§ Numere sistematice.
Operaţii asupra nr. sistemat…

Fie $a \in N$, $g > 1$, $g \in N$.

Definiţie

Reprezentarea nr. a sub forma

$$a = a_n g^n + a_{n-1} g^{n-1} + \ldots a_1 g + a_0,$$

unde $a_i \in \{0, 1, 2, \ldots g-1\}$, $i = \overline{0,n}$ se numeşte înscriere sistematice a nr. a în baza g.

$$a = \overline{a_n, a_{n-1}, a_{n-2} \ldots a_1, a_0}_g =$$

$= \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}_g$

$a_0, a_1 \dots a_n$ - cifrele nr a în baza g.

Exemplu

$g = 7$; ~~2, 3, 4,~~ $\overline{2346}_7$

$g = 9$ $\overline{4587}_9$

$g = 11$ 9108_{11} $9(10)8_{11}$

Teoremă

Orice număr natural se reprezintă ca nr. sistematic cu baza g în mod unic

$a \in N$,

$a = a_n g^n + a_{n-1} g^{n-1} + \dots a_1 g + a_0$

$a = \underbrace{(a_n g^{n-1} + a_{n-1} g^{n-2} + \dots + a_2 g + a_1)}_{q_1} g + \underbrace{a_0}_{r_1}$

$a = q_1 g + r$

Astfel a_0 coincide cu restul împărțirii $a : g$ $(a_0 = r_1)$

Observăm că dacă luăm $q_1 = \underbrace{(a_n g^{n-2} + a_{n-1} g^{n-3} \dots a_3 g + a_2)}_{q_2} g + \underbrace{a_1}_{r_2}$

a_1 coincide cu restul de la împărț. lui q_1 prin g. $(a_1 = r_2)$

$q_2 = \underbrace{(a_n g^{n-3} + a_{n-1} g^{n-4} + \dots a_4 g + a_3)}_{q_3} g + \underbrace{a_2}_{r_3}$

$a_2 = r_3$

În mod analog aflăm celelalte $a_3, a_4, \dots a_n$.

Ținînd cont de faptul că $r_1, r_2, r_3 \dots r_n$ sunt mai mici decît g, și $a_0, a_1, \dots a_n \in \{0, 1, \dots g-1\}$.

Deoarece resturile conform T. împărț. cu rest sunt unice va rezulta că reprezentarea numărului a în baza g va fi unică.

$a = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_0}_g$ – unică.

Exemplu

Reprezentați nr. natural $a = 345$ ca nr. sistematic în baza 7

$g = 7$, $a = 345$.

$$\begin{array}{r|l} 345 & 7 \\ \hline 28 & 49 \\ 65 & \\ 63 & \\ \hline 2 = a_0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 49 & 7 \\ \hline 49 & 7 \\ \hline 0 = a_1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 7 & 7 \\ \hline 7 & 1 \\ \hline 0 = a_2 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1 & 7 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 1 = a_3 & \end{array}$$

$345_{10} = 1002_7$

Verificare:

$1002_7 = 1 \cdot 7^3 + 0 \cdot 7^2 + 0 \cdot 7^1 + 2 =$

$= 343 + 2 = 345$.

Observație

Oricărui nr. sistematic în baza g îi corespunde un nr. natural bine determinant

$\overline{a_n a_{n-1} + \dots a_0}_g \Rightarrow a = a_n g^n + a_n g^{n-1} + \dots + a_0$.

Exemplu:

$$718_9 = 7\cdot 9^2 + 1\cdot 9 + 8 = 567 + 17 = 584.$$

Asupra n. sistematice putem efectua operații similare cu cele din mulțimea n. naturale

Pt. a efectua operațiile: $+, -, \times, :$ este suficient să cunoaștem regulile corespunzătoare efectuate asupra cifrelor de la $0, 1, \dots, g-1$.

Exemplu: $g = 5$

5:5 ⇒ 0-rest
1-întreg

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	10
2	2	3	4	10	11
3	3	4	10	11	12
4	4	10	11	12	13

6:5 = 1 întreg
1 rest

·	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	11	13
3	0	3	11	14	22
4	0	4	13	22	31

$$\begin{array}{r} 2341_5 \\ +\ 4424_5 \\ \hline 12320_5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 423_5 \\ \times\ 24_5 \\ \hline 3302 \\ +\ 1401 \\ \hline 22312_5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4421_5 \\ -\ 3332_5 \\ \hline 1034_5 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 22312_5 & \mid 24_5 \\ -211 & \mid 423 \\ \hline 121 & \\ 103 & \\ \hline 132 & \\ 132 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$
\begin{array}{r}
2(10)1_{11} \\
\times \quad (10)2_{11} \\
\hline
592 \\
271(10)_{11} \\
\hline
27782_{11}
\end{array}
$$

Pentru a transforma nr. sistematic x din baza g_1 cînd y_{g_2}, procedăm astfel:

1) $x_{g_1} \to z_{10}$

2) $z_{10} \to y_{g_2}$

Exemplu:

$471_8 \to y_{11}$ – ?

1) $471_8 = 4 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8 + 1 = 256 + 57 = 313$

2)
$$
\begin{array}{r|l}
313 & 11 \\
\underline{22} & 28 \\
93 & \\
\underline{88} & \\
5 = a_0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
28 & 11 \\
\underline{22} & 2 \\
6 = a_1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
2 & 11 \\
\underline{0} & 0 \\
2 = a_2 &
\end{array}
$$

$471_8 = 265_{11}$

$265_{11} = 2 \cdot 11^2 + 6 \cdot 11 + 5 = 242 + 66 + 5 =$
$= 313.$