§8 Cel mai mic multiplu comun a două numere

Fie $a, b \in \mathbb{Z}^*$, $m \in \mathbb{Z}^*$

Definiție

Numarul m se numeste multiplu comun a nr. a și b, dacă $m \vdots a$ și $m \vdots b$.

Exemplu - $a = 4$, $b = 6$.

$m \in \{\pm 12, \pm 24, \pm 36, \ldots\}$.

Definiție

Numarul m se numeste cel mai mic multiplu comun a nr. a și b, dacă verifică următoarele condiții:

1) $m \vdots a$ și $m \vdots b$

2) Oricare al multiplu comun a nr. a și b este divizibil prin m

$\forall M,\ M \vdots m$

Pentru exemplul de mai sus
$[6,4]=12$. (natural)
C.m.m.M.c este ± 12. $(a=4,\ b=6)$.
În continuare cel mai mic multiplu natural al nr. a și b va fi notată așa: $[a,b]=m$.
Teoremă similară pentru:

Teorema 1

Numărul M - va fi multiplu comun a nr. a și b, dacă și numai dacă, $\exists\, t \in \mathbb{Z}$, încît $M=\frac{a\cdot b}{(a,b)}\cdot t$

Suficiența

Fie că $M=\frac{ab}{(a,b)}\cdot t$ | $M \vdots a$ și $M \vdots b$?

Din $M=\frac{ab}{(a,b)}\cdot t \Rightarrow a \vdots (a,b) \Rightarrow$
$\Rightarrow a=a_1\cdot(a,b) \Rightarrow \frac{a}{(a,b)}=a_1 \Rightarrow M=\frac{a_1\cdot b\cdot t}{}=$
$\Rightarrow M \vdots b$.
Analog, $b \vdots (a,b) \Rightarrow b=b_1\cdot(a,b) \Rightarrow b_1=\frac{b}{(a,b)}$
$\Rightarrow M=b_1\cdot a\cdot t \Rightarrow M \vdots a$
Astfel M - mult. comun dintre a și b.

Necesitatea

M - multiplu comun a lui a, b.

$M \vdots a$ și $M \vdots b$. | $M = \frac{ab}{(a,b)} \cdot t$.

d

$M \vdots a \Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{Z},\ M = ac \quad (1)$

$M \vdots b \Rightarrow \exists\, c_1 \in \mathbb{Z},\ M = bc_1 \quad (2)$

Din (1) și (2) $\Rightarrow ac = bc_1 \quad (3)$

Notăm $(a,b) = d,\ a = a_1 d,\ b = b_1 d$ (4)

a_1 și b_1 - prime între ele, adică $(a_1, b_1) = 1$

Substituim (4) în (3) și obținem:

$a_1 \cancel{d} c = b_1 \cancel{d} c_1$

$a_1 c = b_1 c_1 \Rightarrow a_1 c \vdots b_1 \xRightarrow{(a_1, b_1)=1} c \vdots b_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, t \in \mathbb{Z},\ c = b_1 t. \ (5)$

Substituim (5) în (1) și obținem

$M = a b_1 t = \frac{a b_1 t d}{d} = \frac{ab}{(a,b)} \cdot t$.

Observație.

Dacă $a, b \in \mathbb{N}$, pt. $t = 1$, obținem: $\frac{ab}{(a,b)} = m$ (cel mai mic multiplu comun natural)

Observație Dacă $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}$, unde $\alpha_i \geq 0,\ i = \overline{1,s}$ și $b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_s^{\beta_s},\ \beta \geq 0,$

atunci C.M.M.M.C. devine

$[a, b] = p_1^{\delta_1} p_2^{\delta_2} \dots p_s^{\delta_s}$, unde

$\delta_i = \max\{\alpha_i, \beta_i\}$.

$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$

$252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$

$[360, 252] = \underline{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^1}$