§9 Funcții numerice

τ - (tau)

Funcții definite pe mulțimea nr. Naturale cu valori în această mulțime, poartă denumirea de funcții numerice.

Fie $a \in N$ $\quad a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}$
$a \geq 1$

Prin $\tau(a)$ vom nota nr. divizorilor naturali ai nr. **a**.

Prin $\sigma(a)$ suma divizorilor naturali ai nr. **a**

Prin $\varphi(a)$ – cantitatea de numere naturale reciproc prime cu a și mai mici decât **a**

τ, σ, $\varphi : N \to N$
funcții numerice

Exemplu; $a = 18$.

1) $\tau(18)$ - ? $\quad 1, 2, 3, 6, 9, 18$
$\tau(18) = 6$.

2) $\sigma(18) = 39$. $\quad 1 + 2 + 3 + 6 + 9 + 18 = 39$.

3) $\varphi(a) = 6$ $\quad 1, 5, 7, 11, 13, 17$.

Exemplu $\quad$ **a** $= 12$

$\tau(12) = 6$. $\quad 1, 2, 3, 4, 6, 12$

2) $\sigma(12) = 28$. $\quad 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$

3 $\varphi(12) = 4$ $\quad 2^2 \cdot 3$ $\quad = 2(2-1) \cdot 3$ $\quad 1, 5, 7, 11$

$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}$ (deduceți formulele de calcul pentru:)

$\tau(a)$;

$\sigma(a)$

$\varphi(a)$

Alcătuim următoarea expresie:

$$S = (1+p_1+p_1^2+\dots+p_1^{\alpha_1})\cdot(1+p_2+p_2^2+\dots+p_2^{\alpha_2})\cdot\dots$$
$$\dots\cdot(1+p_s+p_s^2+\dots p_s^{\alpha_s}).$$

Observăm că fiecare termen al sumei S, în rezultatul deschiderii parantezelor are forma

$$b = p_1^{\beta_1}\cdot p_2^{\beta_2}\dots p_s^{\beta_s}, \quad 0 \le \beta_i \le \alpha_i, \quad i=\overline{1,s}$$

Prin urmare b este divizor al lui a ($b \mid a$; $(a \vdots b)$). Pentru $0 \le \beta_i \le \alpha_i$ obținem toți divizorii naturali ai nr. a. Prin urmare suma S conține toți divizorii naturali ai nr. a. Prin urmare suma S va conține: $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\dots(\alpha_s+1)$

$$\boxed{\tau(a) = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\dots(\alpha_s+1)}$$!

$(\tau(18) = \tau(2^1\cdot 3^2) = (1+1)(2+1) = 2\cdot 3 = 6$

$\tau(12) = \tau(2^2\cdot 3) = (2+1)(1+1) = 3\cdot 2 = 6$ - toleșcanu

12	2
6	2
3	3
1	

Termenii fiecărei paranteze reprezintă suma o progresie geometrică sau sumele primilor termeni (α_i+1) $i=\overline{1,s}$

În conformitate cu f-le de calcul a acestei sume avem:

$$1 + p_1 + p_1^2 + \dots + p_1^{\alpha_1} = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1}$$

$$1 + p_2 + p_2^2 + \dots p_2^{\alpha_2} = \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1}.$$

– – – – – – – – – –

$$1 + p_s + p_s^2 + \dots p_s^{\alpha_s} = \frac{p_s^{\alpha_s+1} - 1}{p_s - 1}$$

Deoarece $S = \sigma(a)$, obținem:

$$\boxed{\sigma(a) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdot \dots \cdot \frac{p_s^{\alpha_s+1} - 1}{p_s - 1}}$$!

$$\sigma(18) = \sigma(2 \cdot 3^2) = \frac{2^2 - 1}{2 - 1} \cdot \frac{3^3 - 1}{3 - 1} =$$

$$= \frac{4 - 1}{1} \cdot \frac{27 - 1}{2} = 3 \cdot 13 = 39.$$

$$\sigma(12) = \sigma(2^2 \cdot 3) = \frac{2^3 - 1}{2 - 1} \cdot \frac{3^2 - 1}{3 - 1} = 7 \cdot 4 = 28.$$

a) $a = p$ - nr. prim.

$$\boxed{\varphi(p) = p - 1}$$!

b) $a = p^\alpha$

Scriem toate nr. de la 1 pîn la p^α, din care vom mulțimea nr. care nu sunt reciproc prime cu p^α

$1, 2, 3, \dots p, p+1, p+2 \dots 2p, 2p+1 \dots 3p, 3p+1 \dots$

$\dots p^{\alpha-1} \cdot p = p^{\alpha}$; astfel observăm că din șirul de numere de mai sus nu-s reciproc prime cu p^α; numerele $\boxed{p^{\alpha-1}}$, astfel recipr. prime cu nr. p^α vom avea $p^\alpha - p^{\alpha-1} = p^{\alpha-1}(p-1)$ $\boxed{\varphi(p^\alpha) = p^{\alpha-1} \cdot (p-1)}$

$\varphi(125) = \varphi(5^3) = 5^2(5-1) = 25 \cdot 4 = 100.$

Din prop. nr. prime avem că dacă $p_1\ p_2 \dots p_s$ sunt nr. prime diferite atunci $(p_i^{\alpha_i}, p_k^{\alpha_k})$ sunt reciproc prime, pentru orice $\forall i \neq k$

$(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \dots p_s^{\alpha_s}) = 1$

Deoarece $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$, dacă $(a, b) = 1$, atunci $\varphi(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}) = \varphi(p_1^{\alpha_1}) \cdot \varphi(p_2^{\alpha_2}) \dots \varphi(p_s^{\alpha_s}) = p_1^{\alpha_1 - 1}(p_1 - 1) p_2^{\alpha_2 - 1}(p_2 - 1) \dots p_s^{\alpha_s - 1}(p_s - 1) = \varphi(a)$

$\varphi(a) = p_1^{\alpha_1 - 1}(p_1 - 1) p_2^{\alpha_2 - 1}(p_2 - 1) \dots p_s^{\alpha_s}(p_s - 1).$!

$\varphi(18) = \varphi(2 \cdot 3^2) = 2^0 \cdot (2-1) \cdot 3^1 (3-1) = 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 = 6.$

$\varphi(12) = \varphi(2^2 \cdot 3) = 2(2-1) \cdot 3^0 (3-1) = 2 \cdot 2 = 4.$

Исептес:

$\varphi(360) = \varphi(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5) = 2^2(2-1) \cdot 3(3-1)\, 5^0(5-1) =$
$= 4 \cdot 6 \cdot 4 = 96.$

$\tau(360) = \tau(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5) = (3+1)(2+1)(1+1) = 24.$

$\sigma(360) = \dfrac{2^4-1}{2-1} \cdot \dfrac{3^3-1}{3-1} \cdot \dfrac{5^2-1}{5-1} = 15 \cdot 13 \cdot 6 =$
$= 1170.$

360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5