§ Fracții continue finite

Fie $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, $b \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{Z}$.

Pt. nr. a și b, conform. T. împ. cu rest $\exists\, q_0, r_0 \in \mathbb{Z}$, încât $a = bq_0 + r_0$,

$0 \le r_0 < b$. $\Rightarrow \frac{a}{b} = q_0 + \frac{r_0}{b}$. (1)

Analog pt. b și r_0, $\exists\, q_1, r_1 \in \mathbb{Z}$,

$b = r_0 q_1 + r_1$, $0 \le r_1 < r_0 \Rightarrow$

$\frac{b}{r_0} = q_1 + \frac{r_1}{r_0}$ (2)

Pt. r_0 și r_1, $\exists\, q_2, r_2 \in \mathbb{Z}$, $r_0 = r_1 q_2 + r_2 \Rightarrow$

$0 \le r_2 < r_1 \Rightarrow \frac{r_0}{r_1} = q_2 + \frac{r_2}{r_1}$. (3)

- - - - - - - - - - - - - - - -

* r_{n-3}, r_{n-2} $\exists\, q_{n-1}, r_{n-1} \in \mathbb{Z}$, $r_{n-3} = r_{n-2} \cdot q_{n-1} + r_{n-1}$

$\frac{r_{n-3}}{r_{n-2}} = q_{n-1} + \frac{r_{n-1}}{r_{n-2}}$ (n)

* r_{n-2}, r_{n-1}, $\exists\, q_n$ $r_n \in \mathbb{Z}$, $r_{n-2} = r_{n-1} \cdot q_n + r_n \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = q_n + \frac{r_n}{r_{n-1}}$ (n+1)

* $r_{n-1}, r_n \Rightarrow \exists\, q_{n+1}$ r_{n+1}, $r_{n+1} = 0$, $r_{n-1} = r_n \cdot q_{n+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{r_{n-1}}{r_n} = q_{n+1}$ (n+2)

Substituind egalitatea in 1, obținem

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{r_1}{r_0}} =$$

Utilizind (3), obținem

$$= q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{r_2}{r_1}}} = \dots \overset{n+2}{=} q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{q_n + 1}}}}}$$

Definiție

Reprezentarea $\frac{a}{b}$ sub forma:

$$\boxed{\frac{a}{b} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \dots \frac{1}{q_{n+1}}}}}}$$

se numește **fracție continuă finită.**

$q_0, q_1 \dots q_{n+1} \Rightarrow$ câturi necomplete, $q_0 \in \mathbb{Z}$,

iar $q_1, q_2 \dots q_{n+1} \in \mathbb{N}^*$

În formă prescurtată vom nota:

$$\frac{a}{b} = [q_0, q_1, q_2, \dots, q_{n+1}].$$

Exemple:

1) Reprezentaţi nr. $\frac{67}{37}$ sub forma de fracţie continuă finită

$$\begin{array}{r|l} 67 & 37 \\ \underline{37} & 1\,(q_0) \\ 30 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 37 & 30 \\ \underline{30} & 1\,(q_1) \\ 7 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 30 & 7 \\ \underline{28} & 4\,(q_2) \\ 2 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 7 & 2 \\ \underline{6} & 3\,(q_3) \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 2 & 1 \\ \underline{2} & 2\,(q_4) \\ 0. & \end{array}$$

$$\frac{67}{37} = [1, 2, 4, 3, 2].$$

$$\frac{67}{37} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}}}}.$$

2) $-\frac{113}{49}$ $\qquad -113 = 49\underbrace{(-3)}_{q_0} + 34.$

$$\begin{array}{r|l} -113 & 49 \\ \underline{-147} & -3\,(q_0) \\ 34 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 49 & 34 \\ \underline{34} & 1\,(q_1) \\ 15 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 34 & 15 \\ \underline{30} & 2\,(q_2) \\ 4 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 15 & 4 \\ \underline{12} & 3\,(q_3) \\ 3 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 4 & 3 \\ \underline{3} & 1\,(q_4) \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 3 & 1 \\ \underline{3} & 3\,(q_5) \\ 0 & \end{array}$$

$$-\frac{113}{49} = [-3, 1, 2, 3, 1, 3].$$

$$\frac{16}{22} = \frac{8}{11} = [0, 1, 2, 1, 2].$$

$$\begin{array}{r|l} 8 & 11 \\ \underline{0} & 0\,(q_0) \\ 8 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 11 & 8 \\ \underline{8} & 1\,(q_1) \\ 3 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 8 & 3 \\ \underline{6} & 2\,(q_2) \\ 2 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 3 & 2 \\ \underline{2} & 1\,(q_3) \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 2 & 1 \\ \underline{2} & 2\,(q_4) \\ 0 & \end{array}$$

$$0+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}=\frac{8}{11}.$$

Redusele fracției continue

Considerând: $\frac{a}{b}=q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_3+\dots+\cfrac{1}{q_n}}}}$

In fracția de mai sus efectuăm următoarea notație:

$A_0=q_0$

$A_1=q_0+\frac{1}{q_1}$

$A_2=q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2}}$

$A_3=q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_3}}}$

— — — —

$A_n=q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_3+\dots+\cfrac{1}{q_n}}}}$

$A_0, A_1, A_2, A_3 \dots A_n$ se numesc redusele fr. continue ale lui $\frac{a}{b}$.

Observăm că $\forall$ redusa A_k, $k \geq 1$ se obține din precedenta, adică din A_{k-1} în rezultatul substituției a lui:

$$q_{k-1} \longrightarrow q_{k-1} + \frac{1}{q_k}$$

Efectuăm următoarea notație.

$$A_0 = q_0 = \frac{q_0}{1} = \frac{P_0}{Q_0}; \quad P_0 = q_0, \quad Q_0 = 1.$$

$$A_1 = \frac{q_0 q_1 + 1}{q_1} = \frac{P_1}{Q_1}; \quad Q_1 = q_1 \quad P_1 = q_0 q_1 + 1 = P_0 q_1 + 1$$

$$A_2 = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2}} = q_0 + \frac{q_2}{q_1 q_2 + 1} = \frac{q_0 q_1 q_2 + q_0 + q_2}{q_1 q_2 + 1} =$$

$$= \frac{(q_0 q_1 + 1) q_2 + q_0}{q_1 q_2 + 1} = \frac{P_1 \cdot q_2 + P_0}{Q_1 q_2 + Q_0} = \frac{P_2}{Q_2}$$

Vom demonstra că pt. $\forall$ $s \geq 2$, $\boxed{A_s = \frac{P_{s-1} \cdot Q_s + P_{s-2}}{Q_{s-1} q_s + Q_{s-2}} \quad (1)}$

Folosim met. inducț. matemat.

I) $s = 2$

$$A_2 = \frac{P_1 q_2 \; P_0}{Q_1 \cdot q + Q_0} \quad \text{(are loc)}$$

II) Presupunem că (1) are loc pt.

$\forall s$, $2 \leq s \leq k-1$

III) Verificăm (1) pt. $s = k$.

Într-adevăr conform pasului II al inducției, pt. $s = k-1$, avem:

$$A_{k-1} = \frac{P_{k-2}\, q_{k-1} + P_{k-3}}{Q_{k-2}\, q_{k-1} + Q_{k-3}} = \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}$$

Deoarece redusa A_k se obține din redusa A_{k-1}, substituind q_{k-1} prin $q_{k-1} + \frac{1}{q_k}$

$$A_k = \frac{P_{k-2}\left(q_{k-1} + \frac{1}{q_k}\right) + P_{k-3}}{Q_{k-2}\left(q_{k-1} + \frac{1}{q_k}\right) + Q_{k-3}} = \frac{\frac{P_{k-2}\, q_{k-1}\, q_k + P_{k-2} + P_{k-3}\, q_k}{q_k}}{\frac{Q_{k-2}\, q_{k-1}\, q_k + Q_{k-2} + Q_{k-3}\, q_k}{q_k}}$$

$$= \frac{(P_{k-2} \cdot q_{k-1} + P_{k-3})\, q_k + P_{k-2}}{(Q_{k-2} \cdot q_{k-1} + Q_{k-3})\, q_k + Q_{k-2}} = \frac{P_{k-1} \cdot q_k + P_{k-2}}{Q_{k-1} \cdot q_k + Q_{k-2}}$$

Astfel (1) este verificată pt. $s = k$

Conform principiului ind. matem. din I, II, III $\Rightarrow$ (1) are loc pt $\forall s \geq 2$.

Unele prop. ale reduselor fr. continue

1° Fie $\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}$, $\frac{P_k}{Q_k}$ două reduse consecutive ale $\frac{a}{b}$,

atunci: $P_{k-1} \cdot Q_k - P_k \cdot Q_{k-1} = (-1)^k$

Verificăm prin metoda ind. matemat.

1) $k = 1$

$$P_0 \cdot Q_1 - P_1 Q_0 = q_0 q_1 - (P_0 q_1 + 1) = -1 = (-1)^k$$

2) $k = s-1$

$$P_{s-2} Q_{s-1} - P_{s-1} Q_{s-2} = (-1)^{s-1}$$

3) Verificăm pt. $k = s$.

$$P_{s-1} Q_s - P_s \cdot Q_{s-1} = P_{s-1}(q_s \cdot Q_{s-1} + Q_{s-2}) -$$
$$-(P_{s-1} q_s + P_{s-2}) Q_{s-1} =$$

$$= \cancel{P_{s-1} Q_{s-1} q_s} + P_{s-1} Q_{s-2} - \cancel{P_{s-1} Q_{s-1} q_s} - P_{s-2} Q_{s-1} =$$

$$= -(P_{s-2} Q_{s-1} - P_{s-1} Q_{s-2}) = -(-1)^{s-1} = -1^{s}.$$

Din 1) 2) 3) conform ind. matem.
$\Rightarrow$ că $\forall k \geq 1$.

2° Redusele frac. continue sunt fracț. ireductibile

$\forall \frac{P_k}{Q_k}, \ k \geq 0 \quad (P_k, Q_k) - ?$

▨ $(P_k, Q_k) = d \Rightarrow P_k \vdots d \Rightarrow Q_k \vdots d \Rightarrow$
$\Rightarrow (P_k \cdot Q_{k-1}) \vdots d \wedge (Q_k \cdot P_{k-1}) \vdots d \Rightarrow$
$\Rightarrow ((Q_k \cdot P_{k-1}) - (P_k \cdot Q_{k-1})) \vdots d \Rightarrow (-1)^k \vdots d \Rightarrow d = 1$ ▨

<u>Observație</u> una din aplicațiile fr. continue se utilizează la simplificarea fracțiilor.

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{P_n}{Q_n}}$$

Ţinând cont de algoritmul descris mai sus pt. calcularea numitorilor şi numărătorilor ~~fracţi~~ (ii) reduselor.

Redusele fr. continue usor se află cu ajutorul unei tabele:

i		0	1	2	...	n
q_i		q_0	q_1	q_2		q_n
P_i	1	$q_0 = P_0$	$P_0 q_1 + 1 = P_1$	$P_1 q_2 + P_0 = P_2$	- -	$P_{n-1} q_n + P_{n-2} = P_n$
Q_i	0	$1 = Q_0$	$q_1 = Q_1$	$Q_1 \cdot q_2 + Q_0 = Q_2$		$Q_{n-1} q_n + Q_{n-2} = Q_n$

Ex. (asemănător cu 6)

$$\frac{236}{144} = [1, 1, 1, 1, 3, 3]$$

$$\begin{array}{r|l} 236 & 144 \\ 144 & 1\ (q_0) \\ \hline =92 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 144 & 92 \\ 92 & 1\ (q_1) \\ \hline 52 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 92 & 52 \\ 52 & 1\ (q_2) \\ \hline 40 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 52 & 40 \\ 40 & 1\ (q_3) \\ \hline 12 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 40 & 12 \\ 36 & 3\ (q_4) \\ \hline 4 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 12 & 4 \\ 12 & 3\ (q_5) \\ \hline = & \end{array}$$

i		0	1	2	3	4	5
q_i		1	1	1	1	3	3
P_i	1	1	2	3	5	18	59
Q_i	0	1	1	2	3	11	36.

$A_0 = \frac{P_0}{Q_0} = \frac{1}{1} = 1$ $\quad A_2 = \frac{P_2}{Q_2} = \frac{5}{3}$.

$A_1 = \frac{P_1}{R_1} = 2$ $\quad A_2 = \frac{3}{2}$ $\quad A_4 = \frac{18}{11}$ $\quad A_5 = \frac{59}{36}$.