Exemplul 1. Aflați valorile cea mai mare și cea mai mică a funcției

$$z = x^2 + 2xy - 3y^2 + y$$

pe domeniu (D) mărginit de liniile

$$y = x + 1, \qquad x = 0, \qquad y = 0.$$

Soluție.

1) Construim domeniul (D) mărginit de aceste linii;

2) Găsim derivatele parțiale de ordinul întâi ale funcției $z = f(x, y)$:

$$z'_x = (x^2 + 2xy - 3y^2 + y)'_x = 2x + 2y + 0$$

$$z'_y = (x^2 + 2xy - 3y^2 + y)'_y = 0 + 2x - 6y + 1$$

3) Aflăm punctele critice situate în interiorul domeniului (D):

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 2x - 6y + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -x \\ 2x + 6x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -x \\ 8x + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 1/8 \\ x = -1/8 \end{cases}$$

Concluzie: Avem un punct critic

$$M\left(-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right) \in (D).$$

4) Aflăm valoare funcției în punctul critic

$$z(M) = f\left(-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{64} + 2\left(-\frac{1}{8}\right)\frac{1}{8} - 3\frac{1}{64} + \frac{1}{8}$$

$$z(M) = -\frac{4}{64} + \frac{1}{8} = \frac{4}{64} = \frac{1}{16}$$

Observație.

5) Cercetăm funcția la valorile cea mai mare (cea mai mică) pe frontiera domeniului, care este formată din 3 linii (trei drepte):

a) $|AO|$, care are ecuația $y = 0$, atunci $-1 \le x \le 0$. Substituim în ecuația lui z, avem

$$z = x^2 + 2x \cdot 0 - 3 \cdot 0^2 + 0 = x^2$$

Trebuie să cercetăm această funcție pe $x \in [-1; 0]$

$$z'(x) = 2x$$

$z'(x) = 0, 2x = 0, x = 0$ - punct critic

$x = 0 \in [-1; 0],\ \ O(0; 0) \in [-1; 0]$

$z(O) = f(0,0) = 0;$

b) $|BO|$, care are ecuația $x = 0$, atunci $0 \le y \le 1$. Substituim în ecuația lui z, avem

$z = 0^2 + 2 \cdot 0 \cdot y - 3 \cdot y^2 + y = -3y^2 + y,$

$$z'(y) = -6y + 1,$$

$z'(y) = 0, \quad -6y + 1 = 0,\ \ y = 1/6$ - punct critic

$y = 1/6 \in [0; 1],\ \ N(0; 1/6) \in [0; 1]$

$$z(N) = f\left(0, \frac{1}{6}\right) = 0^2 + 2 \cdot 0 \cdot \frac{1}{6} - 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}$$

$$z(N) = -\frac{3}{36} + \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

c) $|AB|$, care are ecuația $y = x + 1$, atunci

$$-1 \le x \le 0.$$

Substituim $y = x + 1$ în ecuația lui z, avem

$z = x^2 + 2 \cdot x \cdot (x + 1) - 3 \cdot (x + 1)^2 + x + 1,$

$$z(x) = x^2 + 2x^2 + 2x - 3(x^2 + 2x + 1) + x + 1$$
$$z(x) = -3x - 2$$
$$z'(x) = -3 \neq 0,$$

Concluzie: Nu avem puncte critice în interiorul segmentului $|AB|$.

d) Aflăm valoarea funcției în punctele A, B, O situate pe frontieră

$$z(A) = f(-1,0) = (-1)^2 + 2(-1) \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 0$$
$$z(A) = 1$$
$$z(B) = f(0,1) = 0^2 + 2 \cdot 0 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + 1$$
$$z(B) = -2$$
$$z(O) = 0.$$

6) Comparăm valorile obținute în interiorul domeniului și pe frontiera lui, alegem cea mai mare și cea mai mică:

$$z(M) = \frac{1}{16}, z(O) = 0, z(N) = \frac{1}{12},$$
$$z(A) = 1, z(B) = -2.$$

$$\max_{(D)} f(x, y) = f(A) = 1,$$
$$\min_{(D)} f(x, y) = f(B) = -2.$$