{n^2},0,0,\dots\right)$	$0,0,0,\dots$
1.2.4	$l_{3/2}$	$\left((1+1/n)^n,\ (\sin n^2)/n,\ (\sin n^3)/n^2,\dots,\ (\sin n^k)/n^{k-1},\dots\right)$	$e,0,0,\dots$
1.2.5	l_3	$\left(\underbrace{\frac{n^2}{2^n},\dots,\frac{n^2}{2^n}}_{n^2},0,0,\dots\right)$	$0,0,0,\dots$
1.2.6	l_2	$\left(\underbrace{\frac{1}{n^2},\dots,\frac{1}{n^2}}_{n^2},n,0,0,\dots\right)$	$0,0,0,\dots$

в)

№	X	x_n	a
1.3.1	$L_2[0;2]$	$1/(1+nt)$	0
1.3.2	$L_4[0;3]$	$(t/3)^n+2t$	$2t$
1.3.3	$L_{4/3}[-1;2]$	$(t/2)^n+\sin t$	$\sin t$
1.3.4	$L_1[0;1]$	$e^{n(t-1)}$	0
1.3.5	$L_{3/2}[-2;0]$	$\sin(t/n)+2t^2$	$2t^2$
1.3.6	$L_2[0;3]$	$(\sin nt)/n^2+t^3$	t^3

Задача 2 Является ли данное условие: а) необходимым, б) достаточным, в) необходимым и достаточным для сходимости последовательности x_n в метрическом пространстве X ?

№	X	Условие
2.1	$C[a;b]$	$\forall t\in[a;b]$ существует предел числовой последовательности $x_n(t)$
2.2	l_1	$\forall k\in N$ существует предел числовой последовательности $x_n(k)$
2.3	l_4	$\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{k\in N}\lvert x_n(k)-a(k)\rvert=0$, где $a=(a(1),a(2),\dots,a(k),\dots)\in l_4$
2.4	l_∞	$\forall k\in N$ существует предел числовой последовательности $x_n(k)$
2.5	c_0	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lvert x_n(k)-a(k)\rvert\right)=0$, где $a=(a(1),a(2),\dots,a(k),\dots)$
2.6	l_1	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lvert x_n(k)-a(k)\rvert^2\right)=0$, где $a=(a(1),a(2),\dots,a(k),\dots)$

Задача 3 Найти предел последовательности x_n в метрическом пространстве X, если он существует.

№	X	x_n
3.1	l_∞	$\left(\underbrace{tg\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ldots,tg\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{n},0,0,\ldots\right)$
3.2	l_3	$\left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}},\ldots,\frac{1}{\sqrt{n}}}_{n},0,0,\ldots\right)$
3.3	l_2	$\left(\underbrace{\sin\frac{1}{n},\ldots,\sin\frac{1}{n}}_{n^2},0,0,\ldots\right)$
3.4	c_0	$\left(\underbrace{\left(\frac{n+2}{n}\right)^2,\ldots,\left(\frac{n+2}{n}\right)^2}_{n},0,0,\ldots\right)$
3.5	l_∞	$tg\ {}^1\!/_n,\ tg\ {}^1\!/_{n^2},\ \ldots,\ tg\ {}^1\!/_{n^k},\ \ldots$
3.6	l_1	$\left(\underbrace{\frac{\sin 3^n}{n^2},\ldots,\frac{\sin 3^n}{n^2}}_{n},0,0,\ldots\right)$

Лабораторная работа 2

Топология метрических пространств

Примеры решения задач

Задача 1 Является ли данное множество M открытым, замкнутым, ограниченным в пространстве $C[a;b]$. Найти его замыкание, внутренние и граничные точки.

Пример 1 $M = \{x \mid x(a) = 0\}$.

Решение. Множество M не является открытым, и более того, ни одна его точка не является внутренней. Действительно, $\forall x_0 \in M$ и для любого шара $B(x_0, \varepsilon)$ имеем $x = x_0 + \varepsilon / 2 \in B(x_0, \varepsilon)$, но $x \notin M$, так как $x(a) = x_0(a) + \dfrac{\varepsilon}{2} = \dfrac{\varepsilon}{2} \neq 0$.

Множество M является замкнутым, так как оно содержит в себе пределы всех своих сходящихся последовательностей. Действительно, если $x_n(t) \to x_0(t)$ в $C[a;b]$, $x_n(a) = 0$, то и $x_0(a) = 0$. А это значит, что $x_0 \in M$.

Граница множества ∂M совпадает с самим множеством M, что теперь сразу следует из формулы $\partial M = \bar{M} \setminus IntM$.

Множество M не является ограниченным, так как последовательность $x_n(t) = n \cdot (t - a) \in M$,

но $\rho(x_n, 0) = n \cdot (b - a) \to \infty \ (n \to \infty)$.

Пример 2 $M = \left\{ x \,\middle|\, \int_a^b x(t)dt < 1 \right\}$.

Решение. Покажем, что M является открытым. Возьмём $\forall x_0 \in M$, т.е. $\int_a^b x_0(t)dt < 1$.

Тогда $\exists \varepsilon > 0 : \int_a^b x_0(t)dt < 1 - \varepsilon$. Покажем, что шар $B(x_0, \varepsilon/(b-a)) \subset M$. Возьмём $\forall y \in B(x_0, \varepsilon/(b-a))$.

Это значит, что $\max\limits_{a \le t \le b} |x_0(t) - y(t)| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$. Тогда

$$\int_a^b y(t)dt = \int_a^b x_0(t)dt + \int_a^b (y(t) - x_0(t))dt \le \int_a^b x_0(t)dt + \int_a^b |y(t) - x_0(t)|dt < 1 - \varepsilon + \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = 1.$$

Значит, $y \in M$.

Так как M открыто, то $IntM = M$.

Множество M не является замкнутым, так как содержит не все свои предельные точки. Действительно, возьмём последовательность $x_n(t) = \dfrac{n}{n+1} \cdot \dfrac{1}{b-a}$ из M. Тогда $x_n(t) \to \dfrac{1}{b-a}$, но $\int\limits_a^b \dfrac{dt}{b-a} = 1$, т.е. $\dfrac{1}{b-a} \notin M$.

Замечание. Нормированное пространство X всегда связно, так как любые две его точки x и y можно связать непрерывным путем $tx + (1-t)y$, $t \in [0,1]$, лежащим в X, а потому в нем нет открытых и одновременно замкнутых собственных подмножеств.

Замыкание $\overline{M} = \left\{ x \left| \int\limits_a^b x(t)dt \le 1 \right.\right\}$. Действительно, если x_0 принадлежит $\overline{M}$, то найдется последовательность $x_n \in M$ равномерно сходящаяся к x_0 на $[a,b]$. А тогда

$$\int\limits_a^b x_0(t)dt = \int\limits_a^b \lim_{n\to\infty} x_n(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b x_n(t)dt \le 1.$$

Обратно, если $\int\limits_a^b x_0(t)dt \le 1$, то последовательность $x_n = n/(n+1)x_0$ принадлежит M и сходится к x_0 равномерно (проверьте!), а потому x_0 принадлежит $\overline{M}$.

Теперь ясно, что граница $\partial M = \overline{M} \setminus IntM = \overline{M} \setminus M = \left\{ x \left| \int\limits_a^b x(t)dt = 1 \right.\right\}$.

Наконец, M не является ограниченным, так как $x_n(t) = -n \in M$, но $\rho(x_n, 0) = n \to \infty$.

Пример 3 $M = \{x \mid \max|x(t)| < 1\}$.

Решение. Покажем, что M открыто. Возьмём $\forall x_0 \in M$. Тогда $\max|x_0(t)| < 1$, а потому $\exists \varepsilon > 0 : \max|x_0(t)| < 1 - \varepsilon$. Рассмотрим $B(x_0, \varepsilon)$. Для любого $y \in B(x_0, \varepsilon)$ имеем $\max\limits_{a \le t \le b}|y(t) - x_0(t)| < \varepsilon$, а тогда $\max|y(t)| \le \max|y(t) - x_0(t)| + \max|x_0(t)| < \varepsilon + 1 - \varepsilon = 1$.

Покажем, что замыкание множества M есть $\overline{M} = \{x \mid \max|x(t)| \le 1\}$. Действительно, если x_0 принадлежит $\overline{M}$, то найдется последовательность $x_n \in M$ равномерно сходящаяся к x_0 на $[a,b]$. А тогда $|x_0(t)| = \lim|x_n(t)| \le 1$. Обратно, если $\max|x(t)| \le 1$, то последовательность $x_n = n/(n+1)x_0$ принадлежит M и сходится к x_0 равномерно на $[a,b]$ (проверьте), а потому x_0 принадлежит $\overline{M}$.

Теперь ясно, что граница $\partial M = \overline{M} \setminus IntM = \overline{M} \setminus M = \{x \mid \max|x(t)| = 1\}$.

Очевидно, что данное множество ограничено.

Задача 2 Для данного множества A выяснить, является ли множество $B = A \cap l_p\ (p \ge 1)$ открытым, замкнутым, ограниченным в l_p.

Пример 1 $p = \frac{3}{2}, A = \left\{ x \middle| |x(k)| \le \frac{1}{k} \right\}$.

Решение. Множество $B = A \cap l_{3/2}$ замкнуто, так как содержит в себе все свои предельные точки. Действительно, если $x_n \to x_0, x_n \in A,$ то $\forall k \in N \;\; x_n(k) \to x_0(k)$ (почему?). Но так как $|x_n(k)| \le 1/k$, то и $|x_0(k)| \le 1/k$. Значит, $x_0 \in B$.

Так как B замкнуто, то оно не является открытым, поскольку $\forall p \ge 1$ пространство l_p связно (см. замечание в решении примера 2 к задаче 1), но легко дать и прямое доказательство. Действительно, точка e_1=(1,0,0,…) принадлежит B, но для любого $\varepsilon > 0$ точка $(1+\varepsilon, 0, 0, ...) \notin B$, хотя и лежит в ε - окрестности точки e_1.

Наконец, B ограничено, так как $\forall x \in B \;\; \rho_{3/2}(x,0) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^{3/2} \right)^{2/3} \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}} \right)^{2/3}$.

Пример 2 $p = \infty, A = \{x \mid 0 < x(k) < 1\}$.

Решение. Множество $B = A \cap l_\infty$ не является открытым. Для доказательства покажем, что точка $x_0 = (1, 1/2, 1/3, ...) \in B$ не является для него внутренней. Возьмём $\forall \varepsilon > 0$ и найдём такое натуральное N, что $\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда $x_\varepsilon = (1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{N} - \frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{N+1}, ...) \in B(x_0, \varepsilon)$, но $x_\varepsilon \notin B$, поскольку $x_\varepsilon(N) < 0$.

Множество B не замкнуто. Действительно, рассмотрим $x_n = (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, ...) \in B$. Тогда x_n сходится к точке $0 = (0,0,...)$, так как $\rho_\infty(x_n, 0) = \frac{1}{n+1} \to 0$ при $n \to \infty$, но $(0,0,...) \notin B$.

Множество B ограничено, так как $\rho_\infty(x,0) \le 1 \;\; \forall x \in B$.

Пример 3 $p = 1, A = \left\{ x \middle| \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^2 < 1 \right\}$.

Решение. Покажем, что множество $B = A \cap l_1$ открыто. Возьмём $\forall x_0 \in B$. Найдется такое $0 < \varepsilon < 1$, что $\sum_{k=1}^{\infty} |x_0(k)|^2 < (1-\varepsilon)^2$. Если $x \in B(x_0, \varepsilon^2)$ (шар рассматривается, конечно, в l_1), то $\sum_{k=1}^{\infty} |x(k) - x_0(k)| < \varepsilon^2$. Тогда и $\sum_{k=1}^{\infty} |x(k) - x_0(k)|^2 \le \sum_{k=1}^{\infty} |x(k) - x_0(k)| < \varepsilon^2$. Теперь в силу неравенства Минковского имеем

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x(k) - x_0(k)|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_0(k)|^2} < \varepsilon + 1 - \varepsilon = 1.$$

Значит, $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < 1$, т.е. $x \in B$. Итак, $B(x_0, \varepsilon^2) \subset B$.

Так как B открыто, то B не замкнуто по замечанию из решения примера 2 к задаче 1. Дадим прямое доказательство этого факта. Точки $x_n = c(1, 1/2^2, ..., 1/n^2, 0, 0, ...)$, где $c = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^4 \; {}^{-1/2}$, очевидно, принадлежат B. В то же время, x_n сходится в l_1 к $c(1, 1/2^2, 1/3^2, ...) \notin B$.

Покажем, что B не ограничено. Рассмотрим последовательность

$$x_n = \left(\sqrt{\frac{6}{\pi^2}} \cdot 1, \sqrt{\frac{6}{\pi^2}} \cdot \frac{1}{2}, ..., \sqrt{\frac{6}{\pi^2}} \cdot \frac{1}{n}, 0, 0, ... \right).$$

Имеем $x_n \in B$, так как

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_n(k)|^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{6}{\pi^2} \cdot \frac{1}{k^2} < \frac{6}{\pi^2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1,$$

но в то же время $\rho_1(x_n, 0) = \sqrt{\frac{6}{\pi^2}} \cdot \sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{k} \to \infty$ при $n \to \infty$.

Пример 4 $p = 2, A = \left\{ x \middle| \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \cdot k < 1 \right\}$.

Решение. Покажем, что $B = A \cap l_2$ не является открытым. Возьмём $x_0 = (0,0,\ldots) \in B$ и $\forall \varepsilon > 0$. Найдётся такое натуральное N, что $N \cdot \varepsilon / 2 > 1$. Тогда $x(\varepsilon) = (0,0,\ldots,0, \underbrace{\varepsilon/2}_{\substack{N-e \\ место}}, 0,0,\ldots) \in B(x_0, \varepsilon)$, но $x(\varepsilon) \notin B$.

Множество B не является и замкнутым. Для доказательства рассмотрим последовательность $x_n = \frac{6}{\pi^2} \cdot \left(1, \frac{1}{2^3}, ..., \frac{1}{n^3}, 0, 0, ...\right) \in B$. Она сходится к точке $x_0 = \frac{6}{\pi^2} \cdot \left(1, \frac{1}{2^3}, ..., \frac{1}{n^3}, \frac{1}{(n+1)^3}, ...\right)$, которая не принадлежит B, так как $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \cdot k = \frac{6}{\pi^2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1$.

Множество B ограничено, поскольку неравенство $|x_k| < \frac{1}{k}$ влечет

$$\rho_2(x, 0) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \right)^{1/2} \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} = \frac{\pi}{\sqrt{6}}.$$

Задания лабораторной работы

Задача 1 Является ли данное множество M открытым, замкнутым, ограниченным в пространстве $C[a;b]$? Найти его замыкание, внутренние и граничные точки.

№	M	№	M
1.1	$\{x \in C^{(1)}[a;b] \mid x(a)=0\}$	1.4	$\{x \mid x(a)>0\}$
1.2	$\{x \mid x(a)=x(b)\}$	1.5	$\{x \mid x(t)=const\}$
1.3	$\left\{x \middle\vert \int_a^b x(t)dt=0\right\}$	1.6	$\{x \in C^{(1)}[a;b] \mid x(a)=x`(a)\}$

Задача 2 Для данного множества A выяснить, является ли множество $B = A \cap l_p \,(p \geq 1)$ открытым, замкнутым, ограниченным в l_p.

№	p	A	№	p	A
2.1	1	$\left\{x \middle\vert \lvert x_k \rvert \leq \frac{1}{k}\right\}$	2.4	∞	$\{x \mid \exists n : \forall k>n \ x_k=0\}$
2.2	2	$\{x \mid x_k>0\}$	2.5	3/2	$\{x \mid x(1)=\ldots=x(n)=0\}$
2.3	2	$\left\{x \middle\vert \lvert x_k \rvert < \frac{1}{\sqrt[3]{k^2}}\right\}$	2.6	2	$\left\{x \middle\vert \sum_{k=1}^{\infty} \lvert x_k \rvert <1\right\}$

Лабораторная работа 3

Полнота метрических пространств

Примеры решения задач

Задача 1 Является ли последовательность x_n фундаментальной в данном пространстве *X*? Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если он существует.

Пример 1 $X = L_{3/5}[0;1]$, $\rho(x,y) = \int_0^1 |x(t)-y(t)|^{3/5}\,dt$, $x_n(t) = \begin{cases} (n+t)^{-1}, t\in[0;1]\setminus K \\ \exp(n^2 t), t\in K\cap[0,1] \end{cases}$,

где *K* – канторово множество.

Решение. Так как канторово множество имеет лебегову меру нуль, то и $K\cap[0;1]$ - множество меры нуль. Значит, $x_n(t) = (n+t)^{-1}$ п.в.

Покажем, что x_n сходится к 0 в $L_{3/5}[0,1]$. Для этого рассмотрим

$$\rho(x_n,0) = \int_0^1 \left|\frac{1}{n+t} - 0\right|^{3/5} dt = \frac{5(n+t)^{2/5}}{2}\Big|_0^1 = \frac{5}{2}((n+1)^{5/2} - n^{2/5}) = \frac{5}{2}n^{2/5}((1+\frac{1}{n})^{2/5} - 1)$$

и воспользуемся разложением по формуле Тейлора:

$$(1+x)^{\alpha} - 1 = \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2) \text{ при } x\to 0.$$

Получаем:

$$\rho(x_n,0) = \frac{5}{2}\cdot n^{2/5}(\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{n} - \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})) = \frac{1}{n^{3/5}} - \frac{3}{5\cdot n^{8/5}} + o(\frac{1}{n^{8/5}}) \to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Тот же результат мы получим, применив теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла.

Итак, x_n сходится к 0, а потому она фундаментальна.

Пример 2 $X = L_{5/3}[0,1]$, $x_n(t) = \begin{cases} \cos nt, t\in[0,1]\setminus K \\ \exp(\pi t^n), t\in K\cap[0,1] \end{cases}$,

Решение. Так как $K\cap[0,1]$ - множество меры нуль, то $x_n(t) = \cos nt$ п.в. на [0;1]. Покажем, что эта последовательность не фундаментальна в нашем пространстве:

$$\rho_{5/3}^{5/3}(x_{n+2},x_n) = \int_0^1 |x_{n+2}(t) - x_n(t)|^{5/3}\,dt = 2^{5/3}\int_0^1 |\sin t|^{5/3}\,|\sin(n+1)t|^{5/3}\,dt \ge$$

$$\ge 2^{5/3}\int_0^1 \sin^2 t\sin^2(n+1)t dt = 2^{5/3}\int_0^1 \sin^2 t\,\frac{1-\cos 2(n+1)t}{2}dt =$$

$$= 2^{2/3}(\int_0^1 \sin^2 t dt - \int_0^1 \sin^2 t\sin 2(n+1)t dt) \to 2^{2/3}\int_0^1 \sin^2 t dt \ne 0 \ (n\to\infty)$$

(мы воспользовались леммой Римана из теории рядов Фурье, согласно которой $\int_0^1 \sin^2 t\sin 2(n+1)t dt \to 0$, но можно было бы вычислить интеграл и непосредственно).

Задача 2 Является ли метрическое пространство (X, ρ) полным?

Пример 1 X=B[0,1] пространство вещественнозначных ограниченных функций на [0,1], наделенное метрикой

$$\rho(x, y) = \sup_{t\in[0,1]} |x(t) - y(t)| .$$

Решение. Покажем, что любая фундаментальная последовательность (x_n) в B[0,1] является сходящейся. Ее фундаментальность значит, что $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_\varepsilon : \; \forall n, m > n_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\sup_{t\in[0,1]} |x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon \qquad (1)$$

Зафиксируем произвольное число $t \in [0;1]$. Тогда числовая последовательность ($x_n(t)$) в силу (1) является фундаментальной в ***R.*** По причине полноты пространства ***R*** последовательность $x_n(t)$ сходится. Положим $x_0(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t)$, $t \in [0,1]$. Тем самым на [0;1] определена функция x_0, к которой x_n сходится поточечно. Осталось доказать, что

1) $x_0 \in B[0;1]$ и 2) $\rho(x_n, x_0) \to 0$ при $n \to \infty$.

С этой целью перейдем в (1) (а точнее, в неравенстве $|x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon$, справедливом при всех t из [0,1]) к пределу при $m \to \infty$. Получим, что

$$\forall n > n_\varepsilon \;\; \sup_{t\in[0,1]} |x_n(t) - x_0(t)| \le \varepsilon \qquad (2)$$

В частности, при $N = n_\varepsilon$ $\forall t \in [0;1]$ выполняется оценка:

$$-\sup_{t\in[0,1]} |x_N(t)| - \varepsilon \le x_0(t) \le \sup_{t\in[0,1]} |x_N(t)| + \varepsilon ,$$

из которой следует ограниченность x_0. Следовательно, $x_0 \in B[0;1]$. Наконец, формула (2) означает, что $\forall n > n_\varepsilon \;\; \rho(x_n, x_0) \le \varepsilon$. Поэтому $\rho(x_n, x_0) \to 0$ при $n \to \infty$.

.

Пример 2 $X = l_{p,\mu}$ ($p \ge 1$) – пространство числовых последовательностей $x = (x(1), x(2), ..., x(n), ...)$, удовлетворяющих условию: $\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p \mu(n) < \infty$, где $\mu = (\mu(1), \mu(2), ..., \mu(n), ...)$, $\mu(n) > 0$) заданная числовая последовательность;

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n) - y(n)|^p \mu(n) \right)^{1/p} .$$

Решение. Покажем, что данное пространство полно. Пусть (x_n) - фундаментальная последовательность в $l_{p,\mu}$. Это значит, что

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_\varepsilon : \; \forall n, m > n_\varepsilon \;\; \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_n(i) - x_m(i)|^p \mu(i) \right)^{1/p} < \varepsilon . \qquad (1)$$

Тогда для любого фиксированного i имеем $\forall n, m > n_\varepsilon \;\; |x_n(i) - x_m(i)|^p \mu(i) < \varepsilon^p$, т. е. $|x_n(i) - x_m(i)| < \varepsilon / \mu(i)^{1/p}$. Следовательно, для любого фиксированного i числовая последовательность $(x_n(i))_{n=1}^{\infty}$ является фундаментальной, а потому сходится. Обозначим $x_0(i) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n(i)$ и положим $x_0 = (x_0(1), x_0(2), ..., x_0(n), ...)$. Осталось показать, что

1) $x_0 \in l_{p,\mu}$ и

2) $\rho(x_n, x_0) \to 0$ при $n \to \infty$.

Из (1) следует, что $\sum\limits_{i=1}^{M} |x_n(i) - x_m(i)|^p \mu(i) < \varepsilon^p$ любого фиксированного M, что в пределе при $m \to \infty$ дает $\forall M \quad \sum\limits_{i=1}^{M} |x_n(i) - x_0(i)|^p \mu(i) \le \varepsilon^p$. Переходя теперь к пределу при $M \to \infty$, получим $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_n(i) - x_0(i)|^p \mu(i) \le \varepsilon^p$, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon : \forall n > n_\varepsilon \ \sum_{i=1}^{\infty} |x_n(i) - x_0(i)|^p \mu(i) \le \varepsilon^p \tag{2}$$

Возьмем какие-нибудь $\varepsilon > 0$ и $N > n_\varepsilon$ и обозначим

$$\rho(x_N, 0) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_N(i) - x_0(i)|^p \mu(i) \right)^{1/p} = C .$$

Вследствие неравенства Минковского имеем

$$(\sum_{i=1}^{\infty} |x_0(i)|^p \mu(i))^{1/p} \le (\sum_{i=1}^{\infty} |x_0(i) - x_N(i)|^p \mu(i))^{1/p} + (\sum_{i=1}^{\infty} |x_N(i)|^p \mu(i))^{1/p} \le \varepsilon + C < \infty ,$$

а это значит, что $x_0 \in l_{p,\mu}$. Теперь (2) показывает, что $\rho(x_n, x_0) \to 0$ при $n \to \infty$, а потому (x_n) сходится в нашем пространстве к x_0.

Пример 3 $X = C^{(1)}_{[-1;1]}$ множество непрерывно дифференцируемых на [-1,1] функций с метрикой $\rho(x, y) = \int_{-1}^{1} |x(t) - y(t)| dt$.

Решение. Рассмотрим последовательность $x_n(t) = arctgnt$ и покажем, что она является фундаментальной, но не является сходящейся в нашем пространстве. Заметим, что эта последовательность поточечно сходится к функции $x_0(t) = \pi / 2 \operatorname{sgn} t \in L_1[-1,1] \setminus X$., где

$$\operatorname{sgn} t = \begin{cases} 1, t \in (0;1], \\ 0, t = 0, \\ -1, t \in [-1;0) \end{cases} .$$

А так как $\forall t |x_n(t) - x_0(t)| \le 1 + \pi / 2$, то по теореме Лебега $\rho(x_n, x_0) = \int_{-1}^{1} |x_n(t) - x_0(t)| dt \to 0$ при $n \to \infty$. Это означает, что в пространстве $L_1[-1,1]$ последовательность x_n сходится к x_0. Следовательно, она фундаментальна в *X*. С другой стороны, если предположить, что последовательность x_n сходится в данном пространстве *X* к некоторой функции $\psi \in C^{(1)}_{[-1;1]}$, то получим, что x_n имеет два предела в $L_1[-1,1]$ x_0 и ψ, противоречие. Итак, данное пространство не является полным.

Задания лабораторной работы

Задача 1 Является ли последовательность x_n фундаментальной в данном пространстве X? Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если он существует.

№	X	x_n	№	X	x_n
1.1	$L_1[-1;2]$	$x_n(t)=\begin{cases}\sin nt, t\in Q\cap[-1;2],\\ \sqrt{t^2+\dfrac{1}{n^3}}, t\in[-1;2]\setminus Q\end{cases}$	1.4	$L_{2[-1;1]}$	$x_n(t)=\begin{cases}\sqrt{t^2+\dfrac{1}{n^4}}, t\in[-1;1]\setminus K,\\ \cos(n+t), t\in K\cap[-1;1]\end{cases}$
1.2	$L_{3/2[0;1]}$	$x_n(t)=\begin{cases}ne^{nt}, t\in K,\\ \dfrac{t^3}{n}, t\in[0;1]\setminus K\end{cases}$	1.5	$L_{4[0;3]}$	$x_n(t)=\begin{cases}\sin\pi nt, t\in Q\cap[0;3]\\ \left(\dfrac{t}{3}\right)^n, t\in[0;3]\setminus Q\end{cases}$
1.3	$L_{4[-2;0]}$	$x_n(t)=\begin{cases}nt, t\in Q\cap[-2,0],\\ ne^{nt}, t\in[-2,0]\setminus Q\end{cases}$	1.6	$L_2[0;\pi/2]$	$x_n(t)=\begin{cases}\sin(t/n), t\in[0;\pi/]\setminus Q,\\ \exp(n^2t), t\in Q\cap[0;\pi/2]\end{cases}$

Задача 2 Выяснить, является ли заданное пространство (X,ρ) полным.

2.1 А) Пространство $C^{(1)}_{[a;b]}$ непрерывно дифференцируемых на отрезке [*a;b*] функций с метрикой $\rho(x;y)=\max\limits_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)|+\max\limits_{a\le t\le b}|x'(t)-y'(t)|$.

Б) Пространство всех дважды дифференцируемых на отрезке [*a;b*] функций с метрикой $\rho(x;y)=\max\limits_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)|$.

2.2 А) Пространство $l_p\,(p\ge1)$ числовых последовательностей $x=(x(1),x(2),...,x(k),...)$, удовлетворяющих условию $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x(k)|^p<\infty$, с метрикой $\rho(x,y)=(\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x(k)-y(k)|^p)^{1/p}$.

Б) Пространство всех непрерывных на отрезке [*a;b*] функций с метрикой

$$\rho(x;y)=\int_a^b|x(t)-y(t)|^2\,dt\ ^{1/2}.$$

2.3 А) Пространство l_∞ всех ограниченных числовых последовательностей $x=(x(1),x(2),...,x(k),...)$ с метрикой $\rho(x;y)=\sup\limits_k|x(k)-y(k)|$.

Б) $X=C_{[0;1]}$ с метрикой $\rho(x;y)=\int_0^1|y(t)-x(t)|\,dt$.

2.4 А) Пространство c_0 сходящихся к нулю последовательностей $x = (x(1), x(2), ..., x(k), ...)$ с метрикой $\rho(x; y) = \sup\limits_k |x(k) - y(k)|$.

Б) $X = \ x \in C_{[0;1]} \mid \int_0^1 |x(t)| dt < 1$ с метрикой $\rho(x; y) = \max\limits_{0 \le t \le 1} |x(t) - y(t)|$.

2.5 А) Пространство c сходящихся последовательностей $x = (x(1), x(2), ..., x(k), ...)$ с метрикой $\rho(x; y) = \sup\limits_k |x(k) - y(k)|$.

Б) $X = C_{[0;1]}$, с метрикой $\rho(x, y) = \left(\int_0^1 |x(t) - y(t)|^2 \, dt \right)^{1/2}$.

2.6 А) Пространство $CB_{[a,b]}$ ограниченных и непрерывных на интервале $(a;b)$ функций с метрикой $\rho(x; y) = \sup\limits_{a \le t \le b} |x(t) - y(t)|$.

Б) $X = l_1$ с метрикой $\rho(x; y) = \sup\limits_k |x(k) - y(k)|$.

Лабораторная работа 4

Непрерывные отображения

Примеры решения задач

Задача 1 Является ли заданное отображение $F: X \to Y$ на своей естественной области определения непрерывным в точке x_0?

Пример 1 $F: C[0;2] \to L_1[0;1]$, $(Fx)(t) = x(1) - \int_0^2 t x^2(s)ds$, $x_0(t) = t$.

Решение. Очевидно, что заданное отображение определено на всем $C[0;2]$. Представим его в виде: $Fx = F_1x - F_2x$, где $F_1x = x(1)$, $F_2x(t) = \int_0^2 t x^2(s)ds$, и покажем, что F_1 и F_2 непрерывны в любой точке $x_0 \in C[0;2]$. Пусть последовательность (x_n) сходится к x_0 в $C[0;2]$. Тогда

$$\rho_{L_1}(F_1x_n, F_1x_0) = \int_0^1 |x_n(1) - x_0(1)|\,dt \le \max_{t\in[0;1]} |x_n(t) - x_0(t)| = \rho_C(x_n, x_0) \to 0\ (n \to \infty).$$

Отсюда следует, что F_1 непрерывно.

Докажем непрерывность F_2. Так как функция $x_0 \in C[0;2]$, то она ограничена на $[0;2]$, т. е. $\exists M \in \boldsymbol{R}$: $|x_0(s)| \le M$ $\forall s \in [0;2]$. А так как $x_n \to x_0$ равномерно на $[0;2]$, то, начиная с некоторого номера $|x_n(s)| \le 2M$ на $[0;2]$ (почему?). Тогда

$$\rho_{L_1}(F_2x_n, F_2x_0) = \int_0^1 t \cdot \left| \int_0^2 x_n^2(s)ds - \int_0^2 x_0^2(s)ds \right| dt = \int_0^1 t dt \cdot \int_0^2 |x_n^2(s) - x_0^2(s)|\,ds =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int_0^2 |x_n(s) - x_0(s)||x_n(s) + x_0(s)|\,ds \le \frac{1}{2} \cdot 3M \cdot \max_{s\in[0;2]} |x_n(s) - x_0(s)| \cdot 2 =$$

$$= 3M \cdot \rho_C(x_n, x_0) \to 0\ (n \to \infty).$$

Отсюда следует, что $F_2 x_n \to F_2 x_0$ в $L_1[0;1]$. Поэтому в силу произвольности x_0 отображение F непрерывно в любой точке из $C[0;2]$.

Пример 2 F: $L_2[0;1] \to L_1[0;1]$, $(Fx)(t) = tx(t^3)$, $x_0 = 0$.

Решение. Пусть последовательность (x_n) сходится к x_0 в $L_2[0;1]$. Заметим, что

$$\rho_{L_2}(x_n, x_0) = \left(\int_0^1 |x_n(t) - x_0(t)|^2 dt \right)^{1/2} = \left(\int_0^1 |x_n(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Теперь в силу неравенства Коши-Буняковского

$$\rho_{L_1}(Fx_n, Fx_0) = \int_0^1 |tx_n(t^3)|\,dt = \begin{bmatrix} t^3 = s & dt = \frac{1}{3}s^{-2/3}ds \\ t = \sqrt[3]{s} & s \in [0;1] \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{|x_n(t)|}{s^{1/3}} dt \le$$

$$\le \frac{1}{3}\left(\int_0^1 |x_n(s)|^2 ds \right)^{1/2} \cdot \left(\int_0^1 \frac{ds}{s^{2/3}} \right)^{1/2} = \frac{\sqrt{3}}{3}\, \rho_{L_2}(x_n, x_0) \to 0\ (n \to \infty)$$

(аналогичные вычисления показывают, что Fx принадлежит $L_1[0;1]$ при x из $L_2[0;1]$; поэтому отображение F определено на всем $L_1[0;1]$). Значит, F – непрерывное отображение в точке x_0.

Пример 3 F: $L_1[0;1] \to L_2[0;1]$, $(Fx)(t) = \int_0^1 t\sqrt{s}x^2(s)ds$, $x_0 = 0$.

Решение. Покажем, что отображение не является непрерывным. Возьмём последовательность $x_n = n^{3/4} \cdot \chi_{[0;1/n]}$, которая $\to 0$ в $L_1[0;1]$ (действительно,

$$\rho_{L_1}(x_n,0)=\int_0^{1/n} n^{3/4}dt = \frac{n^{3/4}}{n} = \frac{1}{n^{1/4}} \to 0 \text{ при } n \to \infty).$$

Рассмотрим теперь выражение

$$\rho_{L_2}^2(Fx_n, Fx_0) = \rho_{L_2}^2(Fx_n, 0) = \int_0^1 \left|Fx_n(t)\right|^2 dt = \int_0^1 \left(\int_0^1 t\sqrt{s}x_n^2(s)ds \right)^2 dt =$$

$$= \int_0^1 t^2 dt \cdot \left(\int_0^1 \sqrt{s}x_n^2(s)ds \right)^2 == \frac{1}{3}\left(\int_0^{1/n} \sqrt{s}n^{3/2}ds \right)^2 = \frac{1}{3}\left(n^{3/2} \cdot \frac{2s^{3/2}}{3}\Bigg|_0^{1/n} \right)^2 = \frac{4}{27}.$$

Следовательно, последовательность $\rho_{L_2}(Fx_n, Fx_0)$ не стремится к нулю при $n \to \infty$, а потому Fx_n не стремится к Fx_0.

Пример 4 F: $L_2[0;1] \to L_1[0;1]$, $(Fx)(t) = \int_0^1 \frac{tx^2(s)}{\sqrt[4]{s}}ds$, $x_0 = 0$.

Решение. Покажем, что отображение не является непрерывным. Заметим, что

$$\rho_{L_2}^2(Fx_n, Fx_0) = \rho_{L_2}^2(Fx_n, 0) = \int_0^1 \left| \int_0^1 \frac{tx_n^2(s)}{\sqrt[4]{s}}ds \right| dt = \int_0^1 tdt \cdot \left| \int_0^1 \frac{x_n^2(s)}{\sqrt[4]{s}}ds \right| = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x_n^2(s)}{\sqrt[4]{s}}ds.$$

Возьмем последовательность $x_n = n^{7/8} \cdot \chi_{[0;1/n^{-2}]}$, которая $\to 0$ в $L_2[0;1]$, так как

$$\left(\int_0^{n^{-2}} n^{7/4}dt \right)^{1/2} = \left(\frac{n^{7/4}}{n^2} \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt[8]{n}} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Тогда

$$\rho_{L_1}(Fx_n, 0) = \frac{1}{2}\int_0^{n^{-2}} \frac{n^{7/4}}{\sqrt[4]{s}}ds = \frac{n^{7/4}}{2} \cdot \frac{4s^{3/4}}{3}\Bigg|_0^{1/n^2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{n^{7/4}}{n^{3/2}} \to \infty \text{ при } n \to \infty,$$

а потому Fx_n не стремится к Fx_0.

Задача 2 Является ли заданное отображение $F: X \to Y$: а) непрерывным; б) равномерно непрерывным; в) удовлетворяющим условию Липшица?

Пример 1 $X = Y = C[-4;2]$, $(Fx)(t) = x(t)\sin x(t)$.

Решение. а) Отображение F является непрерывным, так как

$$\boldsymbol{\rho}(Fx,Fx_0) = \max_{t\in[-4;2]}|x(t)\sin x(t) - x_0(t)\sin x_0(t)| \le \max_{t\in[-4;2]}|x(t)\sin x(t) - x_0(t)\sin x(t)| +$$

$$+ |x_0(t)\sin x(t) - x_0(t)\sin x_0(t)| \le \max_{t\in[-4;2]}|x(t) - x_0(t)| +$$

$$+ \max_{t\in[-4;2]}|x_0(t)\cdot 2\sin\frac{x(t)-x(t_0)}{2}\cdot\cos\frac{x(t)+x(t_0)}{2})| \le \max_{t\in[-4;2]}|x(t) - x_0(t)| + M\cdot \max_{t\in[-4;2]}|x(t) - x_0(t)| =$$

$$= (M+1)\boldsymbol{\rho}(x,x_0)$$

(здесь $M = \max\limits_{t\in[-4;2]}|\,x_0(t)\,|$; мы воспользовались неравенством $|\sin x| \le |x|$).

б) Покажем, что F не является равномерно непрерывным. Возьмём $x_n(t) = 2\pi\ \ n+{}^{1}\!/_{n}$, $y_n(t)= 2\pi n$. Тогда $\boldsymbol{\rho}(x_n,y_n)= \dfrac{2\pi}{n} \to 0$ при $n\to\infty$, но

$$\boldsymbol{\rho}(Fx_n, Fy_n)= 2\pi\ \ n+{}^{1}\!/_{n}\ \ \sin\frac{2\pi}{n} - 2\pi n\cdot\sin 2\pi n = 2\pi n\sin\frac{2\pi}{n}+\frac{2\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n} =$$

$$= 4\pi^2\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}+\frac{2\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\to 4\pi^2,$$

а значит, $\boldsymbol{\rho}(Fx_n, Fy_n)$ не стремится к нулю при $n\to\infty$. Это противоречит определению равномерной непрерывности (проверьте).

в) Так как F не является равномерно непрерывным, то оно не удовлетворяет условию Липшица (почему?).

Пример 2 $X = l_2$, $Y = l_\infty$, $Fx = \left(\dfrac{x_1^2}{1+x_1^2}, x_1, x_2, \ldots\right)$.

Решение. Покажем, что F удовлетворяет условию Липшица с константой L=1. Заметим, что

$$\boldsymbol{\rho}_{l_\infty}(Fx, Fy) = \sup_k\left\{\left|\frac{x_1^2}{1+x_1^2}-\frac{y_1^2}{1+y_1^2}\right|;\ |\,x_1 - y_1\,|;\ |\,x_1 - y_1\,|;\ \ldots\right\}.$$

Обозначим $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$. Тогда

$$|\,f'(x)| = \left|\frac{2x\ \ 1+x^2\ \ - x^2\cdot 2x}{1+x^2\ \ ^2}\right| = \frac{2|x|}{1+x^2\ \ ^2}\le 1.$$

Следовательно, по теореме Лагранжа $|\,f(x_1) - f(y_1)\,| \le |\,x_1 - y_1\,|$, а значит,

$$\boldsymbol{\rho}_{l_\infty}(Fx, Fy) = \sup\left\{\left|\frac{x_1^2}{1+x_1^2}-\frac{y_1^2}{1+y_1^2}\right|;\ |\,x_1 - y_1\,|;\ |\,x_1 - y_1\,|;\ \ldots\right\} \le \sup_k|\,x_k - y_k\,| \le \boldsymbol{\rho}_{l_2}(x,y).$$

Так как F удовлетворяет условию Липшица, то оно равномерно непрерывно, а потому и непрерывно.

Пример 3 $X = L_1[0;1]$, $Y = L_2[-1;1]$, $(Fx)(t)= \int\limits_0^1 e^t \ arctgx(s)ds.$

Решение. Покажем, что F удовлетворяет условию Липшица. Действительно,

$$\boldsymbol{\rho}_{L_2}(Fx, Fy) = \left(\int\limits_{-1}^{1} \left| Fx(t) - Fy(t) \right|^2 dt \right)^{1/2} = \left(\int\limits_{-1}^{1} e^{2t} \left| \int\limits_0^1 arctgx(s)ds - \int\limits_0^1 arctgy(s)ds \right|^2 dt \right)^{1/2} =$$

$$= \sqrt{ch2} \cdot \int\limits_0^1 \left| arctgx(s) - arctgy(s) \right| ds.$$

Так как $\left|(arctgx)'\right| = \dfrac{1}{1+x^2} \le 1$, то по теореме Лагранжа $\left|arctgx - arctgy\right| \le \left|x - y\right|$. Поэтому при любых x,y

$$\boldsymbol{\rho}_{L_2}(Fx, Fy) \le \sqrt{ch2}\ \boldsymbol{\rho}_{L_1}(x,y).$$

Так как F удовлетворяет условию Липшица, то оно является равномерно непрерывным.

Пример 4 $X=l_2$ $Y=l_1$, $Fx= \ 0, 0, \sqrt{\left|x_{21}^3\right|}, 0, 0, ...$.

Решение. а) Покажем, что F непрерывно. Действительно, если $x_n \to x_0$ в l_2, то числовая последовательность $x_n(21)$ сходится к $x_0(21)$. Тогда

$$\boldsymbol{\rho}_{l_2}(Fx_n, Fx_0) = \left| \sqrt{\left|x_n^3(21)\right|} - \sqrt{\left|x_0^3(21)\right|} \right| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

б) Покажем, что F не является равномерно непрерывным. Пусть

$$x_n(21) = \left(\sqrt{n} + \frac{1}{n} \right)^2, \ y_n(21) = n, \ x_n(k) = y_n(k) = 0 \ \ \forall k \ne 21.$$

Тогда

$$\boldsymbol{\rho}_{l_2}(x_n, y_n) = \left(\sqrt{n} + \frac{1}{n} \right)^2 - n = \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n^2} \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

но

$$\rho_{l_1}(Fx_n, Fy_n) = \left(\sqrt{n} + \frac{1}{n} \right)^3 - \sqrt{n^3} = 3 + \frac{3}{n\sqrt{n}} + \frac{1}{n^3} \to 3 \text{ при } n \to \infty.$$

в) Так как F не является равномерно непрерывным, то оно не удовлетворяет и условию Липшица.

Задания лабораторной работы

Задача 1 Выяснить, является ли заданное отображение $F: X \to Y$ на своей естественной области определения непрерывным в точке x_0?

№	X	Y	F	$x_0(t)$
1.1	$L_2[0;1]$	$L_1[0;1]$	$(Fx)(t) = t^{-1/4}\sin x(t)$	t^2
1.2	$C[0;1]$	$L_1[0;1]$	$(Fx)(t) = \sin x^2(t)$	t
1.3	$L_2[0;1]$	$L_2[0;1]$	$(Fx)(t) = x(\sqrt{t})$	$\sqrt{t}$
1.4	$C[0;1]$	$C[0;1]$	$(Fx)(t) = \int_0^1 t\lvert x(s)\rvert/\sqrt{s}\, ds$	t
1.5	$C[0;1]$	$C[0;2]$	$(Fx)(t) = 2x^3(t/2)$	1
1.6	$L_1[0;1]$	$L_2[0;1]$	$(Fx)(t) = x(t)$	0

Задача 2 Является ли заданное отображение $F: X \to Y$: а) непрерывным; б) равномерно непрерывным; в) удовлетворяющим условию Липшица?

№	X	Y	F
2.1	$C[0;1]$	$C[0;1]$	$(Fx)(t) = x^2(\sqrt{t})e^t$
2.2	$C[-1;1]$	$C[-1;1]$	$(Fx)(t) = x(t)/(1+x^2(t))$
2.3	$L_2[-1;0]$	$L_1[-1;0]$	$(Fx)(t) = \int_{-1}^{0} \frac{tx(s)}{1+x^2(s)}\, ds$
2.4	$C[-1;2]$	$L_1[-1;2]$	$(Fx)(t) = \frac{e^{x(t)}}{1+e^{x(t)}}$
2.5	l_1	l_1	$Fx = (\cos x(1), x(2), x(3), \ldots, x(k), \ldots)$
2.6	$C[-5;2]$	$L_1[-5;2]$	$Fx(t) = \int_0^1 t\lvert x(s)\rvert^{2/3}\, ds$

Лабораторная работа 5

Компактные множества в метрических пространствах

Примеры решения задач

Задача 1 Выяснить, являются ли данные множества предкомпактными, компактными в $C[0;1]$.

Пример 1 а) $M = \{\, ae^{-\alpha t+b} \mid a,b,\alpha \in [0;1]\}$;
б) $M_1 = \{\, ae^{-\alpha t+b} \mid a,b \in [0;1],\ \alpha \in (0;1)\}$.

Решение. Проверим для множества M условия теоремы Арцела-Асколи. Рассмотрим функцию $f(t,a,b,\alpha) = ae^{-\alpha t+b}$. Пусть $K = [0;1]^3$. Тогда f непрерывна на $[0;1]\times K$ и $M=\ f(\cdot,s)\,|\,s\in K$. Множество $[0;1]\times K$ является компактом. По теореме Вейерштрасса f ограничена на $[0;1]\times K$, т.е. $\exists\, c\ \ \forall\, t\in\ [0;1]\ \ \forall\,(a,b,\alpha)\ \in\ [0;1]^3$ справедливо неравенство $\left|ae^{-\alpha t+b}\right|\ \le\ c$. Значит, M равномерно ограничено (впрочем, легко проверить и непосредственно, что при наших условиях $\left|ae^{-\alpha t+b}\right|\le 1$).

Проверим равностепенную непрерывность множества M. По теореме Кантора f равномерно непрерывна на $[0;1]\times K$. Если обозначить через $s = (a,b,\alpha)$ произвольную точку из K, то равномерная непрерывность f означает, что $\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0\ \forall\, t_1,t_2$ из $[0;1]$, таких, что $|t_1 - t_2| < \delta$, и $\forall\ s_1,s_2$ из K, таких, что $\rho(s_1,s_2) < \delta$ (ρ обозначает евклидову метрику в K), справедливо неравенство

$$\left|f\ \ t_1,s_1\ -f\ \ t_2,s_2\ \right|<\varepsilon .$$

Отсюда следует равностепенная непрерывность множества M (см. определение). Значит, по теореме Арцела-Асколи M предкомпактно.

Для доказательства компактности множества M теперь достаточно проверить его замкнутость в $C[0;1]$. Но это тоже следует из непрерывности функции f. В самом деле, если x предельная точка множества M, то найдется последовательность $f(\cdot,s_n)$ функций из M, сходящаяся к x в $C[0;1]$. По свойству Больцано-Вейерштрасса из последовательности s_n точек множества K можно выбрать подпоследовательность s_{n_l}, сходящуюся к точке $s\in K$. Тогда поточечно $f(t,s_{n_l})\to f(t,s)$, а потому в силу единственности предела $x = f(\cdot,s)\in M$. Итак, M – компакт.

Далее, так как $M_1 \subset M$, то множество M_1 предкомпактно. Но M_1 не является компактом, так как не замкнуто в $C[0;1]$. Действительно, функции $x_n(t) = e^{-t/n} \in M_1$, но предел этой последовательности $x_0(t) = 1 \notin M_1$.

Пример 2 $M = \{t^n \mid n\in\mathbf{N}\}$.

Решение. Это множество является равномерно ограниченным, но не является равностепенно непрерывным. Действительно, возьмем $\varepsilon = 1/4$. Тогда $\forall\,\delta>0$ найдется такое натуральное n, что точки $t_1=1$ и $t_2 = 1/\sqrt[n]{2}\in[0;1]$ удовлетворяют неравенству $|t_1 - t_2| = |1-1/\sqrt[n]{2}\,| <\delta$, но в то же время $|\ t_1^n - t_2^n\ | = |1-1/2| >\varepsilon$. Значит, по теореме Арцела-Асколи M не является предкомпактным, а потому и компактным множеством.

Пример 3 $M = \{\sin(t+a) \mid a\in \mathbf{R}\}$.

Решение. Множество M равномерно ограничено, так как

$$\forall t\ \forall a \left|\sin(t+a)\right| \le 1.$$

Множество M равностепенно непрерывно, так как $\forall\ \varepsilon>0\ \forall a\in \mathbf{R}$ и $\forall t_1, t_2\in [0;1]$, таких, что $|t_1 - t_2| < \varepsilon$, имеем

$$|\sin(t_1+a) - \sin(t_2+a)| = \left| 2\sin\frac{t_1-t_2}{2}\cos\frac{t_1+t_2+2n}{2} \right| \le |t_1 - t_2| < \varepsilon.$$

Значит, по теореме Арцела-Асколи M предкомпактно.

Покажем, что M содержит все свои предельные точки. Пусть x есть предельная точка множества M, $\sin(t+a_k) \to x(t)$ равномерно на [0;1]. В силу периодичности синуса можно считать, что $a_k \in [0;2\pi)$. При этом промежуток $[0;2\pi)$ удобно отождествлять с факторгруппой $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$, т. е. с единичной окружностью, наделенной естественной топологией, в которой она компактна. (Отличие здесь в том, что если последовательность $a_k \in [0;2\pi)$ в $\mathbf{R}$ сходится к 2π, то в этой топологии предел считается равным 0). Заметим, что в этой топологии существует $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = a \in [0;2\pi)$. Действительно, если допустить противное, то найдутся две подпоследовательности a_k' и a_k'', имеющие различные пределы a' и $a''\in[0;2\pi)$ соответственно. Но тогда $x(t) = \sin(t+a') = \sin(t+a'')$, откуда $a' = a''$, противоречие. Следовательно, $x(t) = \sin(t+a) \in M$. Значит, M – замкнутое множество, откуда следует, что M – компакт.

Задача 2 Является ли множество M предкомпактным в l_1?

Пример 1 $M = \{x\in l_1 \mid |x_{2k}| < \frac{1}{2^k}, |x_{2k+1}| < \frac{1}{3^{2k}}, |x_1| = 1\}$.

Решение. Проверим критерий предкомпактности в l_1

1). Множество M является ограниченным, поскольку $\forall n\ge 2$ $|x_n| < \frac{1}{2^{n/2}}$, а потому

$$\forall x\in M\ \sum_{n=1}^{\infty}|x_n| < 1 + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^{n/2}} = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2) Так как ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\sqrt{2})^n}$ сходится, то его остаток стремится к нулю, т.е.

$$\forall \varepsilon>0\ \exists N: \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{(\sqrt{2})^n} < \varepsilon.$$

Поэтому $\forall\ \varepsilon>0\ \exists N$: $\forall x\in M\ \sum\limits_{n=N+1}^{\infty}|x_n| < \sum\limits_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{(\sqrt{2})^n} < \varepsilon$.

Значит, множество M предкомпактно.

Задания лабораторной работы

Задача 1 Выяснить, является ли множество M предкомпактным, компактным в $C[0;1]$.

№	M	№	M
1.1	$\{at^{\alpha} \mid 1 \le \alpha \le 10,\ \lvert a\rvert \le 10\}$	1.4	$\{a\sin\ t+b\ ) \mid 0 \le a,\ b \le 1\}$
1.2	$\{at^{\alpha} \mid 0 \le \alpha \le 1,\ 0 < a < 1\}$	1.5	$\{\frac{t+a}{t+b} \mid 1 \le a,\ b \le 2\}$
1.3	$\{\cos at \mid -1 \le a \le 1\}$	1.6	$\{arctg\ \ at+b\ \mid a \le 1,\ b>1\}$

Задача 2 Является ли множество M предкомпактным в l_p?

№	p	M
2.1	2	$\{x \mid \lvert x_k\rvert < \frac{1}{k},\ k \in \mathbf{N}\}$
2.2	1	$\{x \mid \frac{1}{k^2} < \lvert x_k\rvert < \frac{2}{k^2},\ k \in \mathbf{N}\}$
2.3	2	$\{x \mid \lvert x_k\rvert \le \frac{1}{2^k},\ k \in \mathbf{N}\}$
2.4	2	$\{x \mid \frac{1}{2^k} \le \lvert x_k\rvert \le \frac{1}{2^{k+1}},\ k \in \mathbf{N}\}$
2.5	1	$\{x \mid x_{2k} = 0,\ 0 < x_{2k+1} \le \frac{1}{2^k},\ k \in \mathbf{N}\}$
2.6	1	$\{x \mid \lvert x_k\rvert < \frac{1}{k^a},\ \frac{3}{2} \le \alpha \le \frac{5}{2}\}$

Лабораторная работа 6

Сжимающие отображения

Примеры решения задач

Задача 1 Является ли отображение F метрического пространства X в себя сжимающим? Найти x_3, где $x_{к+1} = F(x_к)$, $x_0 = 0$. Оценить расстояние от x_3 до неподвижной точки, если F является сжимающим.

Пример 1 $X = C[-1;1], (Fx)(t) = {}^1\!/_3 \sin x(t) + e^t$.

Решение. Оценим расстояние в $C[-1;1]$

$$\rho(Fx, Fy) = \max_{-1\le t\le 1}\left|\frac{1}{3}\sin x(t) - \frac{1}{3}\sin y(t)\right| = \max_{-1\le t\le 1}\frac{1}{3}\left|\sin x(t) - \sin y(t)\right| =$$

$$= \max_{-1\le t\le 1}\frac{1}{3}\left|2\sin\frac{x(t)-y(t)}{2}\cdot\cos\frac{x(t)+y(t)}{2}\right| \le \frac{1}{3}\max_{-1\le t\le 1}\left|x(t)-y(t)\right| = \frac{1}{3}\rho(x,y)$$

(мы воспользовались неравенством $|\sin x| \le |x|$). Значит, F является сжимающим отображением с константой Липшица $\alpha = \frac{1}{3}$.

Построим последовательность $x_{k+1} = F(x_k)$. По условию $x_0 = 0$, поэтому $x_1 = F(x_0) = e^t$,

$x_2 = F(x_1) = \frac{1}{3}\sin e^t + e^t$, $x_3 = F(x_2) = \frac{1}{3}\sin(\frac{1}{3}\sin e^t + e^t) + e^t$. А так как

$$\rho(x_n; x^*) \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_1; x_0),$$

где x^* - неподвижная точка, то

$$\rho(x_3; x^*) \le \frac{(1/3)^3}{1-1/3}.\max_{-1\le t\le 1}\left|e^t\right| = \frac{e\cdot 1/27}{2/3} = \frac{e}{18} < \frac{2,72}{18} \approx 0,1511.$$

Пример 2 $X = l_4, \quad f(x) = (1, \frac{x_3}{5}, \frac{x_4}{6}, \frac{x_5}{7}, \ldots)$

Решение. Оценим расстояние в l_4

$$\rho(f(x), f(y)) = \left(\sum_{k=3}^{\infty}\left|\frac{x_k}{k+2} - \frac{y_k}{k+2}\right|^4\right)^{\frac{1}{4}} \le \frac{1}{5}\rho(x; y).$$

Значит, f – сжимающее отображение с константой $\alpha = \frac{1}{5}$.

По условию, $x_0 = (0,0,0,\ldots)$. Тогда $x_1 = (1,0,0,\ldots)$, $x_2 = x_3 = (1,0,0,\ldots)$, а потому

$$\rho(x_3; x^*) \le \frac{(1/5)^3}{1-1/5}.\rho(x_1; x_0) = 0,01$$

(на самом деле, как легко проверить, x_3 является неподвижной точкой).

Пример 3 $X = L_4[-1;1], (Fx)(t) = \sqrt[3]{t}\cdot x(t) + \ln(t+2)$.

Решение. Допустим, что отображение F является сжимающим, т.е.

$$\exists \alpha \in [0;1) : \forall x, y \in X \ \rho(Fx, Fy) \le \alpha \rho(x, y).$$

При y=0 из этого неравенства следует, что $\forall x \in X$

$$\int_{-1}^{1} t^{\frac{4}{3}} \cdot |x(t)|^4 \, dt \le \alpha^4 \int_{-1}^{1} |x(t)|^4 \, dt. \qquad (1)$$

Подставив $x(t) = \sqrt[4]{n} \cdot \chi_{[1-\frac{1}{n};1]}(t)$ в левую часть неравенства (1), получим

$$\int_{1-\frac{1}{n}}^{1} t^{4/3} \cdot n dt = \left.\frac{3nt^{7/3}}{7}\right|_{1-\frac{1}{n}}^{1} = \frac{3n}{7}(1-(1-\frac{1}{n})^{7/3}) \sim \frac{3n}{7} \cdot \frac{7}{3n} = 1 \text{ при } n \to \infty$$

(мы воспользовались эквивалентностью $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$ при $x \to 0$).

Правая же часть неравенства (1), как легко проверить, при этом значении x равна α^4. Следовательно, неравенство (1) при указанных x, y и $n \to \infty$ примет вид: $1 \le \alpha^4$, противоречие. Значит, F не является сжимающим. (Аналогичное решение получается и при $x = \chi_{[1-\frac{1}{n};1]}$).

Задача 2 Применим ли принцип сжимающих отображений к заданному интегральному уравнению в пространстве X при $\lambda_1 = \frac{1}{6}, \lambda_2 = -\frac{1}{3}, \lambda_3 = 2$? При $\lambda = \lambda_1$ с точностью до 0,01 найти приближенное решение и сравнить его с точным решением.

$$X = C[0;1], x(t) = \lambda \int_0^1 ts \cdot x(s) ds + 1 \qquad (1)$$

Решение. Определим отображение $f : C[0;1] \to C[0;1]$ по формуле

$$(f(x))(t) = \lambda \int_0^1 ts \cdot x(s) ds + 1 \qquad (2)$$

Тогда исходное уравнение запишется в виде $x = f(x)$, и искомое решение есть неподвижная точка отображения f. Метрическое пространство C[0;1] является полным, поэтому если мы покажем, что f – сжимающее отображение C[0;1] в себя, то можно будет применить принцип сжимающих отображений. То, что отображение f непрерывную на [0;1] функцию переводит в непрерывную, в данном случае очевидно (а в общем следует из свойств интеграла, зависящего от параметра). Определим, при каких λ отображение f является сжимающим. Известно, что отображение

$$(Ax)(t) = \lambda \int_a^b K(s,t) x(s) ds + g(t) \qquad (3)$$

является сжимающим в C[a;b], если $|\lambda| < \frac{1}{M \ b-a}$, где $M = \max_{s,t \in [0,1]} |K(s,t)|$. При этом константа Липшица $\alpha = M \cdot |\lambda| \cdot (b-a)$. (Заметим, что это утверждение дает лишь достаточное условие сжимаемости). В данном случае $K(s,t)=ts$, $M=\max\limits_{s,t\in[0;1]}|ts|=1$. Следовательно, f является сжимающим при $|\lambda\ |<1$, т.е., в частности, при $\lambda=\lambda_1$ и $\lambda=\lambda_2$.

Докажем, что f не является сжимающим при $\lambda_3=2$. Если допустить, что f – сжимающее, то для $\forall x, y\in X$ и некоторого $\alpha\in[0;1)$ должно выполняться неравенство

$$\max_{a\le t\le 1}\left|2\int_0^1 ts(x(s)-y(s))d\,s\right|\le\alpha\max_{a\le t\le 1}|x(t)-y(t)\ |.$$

При $y(t)=0$, $x(t)=\begin{cases} nt, t\in[0;1/n] \\ 1, t\in[1/n;1]\end{cases}$ последнее неравенство примет вид $2\left|\int_0^1 sx(s)ds\right|\le\alpha$. А

так как $2\left|\int_0^1 sx(s)ds\right|=2\left|2\int_0^{1/n} ns^2ds+2\int_{1/n}^1 sds\right|=1-\dfrac{1}{6n^2}$,

То получаем, что $\forall n\in N\ 1-\dfrac{1}{6n^2}\le\alpha$, откуда в пределе $1\le\alpha$. Это противоречие доказывает, что f не является сжимающим при $\lambda_3=2$.

Решим уравнение (1) при $\lambda\ =1/6$. При этом λ отображение f - сжимающее, а потому для нахождения приближённого решения можно воспользоваться методом итераций (последовательных приближений). Из уравнения (1) следует, что его решение имеет вид

$$x(t)=\lambda\cdot c\cdot t+1,\ \text{где}\ c=\int_0^1 sx(s)ds. \tag{4}$$

Поскольку x_0 выбирается произвольно, возьмём $x_0(t)=t+1$. Дальнейшие приближения находятся по формулам $x_1=f(x_0)$, $x_2=f(x_1),\ldots,x_{n+1}=f(x_n),\ldots$.

Установим номер *k*, при котором элемент x_k будет давать точность приближения 0,01. Используем оценку погрешности (*x* - точное решение)

$$\rho(x_n,x)\le\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\cdot\rho(x_0,x_1)\le 0,01.$$

В нашем случае $\alpha=1\cdot\dfrac{1}{6}\cdot(1-0)=\dfrac{1}{6}$. Тогда

$$x_1(t)=f(x_0)(t)=\frac{1}{6}t\int_0^1 s(s+1)ds+1=\frac{5}{36}t+1.$$

$$\rho(x_0;x_1)\le\max_{0\le t\le 1}\left|t+1-\frac{5}{36}t-1\right|=\frac{31}{36}.$$

Следовательно,

$$\rho(x_n,x)\le\left(\frac{1}{6}\right)^n\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{31}{36}\le\frac{1}{100},$$

А потому искомое *k* определяется из неравенства: $\left(\dfrac{1}{6}\right)^k\le\dfrac{3}{310}$. Поскольку *k*=3 ему удовлетворяет, x_3 будет приближенным решением исходного уравнения с точностью 0,01. Найдём x_3:

$$x_2(t)=f(x_1)(t)=\frac{1}{6}t\int_0^1 s\left(\frac{5}{36}s+1\right)ds+1=\frac{59}{648}t+1,$$

$$x_3(t) = f(x_2)(t) = \frac{t}{6}\int_0^1 s\left(\frac{59}{648}s+1\right)ds + 1 = \frac{1031}{11664}t + 1.$$

Итак, приближённое решение с нужной точностью есть $x_3(t) = \dfrac{1031}{11664}t + 1.$

Точное решение имеет вид $x(t) = \dfrac{c}{6}t + 1$ (см. формулу (4)). Подставив $x(t)$ в (1), получим:

$\dfrac{c}{6}t + 1 = \dfrac{t}{6}\int_0^1 s\left(\dfrac{c}{6}s+1\right)ds + 1$. Отсюда $c = \int_0^1 \left(\dfrac{c}{6}s^2 + s\right)ds$, $c = \dfrac{c}{18} + \dfrac{1}{2}$, $c = \dfrac{9}{17}$. Следовательно, точное решение есть

$$x(t) = \frac{9}{102}t + 1.$$

Сравним его с приближённым:

$$\rho(x_3; x) = \max_{0\le t\le 1}\left|\frac{9}{102}t + 1 - \frac{1031}{11664}t - 1\right| = \frac{182}{102\cdot 11664} < \frac{1}{100}.$$

Замечание. Первую часть решения можно сократить, если воспользоваться тем фактом, что норма линейного оператора

$$(A_1x)(t) = \int_a^b k(s,t)x(s)ds$$

в пространстве C[0;1] дается формулой

$$\|A_1\| = \max_{t\in[a;b]}\int_a^b |k(t,s)|ds.$$

Поскольку норма есть *точная* константа в неравенстве ограниченности, отображение A_1 является сжимающим тогда и только тогда, когда $\|A_1\| < 1.$ То же верно и для отображения $f(x) = A_1x + g$ (почему?).

Задания лабораторной работы

Задача 1 Является ли отображение F метрического пространства X в себя сжимающим? Найти x_3, где $x_{k+1} = F(x_k)$, $x_0 = 0$. Оценить расстояние от x_3 до неподвижной точки, если F является сжимающим.

№	X	F
1.1	$l_{8/3}$	$F(x) = \left(0, \frac{x_1}{2}+\frac{1}{2}, \frac{x_2}{4}+\frac{1}{3}, \ldots, \frac{x_k}{2^k}+\frac{1}{k+1}, \ldots\right)$
1.2	l_∞	$F(x) = (\frac{x_2}{2}+\frac{1}{2}, \frac{x_3}{3}+\frac{1}{4}, \ldots, \frac{x_k}{k}+\frac{1}{2^{k-1}}, \ldots)$
1.3	C[-1;1]	$(Fx)(t) = tx(t) + \exp(\sin \pi t)$
1.4	l_{21}	$F(x) = (\sin(\pi/6)x_1 + 1, \ldots, (\sin(\pi/6))^k x(k) + 1/k, \ldots)$

1.5	$C[-1;1]$	$(Fx)(t) = \frac{1}{2} x(t^2) + t$
1.6	$L_2[0;1]$	$(Fx)(t) = \frac{1}{8} x(\sqrt{t}) + 1$

Задача 2 Применим ли принцип сжимающих отображений к заданному интегральному уравнению в пространстве X при $\lambda = \lambda_1, \lambda = \lambda_2, \lambda = \lambda_3$? При $\lambda = \lambda_1$ с точностью до 0,01 найти приближённое решение и сравнить его с точным решением.

№	X	λ_1	λ_2	λ_3	Уравнение
2.1	$C[0;1]$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{5}$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$x(t) = \lambda \int_0^1 t^{-\frac{1}{4}} s x(s) ds + t^2$
2.2	$C[-1;1]$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$x(t) = \lambda \int_{-1}^1 (t^2 - 1) s^2 x(s) ds + t$
2.3	$C[-2;2]$	$\frac{1}{36}$	$-\frac{1}{25}$	$\frac{2}{15}$	$x(t) = \lambda \int_{-2}^2 (1+s)(1-t) x(s) ds + t$
2.4	$C[-1;1]$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{8}$	1	$x(t) = \lambda \int_{-1}^1 t s x(s) ds + 2$
2.5	$C[0;1]$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$x(t) = \lambda \int_0^1 t(1+s) x(s) ds - 5$
2.6	$C[-1;1]$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	$x(t) = \lambda \int_{-1}^1 t^2 s^2 x(s) ds + t^3$

Лабораторная работа 7

Линейные нормированные пространства

Примеры решения задач

Задача 1 Является ли множество A выпуклым в пространстве X?

Пример 1 $X = c_0, A = \{x \in c_0 \mid |x_1| + |x_2| \le 1\}$.

Решение. Воспользуемся определением выпуклости. Возьмем $\forall x, y \in A, \forall \lambda \in [0;1]$ и покажем, что $\lambda x + (1-\lambda) y \in A$. Действительно, так как $|x_1| + |x_2| \le 1$ и $|y_1| + |y_2| \le 1$, то

$$|\lambda x_1 + (1-\lambda) y_1| + |\lambda x_2 + (1-\lambda) y_2| \le \lambda |x_1| + (1-\lambda)|y_1| + \lambda |x_2| + (1-\lambda)|y_2| =$$
$$= \lambda(|x_1| + |x_2|) + (1-\lambda)(|y_1| + |y_2|) \le \lambda + 1 - \lambda = 1.$$

Значит, множество A является выпуклым.

Задача 2 Проверить, является ли заданная система векторов (x_k) в бесконечномерном пространстве X линейно независимой.

Пример 1 $X = C[a;b], \quad x_k(t) = (t-a)^k, \quad k = 0,1,2,\ldots n.$

Решение. Покажем по определению, что система $1, t-a, (t-a)^2, \ldots, (t-a)^n$ является линейно независимой. Пусть

$$\alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 (t-a) + \alpha_2 (t-a)^2 + \ldots + \alpha_n (t-a)^n = 0 \ \forall t \in [a;b]. \qquad (1)$$

Подставив в это равенство $t=a$, получим $\alpha_0 = 0$, а потому

$$\alpha_1 (t-a) + \alpha_2 (t-a)^2 + \ldots + \alpha_n (t-a)^n = 0.$$

Сокращая на $t-a$ и снова полагая $t=a$, получим $\alpha_1 = 0$. Продолжая этот процесс, окончательно будем иметь $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Второе решение: алгебраическое уравнение (1) не может иметь более n корней, если не все его коэффициенты равны нулю (почему?).

Пример 2 $X = C[0;1], \quad x_1(t) = \left|t - \frac{1}{2}\right| - \left|t - \frac{1}{3}\right|, \quad x_2(t) = \left|t - \frac{1}{2}\right| + \left|t - \frac{1}{3}\right|, \quad x_3(t) = |2t-1| - |3t-1|.$

Решение. Заметим, что $x_1 + x_2 = |2t-1|, 3(x_2 - x_1) = 2|3t-1|$.

Тогда $x_3 = x_1 + x_2 - \frac{1}{2} \cdot 3(x_2 - x_1) = \frac{5}{2} x_1 - \frac{1}{2} x_2$, а значит, данные функции линейно зависимы.

Задача 3 Привести пример последовательности $\{x_n\} \subset X \cap Y$, сходящейся в X, но не сходящейся в Y, если пространства X и Y наделены естественными нормами.

Пример 1 $X = c_0, Y = l_1$.

Решение. Рассмотрим последовательность $x_n = (1, 1/2, \ldots, 1/n, 0, 0, \ldots) \subset X \cap Y$. В пространстве c_0 она сходится к вектору $x_0 = (1, 1/2, \ldots, 1/n, 1/(n+1), \ldots)$, так как

$$\rho_X(x_n, x_0) := \max_k |x_n(k) - x_0(k)| = 1/(n+1) \to 0$$

при $n \to \infty$. Допустим, что $\exists a \in l_1 : \rho_Y(x_n, a) \to 0,\ n \to \infty$. Так как

$$\rho_X(x_n, a) = \max_k |x_n(k) - a(k)| \le \sum_{k=1}^{\infty} |x_n(k) - a(k)| = \rho_Y(x_n, a),$$

то (x_n) сходится к a и в пространстве $X = c_0$. В силу единственности предела отсюда следует, что $a = (1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots)$. Но $a \notin l_1$. Это противоречие доказывает, что в l_1 данная последовательность не сходится.

Пример 2 $X = L_1[0;1],\ Y = L_2[0;1]$.

Решение. Рассмотрим последовательность $x_n(t) = \begin{cases} n, 0 \le t \le 1/n^2 \\ 0, 1/n^2 < t \le 1 \end{cases}$, которая $\subset X \cap Y$.

Тогда в $L_1[0;1]$ имеем $\rho_{L_1}(x_n, 0) = \int_0^{1/n^2} n dt = 1/n \to 0$ при $n \to \infty$, т. е. $x_n \to 0$ в $L_1[0;1]$.

Допустим, что x_n сходится в $L_2[0;1]$ к некоторому a. В силу неравенства Коши-Буняковского

$$\rho_{L_1}(x_n, a) = \int_0^1 |x_n(t) - a(t)| dt \le \left(\int_0^1 |x_n(t) - a(t)|^2 dt \right)^{1/2} = \rho_{L_2}(x_n, a).$$

Отсюда следует, что если $x_n \to a$ в $L_2[0;1]$, то $x_n \to a$ и в $L_1[0;1]$. В силу единственности предела, a=0. С другой стороны, легко проверить, что $\rho_{L_2}(x_n, 0) = 1$, противоречие. Следовательно, в $L_2[0;1]$ данная последовательность не сходится.

Пример 3 $X = C[0;1], Y = C^{(2)}[0;1]$.

Решение. Рассмотрим последовательность $x_n(t) = \frac{t^n}{n} \in X \cap Y$. В $C[0;1]$ имеем $x_n \to 0$, но в $C^{(2)}[0;1]$ $\rho_Y(x_n, 0) = \frac{1}{n} + 1 + (n-1) \not\to 0$ $(n \to \infty)$. Значит, $x_n \not\to 0$ в $C^{(2)}[0;1]$. Воспользовавшись неравенством: $\rho_{C[a;b]}(x_n, a) \le \rho_{C^{(2)}[a;b]}(x_n, a)$ и рассуждая, как в предыдущих примерах, получим, что (x_n) не сходится в $C^{(2)}[0;1]$.

Задача 4 Выяснить, являются ли нормы *p* и *q* эквивалентными в данном пространстве *X*.

Пример 1 $X = l_1,\ p(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|, q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$.

Решение. Очевидно, $\forall x \in l_1\ p(x) \le q(x)$. Допустим теперь, что

$$\exists a > 0 : \forall x \in l_1 q(x) \le a \cdot p(x), \text{ т.е. } \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \le a \sup_n |x_n|, \forall x \in l_1.$$

При $x = \left(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{n\ раз}, 0, 0, \ldots \right) \in l_1$ последнее неравенство примет вид: $n \le a \cdot \forall n \in N$. Полученное противоречие доказывает, что *p* и *q* не эквивалентны.

Пример 2 $X = C[0;1],\ p(x) = \max\limits_{0\le t\le 1}|x(t)|,\ q(x) = \int\limits_0^1 |x(t)|dt.$

Решение. Заметим, что $\forall x \in C[0;1]\ \ q(x) = \int\limits_0^1 |x(t)|dt \le \max\limits_{0\le t\le 1}|x(t)| = p(x)$. Допустим, что $\exists a > 0 : \forall x \in C[0;1]\ \ p(x) \le a\cdot q(x)$, т.е. $\max\limits_{0\le t\le 1}|x(t)| \le a\cdot\int\limits_0^1 |x(t)|dt$, и положим здесь $x(t) = t^n, n \in N$. Тогда последнее неравенство примет вид $1 \le a\cdot\dfrac{1}{n}$, т. е. $n \le a \cdot \forall n \in N$. Полученное противоречие показывает, что нормы p и q не эквивалентны.

Пример 3 $X = R^n,\ p(x) = \sum\limits_{k=1}^n |x_k|,\ q(x) = \left(\sum\limits_{k=1}^n x_k^2\right)^{1/2}.$

Решение. Так как $\forall k = 1,\dots,n,\ |x_k| \le \left(\sum\limits_{k=1}^n x_k^2\right)^{1/2}$, то $\sum\limits_{k=1}^n |x_k| \le n\cdot\left(\sum\limits_{k=1}^n x_k^2\right)^{1/2}$, т.е. $p(x) \le n\cdot q(x)$. С другой стороны, так как $|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2 \le (|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|)^2$, то $\left(\sum\limits_{k=1}^n x_k^2\right)^{1/2} \le \sum\limits_{k=1}^n |x_k|$, т.е. $q(x) \le p(x)\ \forall x \in R^n$. Итак, мы доказали, что p и q – эквивалентные нормы.

Пример 4 $X = L_2[0;1],\ p(x) = \int\limits_{[0;1]} |x(t)|dt,\ q(x) = \left(\int\limits_{[0;1]} |x(t)|^2 dt\right)^{1/2}.$

Решение. В силу неравенства Коши-Буняковского $\forall x \in X\ p(x) \le q(x)$. Допустим, что $\exists a > 0 : \forall x \in X\, q(x) \le a\cdot p(x)$.

Возьмем $x(t) = \begin{cases} n, t \in [0;1/n] \\ 0, t \in (1/n;1]. \end{cases}$ Тогда $q(x) = \sqrt{n}, p(x) = 1$, и последнее неравенство примет вид: $\forall n\ \sqrt{n} \le a$, что невозможно ни при каком a. Значит, нормы p и q не эквивалентны.

Задача 5 Построить изоморфизм между факторпространством L/M и одним из стандартных линейных пространств.

Пример 1 $L = c,\ M = \{x \in c \mid x_1 = x_2 = 0\}.$

Решение. Возьмем произвольный элемент $x \in c$. Его класс эквивалентности есть
$$[x] = \{y \in c \mid x - y \in M\} = \{y \in c \mid x_1 - y_1 = x_2 - y_2 = 0\} = \{y \in c \mid x_1 = y_1, x_2 = y_2\}.$$

Это равенство показывает, что отображение $f : L/M \to R^2,\ \ f([x]) = (x_1, x_2)$ инъективно. Очевидно также, что оно линейно и является сюръекцией (проверьте). Значит, f – изоморфизм линейных пространств.

Задания лабораторной работы

Задача 1 Проверить, является ли функция *p* нормой в пространстве *X*. Образует ли пара (X,ρ), где $\rho(x,y)=p(x-y)$, метрическое пространство?

№	X	p(x)
1.1	$C^{(n)}[0;1]$	$\sum_{k=0}^{n}\max_{0\le t\le 1}\lvert x^{(k)}(t)\rvert$
1.2	l_∞	$\sup\{\lvert x(n)\rvert \mid n\in N\}$
1.3	$B(R)$	$\sup\{\lvert x(t)\rvert \mid t\in R\}$
1.4	$C[0;1]$	$\int_0^1\lvert x(t)\rvert dt$
1.5	l_1	$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1}\lvert x(n)\rvert$
1.6	$C^{(1)}[a;b]$	$\lvert x(a)\rvert+\max\{\lvert x'(t)\rvert \mid t\in[a;b]\}$

Задача 2 Является ли множество *A* выпуклым в пространстве *X*?

№	*X*	*A*
2.1	$C[0;1]$	неубывающие функции
2.2	l_2	$\{x\in l_2 \mid \lvert x(n)\rvert<2^{-n}, n\in N\}$
2.3	$C[a;b]$	многочлены степени *n*
2.4	l_1	$\left\{x\in l_1 \mid \lvert x(n)\rvert\le\frac{1}{n^2}, n\in N\right\}$
2.5	$C^{(1)}[0;1]$	многочлены степени $\le$ k
2.6	$C^{(1)}[a;b]$	$\{x\in C^{(1)}[a;b] \mid \lvert x(t)\rvert+\lvert x'(t)\rvert\le 1, t\in[a;b]\}$

Задача 3 Проверить, является ли данная последовательность векторов $\{x_k\}$ в бесконечно-мерном пространстве *X* линейно независимой.

№	X	x_k
3.1	l_3	$x_k=\left(\frac{1}{k+1},\ldots,\frac{1}{(k+1)^k},\ldots\right), k=1,..,p$
3.2	l_∞	$x_k=\left(\frac{1}{k+1},\ldots,\frac{1}{(k+1)^k},\ldots\right), k=1,..,p$
3.3	$C[a;b]$	$x_k(t)=t^k, k=0,1,\ldots,p$

3.4	$C[a;b]$	$x_k(t)=e^{itk},k=0,1,...,p$
3.5	$L_2[a;b]$	$x_k(t)=(1+D(t))t^k,k=0,1,...,p,D$ - функция Дирихле
3.6	$C[0;1]$	$x_1(t)=\lvert 2t-1\rvert-\left\lvert 2t-\frac{1}{2}\right\rvert,x_2(t)=\lvert 4t-2\rvert+\lvert 4t-1\rvert,x_3(t)=\lvert 4t-1\rvert+$

Задача 4 Привести пример последовательности $\{x_n\}\subset X\cap Y$, которая сходится в *X*, но не сходится в *Y*, если пространства *X* и *Y* наделены естественными нормами.

№	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6
X	l_∞	l_∞	c_0	$C[0;1]$	$L_1[0;1]$	l_2
Y	l_1	l_2	l_4	$C^{(1)}[0;1]$	$C[0;1]$	l_1

Задача 5 Являются ли нормы *p* и *q* эквивалентными в пространстве *E*?

№	*E*	*p*	*q*
5.1	l_2	$\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\lvert x_n\rvert$	$\sum\limits_{k=1}^{n}\lvert x_k\rvert\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lvert x_n\rvert^2\right)^{1/2}$
5.2	$C[0;1]$	$\max\limits_{t\in[0;1]}\lvert x(t)\rvert$	$\left(\int\limits_0^1\lvert x(t)\rvert^2\right)^{1/2}$
5.3	$C^{(1)}[0;1]$	$\max\limits_{t\in[0;1]}\lvert x(t)\rvert+\max\limits_{t\in[0;1]}\lvert x'(t)\rvert$	$\int\limits_0^1\lvert x(t)\rvert dt$
5.4	c	$\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\lvert x_n\rvert$	$\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\frac{n\lvert x_n\rvert}{n+1}$
5.5	$\mathbb{R}^n$	$\sup\limits_{1\le k\le n}\lvert x_k\rvert$	$\sum\limits_{k=1}^{n}\lvert x_k\rvert$
5.6	$C^{(1)}[0;1]$	$\max\limits_{t\in[0;1]}\lvert x(t)\rvert$	$\lvert x(0)\rvert+\max\limits_{t\in[0;1]}\lvert x'(t)\rvert$

Задача 6 Построить изоморфизм между факторпространством *L/M* и одним из стандартных линейных пространств.

№	*L*	*M*
6.1	$C[-1;1]$	$\{x\in C[-1;1]\mid x(t)=0,t\in[0;1]\}$
6.2	$C[0;1]$	$\{x\in C[0;1]\mid x(0)=0\}$
6.3	$C^\infty[0;1]$	$\{x\in C^\infty[0;1]\mid x(0)=x'(0)=0\}$

6.4	l_1	$x \in l_1 \mid x_1 + x_2 = 0$
6.5	$C^{(1)}[a;b]$	$\{x \in C^{(1)}[a;b] \mid x(a) = x(b)\}$
6.6	l_∞	$x \in l_\infty \mid x_1 = x_3 = 0$

Лабораторная работа 8

Линейные ограниченные операторы в банаховых пространствах

Примеры решения задач

Задача 1 Пусть X,Y – нормированные пространства. Выяснить, совпадает ли область определения $D(A)=\{x\in X \mid Ax\in Y\}$ оператора A с нормированным пространством X. Является ли оператор A линейным, непрерывным оператором из $D(A)$ в Y?

Пример 1 $X=L_2[0;1], Y=L_1[0;1], (Ax)(t)=|x(t)|$.

Решение. Если $x\in L_2[0;1]$, то $\|x\|_2^2:=\int_0^1 |x(t)|^2\,dt<+\infty$. В силу неравенства Коши-Буняковского

$$\left(\int_0^1 |x(t)|\,dt\right)^2 \le \int_0^1 |x(t)|^2\,dt\cdot\int_0^1 dt=\|x\|_2^2<+\infty. \tag{1}$$

Отсюда следует, что $Ax\in L_1[0;1]$. Поэтому *D(A)=X*.

Оператор A не является линейным (рассмотрите, например, $A(\lambda x)$). Исследуем его на непрерывность. Для любой точки $a\in X$ оценим расстояние

$$\|Ax-Aa\|_1=\big\||x|-|a|\big\|_1=\int_0^1 \big||x(t)|-|a(t)|\big|\,dt\le\int_0^1 |x(t)-a(t)|\,dt\le\|x-a\|_2$$

(мы воспользовались числовым неравенством $\big||x|-|a|\big|\le|x-a|$, а затем неравенством (1)). Поэтому $\forall\varepsilon>0$ получаем при $\delta=\varepsilon$, что $\forall x\in X\ \|x-a\|_2<\delta\Rightarrow\|Ax-Aa\|_1<\varepsilon$. Значит, оператор A непрерывен на X.

Пример 2 $X=l_2, Y=l_1, Ax=(x(1),\frac{x(2)}{\sqrt{2}},\frac{x(3)}{\sqrt{3}},\ldots,\frac{x(k)}{\sqrt{k}},\ldots)$.

Решение. В этом примере *D(a)≠X*, так как $x=\left(\frac{1}{\sqrt{n}\ln n}\right)\in l_2$, но $Ax=\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\notin l_1$ (в обоих случаях сходимость ряда исследуется с помощью интегрального признака; проделайте это). Очевидно, A является линейным оператором, поэтому исследование непрерывности равносильно исследованию ограниченности. Докажем, что A не является ограниченным. Допустим противное, то есть что $\exists c\in R:\forall x\in X\ \|Ax\|_Y\le c\cdot\|x\|_X$. При $x=(1,\frac{1}{\sqrt{2}},\ldots,\frac{1}{\sqrt{n}},0,0,\ldots)\in l_2$ последнее неравенство примет вид

$$\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}\le c\cdot\left(\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}\right)^{1/2},\ \text{т.е. }\forall n\in N\ \sum_{k=1}^n\frac{1}{k}\le c^2.$$

Поскольку частичные суммы ряда $\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k}$ не являются ограниченными, мы пришли к противоречию. Значит, A не является непрерывным.

Пример 3 $X = l_{3/2}, Y = C, Ax = \sum_{k=2}^{\infty} k \cdot |x_k|^{3/2}$.

Решение. Здесь *D(A)≠X*, так как последовательность $\{1/k\} \in X$, но $Ax = \infty$. Далее, оператор А не является линейным (как в примере 1). Докажем, что он не является непрерывным. Действительно, возьмём следующую последовательность x_n точек из $l_{3/2}$:

$$x_n(k) = \begin{cases} \dfrac{1}{n+k}, 1 \le k \le 2n \\ 0, k > 2n \end{cases}.$$

Тогда $x_n \to 0$ в $l_{3/2}$, так как

$$\|x_n - 0\|_{3/2}^{3/2} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{(n+k)^{3/2}} < \frac{2n}{n^{3/2}} = \frac{2}{\sqrt{n}} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

В то же время

$$|Ax_n - A0| > \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k}{(n+k)^{3/2}} > \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k}{(2k)^{3/2}} = \frac{1}{2^{3/2}} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^{1/2}} > \frac{1}{2^{3/2}} n \frac{1}{(2n)^{1/2}} \to \infty.$$

Таким образом, из того, что $x_n \to 0$, не следует, что $Ax_n \to A0$ $(n \to \infty)$. Мы показали, что *A* не является непрерывным в нуле, значит, *A* не является непрерывным на *D(A)*.

Пример 4 $X = C[0;1], Y = R, (Ax)(t) = |x'(0) + x(0)|$.

Решение. Очевидно, что *D(A)* $\neq$ *X* и что *A* - нелинейный. Покажем, что *A* не является непрерывным в нуле. Возьмём последовательность $x_n(t) = (1-t)^n / n$ из C[0;1]. Она сходится к 0, так как $\|x_n\|_X = 1/n \to 0$ при *n*→∞. Но в то же время

$$|Ax_n - A0| = \left|(-1)^n + \frac{1}{n}\right| \to 1 \text{ при } n \to \infty.$$

Т.е. из того, что $x_n \to 0$, не следует, что $Ax_n \to A0, n \to \infty$ Значит, *A* не является непрерывным на *D(A)*.

Задача 2 Доказать, что оператор $A: X \to Y$ является линейным ограниченным, и найти его норму.

а) Оператор умножения, действующий из *X* в *Y*.

Пример 1 $X = Y = C[0;1], (Ax)(t) = \dfrac{t}{1+t^2} x(t)$.

Решение. Ясно, что *A* линейный.

Так как

$$\|Ax\| = \max_{t\in[0;1]} \left|\frac{t}{1+t^2} x(t)\right| \le \max_{t\in[0;1]} \left|\frac{t}{1+t^2}\right| \cdot \max_{t\in[0;1]} |x(t)| = \frac{1}{2} \cdot \|x\|, \qquad (2)$$

то *A* ограничен с константой ограниченности 1/2. А так как норма оператора есть наименьшая из констант ограниченности, то $\|A\| \le 1/2$.

Докажем теперь противоположное неравенство, т.е. что $\|A\| \ge 1/2$. Для этого постараемся подобрать такой ненулевой вектор x_0, для которого неравенство (2) превращается в равенство. Возьмём $x_0(t) = 1$. Тогда, как легко подсчитать,

$\|x_0\|=1, Ax_0(t)=\dfrac{t}{1+t^2}, \|Ax_0\|=1/2$. А так как $\|A\|=\sup\{\|Ax\| \mid \|x\|\le 1\}$, то $\|A\|\ge 1/2$. Сопоставляя полученные неравенства, заключаем, что $\|A\|=1/2$.

б) Диагональный оператор, действующий из l_p в l_p.

Пример 1 $A: l_7 \to l_7, Ax=(0,0,\dfrac{x(1)}{2},\dfrac{x(2)}{2^2},\dots,\dfrac{x(k)}{2^k},\dots)$.

Решение. Ясно, что A - линейный оператор. Так как

$$\|Ax\|=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{|x(k)|}{2^k}\right)^7\right)^{1/7}\le\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x(k)|^7\right)^{1/7}=\frac{1}{2}\|x\|,$$

то оператор A ограничен, причем $\|A\|\le\dfrac{1}{2}$. Возьмём $x_0=e_3=(0,0,1,0,0,\dots)$. Тогда $\|x_0\|=1, \|Ax_0\|=\dfrac{1}{2}$. Значит, $\|A\|\ge\dfrac{1}{2}$ (почему?). Из полученных неравенств следует, что $\|A\|=\dfrac{1}{2}$.

Пример 2 $A: l_{5/4}\to l_{5/4}, Ax=(0,\dfrac{x(2)}{2},0,\dfrac{3x_4}{4},0,\dots,(1-\dfrac{1}{2k})x(2k),0,\dots)$.

Решение. Оператор A - линейный. Докажем неравенство ограниченности:

$$\|Ax\|=\left(\sum_{k=1}^{\infty}(1-\frac{1}{2k})^{5/4}\cdot|x(2k)|^{5/4}\right)^{4/5}\le\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x(2k)|^{5/4}\right)^{4/5}\le\|x\|. \qquad (3)$$

Значит, оператор A ограничен, причем $\|A\|\le 1$.

В отличие от предыдущих примеров, здесь не существует ненулевого вектора, при котором неравенство (3) превращается в равенство (подумайте, почему). Поэтому будем подбирать ненулевые векторы x так, чтобы обе части (3) мало отличались друг от друга. Возьмём $x_0=e_{2k}=(0,\dots,0,1,0,0,\dots)$ (единица стоит на 2k-м месте). Тогда имеем $\|x_0\|=1, \|Ax_0\|=(1-\dfrac{1}{2k})$, откуда $\forall k\in N \|A\|\ge 1-\dfrac{1}{2k}$ (см. решение примера 1). Ввиду произвольности k отсюда следует, что $\|A\|\ge 1$. Окончательно получаем, что $\|A\|=1$.

в) Оператор замены переменной.

Пример 1 $A=C[0;1]\to C[0;1], (Ax)(t)=(t^4-t^8)x(t^3)$.

Решение. Очевидно, что оператор A линеен. Докажем его ограниченность:

$$\|Ax\|=\max_{t\in[0;1]}|t^4-t^8|\cdot|x(t^3)|=\left[t^3=s, t=s^{1/3}\right]=\max_{s\in[0;1]}\left|s^{4/3}-s^{8/3}\right|\cdot|x(s)|\le\frac{1}{4}\cdot\|x\|, \qquad (4)$$

поскольку, как легко проверить, $\max\limits_{s\in[0;1]}\left|s^{4/3}-s^{8/3}\right|$=1/4. Следовательно, $\|A\|\le 1/4$. Далее, так как при $x(t)=1$ неравенство (4) превращается в равенство, то $\|A\|\ge 1/4$ (см. решения предыдущих примеров). Итак, $\|A\|=1/4$.

Пример 2 $A: L_2[0;1]\to L_2[0;1], (Ax)(t)=x(\sqrt[8]{t})$.

Решение. Очевидно, что оператор A линеен. Докажем его ограниченность:

$$\|Ax\| = \left(\int_0^1 x^2(\sqrt[8]{t})dt \right)^{1/2} =$$

$$= \left| \sqrt[8]{t} = z, t = z^8, dt = 8z^7 dt \right| = \left(\int_0^1 8z^7 \cdot x^2(z)dz \right)^{1/2} \le 2\sqrt{2} \cdot \left(\int_0^1 x^2(z)dz \right)^{1/2} = 2\sqrt{2} \cdot \|x\| \qquad (5)$$

(мы воспользовались тем, что $z \le 1$). Значит, $\|A\| \le 2\sqrt{2}$.

Как и в примере 2 пункта б не существует ненулевого вектора, при котором неравенство (5) превращается в равенство (подумайте, почему). Поэтому будем подбирать ненулевые векторы *x* так, чтобы обе части (5) мало отличались друг от друга. Возьмём последовательность $x_n = \sqrt{n} \cdot \chi_{[1-\frac{1}{n};1]}$, состоящую из функций, сосредоточенных в окрестности точки *z*=1 и таких, что $\|x_n\| = 1$. Тогда

$$\|Ax_n\| = \left(\int_{1-\frac{1}{n}}^1 8z^7 n dz \right)^{1/2} = \left(nz^8 \Big|_{1-1/n}^1 \right)^{1/2} = \left(n \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n} \right)^8 \right) \right)^{1/2}.$$

Значит, $\|A\| \ge \left(n \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n} \right)^8 \right) \right)^{1/2}, \forall n \in N$. Перейдем в последнем неравенстве к пределу при $n \to \infty$. Воспользовавшись тем, что $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$ при $x \to 0$, получим:

$$\|A\| \ge \lim_{n \to \infty} \left(n \cdot \frac{8}{n} \right)^{1/2} = 2\sqrt{2}.$$

Из полученных неравенств следует, что $\|A\| = 2\sqrt{2}$.

г) Интегральный оператор, действующий из *X* в *Y*.

Пример 1 $A : C[-1;3] \to C[-2;0], (Ax)(t) = \int_{-1}^1 (1-t)s^5 x(s)ds$**.**

Решение. Из свойства линейности интеграла следует, что *A* – линейный оператор. Далее,

$$\|Ax\| = \max_{t \in [-2;0]} \left| \int_{-1}^1 (1-t)s^5 x(s)ds \right| \le \max_{t \in [-2;0]} |1-t| \cdot \int_{-1}^1 |s^5| \cdot |x(s)| ds \le 3 \cdot 2 \int_0^1 s^5 ds \cdot \|x\| = \|x\|. \qquad (6)$$

Значит, оператор *A* ограничен, причем $\|A\| \le 1$. Заметим, что неравенство (6) превращается в равенство при *x*(*t*)=sgn(*t*), но эта функция не принадлежит C[-1;3]. Возьмем следующую последовательность функций из C[-1;3], которые «похожи» на sgn(*t*) при больших *n* (сделайте чертеж):

$$x_n(t) = \begin{cases} -1, t \in [-1; -1/n] \\ nt, t \in [-1/n; 1/n] \\ 1, t \in [1/n; 3] \end{cases}.$$

Легко видеть, что $\|x_n\| = 1$ в $C[-1;3]$. Вычислим $\|Ax_n\|$ в $C[-2;0]$. Так как функция $s^5 \cdot x_n(s)$ - четная на [-1;1], то

$$\|Ax_n\| = \max_{t\in[-2;0]}|1-t|\cdot\left|\int_{-1}^{1}s^5\cdot x_0(s)ds\right| = 3\cdot 2\cdot\int_0^1 s^5\cdot x_0(s)ds = 6\left(\int_0^{1/n} ns^6 ds + \int_{1/n}^{1} s^5 ds\right) = 1-\frac{1}{7n^6}.$$

Значит, $\|A\| \ge 1-\dfrac{1}{7n^6}, \forall n\in N$, а потому $\|A\|\ge 1$. Окончательно получаем, что $\|A\| = 1$.

Задача 3 Для последовательности операторов $(A_n)\subset LB(X,Y)$, $X,Y\in Norm$ и $A\in LB(X,Y)$ установить: 1) сходится ли (A_n) поточечно (сильно) к оператору *A*; 2) сходится ли (A_n) по норме к оператору *A*.

Пример 1 $A_n x = (x(1),\ldots,x(n),0,0,\ldots), A = 1_{l_1}$, $X = Y = l_1$

Решение. 1) Заметим, что $\forall x\in l_1$.

$$\|A_n x - Ax\| = \|(0,\ldots 0, x(n+1), x(n+2),\ldots)\| = \sum_{k=n+1}^{\infty}|x(k)| \to 0 \text{ при } n\to\infty$$

как остаток сходящегося ряда. Значит, последовательность (A_n) сходится поточечно (т.е. сильно) к оператору *A*.

2) Воспользуемся тем, что $\|A\| \ge \|Ax_0\|, \forall x_0 : \|x_0\| \le 1$.

Возьмем $x_0 = e_{n+1} = (0,\ldots,0,1,0,\ldots)$ (единица стоит на $(n+1)$-м месте). Тогда

$$\|A_n - A\| \ge \|A_n x_0 - Ax_0\| = \|(0,\ldots,0,0,0,\ldots)-(0,\ldots,0,1,0,\ldots)\| = \|(0,\ldots,0,1,0,\ldots)\| = 1.$$

Так как $\|A_n - A\| \ge 1$, то (A_n) не сходится по норме к *A*.

Задания лабораторной работы

Задача 1 Пусть *X*,*Y* – нормированные пространства. Выяснить, совпадает ли область определения $D(A) = \{x\in X \,|\, Ax\in Y\}$ оператора *A* с нормированным пространством *X*. Является ли оператор *A* линейным, непрерывным оператором из *D*(*A*) в *Y*?

№	*X*	*Y*	*A*
1.1	$C[-3;-1]$	$C[-3;-1]$	$(Ax)(t) = \sqrt[3]{x(t)}$
1.2	$L_2[0;1]$	$L_2[0;1]$	$(Ax)(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}x(t)$
1.3	$L_8[0;1]$	$\boldsymbol{R}$	$Ax = \int_0^1 \lvert x(t)\rvert^8 dt$
1.4	$C[-1;2]$	$C[-1;2]$	$(Ax)(t) = \int_0^1 x^2(s)ds$
1.5	l_3	$\boldsymbol{C}$	$Ax = \sum_{k=1}^{\infty}\lvert x_k\rvert^3$
1.6	l_3	l_3	$Ax = (x(1), 2x(2),\ldots kx(k),\ldots)$

Задача 2 Доказать, что оператор *A: X*→*Y* является линейным ограниченным, и найти его норму.

а) Оператор умножения, действующий из *X* в *Y*.

№	X	Y	A
2.1.1	$L_{3/2}[-1;1]$	$L_{3/2}[-1;1]$	$(Ax)(t)=\sqrt[3]{1+t}\,x(t)$
2.1.2	$C[-2;1]$	$C[-2;1]$	$(Ax)(t)=(t^3-1)^2x(t)$
2.1.3	$L_{5/4}[1;2]$	$L_{5/4}[1;2]$	$(Ax)(t)=(t^2-t^4)x(t)$
2.1.4	$L_3[0;1]$	$L_3[0;1]$	$(Ax)(t)=(t^4-t^5)x(t)$
2.1.5	$L_1[-1;1]$	$L_1[-1;1]$	$(Ax)(t)=\cos\pi t x(t)$
2.1.6	$C[-1;1]$	$C[0;1]$	$(Ax)(t)=(t^4-t^2)x(t)$

б) Диагональный оператор, действующий из l_p в l_p.

№	X	Y	A
2.2.1	$l_{7/3}$	$l_{7/3}$	$Ax=(\sqrt{2}x(1),\sqrt[3]{3}x(2),\ldots,\sqrt[k+1]{k+1}x(k),\ldots)$
2.2.2	$l_{5/4}$	$l_{5/4}$	$Ax=(\frac{x(1)}{2},\frac{x(2)}{\sqrt{2}},\ldots,\frac{x(k)}{\sqrt[k]{k}},\ldots)$
2.2.3	$l_{3/2}$	$l_{3/2}$	$Ax=((1+1)x(1),\ldots,(1+1/k)x(k),\ldots)$
2.2.4	$l_{5/2}$	$l_{5/2}$	$Ax=(\frac{x(1)}{5},\frac{x(2)}{5^2},\ldots,\frac{x(k)}{5^k},\ldots)$
2.2.5	l_1	l_1	$Ax=(0,0,\frac{x(3)}{2},\frac{x(4)}{2^2},\ldots,\frac{x(k)}{2^{k-2}},\ldots)$
2.2.6	$l_{5/4}$	$l_{5/4}$	$Ax=(0,x(1),1/2\,x(2),\ldots,(1-1/k)x(k),\ldots)$

в) Оператор замены переменной.

№	X	Y	A
2.3.1	$C[-1;1]$	$C[-1;1]$	$(Ax)(t)=(\sin^2\pi t)x(\sqrt[3]{t})$
2.3.2	$C[-1;1]$	$C[-1;1]$	$(Ax)(t)=\sin\pi t\cdot x(\sqrt[7]{t})$

2.3.3	$C[-1;0]$	$C[-1;0]$	$(Ax)(t)=t^2\sin t\cdot x(t^3)$
2.3.4	$C[0;1]$	$C[0;1]$	$(Ax)(t)=t^2x(\sqrt{t})$
2.3.5	$C[-1;1]$	$C[0;1]$	$(Ax)(t)=(t^2-t)x(t^2)$
2.3.6	$L_4[0;1]$	$L_4[0;1]$	$(Ax)(t)=tx(t^{3/2})$

г) Интегральный оператор, действующий из X в Y.

№	X	Y	A
2.4.1	$C[0;1]$	$C[0;1]$	$(Ax)(t)=\int_0^1 \sin\pi(t-s)x(s)ds$
2.4.2	$C[-2;1]$	$C[1;3]$	$(Ax)(t)=\int_{-2}^1 e^{t+s}sx(s)ds$
2.4.3	$C[-3;2]$	$C[-3;1]$	$(Ax)(t)=\int_{-3}^2 s^4 signs\cdot\cos t\cdot x(s)ds$
2.4.4	$C[-1;1]$	$C[0;2]$	$(Ax)(t)=\int_{-1}^1 s^3\ln(1+t)x(s)ds$
2.4.5	$C[0;1]$	$C[-1;2]$	$(Ax)(t)=\int_0^1 (s-1/2)\cos t\cdot x(s)ds$
2.4.6	$C[0;1]$	$C[-1;2]$	$(Ax)(t)=\int_0^{1/2}(1+t-3s)x(s)ds$

Задача 3 Для последовательности операторов $(A_n)\subset LB(X,Y)$, $X,Y\in Norm$ и $A\in LB(X,Y)$ установить: 1) сходится ли (A_n) поточечно (сильно) к оператору A; 2) сходится ли (A_n) по норме к оператору A.

№	X	Y	A	A
3.1	l_2	l_2	$A_nx=\left((1+1/n)x(1),\dots,(1+1/n)x(n),\dots\right)$	1_{l_2}
3.2	c_0	c_0	$A_nx=(0,\dots 0,x(n),0,0,\dots)$	0
3.3	l_2	l_2	$A_nx=(0,\dots,0,x(n+1),x(n+2),\dots)$	0
3.4	$C[0;1]$	$C[0;1]$	$(A_nx)(t)=(t^n-t^{2n})x(t)$	0
3.5	$C^{(1)}[0;1]$	$C[0;1]$	$(A_nx)(t)=(t^n-t^{2n})x(t)$	0

3.6	$L_2[0;1]$	$L_1[0;1]$	$(A_n x)(t) = (1 - t^n)x(t)$	$Ax=x$

Лабораторная работа 9

Обратные операторы

Примеры решения задач

Задача 1 Пусть $A : X \to Y$. Доказать, что существует непрерывный обратный оператор A^{-1}, и построить его.

Пример 1 $A : l_1 \to l_1$, $Ax = ((1-\frac{1}{2})^2 x_1, (1-\frac{1}{3})^3 x_2, (1-\frac{1}{4})^4 x_3, \ldots)$.

Решение. Очевидно, что A – линейный оператор. Докажем, что A – биекция. Рассмотрим уравнение $Ax = y$, которое равносильно системе уравнений

$$(1-1/(k+1))^{k+1} x_k = y_k, \; k = 1,2,\ldots.$$

Отсюда

$$x_k = \frac{y_k}{(1-\frac{1}{k+1})^{k+1}}. \tag{1}$$

А так как

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \le 4 \sum_{k=1}^{\infty} |y_k| < +\infty, \tag{2}$$

то $x \in l_1$. Мы получили, что $\forall y \in l_1$ уравнение $Ax = y$ имеет единственное решение x из l_1. Значит, A – биекция. Более того, из (1) следует, что обратный оператор A^{-1} задается формулой

$$A^{-1}y = \left(\frac{y_1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}, \frac{y_2}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3}, \frac{y_3}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^4}, \ldots \right).$$

Ограниченность этого оператора следует из оценки (см (2))

$$\|A^{-1}y\| \le 4 \sum_{k=1}^{\infty} |y_k| = 4 \|y\|.$$

Пример 2 $A : C[0;1] \to C[0;1], (Ax)(t) = x(t) + \int_0^1 e^{t+s} x(s)ds.$

Решение. Очевидно, что A – линейный оператор.
Запишем его в виде

$$(Ax)(t) = x(t) + e^t \int_0^1 e^s x(s)ds$$

и рассмотрим уравнение $Ax = y$, т. е.

$$x(t) + e^t \cdot \int_0^1 e^s x(s)ds = y(t) \tag{3}$$

Пусть

$$\int_0^1 e^s x(s)ds = c. \tag{4}$$

Тогда (3) примет вид $x(t)+c\cdot e^t=y(t)$, откуда $x(t)=y(t)-c\cdot e^t$. Мы получили общий вид решения уравнения (3) с неопределенным коэффициентом *c*. Подставив это в (4), без труда находим, что

$$c=\frac{2}{1+e^2}\int_0^1 e^s y(s)ds.$$

Таким образом,

$$x(t)=y(t)-\frac{2}{1+e^2}\int_0^1 e^s y(s)ds=A^{-1}y(t). \tag{5}$$

Итак, $\forall y\in C[0;1]$ уравнение (2) имеет единственное решение из $C[0;1]$. Значит, оператор *A* обратим, причем обратный оператор вычисляется по формуле (5). Непрерывность обратного оператора вытекает из теоремы об оценке интеграла. Действительно, по этой теореме

$$\left|A^{-1}y(t)\right|\le|y(t)|+\frac{2}{1+e^2}\max_{s\in[0;1]}|y(s)|\int_0^1 e^s ds\le C\|y\|,$$

а потому выполняется неравенство ограниченности $\|A^{-1}y\|\le C\|y\|$ (другое доказательство непрерывности получается из (5) с помощью теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Римана).

Задача 2 Пусть $A:X\to Y$.

1) Что представляет собой область значений *R(A)* оператора *A*?
2) Существует ли на *R(A)* левый обратный оператор *B*?
3) Является ли оператор $B:R(A)\to X$ ограниченным, если он существует?
4) Существует ли обратный оператор A^{-1}?

Пример 1 $A:l_2\to l_2, Ax=(0,x_1,x_2,\ldots,x_k,\ldots)$.

Решение. 1) Очевидно, что

$$R(A)=\{(0,x_1,x_2,\ldots,x_k,\ldots)\mid(x_k)\in l_2\}=\ y\in l_2\mid y_1=0$$

–множество последовательностей из l_2, первая координата которых равна нулю (проверьте). Заметим, что $R(A)\ne l_2$.

2) Так как уравнение $Ax=0$ имеет только нулевое решение, то $KerA=\{0\}$. А это, как известно, равносильно тому, что левый обратный оператор *B* существует. Легко проверить, что

$$Bx=(x_2,x_3,x_4,\ldots).$$

Действительно, при всех *x* из l_2 имеем $BAx=B(0,x_1,x_2,\ldots)=(x_1,x_2,x_3,\ldots)$.

3) Оператор *B* ограничен, так как $\|Bx\|=\|x\|$.

4) Поскольку уравнение $Ax=y$ не при всех *y* имеет решение (например, при $y=(1,0,0,\ldots)$), то *A* не является сюрьекцией. А это значит, что правого обратного оператора не существует. Следовательно, *A* необратим.

Пример 2 $A:C[0;1]\to C[0;1],(Ax)(t)=\int_0^t x(s)ds$.

Решение. 1) По теореме о дифференцировании интеграла с переменным верхним пределом (теорема Барроу) функция $y(t)=\int_0^t x(s)ds$ дифференцируема, причем $y'(t)=x(t)$. Значит, $y\in C^{(1)}[0;1]$. Кроме того, очевидно, что $y(0)=0$. Обратно, если $y\in C^{(1)}[0;1]$ и $y(0)=0$, то по формуле Ньютона-Лейбница $y(t)=\int_0^t y'(s)ds$. Поэтому

$$R(A)=\{\int_0^t x(s)ds \,|\, x\in C[0;1]\}=\{y\in C^{(1)}[0;1] \,|\, y(0)=0\}.$$

2) Рассмотрим оператор дифференцирования $Bx=\dfrac{dx}{dt}$. Поскольку (снова по теореме Барроу) $(BAx)(t)=\dfrac{d}{dt}\int_0^t x(s)ds=x(t)$ при всех $x\in C[0;1]$, то B – левый обратный для оператора A.

3) Покажем, что B не является ограниченным оператором. Допустим противное, т.е.

$$\exists c\in R: \|Bx\|=\max_{0\le t\le 1}|x'(t)|\le c\cdot\max_{0\le t\le 1}|x(t)|=c\cdot\|x\|.$$

Возьмём $x(t)=t^n$ $(n\in N)$. Тогда последнее неравенство примет вид $\forall n\in N \quad n\le c$. Противоречие.

4) Поскольку $R(A)\ne C[0;1]$, то A не является сюръекцией. Значит, правого обратного оператора не существует. Следовательно, не существует и A^{-1}.

Задача 3 Пусть $A_\lambda\in LB(X,Y)$, где λ - числовой параметр, $X\lambda$ - банахово пространство. Выяснить, при каких λ существует обратный оператор к оператору A_λ, построить его. При каких λ оператор A_λ непрерывно обратим?

Пример 1 $X_\lambda = \{x\in C^{(1)}[0;1] \,|\, x'(0)=\lambda x(1)\}$, $Y=C[0;1]$, $A_\lambda=\dfrac{d}{dt}+2I$.

Решение. Для нахождения обратного оператора рассмотрим в X_λ уравнение $A_\lambda x=y$, т. е. линейное дифференциальное уравнение

$$x'+2x=y. \tag{6}$$

Нужно выяснить, при каких λ у этого уравнения для любого $y\in C[0;1]$ существует единственное решение $x\in X_\lambda$. Другими словами, для любого $y\in C[0;1]$ краевая задача

$$x'(0)=\lambda x(1) \tag{7}$$

для уравнения (6) должна иметь единственное непрерывно дифференцируемое решение. Воспользовавшись формулой для общего решения линейного дифференциального уравнения первого порядка, получим общее решение уравнения (1):

$$x(t)=e^{-2t}\left(\int_0^t y(s)e^{2s}ds+C\right). \tag{8}$$

Требуется узнать, при каких λ для любого $y\in C[0;1]$ найдется такое C, при котором формула (8) дает решение задачи (7). Подставив (8) в (7), получим после упрощений

$$(\lambda e^{-2}+2)\,C=y(0)-\lambda\int_0^1 y(s)e^{2s-2}ds \tag{9}$$

Возможны два случая.

а) $\lambda \neq -2e^2$. Тогда уравнение (9) имеет единственное решение

$$C = \frac{1}{2+\lambda e^{-2}}\left(y(0) - \lambda \int_0^1 y(s)e^{2s-2}ds \right)$$

для любого $y \in C[0;1]$. Следовательно, при этих λ существует обратный оператор, который мы найдем, подставив это C в равенство (8):

$$A_\lambda^{-1}y(t) = e^{-2t}\left(\int_0^t y(s)e^{2s}ds + \frac{1}{2+\lambda e^{-2}}\left(y(0) - \lambda \int_0^1 y(s)e^{2s-2}ds \right) \right).$$

В силу теоремы Банаха об обратном операторе непрерывность этого оператора будет следовать из непрерывности оператора $A_\lambda x = x' + 2x$. Последний же факт легко доказать по Гейне. Действительно, если $x_n \to 0$ в пространстве $C^{(1)}[0;1]$, то это значит, что $x_n \to 0$ и $x_n' \to 0$ равномерно на $[0;1]$. Но тогда и $A_\lambda x_n = x_n' + 2x_n \to 0$ равномерно на $[0;1]$.

б) $\lambda = -2e^2$. В этом случае уравнение (9) имеет вид

$$0 = 0 \cdot C = y(0) + 2e^2 \int_0^1 y(s)e^{2s-2}ds .$$

Так как правая часть этого уравнения при некоторых непрерывных y (например, при $y(t) = 1$) не будет равна 0, то при этих y уравнение (9) не имеет решения (относительно C), а потому оператор A_λ не сюръективен.

Итак, обратный оператор к оператору A_λ существует тогда и только тогда, когда $\lambda \neq -2e^2$. Причем при таких λ оператор A_λ непрерывно обратим.

Задания лабораторной работы

Задача 1 Пусть $A: X \to Y$. Доказать, что существует непрерывный обратный оператор A^{-1}, и построить его.

№	X	Y	A
1.1	$C^{(2)}[0;1]$	$C^{(2)}[0;1]$	$(Ax)(t) = x(t) + \int_0^1 e^{t+s}x(s)ds$
1.2	$C[0;1]$	$C[0;1]$	$(Ax)(t) = x(t) + \int_0^1 (1-st)x(s)ds$
1.3	$C^{(1)}[0;1]$	$C^{(1)}[0;1]$	$(Ax)(t) = x(t) + \int_0^1 (t+s)x(s)ds$
1.4	$C[0;1]$	$C[0;1]$	$(Ax)(t) = x(t) + \int_0^1 t^2 sx(s)ds$
1.5	l_2	l_2	$Ax = ((1+1/2)x(1),(1+1/3)x(2),(1+1/4)x(3),\dots)$
1.6	l_2	l_2	$Ax = (1(\sin 1/1)x(1), 2(\sin 1/2)x(2), 3(\sin 1/3)x(3),\dots)$

Задача 2 Пусть $A: X \to Y$.

1) Что представляет собой область значений *R(A)* оператора A?
2) Существует ли на *R(A)* левый обратный оператор *B*?
3) Является ли оператор $B: R(A) \to X$ ограниченным, если он существует?
4) Существует ли обратный оператор A^{-1}?

№	*X*	*Y*	*A*
2.1	l_5	l_5	$Ax = (\frac{1}{2}x(1), \frac{1}{2^2}x(2), \ldots, \frac{1}{2^k}x(k), \ldots)$
2.2	l_2	l_2	$Ax = (x(2), x(3), \ldots, x(k), \ldots)$
2.3	l_2	l_2	$Ax = (x(2), x(1), x(4), x(3), \ldots, x(2k), x(2k-1), \ldots)$
2.4	l_1	l_2	$Ax = (x(1), 0, x(2), x(3), \ldots, x(k), \ldots)$
2.5	$C^{(2)}[0;1]$	$C[0;1]$	$(Ax)(t) = x''(t)$
2.6	$C[0;1]$	$C[0;1]$	$(Ax)(t) = t\int_0^t x(s)ds$

Задача 3 Пусть $A_\lambda \in LB(X, Y)$, где λ - числовой параметр, X_λ - банахово пространство. Выяснить, при каких λ существует обратный оператор к оператору A_λ, построить его. При каких λ оператор A_λ непрерывно обратим?

№	X_λ	*Y*	A_λ
3.1	$\left\{ \begin{array}{l} x \in C^{(1)}[0;1]: \\ \lambda x(0) = x'(1) \end{array} \right\}$	$C[0;1]$	$\frac{d}{dt} + tI$
3.2	$\left\{ \begin{array}{l} x \in C^{(1)}[0;1]: \\ x(0) = 0 \end{array} \right\}$	$C[0;1]$	$\frac{d}{dt} + 4tI$
3.3	$\left\{ \begin{array}{l} x \in C^{(1)}[0;1]: \\ \lambda x(0) = x(1) \end{array} \right\}$	$C[0;1]$	$\frac{d}{dt} - 2tI$
3.4	$\left\{ \begin{array}{l} x \in C^{(1)}[0;1]: \\ x(0) = 0 \end{array} \right\}$	$C[0;1]$	$\frac{d}{dt} + \lambda I$
3.5	$\left\{ \begin{array}{l} x \in C^{(1)}[0;1]: \\ x(0) = 0 \end{array} \right\}$	$C[0;1]$	$\frac{d}{dt} + \lambda a(t)I,\ a \in C[0;1]$
3.6	$\left\{ \begin{array}{l} x \in C^{(1)}[0;1]: \\ x(0) + x(1) = 0 \end{array} \right\}$	$C[0;1]$	$\frac{d}{dt} - 3\lambda t^2 I$

ЛИТЕРАТУРА

1 Антоневич, А. Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения / А. Б. Антоневич, Я. В. Радыно. − Мн. : БГУ, 2003. − 430 с.

2 Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. − М. : Наука, 1972. – 496 с.

3 Антоневич, А. Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения: Лабораторный практикум / А.Б. Антоневич [и др.]. − Мн. : БГУ, 2003. − 179 с.
4 Кириллов, А. А. Теоремы и задачи функционального анализа / А. А. Кириллов, А. Д. Гвишиани. − М. : Наука, 1979. – 381 с.

Учебное издание

Миротин Адольф Рувимович
Кульбакова Жанна Николаевна

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
Лабораторный практикум
для студентов математического факультета
специальности 1-31 03 01 Математика

В авторской редакции

Подписано в печать . .09 (141). Формат 60x84 1/16. Бумага писчая № 1.
Гарнитура Таймс. Усл. печ. л. .
Уч.-изд. .л . Тираж 100 экз.

Отпечатано в учреждении образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»
246019, г. Гомель, ул. Советская, 104