A.Matei

TEORIA FUNCȚIEI DE VARIABILĂ REALĂ

Manualul este destinat studenților cu specializare în Matematică și alte specialități, cu înclinație matematică. Primele două capitole pot fi folosite pentru citirea cursurilor avansate de matematică la secția de zi. Sunt cercetate problemele teoriei mulțimilor infinite,a spațiilor metrice, la fel se cercetează teoria construcției integralei Lebesgue, elemente ale teoriei măsurii. Manualul include o selecție a problemelor legate de calcularea directă a Lebesgue întrebări integrale și pentru studiul de sinestătător, precum și lista literaturii sugerează o cunoaștere mai aprofundată cu materialul studiat.

CUPRINS

PREFAȚĂ

Cursul de prelegeri propus la tema „Teoria funcției de variabilă reală“ este conceput pentru studenții cu specializare în Matematică. Cursul dat conține mai mult material decât este într-adevăr posibil să fie expus într-un curs, și pot fi utilizate pentru lucru individual cu studenții și lucrul independentă a studenților. Acesta poate fi, de asemenea, utilizat ca un ajutor în studiul disciplinelor ciclului matematică aplicată. Această disciplină ar trebui să pregătească temeinic elevii pentru studiul analizei funcționale, care ocupă un loc important în formarea unui specialist în matematică aplicată.

Cursul constituie din două secțiuni. Prima secțiune este dedicată teoriei descriptive ale funcțiilor, iar a doua - teoria metrică a funcțiilor. La sfârșitul fiecărui capitol sunt oferite soluții la problemele tipice și sunt propuse probleme pentru lucrul individual. Lista de publicații recomandate, desigur, nu este exhaustivă.

INTRODUCERE

În matematică cursul de teorie a funcției de variabilă reală (TFDP) ca disciplină își are locul său între analiza matematică clasică și analiza funcțională. La fel ca în analiza clasică, TFDP studiază diferite tipuri de funcții și serii funcționale, operațiile de diferențiere și integrare a lor. Diferența constă într-un grad mai înalt de abstracție.

În caz că excludem din teoria clasică a analizei matematice ecuațiile diferențiale și teoria funcției de variabilă complexe, care în present sunt ramuri distincte ale matematicii, atunci TFDP ar putea fi definit ca o analiză matematică extinsă și generalizată.

În același timp între analiza funcțională și TFDP există relații aproximativ la fel ca și între ea și analiza clasică. Însă dacă în teoria funcțiilor obiectului de studiu este noțiunea de funcție, atunci în analiza funcțională - generalizarea ei - funcționalului și operatorului. Dacă TFDP începe cu teoria mulțimilor de puncte în spații euclidiene, atunci analiza funcțională începe cu studierea proprietăților mulțimilor în spațiul topologic, Banach, Hilbert și în alte spații. Cu toate acestea, spațiile indicate sunt obiecte independente de studiu în analiza funcțională. TFDP însă folosește doar proprietățile spațiilor, lăsând studiul lor geometrie.

Din punctul de vedere al istoriei teoria funcției de variabilă reală începe în a doua jumătate a secolului al XlX-lea. Prima lucrare fiind scrisă de Riemann, „Cu privire la posibilitatea reprezentării unei funcții printr-o serie trigonometrică“, publicată în 1867. Dezvoltarea ulterioară a TFDP legată de matematicienii francezi Borel și Lebesgue, de fondatorii școlii de matematică din Moscova D. Egorov și Luzin, de matematicianul polonez Banach și mulți alții.

Din motivul timpului limitat pentru studierea cursului de TFDP și a incapacității de a cuprinde imensitatea, cursul „Elemente ale teoriei funcției de variabila reală“ își are ca scop aducerea la cunoștința studenților specialității „Matematică Aplicată“ elementele teoriei integrării. În același timp, spre deosebire de cursurile clasice ale TFDP, care au la bază teoria măsurii, culegerea dată este ticluită conform propunerii matematicienilor maghiari F. Riesz și B. Sekefalvi-Nagy, care are la bază schema matematicianului englez P. Daniel. Această abordare permite într-un timp relative de scurt destul de logic de a expune schema introducerii noțiunii de integrală și metodele de calcul ale ei. Deoarece introducerea noțiunii de integrală este imposibilă fără pregătire prealabilă, prezentarea începe cu teoria mulțimilor infinite și teoria spațiilor metrice.

Problemele propuse ca lucru independent, chiar și pentru cei care nu le pot soluționa, pot servi ca impuls pentru căutarea soluțiilor prin studiul literaturii indicate, adică însușirea noilor surse de cunoaștere, a lor.

Manualul propus este complet construit pe conținutul lucrărilor menționate în comentariile capitolelor și în bibliografie.

Capitolul 1. Teoria mulțimilor

1.1. NOȚIUNEA DE MULȚIME

Mulțimea este "o colecție de obiecte bine determinate, distincte ale intuiției sau gândirii noastre, considerate ca un tot".

Definiția adusă mai sus nu este strictă, deoarece noțiunea de mulțime" se definește prin noțiunea de "colecție", sensul exact al căreia nu este determinat. În genere, orice altă "definiție" a mulțimii ar conduce la definiția ei prin ea însăși printr-un sinonim. Este o situație naturală noțiunea de mulțime este o noțiune primară, la fel cum punctul, dreapta sau planul în geometrie. În teoriile axiomatice stricte, noțiunea de "mulțime" se definește indirect, prin proprietățile ce le verică. Punctul de vedere pe care-l vom adopta în lucrarea de fața constituie "teoria naiva" a mulțimilor, vom evita construcții axiomatice stricte. Așa o abordare va-nlesni întelegerea, iar afirmațiile ce se vor obține în așa mod pot fi demonstrate și din punct de vedere al teoriilor axiomatice formale. O mulțime de obiecte se consideră ca un singur obiect. Nu se impune nici o restricție asupra elementelor mulțimii, adică asupra obiectelor ce alcătuiesc mulțimea. Obiectele au doar calitatea de a aparține sau ba mulțimii. Nu importă ordinea în care elementele intră în mulțime. Pentru a defini o mulțime, este necesar de a defini elementele ce intră în această mulțime. În continuare, de regulă, vom nota mulțimile cu litere mari: $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \ldots, \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}$ (pot fi utilizate alfabete diverse sau simboluri grafice etc), iar elementele mulțimii cu litere mici: $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \ldots, \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}$.

Dacă obiectul a aparține mulțimii A, adică a este un element al mulțimii A, vom scrie $a \in A$. Dacă obiectul a nu se găsește în mulțimea A, vom scrie $a \notin A$. Simbolurile $\in$, $\notin$ se numesc apartenența, respectiv neapartenența.

Exemple de mulțimi: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ - mulțimea cifrelor sistemului zecemal de numeratie; $N = \{0, 1, 2, 3, \ldots\} -$ mulțimea numerelor naturale; $N^* = \{1, 2, 3, \ldots\} -$ mulțimea numerelor naturale pozitive; $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\} -$ mulțimea numerelor întregi; $Q = \left\{ \frac{m}{n} \middle| m \in Z, n \in N^* \right\} -$ mulțimea numerelor raționale. Mulțimea numerelor reale - se notează prin R și se definește strict în cursul de analiză matematică. Elementele acestei mulțimi sunt toate numerele raționale și iraționale (adică numerele ce nu pot fi reprezentate ca raportul dintre un număr întreg și un număr natural pozitiv). Exemple de numere reale: $-3,5\,7\,, 17,3\,1\,2\,, \sqrt{2}, -\sin 1\,, e, \pi, \ln 5$; Mulțimea numerelor complexe $C = \{a + ib \mid a \in R, b \in R\}$, unde $i^2 = -1$; mulțimea tuturor fulgilor de zăpadă din anul trecut; mulțimea tuturor cuvintelor din această lucrare; mulțimea triunghiurilor din plan.

O mulțime se consideră definită, dacă există un criteriu, după care deosebim elementele mulțimii de celelalte obiecte ce nu fac parte din mulțime. În acest sens, o mulțime poate definită

1) enumerând elementele mulțimii;

2) prin specificarea unei proprietăți caracteristice P ale elementelor sale.

O mulțime determinată prin enumerarea elementelor sale se notează scriind între acolade elementele sale, separate prin virgule (a se vedea exemplul 1). Mulțimile definite prin specificarea proprietății P se vor nota prin $A = \{ x \mid P(x) \}$, adică mulțimea acelor obiecte x, pentru care are loc $P(x)$ (a se vedea exemplul 3).

Definiție 1.1.1. *(Relația de egalitate) Două mulțimi se numesc egale dacă și numai dacă ele sunt formate din aceleași elemente. Când două mulțimi A și B sunt egale, vom scrie $A = B$, în caz contrar $A \neq B$.*

Exemple.

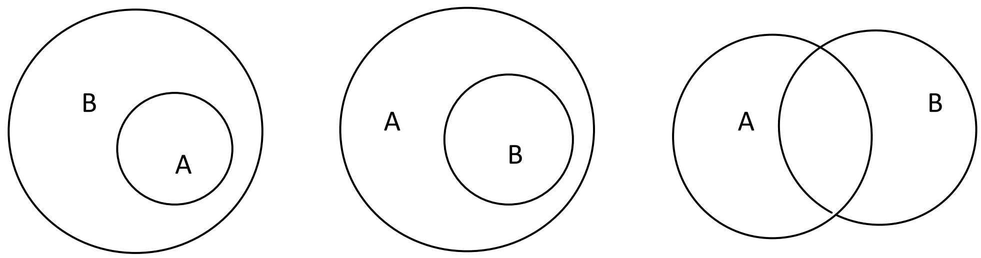
1. $A = \{ 1, 2, 3 \}, B = \{ 3, 2, 1 \}, C = \{ 3, 3, 1, 2, 1 \}, D = \{ 1, 2 \}$,
2. $A = B, A = C, B = C, A \neq D. 2. A = \{ x \mid x \in Z, x^2 = 4 \}, B = \{ -2, 2 \}, A = B$.
3. $A = \{sin\, x \mid x \in R\}, B = \{x \in R \mid |x| \leq 1\},\ A = B$.
4. $A = \{x \in R \mid |x| > 2\}, B = \{ x \in Q \mid x^2 = 2\}, A \neq B$.

Definiție 1.1.2. *Fie A și B două mulțimi. Se spune că A este o submulțime a lui B, sau este inclusă în B și se notează $A \subset B$, dacă fiecare element al mulțimii A aparține mulțimii B, adică*

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Exemplu. $N^* \subset N \subset Q \subset R \subset C$.

Observație 1.1.1. *Dacă $A \subset B$, mai spunem că A se conține în B sau B conține (sau include) pe A, sau A este o parte a lui B. În loc de $A \subset B$ se scrie de asemenea $B \supset A$, iar dacă A nu se include în B, se scrie $A \not\subset B$ sau $B \not\supset A$* (fig. 1)



$A \subset B$ $\quad$ $A \not\subset B$ $\quad$ $A \not\subset B$

$B \supset A$ $\quad$ $B \subset A$ $\quad$ $B \not\subset A$

Fig.1

Relația de incluziune are urmatoarele proprietăți.

Proprietăți.

1) $A \subset A$ *(reflexivitate);*

2) $A \subset B$ *și* $B \subset C \Rightarrow A \subset C$ *(tranzitivitate);*

3) $A \subset B$ *și* $B \subset A \Rightarrow A = B$ *(antisimetrie).*

Definiție 1.1.3. *Mulțimea, care nu conține nici un element se numește mulțime vidă. Mulțimea vidă se notează cu simbolul* $\emptyset$.

Exemple.

1. $\{ x \mid x \neq x \} = \emptyset$.
2. $\{ x \in R \mid x^2 + 1 = 0 \} = \emptyset$.

Mulțimea vidă este submulțime a oricărei mulțimi.

Demonstrație. Fie A o mulțime arbitrară. Vom presupune că $\emptyset \not\subset A$. Rezultă, că există așa un element $x \in \emptyset$ astfel încât $x \notin A$. Dar așa ceva este imposibil, deoarece $\emptyset$ nu conține elemente. Contradicția obținută demonstrează afirmația inițială. Fie A o mulțime arbitrară. Mulțimea părților mulțimii A (mulțimea tuturor submulțimilor ei) se notează $P(A)$ sau 2^A, astfel

$$P(A) = \{ X \mid X \subset A \}.$$

Este evident, că $\emptyset \in P(A)$ *și* $A \in P(A)$.

Exemple.

1. $P(\emptyset) = \{ \emptyset \}$
2. $P(\{ 1,2 \}) = \{ \emptyset, \{ 1 \}, \{ 2 \}, \{ 1,2 \} \}$.
3. $P(\{ a,b,c \}) = \{ \emptyset, \{ a \}, \{ b \}, \{ c \}, \{ a,b \}, \{ b,c \}, \{ a,c \}, \{ a,b,c \}, \}$.

Există două feluri de mulțimi. Unele mulțimi nu se conțin pe sine în calitate de element (de exemplu, $N \notin N$, $Q \notin Q$), altele însă posedă așa o proprietate. De exemplu, $A = \{ X \mid X$ este mulțime $\}$ este un element al său.

Considerăm mulțimea M, ce constă din toate mulțimile care nu se conțin pe sine în calitate de element, adică

$$M = \{ X \mid X \notin X \}.$$

Admitem că $M \in M$. Atunci, cum fiecare element $X \in M$ verică condiția $X \notin X$, rezultă că $M \notin M$, ceea ce contrazice ipoteza inițială.

Admitem că $M \notin M$. Atunci, conform definiției mulțimii M, se obține $M \in M$, ceea ce iar contrazice presupunerea.

Așadar, se obține că atât afirmația $M \in M$, cât și negația ei $M \notin M$ sunt false (paradoxul lui Russel).

Prin urmare M nu poate fi acceptată ca mulțime, deci nici A.

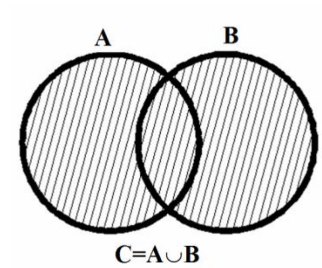
Observație 1.1.2. *Pentru a evita așa situații paradoxale, ce țin de mulțimi de tipul "mulțimea tuturor mulțimilor", vom fixa o mulțime sucient de "bogată", ce conține în sine toate mulțimile necesare (de exemplu $N, R, C, C[a,b], \ldots$). Această mulțime o vom numi mulțime universală și o vom nota U. Toate mulțimile considerate în continuare vor fi submulțimi (părții) ale mulțimii universale U, chiar dacă aceasta nu va fi specificat.*

1.2. OPERAȚII CU MULȚIMI

Definiție 1.2.1. *Reuniune a mulțimilor A și B se numește mulțimea notată cu $A \cup B$ și definită astfel*

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \, sau \, x \in B \},$$

adică $A \cup B$ este mulțimea elementelor ce aparțin cel puțin uneia din mulțimile A și B.



Exemple.

1. $\{ 1,2,3 \} \cup \{ 2,3,4,5 \} = \{ 1,2,3,4,5 \}$.

Proprietățile operațiilor de reuniune

1) $A \cup A = A$ (idepotență);

2) $A \cup \emptyset = A$;

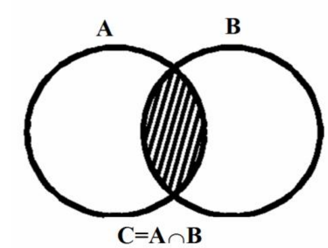
3) $A \cup U = U$;

4) $A \cup B = B \cup A$ (comutativitate);

5) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (asociativitate).

Demonstrația acestor proprietăți rezultă imediat din definiția reuniunii a doua mulțimi.

Definiție 1.2.2. *Intersecție a mulțimilor A și B se numește mulțimea notată cu* $A \cap B$ *și definită astfel* $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$, *adică* $A \cap B$ *este mulțimea elementelor, ce aparțin și lui A și lui B.*



Exemple.

1. $(-\infty, 1] \cap (-2, 7] = (-2, 1]$.
2. $\{a, b, c\} \cap \{b, d\} = \{b\}$.
3. $\{1, 2, 3, 4\} \cap \{5, 6, 7, 8, 9, 10\} = \emptyset$.

Proprietățile operațiilor de intersecție:

1) $A \cap A = A$ *(idepotență);*

2) $A \cap \emptyset = \emptyset$;

3) $A \cap U = A$;

4) $A \cap B = B \cap A$ $(comutativitate)$;

5) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ $(asociativitate)$.

Demonstrația acestor proprietăți rezultă imediat din definiția intersectiei a doua mulțimi.

Legătura dintre operațiile de reuniune și intersecție este exprimată de **proprietățile de distributivitate***:*

1) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$*;*

2) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$*.*

Demonstrație. Vom demonstra, de exemplu, proprietatea 2 (demonstrația proprietății 1 este similară). Fie x un element arbitrar. Atunci

$$x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \text{ și } x \in (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \text{ și } (x \in B \text{ sau } x \in C) \Leftrightarrow (x \in A \text{ și } x \in B) \text{ sau } (x \in A \text{ și } x \in C) \Leftrightarrow (x \in A \cap B) \text{ sau } (x \in A \cap C) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Legătura dintre operațiile de incluziune și operațiile de reuniune și intersecție este exprimată de urmatoarele proprietăți:

1) $A \subset A \cup B$*;*

2) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$*;*

3) $A \subset B \Rightarrow A \cup C \subset B \cup C$*;*

4) $A \subset C$ *și* $B \subset C \Rightarrow A \cup B \subset C$*;*

5) $A \cap B \subset A$*;*

6) $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$*;*

7) $A \subset B \Rightarrow A \cap C \subset B \cap C$*;*

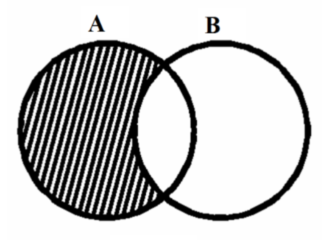
8) $C \subset A \text{ și } C \subset B \Rightarrow C \subset A \cap B$.

Demonstrația acestor proprietăți nu prezintă greutăți.

Definiție 1.2.3. *Diferență a mulțimilor A și B se numește mulțimea notată cu $A \setminus B$ și definită astfel*

$$A \setminus B = \{ x \mid x \in A \text{ și } x \notin B \},$$

adică $A \setminus B$ este mulțimea elementelor lui A, ce nu aparțin lui B.



C=A\B

Observație 1.2.1. *Diferența A \ B se obține eliminând din A elementele, ce aparțin și lui B.*

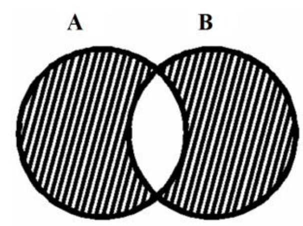
1) Dacă $A \cap B = \emptyset$, atunci $A \setminus B = A$.

2) Dacă $A \subset B$, atunci $A \setminus B = \emptyset$.

Definiție 1.2.4. *Diferența simetrică a mulțimilor A și B se numește mulțimea*

$$A \,\Delta\, B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Exemple.



C=A△B

1. $(-\infty, 2] \,\Delta\, [-3, 5) = (-\infty, -3) \cup (2, 5)$.

Mulțimea tuturor submulțimilor (o parte a mulțimii universale U), înzestrată cu operația binară algebrică Δ, este un grup abelian, adică se verică relațiile:

1) $(A \,\Delta\, B) \,\Delta\, C = A \,\Delta\, (B \,\Delta\, C)$ (asociativitatea);

2) $A \,\Delta\, \emptyset = \emptyset \,\Delta\, A = A$ ($\emptyset$ element neutru);

3) $A \,\Delta\, A = \emptyset$ (A este simetricul lui A);

4) $A \,\Delta\, B = B \,\Delta\, A$ (comutativitatea).

Demonstrație. Vom demonstra, de exemplu, proprietatea 1 (celelalte proprietăți se demonstrează similar).

$\forall x \in (A \,\Delta\, B) \,\Delta\, C \Rightarrow (x \in A \,\Delta\, B \text{ și } x \notin C) \; sau \; (x \notin A \,\Delta\, B \; si \; x \in C)$.

Dacă $x \in A \,\Delta\, B$ și $x \notin C$, atunci

((x ∈ A și x ∉ B) sau (x ∉ A și x ∈ B)) și x ∉ C ⇒ (x ∈ A și x ∉ B si x ∉ C) sau (x ∉ A și x ∈ B și x ∉ C) ⇒ ⇒ (x ∈ A și x ∉ B Δ C) sau (x ∉ A și x ∈ B Δ C) ⇒ x ∈ A Δ (B Δ C).

Dacă x ∉ A Δ B și x ∈ C, atunci

x ∉ A \ B și x ∉ B \ A și x ∈ C ⇒ (x ∉ A sau x ∈ B) și (x ∉ B sau x ∈ A) și x ∈ C ⇒ (x ∉ A și x ∉ B și x ∈ C) sau (x ∈ B și x ∈ A și x ∈ C) ⇒ (x ∉ A și x ∈ B Δ C) sau (x ∈ A și x ∉ B Δ C) ⇒ x ∈ A Δ (B Δ C).

Așadar,

$$(A \Delta B) \Delta C \subset A \Delta (B \Delta C).$$

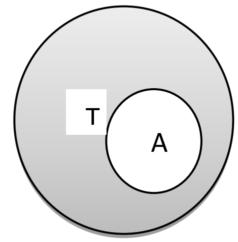
Incluziunea inversă se demonstrează similar.

Definiție 1.2.5. *Fie T o mulțime, și $A \subset T$ o submulțime. Mulțimea*

$$C_T\ (A) = \{ x \mid x \in T \text{ și } x \notin A \}$$

se numește complementara mulțimii A în raport cu T, sau

$$(x \in C_T\ (A)) \Leftrightarrow (x \in T) \text{ și } (x \notin A).$$



$C_T\ (A)$

Exemplu.

$C_R\ ([1, +\infty)) = (-\infty, 1)$.

Formule lui de Morgan

Dacă A și B sunt două submulțimi ale lui T, atunci

1) $C_T(A \cup B) = C_T\ (A) \cap C_T\ (B)$;

2) $C_T(A \cap B) = C_T(A) \cup C_T(B)$.

Demonstrație. Vom demonstra, de exemplu, relația 1. Cum $A \subset T$ și $B \subset T$, $x \in C_T\ (A \cup B) \Leftrightarrow x \in T \text{ și } x \notin (A \cup B) \Leftrightarrow x \in T \text{ și } x \notin A \text{ si } x \notin B \Leftrightarrow x \in C_T\ (A) \text{ și } x \in C_T\ (B) \Leftrightarrow x \in C_T\ (A) \cap C_T\ (B)$.

Observație 1.2.2. *De regulă, din context este clar în raport cu ce mulțime T se ia complementara mulțimilor considerate. În așa caz, indicele T se omite și complementara mulțimii A se notează $C(A)$ sau A.*

Proprietățile complementarei:

1) $C_T\ (C_T\ (A)) = A$;

2) $C_T\ (\emptyset) = T$;

3) $C_T\ (T) = \emptyset$.

Definiție 1.2.6. *Fie x și y doua obiecte. Se numește pereche ordonată a obiectelor x și y mulțimea notată (x, y) și definită astfel:*

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

Dacă (x, y) și (u, v) sunt două perechi ordonate, atunci

$$(x, y) = (u, v) \Leftrightarrow x = u \text{ și } y = v.$$

Demonstrație. Fie $(x, y) = (u, v)$, adică $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{u\}, \{u, v\}\}$. Sunt posibile următoarele cazuri:

I. Obiectele x și y coincid. Atunci $\{\{u\}, \{u, v\}\} = \{\{x\}\}$ și prin urmare, $\{u\} = \{x\}$ si $\{u, v\} = \{x\}$. Rezultă $u = x$ și $v = x$, adică $x = u$ și $y = v$.

II. Obiectele x și y sunt diferite. Atunci $u \neq v$ și, prin urmare, $\{x\} = \{u\}$ și $\{x, y\} = \{u, v\}$, de unde $x = u$ și $y = v$.

Dacă $x = u$ și $y = v$, atunci, evident, $(x, y) = (u, v)$.

Observație 1.2.3. *Dacă x și y sunt două obiecte diferite $(x \neq y)$, atunci $(x, y) \neq (y, x)$.*

Definiție 1.2.7. *Fie $a_1, a_2, \dots, a_n$ - n obiecte. Se numește n-uplu ordonat, obiectul notat $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ și definit prin inducție:*

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = ((a_1, a_2, \dots, a_{n-1})a_n),\ (n \geq 3).$$

Definiție 1.2.8. *Produs cartesian al mulțimilor $A_1, A_2, \dots, A_n$ se numește mulțimea notată $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ și definită astfel:*

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{ (a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_j \in A_j,\ j = \overline{1, n} \}, (n \geq 2).$$

Exemplu. $\{a, b\} \times \{1, 2, 3\} = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$.

Au loc relațiile*:*

1) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$;
2) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;
3) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;
4) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$;
5) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

Demonstrația acestor relații rezultă imediat din definițiile operațiilor respective.

1.3. CORESPONDENȚA ÎNTRE MULȚIMI

Să examinăm noțiunile de bază: mulțime, tipurile de mulțimi, proprietățile de bază ale lor și careva relații între mulțimi.

***Definiția 1.3.1**. Mulțimea se numește **finită** dacă ea constă dintr-un număr finit de elemente.*

***Definiția 1.3.2.** Mulțimea se numește **infinită** dacă ea constă dintr-un număr infinit de elemente.*

Proprietățile mulțimilor finite:

1. Dacă adăugați la o mulțime finită de un număr finit de elemente, vom obține o mulțime finită.
2. Dacă aruncăm dintr-o mulțime finită un număr finit de elemente, vom obține o mulțime finită.
3. Reuniunea unui număr finit de mulțimi finite este o mulțime finită.
4. Reuniunea unui număr infinit de mulțimi finite este o mulțime infinită.

Definiția 1.3.3. *Mulțimea numerică A se numește* ***mărginită superior****, dacă există un așa număr M, încât toate numerele din A nu întrec numărul M. Numărul* ***M*** *se numește* ***margine superioară*** *a mulțimii* A.

Mulțimea mărginită superior posedă o infinitate de margini superioare, deoarece orice număr, mai mare decâ marginea superioară reprezintă o margine.

Definiția 1.3.4. *Cea mai mare dintre marginile superioare se numeșteă* ***margine superiară exactă*** *(supremum) și se notează* $\boldsymbol{sup}$ A.

În mod analog se definesc *mulțimea mărginită inferior*, *marginea inferioară*, *margine inferioară exactă* (infium) – cea mai mare din margini, care se notează $\boldsymbol{inf}$ A.

Notă. Teorema fundamentală a teoriei numerelor reale afirmă că, mulțimea de numere rea mărginită superior posedă supremum-ul, iar cea mărginită inferior – infimum-ul. Trebuie de avut în vedere faptul că pentru cele ce constau doar din numere raționale, acest lucru nu este adevărat. Marginile mulțimilor mărginite pot aparține sau nu mulțimii date. Astfel, ambele mulțimi (0,1), [0,1] au margine suprerioară 1 și cea inferioară 0. În primul caz ele nu aparțin mulțimii, în al doilea – aparțin.

Între mulțimi de multe ori se stabilește o corespondență între elementele lor pe baza unei caracteristici, reguli sau descriere. Dintre toate caracteristicile semnificativă este corespondența funcțională, care este numită aplicație sau funcție.

Fie X și Y două mulțimi arbitrare.

Definiția 1.3.5. *Numim* ***funcție*** *o aplicație $f: X \to Y$ ce asociază oricărui element $x \in X$ un element unic determinat din Y, notat f* (x) *și numit valoarea funcției în x. Dacă $X_1 \subset X$, atunci imaginea X_1 la aplicației f este mulțimea $f(X_1) = \{f(x): x \in X_1\} \subset Y$.*

Dacă $Y_1 \subset Y$, atunci proimaginea Y_1 la aplicația f se numește mulțimea $f^{-1}\,(Y_1) = \{x: f(x) \in Y_1\} \subset X$.

Aplicația identică $i_{\mathrm{X}}: X \to \mathrm{X}$ este $i(x) = x$ pentru orice $x \in X$.

Definiția 1.3.6. Dacă sup$A \in A$ atunci mulțimea *A* posedă maximum, în acest caz în loc de sup*A* vom aplica notația max *A*. În mod analog se definește minim-ul mulțimii min *A*.

Definiția 1.3.7. Compoziţia *sau* **produsul** *aplicaţiilor f şi g se numeşte aplicaţia $g \circ f$ sau (gf) definită de formula*

$$g \circ f: X \to Y,\ (g \circ f)x = g(f(x)).$$

Definiția 1.3.8. *Corespondența notată $f^{-1}: Y \to X$ se numește* ***inversa aplicației*** *f, dacă*

$$fof^{-1} = i_X, f^{-1} of = i_Y.$$

Pentru ca să existe aplicația f^{-1} este necesar și suficient ca aplicația f să fie bijecivă. Este justă relația $(f og)^{-1} = g^{-1} of^{-1}$.

Notă. Notațiile proimaginii mulțimii și a inversei funcției coincid, însă sensul lor diferă. În primul caz el se aplică asupra mulțimilor și valoarea primită este o mulțime, în al doile caz – se aplică asupra elementului și valoarea primită este element. Proimaginea mulțimii există mereu, iar funcția inversă nu întotdeauna.

1.4. CORESPONDENȚA BIUNIVOCĂ. ECHIVALENȚA MULȚIMILOR.

O importanță are corespondența biunivocă. Fie A și B – două mulțimi.

Definiția 1.4.1. *Legea F, care fiecărui element a al mulțimii A îi pune în corespundere unul și numai un element b al mulțimii B, încât fiecărui element $b \in B$ îi corespunde unui și numai unui singur $a \in A$, se numește **corespondență biunivocă** (aplicație injectivă) între mulțimile A și B.*

Definiția 1.4.2. *Dacă între mulţimile A şi B este stabilită o corespondenţă biunivocă, atunci se spune că mulţimile A şi B* sunt ***echivalente*** *sau că ele au una şi aceeaşi **putere.** Se scrie*

$$\boldsymbol{A \sim B}.$$

$$((\exists F : A \to B) \wedge (F - injectiv\text{ă})) \Leftrightarrow (A \sim B))$$

Să enumerăm careva proprietăți ale echivalenței:

- proprietatea *reflexivă*: mereu *A ~ A;*
- proprietatea de *simetrie A ~ B,* atunci *B ~ A;*
- proprietatea *tranzitivă: dacă A ~ B,* iar *B ~ C,* atunci *A ~ C.*

Teorema 1.4.1. *Fie A_1, A_2, A_3,... şi B_1, B_2, B_3,... două şiruri de mulţimi. Dacă mulţimile A_n (respectiv, mulţimile B_n) nu se intersectează două câte două:*

$$A_n \cap A_{n'} = \emptyset, \qquad B_n \cap B_{n'} = \emptyset \quad (n \neq n'),$$

şi

$$A_n \sim B_n (n = 1,2,3,\cdots),$$

atunci

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \sim \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k.$$

1.5. MULȚIMI NUMĂRABILE. PROPRIETĂȚILE MUȚIMILOR NUMĂRABILE

Definiția 1.5.1. *Mulţimea $A = \{x\}$ se numeşte* ***numărabilă****, dacă ea este echivalentă cu mulţimea numerelor naturale* $\mathbb{N}$: $A \sim \mathbb{N}$, $\varphi: x \leftrightarrow n$.

Exemple de mulțimi numărabile:

$A = \{1,4,9, \dots, n^2, \dots\}$, $\varphi: n^2 \leftrightarrow n$;

$B = \{1,8,27, \dots, n^3, \dots\}$, $\varphi: n^3 \leftrightarrow n$;

$C = \{2,4,6, \dots, 2n, \dots\}$, $\varphi: 2n \leftrightarrow n$;

$D = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$, $\varphi: \frac{1}{n} \leftrightarrow n$.

Teorema 1.5.1. *Pentru ca mulţimea $A = \{x\}$ să fie numărabilă este necesar şi suficient ca ea să poată fi „numerotată“, adică să fie reprezentată sub formă de şir:*

$$A = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}.$$

Demonstrație.

Necesitatea. Fie mulţimea A numărabilă, adică ea este echivalentă cu mulţimea N de numere naturale. Altfel spus, există bijecţia $\varphi: x \leftrightarrow n$, $x \in A$, $n \in N$. Notând elementul $x \in A$ cu x_n, obţinem reprezentarea sub formă de șir.

Suficiența. Fie mulţimea A reprezentată sub formă de șir. Atunci este de ajuns să definim bijecţia $\varphi: x_n \leftrightarrow n$ (care stabileşte corespondenţa biunivocă dintre mulţimea A şi mulţimea $\mathbb{N}$, adică $A \sim \mathbb{N}$) şi vom obţine numărabilitatea mulţimii A. Teorema 2 este demonstrată.

Teorema 1.5.2. *Din orice mulţime infinită A se poate de extras o submulţime numărabilă D.*

Demonstrație.

Fie A o mulţime infinită. Extragem un element arbitrar din A, pe care-l notăm cu x_1. Deoarece A e infinită, în mulţimea rămasă $A \setminus \{x_1\}$ mai există elemente. Luăm un element arbitrar din $A \setminus \{x_1\}$ şi-l notăm cu x_2. Din aceleaşi considerente mulţimea $A \setminus \{x_1, x_2\}$ nu este vidă, deci putem lua un element x_3. Acest proces poate fi prelungit nemărginit, deoarece mulţimea A este infinită. În rezultat, obţinem şirul de elemente

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

care şi formează submulţimea D. Teorema 3 este demonstrată.

Teorema 1.5.3. *Orice submulţime B a unei mulţimi numărabile A este o mulţime finită sau numărabilă.*

Demonstraţie.

Dacă B este finită n-avem ce demonstra. Fie B infinită. Aranjăm elementele mulţimii numărabile A sub formă de şir: x_1,x_2,...,x_n,.... Trecând de la stânga la dreapta peste fiecare termen al acestui şir, noi vom întâlni termenii care aparţin submulţimii B. Punând în corespondenţă elementului B numărul de „întâlnire" cu el, noi vom numerota toate elemenentele mulţimii B. Deoarece B este infinită, la această numerotare vor fi folosite toate numerele. În aşa mod, s-a stabilit bijecţia $\varphi: B \leftrightarrow N$. Teorema 4 este demonstrată.

Teorema 1.5.4. *Dacă dintr-o mulţime numărabilă A se elimină o submulţime finită M, atunci mulţimea rămasă $A \setminus M$ de asemenea este numărabilă.*

(*demonstrați de sinestătător*)

Teorema 1.5.5. *Reuniunea unei mulțimi finite și a unei mulțimii numărabile fără elemente comune este mulțime numărabilă.*

Demonstraţie:

Fie $\mathrm{A} = \{\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \dots, \mathrm{a}_n\}$ и $\mathrm{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\}$, cu condiția $A \cap B = \emptyset$. Dacă $A \cup B = S$, atunci S poate fi scrisă sub forma

$$S = \{\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \dots, \mathrm{a}_n, b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\}.$$

După care apare posibilitatea de a renumerota elementele mulțimii S.

Teorema 1.5.6. *Reuniunea finită de mulţimi numărabile este o mulţime numărabilă.*

Demonstraţie:

Fie

$$A = \bigcup_{i=1}^{p} A_i$$

unde A_i sunt mulţimi numărabile. Să aranjăm elementele mulţimilor A_i sub formă de tabel:

$$\begin{array}{l} A_1:\ a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}, \cdots \\ A_2:\ a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n}, \cdots \\ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_p:\ a_{p1}, a_{p2}, \cdots, a_{pn}, \cdots \end{array}$$

Scriem elementele din tabel în felul următor:

$A = \{a_{11}, a_{21}, \dots, a_{p1}, a_{12}, a_{22}, \dots, a_{p2}, \dots, a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{pn}, \dots\}$,
adică scriem, mai întâi, toate elementele primei coloane, apoi toate elementele coloanei a doua ş.a.m.d. Astfel, elementele mulţimii A au fost scrise într-un şir. Conform teoremei 2 mulţimea A este numărabilă. Teorema 7 este demonstrată.

Teorema 1.5.7. *Reuniunea numărabilă de mulţimi finite este o mulţime numărabilă.*

Demonstrație.

Fie A_k $(k = 1, 2, 3, \dots)$ mulțimi numărabile, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$:

$$A_1 = \{a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \dots, a_{n_1}^{(1)}\},$$
$$A_2 = \{a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, \dots, a_{n_2}^{(2)}\},$$
$$A_3 = \{a_1^{(3)}, a_2^{(3)}, \dots, a_{n_3}^{(3)}\},$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

Pentru a scrie reuniunea lor S sub formă de șir, este suficientă înscrierea elementelor mulțimii A_1, apoi elementele mulțimii A_3 ș.a.m.d.

Teorema 1.5.8. *Reuniunea numărabilă de mulţimi numărabile este o mulţime numărabilă.*

Demonstraţie:

Fie A_k $(k = 1, 2, 3, \dots)$ mulțimi numărabile, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$. Vom scrie aceste mulțimi astfel:

$$A_1 = \{a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_3^{(1)}, \dots\},$$
$$A_2 = \{a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, a_3^{(2)}, \dots\},$$
$$A_3 = \{a_1^{(3)}, a_2^{(3)}, a_3^{(3)}, \dots\},$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

Dacă vom scrie elementul $a_1^{(1)}$, apoi ambele elemente $a_2^{(1)}$ și $a_1^{(2)}$, suma indicelui de sus și a celui de jos egală cu trei, apoi elementele, suma indicelui de sus și a celui de jos egală cu patru, ș.a.m.d. În acest caz

$$S = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k,$$

este scrisă sub formă de șir

$$S = \left\{a_1^{(1)}\ , a_2^{(1)}, a_1^{(2)}, a_3^{(1)} a_2^{(2)}, a_1^{(3)}, a_4^{(1)}, \dots\right\}$$

de unde rezultă numărabilitatea ei.

Notă. *Dacă* $\boldsymbol{a}$ *semnifică puterea mulţimii numărabile, iar* $\boldsymbol{n}$ *– puterea mulţimii finite, atunci teoremele de mai sus simbolic pot fi scrise astfel:*

$$a - n = a, a + n = a, a + a + \dots + a = na = a,$$
$$n1 + n2 + n3 + \dots = a, a + a + a + \dots = aa = a.$$

Teorema 1.5.9. *Mulţimea tuturor numerelor raţionale* $\mathbb{Q}$ *este o mulţime numărabilă.*

Demonstraţie:

Este cunoscut faptul, că orice număr raţional poate fi reprezentat sub formă de raportul a două numere întregi. Examinăm mai întâi numai fracţiile de forma $\frac{p}{q}$, unde p şi q sunt numere naturale. Mulţimea fracţiilor de aşa formă este echivalentă cu mulţimea elementelor de forma a_{pq}, cu indicii naturali şi deci, rezultă că ea este numărabilă. Conform aceloraşi principii mulţimea fracţiilor negative $-\frac{p}{q}$ unde p şi q sunt numere naturale la fel este numărabilă. Mulţimea $\mathbb{Q}$ fiind sumă a mulţimii numărabile de fracţii pozitive, mulţimii numărabile de fracţii negative şi a mulţimii ce costă dintr-un singur element, numărul zero, conform teoremei 9 este numărabilă.

Consecința 1.5.1. *Mulţimea* $\widetilde{\mathbb{Q}}$ *a tuturor numerelor raţionale de pe orice segment* $[a, b]$ *este numărabilă.*

1.6. MULȚIMI NENUMĂRABILE. MULȚIMI DE PUTEREA CONTINUUMULUI ȘI PROPRIETĂȚILE LOR

Să considerăm afirmația „Dintre toate mulțimile infinite există mulțimi nenumărabile. De exemplu, mulțimea punctelor segmentului [0,1] este nenumărabilă”. Vom demonstra această afirmație presupunând contrariul.

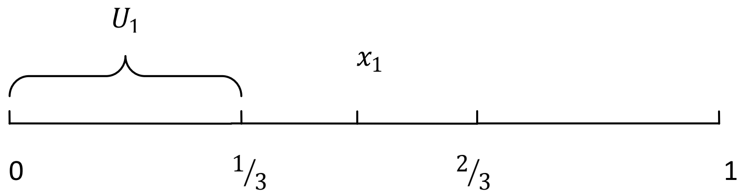
Presupunem contrariul, adică mulţimea $U = [0,1]$ este numărabilă. Atunci elementele acestei mulţimi pot fi aranjate sub formă de şir

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

Atunci orice punct $x \in [0,1]$ se găsește în acest șir. Divizăm segmentul U în trei părţi egale prin punctele $\frac{1}{3}$ și $\frac{2}{3}$. Este clar, că punctul x_1 nu poate să aparţină concomitent tuturor segmentelor

$$\left[0, \frac{1}{3}\right], \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \text{ și } \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

Cel puţin unul dintre aceste trei segmente nu-l conţine pe x_1, alegem segmentul situat mai la stânga și-l notăm U_1.



Divizăm în trei părţi egale sgmentul U_1, cu U_2 notăm acel segment, ce nu-l conţine pe x_2 (în caz că avem două segmente de așa fel, alegem acel segment, care este situat mai la stânga).

Prelungim acest proces până la infinit. În rezultat, obţinem un şir de segmente U_1, U_2, ..., U_n, ... cu proprietăţile:

1) $U_1 \supset U_2 \supset \cdots \supset U_n, \ldots$;
2) $|U_n| = \frac{1}{3^n} \to 0,$ dacă $n \to \infty$;
3) $x_n \notin U_n$.

Conform teoremei lui Cantor despre şirurile de segmente ce se contractă, există un punct ξce aparţine tuturor segmentelor U_n, $\xi \in U_n$ pentru orice n. Prin urmare, $\xi \in U$ și deci ξ ar trebui să se conţină în şirul $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ Însă, aceasta e imposibil, deoarece din relaţiile $\xi \in U_n \forall n$ şi $x_n \notin U_n \forall n$ rezultă că $\xi \neq x_n$, $\forall n$, deci punctul $\xi \in U$ nu aparţine şirului.

Acest fapt contrazice ipotezei că toate punctele de pe segmentul $[0,1]$ sunt aranjate în şir.

Deci „mulțimea punctelor segmentului [0,1] este nenumărabilă”

Definiția 1.6.1. *Dacă mulţimea A este echivalentă cu mulţimea tuturor punctelor de pe segmentul* $[0,1]$*, atunci se zice că ea are* **puterea continuumului** *(pe scurt – puterea c)*

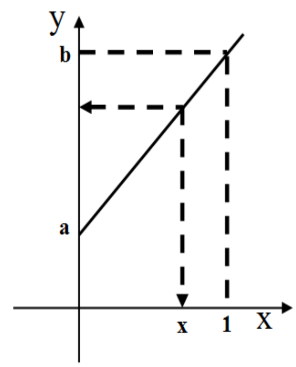
Teorema 1.6.1. *Mulțimea de puncte ale oricărui interval*

$[a,b]$, (a,b) , $(a,b]$, $[a,b)$

este mulțime de puterea continuumului.

Demonstraţie.

Fie $A = [a, b]$, $U = [0,1]$. Funcţia $y = a + (b - a)x$ reprezintă o bijecţie între mulțimile U și A, deci $A \sim U$. Într-adevăr, deoarece y este continuă şi monoton crescătoare pe $[0,1]$ pentru ea există funcţia inversă.



Fiindcă înlăturarea a unui sau a două elemente dintr-o mulţime infinită ne conduce la mulţimi echivalente cu cea iniţială, concludem că mulţimile (a, b), $[\mathrm{a}, \mathrm{b})$ sau $(\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ au puterea c. În particular, intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ are puterea c.

Teorema 1.6.2. *Reuniunea unui număr finit de mulţimi de puterea c este o mulţime de puterea c.*

Demonstraţie:

Fie

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} E_k \, , E_k \cap E_{k'} = \emptyset \quad k \neq k^{'},$$

unde fiecare mulţime E_k are puterea c.

Divizăm semiintervalul [0,1) cu punctele

$$0 = c_0 < c_1 < \cdots < c_{n-1} < c_n = 1$$

în n semiintervale $[c_{k-1}, c_k)(k = 1,2, \dots, n)$. Fiecare dintre aceste semiintervale are puterea c, deci $E_k \sim [c_{k-1}, c_k)$.

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} E_k \sim \bigcup_{k=1}^{n} [c_{k-1}, c_k) = [0, 1).$$

Prin urmare, mulţimea A are aceeaşi putere ca şi semiintervalul [0,1), adică puterea c.

Teorema 1.6.3. *Reuniunea numărabilă de mulţimi de puterea continuumului este o mulţime de puterea c.*

Demonstraţie:

Fie

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k.$$

În acest caz divizăm semiintervalul $[0,1)$ cu punctele

$$0 = c_0 < c_1 < \cdots < c_k < \cdots \qquad \lim_{k\to\infty} c_k = 1.$$

Analog teoremei 12, avem

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \sim \bigcup_{k=1}^{\infty} [c_{k-1}, c_k) = [0, 1).$$

1.7. COMPARAREA PUTERILOR

Mai sus am determinat sensul expresiilor „două mulţimi au aceeaşi putere“, „mulţimea are puterea a“, „mulţimea are puterea c“. Ce înseamnă aceste expresii noi cunoaştem: „mulţimile sunt echivalente“, „mulţimea este echivalentă cu mulţimea numerelor naturale ℕ“, „mulţimea este echivalentă cu mulţimea de pe segmentul [0,1]“. În definiția ce urmează vom introduce noțiunea de putere a unei mulțimi.

Definiţia 1.7.1. *Fie că toate mulţimile sunt divizate în clase astfel încât două mulţimi aparţin uneia şi aceleeaşi clase, dacă şi numai dacă, ele sunt echivalente. Asociem fiecărei clase un simbol oarecare pe care îl vom numi* ***puterea*** *mulţimi din clasa dată.*

Puterea mulţimii Ase notează astfel: $\bar{\bar{A}}$. Dacă se cunoaşte că mulţimea A are puterea egală cu α, atunci se scrie

$$\bar{\bar{A}} = \alpha.$$

De exemplu, dacă clasei de mulţimi, echivalente cu ℕ, îi vom asocia simbolul $\boldsymbol{a}$, atunci orice mulţime numărabilă are puterea $\boldsymbol{a}$. Analog obţinem, că orice mulţime echivalentă cu $U = [0,1]$, are puterea c.

Să examinăm încă un *exemplu*. Fie clasei ce conţine $A = \{a, b, c\}$ îi asociem simbolul **„3“**. Atunci putem spune, că orice mulţime formată din trei elemente are puterea **3**. În sfârşit, **0** este puterea mulţimii vide, **1** – puterea mulţimii ce conţine numai un singur element ş.a.m.d.

Acest exemplu ne arată, că noţiunea de cantitate de elemente a unei mulţimi finite este un caz particular a noţiunii mai generale – noţiunea de **putere**.

Având definiţia puterii unei mulţimi, e natural de pus problema despre **compararea puterilor**, adică ce trebuie de înţeles prin relaţiile $\bar{\bar{A}}$=$\bar{\bar{B}}$, $\bar{\bar{A}}$<$\bar{\bar{B}}$?

Definiţia 1.7.2. *Fie A şi B două mulţimi de puterile α şi β respectiv:*

$$\bar{\bar{A}}=\alpha \text{ şi } \bar{\bar{B}}=\beta.$$

Dacă mulţimele A şi B nu sunt echivalente, însă în mulţimea B există o sub mulţime $B^*\sim A$, atunci se spune că puterea mulţimii B e mai mare ca puterea mulţimii A, iar A are putere mai mică ca puterea lui B şi se scrie :

$$\alpha < \beta \text{ sau } \beta > \alpha.$$

De exemplu: $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{34}\}$, $\bar{\bar{A}} = 34$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_{56}\}$, $\bar{\bar{B}} = 56$, atunci $A \nsim B$, însă A~B* unde B*=$\{b_{1,} b_{2,\dots,} b_{34}\}$, de aceea 34<56. Analog, orice număr natural n este mai mic decît fiecare dintre puterile a şi c.

În sfârşit, dacă $\mathbb{N} = \{1,2,3, \dots, n, \dots\}$, $\bar{\bar{\mathbb{N}}} = a$, iar $U = [0,1]$, $\bar{\bar{U}} = c$, atunci ℕ și U nu sunt echivalente, însă

$$\mathbb{N} \sim U^* = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\} \subset U.$$

Putem scrie $\boldsymbol{a} < c$.

Apare întrebarea: <u>există oare puteri μ cuprinse între a şi </u>c:

$$a<\mu<c?$$

<u>Această întrebare poartă denumirea de ipoteza – continuumului. Nu demult a fost demonstrat, că afirmaţia „nu sunt puteri între **a** şi **c**</u>" nu contrazice axiomelor teoriei mulţimilor şi nici nu poate fi dedusă din aceste axiome (Садовничий, Т.О. p.17).

În acelaşi timp, uşor pot fi construite mulţimi de puteri mai mari ca $\boldsymbol{c}$.

Teorema 1.7.1. *Fie M o mulţime oarecare nevidă. Dacă T este mulţimea tuturor submulţimilor mulţimii M, atunci $\bar{\bar{T}} > \bar{\bar{M}}$.*

Demonstraţie.

Mai întâi, să observăm, că T conţine toate submulţimile din M, în particular mulţimea vidă, însăşi mulţimea M şi toate submulţimile formate dintr-un singur element: $\emptyset \in T$, $M \in T$, $M^* = \{x\} \in T$, $x \in M$.

Să arătăm că mulţimile T şi M nu sunt echivalente. Presupunem contrariul, $T \sim M$. Aceasta înseamnă că între elementele m a mulţimii M şi elementele t a mulţimii T există o corespondenţă biunivocă: $m \leftrightarrow t$. Vom numi elementul $m \in M$ element din clasa I, dacă $m \in t$, şi din clasa II, dacă $m \notin t$. Este clar, că fiecare $m \in M$ poate să aparţină uneea şi numai uneea dintre aceste două clase. Să notăm cu S

mulţimea tuturor elementelor de clasa II. Evident, S este o submulţime a mulţimii M, prin urmare, $S \in T$. Deoarece $M \sim T$, apoi există un element $m_0 \in M$ astfel încât $m_0 \leftrightarrow S$. Cărei clase aparţine elementul m_0? Dacă presupunem că m_0 aparţine clasei I, apoi el trebuie să aparţină submulţimii cu care e pus în corespondenţă, adică $m_0 \in S$, însă S e formată din elemente de clasa II. Deci m_0 nu poate fi element din clasa I. Să presupunem că m_0 este element din clasa II, atunci $m_0 \in S$, adică el aparţine acelei submulţimi din M cu care e pus în corespondenţă, prin urmare, m_0 trebuie să fie element din clasa I, ceea ce contrazice ipotezei că m_0 e element din clasa II. Aşadar $m_0 \in M$ nu poate fi nici element din clasa I şi nici element din clasa II. Dar aceasta contrazice faptului că orice element din M aparţine numaidecât uneea dintre clasele construite. Sursa de contrazicere e în presupunerea greşită că $M{\sim}T$. Aşadar T nu $\sim M$.

Dacă t^* este mulţimea tuturor submulţimilor mulţimii M, formate numai dintr-un element, atunci $M{\sim}t^* \subset T$. Conform definiţiei 1.7.2, $\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{T}}$.

Teorema 1.7.1 este demonstrată.

Obsevaţia 1.7.1. *Fie M o mulţime finită din n elemente. Atunci mulţimea T conţine 2^n elemente.*

Într-adevăr, T conţine mulţimea vidă, $\mathrm{C_n^1}$ mulţimi de un element, $\mathrm{C_n^2}$ - mulţimi de două elemente ş.a.m.d. Astfel, în T se vor conţine

$$1 + \mathrm{C_n^1} + \mathrm{C_n^2} + \cdots + \mathrm{C_n^n} = 2^\mathrm{n}$$

elemente. În legătură cu aceasta e natural să dăm următoarea definiţie.

Definiţia 1.7.3. *Dacă mulţimea M are puterea μ, iar mulţimea T a tuturor submulţimilor ei are puterea ν, atunci $\nu = 2^\mu$.*

Din teorema 6.1 rezultă că $2^\mu > \mu$.

Este adevărată următoarea teoremă.

Teorema 1.7.2 ([1], p.29). *Are loc formula $\boldsymbol{c = 2^a}$.*

Din formula $c = 2^a$ rezultă $c > a$.

Următoarele două teoreme au o importanţă mare pentru compararea puterilor.

Teorema 1.7.3 ([1], p.30). *Fie $A \supset A_1 \supset A_2$. Dacă $A_2 \sim A$, atunci $A_1 \sim A$.*

Teorema 1.7.4 (**Schröder - Bernstein*****).*** *Fie A şi B două mulţimi oarecare. Dacă fiecare dintre ele este echivalentă cu o submulţime a celeilalte mulţimi, atunci mulţimile A şi B sunt echivalente.*

Demonstraţie.

Fie $A \sim B^*$, $B^* \subset B$ şi B$\sim A^*$, $A^* \subset A$. Stabilind corespondenţa biunivocă dintre B şi A^*, avem $B \supset B^* \sim A^{**} \subset A^*$. Din $A \sim B^* \sim A^{**}$ rezultă că $A \sim A^{**}$ şi $A \supset A^* \supset A^{**}$. Conform teoremei 1.7.3 $A \sim A^* \sim B$. Aşadar $A \sim B$.

Consecinţa 1.7.1. *Dacă α şi β sunt două puteri, atunci are loc una şi numai una din relaţiile*

$$\alpha = \beta, \alpha < \beta, \alpha > \beta.$$

Relaţia $\alpha = \beta$ exclude celelalte două relaţii, deoarece $\alpha = \beta$ ne arată că mulţimile de puterea α şi β în acest caz sunt echivalente, pe când celelalte două relaţii exclud echivalenţa mulţimilor.

Să presupunem acum că relaţiile $\alpha < \beta$ şi $\alpha > \beta$ sunt concomitent adevărate. Fie că mulţimile A şi B au puterile $\bar{\bar{A}} = \alpha, \bar{\bar{B}} = \beta$.

Deoarece $\alpha < \beta$, atunci comform definiţiei 1.7.2 avem:

1. $A \nsim B$,
2. $A \sim B^*, B^* \subset B$.
3. $B \sim A^* \subset A$ din $\alpha > \beta$.

Aşadar $A \sim B^* \subset B$ şi $B \sim A^* \subset A$. Conform teoremei 1.7.4 A şi B trebuie să fie echivalente şi deci $\alpha = \beta$. Am obţinut contrazicere. Sursa contrazicerii constă în presupunerea greşită că în acelaşi timp se realizează relaţiile $\alpha < \beta$ şi $\alpha > \beta$.

Consecinţa 1.7.2. *Dacă α, β, γ sunt trei puteri şi $\alpha < \beta$, iar $\beta < \gamma$, atunci $\alpha < \gamma$, adică relaţia $<$ este tranzitivă.*

Observaţia 1.7.2. *Dacă m şi n sunt două numere naturale, atunci una şi numai una dintre relaţiile $m = n, m < n, m > n$ numaidecît se realizează.*

Observaţia 1.7.2 este adevărată şi pentru orice trei puteri α, β şi γ oarecare, adică dintre relaţiile $\alpha = \beta$, $\alpha < \beta$, $\alpha > \beta$ numaidecât una se realizează.

Într-adevăr, fie A şi B două mulţimi oarecare de puterile α şi β respectiv. Logic, sunt posibile următoarele cazuri:

1. A este echivalentă cu o submulţime din B, iar B este echivalentă la o submulţime din A;
2. A este echivalentă cu o submulţime din B, iar în Bnu este o submulţime echivalentă cu A;
3. B este echivalentă cu o submulţime din A, iar în A nu este o submulţime echivalentă cu B;
4. Nici în una dintre mulţimile A şi B nu este echivalentă cu o submulţime din cealaltă mulţime.

În cazul 1 $A \sim B$ (teorema lui Schröder - Bernstein), deci $\alpha = \beta$, în cazul 2, $\alpha < \beta$ (definiția 1.7.2), iar în cazul 3, $\alpha > \beta$. Cazul 4 nu se realizează.

Aşadar, **oricare două mulţimi sau sunt echivalente între ele (atunci $\boldsymbol{\alpha = \beta}$), sau satisfac uneia dintre relaţiile: $\boldsymbol{\alpha} < \beta$ sau $\boldsymbol{\alpha} > \beta$**

Probleme rezolvate

1. Demonstrați, că $A \setminus (A \setminus B) \subset A \cap B$.

Rezolvare

$\forall x \in A \setminus(A \setminus B) \Rightarrow x \in A \wedge x \notin A \setminus B$. Pentru ca $x \notin A \setminus B$ sunt posibile două cazuri:

1) $x \notin A$, atunci $x \notin A \setminus B$. Însă, deja se cunoaște, că $x \in A$. Rezultă că acest lucru nu are loc.
2) $x \in A \ \wedge x \in B$. Însă $x \in A$, ceea ce trebuia de demonstrat.

2. Demonstrați, că $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Rezolvare

a) $\forall x \in A \setminus (B \cup C) \Rightarrow x \in A \wedge \mathrm{x} \notin B \cup C \Rightarrow x \in A \wedge \mathrm{x} \notin B \wedge \mathrm{x} \notin C \Rightarrow x \in A \setminus B \wedge x \in A \setminus C \Rightarrow x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.
b) $\forall y \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \Rightarrow y \in A \wedge \mathrm{y} \notin B \wedge y \notin C \Rightarrow y \in A \wedge \mathrm{y} \notin B \cup C \Rightarrow y \in A \setminus (B \cup C)$.

3. Verificaţi justeţea egalităţii

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C).$$

Soluţie: Egalitatea este justă pentru orice mulţime A, B, C, D.

1) $\forall (x,y) \in A \times (B \cup C) \Rightarrow x \in A \wedge y \in B \cup C \Rightarrow x \in A \wedge (y \in B \vee y \in C) \Rightarrow (x,y) \in A \times B \vee (x,y) \in A \times C \Rightarrow (x,y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$;
2) $\forall (x,y) \in (A \times B) \cup (A \times C) \Rightarrow (x,y) \in A \times B \cup (x,y) \in A \times C \Rightarrow (x \in A, y \in B) \cup (x \in A, y \in C) \Rightarrow x \in A \wedge (y \in B \vee y \in C) \Rightarrow x \in A, y \in B \cup C \Rightarrow (x,y) \in A \times (B \cup C)$.

4. Demonstrați, că $[-2; -1] \sim [3; 7]$.

Rezolvare. Una din bijecții $f: R \leftrightarrow R$ reprezintă funcția liniară $f = kx + b$. Să alegem coeficienții corespunzători k și b. Deoarece $f(x)$ este strict crescătoare pentru $k > 0$, vom căuta $k > 0$ și $b \in R$: $f(-2) = 3$, $f(-1) = 7$. În acest caz $-2k + b = 3$, $-k + b = 7$. De aici $k = 4$, iar $b = 11$, $f(x) = 4x = 11$. Funcția dată este strict crescătoare și continuă. Deci ea este o bijecție, $f([-2; -1]) = [3; 7]$.

5. Există oare funcţia de forma $f(x) = \frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m}$ (unde coeficienţii $a_0, a_1, \dots a_n; b_0, b_1, \dots b_m$ – numere întregi), care posedă următoarea proprietate: pentru orice număr raţional r există aşa număr întreg k, încât $f(k) = r$?

Soluţie: Nu există aşa funcţie. Orice funcţie $f(x)$, care poate fi reprezentată ca raportul a două polinoame, are limită finită sau infinită când $x \to +\infty$. Dacă $\lim_{x\to+\infty} f(x) = q$ (număr finit), atunci există aşa N, încât pentru orice $k > N$ are loc relaţia: $q - 1 < f(k) < q + 1$. Dar atunci acelor numere raţionale, care nu aparţin intervalului $(q - 1; q + 1)$, îi poate corespunde doar un număr finit de numere k (doar acele numere k, predecesori ai lui N).deci, nu toate numerele raţionale se obţin sub formă de valoarea $f(k)$.

Dacă $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty$, gândim analog (în acest caz numerelor raţionale, ce aparţin intervalului fixat $(-A; A)$, poate corespunde doar un număr finit de numere k).

6. Stabiliţi aplicaţia biunivocă a segmentului [0,1] pe segmentul $[a, b]$.

Soluţie: Transformarea liniară $x = (b - a)t + a$ aplică univoc segmentul $0 \le t \le 1$ pe segmentul $a \le x \le b$.

7. Stabiliţi aplicaţia biunivocă a intervalului $(0,1)$ pe toată axa reală.

Soluţie: Funcţia $x = ctg\, \pi t$, cercetată pe intervalul $0 < t < 1$, aplică biunivoc acest interval pe toată axa $-\infty < x < +\infty$.

8. Stabiliţi aplicaţia biunivocă a axei reale pe intervalul $(a; b)$.

Soluţie: Funcţia $x = a + \frac{b-a}{\pi} arcctg\, t$ aplică biunivoc axa $-\infty < t < +\infty$ pe intervalul $a < x < b$.

9. Construiţi aplicaţia biunivocă a segmentului $[0; 1]$ pe intervalul $(0; 1)$.

Soluţie: Vom evidenţia un şir de puncte pe intervalul $(0; 1)$, spre exemplu: $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = \frac{1}{3}$; $x_3 = \frac{1}{4}$; ...; $x_n = \frac{1}{n+1}$; ... Stabilim următoarea corespondenţă: punctului 0 al segmentului îi punem în corespondenţă punctul x_1 din interval; punctului 1 din $[0; 1]$ – punctul x_2 din interval; punctului $x_1 = \frac{1}{2}$ din $[0; 1]$ – punctul x_3 din $(0; 1)$; punctului $x_2 = \frac{1}{3}$ din $[0; 1]$ – punctul x_4 din $(0; 1)$ şi, în general, punctului x_n din $[0; 1]$ – punctul x_{n+2} din $(0; 1)$; ... La celelalte puncte $x \in [0; 1]$ punem în corespondenţă puncte cu aceeaşi abscisă din $(0; 1)$. Corespondenţa obţinută în final este biunivocă (vezi Fig.2.1).

10. Există oare funcţia continuă, care aplică biunivoc segmentul $[a; b]$ pe toată axa reală?

Soluţie: Nu există aşa funcţie, deoarece funcţia continuă, definită pe segmentul $[a; b]$, trebuie să fie mărginită.

11. Există oare funcţia continuă, care aplică biunivoc segmentul $[a; b]$ pe intervalul $(c; d)$?

Soluţie: Nu există; în caz că exista funcţia continuă $x = \varphi(t)$, aplicând segmentul $[a; b]$ pe intervalul $(c; d)$, atunci pe segmentul $[a; b]$ nu va exista aşa punctul t_0, încât $\varphi(t_0) = d$ (în timp ce $\sup\limits_{a \le t \le b} \varphi(t) = d$). Aceasta contrazice teorema, că funcţia continuă pe segment îşi atinge pe acest segment valoarea sa maximală.

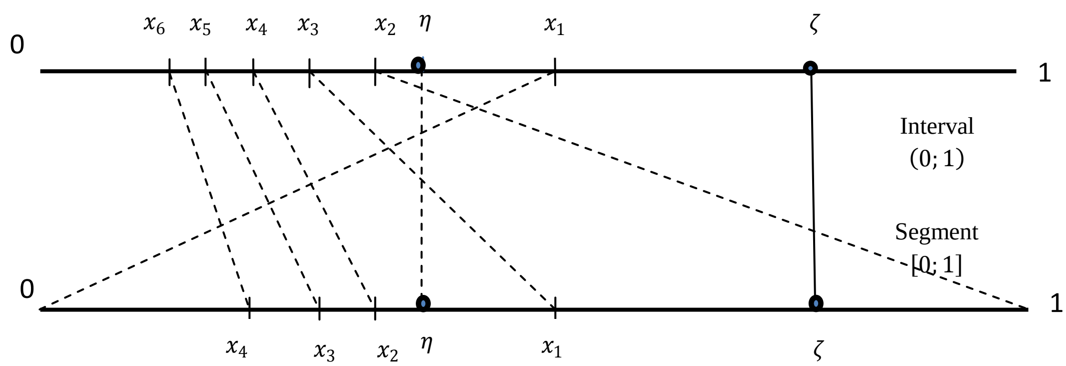


Fig. 2.1

12. Stabiliţi dacă există funcţia continuă, care aplică biunivoc segmentul $[a; b]$ pe mulţimea, care constă din două segmente $[0; 1]$ şi $[3; 4]$?

Soluţie: Nu vom găsi o aşa funcţie, deoarece, funcţia continuă, definită pe segmentul $[a; b]$, terbuie să primească toate valorile intermediare (în particular, fie $\varphi(t_1) = 1$, $\varphi(t_2) = 3$, unde $t_1 \in [a; b]$, $t_2 \in [a; b]$; atunci trebuia fi găsit punctul $t_0 \in [a; b]$, încât $\varphi(t_0) = 2$).

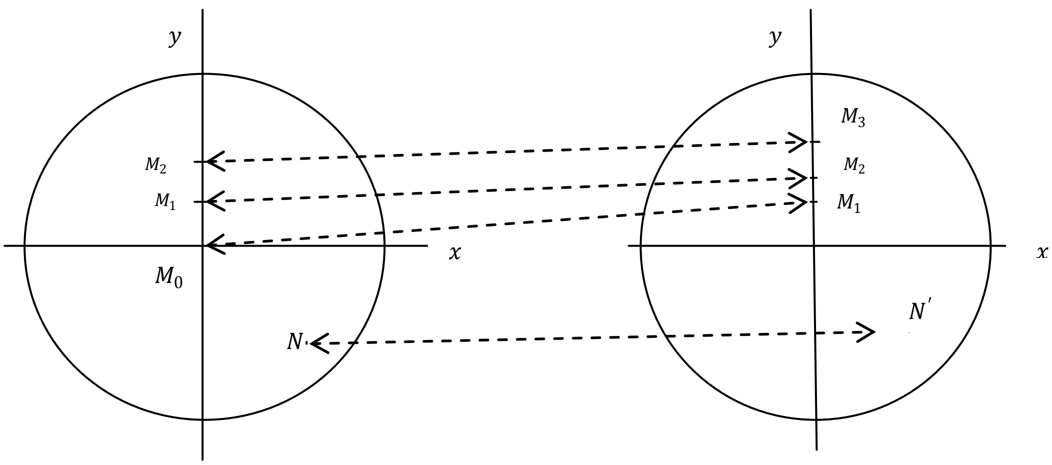
13. Construiţi aplicaţia biunivocă a circumferinţei de raza unitate pe segmentul $[0; 1]$.

Soluţie: Proiectăm circumferinţa pe semiintervalul $[0;2\pi)$, punând în corespondenţă fiecărui punct al circumferinţei valoarea numerică a unghiului, format de rază şi vectorul acestui punct cu careva rază fixată. Apoi semiintervalul $[0;2\pi)$ printr-o transformare liniară pe semiintervalul $[0;1)$; în fine, ultimul semiinterval aplicăm pe segmentul $[0; 1]$ prin metoda, examinată în exemplul 8.

14. Stabiliţi corespondenţa biunivocă între cercul deschis de rază unitate şi mulţimea punctelor planului, (дополнительный) suplimentat la cercul unitar închis.

Soluţie: Prin cercul unitate deschis vom subînţelege mulţimea acelor puncte $M(x, y)$ ale planului Oxy, pentru care are loc relaţia: $x^2 + y^2 < 1$; cercul unitate închis – mulţimea punctelor, ce satisfac relaţia $x^2 + y^2 \leq 1$.

Pentru început aplicăm cercul $x^2 + y^2 < 1$ pe cercul cu centrul perforat $0 < x^2 + y^2 < 1$. Pentru aceasta evidenţiem în cercul deschis o careva consecutivitate de puncte: M_0, M_1, M_2, ..., M_k, ..., unde M_0 – centrul cercului, şi stabilim următoarea corespondenţă: fiecărui punct M_k din cercul $x^2 + y^2 < 1$ îi punem în corespondenţă punctul M_{k+1} din cercul cu centrul perforat. Punctele rămase din ambele cercuri (adică punctele, diferite de toate M_k) le punem în coresondenţă după principiul identităţii (adică fiecărui punct $N(x, y)$ din primul cerc îi punem în coresondenţă punctul N' cu aceleaşi coordonate din al doilea cerc) (vezi Fig. 2.2).



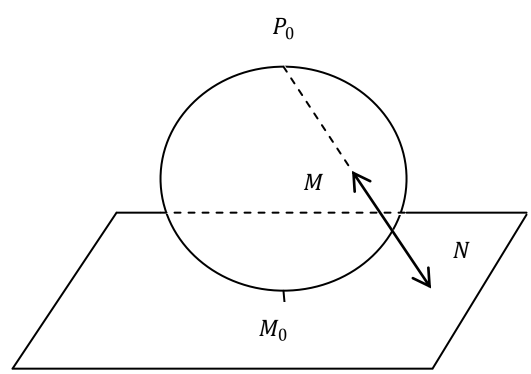
Cercul $x^2 + y^2 < 1$.

Cercul cu centrul perforat $0 < x^2 + y^2 < 1$.

Fig. 2.2

15. Stabiliţi coresondenţa biunivocă între sfera cu un punct perforat şi planul.

Soluţie: Corespondenţa se stabileşte cu aşa numita *proiecţie stereografică.* Notăm prin P_0 punctul perforat al sferei, iar prin M_0 – punctul diametral opus pe sferă. Construim planul, tangent la sferă în punctul M_0. Apoi trasăm dreapta ce trece prin punctul P_0 şi oarecare punct M de pe sferă. Punctul N, de intersecţie a dreptei şi



planul, îi punem în corespondenţă punctului M. Această corespondenţă între punctele M de pe sferă şi punctele N ale planului este biunivocă (vezi Fig. 2.3).

16. Stabiliţi corespondenţa biunivocă între mulţimea tuturor numerelor raţionale ale segmentului $[0;1]$ şi mulţimea tuturor punctelor cu coordonatele raţionale ale pătratului $[0;1]\times[0;1]$.

Soluţie: Să numerotăm toate numerele raţionale ale segmentului $[0;1]$:

$$r_1, r_2, r_3, \dots, r_n, \dots \tag{1.1}$$

Toate punctele raţionale ale pătratului le vom aranja sub formă de următoarea tabelă:

$$\begin{array}{cccc} (r_1,r_1) & (r_1,r_2) & (r_1,r_3) & \dots \\ (r_2,r_1) & (r_2,r_2) & (r_2,r_3) & \dots \\ (r_3,r_1) & (r_3,r_2) & (r_3,r_3) & \dots \\ (r_4,r_1) & (r_4,r_2) & (r_4,r_3) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \end{array}$$

Vom aranja toate punctele acestui tabel într-o consecutivitate în următoarea ordine: mai întâi (r_1,r_1); apoi punctele, ale căror sumă a indicelor absciselor şi ordonatelor este egală cu trei; punctele, ale căror sumă a indicelor este 4, ş.a.m.d.:

$$(r_1,r_1);\ (r_1,r_2);\ (r_2,r_1);\ (r_1,r_3);\ (r_2,r_2);\ (r_3,r_1);\ (r_1,r_4);\ (r_2,r_3)\dots \quad (1.\ 2)$$

Acum stabilim corespondenţa biunivocă între termenii consecutivităţii (1.1) şi termenii şirului (1.2) în mod obişnuit: termenului n ai şirului (1.1) îi punem în corespondenţă termenul n al şirului (1.2).

17. Stabiliţi corespondenţa biunivocă între mulţimea tuturor submulţimilor finite a şirului de numere naturale şi mulţimea tuturor numerelor întregi pozitive.

Soluţie: Mai întâi stabilim corespondenţa biunivocă între mulţimea tuturor submulţimilor finite ale şirului de numere naturale şi mulţimea tuturor punctelor (двоично-рациональное) binaro-raţionale ale semiintervalului [0;1): fiecărei mulţimi finite $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ (unde $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$) îi punem în corespondenţă o fracţie binară, pentru care pe locurile cu numerele $n_1, n_2, \dots, n_k$ după virgulă sunt unităţi, iar pe celelalte locuzi sunt zerouri; spre exemplu, mulţimii $(2,3,5)$ îi corespunde fracţia binară 0,01101, adică punctul binaro-raţional $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}=\frac{13}{32}$.

După ce această corespondenţă a fost stabilită, rămâne numai să numerotăm toate punctele binaro-raţionale ale semiintervalului [0;1). Aceasta poate fi făcută, spre exemplu, în felul următor:

$$0;\frac{1}{2};\frac{1}{2^2};\frac{3}{2^2};\frac{1}{2^3};\frac{3}{2^3};\frac{5}{2^3};\frac{7}{2^3};\frac{1}{2^4};\frac{3}{2^4};\frac{5}{2^4};\frac{7}{2^4};\frac{9}{2^4};\frac{1}{2^5};\ldots$$

În aşa fel mulţimii de fracţii binaro-raţionale ale semiintervalului $[0;1)$ îi este pusă în corespondenţă mulţimea tuturor numerelor naturale.

18. Care este puterea mulțimii tuturor triunghiurilor planului cartezian , coordonatele cărora sunt numere întregi?

Rezolvare. Fiecare așa triunghi se definește univoc de vârfurile sale, iar fiecare vârf - de două coordonate. Deci triunghiul triunghiul se definește șase numere-indici, ce definesc această mulțime de triunghiuri, fiecare independent de fiecare primește o mulțime numărabilă de valori. Deoarece avem o mulțime numărabilă de mulțimi numărabile reese că mulțimea acestor triunghiuri este numărabilă.

19. Fie E – careva mulţime nenumărabilă de numere pozitive: demonstraţi, că există aşa număr $\tau > 0$, încât mulţimea $E \cap (\tau; +\infty)$ este nenumărabilă.

Soluţie: Notăm $E_n = E \cap \left(\frac{1}{n}; +\infty\right)$. Este evident, că $\bigcup_n E_n = E$, deoarece

$$\bigcup_n E_n = \bigcup_n \left\{E \cap \left(\frac{1}{n}; +\infty\right)\right\} = E \cap \left\{\bigcup_n \left(\frac{1}{n}; +\infty\right)\right\} = E \cap (0; +\infty) = E.$$

Dacă toate mulţimile E_n ar fi numai numărabile, atunci şi suma tuturor E_n ar fi nu mai mult decât numărabile – ceea ce contrazice condiţiilor problemei (E este nenumărabilă conform condiţiilor problemei). Deci, măcar una din E_n este nenumărabilă.

20. Verificaţi justeţea afirmaţiei: „Dacă E – mulţime de numere infinită, al intervalului $(0; +\infty)$, atunci există aşa număr $\tau > 0$, încât mulţimea $E \cap (\tau; +\infty)$ - este infinită".

Soluţie: Afirmaţia nu este justă. Spre exemplu: $E = \left\{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \ldots; \frac{1}{n}; \ldots\right\}$. Mulţimea E este infinită; însă pentru orice $\tau > 0$ mulţimea $E \cap (\tau; +\infty)$ este finită.

21. Fie E – mulţime numărabilă de puncte de pe axă. Putem, oare, deplasa această mulţime cu o mărime a (adică de înlocuit toate punctele $x \in E$ cu punctele $x + a$), încât mulţimea E_a, obţinută în rezultatul deplasării să nu se intersecteze cu E?

Soluţie: Putem face acest lucru. În calitate de mărimea a putem lua orice număr pozitiv, diferit de toate numerele $|x_i - x_k|$ (unde $\{x_i\}$ - mulţimea dată E). Numere diferite $|x_i - x_k|$ este o mulţime numărabilă. Deaceea totdeauna se va găsi aşa număr $a > 0$, diferit de toţi $|x_i - x_k|$.

22. Demonstaţi, că dacă distanţa dintre oricare două puncte ale mulţimii E de pe axă este mai mare ca unitatea, atunci mulţimea E este finită sau numărabilă.

Soluţie: Împărţim dreapta într-o mulţime numărabilă de segmente prin punctele $0; \pm1; \pm2; \pm3; \dots$ Fiecare segment conţine nu mai mult de un punct al mulţimii date; reese, că între punctele mulţimii E şi careva reuniune de segmentele cercetate există corespondenţa biunivocă. Rezultă, că mulţimea Enu este decât numărabilă.

23. În planul mulţimii E care este definită astfel, încât distanţa dintre orice două puncte ale mulţimii este mai mare, decât a (unde a – număr pozitiv dat). Demonstraţi, că mulţimea E nu este , decât numărabilă (adică sau numărabilă, sau finită).

Soluţie: Demonstraţia se efectuiază analog, ca şi-n problema 5. Pentru aceasta împărţim planul prin dreaptele $x = const$ şi $y = const$ într-o mulţime numărabilă de pătrate cu latura $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

24. Care este puterea mulţimii tuturor segmentelor de pe axa reală?

Soluţie: mulţimea dată are puterea continuumului. Fiecărui segment $[a; b]$ îi corespunde punctul cu coordonatele a, b pe semiplanul $y > x$; această corespondenţă este biunivocă, iar mulţimea de puncte a semiplanului $y > x$ are puterea continuumului.

25. În plan este construită careva mulţime de litera T care două câte douî nu se intersectă (dimensiunile acestor litere pote fi şi diferite). Poate, oare, fi această această mulţime de litere nenumărabilă?

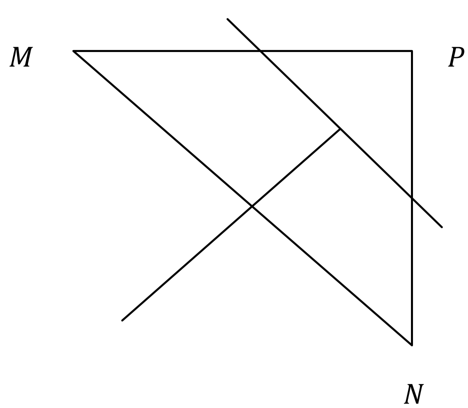


Fig.3.1

Soluţie: Orice mulţime de litera T, care două câte două nu se intersectă va fi nu mai mult decât numărabilă. Punem în corespondenţă fiecărei litere T a mulţimii date trei puncte raţionale M, N, P ale planului cu condiţia, că segmentul MN intersectează piciorușul literei T, iar segmentele MP şi NP să intersecteze capetele laterale ale acestei litere. (Fig. 3.1) Deci unui şi aceluiaşi triplet de puncte raţionale M, N, P îi poate corespunde nu mai mult decât o literă T (în caz că acestui triplet îi corespunde două litere diferite T, atunci ele se intersectează). Deci între mulţimea dată de litere T şi careva mulţime de tripleţi de puncte raţionale în plan este stabiltă corespondenţa biunivocă. Deoarece mulţimea de aşa tripleţi de puncte nu este decât numărabilă, atunci şi mulţimea de aşa litere T care două câte două nu se intersectează la fel nu este decât numărabilă.

26. Care este puterea mulţimii tuturor funcţiilor strict crescătoare continui (definite pe segmentul $[a; b]$)?

Soluţie: Mulţimea dată are puterea continuumului. Notăm A mulţimea tuturor funcţiilor de tipul kx, unde $k > 0$; prin B – mulţimea tuturor funcţiilor strict crescătoare continui, prin C - mulţimea tuturor funcţiilor continui. Atunci $A \subset B \subset C$. Însă A şi C au puterea continuumului; reese, că B are la fel puterea continuumului.

27. Care este puterea mulţimii tuturor numerelor reale, cuprinse între 0 şi 1 în dezvoltarea zecimală ale căror cifra 7 se află pe locul trei?

Soluţie: Mulţimea are puterea continuumului. Corespondenţa biunivocă între mulţimea A a fracţiilor zecimale de tipul dat şi mulţimea B a tuturor fracţiilor zecimale stabilim astfel: fiecărei fracţii infinite din A îi punem în corespondenţă o fracţie infinită din B, care se obţine din prima fracţie eliminând cifra, care stă pe locul 3. Spre exemplu: fracţiei $x = 0{,}257361 \ldots \in A$ îi corespunde fracţia $y = 0{,}25361 \ldots \in B$; fracţiei $x = 0{,}237758 \ldots \in A$ îi corespunde fracţia $y = 0{,}23758 \ldots \in B$. Mulţimea B are puterea continuumului, rezultă, că A la fel are puterea continuumului.

28. Demonstraţi cu ajutorul teoremei Cantor – Bernstein echivalenţa dintre cercul închis şi cercul deschis cu aceeaşi rază.

Soluţie: Vom nota A cercul închis cu raza r, cercul deschis cu acelaşi centru şi aceeaşi rază – prin B, iar cercul închis cu raza $\frac{r}{2}$ şi cu acelaşi centru prin C. Atunci $A \supset B \supset C$. Mulţimile A şi C au aceeaşi putere (corespondenţa biunivocă între ele se stabileşte cu ajutorul transformării de asemănare, cu centrul de asemănare în centrul comun al cercurilor). Din echivalenţa mulţimilor A şi C rezultă (conform teoremei lui Cantor - Bernstein), că A este echivalentă cu B.

29. Demonstraţi, că dacă $A \setminus B \sim B \setminus A$, atunci $A \sim B$.

Soluţie: $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$; $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$. Cu toate acestea $A \setminus B$ şi $A \cap B$ nu au puncte comune la fel ca şi mulţimile $B \setminus A$ şi $A \cap B$. Deoarece $A \setminus B \sim B \setminus A$ conform condiţiilor problemei, şi $A \cap B \sim A \cap B$, atunci $A \sim B$.

30. Demonstraţi, că dacă $A \subset B$ şi $A \sim A \cup C$, atunci $B \sim B \cup C$.

Soluţie: În condiţiile problemei au loc relaţiile care uşor pot fi verificate:

$$B = A \cup (B \setminus A), \tag{1.3}$$

$$B \cup C = [A \cup (C \setminus B)] \cup (B \setminus A). \tag{1.4}$$

Ambele mulţimi sumate din partea dreaptă a relaţiei (1.3) nu au puncte comune; acelaşi lucru este just şi pentru partea dreaptă a relaţiei (1.4).

Mulţimile A şi $A \cup (C \setminus B)$ sunt echivalente; aceasta reese din faptul, că $A \subset A \cup (C \setminus B) \subset A \cup C$, şi că, conform condiţiei, $A \sim A \cup C$. Deci, $A \sim A \cup (C \setminus B)$. Din această relaţie, dar şi din relaţiile (1.3) şi (1.4) rezultă, că $B \sim B \cup C$.

31. Verificaţi justeţea afirmaţiei: „Dacă $A \sim C, B \sim D$, iar $A \supset B$, $C \supset D$, atunci $A \setminus B \sim C \setminus D$”.

Soluţie: Afirmaţia nu este justă. Ca exemplu:

$$A = \{1,2,3,4, \dots\}, B = \{2; 3; 4; \dots\}; C = A; D = \{3; 4; 5; \dots\}.$$

În acest caz $A \sim C$, $B \sim D$, $A \supset B$, $C \supset D$, dar $A \setminus B$ nu este echivalentă cu $C \setminus D$ ($A \setminus B$ constă dintr-un singur element, $C \setminus D$ - dindouă elemente).

32. Demonstraţi justeţea afirmaţiei:„Dacă mulţimea E a planului este nenumărabilă, atunci există aşa cerc cu centrul în originea de coordonate, care conţine o mulţime nenumărabilă de puncte din E”.

Soluţie: Notăm prin C_n - cercul de raza n cu centrul în originea de coordonate. Este evident, că

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} (C_n \cap E).$$

Dacă toate $C_n \cap E$ ar fi nu mai mult decât numărabile, atunci mulţimea E ar fi la fel numărabilă; dar, conform condiţiei, E este nenumărabilă; rezultă, că măcar una din mulţimile $C_n \cap E$ la fel este nenumărabilă

Probleme propuse spre rezolvare:

1. Demonstrați includerea: $A \setminus C \subset (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$.
2. Demonstrați egalitățile:

$$(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C)(B \setminus C);$$
$$A(B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C);$$
$$(A \setminus B) \cap C = (A \cap C)(B \cap C).$$

3. Stabiliți bijecție între (-5;-1) și (0;7).
4. Stabiliți, că (0;1) $\sim$ $(0; +\infty)$.

5. Stabiliţi corespondenţa biunivocă între cercul unitar deschis şi cercul unitar închis.
6. Găsiţi corespondenţa biunivocă între cercul unitar închis şi complementara la cercul unitar deschis.
7. Găsiţi corespondenţa biunivocă între cercul unitar închis şi complementara la el.
8. Stabiliţi corespondenţa biunivocă între circumferinţă şi dreaptă.
9. Stabiliţi corespondenţa biunivocă între suprafaţa sferei şi planul.
10. Stabiliţi corespondenţa biunivocă între mulţimea tuturor numerelor iraţionale şi mulţimea tuturor numerelor reale de pe axa numerică.
11. Stabiliţi corespondenţa biunivocă între: a) punctele pătratului deschis $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ şi punctele dreptungiului deschis $a < x < b$, $c < y < d$; b) punctele pătratului deschis $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ şi punctele planului; c) punctele dreptungiului deschis $a < x < b$, $c < y < d$ şi punctele planului.
12. Stabiliţi corespondenţa biunivocă între mulţimea tuturor numerelor raţionale de pe axa numerică şi mulţimea tuturor punctelor, ambele coordonate ale cărora sunt raţionale.
13. Stabiliţi corespondenţa biunivocă între mulţimea tuturor polinoamelor cu coeficienţi raţionali şi mulţimea tuturor numerelor naturale.
14. Stabiliţi corespondenţa biunivocă între mulţimea tuturor submulţimilor finite ale şirului de numere naturale şi mulţimea tuturor numerelor întregi pozitive.
15. Stabiliţi corespondenţa biunivocă între mulţimea tuturor şirurilor de numere naturale şi mulţimea tuturor şirurilor de numere naturale crescătoare.
16. Stabiliţi corespondenţa biunivocă între mulţimea tuturor şirurilor de numere naturale crescătoare şi mulţimea celor fracţii binare infinite, care corespund numerelor semiintervalului $(0;1]$.
17. Stabiliți puterea mulțimii polinoamelor, de grad nu mai mare decât 7, coeficienții cărora sunt numere raționale.
18. Fie $X -$ mulțime numărabilă de puncte de pe circumferință. Este posibil oare de rotit circumferința în jurul centrului cu un unghi φ, astfel ca mulțimea de puncte obținută X^* să nu să se intersecteze cu X?
19. Care va fi puterea mulțimii literelor L din plan, dacă literele două câte două nu se intersectează?

20. Care este puterea mulțimii tuturor funcțiilor raționale cu coeficienți întregi la numărător şi numitor?
21. Demonstraţi, că mulţimea tuturor cercurilor planului, razele cărora sunt raţionale şi coordonatele centrului cărora – numere raţionale, este o mulţime numărabilă.
22. Care este puterea mulţimii tuturor fracţiilor zecimale finite? Care este puterea mulţimii tuturor fracţiilor finite de ordinul p, pentru $p > 1$, fiind dat.
23. Stabiliţi puterea mulţimii tuturor polinoamelor, coeficienţii cărora sunt numere algebrice.
24. Demonstraţi, că mulţimea punctelor de discontinuitate a funcţiei monotone, definită pe toată axa reală, este finită sau numărabilă.
25. Fie E - mulţimea numărabilă de puncte de pe circumferință. Este oare posibil de rotit circumferința în jurul centrului cu careva unghi φ astfel, încât mulţimea E_{φ}, obţinută din E în rezultatul rotaţiei, să nu se intersecteze cu E?
26. Care este puterea mulțimii tuturor numerelor transcendente (adică nealgebrice)?
27. Care este puterea mulțimii tuturor șirurilor de numere naturale strict crescătoare?
28. Care este puterea mulțimii tuturor șirurilor de numere naturale?
29. Care este puterea mulțimii tuturor șirurilor de numere naturale, ce nu conțin cifra 7?
30. Care este puterea mulțimii tuturor șirurilor de numere naturale, ce conțin cifra 7?
31. Care este puterea mulţimii tuturor şirurilor posibile de numere raţionale?
32. Care este puterea mulțimii polinoamelor (cu coeficienți reali)?
33. Pe dreaptă este dată mulțimea segmentelor care două câte două nu se intersectează. Ce putem spune despre puterea acestei mulțimi?
34. Care este puterea mulțimii tuturor cercurilor planului?
35. În plan se construiește careva mulțime de circumferințe care două câte două nu se intersectează. Poate fi această mulțime nenumărabilă?
36. În plan se construiește careva mulțime de litera Γ care două câte două nu se intersectează. Poate fi această mulțime nenumărabilă?
37. Care este puterea mulțimii *tuturor* funcțiilor monotone pe segmentul $[a; b]$ (nu numai continui)?

38. Care este puterea mulțimii tuturor șirurilor de numere reale?
39. Care este puterea mulţimii tuturor numerelor reale, cuprinse între 0 şi 1 în dezvoltarea zecimală ale cărora lipseşte cifra 7?
40. Care este puterea mulţimii tuturor numerelor reale, cuprinse între 0 şi 1 în dezvoltarea zecimală ale cărora este cifra 7?
41. Demonstrați cu ajutorul teoremei Cantor-Bernstein echivalența pătratului închis cu pătratul deschis de aceeași latură.
42. Demonstrați cu ajutorul teoremei Cantor-Bernstein echivalența planului cu pătratul închis din plan.
43. Demonstrați cu ajutorul teoremei Cantor-Bernstein echivalența pătratului $0 < x \leq 1, 0 < y \leq 1$ și semiintervalul (0;1].
44. Fie A și B - două mulțimi infinite echivalente. Stabiliți dacă există submulțimea mulțimii A (diferită de A), echivalentă cu mulțimea B?
45. Verificați justețea afirmației: „Dacă $A \sim B$, $C \supset A$, $C \supset B$, atunci $C \setminus A \sim C \setminus B$".
46. Este oare justă afimația: „Dacă $A \sim B$, $A \supset C$, $B \supset C$, atunci $A \setminus C \sim B \setminus C$"?
47. Demonstrați, că mulțimea tuturor șirurilor uniform convergente posibile pe segmentul $[a; b]$ de funcții continui are puterea continuumului.
48. Care este puterea mulțimii tuturor șirurilor de funcții continui (pe segmentul $[a; b]$)?
49. Demonstrați, că mulțimea tuturor submulțimilor finite a mulțimilor numărabile – este numărabilă.
50. Care este puterea mulțimii tuturor submulțimilor finite sau numărabile a mulțimii E, dacă E are puterea continuumului?
51. Care este puterea mulțimii tuturor funcțiilor, definite pe segmentul $[a; b]$ și discontinui măcar într-un punct al acestui segment?

CAPITOLUL 2. SPAȚII METRICE

2.1. METRICA. EXEMPLE DE SPAȚII METRICE

În analiza matematică se studiază câteva definiţii a noţiunii de limită: limita unui şir de numere reale, limita unui şir de vectori n-dimensionali, limita unui şir uniform convergent de funcţii, etc. Dacă analizăm atent aceste definiţii, observăm, că toate au ceva comun, şi anume: şirul $\{x_n\}_1^\infty$ (de numere, vectori n-dimensionali, funcţii) converge către x, dacă „distanţa" dintre x_n şi x tinde către zero. În dependenţă de natura elementelor şi de faptul cum înţelegem „distanţa" dintre elemente obţinem definiţia noţiunii de limită sub diferite forme. Această situaţie ne sugerează ideea de a introduce pentru elementele unor mulţimi o definiţie generală a distanţei care ar generaliza cazurile particulare menţionate mai sus şi încă multe altele.

Definiția 2.1.1. *Se numeşte* ***distanţă*** *(sau* ***metrică****) într-o mulţime X orice funcţie nenegativă $\rho : X \times X \to R$ ce posedă următoarele proprietăţi (axiomele distanţei):*

1) $\rho(x, y) = 0$ dacă şi numai *dacă* $x = y$;

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ oricare ar fi $x, y \in X$;

3) $\rho(x, z) \le \rho(x, y) + \rho(y, z)$ pentru orice $x, y, z \in X$ *(inegalitatea triunghiului).*

Observaţie 2.1.1. *Din axiomele 1-3 rezultă, că funcţia $\rho : X \times X \to R$ este nenegativă.*

Într-adevăr, $0 = \rho(x, x) \le \rho(x, y) + \rho(y, x) = 2\rho(x,y)$.

Prin urmare, în definiţia distanţei condiţia, conform căreia se cere că funcţia $\rho : X \times X \to R$ să fie nenegativă, poate fi omisă

Definiția 2.1.2. *Se numeşte* ***spaţiu metric*** *orice mulţime nevidă în care este definită o distanţă.*

Teorema 2.1.1. *Este justă inegalitatea*

$$|\rho(x,z) - \rho(z,y)| \leq \rho(x,y),$$

ce rezultă din inegalitatea triunghiului.

Demonstrație:

Conform axiomelor inegalității triunghiului și simetriei metricii

$$\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(z,y), \quad \rho(z,y) \leq \rho(x,y) + \rho(x,z).$$

Din prima inegalitate rezultă că $\rho(x,z) - \rho(z,y) \leq \rho(x,y)$, din a doua – $\rho(z,y) - \rho(x,z) \leq \rho(x,y)$. Inegalitatea din ipoteză rezultă din faptul inegalitățile sunt echivalente cu inegalitatea $|a| \leq b$.

Notă. *Dacă în una și aceeași mulțime sunt definite două metrici, în acest caz avem definite două spații metrice diferite.*

Exemple *de spații metrice*

1. Fie $X = C$ mulţimea numerelor complexe, sau $X = R$ mulţimea numerelor reale, sau $X = Q$ mulţimea numerelor raţionale. Funcţia $\rho(x, y) = |x - y|$ $(x, y \in X)$ defineşte o distanţă în X. Axiomele 1 - 3 ale metricii se verifică nemijlocit şi deci (X, ρ) este un spaţiu metric. Spaţiul metric R este un subspaţiu al spaţiului metric C, iar Q este un subspaţiu al spaţiului metric R şi al spaţiului metric C.

2. Fie X o mulţime nevidă arbitrară. Să arătăm că funcţia

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 1, x \neq y, \\ 0, x = y \end{cases}$$

defineşte o distanţă pe X.

Axiomele 1) şi 2) evident sunt satisfăcute. Vom demonstra că este satisfăcută şi axioma 3). Este suficient să considerăm cazul $x \neq z$. Relaţiile $x = y$ şi $y = z$ implică $x = z$ şi deci în cazul $x \neq z$ are loc cel puţin una dintre relaţiile $x \neq y$, $y \neq z$. De aici rezultă că partea dreaptă a inegalităţii triunghiului este egală cu 1 sau 2, în timp ce partea stângă este egală cu 1. Astfel este satisfăcută şi 3). Spaţiul metric obţinut se numeşte spaţiu metric discret sau spaţiu metric al punctelor izolate.

Acest exemplu ne arată că metrica poate fi definită pe orice mulţime nevidă şi, prin urmare, orice mulţime nevidă poate fi organizată ca spaţiu metric.

3.Fie S mulţimea tuturor şirurilor numerice. În S distanţa poate fi definită prin formula:

$$\rho(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|} \quad (x = (\xi_k)_1^{\infty}, \qquad y = (\eta_k)_1^{\infty})$$

Proprietăţile metricii 1) şi 2) sunt evidente.

Demonstrați independent justețea axiomei trei.

4.Fie X mulţimea tuturor funcţiilor continue pe segmentul $[a, b]$. Metrica este definită prin relația

$$\rho(x,y) = \max_{a \le t \le b} |x(t) - y(t)|$$

Avem: $\rho(x,y) = \max_{a \le t \le b} |x(t) - y(t)| = 0$ dacă şi numai dacă $x(t) - y(t) = 0$ pentru orice $t \in [a, b]$ sau $x(t) = y(t)$ pentru orice $t \in [a, b]$, adică $x = y$. Proprietatea a doua a distanţei este evidentă.

Să demonstrăm ultima proprietate. Fie x, y, z trei elemente din X. Avem:

$$|x(t) - z(t)| \le |x(t) - y(t)| + |y(t) - z(t)| \le$$
$$\le \max_{a \le t \le b} |x(t) - y(t)| + \max_{a \le t \le b} |y(t) - z(t)| = \rho(x,y) + \rho(y,z)$$

şi deci

$$\rho(x,z) = \max_{a \le t \le b} |x(t) - z(t)| \le \rho(x,y) + \rho(y,z).$$

Spaţiul metric obţinut se notează prin $C[a, b]$.

5. Fie l_∞ mulţimea tuturor şirurilor mărginite de numere reale sau complexe, mertica este

$$\rho(x,y) = \sup_n |\xi_n - \eta_n| \quad (\ (x = (\xi_n)_1^{\infty}, \qquad y = (\eta_n)_1^{\infty}) \ )$$

Stabiliți independent.

6. Spaţiul metric c_0 este format din toate şirurile de numere reale sau complexe, convergente la zero. Distanţa în c_0 se defineşte prin formula

$$\rho(x,y) = \max_n |\xi_n - \eta_n|, \quad (\ (x = (\xi_n)_1^{\infty}, \qquad y = (\eta_n)_1^{\infty}) \ )$$

Spaţiul c_0 este un subspaţiu al spaţiului metric l_∞.

2.2. NOȚIUNILE TOPOLOGICE ÎN SPAȚII METRICE

Toate punctele ale unui spațiu metric se impart în trei clase distincte: interne, externe, limita. Pentru a determina fiecare dintre aceste tipuri de puncte este necesară să definim noțiunea de vecinătate a unui punct în spațiu metric.

Definiția 2.2.1. *Se numeşte* ***sferă*** (*sau* ***sferă deschisă***) *cu centrul a şi de rază r în spaţiul metric X mulţimea*

$$S(a, r) = \{x \in X: \rho(x, a) < r\}.$$

Orice sferă cu centrul în punctul a se numeşte *vecinătate a acestui punct*.

Proprietățile vecinătăților:

1. Punctul a al spațiului metric E aparține oricărei sale.
2. Dacă punctul a posedă două vecinătăți, atunci una din ele reprezintă submulțime a celeilalte.
3. Dacă $b \in S(a, \varepsilon)$, atunci există așa număr real pozitiv $\delta > 0$, что $S(b, \delta) \subset S(a, \varepsilon)$.
4. Dacă două puncte a și b ale spațiului E posedă vecinătățile $S(a, \varepsilon)$ și $S(b, \delta)$ respectiv, atunci sunt posibile doar trei moduri de plasare a vecinătăților în spațiul metric E, fiecare din care satisface proprietăților corespunzătoare:

a) vecinătățile nu posedă puncte comune, dacă metrica între puncte este mai mare decât suma razelor vecinătăților: $\rho(a; b) > \delta + \varepsilon$, atunci $S(a, \varepsilon) \cap S(b, \delta) = \emptyset$;
b) vecinătățile posedă un singur punct comun, dacă metrica între puncte este egală cu suma razelor vecinătăților lor:

$$\rho(a; b) > \delta + \varepsilon, \text{ atunci } S(a, \varepsilon) \cap S(b, \delta) = c,\ c - \text{este unic;}$$

c) vecinătățile posedă puncte comune, dacă metrica între puncte este mai mică ca suma razelor vecinătăților lor:

$$\rho(a; b) < \delta + \varepsilon, \text{ atunci } S(a, \varepsilon) \cap S(b, \delta) \neq \emptyset.$$

Să demonstrăm una din proprietățile enumerate.

Demonstrația celorlalte propunem să fie efectuată independent.

Demonstrația primei proprietăți

Fie x=a, conform definiției vecinătății calculăm metrica $\rho(a;a) = 0 < \varepsilon$, de unde rezultă, că $x = a \in S(a,\varepsilon)$.

2.3. MULȚIMI DE PUNCTE

Noţiunile de mulţime deschisă şi de mulţime închisă într-un spaţiu metric, precum şi unele proprietăţi ale lor, sunt cunoscute din cursul de analiză matematică. Având în vedere însă importanţa lor, am găsit de cuviinţă să amintim proprietăţile principale ale acestor clase de mulţimi.

Fie X un spaţiu metric şi M o mulţime din X.

***Definiția 2.3.1**. Se zice că punctul $x \in M$ este **punct interior** al mulţimii M, dacă există o vecinătate $S(x,\varepsilon)$ a acestui punct, astfel încât $S(x,\varepsilon) \subset M$.*

Exemplu.
$M = (0{,}5\,] \cup \{7\}$ în R.
$x = 1$ – punct inerior pentru M : $1 \in (0{,}9; 1{,}1\,) \subset M$.
$x = 12 -$ nu este punct interior pentru M: $12 \notin M$.
$x = 0$ – nu este punct interior pentru M: $0 \notin M$.
$x = 5$ – nu este punct interior pentru M: $\forall\varepsilon > 0,\ (5-\varepsilon; 5+\varepsilon\,) \not\subset M$, deoarece $5+\varepsilon \notin M, \varepsilon \neq 2$.
$x = 7$ – nu este punct interior M: $\forall\, \varepsilon > 0, (7-\varepsilon; 7+\varepsilon) \not\subset M$.

Deci, toate punctele interioare ale mulțimii M aparțin lui M, dar din faptul, că $x \in M$ nu rezultă că x este punct interior al ei. Punctele, ce nu aparțin mulțimii M, nu pot fi puncte interioare pentru M.

Mulțimea punctelor interioare ale lui M se numeste interiorul mulțimii M și se notează $IntM$.

Pentru $= (0{,}5\ \,] \cup \{\,7\}$, $IntX = (0{,}5)$.

Definiția 2.3.2. Se zice că punctul $x_0 \in X$ este ***punct aderent*** al mulţimii $M \subset X$, dacă $S(x_0, \varepsilon) \cap M \neq \varnothing$ oricare ar fi $\varepsilon > 0$

***Definiţia 2.3.3.** Mulţimea tuturor punctelor aderente ale mulţimii M se numeşte **închiderea mulţimii** M şi se notează $\overline{\boldsymbol{M}}$.*

Definiția 2.3.4. *Punctul $x_0 \in X$ se numeşte* ***punct de frontieră*** *a mulţimii $A \subset X$, dacă pentru orice vecinătate $O(x_0, r)$ avem $O(x_0, r) \cap A \neq \emptyset$ şi $O(x_0, r) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$. Mulţimea tuturor punctelor de frontieră a mulţimii A se numeşte* ***frontieră*** *a mulţimii A şi se notează ∂X,sau $F_r A$.*

Punctele de frontieră pot aparține, dar pot să și nu aparțină mulțimii *X*. Relațiile între X și $F_r X$ sunt divere:

1. $X = [0,1]$, $F_r X = \{0,1\} \subset X$. .

2. $X = (0; 1]$, $F_r X = \{0,1\} \not\subset X$, $F_r X \cap X \neq \emptyset$,

$X = (0; 1)$, $F_r X = \{0,1\}$, $F_r X \cap X = \emptyset$

Definiția 2.3.5. *Punctul $x_0 \in X$ se numește* ***punct de acumulare*** *al mulțimii $A \subseteq X$ dacă pentru $\forall \varepsilon > 0$ $(S(x_0, \varepsilon) \setminus \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset$, adică un punct care are vecini oricât de apropiați în mulțimea dată.*

Un element al unei mulțimi care nu este punct de acumulare al mulțimii se numește ***punct izolat*** al mulțimii.

Pentru $M = (0,5\ ] \cup \{7\}$ punct izolat va fi numai punctul $x_0 = 7$.

Mulțimea poate să nu aibă puncte izolate: $X = (0,1)$.

Pentru o mulțimea o poate din puncte pot fi izolate: $X = [0; 1] \cup \{3\}$.

Mulțimea poate fi formată din puncte izolate $X = \{1,2,3\}$.

Definiţia 2.3.6. *Punctul $a \in X$ se numeşte* ***punct limită*** *al mulţimii $M \subset X$, dacă orice vecinătate a acestui punct conţine cel puţin un punct $x \in M$ diferit de a. Uşor se observată, că definiţia 10.4 este echivalentă cu următoarea:*

Definiţia 2.3.6´. *Punctul $a \in X$ se numeşte* ***punct limită*** *al mulţimii $M \subset X$, dacă orice vecinătate a acestui punct conţine o infinitate de puncte din mulţimea M.*

Din definiţia 2.3.6´ rezultă că o mulţime finită nu poate să aibă punct limită.

Definiţia 2.3.7. *Mulţimea tuturor punctelor limită ale mulţimii M se numeşte* ***mulţimea derivată*** *a lui M şi se notează cu M'.*

Pentru $M = (0,5\ ] \cup \{7\}$, $M' = [0; 5]$. $0 \in M'$, deoarece în $(-\varepsilon; \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ în dreapta se conțin o infinitate de puncte din M. $7 \notin M'$: într-o vecinătate destul de mică a punctului 7 din M există doar el însuși. Cum se vede în exemplu, nu toate punctele mulțimii *M* pot aparține lui M'. Însă, este posibil, ca M' să conțină puncte ce nu aparțin lui M. Punctele izolate nu aparțin lui M'. Toate punctele interioare sunt puncte limită, deoarece $Int\, M \subset M'$. Punctele de frontieră pot aparține lui M', pot să nu aparțină (în caz că sunt izolate). Punctul de frontieră sau este punct limită, sau izolat.

Pentru $x_0 \in M$ sunt posibile doar două cazur:

1. $\forall S(x_0)$ posedă punctul $x^* \in M$, $x^* \neq x_0$, atunci x_0 este punct de limită.
2. $\exists S(x_0)$ care, în afară de punctul x_0 nu posedă alte puncte din M. Atunci x_0 este punct izolat.

Aceste condiții sunt incompatibile. Este posibil, ca $M' = \emptyset$, dacă M constă doar din puncte izolate. Spre exemplu $X = \{1,2,3\}$.

Punctele adiacente sunt asemănătoare cu cele limită, dar nu se cere ca punctual din vecinătate să diferă de x_0. Deaceea punctul limită este punct aderent. $X = [0; 1] \cup \{3\}$, $3 \in \bar{X}$, însă $3 \notin \bar{X}$.

De asemenea $X \subset \bar{X}$, deoarece poate fi luat însuși punctual $x_0 \in X$. Punctele izolate aparțin lui X, însă nu aparțin lui X'. Punctele de frontieră aparțin lui $\bar{X}$: $F_r X \subset X$, deoarece în orice vecinătate a sa posedă puncte din X.

Pentru $X = (0; 5\,] \cup \{7\}$, $\bar{X} = [0,5] \cup \{7\}$.

Să stabilim legătura între aceste puncte speciale.

Teorema 2.3.1. *Punctul $x \in X$ este un punct aderent al mulţimii M (adică $x \in \bar{M}$), dacă şi numai dacă există un şir $\{x_n\}_1^\infty \subset M$, convergent către x.*

Demonstraţie. Dacă x este un punct aderent al mulţimii M, atunci

$$S\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap M \neq \emptyset \quad (n = 1,2,\dots,).$$

Alegem câte un punct $x_n \in S\left(x,\ \frac{1}{n}\right) \cap M \neq \emptyset$ şi obţinem şirul $\{x_n\}_1^\infty \subset M$ cu $\rho(x_n, x) < \frac{1}{n} \to 0$, adică $x_n \to x$.

Reciproc, fie $x_n \in M$, $x_n \to x$. Din definiţia limitei unui şir de puncte ale spaţiului metric rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ toţi termenii şirului $\{x_n\}_1^\infty \subset M$, cu excepţia unui număr finit de termeni, aparţin sferei $S(x, \varepsilon)$. Prin urmare $S(x, \varepsilon) \cap M \neq 0$ şi deci x este un punct aderent al mulţimii M.

Teorema 2.3.2. *Mulţimea M este închisă dacă şi numai dacă pentru orice şir* $\{x_n\}_1^\infty \subset M$ *,* $x_n \to x$ *implică* $x \in M$*.*

Teorema 2.3.3. $x_0 \in X'$ $\Leftrightarrow$ *există două șiruri distincte de puncte din* X*, ce converg către* x_0.

Teorema 2.3.4. *Mulțimea* X' *constă cu exactitate din toate limitele tuturor șirurile distincte de puncte ale mulțimii X.*

Teorema 2.3.5. *(Weierstrass-Bolzano). O submulțime mărginită și infinită de numere reale are cel puțin un punct de acumulare*.

Exemplu 1. $X = \{1, 2,3,4,5\}$ în R - mărginită, dar finită, $X' = \emptyset$.

Exemplul 2. $X = N$ – infinită, dar nemărginită, $X' = \emptyset$.

2.4. MULȚIMI DESCHISE

Definiţia 2.4.1. Mulţimea G se numeşte ***mulţime deschisă***, dacă toate punctele ei sunt interioare.

Astfel, mulțimea G este deschisă dacă și numai dacă, ea coincide cu interiorul său: $G = IntG$.

Exemple:

1) $(a; b)$ este deschisă în R;
2) $[a;b)$ nu este deschis în R: $x = a \in [a;b)$ - nu este punct interior;
3) Cercul $x^2 + y^2 < r^2$ este deschis în R^2;
4) Mulțimea din puncte izolate, în particular, este finită – nedeschisă.

Proprietățile mulțimilor deschise:

1. Tot spațiul R^n este deschis.

Toate punctele sale sunt interioare.

2. Mulțimea vidă este mulțime deschisă.

Nu posedă puncte interioare.

3. Orice intersecție de două mulțimi deschise este o mulțime deschisă.
4. $S(a, r)$ este o mulţime deschisă. Într-adevăr, fie $x_0 \in S(a, r)$. Într-adevăr, fie $x_0 \in S(a, r)$. Punem $r_1 = r - \rho(x_0, a) > 0$ şi vom arăta că $S(x_0, r_1) \subset S(a, r)$. Dacă $x \in S(x_0, r_1)$, atunci $\rho(x, a) \le \rho(x, x_0) + \rho(x_0, a) < r_1 + \rho(x_0,$

$a) = r$, adică $x \in S(a, r)$. Prin urmare, sfera $S(a, r)$ împreună cu orice punct x_0 conţine şi o vecinătate a acestui punct şi deci mulţimea este deschisă.

5. Reuniunea oricărei familii de mulţimi deschise este o mulţime deschisă.

Fie $\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$ un sistem de mulţimi deschise şi

$$G = \bigcup_{\alpha\in A} G_\alpha.$$

Dacă $x_0 \in G$, atunci x_0 aparţine cel puţin unei mulţimi G_{α_0}. Mulţimea G_{α_0}, fiind deschisă, conţine o sferă $S(x_0, r)$. Însă $G \supset G_{\alpha_0} \supset S(x_0, r)$ şi deci mulţimea G este deschisă.

6. Intersecţia unui număr finit de mulţimi deschise este o mulţime deschisă.

Fie acum

$$G = \bigcap_{j=1}^{m} G_j ,$$

unde G_j sunt mulţimi deschise.

Dacă $x_0 \in G$, atunci $x_0 \in G_j$ şi deci există $\varepsilon_j > 0$, astfel încât $G_j \supset S(x_0, \varepsilon_j)$, $j =$ l, 2, ..., m. Pentru

$$\varepsilon = \min_{l\leq j\leq m} \varepsilon_j > 0$$

avem: $S(x_0, \varepsilon) \subset S(x_0, \varepsilon_j) \subset G_j$ ($j =$ l, 2, ..., m) şi deci

$$S(x_0, \varepsilon) \subset \bigcap_{j=1}^{m} G_j = G.$$

Aşadar, mulţimea G conţine punctul x_0 împreună cu o vecinătate $S(x_0, \varepsilon)$ şi deci orice $x_0 \in G$ este un punct interior al acestei mulţimi, adică G este deschisă.

Observație 2.4.1. *Intersecția infinită, în particular, mulțimii numărabile de mulțimi deschise, poate să nu fie deschisă.*

Exemplu. R; $\bigcup_{m=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{m};\frac{1}{m}\right) = \{0\}$ nu sunt deschise.

Definiție. Mulțimea, care reprezintă intersecția mulțimii numărabile de mulțimi deschise, se numește *mulțime de tipul* G_δ.

În particular, dacă $X = \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i$, $G_i = G, \forall i \in N$, atunci mulțimea deschisă la fel este mulțime de tipul G_δ.

2.5. MULȚIMI ÎNCHISE

Definiția 2.5.1. Se zice că mulţimea M este **închisă** dacă ea conține toate punctele sale aderente: $\overline{\mathrm{M}} = \mathrm{M}$

Doarce $\overline{M} \supset M$, atunci M este închisă $\Leftrightarrow \overline{M} = M$.

Exemple:

1) $[a; b]$ este închisă în R;
2) $[a;b)$ nu este închisă în R: $x_0 = b$ –punct de aderență, care nu aparține mulțimii date;
3) mulțimea, ce constă doar din puncte isolate, în particular, mulțimea finită, este închisă.

Teorema 2.5.1. *Mulţimea M este închisă dacă şi numai dacă pentru orice şir* $\{x_n\}_1^\infty \subset M$, $x_n \to x$ *implică* $x \in M$.

Demonstrație. Fie M o mulţime închisă şi $\{x_n\}_1^\infty \subset M$, $x_n \to x$. Punctul x este un punct de aderenţă al mulţimii M, adică $x \in \overline{M}$. Însă $\overline{M} = M$ şi deci $x \in M$.

Reciproc, fie că M posedă proprietatea: $\{x_n\}_1^\infty \subset M$, $x_n \to x$ implică $x \in M$. Aceasta înseamnă că M conţine toate punctele de aderenţă şi deci $\overline{M} \subset M$.

Deoarece incluziunea $M \subset \overline{M}$ este evidentă, rezultă că $M = \overline{M}$, adică M este mulţime închisă.

Consecinţă 2.5.1. *Orice sferă închisă*

$$\bar{S}(a,r) = \{x \in X: \rho(x,a) \leq r\}$$

este o mulţime închisă în spaţiul metric X.

Într-adevăr, fie $x_n \in \bar{S}(a,r)$, $x_n \to x$. Utilizând continuitatea distanţei obţinem

$$\rho(x,a) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n,a) \le r$$

şi deci $x \in \bar{S}(a,r)$.

***Teorema* 2.5.2.** *În orice spaţiu metric X complementara oricărei mulţimi deschise (închise) este o mulţime închisă (deschisă).*

Demonstraţie. Fie mulţimea G deschisă, $x_n \in F = X \mid G$, $x_n \to x$. Admitem că $x \notin F$. Atunci $x \in X \mid F = G$ şi deci există o sferă $S(x, \varepsilon) \subset G$. Însă $x_n \to x$ şi deci $x_n \in S(x, \varepsilon)$ $(n \ge n_0)$. Prin urmare $x_n \in G$ $(n \ge n_0)$, ceea ce este imposibil. Rezultă că $x \in F$. Conform teoremei 2.5.1 mulţimea F este închisă.

Fie acum F o mulţime închisă. Să demonstrăm că $G = X \setminus F$ este deschisă. Admitem contrariul. Atunci nu orice punct al mulţimii G este interior şi deci există $a \in G$, astfel încât orice vecinătate $S(a, \varepsilon)$ nu se include în G. Prin urmare, $S(a, \varepsilon) \cap F \ne 0$ $(\forall \varepsilon > 0)$, ceea ce arată că $a \in \bar{F}$. Însă $\bar{F} = F$ şi deci $a \in F$, adică punctul a aparţine atât mulţimii G cât şi complementarei F a acestei mulţimi. Contradicţie. Deci mulţimea G este deschisă.

***Teorema* 2.5.3**. *Intersecţia oricărei familii de mulţimi închise este o mulţime închisă. Reuniunea unui număr finit de mulţimi închise este o mulţime închisă.*

Demonstraţie. Fie $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ un sistem de mulţimi închise şi $F = \bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha$. Avem

$$X \setminus F = X \setminus (\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in A} (X \setminus F_\alpha)$$

Mulţimile $X \setminus F_\alpha$ sunt deschise şi deci $X \setminus F$ este deschisă. Însă atunci mulţimea $F = X \setminus (X \setminus| F)$ este închisă.

În mod analog, dacă F_j $(j = 1, 2, ..., m)$ sunt mulţimi închise şi

$$F = \bigcup_{j=1}^{m} F_j,$$

atunci

$$\mathrm{F} = \mathrm{X} \backslash \left(\bigcap_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{m}} \left(X \backslash F_j \right) \right).$$

De aici imediat rezultă partea a doua a teoremei.

În continuare menţionăm câteva proprietăţi ale operaţiei de închidere.

***Teorema* 2.5.4.** *Pentru orice mulţimi din spaţiul metric X avem*

a) $M_1 \subset M_2 \Longrightarrow \overline{M_1} \subset \overline{M_2}$;

b) $\overline{M_1 \cup M_2} = \overline{M_1} \subset \overline{M_2}$;

c) $\overline{M_1 \cap M_2} \subset \overline{M_1} \cup \overline{M_2}$;

d) $\overline{(\overline{M})} = M$.

Demonstraţie. Proprietăţile a) - c) se verifică fără dificultate. Vom demonstra proprietatea d). Incluziunea $\overline{M} \subset \overline{(\overline{M})}$ este evidentă. Să demonstrăm incluziunea inversă. Fie $a \in \overline{(\overline{M})}$. Avem

$$S(a, r) \cap \overline{M} \neq \emptyset$$

oricare ar fi $r > 0$. Fie $x_0 \in S(a, r) \cap \overline{M}$. Sfera $S(a, r)$, fiind o mulţime deschisă, există $S(x_0, r_1) \subset S(a, r)$. Însă $x_0 \in \overline{M}$ şi deci $S(x_0, r_1) \cap M \neq \emptyset$. De aici şi din incluziunea $S(x_0, r_1) \subset S(a, r)$ rezultă că $S(a, r) \cap M \neq \emptyset$. Numărul $r > 0$ este arbitrar şi deci $a \in \overline{M}$. Prin urmare $\overline{(\overline{M})} = \overline{M}$.

***Consecinţă* 2.5.2**. *Închiderea oricărei mulţimi este o mulţime închisă.*

Mulţimea M se numeşte mulţime de tipul F_σ dacă se poate scrie sub forma unei reuniuni numărabile de mulţimi închise ale lui X.

2.6. MULŢIMI DESCHISE ŞI MULŢIMI ÎNCHISE PE DREAPTĂ

Structura mulţimilor deschise şi a celor închise în spaţii metrice poate fi destul de complicată. Aceasta se referă şi la mulţimile deschise şi acele închise chiar şi în cazul spaţiului $\mathbb{R}^n (n > 1)$. Totuşi, dacă $n = 1$, adică pe dreapta $\mathbb{R}$, structura mulţimilor deschise şi a mulţimilor închise poate fi complet descrisă.

2.6.1. STRUCTURA MULŢIMILOR ÎNCHISE PE DREAPTĂ.

Teorema 2.6.1. *Orice mulţime de intervale pe dreaptă, care două câte două nu se intersectează, este finită sau numărabilă.*

Demonstraţie: Fie $A = \{\delta\}$ o mulţime oarecare de intervale $\delta \subset \mathbb{R}$, ce nu se intersectează două câte două. Considerăm mulţimea tuturor numerelor raţionale de pe dreapta $\mathbb{R}$:

$$Q = \{r_1, r_2, \dots, r_n, \dots\}$$

Mulţimea Q este numărabilă. Fie $\delta \in A$ un interval oarecare. El conţine o infinitate de numere raţionale $r_n \in Q$. Să fixăm unul dintre aceste numere r_{n_1}, iar intervalul δ îl renotăm cu δ_{n_1}. Pe alt interval din A se va găsi un număr raţional r_{n_2}. Intervalul respectiv îl notăm cu δ_{n_2}. E clar, că $n_1 \neq n_2$, deoarece în caz contrar $r_{n_1} = r_{n_2}$ şi $\delta_{n_1} \cap \delta_{n_2} = \{r_{n_1}\}$. Însă, aceasta contrazice ipotezei din teoremă că intervalele nu se intersectează două câte două.

Prelungind acest proces nemărginit, obţinem că A se reprezintă astfel:

$$A = \{\delta_{n_1}, \delta_{n_2}, \dots, \delta_{n_k}, \dots\} \tag{2.6.1}$$

Deoarece o submulţime $\{n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\}$ de numere naturale poate fi cel mult numărabilă, apoi din reprezentarea (2.6.1) rezultă că mulţimea A este finită sau numărabilă. Teorema este demonstrată.

Să trecem acum la cercetarea structurii mulţimilor închise de pe $\mathbb{R}$. Mai întâi vom examina condiţia *necesară* ca o mulţime să fie închisă. Aşa dar, fie F o mulţime oarecare de pe dreapta $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$. Sunt posibile două cazuri:

1. *F coincide cu dreapta* $\mathbb{R}$. În acest caz structura mulţimii F e clară – mulţimea F este întreaga dreaptă.
2. *F nu coincide cu dreapta* $\mathbb{R}$. Aceasta înseamnă că pe dreapta $\mathbb{R}$ există puncte ce nu aparţin mulţimii F. Fie x_0 un astfel de punct: $x_0 \notin F$. Considerăm mulţimile:

$$F_1 = \{x \in F, x < x_0\} \text{ şi } F_2 = \{x \in F, x > x_0\}.$$

Vom demonstra că F_1 şi F_2 sunt închise. Fie, de exemplu, ξ un punct limită a mulţimii F_1. Trebuie să arătăm că $\xi \in F_1$. Aşa cum $F_1 \subset F$, urmează că ξ este punct limită pentru F şi, din condiţia că F e închisă, rezultă că $\xi \in F$. Evident că $\xi \in (-\infty, x_0]$, fiindcă $F_1 \subset (-\infty, x_0)$. Deoarece $x_0 \notin F$, avem că $x_0 \neq \xi$. Prin urmare, $-\infty < \xi < x_0$, adică $\{\xi \in F, -\infty < \xi < x_0\}$, deci $\xi \in F_1$. În mod analog se demonstrează că F_2 e închisă.

Mulţimea F_1, ca mulţime închisă şi mărginită superior, are margine superioară exactă: $F_1 \ni \alpha = sup\, F_1 < x_0$. Analog, există $F_2 \ni \beta = inf\, F_2 > x_0$. Este clar, că în intervalul $\delta = (\alpha, \beta)$ nu este situat nici un punct din mulţimea F, fiindcă δ nu conţine puncte nici din F_1, nici din F_2.

Concluzia 2.6.1. *Dacă punctul $x_0 \notin F$, atunci el nu aparţine acestei mulţimi împreună cu un interval (α, β), capetele căruia aparţin mulţimii F.*

Astfel de intervale se numesc *intervale alăturate mulţimii închise F.*

Observaţia 2.6.1. *Să presupunem că F este închisă şi mărginită superior şi punctul x_0 e situat la dreapta de mulţimea F. În acest caz $F_2 = \emptyset$ şi intervalul $(\alpha, +\infty)$ va fi alăturat mulţimii F. $(\alpha = \sup F \in F)$. Dacă însă F este mărginită inferior, atunci intervalul $(-\infty, \beta)$ va fi alăturat mulţimii închise F. Dacă mulţimea închisă F este mărginită inferior şi superior, atunci există două intervale infinite $(-\infty, a)$ şi $(b, +\infty)$ alăturate mulţimii F, iar celelalte intervale alăturate submulţimii F sunt situate pe segmentul $[a, b]$, care este cel mai mic segment ce conţine mulţimea F.*

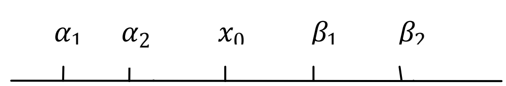
Concluzia 2.6.2. *Orice punct x_0 ce nu aparţine mulţimii închise F numaidecât aparţine unui interval δ alăturat mulţimii F.*

Teorema 2.6.2. *Oricare două intervale, alăturate mulţimii închise F, nu se intersectează.*

Demonstraţie: Presupunem contrariul: $x_0 \in \delta_1 \cap \delta_2$, unde $\delta_1 = (\alpha_1, \beta_1)$ şi $\delta_2 = (\alpha_2, \beta_2)$ sunt intervale alăturate mulţimii F. Fie, de exemplu,$\alpha_1 < \alpha_2$. Evident, $\alpha_2 < x_0 < \beta_1$. Prin urmare,$\alpha_1 < \alpha_2 < \beta_1$, adică $\alpha_2 \in (\alpha_1, \beta_1)$, ceea ce e imposibil, deoarece δ_1 şi δ_2 sunt intervale alăturate ((α_1, β_1) nu conţine nici un punct din F, pe când $\alpha_2 \in F$). Aşa dar, $\alpha_1 \geq \alpha_2$. Presupunând că $\alpha_2 < \alpha_1$, vom obţine $\alpha_2 < \alpha_1 < \beta_2$, ceea ce e imposibil. Rămâne că $\alpha_2 \geq \alpha_1$. Din relaţiile obţinute, concludem că $\alpha_1 = \alpha_2$. Analog se demonstrează că $\beta_1 = \beta_2$. Aşa dar, dacă două intervale alăturate au un punct comun, atunci ele coincid.

Luând în consideraţie teorema 2.6.1, obţinem,

Teorema 2.6.3. *Mulţimea tuturor intervalelor alăturate mulţimii închise F este finită sau numărabilă.*



Să formulăm rezultatele obţinute mai sus în formă de teoreme:

Teorema 2.6.4. *Orice mulţime închisă* F *pe dreaptă sau coincide cu însăşi dreapta, sau se obţine din dreaptă prin eliminarea din ea a unei mulţimi finite sau numărabile de intervale alăturate lui* F.

Teorema 2.6.5. *Orice mulţime închisă şi mărginită* F *reprezintă un segment, sau se obţine din cel mai mic segment* $[a, b]$ *ce conţine mulţimea* F, *prin eliminarea din el a unui număr finit sau numărabil de intervale alăturate mulţimii* F.

Structura mulţimilor închise pe dreapta $\mathbb{R}$ va deveni pe deplin clară, dacă vom demonstra următoarea teoremă inversă.

Teorema 2.6.6. *Orice mulţime* F, *obţinută prin eliminarea din axa numerică* $\mathbb{R}$ *sau dintr-un careva segment* $[a, b]$, *a unei mulţimi finite sau numărabile de intervale, ce nu se intersectează două câte două, este o mulţime închisă, iar intervalele eliminate sunt alăturate mulţimii* F.

Demonstraţie: Să eliminăm din dreapta $\mathbb{R}$ o mulţime finită sau numărabilă de intervale $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k, \dots$, $\delta_i \cap \delta_k = \emptyset$. Mulţimea de puncte rămase o notăm cu$F$. Vom demonstra că F este o mulţime închisă, adică F conţine toate punctele sale limită, sau (ce este aceeaşi afirmaţie) că orice punct ce nu aparţine mulţimii F nu poate fi punct limită pentru F.

Aşa dar, fie $\xi \notin F$. Atunci,$\xi \in \delta_k$ pentru un oarecare k. Aşa cum δ_k nu conţine puncte din F, apoi ξ nu poate fi un punct limită pentru mulţimea F. Deci, dacă F are puncte limită, apoi ele numaidecât aparţin mulţimii F, adică F este închisă.

Fie F construită pe baza segmentului$[a, b]$ şi fie $\xi \in \mathbb{R} \setminus F$. Atunci ξ, sau e situat în afara segmentului $[a, b]$, sau aparţine unuia dintre intervalele eliminate. Prin urmare, ξ nu poate fi punct limită pentru mulţimea F situată pe segmentul $[a, b]$, de unde rezultă că F e închisă.

Intervalele eliminate vor fi alăturate mulţimii F, fiindcă ele nu conţin puncte din F, iar capetele rămân în F (rezultă din definiţia intervalului alăturat). Mai mult ca atât, capetele intervalelor nu vor fi eliminate nici de alte intervale, fiindcă intervalele eliminate nu se intersecteazădouă câte două.

Teorema este demonstrată.

2.6.2. STRUCTURA MULŢIMILOR DESCHISE PE DREAPTĂ.

Fie G o mulţime deschisă pe dreapta ℝ. Atunci $F = \mathbb{R} \setminus G$ este o mulţime închisă şi deci, G reprezintă complementara unei mulţimi închise: $G = \mathbb{R} \setminus G$. După cum s-a arătat în p. 2.6.1, G constă din intervale alăturate mulţimii închise F şi care nu se intersectează două câte două. Aşa dar, are loc următoarea teoremă.

Teorema 2.6.7. *Orice mulţime deschisă G reprezintă reuniunea unei mulţimi finite sau numărabile de intervale, care două câte două nu se intersectează, iar capetele lor nu aparţin mulţimii G.*

Este adevărată şi teorema inversă.

Teorema 2.6.8. *Orice mulţime G, care poate fi reprezentată ca reuniunea unei mulţimi de intervale, este o mulţime deschisă.*

Teoremele 2.6.4, 2.6.5, 2.6.6 şi 2.6..7, 2.6.8 pe deplin ne descriu structura mulţimilor închise şi a mulţimilor deschise pe o dreaptă (sau, se mai spune, a mulţimilor liniare).

Un exemplu interesant de mulţimi deschise este mulţimea lui Cantor G_0. Această mulţime reprezintă reuniunea unei mulţimi numărabile de intervale.

2.7. MULŢIMI COMPACTE

În analiza matematică un rol important îi revine teoremei Bolzano-Weierstrass despre posibilitatea extragerii unui subşir convergent din orice şir numeric mărginit. În spaţiile metrice arbitrare astfel de posibilitate nu este, adică există mulţimi mărginite ce nu conţin subşiruri convergente. De exemplu, în spaţiul l_p $(l \leq p < \infty)$ mulţimea $M = \{e_n\}_1^{\infty}$, $(e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0))$ evident este mărginită, însă $\rho(e_i, e_j) = 2^{\frac{1}{p}}$ şi deci orice subşir al şirului $\{e_n\}_1^{\infty}$ nu este fundamental şi, prin urmare, nu este nici convergent.

În legătură cu aceasta, în spaţiile metrice se introduce noţiunea de mulţime relativ compactă.

Definiţia 2.7.1. *Mulţimea M din spaţiul metric X se numeşte* **relativ compactă,** *dacă din orice şir* $\{x_n\}_1^\infty \subset M$ *se poate extrage un subşir convergent* $\{x_{n_k}\}_1^\infty$.

Definiţia 2.7.2. *Mulţimea M se numeşte* ***compactă****, dacă din orice şir* $\{x_n\}_1^\infty$ $\subset M$ *se poate extrage un subşir* $\{x_{n_k}\}_1^\infty$ *convergent la un punct* $x_0 \in M$.

Se vede uşor că mulţimea *M* este compactă, dacă şi numai dacă ea este relativ compactă şi închisă.

Exemple. În spaţiul metric $X = R$:

a) mulţimea $M = (a, b)$ este relativ compactă, însă nu este compactă;
b) $M = [a, b]$ este mulţime compactă;
c) $M = N$ nu este relativ compactă (şirul $\{x_n\}_1^\infty$, $x_n = n$ nu conţine subşiruri convergente).

Teorema 2.7.1. *Orice mulţime relativ compactă este mărginită.*

Demonstraţie. Fie *M* o mulţime relativ compactă în spaţiul metric *X*. Admitem că *M* nu este mărginită. Atunci pentru orice $n \in N$ şi $a \in X$ mulţimea *M* nu se conţine în sfera $S(a, n)$. Deci există $x_n \in M$, $x \notin S(a, n)$, adică $\rho\,(a, x_n) \geq n$ ($n = 1, 2, \ldots$). Şirul $\{x_n\}_1^\infty$ conţine un subşir convergent $\{x_{n_k}\}_1^\infty$. Fie

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0.$$

Din continuitatea distanţei în spaţiul metric avem

$$\lim_{k\to\infty} \rho\left(x_{n_k}, a\right) = \rho(x_0, a).$$

Pe de altă parte $\rho\left(x_{n_k}, a\right) \geq n_k$ ($k = 1, 2, \ldots$) şi deci

$$\lim_{k\to\infty} \rho\left(x_{n_k}, a\right) = \infty,$$

ceea ce este imposibil. Contradicţie.

***Observaţie* 2.7.1.** *Exemplul de la începutul paragrafului ne arată că afirmaţia reciprocă teoremei 2.7.1 nu este adevărată în cazul spaţiilor metrice arbitrare.*

Pentru spaţiile R^m şi C^m este adevărată :

***Teorema* 2.7.2.** *Mulţimea $M \subset R^m$ (sau $M \subset C^m$) este relativ compactă, dacă şi numai dacă ea este mărginită.*

***Teorema* 2.7.3.** *Intersecţia unui şir descrescător de mulţimi compacte nevide $\{F_n\}_1^\infty$ este o mulţime compactă nevidă. Dacă diametrul mulţimilor F_n tinde la zero, intersecţia lor se reduce la un punct.*

***Definiţia* 2.7.3.** *Fie $\varepsilon > 0$ un număr pozitiv arbitrar. Mulţimea A din spaţiul metric X se numeşte ε - reţea pentru mulţimea $M \subset X$, dacă pentru orice $x \in M$ există $y \in A$, astfel ca $\rho(x, y) < \varepsilon$.*

Cu alte cuvinte, mulţimea *A* este o ε - reţea pentru mulţimea *M*, dacă orice element *x* din *M* poate fi aproximat cu elemente din *A* cu precizie de ε> 0 .

***Definiţia* 2.7.4.** *Se spune că mulţimea $M \subset X$ este **total mărginită**, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr finit de puncte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ din M, astfel încât*

$$M \subset \bigcup_{k=1}^{n} S(x_k, \varepsilon).$$

Se vede uşor că este adevărată :

***Teorema* 2.7.4.** *Mulţimea $M \subset X$ este total mărginită, dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există o ε - reţea finită pentru această mulţime.*

Demonstraţie.

Necesitatea. Fie mulţimea *M* total mărginită şi ε > 0. Avem

$$M \subset \bigcup_{k=1}^{n} S(x_k, \varepsilon)$$

şi deci pentru orice $x \in M$ există o sferă $S(x_{k_0}, \varepsilon)$, care conţine x. De aici $\rho(x, x_{k_0}) < \varepsilon$ şi, prin urmare, mulţimea $A = \{x_k\}_1^n$ este o ε - reţea finită pentru mulţimea *M*.

Suficienţa. Fie că pentru orice ε > 0 există o ε - reţea finită pentru mulţimea *M*. Notăm această ε-reţea prin $A = \{x_k\}_1^n$. Deci pentru orice $x \in M$ există $x_j \in A$ astfel încât $\rho(x, x_j) < \varepsilon$, ceea ce implică

$$x \in S(x_j, \varepsilon) \subset \bigcup_{k=1}^{n} S(x_k, \varepsilon).$$

De aici

$$M \subset \bigcup_{k=1}^{n} S(x_k, \varepsilon),$$

adică *M* este total mărginită.

***Teorema* 2.7.5.** *(Hausdorff). Pentru ca mulţimea M din spaţiul metric X să fie relativ compactă este necesar, iar dacă spaţiul X este complet, atunci şi suficient, ca M să fie total mărginită.*

Demonstraţie.

Necesitatea. Fie mulţimea *M* relativ compactă şi ε > 0. Luăm un $x_1 \in M$. Dacă $M \not\subset S(x_1, \varepsilon)$, atunci există $x_2 \in M$, $x_2 \notin S(x_1, \varepsilon)$ şi deci $\rho(x_1, x_2) \geq \varepsilon$. Dacă

$$M \not\subset \bigcup_{k=1}^{2} S(x_k, \varepsilon),$$

atunci există

$$x_3 \notin \bigcup_{k=1}^{2} S(x_k, \varepsilon),$$

$x_3 \in M$ şi deci $\rho(x_1, x_3) \geq \varepsilon$, $\rho(x_2, x_3) \geq \varepsilon$. Prelungim acest proces de extragere din mulţimea M a elementelor x_k. Fie că putem extrage o mulţime infinită de astfel de elemente diferite $\{x_k\}_1^\infty \in M$. Atunci

$$\rho\left(x_k, x_j\right) \geq \varepsilon > 0 \quad (k \neq j). \tag{2.7.1}$$

Mulţimea M fiind relativ compactă, există un subşir $\left\{x_{k_i}\right\}_1^\infty$ convergent şi deci fundamental. Prin urmare, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $i_0 \in N$, astfel încât $\rho\left(x_{k_i}, x_{k_m}\right) < \varepsilon$ $(i, m \geq i_0)$, ceea ce este în contradicţie cu inegalitatea (2.7.1). De aici rezultă, că există un sistem finit $\{x_k\}_1^n$ cu proprietatea

$$M \subset \bigcup_{k=1}^{n} S(x_k, \varepsilon).$$

Suficienţa. Fie spaţiul X complet şi mulţimea $M \subset X$ total mărginită, iar $\{x_n\}_1^\infty \subset M$. Să luăm un şir de numeric $\varepsilon_n > 0$; $\varepsilon_n \to 0$. Mulţimea M fiind total mărginită, avem

$$M \subset \bigcup_{j=1}^{m_1} S\left(z_j^{(1)}, \varepsilon_1\right)$$

şi deci măcar una din aceste sfere conţine un subşir al şirului $\{x_n\}_1^\infty$. Notăm acest subşir prin $\left\{x_n^{(1)}\right\}_1^\infty$. Deoarece M este total mărginită, există $\left\{z_j^{(2)}\right\}_1^{m_2} \subset M$ astfel încât

$$M \subset \bigcup_{j=1}^{m_2} S\left(z_j^{(2)}, \varepsilon_2\right)$$

şi deci măcar una din sferele $S\left(z_j^{(2)}, \varepsilon_2\right)$ conţine un subşir al şirului $\left\{x_n^{(1)}\right\}_1^\infty$. Notăm acest subşir prin $\left\{x_n^{(2)}\right\}_1^\infty$. Prelungim acest proces la nesfârşit şi obţinem şirurile $\left\{x_n^{(i)}\right\}_{n=1}^\infty$ $(i = 1, 2, ...)$ cu proprietăţile:

1. Fiecare şir $\left\{x_n^{(i+1)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ este un subşir al şirului $\left\{x_n^{(i)}\right\}_{n=1}^{\infty}$;
2. $\left\{x_n^{(i)}\right\}_{n=1}^{\infty} \subset S\left(z_j^{(i)}, \varepsilon_i\right)$.

Formăm şirul „diagonal" $\left\{x_n^{(n)}\right\}_1^{\infty}$, adică primul element din primul şir, al doilea element din al doilea şir ş.a.m.d. Să arătăm că acest şir este fundamental. Fie ε > 0. Deoarece $\left\{x_i^{(i)}\right\}_1^{\infty}$ şi $\left\{x_{i+k}^{(i+k)}\right\}_1^{\infty}$ ($k \in N$) sunt elemente din şirul $\left\{x_n^{(i)}\right\}_{n=1}^{\infty}$, rezultă că $\left\{x_i^{(i)}\right\}_1^{\infty}, \left\{x_{i+k}^{(i+k)}\right\}_1^{\infty} \subset S\left(z_j^{(i)}, \varepsilon_i\right)$ şi deci $\rho\left(x_i^{(i)}, x_{i+k}^{(i+k)}\right) < 2\varepsilon_i$ ($k \in N$).

Întrucât

$$\lim_{i\to\infty} \varepsilon_i = 0,$$

rezultă că există $i_0 \in N$ astfel încât $\varepsilon_i < \frac{\varepsilon}{2}$ $(i \geq i_0)$ şi deci pentru orice $i \geq i_0$ şi orice $k \in N$ avem $\rho\left(x_i^{(i)}, x_{i+k}^{(i+k)}\right) < 2\varepsilon_i < \varepsilon$. Prin urmare, şirul $\left\{x_i^{(i)}\right\}_1^{\infty}$ este fundamental. Spaţiul X fiind complet, rezultă că $\left\{x_i^{(i)}\right\}_1^{\infty}$ este convergent. Ne-a mai rămas să observăm , că $\left\{x_i^{(i)}\right\}_1^{\infty}$ este un subşir al şirului $\{x_n\}_1^{\infty}$.

Consecinţa 2.7.1. *Pentru ca mulţimea M din spaţiul metric complet X să fie relativ compactă, este suficient ca pentru orice ε > 0 să existe o ε - reţea relativ compactă a mulţimii M.*

Fie ε > 0 şi B – o $\frac{\varepsilon}{2}$ – reţea relativ compactă a mulţimii M. Pentru orice $x \in M$ există $y \in B$ cu $\rho(x,y) < \frac{\varepsilon}{2}$. Din teorema Hausdorff există o $\frac{\varepsilon}{2}$ - reţea finită A pentru mulţimea B şi deci există $z \in A$ astfel încât $\rho(y,z) < \frac{\varepsilon}{2}$. Avem

$$\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Prin urmare mulţimea A formează o ε - reţea finită pentru mulţimea M. Din teoremele 2.7.4 şi 2.7.5 rezultă ca M este relativ compactă.

***Consecinţa* 2.7.2.** *Orice spaţiu metric compact X este separabil.*

Fie $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \to 0$. Din teorema Hausdoff rezultă existenţa elementelor $\left\{z_i^{(n)}\right\}_{i=1}^{m(n)}$, astfel încât

$$X = \bigcup_{i=1}^{m(n)} S\left(z_i^{(n)}, \varepsilon_n\right).$$

Notăm

$$A_n = \left\{z_i^{(n)}\right\}_{i=1}^{m(n)}, \qquad A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Mulţimea A este cel mult numărabilă (ca reuniunea unei mulţimi numărabile de mulţimi finite). Ea este şi peste tot densă. Într-adevăr, fie $x \in X$, $\varepsilon > 0$. Alegem $\varepsilon_{n_0} < \varepsilon$ şi deoarece

$$X = \bigcup_{i=1}^{m(n_0)} S\left(z_i^{(n_0)}, \varepsilon_{n_0}\right)$$

avem: există o sferă $S\left(z_{i_0}^{(n_0)}, \varepsilon_{n_0}\right)$ ce conține x , deci $\rho\left(x, z_{i_0}^{(n_0)}\right) < \varepsilon_{n_0} < \varepsilon$. Prin urmare $x \in \bar{A}$ și deci A este peste tot densă.

2.8.CRITERIUL DE COMPACITATE ÎN SPAŢIUL *C*[*A, B*]

***Definiţia* 2.8.1.** *Funcţiile mulţimii $M \subset C[a, b]$ se numesc egal continue (sau echicontinue), dacă pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $\delta > 0$ astfel încât relaţiile $t', t'' \in [a, b]$, $|t' - t''| < \delta$ implică $|x(t') - x(t'')| < \varepsilon$ oricare ar fi funcţia $x \in M$.*

Exemple .

1. Dacă mulţimea $M \subset C[a, b]$ este finită, atunci funcţiile acestei mulţimi sunt egal continue. Într-adevăr, fie $M = \{x_j\}_1^m \subset C[a,b]$ şi $\varepsilon > 0$. Conform teoremei Cantor fiecare din funcţiile x_j este uniform continuă pe $[a, b]$ şi deci există $\delta_j > 0$, astfel încât $t', t'' \in [a, b]$, $|t' - t''| < \delta_j$ implică $|x_j(t') - x_j(t'')| < \varepsilon$. Se vede uşor că

$$\delta = \min_{1 \leq j \leq m} \delta_j > 0$$

satisface condiţiei din definiţia mulţimii de funcţii egal continue.

2. Fără dificultate se constată că funcţiile mulţimii $M = \{sin\ nt\}_1^\infty \subset C[0,1]$ nu sint egal continue (punem, de exemplu, $t' = 0$, $t'' = \frac{\pi}{2n}$, $\varepsilon = \frac{1}{2}$).

Definiţia 2.8.2. *Mulţimea $M \subset C[a,b]$ se numeşte uniform mărginită, dacă există o constantă $\alpha > 0$, astfel încât pentru orice $x \in M$ şi orice $t \in [a, b]$ avem $|x(t)| \leq \alpha$.*

Teorema 2.8.1. (Arzelà-Ascoli). *Mulţimea $M \subset C[a,b]$ este relativ compactă, dacă şi numai dacă ea este uniform mărginită şi funcţiile acestei mulţimi sunt egal continue.*

*Demonstraţie***.** *Necesitatea*. Fie $M \subset C[a,b]$ o mulţime relativ compactă şi deci mărginită în spaţiul metric $C[a,b]$, adică există $\alpha > 0$ astfel încât $\rho(x, 0) \leq \alpha$ $(x \in M)$. De aici $|x(t)| \leq \alpha$ $(t \in [a, b],\ x \in M)$, adică mulţimea M est mărginită uniform. Să demonstrăm că funcţiile mulţimii M sunt egal continue. Fie $\varepsilon > 0$ şi $\{x_j\}_1^m \subset$ M o $\frac{\varepsilon}{3}$- reţea finită a mulţimii M (existenţa unei astfel de reţea rezultă din teorema Hausdorff). Conform exemplului l, funcţiile $\{x_j\}_1^m \subset$ M sunt egal continue şi deci există $\delta > 0$ astfel încât $t', t'' \in [a,b], |t' - t''| < \delta$ implică

$\left|x_j(t^{'}) - x_j(t^{''})\right| < \frac{\varepsilon}{3}$. Pentru orice $x \in M$ există x_k $(1 \le k \le m)$ cu $\rho(x, x_k) < \frac{\varepsilon}{3}$, adică $|x(t) - x_k(t)| < \frac{\varepsilon}{3}$ $(a \le t \le b)$. Pentru $t^{'},\ t^{''} \in [a, b],\ |t^{'} - t''| < \delta$ avem

$$|x(t^{'}) - x(t^{''})| \le |x(t^{'}) - x_k(t^{'})| + |x_k(t^{'}) - x_k(t^{''})| + |x_k(t^{''}) - x(t^{''})|$$
$$\le \rho(x, x_k) + \frac{\varepsilon}{3} + \rho(x, x_k) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Aşadar, dacă mulţimea M este relativ compactă, atunci ea este uniform mărginită şi funcţiile acestei mulţimi sunt egal continue.

Suficienţa. Fie $M \subset C[a, b]$ o mulţime uniform mărginită, adică

$$|x(t)| \le \alpha \qquad (t \in [a, b], x \in M), \tag{2.8.1}$$

funcţiile căreia sunt egal continue.

Considerăm un şir arbitrar $\{x_n\}_1^\infty \subset M$. Notăm prin $\{t_j\}_1^\infty$ o mulţime densă în $[a,\ b]$ (de exemplu, Q $\cap$ $[a,\ b]$). În virtutea inegalităţii (6.9.1), şirul numeric $\{x_n(t_1)\}_1^\infty$ este mărginit şi deci conţine un subşir convergent $\left\{x_n^{(1)}(t_1)\right\}_1^\infty$.

Considerăm acum subşirul $\left\{x_n^{(1)}\right\}_1^\infty$ al şirului $\{x_n\}_1^\infty$. Din (2.8.1) avem că şirul $\left\{x_n^{(1)}(t_2)\right\}_1^\infty$ este mărginit şi deci conţine un subşir convergent $\left\{x_n^{(2)}(t_2)\right\}_1^\infty$.

Continuăm acest proces la nesfîrşit şi obţinem şirurile $\left\{x_n^{(k)}\right\}_{n=1}^\infty$ (k = 1, 2, ...) cu proprietăţile:

a) $\left\{x_n^{(k+1)}\right\}_{n=1}^\infty$ este un subşir al şirului $\left\{x_n^{(k)}\right\}_{n=1}^\infty$;

b) şirul numeric $\left\{x_n^{(k)}(t_k)\right\}_1^\infty$ este convergent.

Formăm şirul „diagonal" $\left\{x_n^{(n)}\right\}_1^\infty$. Din a) şi b) rezultă că şirul numeric $\left\{x_n^{(n)}(t_j)\right\}_1^\infty$ este convergent pentru orice $j \in N$. Funcţiile mulţimii M fiind egal continue, pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr $\delta > 0$, astfel încât $|x(t^{'}) - x(t^{''})| < \frac{\varepsilon}{3}$

oricare ar fi $t', t'' \in [a, b], |t' - t''| < \delta$ şi $x \in M$. Având numărul $\delta > 0$, alegem o submulţime finită $\{\tau_k\}_1^m$ a şirului $\{t_j\}_1^\infty$ astfel ca pentru orice $t \in [a, b]$ să existe $\tau_k: |t - \tau_k| < \delta$. Şirul $\left\{x_n^{(n)}\right\}_1^\infty$ este convergent în orice punct τ_k $(1 \le k \le m)$ şi deci există $n_0 \in N$ astfel încât

$$\left|x_{n+p}^{(n+p)}(\tau_k) - x_n^{(n)}(\tau_k)\right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (n \ge n_0; p \in N; k = 1,2, \dots m).$$

Pentru $n \ge n_0$, $p \in N$ avem

$$\left|x_{n+p}^{(n+p)}(t) - x_n^{(n)}(t)\right| \le \left|x_{n+p}^{(n+p)}(t) - x_{n+p}^{(n+p)}(\tau_k)\right| + \left|x_{n+p}^{(n+p)}(\tau_k) - x_n^{(n)}(\tau_k)\right| +$$

$$+\left|x_n^{(n)}(\tau_k) - x_n^{(n)}(t)\right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

De aici:

$$\rho\left(x_{n+p}^{(n+p)}, x_n^{(n)}\right) = \max_{a \le t \le b}\left|x_{n+p}^{(n+p)}(t) - x_n^{(n)}(t)\right| < \varepsilon \ \ (n \ge n_0; p \in N),$$

adică şirul $\left\{x_n^{(n)}\right\}_1^\infty$ este fundamental în $C[a, b]$ şi, deci convergent.

Definiţie 2.8.3. *Fie X un spaţiu metric şi M o mulţime din X. Se numeşte acoperire a mulţimii M orice familie* $\{M_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ *de submultimi ale lui X, aşa ca*

$$M \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} M_\gamma.$$

Dacă Γ este o mulţime finită, se zice că acoperirea este finită. O acoperire formată din mulţimi deschise , pe scurt, se numeşte acoperire deschisă.

Teorema 2.8.2 (Borel). *O mulţime închisă F din spaţiul metric X este compactă, dacă şi numai dacă din orice acoperire deschisă a ei se poate extrage o subacoperire finită.*

Demonstraţie. *Necesitatea*. Fie F o mulţime compactă şi $\{G_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ o acoperire deschisă oarecare a mulţimii F. Admitem că această acoperire nu conţine o subacoperire finită şi fie $\{\varepsilon_n\}_1^\infty, \varepsilon_n > 0$ – un şir convergent la zero. Conform teoremei Hausdorff, mulţimea F este total mărginită şi deci există $\left\{x_i^{(1)}\right\}_1^{m_1}$ astfel încât

$$F \subset \bigcup_{i=1}^{m_1} S\left(x_i^{(1)}, \varepsilon_1\right) \subset \bigcup_{i=1}^{m_1} \bar{S}\left(x_i^{(1)}, \varepsilon_1\right).$$

Evident, mulţimile $F_i = F \cap \bar{S}\left(x_i^{(1)}, \varepsilon_1\right)$ (i = 1, …, m) sunt compacte, $diam\, F_i \leq 2\varepsilon_1$ şi

$$F = \bigcup_{i=1}^{m_1} F_i.$$

Mulţimea M, după cum am presupus, nu poate fi acoperită cu un număr finit de mulţimi $\{G_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$. Prin urmare măcar una din mulţimile F_i (i = 1, 2, ... m_1) posedă aceeaşi proprietate. Fie această mulţime F_{i_1}. Repetăm acelaşi raţionament cu mulţimea compactă F_{i_1} şi numărul $\varepsilon_2 > 0$ şi obţinem mulţimea compactă $F_{i_1 i_2} \subset F_{i_1}$, astfel încât $diam\, F_{i_1 i_2} \leq 2\varepsilon_2$ şi ea nu poate fi acoperită cu un număr finit de mulţimi din familia $\{G_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$. Prelungim acest proces la nesfirşit şi obţinem şirul de mulţimi compacte $\{F_{i_1 i_2 \dots i_n}\}_{n=1}^{\infty}$ cu proprietăţile:

a) $F_{i_1 i_2 \dots i_{n+1}} \subset F_{i_1 i_2 \dots i_n}$;
b) $diam\, F_{i_1 i_2 \dots i_n} \leq 2\varepsilon_n$;
c) fiecare din mulţimile $F_{i_1 i_2 \dots i_n}$ nu poate fi acoperită cu un număr finit de mulţimi din familia $\{G_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$.

Din a), conform teoremei 2.7.3, rezultă existenţa unui punct $x_0 \in F_{i_1 i_2 \dots i_n}$ (n = 1, 2, ...). Întrucât $x_0 \in F \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} G_\gamma$, există γ_0, astfel încât $x_0 \in G\gamma_0$. Mulţimea $G\gamma_0$ este deschisă şi prin urmare în ea se conţine o sferă $S(x_0, \varepsilon)$. Alegem $n_0 \in N$, astfel ca $\varepsilon_{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$. Atunci din b) avem: $diam\, F_{i_1 i_2 \dots i_{n_0}} < 2\varepsilon_{n_0} < \varepsilon$. Întrucât $x_0 \in$

$F_{i_1 i_2 \dots i_{n_0}}$ şi diametrul acestei mulţimi este mai mic decât ε, rezultă că $F_{i_1 i_2 \dots i_{n_0}} \subset S(x_0, \varepsilon)$. Sfera $S(x_0, \varepsilon)$ se include în $G\gamma_0$ şi deci $F_{i_1 i_2 \dots i_{n_0}} \subset G\gamma_0$. Prin urmare, mulţimea $F_{i_1 i_2 \dots i_{n_0}}$ este acoperită cu o singură mulţime din familia $\{G_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$. Aceasta însă contrazice condiţiei c). Aşadar, presupunerea este falsă şi deci familia $\{G_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ conţine o subacoperire finită a mulţimii *F*.

Suficienţa. Fie *F* o mulţime închisă ce posedă proprietatea: orice acoperire deschisă a mulţimii *F* conţine o subacoperire finită. Vom demonstra că *F* este compactă. Fie $\{x_n\}_1^\infty$ un şir arbitrar din *F*. Considerăm 2 cazuri:

a) şirul $\{x_n\}_1^\infty$ conţine un subşir constant $\{x_{n_k}\}_1^\infty$, $x_{n_k} = x$ $(k = 1, 2, \dots)$. În acest caz avem subşirul convergent $\{x_{n_k}\}_1^\infty$;

b) şirul$\{x_n\}_1^\infty$ nu conţine un subşir constant. În acest caz el conţine o infinitate de elemente diferite. Fie $\{y_n\}_1^\infty$ subşirul elementelor diferite (două câte două) ale şirului $\{x_n\}_1^\infty$. Admitem că $\{y_n\}_1^\infty$ nu conţine nici un subşir convergent. Atunci orice $z \in F$ nu este limită a unui subşir al şirului $\{y_n\}_1^\infty$ şi, prin urmare, există o sferă $S(z, \varepsilon_z)$, care nu conţine nici un punct din şirul $\{y_n\}_1^\infty$, cu excepţia poate a punctului *z* (deci conţine cel mult un element al şirului $\{y_n\}_1^\infty$). Este evident însă că

$$F \subset \bigcup_{z\in F} S(z, \varepsilon_z),$$

adică mulţimea $\{S(z, \varepsilon_z)\}_{z\in F}$ formează o acoperire deschisă a mulţimii *F* şi, prin ipoteză există o subacoperire finită. Deci există $\{z_j\}_1^m$, astfel încât $F \subset \bigcup_{j=1}^m S(z_j, \varepsilon_{z_j})$. De aici avem : $\{y_n\}_1^\infty \subset F \subset \bigcup_{j=1}^m S(z_j, \varepsilon_{z_j})$ şi, prin urmare, cel puţin una din sferele $S\left(z_j, \varepsilon_{z_j}\right)$ conţine o infinitate de elemente ale şirului $\{y_n\}_1^\infty$. Aceasta însă contrazice alegerii sferelor $S(z, \varepsilon_z)$ şi deci şirul $\{y_n\}_1^\infty$ conţine cel puţin un subşir convergent. Şirul $\{y_n\}_1^\infty$ fiind un subşir al şirului $\{x_n\}_1^\infty$, rezultă că $\{x_n\}_1^\infty$ conţine un subşir convergent şi, prin urmare, mulţimea F este compactă.

2.9. MULŢIMI RARE. TEOREMA BAIRE

Definiţia 2.9.1. *Mulţimea M din spaţiul metric X se numeşte rară dacă orice sferă S(a, r) $\subset$X conţine o sferă S(b, $\tilde{r}$) în care nu există nici un punct din M, adică S(b, $\tilde{r}$) $\cap$ M = $\varnothing$.*

Exemplu. În spaţiul metric R submulţimile N, Z sunt rare, iar Q nu este rară. Nu este rară în acest spaţiu nici mulţimea $N \cup [0, 1]$.

***Definiţia* 2.9.*2*.** *Spaţiul metric X se numeşte spaţiu de prima categorie Baire, dacă el poate fi reprezentat ca reuniunea unei familii numărările de mulţimi rare. În caz contrar X se numeşte spaţiu de categoria a doua Baire.*

Exempl. Spaţiul Q este de primă categorie Baire. Într-adevăr, Q este o mulţime numărabilă şi deci $Q = \{r_n\}_1^\infty$. Rezultă că

$$Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n,$$

unde $X_n = \{r_n\}$ şi X_n , evident, este mulţime rară.

Observăm că spaţiul Q nu este complet. Pentru spațiile complete este adevărată:

Teorema 2.9.1 (Baire). *Orice spaţiu metric complet este de categoria a doua Baire.*

Demonstraţie. Fie X un spaţiu metric complet. Admitem contrariul, adică

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n,$$

unde fiecare mulţime X_n este rară.

Fie $S(a, 1)$ o sferă oarecare în X. Deoarece X_1 este mulţime rară, există o sferă $S(x_1, r_1) \subset S(a, 1)$, astfel încât $S(x_1, r_1) \cap X_1 = \varnothing$. Putem evident admite (în caz de necesitate micşorăm raza sferei $S(x_1, r_1)$), că $\bar{S}(x_1, r_1) \subset S(a, 1)$, $r_1 < \frac{1}{2}$ şi $\bar{S}(x_1, r_1) \cap X_1 = \varnothing$. Deoarece X_2 este o mulţime rară, există o sferă $S(x_2, r_2)$) astfel încât $\bar{S}(x_2, r_2) \subset \bar{S}(x_1, r_1)$, $r_2 < \frac{1}{2} r_1$ şi $\bar{S}(x_2, r_2) \cap X_2 = \varnothing$. Prin inducţie, obţinem un şir descrescător $\{\bar{S}(x_n, r_n)\}$ de sfere închise cu proprietăţile:

$$\bar{S}(x_n, r_n) \cap X_n = \varnothing, \ \ r_n < \frac{1}{2} r_{n-1} \ \ (n \in N, n > 1).$$

De aici $r_n < \frac{1}{2^n}$ $(n \in N)$ şi deci $r_n \to 0$. Conform teoremei Cantor, există un punct $b \in X$ ce aparţine tuturor sferelor $\bar{S}(x_n, r_n)$. Însă fiecare sferă $\bar{S}(x_n, r_n)$ nu conţine puncte din X_n şi deci $b \notin X_n$ $(n = 1, 2, ...)$. De aici rezultă că

$$b \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X.$$

Aşadar avem simultan $b \in X$ şi $b \notin X$. Contradicţie.

Din această teoremă obţinem o consecinţa importantă.

***Consecinţă* 2.9.1.** *Fie X un spaţiu metric complet şi* $\{F_n\}_1^{\infty}$ *un şir de mulţimi închise în X. Dacă*

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n,$$

atunci cel puţin una din mulţimile F_n *conţine o sferă* $S(x_0, r)$.

Într-adevăr, din teorema Baire rezultă că cel puţin una din mulţimile F_n nu este rară. Fie această mulţime F_{n_0}. Atunci există o sferă $S(x_0, r_0)$ astfel încât orice sferă din $S(x_0, r_0)$ conţine puncte ale mulţimii F_{n_0}. Prin urmare orice punct $y \in S(x_0, r_0)$ este un punct aderent al mulţimii F_{n_0}, adică $S(x_0, r_0) \subset \overline{F_{n_0}} = F_{n_0}$.

Probleme propuse spre rezolvare

1. Calculați distanța dintre punctele *A*(1,3,0,4,5) și *B* (2,1,1,3,1) în spațiul R^5.

Rezolvare. Conform metrici euclidiene

$\rho(A,B) = \sqrt{(2-1)^2 + (1-3)^2 + (1-0)^2 + (3-4)^2 + (1-5)^2} =$
$\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2 + (-1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{1+4+1+1+16} = \sqrt{23}.$

2. Demonstrați, că în spațiul R^3, $A\left(1+\frac{1}{n}, 2-\frac{1}{n}, 2+\frac{3}{n^3}\right) \to A_0(1{,}2{,}2)$ când $n \to +\infty$.

Rezolvare.

$$\rho(A_n, A_0) = \sqrt{\left(1+\frac{1}{n}-1\right)^2 + \left(2-\frac{1}{n}-2\right)^2 + \left(2+\frac{3}{n^3}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4} + \frac{9}{n^6}} \to 0.$$

3. Stabiliți dacă mulțimea *N* posedă puncte interioare.

Rezolvare. Alegem în mod arbitrar $n \in N$, vecinătatea lui $\left(n-\frac{1}{m}, n+\frac{1}{m}\right)$ pentru $m \geq 2$ nu conține, cu excepția lui *n*, alte puncte din *N*. Toate punctele din *N* nu sunt interioare și *IntN* = ∅ .

4. Găsiți punctele de acumulare ale mulțimii *A* = { 4,3,2,1 }.

Rezolvare. Puncte de acumulare această mulțime nu are, deoarece într-o vecinătate destul de mică a fiecărui punct *A*, cu excepția lui, nu sunt alte puncte din *A* . Deci *A′* = ∅ .

5. Găsiți punctele interioare, de acumulare și închiderea mulțimii *A* = (1,2]∪{5}.

Rezolvare. Punctele ce nu se includ în *A*, interioare nu pot fi. (1,2) ⊂ *IntA*, deoarece fiecare punct aparține lui *A* împreună cu careva vecinătate. Numărul 5 – izolat, deci *IntA* = (1,2).

A′ = [1,2], deoarece 1,2 – puncte de acumulare. $\bar{A} = [1{,}2] \cup \{5\}$ conform formulei $\bar{A} = A \cup A'$.

6. Stabiliți dacă mulțimea *A* = (1,5] este mulțime de tipul G_δ.

Rezolvare. Deoarece $(1,5] = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(1{,}5+\frac{1}{n}\right)$, atunci *A* este mulțime de tipul G_δ.

7. Stabiliți dacă mulțimea *A* = *N* × *R* este deschisă în R^2.

Rezolvare. Nu este, deoarece în plan nu există cercul, care conține punctul (n,α), $n \in N, \alpha \in R$ și în întregime să aparțină lui A.

8. Fie E oarecare mulţime de puncte din plan. Se cunoaşte, că marginea inferioară a tuturor posibilelor disanţe dintrepuncte diferite ale acestei mulţimi este pozitivă. Demonstraţi, că mulţimea E nu are puncte de limită.

Rezolvare: Fie $inf_{\substack{x\epsilon E \\ y\epsilon E}} {}_{x\neq y}\, \rho(x,y) = d > 0$. Vom demonstra, că nici-un punct a, din plan nu poate fi punct de limită. Pentru aceasta vom demonstra, că $\frac{d}{2}$ - vecinătate a punctului a conţine nu mai mult decât un punct din E. Într-adevăr, dacă această $\frac{d}{2}$ – vecinătate conţine două puncte din E: $x\epsilon E$ şi $y\epsilon E$, atunci

$$\rho(x,y) \leq \rho(x,a) + \rho(a,y) < \frac{d}{2} + \frac{d}{2} = d, \text{ adică } \rho(x,y) < d,$$

Însă acest fapt contrazice condiţia, că $d = inf_{\substack{x\epsilon E \\ y\epsilon E}} {}_{x\neq y}\, \rho(x,y)$.

9. Compuneţi o mulţime, pentru care mulţimea derivată este nevid, iar mulţimea derivată de ordinal doi este vidă.

Rezolvare: Această condiţie e justă, spre exemplu, pentru E_1 - mulţimea punctelor de pe axa numerică:

$$1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots; \frac{1}{n}; \dots \text{ şi } 0.$$

În acest caz $E_1^{'} = \{0\}$ (mulţimea ce constă dintr-un singur element), $E_1^{''} = \emptyset$.

10. Compuneţi mulţimea, pentru care mulţimea derivată de ordinul $n-1$ este nevidă, iar mulţimea derivată de ordinul n este vidă.

Rezolvare: În cazul când $n = 2$ avem problema 2). Pentru $n = 3$ această mulţime E se compune astfel: fiecărui punct de forma $\frac{1}{i}$ (unde i este un număr natural) îi asociem consecutivitatea $\left\{\frac{1}{k} + \frac{1}{i}\right\}$, $k = 1,2,3, \dots$, ce converge către $\frac{1}{i}$. În acest caz mulţimea tuturor punctelor de forma $\frac{1}{k} + \frac{1}{i} (k \geq 1, i \geq 1)$ împreună cu numărul 0 formează mulţimea căutată E_2. Mulţimea ei derivată reprezintă mulţimea E_1 (mulţimea, construită în exerciţiul precedent): $E_2^{'} = E_1$; de aici

$$E_2^{''} = E_1^{'} = \{0\}, \ \ E_1^{'''} = \emptyset.$$

În mod analog se contruiesc mulţimile pentru $n > 3$. În caz general, pentru orice $n \geq 2$ satisfac condiţiilor problemei, în particular, mulţimea E_{n-1}, compusă din numărătorii $\mathrm{i}_1, \mathrm{i}_2, \dots, \mathrm{i}_{\mathrm{k}1}$ primesc valorile 1, 2, 3… Uşor se verifică faptul, că $E_{n-1}^{'} = E_{n-2}$, de unde rezultă (conform inducţiei), că $E_{n-1}^{(n-1)} = \{0\}, E_{n-1}^{(n)} = \emptyset$.

11. Fie E – mulţimea punctelor de forma $0, \frac{1}{n}, \frac{1}{n} + \frac{1}{q}$, unde n şi q primesc toate valorile naturale posibile. Stabiliţi dacă mulţimea E este închisă. Care este mulţimea ei derivată? Care sunt mulţimile derivate de ordinal doi şi trei?

Rezolvare: Mulţimea E este închisă. Mulţimea ei derivată reprezintă mulţimea numerelor de forma $\frac{1}{n}$ şi 0; $E^{''} = \{0\}$; $E^{'''} = \emptyset$ (din exemplul precedent).

12. Compuneţi mulţimea numărabilă E, ce posedă următoarele proprietăţi:

a) mulţimea ei derivată are pterea continuumului;

b) $E \cap E^{'} = \emptyset$.

Rezolvare: Spre exemplu, mulţimea de puncte E ce au coordonatele $\left(\frac{k}{2^n}, \frac{1}{2^n}\right)$ pentru toate numerele $k \in \mathbb{Z}$ şi $n \in \mathbb{N}$. În acest caz $E^{'}$ reprezintă toată axa Ox, mai mult ca atât, nici-un punct al mulţimii date nu aparţine mulţimii $E^{'}$.

13. Demonstraţi, că mulţimea derivată a oricărei mulţimi este închisă.

Rezolvare: Fie a punct de limită al mulţimii $E^{'}$. Vom demonstra, că a este punct de limită şi pentru mulţimea E. Alegem $V_\varepsilon(a)$ o $\varepsilon -$vecinătate a punctului a. Această vecinătate conţine o infinitate de puncte ale mulţimii $E^{'}$. Luăm un punct arbitrar, spre exemplu $b \in E^{'}$ şi alegem o $\delta -$vecinătate a lui $V_\delta(b)$, care în întregime se cuprinde în interiorul vecinătăţi $V_\varepsilon(a)$. Această vecinătate conţine o infinite de puncte ale mulţimii E (deoarece $b \in E^{'}$ şi deci, punctul b este punct de limită al mulţimii E). În acest caz toate punctele mulţimii E, ce nimeresc în vecinătatea $V_\delta(b)$, aparţin şi vecinătăţii $V_\varepsilon(a)$; cu alte cuvinte, orice vecinătate $V_\varepsilon(a)$ a punctului conţine o infinitate de puncte din E. Rezultă, că a este punct de limită al mulţimii E, adică $a \epsilon E^{'}$. Deci, orice punct de limită a al mulţimii $E^{'}$ aparţine mulţimii $E^{'}$, aceasta înseamnă, că mulţimea $E^{'}$ este închisă.

14. Demonstraţi, că pentru orice mulţime E este justă includerea $E^{'} \supset E^{''} \supset E^{'''} \supset \cdots \supset E^{(n)} \supset \cdots$, unde $E^{(n)}$ este mulţimea derivată de ordinul n.

Rezolvare: Deoarece $E^{'}$ este închisă (vezi exemplul precedent), atunci toate punctele sale de limită se include în $E^{'}$, adică $E^{''} \subset E^{'}$. În mod analog se verifică includerea $E^{'''} \subset E^{''}$ ş.a.m.d.

15. Demonstraţi, că mulţimea derivată a sumei a două mulţimi A şi B este egală cu suma derivatelor fiecărei mulţimi în parte. Aduceţi un exemplu ce afirmă, că teorema dată nu este justă în cazul sumei unui număr infinit de aşa mulţimi.

Rezolvare: Exemplu: Fie A_k - un segment din plan, ce uneşte punctele $\left(\frac{1}{k};0\right)$ şi $\left(\frac{1}{k};1\right)$. Atunci $A_k^{'} = A_k$

$$\bigcup_k A_k^{'} = \bigcup_k A_k\,, \ \left(\bigcup_k A_k\right)^{'} = \left(\bigcup_k A_k\right) \cup B,$$

unde B - segmentul, ce uneşte punctele $(0;0)$ şi $(0;1)$. În acest caz, $\left(\bigcup_k A_k\right)^{'} \supset \bigcup_k A_k^{'}$ însă egalitatea nu are loc.

În caz general, pentru orice consecutivitate de mulţimi $\{A_k\}$ este justă incluziunea

$$\left(\bigcup_k A_k\right)^{'} \supset \bigcup_k A_k^{'}.$$

16. Este justă oare afirmaţia: "Mulţimea derivată a intersecţiei a două mulţimi $A \cap B$ este egală cu intersecţia mulţimilor derivate în parte"?

Rezolvare: Afirmaţia nu este justă. Ca exemplu

$$A = \left\{1;\frac{1}{3};\frac{1}{5};\dots;\frac{1}{2k-1};\dots\right\},\ \ B = \left\{\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{6};\dots;\frac{1}{2k};\dots\right\}.$$

Aici $A \cap B = \emptyset$, $(A \cap B)^{'}\emptyset$, $A^{'}=\{0\}$, $B^{'}=\{0\}$, $A^{'} \cap B^{'} = \{0\}$.

17. Compuneţi o astfel de mulţime E, pentru care toate mulţimile derivate $E^{'}$, $E^{''}$, $E^{'''}$,…, $E^{(n)}$, … diferă una de alta, iar intersecţia acestor mulţimi derivate $\bigcap_{n=1}^{\infty} E^{(n)}$ este vidă.

Rezolvare: Pe segmentul $[0;1]$ construim mulţimea E_1 a tuturor punctelor de forma $\frac{1}{n}$ (unde $n = 1,2,3,\dots$); pe segmentul $[1;2]$ - E_2 mulţimea tuturor punctelor de forma $1+\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}$ (unde $n_1 = 2;3;4;\dots$; $n_2 = 2;3;4;\dots$); în caz general, pe segmentul $[k-1;k]$ - E_k mulţimea punctelor de forma $k-1+\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\dots+\frac{1}{n_k}$, unde $n_1 = k, k+1, k+2, \dots; n_2 = k+1, k+2, \dots; \dots;\quad n_k = k, k+1, k+2, \dots$ Atunci reuniunea E a tuturor mulţimilor E_k: $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ satisface condiţiilor problemei.

18. Compuneţi o astfel de mulţime E, pentru care toate mulţimile derivate $E^{'}$, $E^{''}$, $E^{'''}$,…, $E^{(n)}$, … diferă una de alta, iar intersecţia acestor mulţimi derivate $\bigcap_{n=1}^{\infty} E^{(n)}$ este nevidă.

Rezolvare: Este de ajuns ca mulţimii E, construite în exemplul precedent, să adăugăm segmentul $[-1;0]$. Atunci mulţimea $M = E \cup [1;0]$, încât $M^{(j)} \neq M^{(i)}, i \neq j$ şi $\bigcap_k M^{(k)} = [-1;\ 0] \neq \emptyset$.

19. a) Aduceţi exemple de astfel de mulţimi în plan, care nu conţin puncte de frontieră; b) aduceţi exemple de astfel de mulţimi în plan, care conţin puncte de frontieră, însă toate acestea nu aparţin mulţimii; c) aduceţi exemple de astfel de mulţimi în plan, ce conţin o parte din punctele sale de frontieră; d) aduceţi exemple de mulţimi nenumărbile în plan, ce constau doar din puncte de frontieră; e) analog pe deaptă.

Rezolvare: a) Mulţimea vidă şi planul în întregime; b) Orice mulţime deschisă în plan (cu exepţia mulţimii vide şi a planului în întregime); c) Orice mulţime, care nu este nici deschisă, nici închisă (ca exemplu, mulţimea punctelor (x, y), pentru care $0 \leq x < 1$, $0 \leq y < 1$), d) Mulţimea tuturor numerelor iraţionale pe dreaptă.

20. Demonstraţi: dacă punctul de limită nu aparţine mulţimii, atunci el este punct de frontieră.

    Rezolvare: În orice vecinătate a punctului de aşa tip vom găsi puncte ce pot aparţine, dar pot şi să nu aparţină mulţimii (în particular, însuşi acest punct), cât şi punctele mulţimii (deoarece acest punct este de limită).

21. Demonstraţi, că frontiera sumei unui număr finit de mulţimi se include în suma frontierelor acestor mulţimi. Aduceţi exemplu, ce arată că afirmaţia nu este justă pentru suma infinită de mulţimi.

Rezolvare: Fie $A = A_1 \cup A_2$ şi $x \in borne\ A$. Atunci în orice vecinătate a punctului x se vor găsi puncte cât din CA (aceste puncte nu aparţin nici lui A_1, nici lui A_2), cât şi puncte din A_1 sau din A_2. Examinăm consecutivitatea de vecinătăţi ale punctului x cu raza $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ şi în fiecare aşa vecinătate evidenţiem un punct, care aparţine sau mulţimii A_1 sau mulţimii A_2. Măcar una din aceste mulţimi A_1 sau A_2 (considerăm mulţimea A_1) are o infinitate de puncte ale acestor vecinătăţi, spre exemplu în vecinătăţile

$$V_{\frac{1}{n_1}}(x), V_{\frac{1}{n_2}}(x), \dots, V_{\frac{1}{n_k}}(x), \dots$$

În aşa fel *orice* vecinătate a punctlui x conţine puncte din A_1: într-adevăr, orice vecinătate $V_r(x)$ include vecinătatea $V_{\frac{1}{n_k}}(x)$ pentru un oarecare număr k (este suficient ca $n_k > \frac{1}{r}$); însă $V_{\frac{1}{n_k}}(x)$ conţine măcar un punct al mulţimii A_1; reiese, că acelaşi lucru are loc şi pentru $V_r(x)$.

Deci, orice vecinătate a punctului x conţine puncte din A_1, dar şi puncte, ce nu aparţin mulţimii A_1. Dar atunci

$x \in (borne\ A_1) \cup (borne\ A_2)$, adică $borne\ A \subset (borne\ A_1 \cup borne\ A_2)$.

În caz dacă mulţimea A ar fi suma nu ar două mulţimi, dar suma oricărui număr finit de mulţimi $A_1, A_2, \dots$, demonstraţia s-ar efectua în mod analog.

Dacă mulţimea A reprezintă suma unui număr infinit de mulţimi, atunci afirmaţia analogă nu este justă. Spre exemplu, dacă $A_k -$ linia dreaptă, situată în planul Oxy definită de ecuaţia $x = \frac{1}{k}$, atunci mulţimea

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

Posedă punctele sale de frontieră, în particular, toate punctele axei Oy; însă aceste puncte nu sunt puncte de frontier nici pentru una din mulţimile A_k.

22. Demonstraţi, că închiderea sumei a două mulţimi este egală cu suma închidereii lor. Demonstraţi, că pentru o totalitate infinită de mulţimi este justă includerea $\bigcup_\xi \overline{A_\xi} \subset \overline{\bigcup_\xi A_\xi}$, dar egalitatea nu întotdeauna este justă.

Rezolvare: Deoarece $A_1 \subset A_1 \cup A_2$, atunci $\overline{A_1} \subset \overline{A_1 \cup A_2}$; în mod analog $\overline{A_2} \subset \overline{A_1 \cup A_2}$; rezultă, că $\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \subset \overline{A_1 \cup A_2}$.

Includere inversă $\overline{A_1 \cup A_2} \subset \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$ se demonstrează în mod analog, cum s-a demonstrate includerea $borne(\mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2) \subset (borne\ \mathrm{A}_1) \cup (borne \mathrm{A}_2)$ (vezi exemplul precedent).

Comparând aceste incluziuni, obţinem egalitatea cerută $\overline{A_1} \cup \overline{A_2} = \overline{A_1 \cup A_2}$.

Includerea $\bigcup_\xi \overline{A_\xi} \subset \overline{\bigcup_\xi A_\xi}$ pentru o infinitate de mulţimi se demonstrează la fel, ca şi includerea $\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \subset \overline{A_1 \cup A_2}$ pentru suma a două mulţimi.

23. Demonstraţi nemijlocit (fără a aplica principiul dualităţii), că suma unui număr finit de mulţimi închise este închisă.

Rezolvare: Dacă A_1 şi A_2 sunt mulţimi închise, atunci $\overline{A_1} = A_1$, $\overline{A_2} = A_2$; ţinând cont de rezultatele problemei precedente (pentru suma adouă mulţimi) avem $\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} = A_1 \cup A_2$, deci $A_1 \cup A_2$ este mulţime închisă.

Demonstraţia pentru suma oricărui număr finit de mulţimi este analogă.

24. Demonstraţi nemijlocit (fără a aplica principiul dualităţii), că intersecţia oricărui număr de mulţimi închise este închisă.

Rezolvare: Fie $A_\xi -$ mulţimi închise. Vom demonstra, că $\bigcap_\xi A_\xi$ la fel este închisă, adică vom demonstra, că

$$\overline{\bigcap_\xi A_\xi} = \bigcap_\xi A_\xi .$$

Includerea într-o direcţie este evidentă:

$$\bigcap_\xi A_\xi \subset \overline{\bigcap_\xi A_\xi} .$$

Pentru a demonstra includerea inversă, examinăm oarecare punct $x \in \overline{\bigcap_\xi A_\xi}$. În orice vecinătate a lui există puncte din $\bigcap_\xi A_\xi$; reiese, că în această vecinătate există puncte din fiecare mulţime A_ξ, adică $x \in A_\xi$ pentru orice A_ξ (ţinând cont de faptul, că mulţimile A_ξ sunt închise). În aşa fel $x \in \bigcap_\xi A_\xi$. Deci $\overline{\bigcap_\xi A_\xi} \subset \bigcap_\xi A_\xi$.

Comparând ambele incluziuni obţinute, ajungem la concluzia, că $\overline{\bigcap_\xi A_\xi} \subset \bigcap_\xi A_\xi$; deci, mulţimea $\bigcap_\xi A_\xi -$ este închisă.

25. Demonstraţi, că închiderea oricărei mulţimi este închisă.

Rezolvare: Fie $a -$ punct de adiacenţă pentru $\overline{E}$. Vom demonstra, că a este punct de adiacenţă şi pentru E. Descriem oarecare vecinătate $V(b)$, ce se conţine în $V(a)$. Deoarece $b \in \overline{E}$, atunci b este punct de adiacenţă pentru E. Rezultă, că $V(b)$ conţine măcar un punct al mulţimii E. Dar atunci acest punct aparţine şi vecinătăţii $V(a)$. Cu alte cuvinte, oarecare vecinătate $V(a)$ a punctului a conţine măcar un punct al mulţimii E, deci a reprezintă punct de adiacenţă pentru E. Dar atunci $a \in \overline{E}$. În aşa fel, am demonstrat, că orice punct de adiacenţă al mulţimii $\overline{E}$ aparţine ei, adică mulţimea $\overline{E}$ este închisă.

26. Fie $f(x) -$ funcţie continuă, definită pe toată axa Ox. Demonstraţi, că mulţimea E_a acelor puncte de pe axa Ox, unde $f(x) \geq a$, reprezintă o mulţime închisă.

Rezolvare: Fie $\xi -$ punct de limită al mulţimii E_a. Examinăm consecutivitatea $\{x_n\}$ (unde $x_n \in E_a$), ce converge către ξ. Atunci $f(x_n) \geq a$ pentru orice n. Deoarece $f(x)$ este continuă atunci $f(\xi) = \lim_{x_n \to \xi} f(x_n)$. Dar din analiza matematică se cunoaşte, că dacă toţi temenii unui şir convergent sunt mai mari sau egali cu a, atunci şi limita lui este mai mare sau egal cu a. În aşa fel

$\lim_{x_n \to \xi} f(x_n) \geq a$, adică $f(\xi) \geq a$. Rezultă, că $\xi \in E_a$. Deci mulţimea E_a este închisă.

27. Stabiliţi dacă totdeauna suma unui număr finit de mulţimi perfecte este mulţime perfectă.

Rezolvare: Suma unui număr finit de mulţimi perfecte totdeauna este mulţime perfectă; suma unei mulţimi numărabile de mulţimi perfecte nu este neapărat să fie mulţime perfectă.

Spre exemplu, suma unei mulţimi numărabile de segmente

$$\left[1;1\frac{1}{2}\right]\bigcup\left[1\frac{1}{2};1\frac{3}{4}\right]\bigcup\left[1\frac{3}{4};1\frac{7}{8}\right]\bigcup\dots\bigcup\left[2-\frac{1}{2^n};2-\frac{1}{2^{n+1}}\right]\bigcup\dots$$

În acest caz fiecare mulţime este închisă (chiar perfecte), iar suma nu este închisă: suma reprezintă semiintervalul $[1;2)$.

28. Demonstraţi, că interiorul oricărei mulţimi este mulţime deschisă.

Rezolvare: Fie dată oarecare mulţime $E, A -$ mulţime punctelor interioare (adică $A = \overset{0}{\mathrm{E}}$). Fie $x_0 \in A -$ oarecare punct din A. Trebuie să demonstrăm, că $x_0 -$ punct interior al mulţimii A. Pentru aceasta descriem o vecinătate a punctului x_0 $V(x_0)$, care aparţine mulţimii E (ceea ce este posibil, deoarece x_0 $-$punct interior al mulţimii E). Fiecare punct $x \in V(x_0)$ la fel este punct interior al mulţimii E (deoarece putem descrie $V(x) -$ o vecinătate a punctului x, ce se include în $V(x_0)$ şi deci aparţine mulţimii E). În aşa fel, orice punct $x \in V(x_0)$ este şi punct al mulţimii A. Deci x_0 este punct interior al mulţimii A. Am obţinut, că fiecare punct al mulţimii A este şi punct interior al său, adică A este mulţime deschisă.

29. Demonstraţi, că mulţimea E a tuturor funcţiilor $f(x)$ continui pe segmentul $[0;1]$, ce satisfac inegalitatea $A < f(x) < B$ (unde $A < B$ $-$numere fixate), este o mulţime deschisă în spaţiul $C[0;1]$.

Rezolvare: Fie $\varphi \in E$. Atunci $A < \varphi(x) < B$ pe tot segmentul $[0;1]$. Notăm

$$\sup_{0\leq x\leq 1} \varphi(x) = \beta, \quad \inf_{0\leq x\leq 1} \varphi(x) = \alpha.$$

Este evident, că $\sup_{0\leq x\leq 1} \varphi(x)$ nu poate fi egal cu B, deoarece, conform proprietăţilor funcţiei continue pe segment, $sup\, \varphi(x)$ se obţine în careva punct x' pe segmentul $[0;1]$: $\varphi(x') = \beta$. Însă $\varphi(x') < B$; deci $\beta < B$. Analog se verifică faptul, că $\alpha > A$. Notăm prin ε cel mai mic dintre numerele $\alpha - A$ şi $B - \beta$. Atunci toate funcţiile $\chi(x)$, ce satisfac inegalitatea $\varphi(x) - \varepsilon < \varphi(x) < \varphi(x) + \varepsilon$ aparţin mulţimii E. Însă toate funcţiile $\chi(x)$ formează o ε $-$vecinătate a funcţiei φ, deaoarece toate aceste funcţii, şi numai ele, satisfac condiţia: $\varrho(\varphi, \chi) < \varepsilon$. Astfel, odată cu funcţia $\varphi(x)$ mulţimea E conţine şi careva vecinătate a funcţiei φ, dar aceasta înseamnă, că $E -$ este mulţime deschisă în spaţiul C.

30. Demonstraţi echivalenţa următoarelor două definiţii ale închiderii $\bar{E}$ a mulţimii E:

a) $\bar{E} = E \bigcup E^{'}$;

b) $\bar{E} -$ partea comună a tuturor mulţimilor închise, ce conţin mulţimea E.

Rezolvare: Fie $A = E \cup E^{'}$, $B -$ intersecţia tuturor mulţimilor închise, ce conţin mulţimea E. Vom demonstra, că, oricare n-ar fi mulţimea E, are loc egalitatea: $A = B$.

1) $A -$ mulţime închisă (vezi problema 18), care conţine E; deci $A \supset B$.
2) Orice mulţime închisă F, ce conţine E, conţine şi punctele sale de limită; deaceea $F \supset E \cup E^{'}$, adică $F \supset A$. În acest caz şi intersecţia tuturor mulţimilor de acest fel F conţine A; deci $B \supset A$.

Din faptul că $A \supset B$ şi $B \supset A$ rezultă, că $A = B$.

31. Demonstraţi, că mulţimea tuturor punctelor de tipul $\ln(r^2 + 1)$ (unde $r -$ orice număr raţionale) este densă în semiintervalul $[0;+\infty)$.

Rezolvare: Funcţia $y = \ln(x^2 + 1)$ este strict crescătoare şi continuă în domeniul E: $0 \leq x < +\infty$; cu toate acestea funcţia primeşte valori din semiintervalul E_1: $0 \leq y < +\infty$. Alegem un punct arbitrar $y_0 \in E_1$ şi descriem în jurul lui lui oarecare vecinătate $(y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$. Alegem $\varepsilon > 0$ destul de mic, încât această vecinătate să aparţină în întregime semiintervalului E_1. Dacă $y_0 = 0$, atunci în loc de vecinătate vom lua semivecinătatea $(0; \varepsilon)$. Vom demonstra, că în ea există măcar un punct de forma $\ln(1 + r^2)$ (unde $r -$ număr raţionale).

Conform proprietăţilor funcţiilor continui rezultă, că în mulţimea E de pe axa Ox există aşa puncte x_1 şi x_2 $(x_1 < x_2)$, încât

$$\ln(1 + x_1^2) = y_0 - \varepsilon; \;\; \ln(1 + x_2^2) = y_0 + \varepsilon.$$

Între punctele x_1 şi x_2 vom găsi măcar un punct raţional, pe care-l notăm r: $(x_1 < r < x_2)$. Aşa cum pe mulţimea E funcţia $\ln(1 + x^2)$ strict creşte, atunci $\ln(1 + x_1^2) < \ln(1 + r^2) < \ln(1 + x_2^2)$, adică $y_0 - \varepsilon < \ln(1 + r^2) < y_0 + \varepsilon$. Deci în orice vecinătate a punctului $y_0 \in E$, oricât de mică nu ar fi, există punctul de forma $\ln(1 + r^2)$. Deci mulţimea punctelor de aşa tip este densă în E_1.

32. Demonstraţi, că mulţimea lui Cantor D este nicăieri densă pe axa reală.

Rezolvare: Vom numi segmentele $\left[0;\frac{1}{3}\right]$ şi $\left[\frac{2}{3};1\right]$, rămase după excluderea intervalului $\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$, segmente de rangul 1; segmentele $\left[0;\frac{1}{9}\right]$, $\left[\frac{2}{9};\frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{2}{3};\frac{7}{9}\right]$, $\left[\frac{8}{9};0\right]$, rămase după excluderea intervalelor $\left(\frac{1}{9};\frac{2}{9}\right)$, $\left(\frac{7}{9};\frac{8}{9}\right)$ – segmente de rangul al $2-$lea ş.a.m.d. în general, segmentul de rangul n are lungimea $\frac{1}{3^n}$;

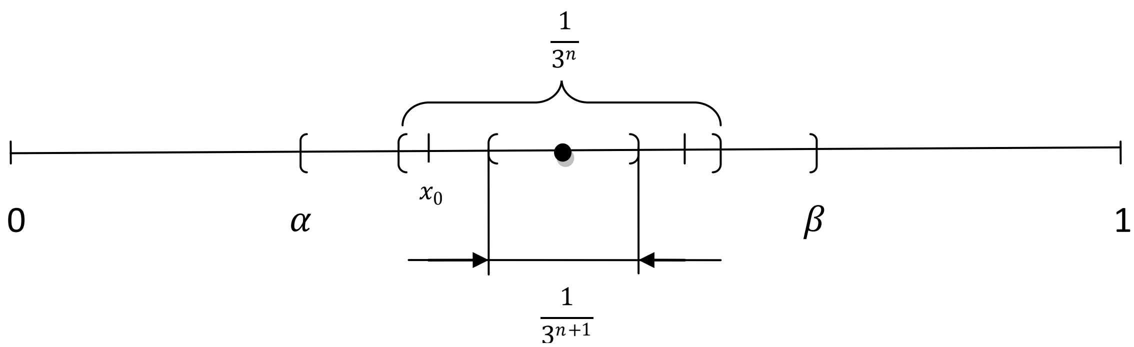


Fig.5.1

pentru a obţine din el segmente de rangul $n+1$, trebuie să excludem din el interval de lungimea $\frac{1}{3^{n+1}}$ cu centrul în mijlocul acestui segment. Observăm, că pentru orice n suma tuturor segmentelor de rangul n cuprinde toată mulţimea lui Cantor D.

Pentru a demonstra, că D este nicăieri densă pe axa reală, trebuie să demonstrăm, că orice interval conţine în sine un alt interval, cu totul independent de punctele mulţimii D. Alegem în mod arbitrar intervalul $I=(\alpha;\beta)$. În caz că el nu conţine puncte ale mulţimii D, atunci în calitate de interval, ce se conţine în I, luăm însuşi acest interval. Dacă însă există punctual $x_0 \in D$, ce aparţine intervalului I, în acest caz putem găsi segmentul de careva rang n, destul de înalt, ce-l conţine pe x_0 şi se include în I (fig. 5.1). Vom găsi intervalul de lungimea $\frac{1}{3^{n+1}}$ cu central în mijlocul acestui segment. Acest interval nu conţine puncte din D şi cu toate acestea se conţine în I.

Rezultă, că D este mulţime nicăieri densă pe axa reală.

Probleme propuse spre rezolvare

1) Demonstrați, că șirul de puncte $A_n\left(\frac{1}{n},1-\frac{1}{n^3},1\right)$ converge către punctul $A_0(\,1{,}1{,}0)$ în spațiul R^3.
2) Stabiliți dacă mulțimile *N Z Q I* sunt închise sau deschise pe axa reală.

3) Găsiți *IntA*, A', $\bar{A}$, $F_r A$ pentru $A = (-1,9] \cup \{11\} \cup \{12\}$ pe axa reală.
4) Găsiți *IntA*, A', $\bar{A}$, $F_r A$ pentru mulțimea $A = \{M(x,y): 1 < x^2 + y^2 \leq 9\}$ în plan.
5) Stabiliți mulțimea A, dacă $A' = \{0\}$.
6) Stabiliți mulțimea A, dacă $A' = \{0,1,2\}$.
7) Stabiliți mulțimea A, dacă $A' = \left\{\frac{1}{n^2}\right\}, n \in N$.
8) Este oare mulțimea $A=[1,2] \cup \{3\}$ $G_\delta -$ mulțime?
9) Stabiliţi, dacă mulţimea, ce constă numai din puncte izolate, poate avea puncte de limită. Poate oare mulţimea sa derivată să fie infinită? Poate oare ea fi nenumărabilă?
10) Fie dat şirul de circumferinţe concentrice de razele $r_1 < r_2 < \cdots < r_n < \cdots$ Este oare reuniunea lor mulţime închisă?
11) Fie dat şirul de circumferinţe concentrice de razele $r_1 > r_2 > \cdots > r_n > \cdots$ Este oare reuniunea lor mulţime închisă? Ce reprezintă închiderea reuniunii?
12) Fie dat şirul de cercuri concentrice de razele $r_1 < r_2 < \cdots < r_n < \cdots$ Este oare reuniunea lor mulţime închisă? Este oare aceasta o mulţime deschisă în plan?
13) Stabiliţi dacă spirala hiperbolică $\rho = \frac{a}{\varphi}$ este mulţime perfectă în plan. Dar închiderea acestei spirale este mulţime perfectă?
14) Demonstraţi, că mulţimea E a tuturor funcţiilor continui pe segmentul $[0;1]$, ce satisfac inegalitatea $A \leq f(x) \leq B$ (unde $A < B -$ numere fixate), este mulţime închisă în spaţiul $C[0;1]$.
15) Fie $f(x) -$ funcţie fixată continuă pe segmentul $[0;1]$; demonstraţi, că mulţimea tuturor funcţiilor $f(x)$, continui pe $[0;1]$ şi satisfac relaţia $f(x) \leq F(x)$, este închisă în spaţiul $C[0;1]$.
16) Mereu oare intersecţia a două mulţimi perfecte este mulţime perfectă?
17) Verificaţi justeţea afirmaţiei: "Dacă $E -$ mulţime închisă, atunci închiderea interiorului mulţimii E coincide cu E (adică $E = \overline{\overset{0}{\mathrm{E}}}$)". În caz că afirmaţia nu este justă, atunci verificaţi dacă sunt juste incluziunile $E \supset \overline{\overset{0}{\mathrm{E}}}$, $E \subset \overline{\overset{0}{\mathrm{E}}}$, şi care anume?

18) Verificaţi justeţea afirmaţiei: “Dacă E este mulţime deschisă, atunci interiorul închiderii mulţimii E coincide cu E (adică $E = \overset{0}{\overline{E}}$)”. În caz că afirmaţia nu este justă, atunci verificaţi dacă sunt juste incluziunile $E \supset \overset{0}{\overline{E}}$, $E \subset \overset{0}{\overline{E}}$, şi care anume?
19) Fie $f(x) -$ funcţie continuă, definită pe toată axa Ox. Demonstraţi, că mulţimea E_a a tuturor punctelor axei Ox, pentru care $f(x) > a$, este mulţime deschisă (pe axa Ox).
20) Fie $\mathrm{F}(x) -$ o funcţie fixată continuă pe segmentul $[0; 1]$. Demonstraţi, că, mulţimea tuturor funcţiilor $f(x)$, ce satisfac inegalitatea $f(x) > \mathrm{F}(x)$, este deschisă în spaţiul $C[0; 1]$.
21) Construiţi o consecutivitate numărabilă de mulţimi, intersecţia cărora nu este deschisă.
22) Demonstraţi, că mulţimea tuturor numerelor iraţionale de pe axa reală este o G_δ −mulţime.
23) Demonstraţi echivalenţa următoarelor definiţii interiorului $\overset{0}{\mathrm{E}}$ mulţimii E:

a) $\overset{0}{\mathrm{E}}$ - mulţimea tuturor punctelor interioare ale mulţimii E;

b) $\overset{0}{\mathrm{E}}$ - suma tuturor mulţimilor deschise, ce aparţin mulţimii E.

24) Demonstraţi, că dacă $f(x) -$ funcţie continuă pe $[a; b]$, atunci suma mulţimilor $E_1 \cup E_3 \cup E_5 \cup \ldots . \cup E_{2k-1} \cup \ldots$ este închisă; în cazul dat $E_n -$ mulţimea tuturor punctelor segmentului $[a; b]$, unde $n \leq f(x) \leq n + 1$.
25) Aduceţi exemplu, ce afirmă faptul, că problema precedentă devine falsă, dacă segmentul $[a; b]$ este înlocuit cu intervalul $(a; b)$.
26) Demonstraţi, că intersecţia unei mulţimi numărabile de G_δ −mulţimi este G_δ −mulţime.
27) Demonstraţi, că suma unei mulţimi finite de G_δ −mulţimi este G_δ −mulţime.
28) Demonstraţi, că suma unei mulţimi numărabile de F_σ −mulţimi este F_σ −mulţime.
29) Demonstraţi, că intersecţia unei mulţimi finite de F_σ −mulţimi este F_σ −mulţime.
30) Fie $\{E_n\}$ −şir de mulţimi închise; demonstraţi, că $\underline{lim} E_n$ este F_σ −mulţime. Formulaţi şi demonstraţi afirmaţia analogă pentru limita superiară.

31) Demonstraţi, că mulţimea punctelor de forma $\sin r$ (unde $r -$ orice număr raţional) este densă pe segmentul $[-1; 1]$.
32) Demonstraţi, că mulţimea numerelor de forma r^3 este densă peste tot pe axa reală (unde $r -$ orice număr raţional).
33) Găsiţi închiderea mulţimii tuturor punctelor de forma $\frac{p^2}{q^2}$, unde p şi $q -$ orice numere întregi ($q \neq 0$).
34) Găsiţi închiderea mulţimii tuturor punctelor de forma $2^{\frac{p}{q}}$, unde p şi $q -$ orice numere naturale.
35) Găsiţi închiderea mulţimii tuturor punctelor de forma $\frac{q^2}{4p^2+q^2}$, unde p şi $q -$ orice număre întregi, diferite de zero.
36) Fie $f(x) -$ funcţie, continuă şi crescătoare pe $[a; b]$; fie $E -$ mulţime, densă pe $[a; b]$. Demonstraţi, că mulţime punctelor de forma $f(\xi)$, unde $\xi \in E$, este densă pe tot pe segmentul $[f(a); f(b)]$.
37) Fie mulţimea E pe axa reală posedă următoarea proprietate: pentru oice două puncte $x_1 \in E$ şi $x_2 \in E$ (unde $x_1 < x_2$) există punctul $x_3 \in E$, încât $x_1 < x_3 < x_2$. Fie $a = \inf E, b = \sup E$. Putem oare afirma, că mulţimea E este densă peste tot pe segmentul $[a; b]$? Poate oare mulţimea, ce posedă proprietăţile indicate, să fie nicăieri densă pe $[a; b]$?
38) Construiţi o mulţime numărabilă de mulţimi numărabile care două câte două nu se intersectează, fiecare din care este densă peste tot pe axa reală.
39) Fie $\xi -$ număr iraţional. Demonstraţi, că mulţimea tuturor numerelor de forma $m + n\xi$ (unde m şi $n -$ orice numere întregi) este peste tot densă pe axa reală.
40) Fie $\xi -$ număr iraţional. Este oare mulţimea tuturor numerelor de forma $m + n\xi$ (unde m şi $n -$ orice numere pare) peste tot densă pe axa reală?
41) Demonstraţi, că mulţimea punctelor M, situată pe circumferinţa Γ cu central în originea de coordinate şi unghiurile polare 1, 2, …, n, …este peste tot densă pe Γ.
42) Demonstraţi, că mulţimea tuturor polinoamelor este peste tot densă în spaţiul $C[0; 1]$. *Indicaţii*. Aplicaţi teorema lui Weierstras despre aproximare cu ajutorul polinoamelor a funcţiilor, continui pe segment.
43) Demonstraţi, că mulţimea tuturor polinoamelor cu coeficienţi raţionali este peste tot densă în $C[0; 1]$.

44) Demonstraţi, că mulţimea lui Cantor D este nicăieri densă pe axa reală.

45) (197) Demonstraţi, că mulţimea E a tuturor funcţiilor constante $y \equiv a$, unde $a \in D$ ($D -$ mulţimea lui Cantor) este nicăieri densă în spaţiul $C[0;1]$.

46) Construim mulţimea E pe segmentul $[0;1]$ în felul următor: examinăm un şir numeric pozitiv descrescător $a_1 > a_2 > \cdots$, încât $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = A < 1$. Excludem din $[0;1]$ intervalul de lungimea de lungimea a_1 cu central în mijlocul segmenului; apoi, din două segmente rămase înlăturăm intervale de lungimea $\frac{a_2}{2}$ cu centrele în mijlocurile acestor segmente; apoi, din patru segmente rămase înlăturăm intervalele de lungimea $\frac{a_3}{2^3}$ cu centrele în mijlocurile acestor segmente ş.a.m.d.; mulţimea, rămasă după o mulţime numărabilă de înlăturări, o vom nota E. Demonstraţi, că ea este nicăieri densă pe $[0;1]$.

Capitolul 3. Funcții de variabilă reală

3.1.CONTINUITATEA FUNCȚIILOR REALE DE O VARIABILĂ REALĂ

Fie $f : E \to \boldsymbol{R},\ E \subset \boldsymbol{R}$, o funcție reală și $x_0 \in E$.

Definiția 3.1.1 *Spunem că funcția f este* continuă în punctul x_0 *dacă oricare ar fi U o vecinătate a lui f*(x_0)*, există o vecinătate V a lui* x_0*, a.î. pentru orice x* $\in V \cap E$*, să avem f*(*x*) $\in U$.

Vecinătatea *V* depinde de vecinătatea *U*. În problema continuității se cercetează comportarea funcției în vecinătatea punctului x_0 față de valoarea funcției în punctul x_0, deci x_0 trebuie să aparțină mulțimii de definiție a funcției.

Funcția este continuă în punctul x_0 dacă la valori ale variabilei *x* vecine lui x_0 funcția ia valori oricât de apropiate de valoarea funcției în punctul x_0. Nu se pune problema continuității în punctele $+\infty$ și $-\infty$ și nici în punctele în care valoarea funcției devine infinită. Într-un punct izolat $x_0 \in E$ funcția *f* este continuă, deoarece în definiția continuității nu se cere (ca la definiția limitei într-un punct) ca x_0 să fie punct de acumulare al lui *E*.

Un punct x_0 în care funcția este continuă se numește *punct de continuitate* pentru funcția *f*.

Definiția precedentă este echivalentă cu următoarea definiție:

Definiția 3.1.2 *Spunem că funcția f este* continuă în punctul x_0 *dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există un număr* $\delta(\varepsilon) > 0$ *a.î. oricare ar fi* $x \in E$ *pentru care* $|x - x_0| < \delta$*, să avem* $|f(x) - f(x0)| < \varepsilon$.

În cazul în care $x_0 \in E$ este punct de acumulare pentru *E*, continuitatea în punctual x_0 se poate defini cu ajutorul limitei.

Definiția 3.1.3 *Spunem că funcția f este* continuă în punctul x_0*, punct de acumulare pentru E, dacă f are limită în* x_0 *și aceasta este egală cu f*(x_0)*, adică*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Deoarece *f* este continuă în orice punct izolat din *E*, problema continuității se pune numai în punctele de acumulare ale lui *E*. Dacă f nu este continuă în x_0, spunem că funcția *f* este *discontinuă* în punctul x_0, iar x_0 se numește *punct de discontinuitate*.

Funcția f este continuă pe o mulțime $A \subset E$ dacă este continuă în fiecare punct al mulțimii *A*, adică

Definiția 3.1.4 *Spunem că funcția f este* continuă pe $A \subset E$ *dacă pentru orice* $x \in A$ *și pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există un număr* $\delta(\varepsilon, x) > 0$ *a.î. oricare ar fi* $x_0 \in E$ *pentru care* $|x_0 - x| < \delta$, *să avem* $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$.

Definiția. Vom numi diametrul mulțimii D și-l vom notat cu $\delta(D)$ sau $diam(D)$, ca ajutorul numărului

$$\delta(D) = diam(D) = \sup d(x, y)$$

Definiție. *Numărul* $\rho(x, D) = inf_{y \in D}\, d(x, y)$ *se numeste* ***distanța*** *de la punctual* x *la mulțimea D.*

Dacă D este multime închisă atunci $\rho(x, D) = 0 \Leftrightarrow x \in D$.

Fie funcția $f: E \subset R \to R$. Diametrul mulțimii $f(E)$, se numește *oscilația funcției* f *pe multimea E* și se notează prin

$$\omega_f(E) = \sup_{x,y \in E} |f(x) - f(y)|$$

Dacă x_0 este un punct oarecare din E și $V(x_0)$ mulțimea vecinătăților lui x_0, atunci numărul

$$\omega_f(x_0) = \inf_{V \in V(x_0)} \delta[f(E \cap V)],$$

definește *oscilația lui* f *în punctul* x_0.

Proprietăți:

(1). Oscilația $\omega_f(E)$ este finită dacă și numai dacă f este mărginită pe E și avem

$$\omega_f(E) = \sup_{x\in E} f(x) - \inf_{x\in E} f(x).$$

(2). Dacă $A \subseteq E \Rightarrow \omega_f(A) \leq \omega_f(E)$.

(3). Funcția $f: E \subset R \to R$ este continuă într-un punct $a \in E$ dacă și numai dacă oscilația sa în acest punct este nulă (adică $\omega_f(a) = 0$).

Teorema 3.1.1. *Dacă f este continuă în* x_0 *și f(*x_0*) = 0, există o vecinătate V a lui* x_0 *a.î. pentru orice* $x \in V \cap E$ *să avem* $f(x) \cdot f(x_0) > 0$.

Demonstrație. Să presupunem că *f*(x_0) > 0 și fie $\varepsilon = \frac{1}{2} f(x_0)$. Din definiția continuității, rezultă că există o vecinătate *V* a lui x_0 a.î. pentru orice $x \in V \cap E$ avem $|f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{2} f(x_0)$, de unde $f(x) > \frac{1}{2} f(x_0) > 0$. Dacă $f(x_0) < 0$, luăm $\varepsilon = -1\,2 f(x_0)$.

Teorema 3.1.2. *Dacă f este continuă în* x_0 *există o vecinătate V a lui* x_0 *în care f este mărginită.*

3.2. PROPRIETĂȚI ALE FUNCȚIILOR CONTINUE PE UN INTERVAL ÎNCHIS ȘI MĂRGINIT

Teorema 3.2.1 ***(Prima teoremă a lui Weierstrass).*** *O funcție continuă pe un interval închis și mărginit* $[a, b]$ *este mărginită pe* $[a, b]$.

Demonstrație. Demonstrație prin reducere la absurd. Să presupunem că funcția $f : [a, b] \to \boldsymbol{R}$, continuă pe [*a*,*b*], nu ar fi mărginită pe [*a*,*b*]. Deci, pentru orice număr *M* $>$ 0 există un punct $\xi_M \in [a, b]$ a.î. $|f(\xi_M)| > M$. Să luăm *M* = *n*. Urmează că pentru orice $n \in \boldsymbol{N}$ există un $\xi_n \in [a, b]$ a.î. $|f(\xi_n)| > n$. Intervalul $[a, b]$ fiind mărginit și închis, șirul (ξ_n) este mărginit și, conform lemei lui Cesaro, se poate extrage un subșir $\left(\xi_{n_k}\right)$ convergent la un punct $\xi \in [a, b]$.

Funcția fiind continuă pe $[a, b]$ este continuă și în ξ, deci $f(\xi_n) \to f(\xi)$. Însă din $\left|f\left(\xi_{n_k}\right)\right| > n_k$ deducem că pentru $k \to \infty$, $\left|f\left(\xi_{n_k}\right)\right| \to \infty$. Contradicție.

Teorema 3.2.2 ***(A doua teoremă a lui Weierstrass).*** *O funcție continuă pe un interval închis și mărginit* $[a, b]$ *își atinge marginile pe* $[a, b]$.

Demonstrație. Funcția $f : [a, b] \to \boldsymbol{R}$, fiind continuă pe $[a,b]$, după teorema precedentă este mărginită pe $[a,b]$, deci există numerele m și M a.î. $m \leq f(x) \leq M$, unde m este marginea inferioară și M marginea superioară a valorilor funcției f pe $[a, b]$. Să arătăm că există un punct $\xi \in [a,b]$ în care $f(\xi) = m$.

Demonstrație prin reducere la absurd. Să presupunem că în nici un punct din $[a,b]$ funcția f nu ia valoarea m. Atunci, după definiția marginii inferioare, urmează că $f(x) - m > 0$ pe $[a,b]$ și deci funcția $f_1(x) = \frac{1}{f(x) - m}$ este continuă și pozitivă pe $[a, b]$. Prin urmare, conform teoremei precedente, f_1 este mărginită pe $[a,b]$, deci există un $M_1 > 0$ a.î. $f_1(x) \leq M_1$, de unde rezultă că $m + \frac{1}{M_1} \leq f(x)$, adică m nu ar mai fi marginea inferioară a valorilor funcției f pe $[a, b]$. Contradicție.

În mod asemănător se demonstrează existența unui punct în care f ia valoarea M.

Teorema 3.2.3. *Dacă o funcție continuă pe un interval închis și mărginit* $[a,b]$ *ia valori de semne contrare la capetele intervalului, adică* $f(a) \cdot f(b) < 0$, *atunci există cel puțin un punct* $x_0 \in (a, b)$ *a.î.* $f(x_0) = 0$.

Demonstrație. Să presupunem că $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ și fie $x_1 = \frac{a+b}{2}$ mijlocul lui $[a,b]$. Dacă $f(x_1) = 0$, x_1 este punctul căutat. În caz contrar, notăm cu $[a_1, b_1]$ acela dintre intervalele $[a, x_1]$ sau $[x_1, b]$ pentru care $f(a_1) < 0$, $f(b_1) > 0$ și fie $x_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$ mijlocul lui $[a_1, b_1]$. Dacă $f(x_2) = 0$, x_2 este punctul căutat. În caz contrar, notăm cu $[a_2, b_2]$ acela dintre intervalele $[a_1, x_2]$ sau $[x_2, b_1]$ pentru care

$f(a_2) < 0, f(b_2) > 0$. Continuând în acest mod, obținem un șir de intervale mărginite și închise $I_n = [a_n, b_n]$ cu $I_{n+1} \subset I_n$ și $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0$. Din Lema lui Cantor rezultă că $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{x_0\}$, punctul x_0 fiind limita comună a celor două șiruri (a_n) și (b_n) și $x_0 \in (a,b)$. Deoarece $f(a_n) < 0, f(b_n) > 0$ și f este continuă, trecând la limită pentru $n \to \infty$, urmează că $f(x_0) \leq 0$ și $f(x_0) \geq 0$, ceea ce conduce la $f(x_0) = 0$.

Teorema 3.2.4. *O funcție continuă pe un interval închis și mărginit* $[a,b]$ *ia cel puțin o dată toate valorile cuprinse între marginea inferioară m și marginea superioară M a valorilor sale pe* $[a,b]$.

Demonstrație. Fie $\alpha \in (m, M)$. Funcția $g(x) = f(x) - \alpha$ este continuă pe $[a, b]$. Dacă ξ_m și ξ_M sunt punctele pentru care $f(\xi_m) = m$ și $f(\xi_M) = M$, avem $g(\xi_m) < 0$, $g(\xi_M) > 0$. Deci există un punct x_0 cuprins între ξ_m și ξ_M a.î. $g(x_0) = 0$, adică $f(x_0) = \alpha$.

Proprietatea pusă în evidență în această teoremă se numește *proprietatea lui Darboux*.

3.3. CONTINUITATEA UNIFORMĂ

Definiția 3.3.1. *Spunem că funcția* $f : E \to \mathbf{R}$ *este* uniform continuă pe E *dacă oricare ar fi* $\varepsilon > 0$ *există un număr* $\delta(\varepsilon) > 0$ *a.î. pentru orice* $x, x' \in E$ *pentru care* $|x - x'| < \delta$, *să avem* $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Exemplu. *Funcția* $f(x) = x^3$, $x \in [1; 3]$ *este uniform continuă pe* $[1;3]$. Într-adevăr,

$$|f(x) - f(x')| = |x - x'| \cdot (x^2 + xx' + x'^2) \leq 27\,|x - x'| < \varepsilon,$$

pentru orice $x, x' \in [1,3]$ pentru care $|x - x'| < \delta(\varepsilon)$, cu $\delta(\varepsilon) = 27/\varepsilon$.

Dacă în definiția precedentă păstrăm pe $x^{'} \in E$ fix, obținem definiția continuității
funcției f pe E. Deci o funcție uniform continuă pe mulțimea E este continuă pe E. Reciproca *nu* este adevărată.

Teorema 3.3.1. *O funcție continuă pe un interval închis și mărginit (compact) este uniform continuă pe acel interval.*

Demonstrație. Demonstrație prin reducere la absurd. Să presupunem că funcția $f : [a, b] \to \boldsymbol{R}$, continuă pe [*a*, *b*], nu ar fi uniform continuă pe [*a*, *b*]. Rezultă atunci că există un $\varepsilon_0 > 0$ a.î. pentru orice $\delta > 0$ există punctele x_δ, $x_\delta^{'} \in [a, b]$ cu $|x_\delta - x_\delta^{'}| < \delta$ pentru care $|f(x_\delta) - f(x_\delta^{'})| \geq \varepsilon_0$.

Să luăm $\delta = \frac{1}{n}$. Obținem astfel două șiruri de puncte (x_n), $(x_n^{'})$ din [*a*, *b*] cu proprietatea că pentru orice $n \in \mathbf{N}$ avem $|x_n - x_\delta^{'}| < \frac{1}{n}$ și $|f(x_n) - f(x_\delta^{'})| \geq \varepsilon_0$.

Intervalul [*a*, *b*] fiind mărginit, șirul (x_n) este mărginit și, conform Lemei lui Cesaro, admite un subșir $(x_{n_k}^{'})$ convergent. Fie x_0 limita sa. Deoarece $|x_n - x_\delta^{'}| < \frac{1}{n_k} \to 0$, urmează că subșirul $(x_{n_k}^{'})$ al lui $(x_n^{'})$ este de asemenea convergent la x_0. Intervalul [*a*,*b*] fiind închis, $x_0 \in [a,b]$. Funcția f fiind continuă pe [*a*,*b*], deci și în x_0, avem

$$\lim_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right) = f(x_0),\ \lim_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}^{'}\right) = f(x_0),$$

de unde $0 \geq \varepsilon_0$. Contradicție. Rezultă că *f* este uniform continuă pe [*a*, *b*].

O condiție suficientă de uniformă continuitate este dată de următoarea teoremă.

Teorema 3.3.2. *Dacă pentru orice x,* $x^{'} \in E$ *există un număr L* > 0 *a.î.*

$$|f(x) - f(x^{'})| < L\,|x - x^{'}|, \tag{3.3.1}$$

atunci funcția f este uniform continuă pe E.

Demonstrație. Într-adevăr, pentru $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{L}$, inegalitatea $|x - x'| < \delta$ implică inegalitatea $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Condiția (3.3.1) se numește *condiția lui Lipschitz*.

3.4. PUNCTE DE DISCONTINUITATE

Fie $f : E \to \boldsymbol{R}$ și $x_0 \in E$.

Definiția 3.4.1. *Spunem ca funcția f este* **continua la stânga în $\boldsymbol{x_0}$** *dacă pentru orice șir $(x_n)_{n\geq 1}$ din $E \cap (-\infty; x]$ convergent la x_0 avem:*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0),$$

Așadar continuitatea la stânga în punctul x_0 înseamna că are loc egalitatea $f(x_0 - 0) = f(x_0)$ adica limita la stânga în x_0 să fie egală cu valoarea numerică în punctul x_0.

Definiția 3.4.2. *Spunem că funcția f este* **continuă la dreapta în $\boldsymbol{x_0}$** *dacă pentru orice șir $(x_n)_{n\geq 1}$ din $E \cap (x_0; \infty]$ convergent la x_0 avem:*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Deci continuitatea la dreapta în punctul x_0 înseamnă că are loc egalitatea $f(x_0 + 0) = f(x_0)$, adică limita la dreapta în x_0 să fie egală cu valoarea numerică a funcției în punctul x_0.

Evident, că o funcție este continuă într-un punct x_0 dacă și numai dacă funcția este continuă la stânga în x_0 și la dreapta în x_0.

Observația 3.4.1. *Dacă x_0 este punct de acumulare al lui E, pentru care ambele limite laterale au sens, funcția este continuă în x_0 dacă și numai dacă limitele laterale există și sunt egale cu $f(x_0)$.*

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x) = f(x_0).$$

Dacă funcția f nu este continuă în punctul x_0 spunem că f este discontinuă în x_0, iar x_0 se numește punct de discontinuitate pentru f. Deoarece f este continuă în punctele izolate ale lui E, un punct de discontinuitate $x_0 \in E$ este în mod necesar un punct de acumulare pentru E. Punctele de discontinuitate ale funcției se impart în doua categorii: puncte de discontinuitate de prima speță și puncte de discontinuitate de spețа a doua.

Definiția 3.4.3. *Punctul $x_0 \in E$ se numește* ***punct de discontinuitate*** *de* ***prima speță*** *dacă există*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) \in R, \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) \in R$$

dar nu sunt egale.

Definiția 3.4.4. *Punctul $x_0 \in E$ se numește* ***punct de discontinuitate de speța a doua*** *dacă nu există un punct de discontinuitate de prima speță.*

Altfel spus punctul $x_0 \in E$ se numește punct de discontinuitate de speța a doua dacă nu există limita la stânga sau (și) la dreapta în x_0, sau aceste limite sunt infinite.

Propoziția 3.4.1. Toate punctele de discontinuitate ale funcției monotone pe un interval; $f: I \to R$, sunt de prima speță.

Propozitia 3.4.2. Mulțimea punctelor de discontinuitate ale unei funcții monotone este cel mult numarabilă.

Exemplu. $f(x) = \begin{cases} 0, x \leq 0, \\ sin\frac{1}{2}, x \geq 0 \end{cases}$ posedă în punctul $x_0 = 0$ discontinuitate de speța a doua, deoarece $\nexists \lim_{x \to +0} sin\frac{1}{2}$.

Teorema 3.4.1. *Fie funcția f definită pe mulțimea închisă $F \subset R^n$. Mulțimea $A_\varepsilon = \{x: \omega(x, f)\} \geq \varepsilon$ închisă ∀>ε.*

Demonstrație. Fie x_0 punct de acumulare al mulțimii A_ε. $A_\varepsilon \subset F \Longrightarrow x_0 \in F$. În orice vecinătate $V(x_0;\delta)$ există punctul $x^{'} \neq x_0$ din A_ε, încât $\omega(x^{'};f) \geq \varepsilon$. Atunci $\omega(x^{'};f) \geq \varepsilon \Longrightarrow x_0 \in A_\varepsilon$ și A_ε este închisă

Teorema 3.4.2. *Mulțimea punctelor de discontinuitate ale funcției, definite pe mulțimea închisă $F \subset R^n$, reprezintă reuniunea cel mult numărabilă de mulțimi închise.*

Demonstrație. Notăm mulțimea punctelor de discontinuitate ale funcției f prin A. Vom arăta, că $A = \bigcup_m A_{\frac{1}{m}}$. Vom demonstra ca egalitatea mulțimilor.

1. $\forall\, x \in A \Rightarrow \omega(x;f) > 0$.

Atunci $\exists m \in N{:}\, \omega(x;f) \geq \frac{1}{m} \Rightarrow x \in A_{\frac{1}{m}} \Rightarrow x \in \bigcup_m A_{\frac{1}{m}} \Rightarrow A \subset \bigcup_m A_{\frac{1}{m}}$

$\forall x \in \bigcup_m A_{\frac{1}{m}} \Rightarrow x \in A_{\frac{1}{m_0}} \Rightarrow \omega(x;f) \geq \frac{1}{m_0} > 0 \Rightarrow x -$ punct de discontinuitate pentru $f \Rightarrow x \in A \Rightarrow \bigcup_m A_{\frac{1}{m}} \subset A$.

Deci $A = \bigcup_m A_{\frac{1}{m}}$ și toate mulțimile $A_{\frac{1}{m}}$ sunt închise, și cel mult numărabile.

Teorema 3.4.3. *Toate punctele de discontinuitate ale funcției $f : R \rightarrow R$, dacă ele există, sunt numai de spețа întâi.*

Demonstrație. Fie $f(x)$ este nedescrescătoare. Dacă $x_0 \in X -$ punct izolat, atunci în punctul x_0 funcția este continuă. Este suficient să presupunem, că $x_0 -$ este punct de acumulare al $X = D(f)$, $x_0 \in X$. Presupunem, că în orice vecinătate a punctului x_0 există o infinitate de puncte din X, situat mai la stânga de x_0. Deoarece $f(x)$ este monotonă, pentru toate aceste puncte x^* avem $f(x^*) \leq f(x_0)$.

În acest caz există

$$\underline{\mathrm{m}} = \sup_{\substack{x \in X \\ x < x_0}} f(x).$$

Vom arăta că

$$\lim_{\substack{x \to x_0 - o \\ x \in X}} f(x) = \underline{m}.$$

Conform proprietăților supremului unei funcții, $\forall \varepsilon > 0\ \exists x^* \in X: f(x^*) > \underline{m} - \varepsilon$. Pentru $x \in (x^*; x_0)$

$$\underline{m} - \varepsilon < f(x^*) \leq f(x) \leq \underline{m} \leq \underline{m} + \varepsilon$$

adică $|f(x) - \underline{m}| < \varepsilon$, adică $f(x_0 - 0) = \underline{m}$.

În continuare presupunem, că în orice vecinătate a punctului x_0 mai la dreapta de el există o infinitate de puncte ale mulțimii X.

Atunci pentru așa puncte $f(x_0) \leq f(x)$, atunci

$$\exists \inf_{\substack{x \in X \\ x > x_0}} f(x) = \overline{m}.$$

În mod analog se arată, că $f(x_0 + 0) = \overline{m}$. În acest caz $f(x_0 \pm 0)$ există și sunt finite. Dacă $x_0 -$ punct de discontinuitate, atunci el este de speța întâi salt finit.

Dacă însă în stânga punctului x_0 în orice vecinătate există o mulțime finită de puncte din X, iar în dreapta o mulțime infinită de puncte sau invers, adică într-o vecinătate destul de mică există puncte din X doar într-o parte a acestui punct, atunci $x_0 -$ punct de discontinuitate aparent.

Astfel punctul de discontinuitate al funcției monotone, dacă există, este de speța întâi salt: $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$.

Să stabilim puterea mulțimii punctelor de discontinuitate ale funcțiilor monotone. Să ne mărginim la cazul $X = [a; b]$.

Teorema 3.4.4. *Mulțimea punctelor de discontinuitate ale funcției monotone, definite pe* $[a; b]$, *este cel mult numărabilă.*

Demonstrație. Fie, spre exemplu, f crescătoare. Conform teoremei 1 mulțimea punctelor de discontinuitate $A = \bigcup_m A_{\frac{1}{m}}$. Fiecare mulțime $A_{\frac{1}{m}}$ este finită sau vidă: și posedă nu mai mult decât $(f(b) - f(a)): m$. A reprezintă o mulțime numărabilă deoarece reprezintă reuniunea numărabilă de mulțimi numărabile.

Această teoremă poate fi generalizată pentru caz general.

Teorema 3.4.5. *Dacă funcția f este monotonă și mărginită pe mulțimea $X \subset R$, atunci $\forall\ \varepsilon > 0$ mulțimea A_ε este cel mult finită.*

3.5.ȘIRURI DE FUNCȚII

Fie $D \subseteq R, D \neq \emptyset$ și fie $f_0, f_1, f_2,. . .$ funcții reale definite pe mulțimea D. șirul f_0, f_1, f_2 . . . se numește *șir de funcții* și se notează cu $(f_n)_{n\geq 0}$. La fel ca și în cazul șirurilor numerice, dorim să studiem proprietățile de convergență ale șirurilor de funcții, investigând posibilele moduri în care se poate defini noțiunea de convergență, și să cercetăm dacă tipurile de convergență astfel definite realizează sau nu transmiterea unor proprietăți uzuale ale funcțiilor de la termenii unui șir de funcții la funcția limită.

Definiția 3.5.1. *Fie $(f_n)_{n\geq 0}$ un șir de funcții definite pe mulțimea D. Vom spune că $(f_n)_{n\geq 0}$ este **uniform mărginit** dacă există $M > 0$ astfel încât $|f_n(x)| \leq M$ pentru orice $n \in N$ și $x \in D$.*

Exemplu. Fie $(f_n)_{n\geq 0}$, $f_n: R \to R$, $f_n(x) = \sin nx$. Atunci $|f_n(x)| \leq 1$ pentru orice $n \in N$ și $x \in R$, deci $(f_n)_{n\geq 0}$ este uniform mărginit.

Definiția 3.5.2. Vom spune că $a \in D$ este un ***punct de convergență*** al șirului de funcții $(f_n)_{n\geq 0}$ dacă șirul numeric $(f_n(a))_{n\geq 0}$ al valorilor funcțiilor în a este convergent. Mulțimea tuturor punctelor de convergențăale șirului de funcții $(f_n)_{n\geq 0}$ se va numi atunci ***mulțimea de convergență*** a acestui șir.

Definiția 3.5.3. *Fie $(f_n)_{n\geq 0}$ un șir de funcții definite pe mulțimea D și fie $E \subseteq D$ mulțimea de convergențăa șirului de funcții $(f_n)_{n\geq 0}$. Funcția $f: E \to R$ definită prin*

$$f : E \to R, f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

*se numește **funcția limită** a șirului de funcții $(f_n)_{n\geq 0}$.*

Exemplu. Fie $(f_n)_{n\geq 0}$, $f_n: [0, 1] \to R$, $f_n(x) = \frac{nx}{nx+1}$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{nx}} = 1, \text{pentru } x \in (0,1],$$

iar

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 \text{ pentru } x = 0.$$

Urmează că mulțimea de convergență a șirului de funcții $(f_n)_{n\geq 0}$ este [0,1], iar funcția limită este

$$f : [0,1] \to R, f(x) = \begin{cases} 1, x \in (0,1], \\ 0, \quad x = 0. \end{cases}$$

Definiția 3.5.4. *Fie* $(f_n)_{n\geq 0}$ *un șir de funcții definite pe mulțimea D și fie de asemenea* $f : D \to R$. *Vom spune că* $(f_n)_{n\geq 0}$ ***converge punctual*** *sau* ***simplu*** *la* f *și vom nota* $f_n \overset{s}{\to} f$ *pentru* $n \to \infty$ *dacă pentru orice* $x \in D$ *șirul numeric* $(f_n)_{n\geq 0}$ *este convergent la* $f(x)$. *În aceste condiții, pentru orice* $x \in D$ *și orice ε > 0 există un rang* $n_{\varepsilon,x} \in N$ *astfel ca*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \text{pentru orice } n \geq n_{\varepsilon,x}. \tag{8.1}$$

Din exemplul anterior se observă însă că acest tip de convergență nu asigură transferul unor proprietăți cum ar fi continuitatea și derivabilitatea de la termenii șirului de funcții către funcția limită. În acest sens, deși toți termenii șirului $(f_n)_{n\geq 0}$ sunt funcții derivabile pe [0, 1], funcția limită f nu este nici măcar continuă pe acest interval, fiind discontinuă în $x_0 = 0$. Este naturală atunci introducerea unui concept mai puternic de convergență.

Definiția 3.5.5. *Fie* $(f_n)_{n\geq 0}$ *un șir de funcții definite pe mulțimea D și fie de asemenea* $f : D \to R$. *Vom spune că* $(f_n)_{n\geq 0}$ ***converge unifor****m la* f *și vom nota* $f_n \overset{u}{\to} f$ *pentru n → ∞ dacă pentru orice ε > 0 există un rang* $n_\varepsilon \in N$ *astfel ca*

$$| f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \text{pentru orice } n \geq n_\varepsilon \text{ și orice } x \in D,$$

adică rangul $n_{\varepsilon,x}$ *introdus în (8.1) nu mai depinde de* x, *iar diferența* $| f_n(x) - f(x)|$ *poate fi făcută suficient de mică de la un rang* n_ε *încolo indiferent de valoarea lui* $x \in D$.

Conform definiției 3.5.5, se observă că dacă $f_n \overset{u}{\to} f$ pentru $n \to \infty$, atunci și $f_n \overset{s}{\to} f$ pentru $n \to \infty$. Implicația inversă nu este însă adevărată, în acest sens putându-se considera următorul exemplu.

Exemplu. Fie $(f_n)_{n\geq 0}$, $f_n: [0,1] \to R$, $f_n(x) = x^n(1 - x^n)$. Atunci, deoarece $0 \leq x^n (1 - x^n) \leq x^n$, iar $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ pentru $x \in [0,1)$, urmează că $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ pentru $x \in [0,1)$. Deoarece $f_n(1) = 0$ pentru $n \geq 0$, urmează că $\lim_{n\to\infty} f_n(1) = 0$, deci $f_n \overset{s}{\to} f$ pentru $n \to \infty$, unde $f : [0,1] \to R$, $f(x) = 0$.

Fie $\varepsilon = \frac{1}{4}$ și să presupunem că $f_n \overset{u}{\rightarrow} f$ pentru $n \rightarrow \infty$. Atunci există un rang $n_\varepsilon \in N$ astfel ca

$$| f_n(x)| < \frac{1}{4}, \text{ pentru orice } n \geq n_\varepsilon \text{ și orice } x \in [0,1].$$

Însă $f_n\left(\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{4}$ pentru orice n ≥ 1, ceea ce contrazice inegalitatea de mai sus. În concluzie, $f_n \overset{u}{\nrightarrow} f$ pentru n → ∞.

Se poate obține în mod imediat următorul criteriu de convergență uniformă, util atunci când limita șirului este cunoscută de la bun început, sau poate fi ușor determinată.

Teorema 3.5.1. *Fie $(f_n)_{n\geq 0}$ un șir de funcții definite pe mulțimea D și fie de asemenea $f : D \rightarrow R$. Atunci $f_n \overset{u}{\rightarrow} f$ pentru n → ∞ dacă și numai dacă*

$$\lim_{n\rightarrow\infty}\left(\sup_{x\in D} | f_n(x) - f(x)|\right) = 0.$$

Exemplu. Fie $(f_n)_{n\geq 0}$, $f_n : R \rightarrow R$, $f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$. Să arătăm că $f_n \overset{u}{\rightarrow} f$ pentru n → ∞, unde $f : R \rightarrow R$, $f(x) = 0$. În acest sens, conform celor de mai sus, este suficient să demonstrăm că

$$\lim_{n\rightarrow\infty}\left(\sup_{x\in R} |f_n(x)|\right) = 0$$

Deoarece f_n este impară pentru orice n ≥ 0, iar $f_n(x) \geq 0$ pentru x ≥ 0, urmează că

$$\sup_{x\in R} | f_n(x)| = \sup_{x\geq 0} | f_n(x)| = \sup_{x\geq 0} f_n(x).$$

Întrucât

$$f_n'(x) = \frac{1+nx^2-2nx^2}{(1+nx^2)^2} = \frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2},$$

urmează că $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ este unicul punct de maxim local al lui f_n pe [0, ∞), iar cum $f_n(x_n) = \frac{1}{2\sqrt{n}}$, urmează că

$$f_n(x_n) \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}, \text{ pentru orice } x \geq 0,$$

iar

$$\sup_{x\geq 0} f_n(x) = \frac{1}{2\sqrt{n}} \rightarrow 0, \text{pentru } n \rightarrow \infty,$$

deci $f_n \overset{u}{\rightarrow} f$ pentru n → ∞.

Vom preciza în cele ce urmează un criteriu care constituie o adaptare a criteriului de convergență Cauchy pentru șiruri, menționând în esență faptul că dacă șirurile numerice $(f_n)_{n\geq 0}$ sunt fundamentale în mod uniform, în sensul că rangul indicat în condiția Cauchy depinde doar de ε, nu și de x, atunci $(f_n)_{n\geq 0}$ este uniform convergent. La fel ca și în cazul șirurilor numerice, nu este necesar să fie cunoscută limita șirului de funcții, așa cum s-a întâmplat în cazul criteriului anterior.

Teorema 3.5.2. *Fie $(f_n)_{n\geq 0}$ un șir de funcții definite pe mulțimea D. Atunci $(f_n)_{n\geq 0}$ este uniform convergent către o funcție $f : D \to R$ dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un rang $n_\varepsilon \in N$ astfel încât*

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \text{ pentru orice } m, n \geq n_\varepsilon \text{ și orice } x \in D.$$

Rezultatul se poate exprima și sub următoarea formă echivalentă.

Teorema 3.5.3. *Fie $(f_n)_{n\geq 0}$ un șir de funcții definite pe mulțimea D. Atunci $(f_n)_{n\geq 0}$ este uniform convergent către o funcție $f : D \to R$ dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in N$ astfel încât*

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \text{ pentru orice } n \geq n_\varepsilon, \text{ orice } p \geq 0 \text{ și orice } x \in D.$$

Exemplu. Fie $(f_n)_{n\geq 1}$, $f_n : R \to R$,

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k(k+1)}.$$

Să arătăm că $(f_n)_{n\geq 1}$, este uniform convergent.

Fie ε > 0. Atunci

$$\left|f_{n+p}(x) - f_n(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\sin kx}{k(k+1)}\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \left|\frac{\sin kx}{k(k+1)}\right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k(k+1)}$$

Deoarece

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=n+1}^{n+p} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) < \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

pentru $n \geq n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, urmează că

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \text{ pentru orice } n \geq n_\varepsilon, \text{ orice } p \geq 0 \text{ și orice } x \in D.$$

Conform teoremei de mai sus, urmează că $(f_n)_{n\geq 0}$ este uniform convergent.

Următorul rezultat poartă numele de *criteriul majorării* și indică faptul că o condiție suficientă pentru convergența uniform a unui șir de funcții către o funcție dată este ca modulul diferenței dintre termenii șirului și acea funcție să poată fi majorat, indiferent de valoarea argumentului, de termenii unui șir cu limita 0.

Teorema 3.5.4. *Fie $(f_n)_{n\geq 0}$ un șir de funcții definite pe mulțimea D și fie de asemenea $f: D \to R$. Dacă există $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ un șir de numere reale pozitive astfel încât $lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ și*

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n, \textit{ pentru orice } n \in N \textit{ și } x \in D,$$

atunci $f_n \overset{u}{\to} f$ pentru $n \to \infty$.

Demonstrație. Deoarece

$$\sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n, \text{ pentru orice } n \in N,$$

concluzia urmează în mod imediat cu ajutorul Teoremei 8.1.

Exemplu. Fie $(f_n)_{n\geq 0}$, $f_n : [0,1] \to R$, $f_n(x) = \frac{cos\ nx}{n^2+1}$. Atunci

$$|f_n(x) - 0| = \frac{|\cos\ nx|}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2+1}, \text{ pentru orice } n \in N \text{ și } x \in [0,1],$$

iar

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1} = 0,$$

deci $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniform către funcția $f: [0,1] \to R$, $f(x) = 0$ pentru $x \in [0,1]$.

Pentru studierea convergenței uniforme a unui șir de funcții a cărei limită nu este cunoscută de la început, este utilă mai întâi determinarea funcției limită „punct cu punct", ținând seama de faptul că orice șir de funcții uniform convergent este în mod necesar și convergent punctual, după care diferența dintre termenii șirului și funcția limită astfel obținută se estimează în mod uniform.

Exercițiu. Studiați convergența șirului de funcții $(f_n)_{n\geq 0}$, $f_n : [1,2] \to R$, $f_n(x) = \frac{nx^2+2}{nx}$.

Soluție. Mai întâi, se observă că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nx^2+2}{nx} = \lim_{n\to\infty}\left(x + \frac{2}{nx}\right) = x, \text{ pentru orice } x \in [1,2],$$

deci $(f_n)_{n\geq 0}$ converge, deocamdată punctual, către funcția

$$f: [1,2] \to R, f(x) = x.$$

Să arătăm că această convergență este uniformă. Observăm că

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{2}{nx} \leq \frac{2}{n}, \text{ pentru orice } x \in [1,2],$$

iar deoarece $\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n} = 0$, urmează conform criteriului majorării că $f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $n \to \infty$. În fine, în prezența proprietății de monotonie, convergența punctual se poate transforma în convergență uniformă, așa cum va fi observat din rezultatul următor, numit *teorema lui Dini*.

Teorema 3.5.5. *Fie $(f_n)_{n\geq 0}$ un șir de funcții continue definit pe mulțimea compactă D șie de asemenea o funcție constantă $f: D \to R$. Dacă sunt îndeplinite următoarele condiții:*

1. $f_n \xrightarrow{s} f$ pentru $n \to \infty$,

2. $(f_n)_{n\geq 0}$ este monoton pentru orice $x \in D$, atunci $f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $n \to \infty$.

Teorema 3.5.6. *Fie $(f_n)_{n\geq 0}$ un șir de funcții definite pe mulțimea D și continue în $a \in D$, astfel încât $f_n \xrightarrow{s} f$ pentru $n \to \infty$, unde $f: D \to R$. Atunci f este de asemenea continuă în a.*

Conform definiției continuității pe o mulțime, teorema de mai sus conduce la următorul corolar.

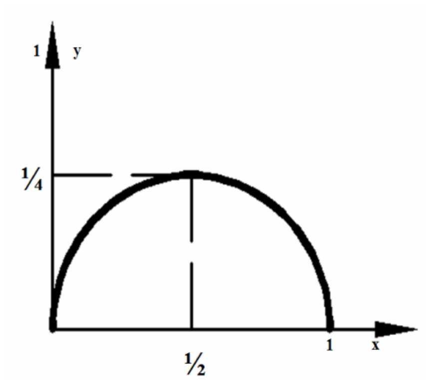
Corolar 3.5.1. *Fie $(f_n)_{n\geq 0}$ un șir de funcții definite pe mulțimea D și continue pe D, $f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $n \to \infty$. Atunci f este de asemenea continuă pe D.*

Exemplu. Fie $(f_n)_{n\geq 0}$, $f_n: [0,1] \to R$, $f_n(x) = x^n$. Atunci $f_n \xrightarrow{s} f$ pentru $n \to \infty$, unde $f: [0,1] \to R$, $f(x) = \begin{cases} 0, x \in [0,1), \\ 1, \quad x = 1. \end{cases}$

Totuși, f_n nu converge și uniform la această funcție, deoarece în caz contrar ar trebui ca f să fie continuă, fiind limita uniformă a unui șir de funcții continue, iar f este discontinuă în $x_0 = 1$.

3.6.FUNCŢII CU VARIAŢIE MĂRGINITĂ

În cursul de analiză matematică se studiază o clasă importantă de funcţii – clasa de funcţii monotone. Această clasă, însă, nu este închisă în raport cu operaţiile aritmetice, adică suma, diferenţa, produsul şi câtul a două funcţii monotone nu numaidecât vor fi funcţii monotone. De exemplu, funcţiile $f(x) = x$ şi $g(x) = x^2$ pe segmentul [0,1] cunt monoton crescătoare, însă diferenţa lor $y = x - x^2$ nu mai este monotonă.[$f'(x) = 1 -$



$2x \Rightarrow 1 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}, f''^{(x)} = -2$ deci în $x = \frac{1}{2} y$ are punct de maximum].

O clasă mai largă de funcţii, strâns legată de funcţiile monotone, şi care este închisă în raport cu operaţiile aritmetice este aşa numita clasă de <u>funcţii cu</u> <u>variaţie mărginită</u>.

Fie pe segmantul $[a, b]$ este definită funcţia $f(x)$. Să divizăm segmentul $[a, b]$ în părţi arbitrare cu punctele $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k < x_{k+1} < \cdots < x_n = b$ şi formăm suma:

$$V = |f(x_1) - f(x_0)| + |f(x_2) - f(x_1)| + \cdots + |f(x_{k+1}) - f(x_k)| + \cdots + |f(x_n) - f(x_{n-1})| = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|.$$

Definiţia 3.6.1. *Marginea superioară exactă a tuturor sumelor posibile V se numeşte* ***variaţie totală a funcţiei $f(x)$ pe segmentul $[a, b]$*** *şi se notează*

$$\bigvee_a^b f.$$

[Evident $0 \leq \bigvee_a^b f \leq +\infty$].

Dacă

$$\bigvee_a^b f < +\infty,$$

Atunci funcţia $f(x)$ se numeşte ***cu variaţie mărginită*** *pe segmentul $[a, b]$.*

Teorema 3.6.1. *Dacă $f(x)$ este monotonă pe $[a, b]$, atunci ea este o funcţie cu variaţie mărginită.*

Demonstraţie.

Fie, de exemplu, că $f(x)$ este monoton crescătoare. În acest caz toate diferenţele $f(x_{k+1}) - f(x_k)$ sunt nenegative şi deci $|f(x_{k+1}) - f(x_k)| = f(x_{k+1}) - f(x_k)$. Atunci

$$V = f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + \cdots + f(x_{k+1}) - f(x_k) + \cdots + f(x_n) - f(x_{n-1}) = f(x_n) - f(x_0) = f(b) - f(a).$$

Această relaţie este adevărată pentru orice diviziune a segmentului $[a, b]$, deci

$$\bigvee_a^b f = f(b) - f(a) < +\infty.$$

Teorema 3.6.2. *Dacă funcţia* $f(x)$ *pe segmentul* $[a,b]$ *satisface condiţiei lui Lipshitz*$|f(x)-f(y)| \leq k|x-y|$, $x,y \in [a,b]$, $k = const.$ *atunci ea este o funcţie cu variaţie mărginită.*

Demonstraţie.

Pentru orice diviziune a segmentului $[a,b]$ avem

$$V = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq \sum_{k=0}^{n-1} k(x_{k+1} - x_k) = k \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = k\,(b-a),$$

de unde rezultă

$$\bigvee_a^b f = sup\, V = k(b-a) < +\infty.$$

Consecinţa 3.6.1. *Dacă funcţia* $f(x)$ *are derivată mărginită pe* $[a,b]$, *atunci ea este o funcţie cu variaţie mărginită.*

Demonstraţie.

Rezultă din teorema lui Lagrange

$$|f(x_{k+1}) - f(x_k)| = |f'(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)| = |f'(\xi_k)| \cdot |x_{k+1} - x_k| \leq$$
$$\leq k|x_{k+1} - x_k|, \quad \left|f^{'(\xi_k)}\right| \leq k.$$

Exemplu de funcţie continuă care nu este cu variaţie mărginită.

Să luăm funcţia

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot sin\dfrac{1}{x}, 0 < x \leq 1 \\ \quad 0, \qquad\quad x = 0 \end{cases}$$

Această funcţie este continuă în orice punct al segmentului $[0,1]$. Într-adevăr, dacă $x \neq 0$, atunci $f(x)$ este continuă ca produsul a două funcţii continui x şi $sin\frac{1}{x}$. Dacă $x = 0$, atunci avem $\lim_{x\to 0} x \cdot sin\frac{1}{x} = 0 = f(0)$. (Produsul unui infinit mic x în punctul $x = 0$ la o funcţie mărginită $sin\frac{1}{x}$).

Vom arăta că $f(x)$ nu este funcţie cu variaţie mărginită. Să luăm diviziunea:

$$0 < \frac{2}{(2n-1)\pi} < \frac{2}{(2n-2)\pi} < \cdots < \frac{2}{3\pi} < \frac{2}{2\pi} < \frac{2}{\pi} < 1, \quad x_m = \frac{2}{m\pi}.$$

Observăm, că pentru $m = 2k$ şi $m = 2k+1$ o să obţinem respectiv

$$f(x_{2k}) = \frac{2}{2k\pi} \cdot sin\frac{2k\pi}{2} = 0,$$

$$f(x_{2k+1}) = \frac{2}{(2k+1)\pi} \cdot sin\frac{(2k+1)\pi}{2} = \pm\frac{2}{(2k+1)\pi};$$

$$V = \sum_{k=0}^{2n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = |f(x_1) - f(x_0)| + |f(x_2) - f(x_1)|$$
$$+ |f(x_3) - f(x_2)| + \cdots + |f(x_{2n-1}) - f(x_{2n-2})|$$
$$= \left|\frac{2}{\pi} - 0\right| + \left|0 - \frac{2}{\pi}\right| + \left|\frac{2}{3\pi} - 0\right| + \left|0 - \frac{2}{3\pi}\right| + \cdots + \left|\frac{2}{(2n-1)\pi} - 0\right|$$
$$+ \left|0 - \frac{2}{(2n-1)\pi}\right| = \frac{4}{\pi}\left[1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n}\right]$$

Suma din panteze pătrate este o sumă parţială a seriei armonice $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ care este divergentă. Aceasta înseamnă că cu creşterea lui n şi suma din parantezele pătrate creşte nemărginit, deci

$$sup\, V = sup \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \infty.$$

Funcţia

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot sin\frac{1}{x}, 0 < x \leq 1 \\ 0, \qquad x = 0 \end{cases}$$

este o funcţie cu variaţie mărginită deoarece pe segmentul [0,1] ea are derivată mărginită. Într-adevăr, dacă $x \neq 0$, atunci

$$f^{'}(x) = 2x \cdot sin\frac{1}{x} - sin\frac{1}{x} \Rightarrow |f^{'}(x)| = \left|2x \cdot sin\frac{1}{x} - sin\frac{1}{x}\right|$$
$$\leq \left|2x \cdot sin\frac{1}{x}\right| + \left|sin\frac{1}{x}\right| \leq 2 + 1 = 3.$$

Dacă $x = 0$ atunci

$$f^{'}(0) = \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x^2 \cdot sin\frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x\to 0^+} x \cdot sin\frac{1}{x} = 0.$$

Aşadar în orice punct $x \in [0,1] |f^{'}(x)| \leq 3$, conform consecinţei $f(x)$ este o funcţie cu variaţie mărginită.

Teorema 3.6.3. *Dacă $f(x)$ este o funcţie cu variaţie mărginită pe segmentul $[a, b]$, atunci ea este mărginită pe acest segment.*

Demonstraţie.

Fie x un punct arbitrara de pe $[a,b]$. Avem

$$|f(x)| = |f(x) - f(a) + f(a)| \leq |f(x) - f(a)| + |f(a)| \leq$$

$$\leq |f(b) - f(x)| + |f(x) - f(a)| + |f(a)| \leq \bigvee_a^b f + |f(a)| = k.$$

Teorema e demonstrată.

Teorema 3.6.4. *Suma, diferenţa, produsul şi câtul (dacă modulul numitorului are margine inferioară exactă pozitivă) a două funcţii cu variaţie mărginită este deasemenea o funcţie cu variaţie mărginită.*

Demostraţie.

Să demonstrăm teorema în cazul câtului: $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, unde

$$\bigvee_a^b f < +\infty, \quad \bigvee_a^b g < +\infty$$

şi $|g(x)| \geq \alpha > 0$. Fie $T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k < x_{k+1} < \cdots < x_n = b$ o divizare arbitrară.

$$V = \sum_{k=0}^{n-1} |F(x_{k+1}) - F(x_k)| = \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{f(x_{k+1})}{g(x_{k+1})} - \frac{f(x_k)}{g(x_k)} \right| =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{f(x_{k+1})g(x_k) - g(x_{k+1})f(x_k)}{g(x_{k+1})g(x_k)} \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\alpha^2} \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1})g(x_k) - f(x_k)g(x_k) + f(x_k)g(x_k) - g(x_{k+1})f(x_k)| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\alpha^2} \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \cdot |g(x_k)| + \frac{1}{\alpha^2} \sum_{k=0}^{n-1} |g(x_{k+1}) - g(x_k)| \cdot |f(x_k)|.$$

Aşa cum $f(x)$ şi $g(x)$ sunt mărginite, atunci $|g(x_k)| \leq k_1$, $|f(x_k)| \leq k_2$.

Pentru V obţinem inegalitatea

$$V = \frac{1}{\alpha^2} \left[k_1 \bigvee_a^b f + k_2 \bigvee_a^b g \right],$$

atunci şi

$$\sup_T V \le \frac{1}{\alpha}\left[k_1 \bigvee_a^b f + k_2 \bigvee_a^b g\right].$$

Teorema este demonstrată.

Teorema 3.6.5. *Dacă funcţia $f(x)$ are o variaţie mărginită pe segmentul $[a, b]$ şi $a < c < b$, atunci $f(x)$ are variaţie mărginită şi pe segmentele $[a, c]$ şi $[c, b]$ şi*

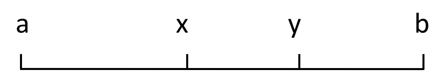
$$\bigvee_a^b f = \bigvee_a^c f + \bigvee_c^b f$$

şi invers.

Demonstraţie la [4], pag. 190.

Consecinţa 3.6.2. *Dacă $f(x)$ este o funcţie cu variaţie mărginită pe segmentul $[a, b]$, atunci funcţia $\varphi(x) = \bigvee_a^x f$, $a \le x \le b$ este o funcţie monoton crescătoare pe segmentul $[a, b]$.*

Demonstraţie. Fie $x, y \in [a, b]$ şi $x < y$, atunci



$\varphi(y) = \bigvee_a^y f = \bigvee_a^x f + \bigvee_x^y f \Rightarrow \varphi(y) - \varphi(x) = \bigvee_x^y f \ge 0 \Rightarrow \varphi(x) < \varphi(y)$.Consecinţa demonstrată.

Teorema 3.6.6. (Fundamentală) *Orice funcţie cu variaţie mărginită pe segmentul $[a, b]$ poate fi reprezentată ca diferenţa a două funcţii monoton crescătoare pe segmentul $[a, b]$.*

Demonstraţie.

Fie x un punct arbitrar de pe $[a, b]$: $a \le x \le b$. Notăm

$$\varphi(x) = \bigvee_a^x f$$

şi

$$\psi(x) = \bigvee_a^x f - f(x) = \varphi(x) - f(x),$$

de unde rezultă

$$f(x) = \varphi(x) - \psi(x).$$

Din consecinţa 3.6.2 rezultă că $\varphi(x)$ este crescătoare. Rămâne să arătăm că $\psi(x)$ este crescătoare. Fie $x, y \in [a, b]$ şi $x < y$, atunci

$$\psi(y)-\psi(x)=\bigvee_a^y f-f(y)-\bigvee_a^x f+f(x)=$$

$$=\bigvee_a^x f+\bigvee_x^y f-f(y)-\bigvee_a^x f+f(x)=\bigvee_x^y f-[f(y)-f(x)].$$

Însă

$$f(y)-f(x)\leq|f(y)-f(x)|\leq\sup_T V_{[x,y]}=\bigvee_x^y f,$$

deci $\psi(y)>\psi(x)$. Teorema este demonstrată.

Teorema 3.6.7. *Pentru ca variaţia totală a funcţiei $f(x)$ să fie egală cu zero este necesar şi suficient ca $f(x)=C=const.$:*

$$\bigvee_a^b f=0\Leftrightarrow f(x)=C.$$

Demonstraţie.

Dacă $f(x)=C,\ x\in[a,b]$, atunci oricare nu ar fi diviziunea T a segmentului $[a,b]$ diferenţele $|f(x_{k+1})-f(x_k)|=|C-C|=0$, deaceea $V=0$ deci şi $\sup_T V=0$, adică $\bigvee_a^b f=0$.

Invers, fie $\bigvee_a^b f=0$. Vom arăta că $f(x)=C$. Din

$$\bigvee_a^b f=0\Rightarrow\sup_T\sum_{k=0}^{n-1}|f(x_{k+1})-f(x_k)|=0$$

rezultă că pentru orice T

$$\sum_{k=0}^{n-1}|f(x_{k+1})-f(x_k)|=0\Rightarrow|f(x_{k+1})-f(x_k)|=0$$

(o sumă de termeni nenegativi este egală cu zero atunci şi numai atunci când fiecare termen este egal cu zero), sau

$$f(x_{k+1})-f(x_k)=0\Leftrightarrow f(x_{k+1})=f(x_k)$$

pentru orice k. Dându-i lui k valorile 0,1,2,... $f(x_0)=f(x_1)=\cdots=f(x_n)$ un punct arbitrar fixat de pe $[a,b]$ şi x – arbitrar. Luăm diviziunea T: $a=x_0<x_1<\cdots<x<\xi_0<\cdots<x_n=b$. Din cele demonstrate $f(x)=f(\xi_0)$ oricare n-ar fi $x\in[a,b]$. Dar aceasta şi înseamnă că $f(x)=const$. Teorema este demonstrată.

Să notăm mulţimea tuturor funcţiilor cu variaţie mărginită pe segmentul $[a,b]$ prin $\boldsymbol{BV}_{[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]}$.

Teorema 3.6.8. *Mulţimea* $BV_{[a,b]}$ *este un spaţiu metric, dacă metrica în această mulţime o definim astfel:*

$$\rho(x,y)=|x(a)-y(a)|+\bigvee_a^b(x-y).$$

Demonstraţie.

1. $\rho(x,y)=0\Rightarrow|x(a)-y(a)|+\bigvee_a^b(x-y)\Rightarrow|x(a)-y(a)|=0$ şi $\bigvee_a^b(x-y)=0\Rightarrow\begin{cases}x(a)=y(a)\\x(t)-y(t)=C\end{cases},\ \forall t\in[a,b]$.

   Dacă în a doua egalitate punem $t=a$, atunci din sistem obţinem $C=0, x(t)=y(t)$. Invers, dacă $x(t)\equiv y(t)$, atunci $\bigvee_a^b(x-y)=\bigvee_a^b 0=0$ inclusiv şi $x(a)=y(a)\Rightarrow\ \rho(x,y)=0$.
2. Axioma a doua e evidentă.
3. Trebuie să arătăm că $\rho(x,y)\le\rho(x,z)+\rho(z,y)$. Avem

$$\rho(x,y)=|x(a)-y(a)|+\bigvee_a^b(x-y)=$$

$$=|x(a)-z(a)+z(a)-y(a)|+\bigvee_a^b(x-z+z-y)\le$$

$$\le|x(a)-z(a)|+|z(a)-y(a)|+\bigvee_a^b(x-z)+\bigvee_a^b(z-y)=\rho(x,z)+\rho(z,y)$$

Am folosit inegalitatea

$$\bigvee_a^b(f+g)\le\bigvee_a^b f+\bigvee_a^b g.$$

Observaţia 3.6.1. *Dacă am lua*

$$\rho(x,y)=\bigvee_a^b(x-y),$$

Atunci axioma 1 a metricii nu s-ar realiza, deoarece din

$$d$$

Probleme rezolvate.

1. Demonstrați continuitatea funcției $f(x) = 3x + 5$ în punctul $x_0 = 1$ după Heine, Cauchy.

Rezolvare. 1) După Cauchy. Fie ε > 0. Vom examina

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \qquad (*)$$

Avem: $|(3x + 5) - (3 * 1 + 5)| = |3x - 3| = 3|x - 1| < \varepsilon$. Dacă $|x - 1| < \frac{\varepsilon}{3}$, atunci relația (*) este justă. Presupunem, că $\delta(\varepsilon; x_0) = \frac{\varepsilon}{3}$, adică $|x - 1| < \frac{\varepsilon}{3}$, atunci $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ ctd.

2)După Heine. Fie $x_n \to 1$ când $n \to +\infty$. Fie $\varepsilon > 0$. Examinăm condiția $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$. Avem

$$|(3x_n + 5) - (3 * 1 + 5)| = |3x_n - 3| = 3|x_n - 1| < \varepsilon.$$

Dacă $x_n \to 1$, atunci

$$\forall\, \delta > 0\ n_0(\delta):\ n > n_0 \Rightarrow |x_n - x_0| = |x_n - 1| < \delta.$$

Așa cum $|x_n - 1| < \frac{\varepsilon}{3}$ induce $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$, admitem că $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ și aflăm $n_0(\delta)$. Pentru $n > n_0$ avem $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$, adică $f(x_n) \to f(x_0)$ când $n \to +\infty$ c.t.d.

2. Găsiți mulțimea $A_{\frac{1}{5}}$ pentru funcția Dirihlet pe segmentul [0,1].

Rezolvare. În orice vecinătate $V(f; x_0, \delta)$, $x_0 \in [0,1]$ oscilația funcției Dirihlet este egală cu 1-0=1. Deaceea $\forall\varepsilon > 0$, $A_\varepsilon = [0,1]$. În particular aceea$A_{\frac{1}{5}} = [0; 1]$.

3. Găsiți cea mai mare și cea mai mică valoare a funcției $f(x = x^3)$ pe mulțimea $F = [1,2] \cup \{5\}$.

Rezolvare. Mulțimea *F* este închisă, deci ea are valoare cea mai mare și cea mai mică. Deoarece $f(x)$ este crescătoare $\underline{m} = f(1) = 1, \overline{m} = f(5) = 25$.

4. Pe mulțimea $X = [0, +\infty)$ este definit șirul funcțional $f_n(x) = \frac{1}{x^2+1+5n}$. Aflați funcția limită, dacă ea există și stabiliți tipul convergenței.

Rezolvare.

$$x \in X \quad \lim_{n\to+\infty} f(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{x^2 + 1 + 5n} = 0,$$

Deoarece $f_0(x) \equiv 0$. Să examinăm inegalitatea $|f(x_n) - f_0(x)| < \varepsilon$. Avem: $\left|\frac{1}{x^2+1+5n} - 0\right| = \frac{1}{x^2+1+5n} < \frac{1}{5n}$ $\forall x \in X$. Dacă $\frac{1}{5n} < \varepsilon$, atunci $|f(x_n) - f_0(x)| < \varepsilon$ $\forall x \in X$. Astfel putem alege $n_0 = \left[\frac{1}{5\varepsilon}\right] + 1$ care depinde numai de ε. Deci convergența este uniformă.

5. Stabiliți variația totală a funcției

$$f(x) = \begin{cases} 7, x = 0, \\ 3x + 1, 0 < x < 1, \\ 0, x = 1, \end{cases}$$ pe $[0; 1]$.

Rezolvare. Vom efectua o (T)-divizare a segmentului:
$[0; 1]: 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_k < x_{k+1} < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1.$
Examinăm

$$\bigvee_0^1 (f, T) = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = |f(x_1) - f(x_0)| + |f(x_2) - f(x_1)|$$
$$+ |f(x_3) - f(x_2)| + \cdots + |f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})| + |f(x_n) - f(x_{n-1})|$$
$$= |-7 + (3x_1 + 1)| + |(3x_2 + 1) - (3x_1 + 1)|$$
$$+ |(3x_3 + 1) - (3x_2 + 1)| + \cdots + |(3x_{n-1} + 1) - (3x_{n-2} + 1)|$$
$$+ |0 - (3x_{n-1} + 1)|$$
$$= 7 - 3x_1 - 1 + 3x_2 - 3x_1 + 3x_3 - 3x_2 + \cdots + 3x_{n-1} - 3x_{n-2}$$
$$+ 3x_{n-1} + 1 = 7 - 6x_1 + 6x_{n-1}.$$

Această valoare se va mări pentru $x_1 \to +0$, $x_{n-1} \to 1 - 0$. Deci

$$\bigvee_0^1 (f) = \sup(7 - 6x_1 + 6x_{n-1}) = 13.$$

Probleme propuse spre rezolvare.

1. Demonstrați continuitatea funcției $f(x) = x^2$ în punctul $x_0 = 1$ după Heine, Cauchy.
2. Găsiți cea mai mare și cea mai mică valoare a funcției $f(x) = x^2 - 5x + 7$ pe mulțimea $F = [0,1] \cup [4,5] \cup \{7\}$.
3. Stabiliți puterea mulțimii punctelor de discontinuitate ale funcției
$$Di(x) = \begin{cases} 1, x \in Q, \\ 0, x \notin Q. \end{cases}$$
4. Construiți funcția, continuă în punctul $x_0 = 0$ și discontinuă în celelalte puncte ale axei reale.
5. Construiți funcția, continuă în punctul $x = m, m \in Z$ și discontinuă în celelalte puncte ale axei reale.
6. Construiți o funcție oarecare de prima categorie a lui Baire.
7. Construiți o funcție oarecare de categoria a doua a lui Baire.
8. Stabiliți variația totală a funcției

$$f(x) = \begin{cases} x-1, x \in [0,1), \\ 5, x = 1, \\ -x+3, x \in (1,2]. \end{cases}$$

9. Stabiliți convergența univormă sau neuniformă a șirului funcțional $f_n(x) = \frac{nx}{1+n+x}$ pe mulțimea $X = [0,1]$.

Capitolul 4. Mulţimi măsurabile pe dreaptă

În teoria funcţiilor de variabilă reală un rol important îl joacă noţiunea de **măsură** a unei mulţimi de puncte, care generalizează noţiunea de lungime a unui interval, de arie a unui dreptunghi, de volum a paralelipipedului ş.a.m.d. În această secțiune vom expune succint teoria măsurii a mulţimilor liniare (de pe dreaptă), care a fost elaborată de Henri Lebesque.

Deoarece mulţimile deschise au o structură relativ simplă, e natural să începem expunerea teoriei măsurii anume asupra acestor mulţimi.

4.1.MĂSURA MULȚIMII DESCHISE ŞI MĂRGINITE.

Fie dat un interval $(a, b), a < b$.

Definiţia 4.1.1. *Vom numi **măsură a intervalului** $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ lungimea acestui interval, adică numărul $b - a$. Se notează astfel:*

$$\boldsymbol{m(a, b) = b - a}.$$

Evident $m(a, b) > 0$. Fie acum G o mulţime deschisă și mărginită oarecare. Atunci, $G = \bigcup_k \delta_k$, unde $\delta_k = (a_k, b_k)$ sunt intervale disjuncte, iar k parcurge o mulţime finită sau numărabilă de valori.

Definiţia 4.1.2. *Măsura mG a mulţimii deschise şi mărginite $G \neq \emptyset$ se numeşte* ***suma lungimilor*** *tuturor* ***intervalelor*** *δ_k din care ea este formată:*

$$mG = \sum_k m\,\delta_k = \sum_k (b_k - a_k)$$

Observaţia 4.1.1. *În cazul, în care k ia valori de la 1 până la infinit, obţinem seria $\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k)$ cu termeni pozitivi. Deoarece mulţimea G este mărginită, mărginit va fi și șirul crescător de sume parţiale a seriei date, prin urmare, seria va fi convergentă și deci,*

$$mG < +\infty.$$

Dacă mulţimea G este vidă, atunci prin definiţie, considerăm

$$mG = 0.$$

Din cele expuse mai sus rezultă, că pentru orice mulţime deschisă și mărginită G avem:

$$0 \leq mG < +\infty.$$

Exemplul 4.1.1. Să se determine măsura mulţimii deschise a lui Cantor G_0. Amintim, că G_0 a fost construită în câteva etape: la prima etapă a fost ales intervalul $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ de lungimea $\frac{1}{3}$; la etapa a doua intervalului $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ i se alipesc două intervale $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ şi $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ de lungimea $\frac{1}{9} = \frac{1}{3^2}$ fiecare; la etapa a treia se alipesc patru intervale de lungimea $\frac{1}{27} = \frac{1}{3^3}$ fiecare ş.a.m.d.

Deci,

$$mG_0 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \frac{8}{3^4} + \cdots = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 1$$

(progresie geometrică cu raţia $q = \frac{2}{3}, S = \frac{q}{1-q}$).

Așadar, $mG_0 = 1$.

Vom formula câteva teoreme ce se referă la măsura mulţimilor deschise.

Teorema 4.1.1. *Fie G_1 şi G_2 două mulţimi deschise şi mărginite. Dacă $G_1 \subset G_2$, atunci*

$$mG_1 \leq mG_2.$$

Consecinţa 4.1.1. *Măsura unei mulţimi deschise şi mărginite G este egală cu marginea inferioară exactă a tuturor mulţimilor deschise şi mărginite, care o conţin pe G:*

$$mG = \inf_{\alpha} G_\alpha\,, \quad G \subset G_\alpha.$$

Teorema 4.1.2. *Dacă mulţimea deschisă şi mărginită G reprezintă reuniunea unei mulţimi finite sau numărabile de mulţimi deschise, care două câte două nu se intersectează,*

$$G = \bigcup_k G_k\ , \quad G_k \cap G_i = \emptyset,\ \ k \neq i,$$

atunci

$$mG = \sum_k m\, G_k\ .$$

Acestă proprietate se numeşte **aditivitatea completă** a măsurii.

Teorema 4.1.3. *Dacă mulţimea deschisă şi mărginită G reprezintă o reuniune finită sau numărabilă de mulţimi deschise G_k ,*

$$G = \bigcup_k G_k\ ,$$

atunci

$$mG \leq \sum_k m\, G_k\ .$$

Demonstraţia teoremelor 4.1.1 – 4.1.3 poate fi găsită în [1].

4.2. MĂSURA MULȚIMII ÎNCHISE ȘI MĂRGINITE.

Fie F o mulţime închisă şi mărginită şi fie $S = [A, B]$ cel mai mic segment ce conţine F. Atunci mulţimea $C_s F$ este deschisă şi mărginită. Fie $m[C_s F]$ măsura acestei mulțimi.

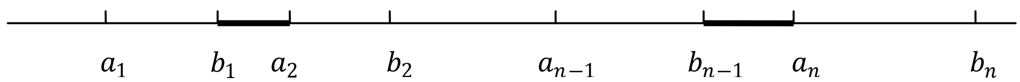
Definiţia 4.2.1. Măsură *a unei* ***mulţimi*** *nevide F, mărginite şi închise, se numeşte numărul*

$$mF = B - A - m[C_s F].$$

Observaţia 4.2.1. *Dacă mulţimea închisă F este vidă, atunci F este şi deschisă, prin urmare $mF = 0$.*

Exemplul 4.2.1. $\mathrm{F} = [\mathrm{a}, \mathrm{b}]$, atunci $S = [a, b]$ şi $C_s F = \emptyset$. Conform definiţiei avem $m[a, b] = b - a - m[C_s F] = b - a - 0 = b - a$. Așadar, măsura segmentului $[a, b]$ este egală cu lungimea lui.

Exemplul 4.2.2. $F = [a_1, b_1] \cup [a_2, b_2] \cup \ldots \cup [a_n, b_n]$, $[a_k, b_k] \cap [a_i, b_i] = \emptyset$, $k \neq i$. Putem considera $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Evident, $b_k < a_{k+1}$, $k = \overline{1, n-1}$.



Avem $S = [a_1, b_n]$, $C_S F = (b_1, a_2) \cup (b_2, a_3) \cup \ldots \cup (b_{n-1}, a_n)$ şi deci

$$mF = b_n - a_1 - \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - b_k) = \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k).$$

S-a demonstrat, că măsura reuniunii finite de segmente, ce nu se intersectează două câte două, este egală cu suma lungimilor acestor segmente.

Exemplul 4.2.3. $F = P_0$ – mulţimea perfectă a lui Cantor. În acest caz $S = [0,1]$, $C_s P_0 = G_0$, deci $mP_0 = 1 - 0 - mG_0 = 1 - 1 = 0$. (Puterea mulţimii P_0 este egală cu $\boldsymbol{c}$).

Teorema 4.2.1. *Măsura unei mulţimi închise şi mărginite este nenegativă.*

Demonstraţie.

$mF = B - A - m[C_S F]$, însă $m[C_S F] \leq m(A, B) = B - A$, fiindcă $C_S F \subset (A, B)$ (vezi teorema 7.1.1). Așadar, $mF \geq 0$.

Teorema 4.2.2. *Fie F_1 şi F_2 două mulţimi închise şi mărginite. Dacă $F_1 \subset F_2$, atunci $mF_1 \leq mF_2$.*

Consecinţa 4.1.2. *Măsura unei mulţimi închise şi mărginite F este egală cu marginea superioară a măsurilor tuturor mulţimilor închise, care complet se includ în F: $mF = \sup_\alpha mF_\alpha$, $F_\alpha \subseteq F$.*

Teorema 4.2.3. *Fie F o mulţime închisă, iar G o mulţime deschisă. Dacă $F \subset G$, atunci $mF \leq mG$.*

Teorema 4.2.4. *Măsura unei mulţimi deschise şi mărginite G este egală cu marginea superioară exactă a măsurilor tuturor mulţimilor închise, care se includ în G: $mG = \sup_\alpha mF_\alpha$, $F_\alpha \subseteq G$.*

Teorema 4.2.5. *Măsura unei mulţimi închise şi mărginite F este egală cu marginea inferioară exactă a măsurilor tuturor mulţimilor deschise, care complet conţin mulţimea F*:

$$mF = \inf_{\alpha} mG_{\alpha}\,,\ F \subset G_{\alpha}.$$

Teorema 4.2.6. *Fie că mulţimea închisă şi mărginită F reprezintă reuniunea unui număr finit de mulţimi închise F_k, care două câte două nu se intersectează. Atunci,*

$$mF = \bigcup_{k=1}^{n} mF_k.$$

Demonstraţiile teoremelor 4.2.2 – 4.2.6 pot fi găsite în [1].

4.3. MĂSURA EXTERIOARĂ ŞI INTERIOARĂ A MULŢIMII. MULŢIMI MĂSURABILE.

Definiţia 4.3.1. *Se numeşte **măsură exterioară m^*E a mulţimii** mărginite E marginea inferioară a măsurilor tuturor mulţimilor deschise şi mărginite, care conţin mulţimea E.*

$$m^*E = \inf_{\alpha}\{mG_{\alpha}\},\ \ E \subset G_{\alpha}.$$

Evident, m^*E există şi satisface inegalităţile $0 \leq m^*E < +\infty$.

Definiţia 4.3.2. *Se numeşte **măsură interioară m_*E a mulţimii** mărginite E marginea superioară exactă a măsurilor tuturor mulţimilor închise, care complet se includ în E:*

$$m_*E = \sup_{\alpha}\{mF_{\alpha}\},\ \ F_{\alpha} \subset E.$$

Măsura interioară verifică inegalităţile $0 \leq m_*E < +\infty$.

Definiţia 4.3.3. *Mulţimea mărginită E se numeşte **măsurabilă**, dacă măsura ei exterioară şi măsura interioară coincid. Valoarea lor comună se numeşte **măsura** mulţimii E şi se notează **mE**:*

$$mE = m^*E = m_*E.$$

Definiția, de mai sus, a măsurii aparţine matematicianului francez H. Lebesque, deaceea, deseori, se spune că mulţimea E este măsurabilă în sensul lui Lebesque.

În continuare, vom enunța unele proprietăţi ale mulţimilor măsurabile.

Teorema 4.3.1. *Orice mulţime deschisă și mărginită este măsurabilă şi măsura ei coincide cu cea definită în secțiunea 4.1.*

Teorema 4.3.2. *Orice mulţime închisă şi mărginită este măsurabilă şi măsura ei coincide cu cea definită în secțiunea 4.2.*

Teorema 4.3.3. *Dacă E este o mulţime mărginită, inclusă în intervalul Δ, atunci mulţimile E şi $C_\Delta E$ concomitent sunt măsurabile sau nu.*

Teorema 4.3.4. *Dacă mulţimea mărginită E reprezintă reuniunea unei mulţimi finite sau numărabile de mulţimi măsurabile, care două câte două nu se intesectează:*

$$E = \bigcup_k E_k, \quad E_k \cap E_i = \emptyset, \quad k \neq i,$$

atunci mulţimea E este măsurabilă şi

$$mE = \sum_k mE_k.$$

Demonstraţie.

Avem

$$\sum_k mE_k = \sum_k m_* E_k \leq m_* E \leq m^* E = \sum_k mE_k$$

de unde rezultă afirmația teoremei.

Consecinţa 4.3.1. *Măsura unei mulţimi numărabile este egală cu zero.*

Afirmaţia teoremei 4.3.1 poartă denumirea de *proprietatea aditivităţii complete a măsurii.*

Teorema 4.3.5. *Intersecţia unui număr finit de mulţimi măsurabile este o mulţime măsurabilă.*

Teorema 4.3.6. *Diferenţa a două mulţimi măsurabile este o mulţime măsurabilă.*

Demonstraţie.

Fie E_1 şi E_2 două mulţimi măsurabile şi $E = E_1 \setminus E_2$. Fie Δ un interval în care se conţin ambele mulţimi E_1 şi E_2. Vom arăta că $E = E_1 \cap C_\Delta E_2$. Fie $x \in E \Rightarrow \{x \in E_1 \text{și } x \notin E_2\} \Rightarrow \{x \in E_1 \text{ și } x \in C_\Delta E_2\} \Rightarrow \; x \in E_1 \cap C_\Delta E_2$.

Analog se demonstrează implicaţia inversă. Dacă E_2 este măsurabilă, atunci şi $C_\Delta E_2$ este măsurabilă, deci şi intersecţia lor este măsurabilă. Teorema este demonstrată.

Teorema 4.3.7. *Dacă mulțimile E_1 și E_2 sunt măsurabile, $E_1 \supset E_2$, și $E = E_1 \setminus E_2$, atunci*

$$mE = mE_1 - mE_2.$$

Teorema 4.3.8. *Dacă mulţimea mărginită E reprezintă reuniunea unei mulţimi numărabile de mulţimi măsurabile, atunci E este o mulţime măsurabilă.*

Teoreme 4.3.9. *Intersecţia unei mulţimi numărabile de mulţimi măsurabile este o mulţime măsurabilă.*

Teorema 4.3.10. *Dacă mulţimile E_1, E_2, ... sunt măsurabile,$E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \cdots$ şi reuniunea $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ este mărginită, atunci*

$$mE = \lim_{n\to\infty}[mE_n].$$

Teorema 4.3.11. *Dacă mulţimile E_1, E_2, ... sunt măsurabile, $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \cdots$ şi $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$, atunci*

$$\mathrm{mE} = \lim_{\mathrm{n}\to\infty}[\mathrm{mE_n}].$$

Observaţia 4.3.1. *Există mulţimi mărginite nemăsurabile.* [1]

Probleme rezolvate.

1. Demonstrați, că fiecare mulțime E, situat pe axa Ox (chiar dacă este o mulțime nemăsurabilă pe dreaptă) este măsurabilă în planul Oxy, iar măsura sa plană este nulă.

Rezolvare. Axa Ox este mulțime – nulă în plan și orice submulțime a acestei mulțimi nule, este de asemenea nulă. Dar toate mulțimile nule sunt măsurabile. Prin urmare, toate submulțimile axei reale sunt măsurabile pe planul Oxy, și măsura lor plană este nulă.

2. Să se arate că mulțimea tuturor submulțimilor măsurabile pe axa reală (precum și în plan) are puterea 2^c.

Rezolvare. Mulțimea perfectă a lui Cantor D are măsură liniară nulă. Prin urmare, fiecare submulțime la fel are măsură liniară nulă și deci este măsurabilă. Dar mulțimea tuturor submulțimilor mulțimii lui Cantor are puterea 2^c, deoarece $\overline{\overline{D}} = c$. Deci, familia tuturor mulțimilor măsurabile pe axa reală $\mathfrak{U}$ are puterea mai mare sau egală cu 2^c: $\overline{\overline{\mathfrak{U}}} \geq 2^c$.

Pe de altă parte, mulțimea tuturor mulțimilor, situate dreaptă, are are puterea 2^c. Deoarece $\mathfrak{U}$ face parte din familia tuturor mulțimilor, de pe dreaptă, $\overline{\overline{\mathfrak{U}}} \leq 2^c$.

Comparând aceste inegalități, vom obține în cele din urmă: $\overline{\overline{\mathfrak{U}}} = 2^c$.

3. Construiți pe segmentul $[0;1]$ o mulțime perfectă nicăieri densă măsură liniară egală cu 0,9.

Rezolvare. Ca exemplu putem lua mulțimea perfectă E pe [0; 1], construită astfel: definim un șir descrescător de numere pozitive $a_1 > a_2 > a_3 >\ldots$ astfel că $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = A < 1$. Excludem din $[0;1]$ intervalul lungimea a_1 cu centrul în mijlocul segmentului; în continuare, din cele două segmente rămase eliminăm intervalele de lungimea $\frac{a_2}{2}$ cu centrul în mijlocul acestor segmente; apoi din cele patru segmente rămase îndepărtam intervale de lungimea $\frac{a_3}{2^2}$ cu centrul în mijlocul acestor segmentel ș.a.m.d.; mulțimea rămasă după o mulțime numărabilă de etape o vom nota E.

Dacă în calitate de A luăm numerele de 0,1 apoi, suma lungimilor intervalelor aruncate $A = 0,1$, și, prin urmare, măsura mulțimilor perfecte rămase este $1 - 0,1 = 0{,}9$.

4. Construiți pe segmentul $[0;1]$ o mulțime perfectă nicăieri densă de măsură dată a (în cazul în care $0 < a < 1$).

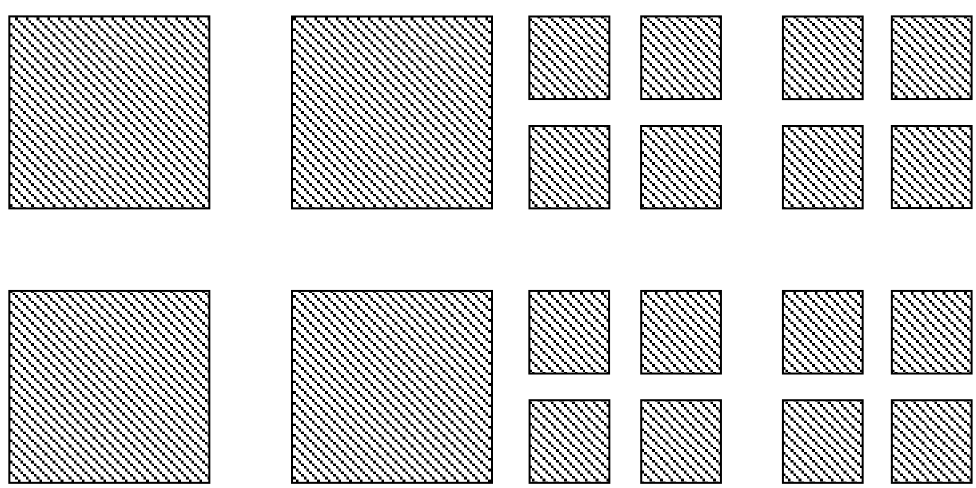
Rezolvare. Să facem ca și-n problema precedent, numai, că în acest caz A va fi un număr pozitiv $1-a$.

5. Este posibil să se construiască pe segmentul $[0;1]$ o mulțime perfectă nicăieri densă de măsură 1?

Rezolvare. Nu, nu poți. Complementara acestei mulțimi E (chiar înainte de intervalul $[0;\ 1]$) va fi mulțime deschisă CE de mărimea nulă. Dar o mulțime deschisă de măsură nulă, este vidă (în cazul în care CE ar conține cel puțin un punct M_0, atunci ar exista o vecinătate $V(M_0)$, ce se include în CE, atunci $mCE \geq mV(M_0) > 0$. Având în vedere că CE este vidă, atunci E umple întregul segment, ceea ce contrazice condiție (în condițiile problemei se spune că ea este nicăieri densă în intervalul $[0;\ 1]$).

6. Construiți pe pătrat $[0;\ 1] \times [0;\ 1]$ o mulțime nicăieri densă, măsura plană a căreea este egală cu numărul nenegativ a $(0 < a < 1)$.

Rezolvare. Construcția acestui exemplu se realizează aproximativ la fel ca și în construcția mulțimii perfecte în problema 4. Noi considerăm un șir descrescător arbitrar de numere pozitive $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$, suma care este egală cu $1 - a$. Vom trasa în pătratul de bază $[0;\ 1] \times [0;\ 1]$, două verticale și două linii orizontale, astfel încât aria acestei cruci, tăiate de aceste linii, să fie egală cu a_1, și patrulaterele, rămase după aruncarea crucii, să fie pătrate închise.



a $\qquad\qquad$ b

Aceste patrate închise le vom numit de primul rang; suma lor este notată P_1 (P −mulțimi închise). În continuare, în fiecare dintre pătratele de primul rang trasăm două verticale și două drepte orizontale, astfel încât fiecare cruce, tăiată de aceste linii, are o suprafață de $\frac{a_2}{4}$ și că, după aruncarea fiecărei cruci în fiecare pătrat de prim rang rămân patru pătrate închise; numite ulterior pătrate de rangul doi, suma lor o vom nota P_2; numărul pătratelor de rangul doi este egală cu 4^2. În general, dacă sunt construite pătrate de rangul k (numărul lor este egal cu 4^k), o construcție suplimentară se efectuează astfel: în fiecare pătrat de rangul k trasăm două verticale și două linii orizontale, astfel încât aria crucii obținute să fie $\frac{a_{k+1}}{4^k}$ și patrulaterele rămase să fie pătrate închise (le vom numi pătrate de rangul $k+1$; suma lor o vom nota P_{k+1}, numărul de pătrate de rangul $k+1$ este 4^{k+1}).

Dacă luăm acum intersecția tuturor P_k obținem o mulțime perfectă măsura căreea este a , aceasta rezultă din faptul, că completara acestei mulțimi reprezintă suma tuturor crucile aruncate: iar măsura mulțimii formate din toate aceste cruci este $1-a$:

$$a_1 + 4 \cdot \frac{a_2}{4} + 4^2 \cdot \frac{a_3}{4^2} + \ldots + 4^k \cdot \frac{a_{k+1}}{4^k} + \ldots = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{k+1} + \ldots$$
$$= 1 - a$$

Deci, complementara mulțimii perfecte construite are măsura a.

7. Să se arate că orice mulțime mărginită măsurabilă E, ce are măsură liniară pozitivă p, conține o submulțime măsurabilă cu măsura q (unde q - un număr pozitiv arbitrar mai mic ca p).

Rezolvare. Fie mulțimea E aparține segmentului $[a;b]$. Examinăm următoarea funcție $f(x)$ definită pe segmentul $[a,b]$:

$$f(x) = m([a,x] \cap E).$$

Este evident, că $f(a) = 0$, $f(b) = mE = p$ și $f(x)$ este monoton crescătoare (deși nu este necesar să fie strict crescătoare). Vom demonstra, că funcția $f(x)$ este continuă în toate punctele segmentului $[a;b]$. Fie $x \in [a;b]$. Atunci

$$f(x+h) - f(x) = m([a, x+h] \cap E) - m([a;x] \cap E) = m\{[a; x+h] \cap E)\}$$
$$= m\{(x; x+h] \cap E\} \leq m(x; x+h] = h.$$

Când $h \to 0, f(x+h) - f(x)$ la fel tinde la zero, adică $f(x)$ este continuă la dreapta (deoarece $h > 0$) în punctul x. În mod analog se demonstrează, că $f(x)$

este continuă în dreapta punctului x. Deci $f(x)$ este continuă în toate punctele segmentului.

Funcția, continuă pe segmentul $[a; b]$ își primește toate valorile intermediare. În particular, există ζ, $a < \zeta < b$, încât $f(\zeta) = q$ (deoarece $f(a) < q < f(b)$). Însă $f(\zeta) = m([a; \zeta] \cap E)$. Reese, că mulțimea $[a; \zeta] \cap E$ ce aparține lui E, are măsura egală cu q.

8. Demonstrați că orice mulțime măsurabilă E pe axa reală (nu neapărat mărginită), astfel încât $mE = p > O$, conține submulțime măsurabilă de măsura q (unde q - un număr pozitiv arbitrar mai mic ca p).

Rezolvare. Dacă $E -$ mulțime mărginită de pe axa reală, atunci totul este demonstrate în problema precedent. Dacă însă $E -$ mulțime nemărginită pe axa reală, atunci vom proceda astfel: notăm E_n mulțimile:

$$E_n = E \cap [-n; n].$$

Este evident, că $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \cdots \subset E_n \subset \cdots$, iar $\bigcup_n E_n = E$. Atunci $mE = \lim_{n\to\infty} mE_n$, adică $\lim_{n\to\infty} mE_n = p$. Deoarece $q < p$ atunci există așa număr n_0 încât $mE_{n_0} > q$. Notăm $mE_{n_0} = r$ (iar $r > q$).

Mulțimea E_{n_0} este mărginită și are măsura r. conform rezultatelor problemei precedente, aceasta posedă o așa submulțime măsurabilă A, măsur căreea este q. Însă $A \subset E_{n_0}$, iar $E_{n_0} \subset E$. Deci $A \subset E$.

În fine, chiar dacă E este nemărginită, și măsura egală cu p, atunci pentru orice $q < p$ putem găsi o submulțime mărginită măsurbilă A a mulțimii E, ca $mA = q$.

9. Fie E – mulțime măsurabilă de pe axa reală, $mE = p > 0$, iar q – un număr pozitiv mai mic decât p. Demonstrați, că există o submulțime perfectă $M \subset E$ astfel, încât $mM = q$.

Rezolvare. Fie $mE = P > 0$, $q -$ număr pozitiv $q < p$. Notăm q' un număr cupris între p și q. Conform rezultatelor problemei precedente, există o submulțime mărginită măsurabilă A a mulțimii E, încât $mA = q'$. Fie $A \subset [a; b]$.

Conform proprietăților mulțimilor măsurabile pentru orice $\varepsilon > 0$ există o submulțime închisă A astfel, încât măsura acestei submulțimi este mai mică decât $mA - \varepsilon$. În particular, există așa submulțime închisă B, încât $mB > q$.

În fine, după raționamente similar cu problema 7, putem găsi pe segmetul $[a; b]$ punctul ζ, încât $m([a; \zeta] \cap B) = q$ (dacă ținem cont de faptul, că

$$m([a; a] \cap B) = 0 \quad m([a; b] \cap B) > q)$$

Mulțimea $[a, \zeta] \cap B$ este închisă, ca reuniunea a două mulțimi închise, și o vom nota C:

$$C = [a; \zeta] \cap B \quad mC = q$$

Orice mulțime închisă de pe axa reală poate fi descompusă ca suma mulțimii numărabile N și a uneia perfecte D:

$$C = D \cup N$$

Așa cum mulțimea măsurii mulțimii numărabile N este nulă, atunci $mD = mC = q$.

Deci $D -$ este mulțime perfectă ce are măsura q. Ea aparține mulțimii inițiale E (deoarece $D \subset C$; $\quad C \subset B$; $\quad B \subset A$; $\quad A \subset E$).

10. Demonstrați, că orice mulțime E măsurabil în plan cu măsura plană pozitivă p conține o submulțime măsurabilă M cu măsura plană q (unde $q < p$ - număr pozitiv fixat).

Rezolvare. Dacă E este o mulțime plană mărginită, atunci vom proceda astfel: să proiectam E pe axa O_x în segmentul $[a; b]$. Examinăm mulțimea E_x care se taie din E cu linia verticală cu abscisă x (referindu-se la parteamulțimii E, care se află în partea stângă a acestei linii). Fie $f(x) = mE_x$. Apoi, $f\ (a) = 0, f\ (b) = p$. Este ușor de arătat că funcția $f\ (x)$ - este continuă pe $[a; b]$. Prin urmare, pe $[a; b]$ există un punct ζ, încât $f(\zeta) = q$ deoarece $f\ (a) < q < f\ (b)$. Deci E_ζ este mulțimea căutată: $E_\zeta \subset E$, iar $mE_\zeta = q$.

Dacă E este o mulțime măsurabilă nemărginită, atunci obținem condițiile problemei vom face același lucru ca și în problema 8.

11. În jurul fiecărui punct al mulțimii lui Cantor este descris un interval de lungime 0,1 cu central în acest punct; care este măsura mulțimii, care este suma tuturor acestor intervale?

Rezolvare. Suma E a acestor interval reprezintă o mulțime deschisă:

$$\left(-\frac{1}{20};\frac{1}{9}+\frac{1}{20}\right)\bigcup\left(\frac{2}{9}-\frac{1}{20};\frac{1}{3}+\frac{1}{20}\right)\bigcup\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{20};\frac{7}{9}+\frac{1}{20}\right)\bigcup\left(\frac{8}{9}-\frac{1}{20};1\frac{1}{20}\right)$$

Măsura lui este $4\cdot\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{9}\right)=\frac{38}{45}$

12. Fie $(a_1;b_1)$, $(a_2;b_2)$,…, $(a_n;b_n)$,…intervale adiacente ale mulțimii perfecte nicăieri dense E măsura căreea este 0.6. E aparține segmentului $[0;1]$ (în care inf E = 0, sup E = 1). Definim în vecinătatea fiecărui punct a_i, ca fiind central, intervalul u_i lungimea căruia este $\frac{b_i-a_i}{4}$; vom descrie intervale v_i (de lungimea $\frac{b_i-a_i}{4}$) în apropierea fiecărui punct b_i;. Va fi mulțime $(\bigcup_i u_i)\bigcup(\bigcup_i v_i)$ o acoperire a mulțimii E? Ce se poate spune despre măsura mulțimii $(\bigcup_i u_i)\bigcup(\bigcup_i v_i)$?

Rezolvare. Să apreciem măsura sumei tuturor intervalelor u_i și v_i. Măsura sumei lor nu întrece suma lungimilor lor; iată de ce

$$m\left[\left(\bigcup_i u_i\right)\bigcup\left(\bigcup_i v_i\right)\right]\leq\sum_i\frac{b_i-a_i}{4}+\sum_i\frac{b_i-a_i}{4}=\frac{1}{2}\sum_i(b_i-a_i)$$

Suma $\sum_i\ (b_i-a_i)$ coincide cu măsura complementarei mulțimii E; astfel

$$\sum_i(b_i-\mathrm{a_i})=1-0.6=0.4.$$

Deci

$$m\left[\left(\bigcup_i u_i\right)\bigcup\left(\bigcup_i v_i\right)\right]\leq 0{,}2.$$

Așa cum măsura mulțimii $(\bigcup_i u_i) \bigcup(\bigcup_i v_i)$ nu întrece măsura mulțimii E, atunci această mulțime nu poate acoperi toată mulțimea E.

Problem propuse spre rezolvare.

1. Demonstrați, că orice mulțime măsurabilă de măsură liniară pozitivă are puterea continuumului.
2. Poate fi oare măsura unei mulțimi nulă, dacă ea conține măcar un punct de interior?
3. Poate oare o mulțime măsurabilă nemărginită pe dreaptă să aibă măsură pozitivă finită?
4. Este oare posibil, ca suma numărabilă de mulțimi perfecte nicăieri dense pe segmentul $[a; b]$ să aibă măsura egală cu $b - a$.
5. Există oare mulțime nenumărabilă cu măsura nulă să fie densă pe segmentul $[0; 1]$.

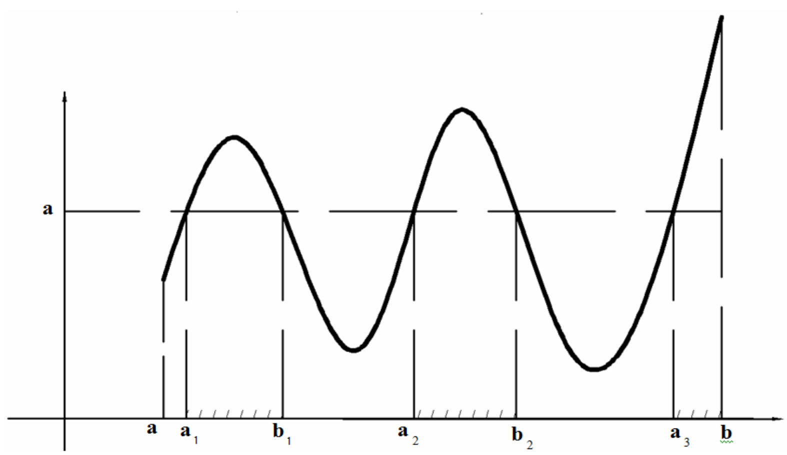
Capitolul 5. Funcţii măsurabile şi unele proprietăţi ale lor

În această secțiune vom considera funcţii definite pe mulţimi măsurabile de pe axa numerică şi care iau valori ce aparţin dreptei numerice extinse. Drept exemplu de astfel de funcţie poate servi funcţia

$$f(x)=\begin{cases}-\infty, & x<-1,\\ 0, & -1\le x\le 1,\\ \infty, & x>1.\end{cases}$$

5.1. NOȚIUNEA DE FUNCŢIE MĂSURABILĂ.

Cu $E\ [f$ satisface condiţiei $A]$ vom nota mulţimea tuturor punctelor x ale mulţimii E, pentru care $f(x)$ satisface condiţiei A.



De exemplu, $E[f\ge a]$ este mulţimea punctelor $x\in E$, pentru care $f(x)\ge a$. În figura alăturată avem $E[f\ge a]=[a_1,b_1]\cup[a_2,b_2]\cup[a_3,b]$(mulţimea haşurată).

Definiţia 5.1.1. *Funcţia $f(x)$, definită pe mulţimea măsurabilă E, se numeşte* ***măsurabilă*** *pe această mulţime, dacă pentru orice număr real* a *mulţimea $E[f>a]$ este măsurabilă.*

Lema 5.1.1. *Pentru ca funcţia $f(x)$ să fie măsurabilă pe mulţimea măsurabilă E, este necesar şi suficient ca să fie măsurabilă una dintre mulţimile*

$$E[f\ge a],\ E[f<a],\ E[f\le a]$$

oricare ar fi numărul a.

Demonstraţie.

Necesitatea. Fie $f(x)$ măsurabilă. Atunci, oricare ar fi numărul real a şi numărul natural n sunt măsurabile mulţimile $E\left[f > a - \frac{1}{n}\right]$. Este adevărată egalitatea

$$E[f \geq a] = \bigcap_{n=1}^{\infty} E\left[f > a - \frac{1}{n}\right]. \tag{5.1.1}$$

Într-adevăr, dacă $x \in E[f \geq a]$, atunci $x \in E$ şi $f(x) \geq a > a - \frac{1}{n}$ pentru toţi $n \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} E\left[f > a - \frac{1}{n}\right]$. Invers, dacă $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} E\left[f > a - \frac{1}{n}\right]$ atunci $x \in E$ şi $f(x) > a - \frac{1}{n}$ pentru orice n. Trecând la limită în ultima inegalitate atunci când $n \to \infty$, obţinem $f(x) \geq a$. Egalitatea (5.1.1) este demonstrată. Mulţimea $E[f \geq a]$ este măsurabilă ca intersecţia unei mulţimi numărabile de mulţimi măsurabile. Mai departe, mulțimea $E[f < a] = E \setminus E[f \geq a]$ este măsurabilă ca diferenţa a două mulţimi măsurabile. Analog, din $E[f \leq a] = E \setminus E[f > a]$ rezultă măsurabilitatea mulțimii $E[f \leq a]$.

Suficienţa. Fie că $E[f \geq a]$ este măsurabilă $\forall a$. Are loc egalitatea

$$E[f > a] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\left[f \geq a + \frac{1}{n}\right] \tag{5.1.2}$$

Într-adevăr, fie $x \in E[f > a] \Rightarrow x \in E$ şi $f(x) > a$, adică $f(x) - a > 0$. Între numerele 0 şi $f(x) - a$ totdeauna se va găsi aşa număr natural n_0 încât $0 < \frac{1}{n_0} \leq f(x) - a$, adică $f(x) \geq a + \frac{1}{n_0}$, deci

$$x \in E\left[f(x) \geq a + \frac{1}{n_0}\right] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E\left[f \geq a + \frac{1}{n}\right].$$

Invers, dacă $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E\left[f \geq a + \frac{1}{n}\right] \Rightarrow x \in E$ şi există un n_0 încât $x \in E\left[f \geq a + \frac{1}{n_0}\right]$, adică $f(x) \geq a + \frac{1}{n_0} > a$. Așadar, $x \in E$ şi $f(x) > a$, deci $x \in E[f > a]$.

Din (5.1.2) urmează că $E[f > a]$ este măsurabilă ca reuniunea unei mulţimi numărabile de mulţimi măsurabile.

În mod similar se demonstrează suficienţa celorlalte condiţii.

Lema este demonstrată.

Observaţia 5.1.1. *Din măsurăbilitatea funcţiei* $f(x)$*rezultă măsurăbilitatea mulţimilor* $E[a \leq f < b]$, $E[a < f < b]$, $E[a < f \leq b]$.

Menționăm, că măsurăbilitatea funcţiei $f(x)$ *asigură măsurabilitatea mulțimii* $E[f = a]$, *dar, în caz general, afirmaţia inversă nu este adevărată.*

5.2. UNELE PROPRIETĂŢI ALE FUNCŢIILOR MĂSURABILE.

Teorema 5.2.1. *Dacă* $f(x)$ *este măsurabilă pe mulţimea* E, *atunci* $kf(x)$ *şi* $f(x) + l$ *sunt măsurabile pe* E $(k, l \in \mathbb{R})$.

Demonstraţia teoremei 5.2.1 rezultă din egalităţile

$$E[kf > a] = \begin{cases} E\left[f > \dfrac{a}{k}\right], & dacă \ \ k > 0, \\ \emptyset, & dacă \ a \geq 0, k = 0, \\ E, & dacă \ a < 0, k = 0, \\ E\left[f < \dfrac{a}{k}\right], & dacă \ k < 0; \end{cases}$$

şi $E[f(x) + l > a] = E[f > a - l]$.

Teorema 5.2.2. [4] *Dacă* $f(x)$ *şi* $g(x)$ *sunt măsurabile pe mulţimea* E, *atunci mulţimea* $E[f > g]$ *este măsurabilă pe* E.

Teorema 5.2.3. *Suma* $f(x) + g(x)$ *a două funcţii măsurabile pe mulţimea* E, *este o funcţie măsurabilă pe această mulţime.*

Demonstraţie.

Avem relaţia $E[f + g > a] = E[f > -g + a]$. Deoarece funcţiile $f(x)$ şi $-g(x) + a$ sunt măsurabile, măsurabilă va fi și mulțimea $E[f > -g + a]$ (vezi teoremele 5.2.1 și 5.2.2).

Teorema 5.2.4. *Produsul $f(x) \cdot g(x)$ a două funcţii măsurabile pe mulţimea E este o funcţie măsurabilă pe această mulţime.*

Demonstraţie.

Să presupunem că $f(x) = g(x)$, adică $f \cdot g = f^2$. Avem

$$E[f^2 > a] = \begin{cases} E[f > \sqrt{a}] \cup E[-f < -\sqrt{a}], & dacă \;\; a > 0, \\ E, & dacă \;\; a \leq 0, \end{cases}$$

de unde şi rezultă că funcţia f^2 este măsurabilă. Măsurabilitatea funcţiei $f(x) \cdot g(x)$ rezultă din egalitatea

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{1}{2}\{[f(x) + g(x)]^2 - f^2(x) - g^2(x)\}.$$

Teorema 5.2.5. *Dacă $f(x)$ este măsurabilă pe mulţimea E şi $f(x) \neq 0,\ x \in E$, atunci funcţia $\frac{1}{f(x)}$ este măsurabilă pe E.*

Demonstraţia teoremei 5.2.5 rezultă din egalitatea

$$E\left[\frac{1}{f} > a\right] = \begin{cases} E\left[f < \frac{1}{a}\right], & dacă \;\; a > 0, \\ E[f > a], & dacă \;\; a = 0, \\ E[f > 0] \cup \left\{E[f < 0] \cap E\left[f < \frac{1}{a}\right]\right\}, & dacă \;\; a < 0. \end{cases}$$

Teorema 5.2.6. *Câtul $\frac{f(x)}{g(x)}$ a două funcţii măsurabile pe mulţimea E, este o funcţie măsurabilă pe această mulţime ($g(x) \neq 0,\ x \in E$).*

Afirmația teoremei 5.2.6 urmează din teoremele 5.2.4 și 5.2.5.

Teorema 5.2.7. *Dacă $f(x)$ este măsurabilă pe mulţimea E, atunci funcţia $|f(x)|$, deasemenea, este o funcţie măsurabilă pe această mulţime.*

Demonstraţie.

$$E[|f| > a] = \begin{cases} E, & dacă \; a < 0, \\ E[f > a] \cup E[f < -a], & dacă \; a \geq 0. \end{cases}$$

Teorema 5.2.8. *Dacă $f(x)$ este măsurabilă pe mulţimea E, atunci funcţiile*

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & dac\breve{a}\ f(x) > 0 \\ 0, & dac\breve{a}\ f(x) \leq 0 \end{cases}$$

$$f_-(x) = \begin{cases} 0\ , & dac\breve{a}\ f(x) \geq 0 \\ -f(x), & dac\breve{a}\ f(x) < 0 \end{cases}$$

sunt măsurabile pe mulţimea E.

Observaţia 5.2.1. Avem

$$f_+(x) + f_-(x) = \begin{cases} f(x), dac\breve{a}\ f(x) \geq 0 \\ -f(x), dac\breve{a}\ f(x) < 0 \end{cases} = |f(x)|,$$

$$f_+(x) - f_-(x) = \begin{cases} f(x), dac\breve{a}\ f(x) \geq 0 \\ f(x), dac\breve{a}\ f(x) < 0 \end{cases} = f(x).$$

Din aceste două relaţii obţinem

$$f_+(x) = \frac{1}{2}[|f(x)| + f(x)],$$

$$f_-(x) = \frac{1}{2}[|f(x)| - f(x)].$$

Teorema 5.2.9. *Dacă funcţia $f(x)$ este măsurabilă pe mulţimile E_i şi $E = \bigcup_i E_i$, atunci $f(x)$ este măsurabilă și pe E.*

Demonstraţia rezultă din egalitatea $E[f > a] = \bigcup_i E_i\ [f > a]$.

Teorema 5.2.10. *Dacă funcția $f(x)$ este măsurabilă pe mulţimea E, atunci ea este măsurabilă şi pe orice submulțime măsurabilă E' a mulţimii E.*

Demonstraţia urmează nemijlocit din egalitatea

$$E'[f > a] = E' \cap E[f > a].$$

Teorema 5.2.11. *Orice funcţie $f(x)$ este măsurabilă pe o mulţime de măsura zero.*

Demonstraţie.

Orice submulţime a mulţimii de măsura zero, are măsura zero.

$$mE[f > a] = mE = 0.$$

Definiţia 5.2.1. *Două funcţii $f(x)$ şi $g(x)$, definite pe mulţimea măsurabilă E, se numesc* **echivalente** *pe această mulţime, dacă $E[f \neq g]$ are măsura egală cu zero:*

$$mE[f \neq g] = 0.$$

Se notează: $\boldsymbol{f \sim g}$.

Teorema 5.2.12. *Dacă funcţiile $f(x)$ şi $g(x)$ sunt echivalente pe mulţimea E şi funcţia $f(x)$ este măsurabilă pe E, atunci şi funcţia $g(x)$ este măsurabilă pe mulţimea E.*

Demonstraţie.

Notăm $E_0 = E[f \neq g]$, $E_1 = E \setminus E_0$. Pe mulţimea E_1 funcţiile $f(x)$ *şi* $g(x)$ coincid, deaceea $g(x)$ este măsurabilă pe E_1 (teorema 5.2.10). Conform teoremei 5.2.11, $g(x)$ este măsurabilă pe E_0. Prin urmare, $g(x)$ va fi măsurabilă și pe $E = E_1 \cup E_0, E_0 \cap E_1 = \emptyset$.

Definiţia 5.2.2. *Vom spune că proprietatea A este* **adevărată aproape peste tot** *pe mulţimea E, dacă mulţimea de puncte $x \in E$ în care proprietatea dată nu este edevărată are măsura egală cu zero.*

Reeşind din această definiţie, două funcţii echivalente pe mulţimea E coincid pe această mulţime aproape peste tot.

Consecinţa 5.2.1*(din teorema 5.2.12). Dacă funcţia $f(x)$ este continuă aproape peste tot pe mulţimea măsurabilă E, atunci $f(x)$ este măsurabilă pe E.*

Menționăm, că sunt funcții discontinui în orice punct a unei mulțimi, dar echivalentă unei funcții continui pe această mulțime.

Într-adevăr, funcţia lui Dirihlet

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

nu este continuă nici într-un punct al segmentului $E = [0,1]$, însă această funcţie este echivalentă cu funcţia continuă $g(x) \equiv 0$. Evident $D(x) \sim 0$, $x \in [0,1]$, deoarece $mE[D \neq 0] = m\mathbb{Q} = 0$ ($\mathbb{Q}$ - este mulţime numărabilă).

5.3. ŞIRURI DE FUNCŢII MĂSURABILE.

În această secțiune vom expune unele afirmaţii referitoare la şirurile de funcţii măsurabile.

Teorema 5.3.13. *Fie pe mulţimea E dat şirul de funcţii măsurabile*

$$f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x), ...$$

Dacă în fiecare punct $x \in E$ există limita (finită sau infinită)

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

atunci funcţia $F(x)$ este măsurabilă.

Demonstraţie.

Fixăm un număr oarecare a şi considerăm mulţimile

$$A_m^{(k)} = E\left[f_k > a + \frac{1}{m}\right], \quad B_m^{(n)} = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_m^{(k)}, \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Aceste mulţimi sunt măsurabile: $A_m^{(k)}$ – măsurabilă, fiindcă funcţia f_k e măsurabilă pe mulţimea E, $B_m^{(n)}$ – măsurabilă ca intersecţia unei mulţimi numărabile de mulţimi măsurabile. Pentru demonstrarea teoremei este de-ajuns să arătăm că este adevărată egalitatea:

$$E[F > a] = \bigcup_n \bigcup_m B_m^{(n)}.$$

Fie $x_0 \in E[F > a] \Rightarrow x_0 \in E$ şi $F(x_0) > a$, adică $F(x_0) - a > 0 \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} 0 < \frac{1}{m} < F(x_0) - a \Rightarrow F(x_0) > a + \frac{1}{m}$. Aşa cum $f_k(x_0) \to F(x_0)$, dacă $k \to \infty$, rezultă că $\exists n \in \mathbb{N}$ încât pentru toţi $k \geq n$ avem

$$f_k(x_0) > a + \frac{1}{m}.$$

Ultima relaţie ne arată că $x_0 \in E\left[f_k > a + \frac{1}{m}\right]$, adică $x_0 \in A_m^{(k)}$ pentru orice $k \geq n$. Atunci $x_0 \in B_m^{(n)}$ și deci $x_0 \in \bigcup_n \bigcup_m B_m^{(n)}$. Așadar,

$$E[F > a] \subset \bigcup_n \bigcup_m B_m^{(n)}.$$

Vom arăta că are loc și includerea reciprocă. Fie $x_0 \in \bigcup_n \bigcup_m B_m^{(n)}$. Atunci $x_0 \in B_m^{(n)}$ pentru anumite valori fixate ale lui m şi n. Prin urmare, $x_0 \in A_m^{(k)}$ pentru toţi $k \geq n$. Cu alte cuvinte, pentru $k \geq n$ are loc inegalitatea

$$f_k(x_0) > a + \frac{1}{m}.$$

Trecând la limită în această inegalitate când $k \to \infty$, obţinem

$$F(x_0) \geq a + \frac{1}{m} > a.$$

Așadar, $x_0 \in E$ şi $F(x_0) > a$, de unde rezultă că $x_0 \in E[F > a]$. Teorema este demonstrată.

Teorema 5.3.1 admite următoarea generalizare:

Teorema 5.3.2. *Fie pe mulţimea E dat şirul de funcţii măsurabile*

$$f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x), ...$$

şi o funcţie $F(x)$. Dacă relaţia

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = F(x) \tag{5.3.1}$$

se verifică aproape peste tot pe mulţimea E, atunci $F(x)$ este măsurabilă pe E.

Demonstraţie.

Notăm cu A mulţimea punctelor $x \in E$ pentru care relaţia (5.3.1) nu este adevărată (în aceste puncte limita poate, în genere, să nu existe). Potrivit condiţiei teoremei, $mA = 0$ şi atunci $F(x)$ e măsurabilă pe mulţimea A (vezi teorema 5.2.11). Conform teoremei 5.3.2 $F(x)$ va fi măsurabilă şi pe mulţimea $E \setminus A$. Dar atunci, ea va fi măsurabilă şi pe mulţimea

$$E = A \cup (E \setminus A).$$

Teorema este demonstrată.

În continuare, vom introduce noţiunea de convergenţă după măsură a unui şir funcţional care joacă un rol important în teoria măsurii.

Definiţia 5.3.1. *Fie funcțiile $f_1(x)$, $f_2(x)$, ...,$f_n(x)$, ... şi $f(x)$ măsurabile pe mulţimea E şi aproape peste tot iau valori finite. Se spune că şirul funcţional $\{f_n(x)\}$ converge în măsură către funcţia $f(x)$, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{n\to\infty} mE[|f - f_n| \geq \varepsilon] = 0,$$

adică pentru orice numere positive ε şi δ va exista un număr N, astfel încât, pentru toţi $n \geq N$ avem $mE[|f - f_n| \geq \varepsilon] < \delta$.

Teorema 5.3.3. [1] *Dacă şirul de funcţii măsurabile $\{f_n(x)\}$ converge aproape peste tot pe mulţimea E către funcţia $f(x)$, atunci el converge şi în măsură către aceeastă funcţie.*

Observaţia 5.3.1. *Din convergenţa în măsură a şirului $\{f_n(x)\}$ către funcţia $f(x)$ nu rezultă nu numai convergenţa aproape peste tot, dar nici măcar convergenţa într-un punct al mulţimii E.*

Prin urmare, convergenţa în măsură este o noţiune esenţial mai generală decât noţiunea de convergenţă aproape peste tot şi, cu atât mai mult, decât convergenţa peste tot. Totuşi, este adevărată următoarea teoremă a lui Ries.

Teorema 5.3.4. *Fie $\{f_n(x)\}$ un şir de funcţii care converge în măsură către funcţia $f(x)$. Atunci există un subşir $f_{n_1}(x)$, $f_{n_2}(x)$, ...,$f_{n_k}(x)$, ... $(n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots)$ al şirului dat, care converge aproape peste tot către $f(x)$.*

În anul 1911 D.F. Egorov a demonstrat următoarea teoremă importantă, care stabileşte legătura dintre convergenţa aproape peste tot şi convergenţa uniformă.

Teorema 5.3.5. (D.F. Egorov). *Fie E o mulţime de măsură finită şi şirul $\{f_n(x)\}$ de funcţii măsurabile pe E care converge către $f(x)$ aproape peste tot. Atunci pentru orice $\delta > 0$ există aşa o mulţime $E_\delta \subset E$ încât:*

1) $mE_\delta > m(E) - \delta$,
2) *pe mulţimea E_δ şirul $\{f_n(x)\}$ converge uniform către funcţia $f(x)$.*

Folosind această teoremă, în 1913 N.N. Luzin a demonstrat o afirmație ce stabileşte legătura dintre funcţiile măsurabile şi cele continui.

Teorema 5.3.6 (N.N. Luzin). *Pentru ca funcţia $f(x)$, definită pe segmentul $[a, b]$, să fie măsurabilă, este necesar şi suficient, ca pentru orice $\varepsilon > 0$ să existe o funcţie $\varphi(x)$, continuă pe segmentul $[a, b]$ și pentru care are loc relația*

$$mE[f(x) \neq \varphi(x)] < \varepsilon.$$

Altfel spus, o funcţie măsurabilă pe $[a, b]$ poate fi transformată într-o funcţie continuă, dacă o modificăm pe o mulţime de măsură oricât de mică.

Probleme rezolvate:

1. Verificați, dacă funcția $f(x) = 5x + 3$ este măsurabilă pe mulțimea $X = (1; 3]$.

Rezolvare. Mulțimea X este măsurabilă. Examinăm mulțimea $X(f > a)$, $a \in R$, $5x + 3 > a,\ x > \frac{a-3}{5}$. Examinăm mulțimea $\left(\frac{a-3}{5}, +\infty\right) \cap (1; 3]$ și vom alege valorile corespunzătoare pentru a.

1) $\frac{a-3}{5} \leq 1$. În acest caz $X(f > a) = \left(\frac{a-3}{5}, +\infty\right) \cap (1; 3] = (1; 3]$ − măsurabilă;

2) $\frac{a-3}{5} > 1$, însă $\frac{a-3}{5} < 3$. $X(f > a) = \left(\frac{a-3}{5}, 3\right)$ − măsurabilă;

3) $\frac{a-3}{5} = 3$, $X(f > a) = \{3\}$ − măsurabilă.

4) $\frac{a-3}{5} > 3$, $X(f > a) = \emptyset$ − măsurabilă.

Deci, $X(f > a)$ este măsurabilă $\forall a \in R$ și f este măsurabilă pe X.

2. Demonstrați, că dacă $f^3(x)$ este măsurabilă pe X, atunci $f(x)$ este măsurabilă pe X.

Rezolvare. Conform ipotezei *X* este măsurabilă.

$X(f > a) = X(f^3 > a^3)$. Deoarece dacă prima funcție este măsurabilă $\forall a \in R$, atunci și a doua la fel este măsurabilă $\forall a \in R$. Reese, că $f(x)$ este măsurabilă pe *X*.

3. Demonstrați, că dacă $f(x)$ este derivabilă în orice punct al segmentului $[a; b]$, atunci și $f'(x)$ este o funcție măsurabilă pe $[a; b]$.

Rezolvare. Examinăm funcția

$$\varphi_n(x) = \frac{f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)}{\frac{1}{n}};$$

ea este definită și măsurabilă pe $\left[a; b - \frac{1}{n}\right]$. Limita $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f'(x)$ există pentru orice x; rezultă, că funcția limită $f'(x)$ este măsurabilă pe segmentul$\left[\, a; b - \frac{1}{n}\right]$.

Doarece semiintervalul $[a; b)$ reprezintă suma segmentelor $\left[a; b - \frac{1}{n}\right]$, atunci $f'(x)$ este măsurabilă pe semiintervalul $[a; b)$. Deci $f'(x)$ este măsurabilă pe tot segmentul $[a; b]$.

Probleme propuse spre rezolvare:

1. Stabiliți măsurabilitatea funcției $f\,(x) = x^2 + 1$ pe mulțimea $X = (-1; 1]$.
2. Demonstrați, că dacă $f(x)$ este măsurabilă pe *X*, atunci $f^2(x)$ este măsurabilă pe *X*. Este oare justă afirmația inversă?
3. Demonstrați, că dacă $f(x)$ este măsurabilă pe *X*, atunci $|f(x)|$ este măsurabilă pe *X*. Este oare justă afirmația inversă?
4. Demonstrați, că dacă funcția $f\,(x)$ este măsurabilă pe orice segment $[a; b]$, unde $a < \alpha < \beta < b$, atunci ea este măsurabilă pe întreg segmentul $[a; b]$.

Capitolul 6. Integrala

Noţiunea de integrală a lui Riemann, cunoscută din cursul de analiză matematică, este aplicabilă numai la funcţii continue sau care au „nu prea multe" puncte de discontinuitate. Pentru funcţii măsurabile, care pot fi discontinue peste tot unde ele sunt definite (de exemplu funcţia Dirihlet), construcţia lui Riemann a integralei nu mai poate fi aplicată. Totuşi, pentru astfel de funcţii există o noţiune de integrală, introdusă de H. Lebesgue, perfectă şi destul de elastică.

6.1. INTEGRALA LEBESGUE DE LA FUNCŢII MĂRGINITE ŞI MĂSURABILE.

Fie pe mulţimea măsurabilă E definită funcţia $f(x)$, mărginită şi măsurabilă pe E, şi fie numerele A şi B astfel încât $\forall x \in E$ au loc inegalitățile

$$A < f(x) < B.$$

Împărţim segmentul $[A, B]$ în n părţi oarecare:

$$(T) \quad A = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{k-1} < y_k < \cdots < y_{n-1} < y_n = B.$$

Fiecărui segment $[y_k, y_{k+1})$ îi asosiem mulţimea

$$l_k = E[y_k \leq f(x) < y_{k+1}] \quad k = 0,1, \dots, n-1.$$

Mulţimile l_k posedă proprietăţile:

1. Două câte două nu se intersectează: $l_k \cap l_i = \emptyset, k \neq i$;
2. Sunt măsurabile;
3. $E = \bigcup_{k=0}^{n-1} l_k$;
4. $mE = \bigcup_{k=0}^{n-1} ml_k$.

Introducem suma inferioară s şi suma superioară S ale lui Lebesgue:

$$s = \sum_{k=0}^{n-1} y_k \cdot ml_k\,, \quad S = \sum_{k=0}^{n-1} y_{k+1} \cdot ml_k.$$

Notăm $\lambda = \max_k (y_{k+1} - y_k) > 0$. Atunci,

$$S - s = \sum_{k=0}^{n-1} y_{k+1} \cdot ml_k - \sum_{k=0}^{n-1} y_k \cdot ml_k = \sum_{k=0}^{n-1} (y_{k+1} - y_k) \cdot ml_k$$

$$\leq \lambda \cdot \sum_{k=0}^{n-1} ml_k = \lambda \cdot mE.$$

Sumele lui Lebesgue posedă proprietăţi analoage proprietăţilor sumelor Darboux:

1) Fie că diviziunii (T_0) a segmentului $[A, B]$ îi corespund sumele Lebesgue s_0 şi S_0. Dacă la această diviziune se adăugă un punct $\bar{y}$ şi se calculează sumele lui Lebesgue s_1 şi S_1 pentru noua diviziune (T_1), atunci $s_0 \leq s_1$ şi $S_1 \leq S_0$.
2) Nici o sumă inferioară a lui Lebesgue nu depășește orice sumă superioară.

Fixăm o sumă superioară oarecare S_0. Din 1) rezultă, că oricare ar fi s, avem $s \leq S_0$. Aceasta înseamnă că mulţimea $\{s\}$ de sume inferioare este mărginită superior. Prin urmare, există marginea superioară exactă a mulţimii $\{s\}$:

$$U = sup\{s\}$$

În mod similar se arată că există marginea inferioară exactă a sumelor superioare:

$$V = \inf \{S\}.$$

Evident, pentru orice diviziune a segmentului $[A, B]$ sunt adevărate inegalităţile:

$$s \leq U \leq V \leq S,$$

de unde

$$0 \leq V - U \leq S - s \leq \lambda mE.$$

Deoarece λ poate fi ales oricât de mic, concludem că

$$U = V.$$

Definiţia 6.1.1. *Valoarea comună a numerelor U şi V se numeşte* ***integrala lui Lebesgue*** *de la funcţia $f(x)$ pe mulţimea E şi se notează*

$$(L)\int_E f(x)dx \quad \text{sau, simplu,} \quad \int_E f(x)dx.$$

Dacă $E = [a, b]$, atunci scriem

$$(L)\int_a^b f(x)dx \text{ sau } \int_a^b f(x)dx.$$

Din cele expuse mai sus rezultă următoarea teoremă importantă.

Teorema 6.1.1. *Orice funcţie mărginită şi măsurabilă pe mulţimea măsurabilă E este o funcţie integrabilă în sens Lebesgue.*

Din această teoremă rezultă că integrala în sens (L) poate fi aplicată la o clasă de funcţii cu mult mai largă decât clasa funcţiilor integrabile (R).

6.2. PROPRIETĂȚILE DE BAZĂ ALE INTEGRALEI.

Integrala Lebesgue posedă proprietăţi, similare proprietăţilor integralei Riemann. Vom enumera unele dintre aceste proprietăţi.

Teorema 6.2.1. *Dacă funcţia $f(x)$ este măsurabilă pe mulţimea măsurabilă E și satisface inegalităţile $a \leq f(x) \leq b$, atunci*

$$a \cdot mE \leq \int_E f(x)dx \leq b \cdot mE.$$

Consecinţa 6.2.1. *Dacă funcţia $f(x)$ este constantă pe mulţimea măsurabilă E, $f(x) = c$, atunci*

$$\int_E f(x)dx = c \cdot mE.$$

Consecinţa 6.2.2. *Dacă funcţia $f(x)$ este nenegativă (nepozitivă), atunci şi integrala este nenegativă (nepozitivă).*

Consecinţa 6.2.3. *Dacă* $mE = 0$*, atunci pentru orice funcţie mărginită, definită pe mulţimea* E*, are loc egalitatea*

$$\int_E f(x)dx = 0.$$

Teorema 6.2.2. *Fie funcţia* $f(x)$ *măsurabilă şi mărginită pe mulţimea măsurabilă* E*. Dacă* E *reprezintă reuniunea unei mulţimi finite sau numărabile de mulţimi măsurabile:*

$$E = \bigcup_k E_k, \quad E_k \cap E_i = \emptyset, \quad k \neq i,$$

atunci

$$\int_E f(x)dx = \sum_k \int_{E_k} f(x)dx\,.$$

Teorema 6.2.2 se numeşte **aditivitatea completă** a integralei Lebesgue.

Consecinţa 6.2.4. *Dacă funcţiile* $f(x)$ *şi* $g(x)$ *sunt pe mulțimea* E *mărginite, măsurabile și echivalente, atunci*

$$\int_E f(x)dx = \int_E g(x)dx.$$

Într-adevăr, dacă $A = E[f \neq g]$, $B = E[f = g]$, atunci

$$\int_A f(x)dx = \int_A g(x)dx = 0 \int_B f(x)dx = \int_B g(x)dx.$$

Sumând aceste egalităţi, obţinem afirmaţia consecinţei 6.2.4.

În particular, integrala de la o funcţie echivalentă cu zero pe mulţimea E este egală cu zero.

Consecinţa 6.2.5. *Dacă integrala de la o funcţie* ***nenegativă****, măsurabilă şi mărginită este egală cu zero:*

$$\int_E f(x)dx = 0 \qquad (f(x) \geq 0),$$

atunci $f(x) \sim 0$.

Teorema 6.2.3. *Dacă pe mulţimea măsurabilă E sunt definite funcţiile mărginite şi măsurabile* $f(x)$ *şi* $g(x)$, *atunci*

$$\int_E [f(x) \pm g(x)]dx = \int_E f(x)dx \pm \int_E g(x)dx.$$

Teorema 6.2.4. *Dacă pe mulţimea măsurabilă E funcţia* $f(x)$*este mărginită şi măsurabilă, iar* c *este o constantă finită, atunci*

$$\int_E cf(x)dx = c\int_E f(x)dx\,.$$

Teorema 6.2.5. *Fie funcţiile* $f(x)$ *şi* $g(x)$ *mărginite şi măsurabile pe mulţimea E şi* $f(x) \leq g(x)$, *atunci*

$$\int_E f(x)dx \leq \int_E g(x)dx.$$

Teorema 6.2.6. *Dacă funcţia* $f(x)$ *este mărginită şi măsurabilă pe mulţimea măsurabilă* E, *atunci*

$$\left|\int_E f(x)dx\right| \leq \int_E |f(x)|dx.$$

Fie pe mulţimea măsurabilă E definit şirul de funcţii mărginite şi măsurabile $f_1(x)$, $f_2(x)$, ...,$f_n(x)$, ... care într-un anumit sens (peste tot, aproape peste tot, în măsură) converge către funcţia mărginită şi măsurabilă $F(x)$, atunci

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = F(x).$$

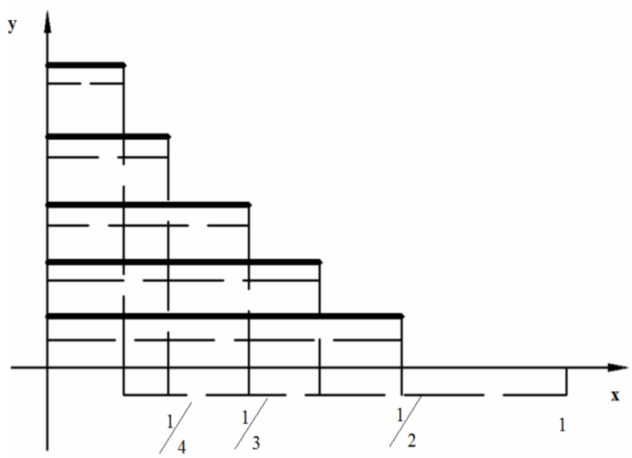
Apare întrebarea: este oare adevărată relaţia

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_E F(x)\,dx \qquad (6.2.1)$$

Dacă relaţia (6.2.1) este adevărată, atunci se spune că se admite trecerea la limită sub semnul integralei. Răspunsul la întrebarea dată, la general vorbind, este negativ.

Exemplul 6.2.1. Fie $E = [0,1]$ și

$$f_n(x) = \begin{cases} n, dacă\, x \in \left(0, \dfrac{1}{n}\right), \\ 0, \;\; dacă\, x \notin \left(0, \dfrac{1}{n}\right) \end{cases}$$



(vezi figura). Evident,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

şi

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^{\frac{1}{n}} f_n(x)dx + \int_{\frac{1}{n}}^1 f_n(x)dx = \int_0^{\frac{1}{n}} n\,dx + \int_{\frac{1}{n}}^1 0\,dx = 1.$$

Prin urmare,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 1,$$

în timp ce

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = 0.$$

Privitor la trecerea la limită sub semnul integralei are loc următoarea teoremă.

Teorema 6.2.7. *Fie pe mulţimea măsurabilă E definit şirul de funcţii mărginite şi măsurabile* $f_1(x)$, $f_2(x)$, ...,$f_n(x)$, ... *care converge după măsură către funcţia* $F(x)$. *Dacă există o așa constantă K încât* $|f_n(x)| \leq K$ *pentru toți* $x \in E$, *atunci*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_E F(x).$$

Observaţia 6.2.1. *Aşa cum noţiunea de convergenţă după măsură este mai generală decât noţiunile de convergenţă peste tot și de convergentă aproape peste tot, teorema 6.7.2 rămâne adevărată şi în aceste cazuri.*

6.3. LEGĂTURA DINTRE INTEGRALA RIEMANN ŞI INTEGRALA LEBESGUE.

Teorema 6.3.1. *Dacă funcţia* $f(x)$, *definită pe segmentul* $[a, b]$, *este integrabilă în sensul lui Riemann, atunci ea este integrabilă şi în sensul lui Lebesgue şi ambele integrale coincid:*

$$(R)\int_a^b f(x)\,dx = (L)\int_a^b f(x)\,dx.$$

Demonstraţie.

Mai întâi, vom arăta că funcţia integrabilă în sensul lui Riemann pe segmentul $[a, b]$ este măsurabilă pe acest segment. Fie

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

o diviziune oarecare a segmentului $[a, b]$. Notăm

$$m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x), \quad M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$$

(m_i şi M_i sunt numere finite deoarece din integrabilitatea funcţiei $f(x)$ după Riemann rezultă că $f(x)$ este mărginită), $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\lambda = \max_i \Delta x_i$ și

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x_i, \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x_i$$

sumele Darboux inferioare şi superioare respectiv.

După cum se ştie din cursul de analiză matematică, dacă $f(x)$ este integrabilă după Riemann, atunci

$$\lim_{\lambda \to 0} s_n = \lim_{\lambda \to 0} S_n = (R)\int_a^b f(x)\, dx.$$

Considerăm şirul de diviziuni (T_n) ale segmentului $[a, b]$:

$$(T_1): \quad a = x_0^{(1)} < x_1^{(1)} < \cdots < x_{n_1}^{(1)} = b;$$

$$(T_2): \quad a = x_0^{(2)} < x_1^{(2)} < \cdots < x_{n_2}^{(2)} = b;$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$(T_k): \quad a = x_0^{(k)} < x_1^{(k)} < \cdots < x_{n_k}^{(k)} = b;$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

pentru care

$$\lambda_i = \max_k \Delta_k^{(i)} = \max_k \left[x_k^{(i)} - x_{k-1}^{(i)}\right] \to 0,$$

dacă $i \to \infty$. Fie

$$\mathrm{m}_k^{(i)} = \inf_{x \in \left[x_{k-1}^{(i)}, x_k^{(i)}\right]} f(x) \text{ şi } \mathrm{M}_k^{(i)} = \sup_{x \in \left[x_{k-1}^{(i)}, x_k^{(i)}\right]} f(x)$$

Definim funcţiile $\varphi_i(x) = m_k^{(i)}$ şi $\Phi_i(x) = M_k^{(i)}$ pentru $x \in \left(x_{k-1}^{(i)}, x_k^{(i)}\right)$, $i = 1,2, \dots$ În punctele de divizare aceste două funcţii nu sunt definite. Aşa cum punctele de divizare formează o mulţime numărabilă, apoi $\varphi_i(x)$ şi $\Phi_i(x)$ sunt definite aproape peste tot pe $[a, b]$, deci ele sunt măsurabile ca funcţii cu trepte. Se observă uşor, că atunci când $\lambda \to 0$, adică când i creşte, funcţiile $\varphi_i(x)$ pot numai să crească, iar funcţiile $\Phi_i(x)$ pot numai să descrească. Prin urmare, şirul de funcţii $\{\varphi_i(x)\}$ este crescător şi mărginit superior, deci există $\lim_{i\to\infty} \varphi_i(x) = \varphi(x)$. Analog, şirul $\{\Phi_i(x)\}$ este monoton descrescător şi mărginit inferior, deci există $\lim_{i\to\infty} \Phi_i(x) = \Phi(x)$. Funcţiile $\varphi(x)$ şi $\Phi(x)$ sunt măsurabile, ca limitele şirurilor de funcţii măsurabile.

Inegalitățile

$$\varphi_n(x) \leq f(x) \leq \Phi_n(x)$$

au loc aproape peste tot pe $[a, b]$. Trecând în ele la limită cu $n \to \infty$, obținem

$$\varphi(x) \leq f(x) \leq \Phi(x) \tag{6.3.1}$$

aproape peste tot pe segmentul $[a, b]$. Aplicând teorema 6.2.7, avem

$$\int_a^b [\Phi(x) - \varphi(x)]\, dx = \lim_n \int_a^b [\Phi_n(x) - \varphi_n(x)]\, dx =$$

$$= \lim_n \int_a^b \Phi_n(x)\, dx - \lim_n \int_a^b \varphi_n(x)\, dx = \lim_n S_n - \lim_n s_n = 0.$$

Deoarece funcţia $\Phi(x) - \varphi(x)$ este nenegativă, atunci aproape peste tot pe $[a, b]$ are loc egalitatea

$$\Phi(x) = \varphi(x).$$

De aici și (6.3.1) rezultă că $\mathrm{f}(x) = \varphi(x)$ aproape peste tot pe $[a, b]$ și deci $f(x)$ este măsurabilă. Din faptul că funcția $f(x)$ este măsurabilă şi mărginită, urmează că ea este integrabilă în sensul Lebesgue pe $[a, b]$. Plus la aceasta,

$$(L)\int_a^b f(x)dx = (L)\int_a^b \varphi(x)dx = \lim_n \int_a^b \varphi_n(x)dx = \lim_n s_n = (R)\int_a^b f(x)dx.$$

Teorema este demonstrată.

Exemplul 6.3.1. Să se calculeze

$$(L)\int_0^1 f(x)dx, \quad \text{dacă} \qquad f(x)=\begin{cases} x, & x\in\mathbb{Q},\\ -x, & x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$$

Avem

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_{\mathbb{Q}} f(x)dx+\int_{[0,1]\setminus\mathbb{Q}} f(x)dx=\int_{\mathbb{Q}} xdx-\int_{[0,1]\setminus\mathbb{Q}} xdx=0-\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=$$
$$=-\frac{1}{2}.$$

Pe segmentul $[0,1]$ $f(x)$ este echivalentă cu funcţia $-x$, deoarece $m\mathbb{Q}=0$. Funcţia $-x$ este integrabilă în sensul lui Riemann, deci şi în sensul Lebesgue şi integralele acestea coincid.

Observaţia 6.3.1. *Funcţia lui Dirihlet* $D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q},\\ 0, & x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$ *este echivalentă cu zero, deci ea este integrabilă în sensul Lebesgue şi integrala*

$$(L)\int_0^1 D(x)dx=0,$$

însă, după cum se ştie din cursul de analiză clasică, această funcţie nu este integrabilă în sensul Riemann.

6.4. INTEGRALA STIELTJES. PROPRIETĂȚI. METODE DE CALCULARE.

În acest paragraf vom expune o generalizare a integralei lui Riemann aşa numita, integrală Stieltjes.

Fie pe segmentul $[a,b]$ definite două funcţii finite $f(x)$ şi $g(x)$ şi

$$T: a=x_0<x_1<\cdots<x_{k-1}<x_k<\cdots<x_n=b$$

o divizare oarecare a lui $[a,b]$. Pe fiecare segment elementar $[x_{k-1},x_k]$ alegem în mod arbitrar câte un punct ξ_k şi formăm suma

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)[g(x_{k+1}) - g(x_k)],$$

numită *sumă integrală a lui Stieltjes* a funcţiei $f(x)$ după funcţia $g(x)$. Notăm

$$\lambda = \max_k (x_k - x_{k-1}).$$

Definiţia 6.4.1. *În caz că* $\lambda \to 0$ *există limita finită a sumelor integrale* σ *și această limită nu depinde de alegerea diviziunilor T şi a punctelor* ξ_k, *atunci ea se numeşte* ***integrala Stieltjes*** *de la funcţia* $f(x)$ *după funcţia* $g(x)$ *şi se notează*

$$\int_{a}^{b} \boldsymbol{f(x) d\, g(x)}.$$

Aşadar,

$$\int_{a}^{b} f(x) d\, g(x) = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)[g(x_{k+1}) - g(x_k)].$$

Evident, integrala lui Riemann este un caz particular al lui Stieltjes și se obţine din aceasta dacă se ia $g(x) \equiv x$.

Vom enumera unele proprietăți ale integralei Stieltjes:

1. $\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)] d\, g(x) = \int_a^b f_1(x) d\, g(x) + \int_a^b f_2(x) d\, g(x).$

2. $\int_a^b f(x) d\, [g_1(x) + g_2(x)] = \int_a^b f(x) d\, g_1(x) + \int_a^b f(x) d\, g_2(x).$
3. Dacă k şi l sunt constante, atunci

$$\int_{a}^{b} k \cdot f(x) d\, [l \cdot g(x)] = k \cdot l \int_{a}^{b} f(x) d\, g(x).$$

În cazurile 1 – 3 din existenţa integralelor din membrii din dreapta a egalităților rezultă existenţa integralelor membrilor stângi.

4. Dacă $a < c < b$ şi există $\int_a^b f(x)d\,g(x)$, $\int_a^c f(x)d\,g(x)$, $\int_c^b f(x)d\,g(x)$, atunci este adevărată egalitatea

$$\int_a^b f(x)d\,g(x) = \int_a^c f(x)d\,g(x) + \int_c^b f(x)d\,g(x).$$

Pentru a demonstra această proprietate este suficient să includem punctul c în diviziunile T a segmentului $[a, b]$.

Observaţia 6.4.1. *Se poate arăta, că din existenţa integralei* $\int_a^b f(x)d\,g(x)$ *rezultă existenţa integralelor* $\int_a^c f(x)d\,g(x)$ *şi* $\int_c^b f(x)d\,g(x)$*, însă, din existenţa ultimelor două integrale, în caz general, nu rezultă existenţa primei integrale.*

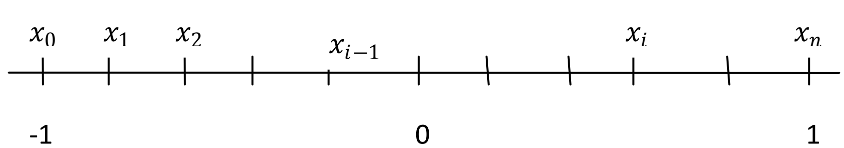
Exemplul 6.4.1. Fie funcţiile $f(x)$ şi $g(x)$ definite pe segmentul $[-1,1]$ astfel:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } -1 \leq x \leq 0, \\ 1, & \text{dacă } \quad 0 < x \leq 1; \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } -1 \leq x < 0, \\ 1, & \text{dacă } \quad 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Avem

$$\int_{-1}^{0} f(x)d\,g(x) = 0 \quad \text{şi} \int_{0}^{1} f(x)d\,g(x) = 0$$

(în prima integrală $f(x) \equiv 0$, iar în a doua $dg(x) = d(1) = 0$). Vom arăta că integrala $\int_{-1}^{1} f(x)d\,g(x)$ nu există. Pentru aceasta formăm diviziunea T astfel ca $x = 0$ să nu se conțină printre punctele lui T.



Considerăm suma integrală

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)[g(x_{k+1}) - g(x_k)].$$

Fie $x_i < 0 < x_{i+1}$. În suma σ diferit de zero pote fi doar termenul ce corespunde segmentului $[x_i, x_{i+1}]$ deoarece

$$g(x_{k+1}) - g(x_k) = 0 - 0 = 0, \qquad \text{dacă } \; x_k < x_{k+1} < 0, \; \text{și}$$
$$g(x_{k+1}) - g(x_k) = 1 - 1 = 0, \qquad \text{dacă } \; 0 < x_k < x_{k+1}.$$

Aşadar, $\sigma = f(\xi_i)[g(x_{i+1}) - g(x_i)] = f(\xi_i)[1 - 0] = f(\xi_i)$. Alegând $\xi_i < 0$, obţinem $\sigma = 0$, iar dacă $\xi_i > 0$, atunci $\sigma = 1$. Evident $\lim_{\lambda\to 0} \sigma$ nu există.

5. Din existenţa uneia dintre integrale

$$\int_a^b f(x)d\,g(x) \;\text{ și} \int_a^b g(x)d\,f(x)$$

rezultă existenţa celeilalte şi are loc egalitatea

$$\int_a^b f(x)d\,g(x) + \int_a^b g(x)d\,f(x) = f(x)g(x)\Big|_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a),$$

care reprezintă formula integrării prin părţi în integrala Stieltjes.

Demonstraţia acestei proprietăţi poate fi găsită la [1].

***Teorema 6.4.1* [1].** *Dacă funcţia $f(x)$ este continuă pe segmentul $[a, b]$, iar $g(x)$ este o funcţie cu variaţie mărginită pe segmentul $[a, b]$, atunci există integrala Stieltjes $\int_a^b f(x)d\,g(x)$.*

În continuare, vom formula două teoreme utile la calcularea integralei Stieltjes.

Teorema 6.4.2. *Dacă funcţia $f(x)$ este continuă pe segmentul $[a, b]$, iar funcţia $g(x)$este derivabilă pe $[a, b]$, și $g'(x)$ reprezintă o funcție integrabilă în sens Riemann, atunci*

$$(S)\int_a^b f(x)d\,g(x) = (R)\int_a^b f(x)\,g'(x)dx.$$

Teorema 6.4.3. *Fie funcţia $f(x)$ este continuă pe segmentul $[a,b]$, iar $g(x)$ are derivata $g^{'}(x)$ – integrabilă după Riemann în orice punct al segmentului cu excepţia unui număr finit de puncte. Dacă $g(x)$ în punctele*

$$a = c_0 < c_1 < \cdots < c_{k-1} < c_k < \cdots < c_m = b$$

are discontinuitate de speţa întâi, atunci există integrala lui Stieltjes $(S)\int_a^b f(x)d\,g(x)$ şi este adevărată formula

$$(S)\int_a^b f(x)d\,g(x) = (R)\int_a^b f(x)\,g^{'}(x)dx +$$

$$+f(a)[g(a+0)-g(a)] + \sum_{k=1}^{m-1} f(c_k)[g(c_k+0)-g(c_k-0)] +$$

$$+f(b)[g(b)-g(b-0)].$$

Demonstraţiile teoremelor 6.4.2 și 6.4.3 pot fi găsite în [3].

Exemplul 6.4.2. Să se calculeze $(S)\int_0^{\frac{\pi}{2}} xd\,sinx$.

Avem $f(x) = x$ - continuă pe $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $g(x) = sinx$ – are derivata $g^{'}(x) = cosx$ care este integrabilă în sens Riemann. Aplicând teorema 6.4.2, obţinem

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} xd\,sinx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xcosx\,dx = \begin{bmatrix} u = x, dv = cosxdx \\ du = dv, v = sinx \end{bmatrix} = xsinx|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} sinxdx =$$

$$= (xsinx + cosx)|_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{\pi}{2}+0\right) - (0+1) = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Exemplu 6.4.3. Să se calculeze $(S)\int_0^1 f(x)d\,g(x)$, unde

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{x}, & \dfrac{1}{2} \le x \le 1. \end{cases}$$

Avem: $f(x) = x^2$ – continuă pe segmentul $[0,1]$, $g(x)$ – are punct de discontinuitate de speţa I în $x = \frac{1}{2}$:

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}-} g(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}-} x = \frac{1}{2}, g\left(\frac{1}{2} - 0\right) = \frac{1}{2}; \ \lim_{x \to \frac{1}{2}+} g(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}+} \frac{1}{x} = 2$$

$$g\left(\frac{1}{2} + 0\right) = 2; \ g\left(\frac{1}{2} + 0\right) - g\left(\frac{1}{2} - 0\right) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Aplicând teorema 6.4.3, obţinem

$$(S)\int_0^1 f(x)d\,g(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 \cdot 1dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{3}{2} =$$

$$= \frac{x^3}{3}\Big|_0^{\frac{1}{2}} - x|_{\frac{1}{2}}^1 + \frac{3}{8} = -\frac{1}{12}.$$

Teorema 6.4.4. *Fie funcţiile $f_n(x) (n = 1,2, \ldots)$ continui pe segmentul $[a, b]$, şirul $\{f_n(x)\}$ convergent uniform către funcţia $f(x)$:*

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x),$$

iar $g(x)$ este o funcţie cu variaţie mărginită. Atunci,

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)dg(x) = \int_a^b \lim_{n \to \infty} f_n(x)\, dg(x) = \int_a^b f(x)dg(x).$$

Teorema 6.4.5 (**Helly**). *Fie funcţia $f(x)$ continuă pe segmentul $[a, b]$, iar $g_n(x)$ $(n = 1,2, \ldots)$ funcţii cu variaţie mărginită pe segmentul $[a, b]$. Dacă variaţiile totale ale acestor funcţii sunt mărginite de unul şi acelaşi număr M:*

$$\bigvee_a^b g_n(x) \leq M \quad (n = 1,2, \ldots),$$

şi există $\lim_{n \to \infty} g_n(x) = g(x)$, *atunci*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)dg_n(x) = \int_a^b f(x)\, d\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \int_a^b f(x)dg(x).$$

Probleme rezolvate:

1. Calculați aplicând definiție $(R)\int_a^b c dx,\ c =$ const.

Rezolvare. Efectuăm o (T) – divizare a segmenului $[a; b]$.

Alegem aleator $c_k \in [x_k; x_{k+1}] \cdot f(c_k) = c$.

$$S_R(T) = \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} c\Delta x_k = c\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k = c(b-a).$$

Atunci

$$\exists \lim_{\lambda(T)\to 0} S_R(T) = c(b-a) = (R)\int_a^b c dx.$$

2. Calculați aplicând definiție $(R)\int_a^b x dx$

   Rezolvare. Efectuăm o (T) – divizare a segmenului $[a; b]$.

Deorece $f(x) = x$ este continuă pe $[a; b]$, atunci $\exists (R)\int_a^b x dx$ și $\lim_{\lambda(T)\to 0} f(T)$ nu depinde d alegeea punctelor $c_k \in [x_k; x_{k+1}]$. Alegem $c_k = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$.

$$S_R(T) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{x_k + x_{k+1}}{2}(x_{k+1} - x_k) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}^2 - x_{k+1}^2) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

3. Calculați $(S)\int_0^1 x^2 d(x^3 + 1)$.

   *Rezolvare.*Deoarece $f(x) = x^2$ este continuă pe [*a*,*b*], iar $g(x) = x^3 + 1$este monotonă, deci este o funcție cu variație mărginită, deci integral există.

   $\exists g'(x) = x^2$ care este integrabilă după Riemann pe $[0; 1]$.

Avem:

$$(S)\int_0^1 x^2 d(x^3+1) = (R)\int_0^1 x^2 (x^3+1)'_x dx = (R)\int_0^1 x^2 x^2 dx = (R)\int_0^1 x^4 dx$$
$$= \frac{x^5}{5}\bigg|_0^1 = \frac{1}{5}.$$

4. Este oare integrabilă după Riemann pe segmentul $[a;b]$ funcția cu variație mărginită?

Rezolvare. Funcția cu variație mărginită are pe [a;b] nu este mai mult decât o mulțime numărabilă de puncte de discontinuitate. Această mulțime are măsura Lebesgue nulă. În consecință, funcția cu variație mărginită este continuă aproape peste tot [a;b] și conform teoremei lui Lebesgue, ea este Riemann integrabilă.

5. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q, \\ -1, & x \notin Q, \end{cases}$ unde $x \in [0;1]$. Calculați $(L)\int_0^1 f(x)dx$.

Rezolvare. Funcția $f(x)$ este măsurabilă pe $[0;1]$ și mărginită. Într-adevăr $|f(x)| \leq 1 \ \forall\, x \in [0;1]$.

$$X(f > a) = \begin{cases} [0;1], & \text{a} < -1, \\ \text{Q}_{[0;1]}, & \text{a} = -1, \\ \text{Q}_{[0;1]}, & -1 < a < 1, \\ \emptyset, & \text{a} \geq 1 \end{cases} - \text{măsurabilă.}$$

Deaceea $\exists (L)\int_0^1 f(x)dx$, $f(x) \sim (-1)$ pe $[0;1]$. Avem:

$$(L)\int_0^1 f(x)dx = (L)\int_0^1 (-1)dx = (R)\int_0^1 (-1)dx = -x|_0^1 = -1.$$

6. Calculați $(L)\int_0^1 f(x)dx$, dacă

$$f(x) = \begin{cases} x^3, \text{dacă } x - \text{irațional}, \\ 1, \text{dacă } x - \text{rațional}. \end{cases}$$

Rezolvare. Funcția $f(x)$ aproape peste tot poate fi definită ca limita șirului de funcții în trepte $h_n(x) = \frac{k}{n}$, unde $x \in \left\{x : \frac{k}{n} \leq x_3 \leq \frac{k+1}{n}\right\}$. Iată de ce ea este măsurabilă. Deoarece ea este mărginită pe [0;1], deci ea este sumabilă în sensul Lebesgue. Pentru a calcula integrala Lebesgue de la funcția $f(x)$ examinăm funcția $g(x) = x^3$, care este echivalentă cu funcția $f(x)$ pe segmantul [0;1] (valorile acestor funcții diferă doar pe mulțimile de măsură nulă). Integrala Lebesgue de la $g(x)$ coincide cu integrala sa Riemann.

$$(L)\int_0^1 f(x)dx = (L)\int_0^1 g(x)dx = (L)\int_0^1 x^3dx = \int_0^1 x^3dx = 0{,}25.$$

7. Dacă $D \subset [0;\, 1]$ — mulțimea lui Cantor, iar $\chi_D(x)$ este funcția ei caracteristică. Cu cât este egală $(L)\int_D \chi_D(x)dx$?

Rezolvare. Conform definiției mulțimii lui Cantor, ea poate fi obținută prin eliminarea din segment sisteme de intervale, lungimea totală a cărora coincide cu lungimea segmentului. ținând cont de aditivitatea integralei Lebesgue,

$$(L)\int_D \chi_D(x)dx = 0.$$

8. Fie $D -$ mulțimea lui Cantor ce aparține segmentului [0;1], iar funcția

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in D, \\ 2, & \text{dacă } x \in [0;\, 1] \setminus D. \end{cases}$$

Calculați $(L)\int_0^1 f(x)dx$.

Rezolvare. Din exemplul percedent rezultă, că măsura mulțimii D este nulă. Funcția $f(x)$ care se integrează pe [0;1] este echivalentă cu funcția $g(x) = 2$. Deci

$$(L)\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 2dx = 2.$$

9. Calculați $(L)\int_0^1 f(x)dx$, dacă

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{dacă } x - \text{irațional și } x \in \left(\frac{1}{2}; 1\right], \\ x^2, \text{dacă } x - \text{irațional și } x \in \left[0; \frac{1}{2}\right), \\ \quad 0, \qquad \text{dacă } x - \text{rațional.} \end{cases}$$

Rezolvare. Divizăm segmentul [0;1] în două părți: $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ și $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$. Pe primul segment funcția de integrare este echivalentă cu x, iar pe al doilea cu x^2. Deci

$$(L)\int_0^1 f(x)dx = (L)\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx + (L)\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx$$

$$= (L)\int_0^{\frac{1}{2}} xdx + (L)\int_{\frac{1}{2}}^1 x^2dx = \int_0^{\frac{1}{2}} xdx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2dx = \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3\cdot 2^3}\right)$$

$$= \frac{10}{24} = \frac{5}{12}.$$

10.Calculați $(L)\int_{-2}^{2} sng(\cos \pi x)dx$.

Rezolvare. Funcția $f(x) = sng(\cos \pi x)$ reprezintă o funcție în trepte, ce primește valorile -1, 0 și 1 corespunzător pe mulțimile A_{-1}, A_0 și A_1, unde

$$A_{-1} = \left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)\bigcup\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right), \qquad \mu(A_{-1}) = 2\cdot\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) = 2.$$

$$A_0 = \left\{-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right\}, \qquad \mu(A_0) = 0.$$

$$A_1 = \left[-2; -\frac{3}{2}\right)\bigcup\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)\bigcup\left(\frac{3}{2}; 2\right]; \ \mu(A_1) = 2\cdot\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) = 2.$$

$$(L)\int_{-2}^{2} sng(\cos \pi x)dx = -1\cdot 2 + 0\cdot 0 + 1\cdot 2 = 0.$$

11.Calculați $(L)\int_0^1 x\chi_{R\setminus Q}(x)dx$, unde $\chi_{R\setminus Q}$ − funcția caracteristică a mulțimii $R \setminus Q$.

Rezolvare.

Metoda 1. Vom arăta, că funcția $f(x) = x\chi_{R\setminus Q}(x)$ este măsurabilă. Pentru aceasta vom construi șirul de funcții în trepte $h_n(x) = \frac{k}{n}$, definite pe mulțimea

$$A_k = \left\{x \in [0;1];\ \frac{k}{n} \le f(x) \le \frac{k+1}{n}\right\},$$

unde $k = 0,1,\dots,n-1$. Așa cum $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = [0;1]$, atunci pentru orice $x \in [0;1]$

$$|f(x) - h_n(x)| \le \frac{1}{n}.$$

Adică șirul construit converge uniform către $f(x)$. Ceea ce demonstrează măsurabilitatea lui $f(x)$. Pe lângă toate acestea funcția dată este mărginită, deci ea este integrabilă după Lebesgue pe segmentul $[0;1]$:

$$(L)\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty}(L)\int_0^1 h_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n}\mu(A_k).$$

Așa cum lungimea fiecărui interval A_k este $\frac{1}{n}$, atunci

$$(L)\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{k}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}k = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)}{2n^2} = \frac{1}{2}.$$

Metoda 2. Așa cum $f(x)$ este măsurabilă și mărginită, atunci ea este integrabilă după Lebesgue. Mai mult ca atât, ea aproape peste tot coincide cu funcția $g(x) = x$. Deci

$$(L)\int_0^1 f(x)dx = (L)\int_0^1 xdx.$$

Dat fiind faptul, că $g(x) = x$ este continuă pe [0;1], ea este integrabilă după Riemann, adică

$$(L)\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xdx = \frac{x^2}{2}\bigg|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

12.Calculați

$$\lim_{n\to\infty}(L)\int_R n\,sin\,\frac{|x|}{n}\cdot(1+x^4)^{-1}dx.$$

Examinăm pe mulțimea R șirul funcțional

$$f_n(x) = \ sin\,\frac{|x|}{n}\cdot(1+x^4)^{-1}, n \in N.$$

Pentru orice $x \in R$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{n\,sin\,\frac{|x|}{n}}{1+x^4} = \frac{|x|}{1+x^4} = g(x).$$

Limita acestui șir funcțional reprezintă o funcție nenegativă

$$|f_n(x)| \leq \frac{|x|}{1+x^4} = g(x),$$

Care este integrabilă după Riemann pe R, dar aceasta înseamnă că este integrabilă și după Lebesgue pe R. Deci

$$\lim_{n\to\infty}(L)\int_R n\,sin\,\frac{|x|}{n}\cdot(1+x^4)^{-1}dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{|x|dx}{1+x^4} = 2\int_0^{\infty}\frac{xdx}{1+x^4} =$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d(x^2)}{1+(x^2)^2} = \ arctgx^2|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

13.Fie pe semiintervalul $[0;1)$ este definită funcția continuă $f(x)$ astfel, încât $\lim_{n\to\infty} f(x) = \infty$. Demonstrați, că funcția este integrabilă pe [0;1] după

Lebesgue dacă și numai dacă, integrala improprie $(L)\int_0^1 |f(x)|dx$ este convergentă.

Admitem, că funcția $f(x)$ este integrabilă după Lebesgue pe [0;1]. În cazul dat pe [0;1] este integrabilă și funcția $g(x) = |f(x)|$. Construim șirul funcțional

$$g_n(x) = \begin{cases} |f(x)|, \text{dacă } x \in \left[0; 1 - \frac{1}{n}\right], \\ 0, \qquad \text{dacă } x \notin \left[0; 1 - \frac{1}{n}\right]. \end{cases}$$

Aceast șir converge aproape peste tot la $g(x)$. Fiecare din funcțiile $g_n(x)$ este continuă aproape peste tot și, prin urmare, este Riemann integrabilă și Lebesgue integrabilă pe [0; 1]. Și este justă egalitatea

$$(L)\int_0^1 g_n(x)dx = \int_0^1 g_n(x)dx = \int_0^1 |f(x)|dx.$$

Așa cum $|g_n(x)| \leq |f(x)|$ pentru orice $x \in [0; 1]$, atunci $|f(x)|$ este majoranta integrabilă pentru șirul $\{g_n(x)\}$. Conform teoremei Lebesgue

$$(L)\int_0^1 |f(x)|dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 g_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^{1-\frac{1}{n}} |f(x)|dx = \int_0^1 |f(x)|dx.$$

Presupunem acum, că funcția $f(x)$ este integrabilă absolut pe [0; 1], adică este convergentă integrala

$$\int_0^1 |f(x)|dx.$$

(să reamintim, că funcția $f(x)$ este absolut integrabilă în sensul integralei improprii de speța a doua pe segmentul [0;1], dacă integralele $\int_0^1 f(x)dx$ și $\int_0^1 |f(x)|dx$ converg simultan. Examinăm același șir funcțional $\{g_n(x)\}$, fiecare funcție fiind Riemann integrabilă și deci Lebesgue integrabilă pe [0;1]. Acest șir este monoton nedescrescător în fiecare punct al segmentului [0;1]. În același timp $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = |f(x)|, x \in$[0;1]. Iar

$$\lim_{n\to\infty}(L)\int_0^1 g_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^{1-\frac{1}{n}} |f(x)|dx \leq \int_0^1 |f(x)|dx.$$

Deci funcția $|f(x)|$ este integrabilă pe $[0;\,1]$. Ceea ce implică faptul, că și funcția *f*(*x*) este Lebesgue integrabilă pe [0;1].

Examinăm pentru fiecare n natural funcția

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), \text{dacă } x \in \left[0; 1-\dfrac{1}{n}\right], \\ 0, \qquad \text{dacă } x \notin \left[0; 1-\dfrac{1}{n}\right]. \end{cases}$$

Din inegalitatea $|f_n(x)| \leq |f(x)|$, pentru orice $x \in [0;1]$, rezultă integrabilitatea oricărei funcții ale șirului $\{f_n(x)\}$. Doarece

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),\ x \in [0;1],$$

Atunci din teorema Lebesgue obținem

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^{1-\frac{1}{n}} |f(x)|dx = \lim_{n\to\infty}(L)\int_0^1 f_n(x)dx = (L)\int_0^1 f(x)dx.$$

Probleme propuse spre rezolvare:

Să se calculeze integralele:

1) Este oare integrabilă după Riemann pe segmentul $[0;1]$ funcția

$$f(x) = \begin{cases} 2, x \in Q, \\ -x, x \notin Q. \end{cases}$$

2) $(S)\int_0^2 x^2 d\ln(1+x)$;

3) $(S)\int_{-1}^{1} x d\, arctgx$;

4) $(S)\int_{-1}^{3} x dg(x)$, unde $g(x)=\begin{cases} 0, & x=-1, \\ 1, & -1<x<2, \\ -1, & 2\le x\le 3; \end{cases}$

5) $(S)\int_{0}^{2} x^2 dg(x)$, unde $g(x)=\begin{cases} -1, & 0\le x<\frac{1}{2}, \\ 0, & \frac{1}{2}\le x<\frac{3}{2}, \\ 2, & x=\frac{3}{2}, \\ -2, & \frac{3}{2}<x\le 2; \end{cases}$

6) a) $(S)\int_{-2}^{2} x dg(x)$,

b) $(S)\int_{-2}^{2}(x^3+1)dg(x)$, unde $g(x)=\begin{cases} x+2, & -2\le x\le -1, \\ 2, & -1<x<0, \\ x^2+3, & 0\le x\le 2. \end{cases}$

7) Calculați $(L)\int_0^1 f(x)dx$, dacă $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\in Q, \\ -x^2, & x\in R/Q\,. \end{cases}$

8) Calculați $(L)\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$, dacă $f(x)=\begin{cases} \sin x, & cosx\in Q, \\ -sin^2x, & cos\,x\in R/Q\,. \end{cases}$

9) Fie D - mulțimea lui Cantor, iar mulțimea $A\subset[0,1]$ – nemăsurabilă după Lebesgue. Calculați

$(L)\int_0^1 f(x)dx$, dacă $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\in D\,/\,A, \\ -x^2, & x\in[0,1]\,/\,(D\cap A). \end{cases}$

10) Calculați $(L)\int_0^1 f(x)dx$, dacă $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\in(R\,/\,Q)\cap\left[0;\frac{1}{3}\right), \\ lnx, & x\in(R/Q)\cap\left[\frac{1}{3};1\right], \\ 0, & x\in Q. \end{cases}$

11) Calculați $(L)\int_0^1 f(x)dx$, dacă $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & x\notin Q, \\ x^3, & x\in Q. \end{cases}$

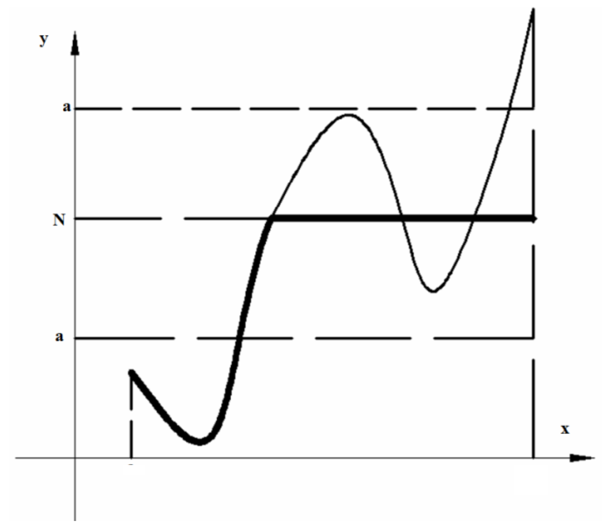
Capitolul 10. Spațiul funcţiilor sumabile

Vom generaliza definiţia integralei Lebesgue pentru funcţiile nemărginite. Pentru început, vom considera funcţiile nemărginite nenegative.

10.1. INTEGRALA LEBESGUE DE LA FUNCŢII MĂSURABILE NENEGATIVE ŞI NEMĂRGINITE.

Fie funcţia $f(x)$ măsurabilă şi nenegativă pe mulţimea măsurabilă E şi fie N un număr natural. Definim funcţia $[f(x)]_N$ în modul următor:

$$[f(x)]_N = \begin{cases} f(x), & \text{dacă } f(x) \leq N, \\ N, & \text{dacă } f(x) > N. \end{cases}$$



Această funcţie se numeşte „funcţie tăiată“, sau „tăietura funcţiei $f(x)$ cu numărul N“ (în figura alăturată graficul funcţiei $[f(x)]_N$ este este reprezentat de linia îngroșată).

Teorema 10.1.1. *Dacă funcţia $f(x)$ este măsurabilă pe mulţimea E, atunci şi funcţia $[f(x)]_N$, deasemenea, este măsurabilă pe această mulţime.*

Demonstraţia teoremei 10.1.1 rezultă din egalitatea

$$E[[f]_N > a] = \begin{cases} E[f > a], dacă\ a < N, \\ \emptyset, \quad dacă\ a \geq N. \end{cases}$$

Deoarece funcţia $[f(x)]_N$ pe mulţimea E este mărginită şi măsurabilă, atunci ea este şi integrabilă (Teorema 10.1.1) pe E, adică există $\int_E [f(x)]_N dx$.

Evident, pe mulţimea E au loc inegalităţile:

$$[f(x)]_1 \leq [f(x)]_2 \leq [f(x)]_3 \leq \cdots$$

Conform teoremei 9.2.4 avem

$$\int_E [f(x)]_1\,dx \le \int_E [f(x)]_2\,dx \le \int_E [f(x)]_3\,dx \le \cdots$$

Prin urmare, există limita(finită sau infinită)

$$\lim_{N\to\infty} \int_E [f(x)]_N\,dx. \qquad (10.1.1)$$

Definiţia 10.1.1. *Limita (10.1.1) se numeşte* **integrala Lebesgue** *de la funcţia* $f(x)$ *pe mulţimea E şi se notează*

$$\int_E f(x)dx.$$

Dacă această integrală este finită, atunci funcţia $f(x)$ *se numeşte integrabilă (L) sau sumabilă pe mulţimea* E*.*

Dacă $E = [a, b]$, atunci, de obicei, se scrie

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Uşor se observă, că pentru funcţiile mărginite, măsurabile şi nenegative, noua definiţie a integralei coincide cu cea dată mai înainte, deoarece pentru N destul de mari vom avea $[f(x)]_N = f(x)$.

Concluzia 10.1.1. Orice funcţie mărginită măsurabilă şi nenegativă, este sumabilă.

În continuare, vom expune unele proprietăți importante ale funcțiilor sumabile.

Teorema 10.1.2. *Dacă funcţia* $f(x)$ *este sumabilă pe mulţimea* E*, atunci ea este aproape peste tot finită.*

Demonstraţie.

Notăm $A = E[f = +\infty]$. Pe mulţimea A funcţia $[f(x)]_N = N$, deci

$$\int_E [f(x)]_N \, dx \geq \int_A [f(x)]_N \, dx = N \cdot mA.$$

Dacă mA este mai mare ca zero ($mA > 0$), atunci $\int_E [f(x)]_N \, dx$ creşte nemărginit odată cu creşterea lui N, adică

$$\lim_{N \to \infty} \int_E [f(x)]_N \, dx = +\infty,$$

ceia ce contrazice presupunerii de sumabilitate a funcției $f(x)$ pe E. Teorema 10.1.2 este demonstrată.

Teorema 10.1.3. *Dacă* $mE = 0$, *atunci orice funcţie nenegativă* $f(x)$ *este sumabilă pe E şi*

$$\int_E f(x)dx = 0.$$

Teorema 10.1.4. *Dacă funcţiile* $f(x)$ *şi* $g(x)$ *sunt echivalente pe mulţimea* E, $f \sim g$, *atunci*

$$\int_E f(x)dx = \int_E g(x)dx\,.$$

Teorema 10.1.5. *Dacă funcţia* $f(x)$ *este nenegativă şi măsurabilă pe mulţimea* E, *iar* E_0 *este o submulţime măsurabilă a mulţimii* E, *atunci*

$$\int_{E_0} f(x)dx \leq \int_E f(x)dx\,.$$

Teorema 10.1.6. *Fie* $f(x)$ *şi* $g(x)$ *două funcţii nenegative şi măsurabile pe mulţimea* E. *Dacă* $f(x) \leq g(x)$, *atunci*

$$\int_E f(x)dx \leq \int_E g(x)dx\,.$$

Demonstraţia rezultă din relațiile

$$[f(x)]_N \leq [g(x)]_N \Rightarrow \int_E [f(x)]_N dx \leq \int_E [g(x)]_N dx$$

şi trecerea la limită când $N \to +\infty$.

În particular, dacă $\mathrm{g}(x)$ este sumabilă pe mulţimea E, atunci şi $f(x)$ este sumabilă pe E.

Teorema 10.1.7. *Dacă $f(x)$ este nenegativă şi măsurabilă pe mulţimea E şi*

$$\int_E f(x)dx = 0,$$

atunci funcţia $f(x)$ este echivalentă cu zero, $f \sim 0$.

Demonstraţie.

Din

$$0 \leq \int_E [f(x)]_1\, dx \leq \int_E f(x)\, dx = 0$$

și consecinţa 10.1.2 urmează că $[f(x)]_1 \backsim 0$, fiindcă $\int_E [f(x)]_1\, dx = 0$. Egalitățile $[f(x)]_1 = 0$ şi $f(x) = 0$. Aceasta se explică prin faptul, că $[f(x)]_1$ poate lua numai două valori: $f(x)$ şi 1. Deoarece $mE[[f]_N \neq 0] = 0$, atunci şi $mE[f \neq 0] = 0$, deci $f(x) \sim 0$.

Teorema 10.1.8. *Dacă $f(x)$ şi $g(x)$ sunt două funcţii nenegative şi măsurabile pe mulţimea E, atunci*

$$\int_E [f(x) + g(x)]dx = \int_E f(x)dx + \int_E g(x)dx.$$

În particular, dacă fiecare dintre funcţiile $f(x)$ şi $g(x)$ sunt sumabile, atunci şi suma lor, deasemenea, este sumabilă.

Teorema 10.1.9. *Dacă $f(x)$ este nenegativă şi măsurabilă pe mulţimea E şi $k \geq 0$ este un număr finit oarecare, atunci*

$$\int_E k \cdot f(x)dx \leq k \int_E f(x)dx.$$

În particular, dacă $f(x)$ este sumabilă pe mulţimea E, atunci şi funcția $k \cdot f(x)$ este sumabilă pe E.

Teorema 10.1.10. *Fie pe mulţimea E dat şirul crescător de funcţii măsurabile şi nenegative$f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots \leq f_n(x) \leq \cdots$ Dacă $F(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, atunci*

$$\int_E F(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx.$$

Teorema 10.1.11 (aditivitatea completă a integralei). *Fie că mulţimea măsurabilă E este reprezentată ca reuniunea unei mulţimi finite sau numărabile de mulţimi măsurabile E_k, care două câte două nu se intersectează $E = \bigcup_k E_k$, $E_k \cap E_i = \emptyset$, $k \neq i$. Dacă $f(x)$ este o funcţie nenegativă şi măsurabilă pe mulţimea E, atunci*

$$\int_E f(x)dx = \sum_k \int_{E_k} f(x)dx.$$

10.2. FUNCȚII SUMABILE DE ORICE SEMN.

În această secțiune vom extinde noţiunea de funcţii sumabile asupra funcţiilor nemărginite de orice semn.

Fie funcţia $f(x)$ măsurabilă pe mulţimea măsurabilă E. În capitolul 9 au fost introduse funcţiile nenegative

$$f_+(x) = \frac{1}{2}[|f(x)| + f(x)] \text{ şi } f_-(x) = \frac{1}{2}[|f(x)| - f(x)]. \qquad (10.2.1)$$

Aceste funcţii sunt măsurabile ca suma a două funcţii măsurabile. Prin urmare, există integralele

$$\int_E f_+(x)dx \quad \text{şi} \quad \int_E f_-(x)dx.$$

Din (10.2.1) rezultă egalitatea $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$.

Definiţia 10.2.1. *Expresia*

$$\int_E f_+(x)dx - \int_E f_-(x)dx$$

se mai numeşte convențional ***integrala de la funcţia $f(x)$ pe mulţimea E***.

Observaţia 10.2.1. *Dacă*

$$\int_E f_+(x)dx = +\infty \quad \text{şi} \quad \int_E f_-(x)dx = +\infty,$$

atunci simbolul

$$\int_E f_+dx - \int_E f_-dx = +\infty - (+\infty)$$

e lipsit de sens (nedeterminare de forma $(\infty-\infty)$*). Deaceea, definiţia 10.2.1 a inegralei are sens doar atunci, când cel puţin una dintre funcţiile* $f_+(x)$ *sau* $f_-(x)$ *este sumabilă.*

Luând în consideraţie această observaţie, vom da definiţia de bază a integralei Lebesgue.

Definiţia 10.2.2. *Dacă cel puţin una dintre funcţiile* $f_+(x)$ *şi* $f_-(x)$*este sumabilă pe mulţimea* E*, atunci diferenţa (finită sau infinită)*

$$\int_E f_+ x dx - \int_E f_-(x)dx$$

se numeşte ***integrala Lebesgue*** *de la funcţia* $f(x)$ *pe mulţimea E şi se notează cu simbolul*

$$\int_E f(x)dx.$$

Evident, pentru ca integrala lui Lebesgue să fie finită, este necesar şi suficient, ca fiecare dintre funcţiile $f_+(x)$ *şi* $f_-(x)$ să fie sumabile.

Definiţia10.2.3. *Funcţia* $f(x)$ *se numeşte* ***integrabilă în sensul lui Lebesgue*** *sau* ***sumabilă pe mulţimea E****, dacă* $\int_E f(x)dx$ *există şi este finită.*

Clasa de funcţii sumabile pe mulţimea E se notează $\boldsymbol{L(E)}$, sau simplu $\boldsymbol{L}$ (câte odată - L_1). Așadar, faptul că $f(x)$ este sumabilă pe mulţimea E, pe scurt, se notează $\boldsymbol{f(x)} \in \boldsymbol{L}$.

Teorema 10.2.1. *Pentru ca funcţia* $f(x)$*, măsurabilă pe mulţimea* E*, să fie sumabilă, este necesar şi suficient, ca să fie sumabilă funcţia* $|f(x)|$*. Dacă această condiţie se îndeplineşte, atunci este adevărată inegalitatea*

$$\left|\int_E f(x)dx\right| \leq \int_E |f(x)|dx.$$

Demonstraţie.

Din (10.2.1) obţinem $|f(x)| = f_+(x) + f_-(x)$.

Necesitatea.

Fie $f(x)$ sumabilă pe E. Atunci $|f(x)|$ este sumabilă ca sumă a două funcţii sumabile.

Suficienţa.

Fie $|f(x)|$ sumabilă. Din (10.2.1) rezultă că $f_+(x) \leq |f(x)|$ şi $f_-(x) \leq |f(x)|$. Conform demonstrației teoremei 10.1.6 funcţiile $f_+(x)$ şi $f_-(x)$ sunt sumabile pe E. Atunci, şi funcţia $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$ este sumabilă ca diferenţa a două funcţii sumabile. Rămâne să demonstrăm inegalitatea din teoremă. Avem $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ și toate funcţiile din aceste inegalități sunt sumabile pe mulţimea E, deaceea

$$-\int_E |f(x)|\,dx \leq \int_E f(x)dx \leq \int_E |f(x)|\,dx \Rightarrow \left|\int_E f(x)dx\right| \leq \int_E |f(x)|dx.$$

Teorema este complet demonstrată.

Consecinţa 10.2.1. *Funcţia sumabilă este aproape peste tot finită.*

Consecinţa 10.2.2. *Dacă $mE = 0$, atunci pe E orice funcţie $f(x)$ este sumabilă şi*

$$\int_E f(x)dx = 0.$$

Consecinţa 10.2.3. *Orice funcţie sumabilă pe mulţimea E este sumabilă şi pe orice submulţime măsurabilă a lui E.*

Consecinţa 10.2.4. *Dacă funcţiile $f(x)$ şi $F(x)$ sunt măsurabile pe mulţimea E şi $|f(x)| \leq F(x)$, atunci din $F(x) \in L(E) \Rightarrow f(x) \in L(E)$.*

Teorema 10.2.2 (aditivitatea finită a integralei). *Fie*

$$E = \bigcup_{k=1}^{n} E_k \,, E_k \cap E_i = \emptyset, k \neq i,$$

şi E_k *sunt măsurabile. Dacă* $f(x)$ *este sumabilă pe fiecare dintre mulţimile* E_k*, atunci ea este sumabilă şi pe mulţimea E şi*

$$\int_E f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_E f(x)dx.$$

Observaţia 10.2.2. *Dacă* $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$*,* $E_k \cap E_i = \emptyset$*,* $k \neq i$*, atunci din faptul că* $f(x)$ *este sumabilă pe fiecare dintre* E_k *încă nu înseamnă că* $f(x)$ *este sumabilă pe* E.

Teorema 10.2.3. *Fie*

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \,, \qquad E_k \cap E_i = \emptyset, \qquad k \neq i,$$

şi E_k *sunt măsurabile, iar funcția* $f(x)$ *este sumabilă pe mulţimea* E*. Atunci,*

$$\int_E f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)dx.$$

Teorema 10.2.4. *Fie* $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$*,* $E_k \cap E_i = \emptyset$*,* $k \neq i$*,* E_k *– măsurabile. Dacă* $f(x)$ *este sumabilă pe fiecare dintre mulţimile* E_k *şi dacă seria* $\sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} |f(x)| dx$ *este convergentă, atunci* $f(x)$ *este sumabilă pe mulţimea E şi*

$$\int_E f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)dx.$$

Teoremele 10.2.3 şi 10.2.4 ne dau aditivitatea completă a funcţiilor sumabile (a integralei Lebesgue).

Teorema 10.2.5. *Dacă funcţiile* $f(x)$ *şi* $g(x)$ *sunt sumabile pe mulţimea E şi* $k = const.$ *atunci funcţiile* $k \cdot f(x)$ *şi* $f(x) \pm g(x)$ *sunt sumabile pe E şi au loc egalităţile*

$$\int_E k \cdot f(x)dx = k \int_E f(x)dx\,, \qquad \int_E [f(x) \pm g(x)]dx = \int_E f(x)dx \pm \int_E g(x)dx.$$

Definiţia 10.2.4. *Fie* $f(x)$ *sumabilă pe mulţimea* E. *Dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ *astfel încât, pentru orice submulţime măsurabilă* $e \subset E$ *cu* $me < \delta$, *are loc inegalitatea*

$$\left| \int_e f(x)dx \right| < \varepsilon,$$

atunci ***integrala Lebesgue*** *se numeşte* ***absolut continuă***.

Teorema 10.2.6. *Integrala Lebesgue de la orice funcţie sumabilă pe mulţimea E este absolut continuă.*

La sfârşitul acestei secţiuni vom formula teorema lui Lebesgue despre trecerea la limită sub semnul integralei.

Teorema 10.2.7 (Lebesgue). *Fie pe mulţimea măsurabilă E dat şirul de funcţii măsurabile* $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$, ... *care converge după măsură către funcţia* $F(x)$. *Dacă există funcţia sumabilă* $\Phi(x)$, *astfel încât pentru toţi* n *şi toţi* $x \in E$ *are loc inegalitatea*

$$|f_n(x)| \leq \Phi(x),$$

atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx = \int_E \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_E F(x)\,dx.$

10.3. FUNCŢII p - SUMABILE

Fie funcţia $f(x)$ definită pe segmentul $[a, b]$.

Definiţia 10.3.1. *Funcţia $f(x)$ măsurabilă pe segmentul $[a,b]$ se numeşte* $\boldsymbol{p-}$ ***sumabilă***, *unde* $p \geq 1$, *dacă*

$$\int_{a}^{b} |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})|^{p} \boldsymbol{dx} < +\infty.$$

Mulţimea tuturor funcţiilor p-sumabile se notează cu simbolul: $L_p[a,b]$ sau, simplu, L_p. Dacă $p = 1$, atunci $L_1 = L$.

Teorema 10.3.1. *Dacă funcţia $f(x)$ este p-sumabilă, atunci ea este sumabilă, adică $L_p \subset L$.*

Demonstraţie.

Notăm $E = [a,b]$, $A = E[|f| < 1]$, $B = E \setminus A$. Evident, $E = A \cup B$ şi deoarece $A \cap B = \emptyset$, atunci din sumabilitatea funcţiei $f(x)$ pe mulţimile A şi B rezultă sumabilitatea funcţiei $f(x)$ pe mulţimea E. Mulţimile A şi B sunt măsurabile, fiindcă funcţia $f(x)$ este măsurabilă pe mulţimea E. Fie mA măsura mulţimii A. Atunci,

$$\int_{A} |f(x)| dx < 1 \int_{A} dx = mA < +\infty.$$

Prin urmare, pe mulţimea A funcţia $f(x)$ este sumabilă. Sumabilitatea funcţiei $f(x)$ pe mulţimea B rezultă din inegalitatea $|f(x)| \leq |f(x)|^p$, dacă $f(x) \geq 1$ şi $p > 1$. Teorema este demonstrată.

Teorema 10.3.2. *Dacă $f(x) \in L_p$ şi $g(x) \in L_p$, atunci $f(x) + g(x) \in L_p$.*

Demonstraţie.

Punem $E = [a,b]$, $A = E[|f| < |g|]$ şi $B = E \setminus A = E[|f| > |g|]$. Fie $x \in A$, atunci

$|f(x) + g(x)|^p \leq (|f(x)| + |g(x)|)^p \leq (2|g(x)|)^p = 2^p |g(x)|^p$ şi

$$\int_A |f(x)+g(x)|^p\,dx \le 2^p \int_A |g(x)|^p\,dx < +\infty.$$

Dacă $x \in B$, atunci $|f(x)+g(x)|^p \le (2|f(x)|)^p = 2^p|f(x)|^p$ şi

$$\int_B |f(x)+g(x)|^p\,dx \le 2^p \int_B |f(x)|^p\,dx < +\infty.$$

Așadar,

$$\int_E |f(x)+g(x)|^p\,dx = \int_A |f(x)+g(x)|^p\,dx + \int_B |f(x)+g(x)|^p\,dx < +\infty$$
$$\Rightarrow [f(x)+g(x)] \in L_p.$$

Teorema 10.3.3. *Dacă $f(x) \in L_p$ şi $k = const.$, atunci funcţia $k \cdot f(x) \in L_p$.*

Dacă $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ şi L_p (L_q) este mulţimea tuturor funcţiilor $p-$sumabile ($q-$sumabile), atunci sunt adevărate inegalităţile lui Hölder și a lui Minkowski pentru integrale.

În mulţimea L_p putem introduce metrica în modul următor: dacă $x(t), y(t) \in L_p$, atunci

$$\rho(x,y) = \left\{\int_a^b |x(t)-y(t)|^p\,dt\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Verificăm axiomele metricii:

1. $\rho(x,y)=0 \Leftrightarrow \left\{\int_a^b |x(t)-y(t)|^p\,dt\right\}^{\frac{1}{p}} = 0 \Leftrightarrow \int_a^b |x(t)-y(t)|^p\,dt = 0 \Leftrightarrow$ $|x(t)-y(t)| \sim 0 \Leftrightarrow x(t) \sim y(t)$.

2. $\rho(x,y) = \left\{\int_a^b |x(t) - y(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}} = \left\{\int_a^b \left|(-1)\big(y(t) - x(t)\big)\right|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}} =$
$\left\{\int_a^b |y(t) - x(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}} = \rho(y,x).$
3. Inegalitatea triunghiului: $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$.

Avem $\rho(x,y) = \left\{\int_a^b |x(t) - y(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}} = \left\{\int_a^b |x(t) - z(t) + z(t) - y(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}} \leq$
$\left\{\int_a^b |x(t) - z(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\int_a^b |z(t) - y(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}} = \rho(x,z) + \rho(z,y).$

Observaţia 10.3.1. *Două funcţii echivalente pe mulţimea măsurabilă E se consideră egale, de aceea în prima axiomă expresia* $x(t) \sim y(t)$ *poate fi înlocuită cu* $x(t) = y(t)$.

Aşadar, la exemplele de spaţii metrice cercetate poate fi adăugat şi spaţiul metric L_p de funcţii $p-$ sumabile, $p > 1$. Pentru $p = 2$ se obţine spaţiul L_2 de funcţii $2 -$ sumabile, aşa numitul spaţiul lui Hilbert.

Fie $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$,... un şir de funcţii din $L_p[a,b]$, care converge către funcţia $x(t) \in L_p[a,b]$, adică $\rho\big(x_n(t), x(t)\big) \to 0$, dacă $n \to \infty$, sau

$$\int_a^b |x_n(t) - x(t)|^p dt \to 0, \quad \text{dacă} \quad n \to \infty.$$

În acest caz se spune că şirul $\{x_n(t)\}$ converge către funcţia $x(t)$ în medie cu exponentul (indicele) p. Putem să mai spunem că şirul $\{x_n(t)\}$ p-converge către funcţia $x(t)$. În cazul $p = 2$ spunem simplu: $\{x_n(t)\}$ converge în medie către funcţia $x(t)$.

Problem rezolvate:

1. Calculați

$$(L)\int_1^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} dx.$$

Rezolvare. Pentru a calcula această integrală efectua o tăiere a funcției cu numărului $t > 1$:

$$f_t(x) = \begin{cases} t, dacă\ x \in \left(1; 1 + \dfrac{1}{t^3}\right), \\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}, dacă\ x \in \left[1 + \dfrac{1}{t^3}; 2\right]. \end{cases}$$

Calculăm integralea acestei tăieturi:

$$(L)\int_1^2 f_t(x)dx = \int_1^{1+\frac{1}{t^3}} t dx + \int_{1+\frac{1}{t^3}}^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = t\left(1 + \frac{1}{t^3} - 1\right) + \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{t^3}\right)$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2t^2}$$

Așa cum

$$(L)\int_1^2 f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^2 f_t(x)dx,$$

atunci

$$(L)\int_1^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}dx = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2t^2}\right) = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}.$$

2. Stabiliți dacă este sumabilă pe [0,1] funcția $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Rezolvare. Găsim $(L)\int_0^1 \frac{1}{x^2}dx = +\infty$, deci funcția $f(x) = \frac{1}{x^2}$ nu este sumabilă pe [0,1].

3. Demonstrați, că dacă $f(x) = 0$ în punctele mulțimii lui Cantor D și este egală cu n pe intervalele adiacente de rangul n, atunci $(L)\int_0^1 f(x)dx = 3$.

Rezolvare. Găsim tăierea funcției cu numărul $t > 0$:

$$[f(x)]_t = \begin{cases} 0 & pentru\ x \in D, \\ k & pentru\ x \in E_k\ (1 \le k \le n), \\ t & pentru\ M_n, \end{cases}$$

unde $E_k -$ suma intervalelor adiacente de rang k (este evident, că $mE_k = \frac{2^{k-1}}{3^k}$), $n -$ partea întreagă a lui t, $M_n -$ suma tuturor intervalelor adiacente de rangul $> n$ ($mM_n = \frac{2^n}{3^n}$).

Calculăm intergrala funcției tăiate

$$\int_0^1 [f(x)]_t dx = \int_D [f(x)]_t dx + \sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} k dx + \int_{M_n} t dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{k \cdot 2^{k-1}}{3^k} + t \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Pentru a calcula integrala de la $f(x)$, este necesară aflarea limitei funcției tăiate când $t \to +\infty$. Notăm, că pentru $t \to +\infty$, $n \to +\infty$; $t\left(\frac{2}{3}\right)^n \leq (n+1) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$;așa cum limita ultimei expresii este egală cu zero (când $n \to +\infty$) atunci și $t \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$ când $t \to +\infty$. Rezultă, că

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{t\to+\infty} \int_0^1 [f(x)]_t dx = \lim_{\substack{t\to+\infty \\ n\to+\infty}} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k \cdot 2^{k-1}}{3^k}\right) + \lim_{t\to+\infty} \left(t\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{k \cdot 2^{k-1}}{3^k} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}.$$

Să calculăm suma ultimei serii. Pentru aceasta vom nota suma unei serii mai generale $\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1}$ prin $\varphi(q)$

$$\varphi(q) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1}.$$

Seria dată reprezintă o serie de puteri, deci ea poate fi integrată pe orice segment, ce aparține intervalului de convergență, în particular, pe intervalul $(0; q)$, unde $|q| < 1$. Deaceea

$$\int_0^q \varphi(q)\, dq = \sum_{k=1}^{\infty} q^k,$$

adică

$$\int_0^q \varphi(q)\,dq = \frac{1}{1-q}.$$

Dacă derivăm ambele părți ale ultimei relații, obținem $\varphi(q) = \frac{1}{(1-q)^2}$. Obținem, că $\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$. În particular,

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = \frac{1}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^2} = 9.$$

În final obținem:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = \frac{1}{3} \cdot 9 = 3.$$

4. Demonstrați: "Pentru ca funcția $f\,(x)$ care este măsurabilă pe E cu măsură finită nenegativă să fie integrabilă pe E, este necesar și suficient ca $\sum_k k \cdot mE_k$ să fie convergentă (unde $E_k \;=\; E\,(k\; \leq f\,(x)\; < k\; +\; 1)$) ".

Demonstrație. Conform ipotezei, $E_k \;=\; E\,(k\; \leq f\,(x)\; < k\; +\; 1)$. Este justă inegalita

$$k \cdot mE_k \leq \int_{E_k} f(x)dx \leq (\,k+1) \cdot mE_k \qquad (*)$$

Vom demonstra necesitatea și suficiența convergenței seriei $\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot mE_k$ pentru sumabilitatea funcției nenegative $f(x)$.

a) *Necesitate*. Fie $\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot mE_k$ este divergentă. Pentru orice număr natural N este jusă inegalitatea

$$\int_E [f(x)]_N dx \geq \sum_{k=0}^{N-1} \int_{E_k} f(x)dx(\geq \sum_{k=1}^{N-1} k \cdot mE_k.$$

Așa cum $\sum_{k=1}^{N-1} k \cdot mE_k$ tinde la infinit (când $N \to \infty$), atunci și $\int_{E_k} f(x)dx \to \infty$ când $N \to \infty$; rezultă, că funcția $f(x)$ nu este sumabilă pe mulțimea E.

b) *Suficiență.* Fie seria $\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot mE_k$ este convergentă; atunci restul seriei $\sum_{k=N}^{\infty} k \cdot mE_k$ tinde către zero când $N \to \infty$.

Este justă inegalitatea

$$\int_E [f(x)]_N dx + \sum_{k=0}^{N-1} \int_{E_k} f(x)dx \geq + \sum_{k=0}^{N-1} k \cdot mE_k \,;$$

ținând cont de relația (*), obținem:

$$\int_E [f(x)]_N dx \leq Nm\left(\bigcup_{k=N}^{\infty} E_k\right) + \sum_{k=0}^{N-1} (k+1) \cdot mE_k \qquad (**)$$

Când $N \to \infty$ primul termen al sumei din partea dreaptă a inegalității tinde la zero (deoarece

$$N \cdot m\left(\bigcup_{k=N}^{\infty} E_k\right) = N \cdot \sum_{k=N}^{\infty} mE_k \leq \sum_{k=N}^{\infty} k \cdot mE_k,$$

iar

$$\sum_{k=N}^{\infty} k \cdot mE_k \to 0 \text{ când } N \to 0.$$

Seria $\sum_{k=0}^{N-1}(k+1) \cdot mE_k$ converge (deoarece această serie poate fi dezbinată în două serii convergente: $\sum_{k=0}^{N-1} k \cdot mE_k$ și $\sum_{k=0}^{N-1} mE_k$).

Cu alte cuvinte, expresia din dreapta a relației (**) tinde cărtre numărul $\sum_{k=0}^{N-1}(k+1) \cdot mE_k$. Dar atunci $\int_E [f(x)]_N dx$ are limită finită când $N \to 0$ (el crește odată cu creșterea numărului N, și după cum s-a demonstrat, ea este mărginită). Deci funcția $f(x)$ este sumabilă pe E.

5. Demonstrați: "Pentru ca funcția $f\,(x)$ care este măsurabilă pe E cu măsură finită nenegativă să fie integrabilă pe E, este necesar și suficient ca $\sum_k k \cdot m\tilde{E}_k$ să fie convergentă (unde $\tilde{E}_k = E\,(f\,(x) \geq k + 1)$) ".

Demonstrație. Folosind notațiile problemei anterioare, este ușor de văzut că pentru orice număr întreg k pozitiv avem ecuația:

$$\tilde{E}_k = E_k \bigcup E_{k+1} \bigcup E_{k+2} \bigcup \ldots,$$

de unde (așa cum $E_i \cap E_j = \emptyset$ pentru $i \neq j$)

$$m\tilde{E}_k = mE_k \bigcup mE_{k+1} \bigcup mE_{k+2} \bigcup \ldots;$$

în particular, pentru $k = 1,2,\ldots$ avem:

$$m\tilde{E}_1 = mE_1 + mE_2 + \cdots + mE_k + \cdots$$

$$m\tilde{E}_2 = \qquad mE_2 + \cdots + mE_k + \cdots$$

....

$$m\tilde{E}_k = \qquad\qquad mE_k + mE_{k+1} \ldots$$

....

Sumând termen cu termen a acestor egalități, obținem:

$$\sum_{k=1}^{\infty} m\tilde{E}_k = mE_1 + 2mE_2 + 3mE_3 + \cdots + k \cdot mE_k + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot mE_k.$$

Deci, convergența seriei $\sum_k k \cdot mE_k$. Dar din rezultatele problemei precedente rezultă, că pentru ca o funcție negativă $f(x)$ să fie sumabilă este necesar și suficient, ca seria $\sum_k k \cdot m\tilde{E}_k$ să fie convergentă.

6. Demonstrați, că dacă funcția $f(x)$ este sumabilă pe semiintervalul $[0; \mathrm{a})$, atunci funcția $f(k \cdot x)$ la fel este sumabilă pe $\left[0; \frac{a}{k}\right]$ (unde $k > 0$).

Demonstrație. Fie $f(x)$ este funcție *mărginită*, $\sup_{[0;a]} f(x) = M$; $\inf_{[0;a]} f(x) = m$. Divizăm în mod arbitrar segmentul $[m, M]$ al axei Oy; este ușor de convins, că suma integrală a lui Lebesgue pentru funcția $f\ (x)$ pe $[0; a]$ care corespunde acestei divizări este egală cu suma integrală Lebesgue pentru funcția

$f(kx)$ pe $\left[0;\frac{a}{k}\right]$ (la aceeași partiție a intervalului $[m, M]$). Din egalitatea sumelor integrale rezultă egalitatea integralele; prin urmare, pentru orice funcție măsurabile mărginite $f(x)$ este justă egalitatea:

$$\int_0^a f(x)dx = \int_0^{\frac{a}{k}} (kx)\,dx. \qquad (*)$$

Dacă $f(x)$ este nemărginită și nenegativă pe $[0; a]$ atunci scriem mai întâi relația (*) pentru funcțiile tăiate $[f(x)]_t$ și $[f(kx)]_t$, iar apoi trecem la limită când $t \to \infty$.

Dacă, însă, este de semn variabil, nemărginită pe $[0; a]$ atunci noi scriem mai întâi relația (*) pentru funcțiile $f_+(x)$ și $f_-(x)$, iar apoi scădem termen cu termen din (*), scrisă pentru $f_+(x)$, în mod analog relația pentru $f_-(x)$.

7. Demonstrați, că funcția $\frac{1}{x} \cdot \cos\frac{k}{x}$ nu este sumabilă pe $(0; 1)$ nici pentru un $k > 0$.

Demonstrație. Observăm mai întâi de toate, că dacă funcția *f(x)* nu este sumabilă pe [0;1] pentru careva $k > 0$, atunci ea nu este sumabilă pe acest segment și pentru orice $k > 0$ (aceasta rezultă din datele problemei precedente).

Vom demonstra că funcția $\frac{1}{x} \cdot \cos\frac{2}{x}$ nu este sumabilă. Dacă ea ar fi sumabilă, atunci ar fi sumabilă și funcția $\frac{1}{x} \cdot \cos\frac{1}{x}$; însă atunci ar fi sumabilă și funcția $\frac{1}{x} \cdot \cos^2\frac{k}{x}$, deoarece $\left|\frac{1}{x} \cdot \cos^2\frac{k}{x}\right| \leq \left|\frac{1}{x} \cdot \cos\frac{k}{x}\right|$. Așa cum $\cos\frac{2}{x} = \cos^2\frac{1}{x} - \sin^2\frac{1}{x}$ și respectiv, $\frac{1}{x}\sin^2\frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot \cos^2\frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cdot \cos\frac{2}{x}$, atunci din aceasta ar rezulta faptul, că funcția $\frac{1}{x}\sin^2\frac{1}{x}$ este sumabilă. Dar deoarece funcțiile $\frac{1}{x}\sin^2\frac{1}{x}$ și $\frac{1}{x}\cos^2\frac{1}{x}$ sunt sumabile rezultă că și suma lor la fel este sumabilă, adică funcția $\frac{1}{x}$, ceea ce nu este just.

Astfel, afirmația, că funcția $\frac{1}{x} \cdot \cos\frac{2}{x}$ este sumabilă, aduce contradicție. Deci funcția $\frac{1}{x} \cdot \cos\frac{2}{x}$ nu este sumabilă. Atunci și orice funcție de forma $\frac{1}{x} \cdot \cos\frac{k}{x}$ la fel nu este sumabilă.

8. Fie în $[a; b]$ sunt situate n mulțimi măsurabile $E_1, E_2, \dots. E_n$; presupunem că fiecare punct al segmentului $[a; b]$ aparține cel puțin la q din aceste mulțimi. Demonstrați, că cel puțin una din mulțimile $E_1, E_2, \dots. E_n$ are măsura mai mare sau egală cu $(b-a)\frac{q}{n}$.

Demonstrație. Fie $\chi_{E1}(x), \chi_{E2}(x), \dots. \chi_{En}(x) -$ funcțiile caracteristice ale mulțimilor $E_1, E_2, \dots. E_n$; examinăm integrala I sumei acestor funcții:

$$I = \int_a^b [\chi_{E1}(x) + \chi_{E2}(x) + \cdots + \chi_{En}(x)]dx =$$

$$\int_a^b \chi_{E1}(x)dx + \cdots + \int_a^b \chi_{En}(x)dx = mE_1 + \cdots + mE_n \qquad (*)$$

Observăm, că $\chi_{E1}(x) + \chi_{E2}(x) + \cdots + \chi_{En}(x) \geq q$ în orice punct $x \in [a; b]$ (aceasta rezultă din faptul, că orice punct $x \in [a; b]$ aparține cel puțin la q din aceste mulțimi E_i; iată de ce cel puțin suma a q temeni $\chi_{E1}(x) + \chi_{E2}(x) + \cdots + \chi_{En}(x)$ în punctual x este egal cu 1) Deci

$$I \geq \int_a^b q dx = q(b-a) \qquad (**)$$

Comparând (*) și (**), obținem:

$$mE_1 + mE_2 \dots + mE_n \geq q(b-a). \qquad (***)$$

Dacă pentru orice i măsurile $mE_i < \frac{q(b-a)}{n}$, atunci rezultă că

$$\sum_{i=1}^{n} mE_i < q(b-a),$$

Ceea ce contrazice relația (***). Deci măcar pentru una din E_i are loc relația

$$mE_i \geq \frac{q(b-a)}{n}.$$

9. Fie $\{f_n(x)\}$ – șir de funcții nenegative, integrabile după Lebesgue pe mulțimea E (E – mulțime măsurabilă de măsură finită); putem afirma, că dacă $f_n(x) \to 0$ (când $n \to \infty$) aproape pentru toți $x \in E$, atunci șirul de integrale $\int_E^f f_n(x)dx \to 0$ la fel tinde la zero când $n \to \infty$?

Rezolvare. Această afirmație nu este justă. Să aducem un exemplu. Fie

$$f(x) = \begin{cases} 2^n \quad \text{pentru} \quad 2^{-n} < x < 2^{-n+1}, \\ 0 \text{ în celelalte puncte ale segmentului } [0;1]. \end{cases}$$

În acest caz $f_n(x) \to 0$ (când $n \to \infty$) pentru orice punct $x \in [0;1]$. Însă $\int_0^1 f_n\,(x)dx = 1$ pentru orice n și, deci $\int_0^1 f_n\,(x)dx$ nu tinde la zero când $n \to \infty$.

Observăm, însă că dacă la condițiile teoremei se mai adaugă o condiție, ca toate funcțiile $f_n(x)$ să fie mărginite de unul și același număr C (adică $|f_n(x)| \leq C$ pentru toți $x \in E$ și toate numerele n), atunci $\int_E^f f_n(x)dx \to 0$ când $n \to 0$.

10. Fie funcția $f(x)$continuă peste tot pe segmentul $[a;b]$, cu excepția punctului a.vom numi această funcție $C -$ integrabilă pe $[a;b]$, dacă există limita finită a integralei

$$\int_t^b f(x)dx \qquad (*)$$

când $t \to a + 0$; dacă funcția $f(x)$ este $C -$ integrabilă pe $[a;b]$, atunci limita integralei (*) se numește $C -$ integrală (sau integral improprie Cauchy) de la funcția $f(x)$și se notează $(C)\int_a^b f(x)dx$:

$$(C)\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to a+0} \int_t^b f(x)dx.$$

Demonstrați, că dacă funcția este sumabilă după Lebesgue pe $[a;b]$, atunci ea este și $C -$ integrabilă pe $[a;b]$, și ambele integrale sunt egale.

Demonstrație. Fie funcția $f(x)$ este nenegativă pe $[a;b]$ și sumabilă după Lebesgue. Conform ipotezei, unicul punct de discontinuitate al funcției $f(x)$ este punctual a. vom demonstra, că

$$\lim_{t \to a+0} \int_t^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx \qquad (*)$$

unde integrala din partea dreaptă este integrala Lebesgue. Pentru demonstrație vom examina diferența

$$\int_a^b f(x)dx - \int_t^b f(x)dx \qquad (**)$$

și vom demonstra, că ea poate fi transformată oricât de mică după valoare absolută (când t este destul de aproape de a). Fie $\varepsilon > 0 -$ un număr oarecare pozitiv, iar $N -$ așa număr, încâ: $\int_a^b f(x)dx - \int_a^b [f(x)]_N dx < \frac{\varepsilon}{2}$. Transformăm relația (**) astfel:

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \int_t^b f(x)dx \right| = \left| \int_a^t f(x)dx \right| =$$

$$= \left| \int_a^t f(x) - [f(x)]_N dx + \int_a^t [f(x)]_N dx \right|; \qquad (***)$$

în ultima parte a egalității sunt funcții nenegative, deaceea semnul modulului poate fi omis; să cercetăm fiecare interval în parte:

$$\int_a^t (f(x)dx - [f(x)]_N)dx \leq \int_a^b (f(x)dx - [f(x)]_N)dx =$$

$$= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b [f(x)]_N dx < \frac{\varepsilon}{2};$$

$$\int_a^t [f(x)]_N)dx \leq N(t-a),$$

Însă $N(t-a) < \frac{\varepsilon}{2}$ pentru

$$0 < t - a < \frac{\varepsilon}{2N}. \qquad (****)$$

Deci, pentru toți t, care satisfac relația (****), conform relației (***) este justă:

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \int_t^b f(x)dx\right| < \varepsilon,$$

De unde rezultă, că $\lim_{t\to a+0}\int_t^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$. Reese, că pentru funcțiile nenegative sumabile integrala improprie Cauchy coincide cu integrala Lebesgue.

Dacă, însă funcția sumabilă $f(x)$ primește pe $[a;b]$ valori de semn diferit și este continuă peste tot pe $[a;b]$, cu excepția punctului a, atunci noi o reprezentăm astfel:

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x).$$

Funcțiile $f_+(x)$ și $f_-(x)$ sunt continue pe semiintervalul $(a;b]$ și sunt nenegative. Iată de ce

$$(L)\int_a^b f(x)dx = (L)\int_a^b f_+(x)dx - (L) - \int_a^b f_-(x)dx =$$

$$\lim_{t\to a+0}\int_t^b f_+(x)dx - \lim_{t\to a+0}\int_t^b f_-(x)dx = \lim_{i}\int_t^b f(x)dx.$$

Deci, pentru orice funcție sumabilă $f(x)$ (chiar și cele de semn variabil) și continuă peste tot pe $[a;b]$, cu excepția punctului a, integrala improprie Cauchy coincide cu integrala Lebesgue.

11. Fie $f(x)$ este o funcție măsurabilă, definită pe mulțimea E de măsură finită. Vom spune, că această funcție este $Q-$integrabilă, dacă există limita integralei

$$\int_E^f [f(x)]_{-t}^t dx \qquad (*)$$

când $t\to\infty$. Dacă funcția $f(x)$ este $Q-$ integrabilă, atunci limita integralei (*) (când $t\to\infty$) se numește $Q-$integrală a funcției $f(x)$ și se notează $(Q)\int_E^f f(x)dx$:

$$(Q)\int_E^f f(x)dx = \lim_{t\to\infty}\int_E^f [f(x)]_{-t}^t dx.$$

Demonstrați, că dacă funcția $f(x)$ este sumabilă după Lebesgue pe mulțimea E, atunci ea este $Q-$ integrabilă pe această mulțime, și $Q-$ integrala este egală cu integral Lebesgue.

Demonstrație. Dacă funcția $f(x)$ este sumabilă pe mulțimea E după Lebesgue, atunci pe această mulțime la fel sunt sumabile și părțile pozitivă și negativă a funcției date:

$$f_+(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2}; \quad f_-(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2}.$$

Așa cum $f_+(x) \geq 0$, $-f_-(x) \leq 0, f(x) = f_+(x) - f_-(x)$, atunci pentru orice $t > 0$ este justă egalitatea

$$[f(x)]_{-t}^{t} = [f_+(x)]_{-t}^{t} + [-f_-(x)]_{-t}^{t},$$

de unde

$$\int_E^f [f(x)]_{-t}^{t} dx = \int_E^f [f_+(x)]_{-t}^{t} dx + \int_E^f [-f_-(x)]_{-t}^{t} dx.$$

Pentru $t \to \infty$, integralele din drepta a egalității tind către integralele respective Lebesgue (deoarece funcția $[f_+(x)]_{-t}^{t}$ reprezintă tăiere funcției nenegative $f_+(x)$ prin numărul t, și-n mod analog – funcția $[-f_-(x)]_{-t}^{t}$). Deci,

$$\lim_{t\to\infty} \int_E^f [f(x)]_{-t}^{t} dx = \lim_{n\to\infty} \int_E^f [f_+(x)]_{-t}^{t} dx + \lim_{n\to\infty} \int_E^f [-f_-(x)]_{-t}^{t} dx =$$

$$\int_E^f f_+(x) dx + \int_E^f -f_-(x) dx = \int_E^f [f_+(x) - f_-(x)] dx = (L) \int_E^f f(x) dx.$$

Rezultă, că funcția $f(x)$ este $Q -$ integrabilă, și $Q -$ integrala ei este egală cu integrala Lebesgue.

Problem propuse spre rezolvare:

1. Stabiliți dacă este sumabilă pe segmentul [0,1] funcția $f(x) = \frac{1}{x}$.
2. Este oare sumabilă pe $(-1; 8)$ funcția $f(x) = \begin{cases} 0, x \neq 0, \\ \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, x = 0 \end{cases}$?
3. Dacă funcția $f(x)$este integrabilă după Lebesgue pe mulțimea E, sunt oare integrabile după Lebesgue pe această mulțime funcțiile $[f(x)]^{10}$, $|f(x)|$, $\frac{1}{f(x)}$?
4. Aduceți un exemplu de existență a funcției continue peste tot pe $[a; b]$, cu excepția punctului a, care este $C -$ integrabilă pe $[a; b]$, însă nu este sumabilă după Lebesgue pe acest segment.

5. Arătați prin exemplu, că noțiunea de $Q-$integrală este mai largă decât noțiunea de integrală Lebesgue (adică există funcții, ce nu este sumabilă după Lebesgue pe careva mulțime E, însă este $Q-$integrabilă pe această mulțime).
6. Demonstrați, că pentru funcțiile nenegative $Q-$integrala nu este o noțiune mai largă decât noțiunea de integral Lebesgue (adică dacă funcția nenegativă este $Q-$integrabilă pe mulțimea E, atunci ea este și sumabilă după Lebesgue pe această mulțime).

Bibliografie

1. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. — М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1974;
2. Александров П.С., Колмогоров А.Н., Введение в теорию функций действительного переменного, Учеб. пособие. Государственное технико-теоретическое издательство. 1933;
3. Фихтенгольц Г.М., Курс дифференциального и интегрального исчисления. (том 3) Г.М. Издательство, ФИЗМАТЛИТ. Год, 1969;
4. В.И.Соболев, Лекции по дополнительным главам математического анализа, Наука, Москва 1968;
5. Халмош П.,Теория меры, Перевод с английского Д. А. Василькова; под ред. С. В. Фомина. — М.: Издательство иностранной литературы, 1953;
6. И.П. Макаров Дополнительные главы математического анализа *УМН*, 25:1(151) (1970);
7. S. Corsac, A. Corlat, Teoria mulțimilor, Chișinău 2003;
8. Gh. I.Rusu, Analiza funcțională I, Lucrare didactică, Chişinău, 1991;
9. Б.З. Вулих, К курс теории функций вещественной переменной, Издательство Наука 1973;
10. Н. А. Фролов, Теория функций действительного переменного, УЧПЕГДГИЗ, Москва 1961;
11. И.П. Макаров, Теория функций действительного переменного УЧПЕГДГИЗ, Москва 1958