CAPITOLUL I

EVENIMENTE ALEATOARE

§1. Probabilităţi clasice şi geometrice

Noţiunea de **eveniment** în teoria probabilităţilor este primară şi reprezintă rezultatul unui experiment (unei probe).

Proba sau **experimentul** este o activitate care poate fi repetată în condiţii date.

Exemplul 1.1. Experiment: Se aruncă două monede.

Evenimente: Apariţia stemei, apariţia valorii monedei.

Experiment (probă): Patru persoane intră în magazin.

Evenimente: Trei din ele fac cumpărături, nici o persoană nu face cumpărături, cel mult două persoane fac cumpărături.

Experiment (probă): Se aruncă un zar.

Evenimente: Apariţia feţei cu trei puncte, apariţia feţei cu un număr par de puncte, apariţia feţei cu un număr de puncte divizibil la trei.

Experimente: Susţinerea unui examen.

Evenimente: Obţinerea notei 8, obţinerea unei note de promovare.

Definiţia 1.1. Evenimentele ce se realizează ca rezultat al unei singure probe şi numai a uneia se numesc **evenimente elementare**. Celelalte evenimente se numesc **evenimente compuse.**

Mulţimea tuturor evenimentelor elementare ataşate unui experiment se numeşte **spaţiul evenimentelor elementare** şi se notează cu Ω.

Definiţia 1.2. Se numeşte **eveniment sigur** evenimentul, care se produce cu certitudine în rezultatul experimentului.

Exemplul 1.2. Extragerea unei bile albe dintr-o urnă ce conţine numa bile albe.

Definiţia 1.3. Se numeşte **eveniment imposibil** evenimentul care nu se produce la nici o realizare a experimentului.

Definiţia 1.4. Se numeşte **eveniment aleator** (întâmplător) evenimentul care se produce sau nu în rezultatul experimentului.

Exemplul 1.4. Apariţia stemei sau a valorii la aruncarea unei monede. Apariţia feţei cu 5 puncte la aruncarea zarului. Nimerirea în ţintă la o tragere. Obţinerea notei 8 la un examen.

În general, evenimentele se notează de obicei cu litere majuscule (mari) ale alfabetului latin (cu sau fără indici):

$$A, B, C \ldots; A_1, A_2, \ldots A_n; B_1, B_2 \ldots B_n; \ldots$$

Pentru evenimentul sigur e folosită litera Ω, iar pentru cel imposibil - simbolul $\varnothing$.

Definiţia 1.5. Evenimentele A şi B se numesc **incompatibile,** dacă producerea unuia dintre ele exclude producerea celuilalt în rezultatul unui experiment.

Exemplul 1.5. Dintr-o urnă, care conţine bile albe şi negre, se extrage o bilă. Extragerea bilei albe (A) şi extragerea bilei negre (B) sunt două evenimente incompatibile.

Definiţia 1.6. Evenimentele $A_1, A_2, \ldots, A_n$ se numesc **incompatibile două câte două,** dacă oricare două din ele A_i şi A_j ($i \neq j$) sunt incompatibile.

Exemplul 1.6. Se aruncă un zar. Fie A_i – „apare faţa cu i puncte", $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Aceste evenimente sunt incompatibile două câte două, deoarece apariţia feţei cu i puncte exclude apariţia feţei cu j puncte ($i \neq j$).

Definiţia 1.7. Se numeşte **sumă** a evenimentelor A şi B evenimentul $C = A \cup B$, care se produce atunci când se produce cel puţin unul din cele două evenimente (sau A sau B).

Definiţia 1.8. Se numeşte **produs** al evenimentelor A şi B evenimentul $D = A \cap B$, care se produce odată cu producerea simultană a celor două evenimente (şi A şi B).

Exemplul 1.7. Se efectuează două trageri asupra unei ţinte. Considerăm evenimentele:

A – se nimereşte ţinta prima oară;

B – se nimereşte ţinta a doua oară;

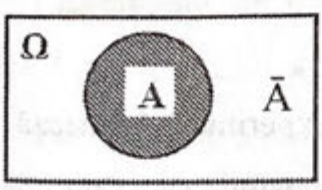
C – se nimereşte ţinta cel puţin o dată;

D – se nimereşte ţinta de două ori;

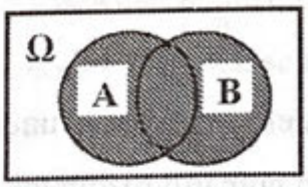
Evident, $C = A \cup B$, $D = A \cap B$.

Operaţiile de adunare şi înmulţire a evenimentelor sunt simetrice, deci: $A \cup B = B \cup A$ şi $A \cap B = B \cap A$.

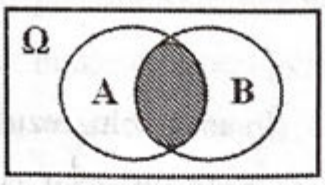
La fel ele admit o interpretare geometrică. Astfel, evenimentul sigur Ω îl vom interpreta ca pe un dreptunghi, iar evenimentele A, B, C, ... – cercuri în acest dreptunghi. Atunci operaţiile de adunare, înmulţire vor fi reprezentate în formă de diagrame.



$\Omega = A \cup \overline{A}$



$A \cup B$



$A \cap B$

Remarcă. Diagramele de mai sus ne arată, că suma evenimentelor A şi B geometric reprezintă reuniunea mulţimilor A şi B, iar produsul – intersecţia acestor mulţimi.

Definiţia 1.9. Se numeşte **eveniment opus** evenimentului A (contrar lui A) evenimentul $\overline{A}$ (se admite CA), care se produce odată cu neproducerea lui A.

Exemplul 1.8. Într-o urnă sunt bile albe şi negre. Se extrage o bilă. A – extragerea bilei albe, $\overline{A}$ – extragerea bilei negre.

Evident, evenimentul opus lui $\overline{A}$ este A, deci $\overline{\overline{A}} = A$.

Remarcă. Suma evenimentelor A şi B se mai notează $A + B$, iar produsul - $A \cdot B$. Deci, se mai scrie uneori şi astfel: $C = A + B$; $D = A \cdot B$.

Operaţiile de adunare şi înmulţire a evenimentelor în mod firesc se extind asupra oricărui număr de evenimente.

Fie date evenimentele $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Suma $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ este evenimentul, care se produce odată cu producerea a cel puţin unuia din evenimentele $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Produsul $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ este evenimentul, care se produce odată cu producerea tuturor evenimentelor $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Au loc formulele lui De Morgan (1.1):

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}; \qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}. \tag{1.1}$$

În ansamblu, rezultatele posibile ale unui experiment formează spaţiul Ω. Studiem cazul când numărul rezultatelor posibile este finit, deci $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, unde fiecare element ω_i al Ω este eveniment elementar.

Exemplul 1.9. a) Se aruncă o monedă. Notăm:

S – cade stema;

V – cade valoarea monedei;

Rezultatele posibile ale acestui experiment: $\Omega = \{S; V\}$.

b) Se aruncă două monede. Rezultatele posibile vor fi: $A_1 = SS$; $A_2 = SV$; $A_3 = VS$; $A_4 = VV$. $\Omega = \{SS, SV, VS, VV\}$.

c) Se aruncă un zar. Rezultatele posibile $\Omega = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$, unde A_i este evenimentul „cade faţa cu i puncte", $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Aici Ω este spaţiu al evenimentelor elementare.

Fie A un eveniment, care se produce în rezultatul experimentului. Acest eveniment poate fi unul complex, deci, mai general decât cele elementare. De exemplu, evenimentul A – „a căzut un număr par de puncte la aruncarea zarului" se va realiza odată cu evenimentele elementare A_2, A_4, A_6.

Se spune în asemenea caz, că lui A îi sunt favorabile evenimentele elementare A_2, A_4, A_6 şi se scrie $A = \{A_2, A_4, A_6\}$.

Evenimentului B – „a căzut un număr de puncte divizibil la 3 la aruncarea zarului" îi sunt favorabile evenimentele elementare A_3, A_6 de aceea $B = \{A_3, A_6\}$.

Evenimentele A_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ au aceeaşi posibilitate de a se produce. Ele se numesc **echiprobabile**.

Considerăm un experiment cu n rezultate posibile şi echiprobabile $\Omega = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$. Aceste rezultate se mai numesc **cazuri posibile**.

Fie că evenimentului A, care se produce în acest experiment, îi sunt **favorabile** m evenimente elementare: $A = \{A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_m}\}$.

Definiţia 1.10. Se numeşte **probabilitate clasică** a evenimentului A şi se notează prin $P(A)$ numărul:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{m(A)}{n}. \qquad (1.2)$$

Aşadar, probabilitatea clasică a oricărui eveniment A este egală cu raportul dintre numărul de cazuri favorabile evenimentului A şi numărul de cazuri posibile ale experimentului.

Remarcă. Evenimentul ce are un singur caz favorabil este eveniment elementar.

Exemplul 1.10. Se aruncă un zar. A – „cade faţa cu un număr par de puncte". Din cele enunţate mai sus imediat rezultă: $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Exemplul 1.11. Se aruncă două monede. B – „pe ambele monede a căzut stema". Evident, $\Omega = \{SS, SV, VS, VV\}$, $B = \{SS\}$, deci $n = 4$, $m = 1$, $P(A) = \frac{1}{4}$.

Exemplul 1.12. Se aruncă două zaruri. Fie i – numărul de puncte căzute pe primul zar; j – numărul de puncte de pe al doilea zar. Atunci spaţiul evenimentelor elementare va coincide cu mulţimea tuturor perechilor (ij), $i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Acest spaţiu poate fi reprezentat de matricea.

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 \\ 31 & 32 & 33 & 34 & 35 & 36 \\ 41 & 42 & 43 & 44 & 45 & 46 \\ 51 & 52 & 53 & 54 & 55 & 56 \\ 61 & 62 & 63 & 64 & 65 & 66 \end{pmatrix}. \qquad (1.3)$$

Considerăm evenimentele:

$A = \{(ij): i = j\}$, $A = \{11, 22, 33, 44, 55, 66\}$ deci $n = 36$, $m = 6$,

$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \cdot B = \{(ij): i \le j\}$. Favorabile lui B sunt elementele matricei (1.3) de pe diagonala principală şi mai sus de ea. Deci, $n = 36$, $m(B) = 21$. $P(B) = \frac{m(B)}{n} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$, $C = \{(ij): i + j = 5\}$.

$C = \{41, 32, 23, 14\}$, deci, $m(C) = 4$; $P(C) = \frac{m(C)}{n} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

În continuare, vom enunţa proprietăţile fundamentale ale probabilităţii clasice $P(A)$ (1.2).

1. Pentru orice eveniment A

$$0 \le P(A) \le 1. \tag{1.4}$$

Rezultă din faptul că pentru orice A avem: $0 \le m \le n$. Împărţind această inegalitate la $n > 0$, venim la relaţia (1.4).

2. Probabilitatea evenimentului imposibil $\varnothing$ este zero, deci:

$$P(\varnothing) = 0. \tag{1.5}$$

Pentru evenimentul imposibil $\varnothing$ avem $m = m(\varnothing) = 0$, de aceea,

$$P(\varnothing) = \frac{m(\varnothing)}{n} = \frac{0}{n} = 0.$$

3. Probabilitatea evenimentului sigur Ω este 1, deci:

$$P(\Omega) = 1. \tag{1.6}$$

Într-adevăr, evenimentului sigur Ω îi sunt favorabile toate cazurile posibile, $m = m(\Omega) = n$, $P(\Omega) = \frac{m(\Omega)}{n} = \frac{n}{n} = 1$.

4. Pentru orice evenimente incompatibile A şi B avem:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \tag{1.7}$$

Fie, $m(A)$ – cazurile favorabile lui A, $m(B)$ – cazurile favorabile lui B $m(A \cup B)$ – cazurile favorabile pentru evenimentul sumă $A \cup B$. Deoarece evenimentele A şi B sunt incompatibile avem $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$. Prin urmare:

$$P(A \cup B) = \frac{m(A \cup B)}{n} = \frac{m(A)+m(B)}{n} = \frac{m(A)}{n} + \frac{m(B)}{n} =$$

$$= P(A) + P(B).$$

5. $$P(\overline{A}) = 1 - P(A). \qquad (1.8)$$

Deoarece $\overline{A}$ este evenimentul opus lui A rezultă: $m(\overline{A}) = n - m(A)$. Astfel, (1. 8) rezultă din

$$P(\overline{A}) = \frac{m(\overline{A})}{n} = \frac{n - m(A)}{n} = 1 - \frac{m(A)}{n} = 1 - P(A).$$

Remarcă. La calculul probabilităţii clasice a evenimentului A se foloseşte formula (1.2), care este destul de simplă: se calculează numerele m şi n, apoi se ia raportul lor. Calculul acestor numere însă nu este întotdeauna simplu (ca în exemplele de mai sus). Pentru a face faţă acestor calcule şi a determina corect probabilitatea clasică a evenimentului A este nevoie de unele noţiuni din **combinatorică.**

a) **Permutări**. Fie dată o mulţime finită M, care conţine n elemente. Aceste elemente pot fi aranjate în ordine diferită. De exemplu, din mulţimea $M = \{1, 2, 3\}$ pot fi formate mulţimile: $\{1, 2, 3\}$; $\{1, 3, 2\}$; $\{2, 1, 3\}$; $\{2, 3, 1\}$; $\{3, 1, 2\}$ şi $\{3, 2, 1\}$.

Definiţia 1.11. Fiecare plasare *a tuturor* elementelor mulţimii M într-o *anumită ordine* se numeşte **permutare** a elementelor acestei mulţimi.

Fie P_n – numărul permutărilor elementelor mulţimii finite M. Atunci,

$$P_n = 1 \cdot 2 \ldots (n-1) \cdot n = n!. \qquad (1.9)$$

Remarcă. Prin definiţie se consideră că 0!=1.

Exemplul 1.13. Pentru $n = 3$ avem $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. Pentru $n = 4$: $P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. Dacă $n = 6$, atunci $P_6 = 6! = 720$.

b) **Aranjamente.** Fie dată mulţimea finită M, care conţine n elemente. Formăm din elementele ei mulţimi *ordonate*, care vor conţine m elemente fiecare, $m \leq n$, deci mulţimi ce se vor deosebi una de alta *ori prin ordinea* elementelor, *ori prin natura* lor .

Definiţia 1.12. Mulţimile *ordonate* a lui M, care conţin fiecare câte m elemente se numesc **aranjamente** a elementelor acestei mulţimi.

Dacă notăm prin A_n^m numărul aranjamentelor din n elemente luate câte m, atunci:

$$A_n^m = n(n-1) \ldots (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}. \qquad (1.10)$$

Din (1. 9) şi (1.10) rezultă egalitatea $P_n = A_n^n$.

Exemplul 1.14. La 4 posturi diferite pretind 9 persoane. În câte moduri pot ocupa posturile vacante aceste persoane?

Rezolvare. Mulţimea M constă din $n = 9$ persoane. Trebuie să formăm mulţimi ordonate din $m = 4$ persoane. Deci,

$$A_9^4 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024.$$

Răspuns. Posturile vacante pot fi ocupate în 3024 moduri.

c) **Combinări.** Fie dată o mulţime M, care conţine n elemente. Formăm din elementele lui M mulţimi, care conţin m elemente ($m \leq n$), ce se deosebesc una de alta *doar prin natura* elementelor. (O mulţime diferă de alta cel puţin cu un element. Două mulţimi, care se deosebesc doar prin ordinea elementelor se consideră identice).

Definiţia 1.13. Mulţimile *neordonate* de m elemente din cele n ale mulţimii M se numesc **combinări** a elementelor mulţimii M.

Dacă notăm prin C_n^m numărul combinărilor din n elemente luate câte m, atunci,

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \tag{1.11}$$

Din (1.11) rezultă egalitatea (1.12),

$$C_n^m = C_n^{n-m}, \tag{1.12}$$

iar din binomul lui Newton rezultă identitatea (1.13),

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n. \tag{1.13}$$

Exemplul 1.15. Pe masă sunt 20 de bilete de examinare.

Un student, chemat la răspuns, ia la întâmplare 2 bilete. În câte moduri el poate face acest lucru?

Rezolvare. Evident, acest număr va coincide cu:

$$C_{20}^2 = \frac{20!}{2! \cdot 18!} = \frac{19 \cdot 20}{1 \cdot 2} = 190.$$

Răspuns: Studentul poate lua 2 bilete din cele 20 în 190 moduri.

d) **Formula de selecţie.** Fie dată o mulţime, care conţine N elemente. Printre ele se află K elemente, care posedă o *proprietate*

specifică doar lor. Din mulţimea dată se iau la întâmplare n elemente. Printre elementele luate dorim să se afle k elemente cu *proprietatea specifică*. Dacă notăm prin m – numărul de astfel de alegeri, atunci:

$$m = C_K^k \cdot C_{N-K}^{n-k} . \qquad (1.14)$$

e) **Regula produsului**. Fie, că elementele unei mulţimi M depind de s parametri $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_s}$. Fiecare parametru parcurge independent N valori. Atunci numărul de elemente ale mulţimii M conţine N^s elemente posibile.

Exemplul 1.16. Un zar se aruncă de 2 ori. Câte cazuri posibile vor fi ?

Rezolvare. Rezultatul aruncării unui zar de 2 ori poate fi descris de evenimentele $A_i : (i_1, i_2)$ unde $i_k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$; $k = 1, 2$. De exemplu, pot fi aşa evenimente: (1 1), (1 2),..., (1 6), (2 1), (2 2),..., (6 6). În total vom avea 6^2 cazuri posibile.

Exemplul 1.17. Formând numărul de telefon, o persoană a uitat ultimele 2 cifre, amintindu-şi doar că ele sunt diferite. Să se calculeze probabilitatea că s-a format numărul dorit.

Rezolvare. Considerăm evenimentul A: „s-a format numărul dorit".

$P(A) = \dfrac{m(A)}{n}$. n este numărul de perechi ordonate, care poate fi format din cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Deci, $n = A_{10}^2 = 10 \cdot 9 = 90$; $m(A) = 1$ (un singur număr este cel dorit). Prin urmare,

$$P(A) = \frac{m(A)}{n} = \frac{1}{90}.$$

Răspuns. Probabilitatea, că a fost format numărul dorit, este egală cu 1 / 90.

Exemplul 1.18. Într-un lot de 10 piese 7 sunt de calitate superioară. Să se afle probabilitatea că din 6 piese, luate la întâmplare, 4 vor fi de calitate superioară.

Rezolvare. Considerăm evenimentul A – „Din 6 piese, luate la întâmplare, 4 vor fi de calitate superioară". $P(A) = \frac{m(A)}{n}$. În total avem 10 piese. Din ele luăm 6, deci $n = C_{10}^{6}$. În lot sunt 7 piese de calitate superioară, iar printre cele luate noi dorim să avem 4 de acest fel, cazuri vor fi: C_7^4.

Restul pieselor printre cele luate, deci, 2 nu vor avea această calitate. Numărul de cazuri C_3^2. În final, din (1. 14) rezultă $m(A) = C_7^4 \cdot C_3^2$. Prin urmare: $P(A) = \frac{C_7^4 \cdot C_3^2}{C_{10}^6} = \frac{1}{2}$.

Răspuns. $P(A) = 1/2$.

Remarcă. Probabilitatea $P(A)$ nu poate fi calculată întotdeauna cu formula clasică (1. 2). Motive pot fi mai multe. De exemplu,

a) Se întâlnesc evenimente, despre care este greu de afirmat dacă ele sunt echiprobabile.

b) Există situaţii, când numărul de cazuri posibile nu este finit (sau aceste cazuri sunt greu de precizat). De exemplu, este dificil să vorbim despre cazurile posibile şi favorabile pentru evenimentul „ziua de 15 mai 2015 va fi una ploioasă".

Din această cauză pe lângă definiţia clasică a probabilităţii sunt utilizate şi alte definiţii a ei.

Una din ele este cea de **probabilitate statistică**.

Fie că un experiment (probă) , în rezultatul căruia se poate produce evenimentul A, se repetă de n ori. Admitem că A s-a produs de m ori.

Definiţia 1.14. Se numeşte **frecvenţă relativă** a evenimentului A şi se notează prin $f(A)$ raportul:

$$f(A) = \frac{m}{n}. \tag{1.15}$$

Uşor se verifică următoarele proprietăţi ale frecvenţei $f(A)$.

$$0 \le f(A) \le 1. \tag{1.16}$$

$$f(\Omega) = 1\ ;\ f(\varnothing) = 0. \tag{1.17}$$

$$f(A \cup B) = f(A) + f(B), \tag{1.18}$$

dacă A şi B sunt incompatibile.

Demonstraţia proprietăţilor (1.16) - (1.18) se face la fel cu demonstraţia proprietăţilor similare (1.5) - (1.7) ale probabilităţii clasice $P(A)$. Frecvenţa relativă (1.15) variază de la o serie de experimente la alta.

Exemplul 1.19. S-au efectuat câteva serii de experimente cu moneda. Fie, evenimentul A – „apare stema la aruncarea monedei". Rezultatele a 3 serii de experimente sunt date în tabelul de mai jos.

Numărul de aruncări	Numărul de apariţii a stemei	Frecvenţa relativă.
4040	2048	0,5069
12000	6019	0,5016
24000	12012	0,5005

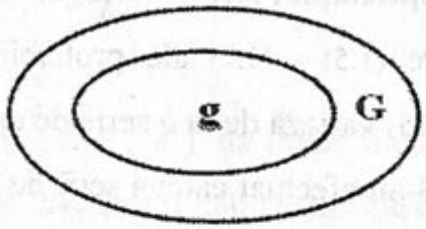
Rezultatele din tabel se datorează statisticianului K. Pearson (1857–1936).

Se observă că frecvenţa relativă $f(A)$ se apropie de probabilitatea evenimentului $P(A) = 0{,}5$ odată cu creşterea numărului de experimente (probe). Deci, se poate afirma, că $\lim\limits_{n\to\infty} f(A) = P(A)$.

Definiţia 1.15. Se numeşte **probabilitate statistică** a evenimentului A frecvenţa acestui eveniment sau numărul în jurul căruia ea oscilează.

Altă modalitate de introducere a probabilităţii este cea de folosire a unor noţiuni din geometrie. Astfel se ajunge la noţiunea de probabilitate geometrică, care ne permite să calculăm probabilităţile şi în cazul experimentelor cu un număr infinit de cazuri posibile.

Considerăm domeniile măsurabile G şi g (domeniul g se află în interiorul domeniului G).



Un punct oarecare M se plasează la întâmplare pe domeniul G. Care este probabilitatea că acest punct va nimeri pe domeniul g? Considerăm că punctul M poate ocupa orice poziţie în G, iar probabilitatea de a nimeri în g este direct proporţională cu măsura domeniului g. Notăm prin A evenimentul „punctul M va nimeri în domeniul g".

Logica celor expuse mai sus ne conduce la:

Definiţia 1.16. Se numeşte **probabilitate geometrică** a evenimentului A raportul

$$P(A) = \frac{mes(g)}{mes(G)}. \tag{1.19}$$

Simbolul „**mes**" din formula (1.19) provine de la „**mesure**", ceea ce înseamnă măsură şi se interpretează ca lungime, arie sau volum în funcţie de faptul unde se află domeniile G şi g (pe dreaptă, în plan sau în spaţiu).

Exemplul 1.20. Într-un cerc de raza R se plasează la întâmplare un punct M. Să se afle probabilitatea că acest punct va nimeri în triunghiul echilateral, înscris în cerc.

Rezolvare. Fie, evenimentul A – „punctul M va nimeri în triunghiul echilateral, înscris în cerc". Evident,

$$P(A) = \frac{S_{\Delta}}{S_{cerc}} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4\pi R^2} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \approx 0{,}414.$$

Răspuns. $P(A) \approx 0{,}414$.

Exemplul 1.21. Două persoane au convenit să se întâlnească pe parcursul unei ore. Primul sosit la întâlnire aşteaptă 15 min. Să se calculeze probabilitatea că persoanele se vor întâlni.

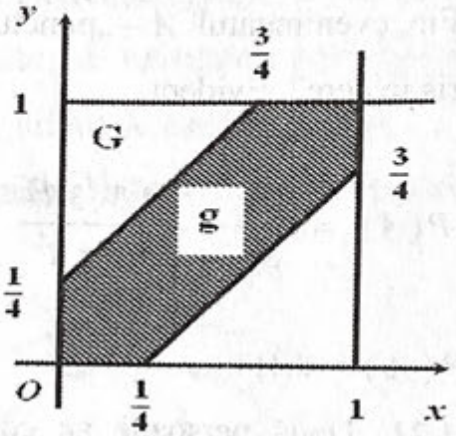
Rezolvare. Considerăm evenimentul A – „persoanele se vor întâlni". Fie, x – momentul sosirii la întâlnire a primei persoane, iar y – momentul sosirii persoanei a doua. Fiecare poate sosi la întâlnire pe parcursul orei convenite, deci $0 \le x \le 1$; $0 \le y \le 1$. Astfel, mulţimea tuturor cazurilor posibile va coincide cu domeniul:

$$G = \{ (x; y) : 0 \le x \le 1 ; 0 \le y \le 1 \}.$$

Persoanele se vor întâlni doar atunci când $|x - y| \le \frac{1}{4}$ (= 15min), deci cazurile favorabile întâlnirii vor fi date de mulţimea:

$$g = \left\{ (x;y) : |x-y| \le \frac{1}{4} \right\}.$$

Prin urmare, $P(A) = \dfrac{S(g)}{S(G)}$. Domeniul G reprezintă un pătrat cu latura 1, iar g este o fâşie din G cuprinsă între dreapta $x - y = -\frac{1}{4}$, şi dreapta $x - y = \frac{1}{4}$.



$$P(A) = \frac{1^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2}{1^2} = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}.$$

Răspuns. Probabilitatea întâlnirii persoanelor este egală cu $7/16$.

Exemplul 1.22. Din intervalul $[0;2]$ se iau la întâmplare două numere x şi y. Să se afle probabilitatea că aceste numere verifică inegalitatea:

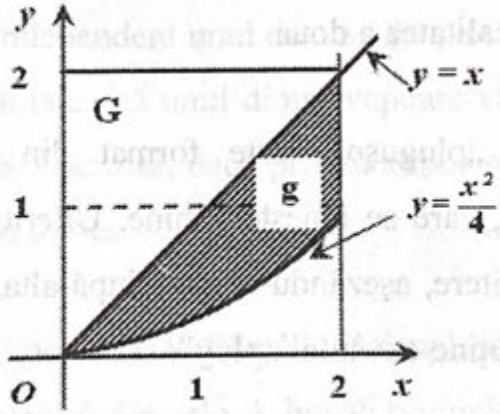
$$\frac{x^2}{4} \le y \le x.$$

Rezolvare: Considerăm evenimentul A – "numerele x şi y verifică inegalitatea $\frac{x^2}{4} \le y \le x$". Vom interpreta numărul x ca fiind abscisa unui punct din plan, iar y – ordonata lui.

Deoarece numerele x şi y sunt de pe $[0;2]$ venim la domeniul $G = \{(x;y):\ 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2\}$, care ne va da mulţimea tuturor cazurilor posibile pentru A.

Mulţimea cazurilor favorabile evenimentului A va fi descrisă de domeniul $g = \{(x;y):\ \frac{x^2}{4} \le y \le x\}$. Atunci în virtutea formulei (1.19), care defineşte probabilitatea geometrică avem: $P(A) = \frac{S(g)}{S(G)}$.

În sistemul de coordonate xOy reprezentăm domeniile g şi G.



Imediat observăm: $S(G) = 2^2 = 4$. $S(g) = \int_0^2 (x - \frac{x^2}{4})\,dx = \frac{4}{3}$.

Prin urmare, $P(A) = \frac{\frac{4}{3}}{4} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$.

Răspuns: Probabilitatea că numerele de pe $[0;2]$ luate la întâmplare, vor verifica inegalitatea $\frac{x^2}{4} \le y \le x$, este egală cu $\frac{1}{3}$.

Probleme

1.1. Un cub de lemn, având toate feţele vopsite, este tăiat într-o mie de cubuşoare identice. Aceste cubuşoare se aruncă într-un sac şi se amestecă bine. Din sac se extrage la întâmplare un cubuşor. Să se calculeze probabilităţile evenimentelor.

A – cubuşorul extras va avea 3 feţe vopsite;

B – cubuşorul extras va avea 2 feţe vopsite;

C – cubuşorul extras va avea o faţă vopsită;

D – cubuşorul extras nu va avea feţe vopsite;

1.2. Într-un lot se află 25 piese de calitatea întâi şi 5 piese de calitatea a doua. Pentru controlul tehnic se iau la întâmplare 10 piese. Să se calculeze probabilitatea, că printre piesele luate se vor afla două piese de calitatea a doua.

1.3. Cuvîntul „pluguşor" este format din litere izolate, scrise pe cartonaşe, care se amestecă bine. Ulterior la întâmplare se iau pe rând 4 litere, aşezându-se una după alta. Să se afle probabilitatea, că vom obţine cuvântul „plug".

1.4. Pe 10 cartonaşe sunt scrise cifrele 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9. Ele se pun într-o urnă, se amestecă bine şi ulterior se extrag două. Să se afle probabilitatea că numărul format din ele va fi divizibil la 18.

1.5. Într-o grupă academică sunt 15 băieţi şi 10 fete. S-au cumpărat şi repartizat la întâmplare 5 bilete la teatru. Să se afle probabilitatea că la teatru vor merge 3 băieţi şi 2 fete.

1.6. Într-o cutie se află 6 cubuşoare identice şi numerotate. La întâmplare se extrag pe rând toate cubuşoarele. Să se afle probabilitatea că ele vor fi extrase în ordinea crescătoare a numerelor lor.

1.7. Sunt date două numere nenegative, care nu depăşesc numărul 1. Să se afle probabilitatea că suma acestor numere nu va depăşi 1 , iar produsul lor nu va depăşi 2 / 9.

1.8. Două vapoare se apropie de un debarcader. Ambele vapoare sosesc la debarcader independent unul de altul pe parcursul a 24 de ore. Să se afle probabilitatea că unul dintre vapoare va fi nevoit să aştepte eliberarea debarcaderului, dacă primul vapor ocupă debarcaderul 1 oră, iar cel de al doilea – 2 ore.

1.9. O bară de lungimea ℓ este frântă la întâmplare în două locuri. Să se afle probabilitatea că din cele 3 bucăţi obţinute se va putea construi un triunghi.

1.10. Zece prieteni au convenit să facă o călătorie cu trenul, care are 10 vagoane. Să se afle probabilitatea că nici unul din ei nu v-a călători într-un vagon cu prietenul său.

1.11. Pe o poliţă la întâmplare sunt puse 10 cărţi Să se afle probabilitatea că 3 cărţi anumite vor nimeri alături.

1.12. Într-o urnă sunt 3 bile albe şi 7 negre. Să se afle probabilitatea că două bile extrase la întâmplare vor fi de culoare albă.

1.13. Un număr de telefon este format din 6 cifre. Să se afle probabilitatea că toate cifrele vor fi diferite.

1.14. La un depozit se află 100 perechi de cizme. 10 perechi sunt negre, iar celelalte – cafenii. Se iau pentru vînzare 8 perechi. Să se calculeze probabilitatea că toate perechile luate vor fi cafenii.

1.15. Un student a uitat ultimele 2 cifre a numărului de telefon al prietenului său şi l-ea cules la întâmplare, amintindu-şi doar că ele sunt impare şi diferite. Să se afle probabilitatea că a fost format numărul dorit.

1.16. La un moment dat în liftul unei case cu 9 etaje se află 7 pasageri. Să se afle probabilitatea că 2 pasageri vor ieşi la un etaj, iar ceilalţi 5 – la etaje diferite.

1.17. Şapte călători urcă într-un tren cu 12 vagoane. Călătorii urcă în vagoane la întâmplare. Să se afle probabilitatea, că în fiecare vagon va nimeri nu mai mult de un călător.

1.18. Într-o tabără sportivă sunt 30 băieţi şi 25 fete. Pentru un sondaj privind opinia asupra programului de antrenament se iau la întâmplare 10 sportivi. Să se afle probabilitatea că în acest grup vor nimeri 8 băieţi şi 2 fete.

1.19. Într-un tramvai cu 3 vagoane se urcă la întâmplare 8 persoane. Care este probabilitatea că în primul vagon se vor urca 3 persoane.

1.20. O urnă conţine 20 bile albe şi 10 negre. Să se afle probabilitatea de a extrage deodată 7 bile albe şi 4 negre.

1.21. Avem 6 beţişoare de lungimile 2 , 4 , 6 , 8 , 10 şi 12 cm. Luăm la întâmplare 3 din ele. Să se afle probabilitatea, că din ele se poate forma un triunghi.

1.22. Se aruncă 5 zaruri. Să se calculeze probabilitatea de a obţine faţa cu 3 puncte cel puţin o dată.

1.23. La campionatul ţării participă 16 echipe de fotbal, care sunt împărţite în 2 grupe egale. Să se afle probabilitatea, că două dintre cele mai bune echipe vor nimeri în grupe diferite.

1.24. Într-o ladă se află 200 de mere, printre care 25 sunt stricate. Să se calculeze probabilitatea că printre cele 10 mere luate din ladă vor fi şi mere stricate.

1.25. În liftul unei case cu 9 etaje la primul etaj s-au urcat 5 persoane. Fiecare din ei poate coborî la orice etaj, începând cu al doilea. Să se afle probabilităţile evenimentelor:

A – toţi pasagerii vor coborî la acelaşi etaj;

B – toţi pasagerii vor coborî la etajul 3;

C – toţi pasagerii vor ieşi din lift la etaje diferite;

1.26. Pe o poliţă se află 10 cărţi. Cinci cărţi costă câte 40 de lei fiecare, 3 cărţi sunt de câte 10 lei, iar 2 cărţi au preţul de câte 30 de lei. Să se afle probabilitatea că 2 cărţi luate la întâmplare costă 50 de lei.

1.27. Numerele 2, 4, 7, 8, 12 şi 14 sunt scrise pe 6 cartonaşe identice. Se iau la întâmplare două cartonaşe, care se aranjează în forma unei fracţii ordinare. Să se calculeze probabilitatea că fracţia va putea fi simplificată.

1.28. Într-un lot de 15 bilete 4 sunt câştigătoare. Să se afle probabilitatea că printre 6 bilete luate la întâmplare 2 vor fi câştigătoare.

1.29. Să se afle probabilitatea că ecuaţia $x^2 + px + q = o$, unde $|p|, |q| \leq 1$ va avea rădăcinile reale.

1.30. Catetele unui triunghi dreptunghic sunt egale cu 3cm. şi spectiv cu 4cm. Înscriem şi circumscriem cite un cerc acestui triunghi. De calculat probabilitatea, că un punct arbitrar plasat în cercul circumscris va nimeri în cercul înscris triunghiului.

§2. Adunarea şi înmulţirea probabilităţilor

În paragraful precedent am calculat probabilităţile clasice, geometrice şi statistice. Din nefericire, aceste probabilităţi nu sunt lipsite de neajunsuri. De aceea e nevoie de probabilităţi mai generale, cum este, de exemplu, **probabilitatea axiomatică**.

Pe spaţiul evenimentelor elementare Ω se construieşte o clasă de evenimente, închisă faţă de operaţiile „$\cap$" , „$\cup$" şi „$\setminus$" , care formează aşa numitul **câmp de evenimente**.

Definiţia 2.1. Diferenţa evenimentelor $A \setminus B$ este un eveniment a cărui realizare înseamnă realizarea lui A şi nerealizarea lui B.

Definiţia 2.2. O mulţime nevidă K de evenimente, se numeşte câmp, dacă:

1. Pentru orice $A \in K$ avem $\overline{A} \in K$.
2. Oricare ar fi $A, B \in K$ atunci $A \cup B \in K$.

Uşor putem arăta, că Ω şi $\varnothing$ aparţin lui K. La fel $A \cap B \in K$, $A \setminus B \in K$ şi $B \setminus A \in K$. Într – adevăr: $\Omega = A \cup \overline{A} \in K$; $\varnothing = \overline{\Omega} \in K$;

$A \cap B = \overline{(\overline{A} \cup \overline{B})} \in K$; $A \setminus B = A \cap \overline{B} \in K$; $B \setminus A = B \cap \overline{A} \in K$;

În definiţia axiomatică probabilitatea este privită ca funcţie de mulţime, definită pe K cu valori din intervalul $[0; 1]$.

Pe scurt, probabilitatea $P(A)$ este o măsură normată definită pentru orice $A \in K$, ($P(A) \in [0; 1]$). Definiţia axiomatică a fost iniţiată de către A.N. Kolmogorov (1903 – 1987).

În axiomatica lui A.N. Kolmogorov evenimente sunt considerate doar cele din câmpul K.

Definiţia 2.3. Funcţia de mulţime P, definită pe câmpul K cu valori reale se numeşte **probabilitate**, dacă:

1. Pentru orice $A \in K$ avem $P(A) \geq 0$.

2. $$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \qquad (2.1)$$

pentru orice $A_i \in K$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$.

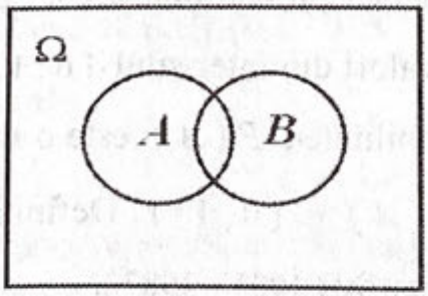
3. $$P(\Omega) = 1. \qquad (2.2)$$

Evident, probabilitatea axiomatică $P(A)$, pe lângă (2. 1) - (2. 2), posedă şi celelalte proprietăţi ale probabilităţii clasice. În plus, pot fi enunţate şi demonstrate unele proprietăţi interesante noi.

Fie A şi B două evenimente arbitrare. Atunci:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \qquad (2.3)$$

Relaţia (2. 3) devine evidentă, dacă ţinem cont de faptul că $P(A)$ şi $P(B)$ sunt măsurile normate ale mulţimilor A şi B (care reprezintă evenimentele A şi B) şi de diagrama acestor evenimente.



Exemplul 2.1. Să se afle probabilitatea că un număr întreg pozitiv, luat la întâmplare, se împarte la 2 sau la 3.

Rezolvare. Considerăm evenimentele: A –„numărul se împarte la 2", B – „numărul se împarte la 3", C – „numărul luat la întâmplare se împarte la 2 sau la 3".

Evident, $C = A \cup B$. Evenimentele A şi B fiind compatibile, vom aplica formula (2. 3). Avem, $P(A) = \frac{1}{2}$ deoarece fiecare al doilea număr întreg pozitiv se împarte la 2. $P(B) = \frac{1}{3}$ (fiecare al treilea număr se împarte la 3) $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$. Prin urmare,

$$P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{3+2-1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Răspuns. Probabilitatea că numărul întreg pozitiv, luat la întâmplare, se împarte la 2 sau la 3 este egală cu 2 / 3.

Dacă evenimentele A şi B sunt incompatibile, atunci $P(A \cap B) = P(\varnothing) = 0$ şi formula (2. 3) se reduce la (1.7), astfel (1.7) este un caz particular al formulei (2. 3).

Pentru trei evenimente arbitrare A, B şi C are loc formula (2. 4):

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C). \quad (2.4)$$

În general, dacă $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sunt evenimente arbitrare, atunci:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \ldots + (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right). \quad (2.5)$$

Dacă evenimentele A_i şi A_j ($i \neq j$) sunt incompatibile, atunci din (2. 5) rezultă (2. 6) :

$$P\left(\bigcup_{i=i}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i). \qquad (2.6)$$

Exemplul 2.2. Într-o ladă sunt 80 pachete cu ţigări. Printre ele 4 pachete au ţigări rupte. Să se afle probabilitatea, că o persoană care cumpără 4 pachete, să primească cel puţin două pachete cu ţigări rupte.

Rezolvare. Fie evenimentul A – „o persoană cumpără cel puţin două pachete cu ţigări rupte". A_1 – „persoana cumpără 2 pachete cu ţigări rupte", A_2 – „persoana cumpără 3 pachete cu ţigări rupte", A_3 – „persoana cumpără 4 pachete cu ţigări rupte".

Evident, $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ şi evenimentele A_1, A_2, A_3 sunt incompatibile câte două. Deci, $P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$. Calculăm $P(A_i)$, $i = 1, 2, 3$.

$$P(A_1) = \frac{C_4^2 \cdot C_{76}^2}{C_{80}^4}; \quad P(A_2) = \frac{C_4^3 \cdot C_{76}^1}{C_{80}^4}; \quad P(A_3) = \frac{C_4^4}{C_{80}^4}.$$

Definitiv,

$$P(A) = \frac{C_4^2 C_{76}^2 + C_4^3 C_{76}^1 + C_4^4}{C_{80}^4} = \frac{1}{C_{80}^4}(C_4^2 \cdot C_{76}^2 + C_4^3 \cdot C_{76}^1 + 1) \approx 0{,}01.$$

Răspuns: Probabilitatea că persoana va primi cel puţin 2 pachete cu ţigări rupte, este egală aproximativ cu 0,01.

La rezolvarea problemelor de calculul probabilităţilor un rol aparte îi revine noţiunii de **sistem complet de evenimente**.

Definiţia 2.4. Vom spune că evenimentele $A_1, A_2, \ldots, A_n$ formează un sistem complet dacă în rezultatul experimentului cel puţin unul din ele se produce neapărat.

Preferate sunt evenimentele $A_1, A_2, \ldots, A_n$ incompatibile două câte două şi care formează un sistem complet.

Exemplul 2.3. a) Se aruncă o monedă.

Evenimentele: A_1 – „cade stema" şi A_2 – „cade valoarea" formează un sistem complet de evenimente incompatibile.

b) Se aruncă un zar. Evenimentele $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ (A_i – „cade faţa cu i puncte") la fel formează un sistem complet de evenimente incompatibile.

Evenimentele incompatibile ale sistemului complet au proprietatea (2.7):

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1. \qquad (2.7)$$

Uneori se cere de aflat probabilitatea evenimentului A în condiţia că s-a produs deja un alt eveniment B. Astfel de probabilitate se numeşte **condiţionată**.

Definiţia 2.5. Probabilitatea evenimentului A, calculată în ipoteza că anterior s-a produs evenimentul B se numeşte **probabilitate condiţionată**. Se notează: $P(A/B)$.

Remarcă: În unele manuale, problemare se mai notează $P_B(A)$.

Exemplul 2.4. Într-o urnă sunt 4 bile albe şi 6 bile negre. Se extrag pe rând două bile fără returnare. Să se afle probabilitatea de a extrage a doua oară o bilă albă (evenimentul A), în condiţia că prima bilă extrasă este neagră (evenimentul B).

Rezolvare. Se cere de calculat $P(A/B)$. După prima extragere în urnă au mai rămas 9 bile. Dacă admitem că prima bilă extrasă a fost

neagră (evenimentul B) atunci din cele 9 bile albe rămase vor fi tot 4, deci, $P(A/B) = \frac{4}{9}$.

Are loc formula:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \tag{2.8}$$

care poate fi demonstrată pentru probabilitatea clasică, iar pentru cea axiomatică se ia ca definiţie a probabilităţii condiţionate. Din (2.8) rezultă:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B). \tag{2.9}$$

Această formulă poate fi scrisă şi astfel:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A). \tag{2.10}$$

Formulele (2.9) şi (2.10) formează conţinutul teoremei de **înmulţire a probabilităţilor.**

Teorema 2.1. Probabilitatea produsului a două evenimente este egală cu produsul dintre probabilitatea unuia din ele şi probabilitatea condiţionată a celuilalt eveniment.

Exemplul 2.5. La o uzină 97% din piesele produse sunt standard. Printre acestea 80% sunt de calitate superioară. Să se afle probabilitatea că o piesă luată la întâmplare este de calitate superioară.

Rezolvare. Considerăm evenimentele A – „piesa este standard", B – „piesa este de calitate superioară".

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = 0{,}97 \cdot 0{,}8 \approx 0{,}78.$$

Răspuns. Probabilitatea că o piesă luată la întâmplare este de calitate superioară, este egală cu 0,78.

Din cele expuse mai sus rezultă că pentru 2 evenimente arbitrare A_1 şi A_2 are loc formula de înmulţire.

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1). \qquad (2.11)$$

Relaţia (2.11) poate fi generalizată pentru orice număr de evenimente arbitrare $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot P(A_3 / A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n / \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i). \qquad (2.12)$$

Pentru a demonstra formula (2. 12) vom reieşi din (2. 11). Avem, deci:

$$P(A_1) = P(A_1). \qquad (2.13)$$

$$P(A_2 / A_1) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)}. \qquad (2.14)$$

$$P(A_3 / A_1 \cap A_2) = \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)}. \qquad (2.15)$$

$$P(A_n / \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) = \frac{P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)}{P(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i)}. \qquad (2.16)$$

Înmulţim părţile stângi şi cele drepte ale egalităţilor (2. 13) – (2. 16) şi venim la formula de înmulţire a probabilităţilor pentru n evenimente arbitrare $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (formula (2. 12)).

Exemplul 2.6. Pentru a obţine nota de promovare la examen un student trebuie să răspundă la 3 întrebări. Programa conţine 30 de

întrebări, dintre care studentul a pregătit doar 25. Să se afle probabilitatea că studentul va promova examenul.

Rezolvare. Considerăm evenimentele:

A – „studentul va promova examenul".

A_1 – „studentul va răspunde la prima întrebare".

A_2 – „studentul va răspunde la a doua întrebare".

A_3 – „studentul va răspunde la a treia întrebare".

Prin urmare,

$$P(A) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot P(A_3 / A_1 \cap A_2) =$$

$$= \frac{25}{30} \cdot \frac{24}{29} \cdot \frac{23}{28} = \frac{115}{203} \approx 0{,}57.$$

Răspuns. Probabilitatea că studentul va susţine examenul pe notă de promovare este egală cu 0,57.

Definiţia 2.6. Evenimentul A se numeşte **independent de evenimentul** B, dacă:

$$P(A/B) = P(A). \tag{2. 17}$$

Teorema 2.2. Dacă evenimentul A este independent de B atunci şi evenimentul B este independent de A.

Demonstraţie. Admitem că A este independent de B, deci, are loc (2. 17). În virtutea relaţiilor (2. 9) şi (2. 10) putem scrie:

$$P(B) \cdot P(A/B) = P(A) \cdot P(B/A). \tag{2. 18}$$

Folosind (2.17) din (2.18) deducem:

$$P(B) \cdot P(A) = P(A) \cdot P(B/A). \tag{2.19}$$

Împărţind ambele părţi ale egalităţii (2. 19) la $P(A) > 0$ venim la relaţia $P(B) = P(B/A)$, ceea ce înseamnă că evenimentul B nu depinde de evenimentul A.

Remarcă. Teorema 2.2 ne arată că noţiunea de independentă a evenimentelor este reciprocă. Din această cauză se spune de obicei: evenimentele A şi B sunt independente (sau dependente, în funcţie de situaţia concretă).

Astfel, dacă evenimentele A şi B sunt independente, atunci probabilitatea produsului lor este egală cu produsul probabilităţilor.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \qquad (2.20)$$

Se poate arăta (în cazul probabilităţilor clasice) că relaţia (2. 20) implică independenta evenimentelor A şi B.

În general, (2.20) poate servi ca definiţie a independenţei evenimentelor.

Definiţia 2.7. Evenimentele A şi B se numesc **independente** dacă are loc (2. 20). În caz contrar evenimentele se numesc **dependente.**

Remarcă. Dacă evenimentele A şi B sunt independente, atunci sunt independente evenimentele: A şi $\overline{B}$, $\overline{A}$ şi B, $\overline{A}$ şi $\overline{B}$.

Să arătăm că independenţa evenimentelor A şi B implică independenţa lui A şi $\overline{B}$. Avem: $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$, unde $A \cap \overline{B}$ şi $A \cap B$ sunt incompatibile. De aceea,

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) = P(A) \cdot P(B) + P(A \cap \overline{B}), \qquad (2.21)$$

iar din (2. 21) rezultă,

$$P(A) \cdot (1 - P(B)) = P(A \cap \overline{B})$$

sau

$$P(A) \cdot P(\overline{B}) = P(A \cap \overline{B}),$$

ceea ce înseamnă că evenimentele A şi $\overline{B}$ sunt la fel independente. În mod similar se demonstrează şi independenţa perechilor $\overline{A}$ şi B, $\overline{A}$ şi $\overline{B}$.

Remarcă. Noţiunea de independenţă facilitează de multe ori rezolvarea problemelor de calcul al probabilităţilor.

Sunt sau nu independente evenimentele rezultă din logica problemei concrete. De exemplu, dacă doi trăgători trag într-o ţintă, atunci, evident A– „primul nimereşte ţinta" şi B– „al doilea nimereşte ţinta" sunt evenimente independente.

Fie date evenimentele $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Definiţia 2.8. Evenimentele $A_1, A_2, \ldots, A_n$ se numesc **independente două câte două**, dacă A_i şi A_j sunt independente pentru toţi $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $i \neq j$.

Definiţia 2.9. Evenimentele $A_1, A_2, \ldots, A_n$ se numesc **independente în totalitate**, dacă A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ şi orice alt grup din ele sunt independente.

Să accentuăm că noţiunea de independenţă în totalitate impune condiţii mai dure evenimentelor decât cea de independentă câte două: evenimentele $A_1, A_2, \ldots, A_n$ independente câte două nu sunt neapărat şi independente în totalitate. De exemplu, dacă evenimentele A_1, A_2 şi A_3 sunt independente în totalitate, atunci, conform definiţiei, independete vor fi perechile: A_1 şi A_2; A_1 şi A_3; A_2 şi A_3; $A_1 \cap A_2$ şi A_3; $A_1 \cap A_3$ şi A_2; $A_2 \cap A_3$ şi A_1. Ilustrăm această situaţie cu următorul exemplu propus de matematicianul S. N. Bernştein.

Exemplul 2.7. Intr-o urnă se află 4 bile. Una roşie (evenimentul A), una albastră (evenimentul B), una neagră (evenimentul C) şi una colorată

în toate trei culori, deci in roşu, albastru şi negru (evenimentul $A \cap B \cap C$). Evident, $P(A) = P(B) = P(C) = 0.5$. Uşor de verificat că evenimentele A, B şi C sunt independente două cîte două . Întradevăr, fie că s-a produs, de exemplu, evenimentul A. Se va schimba oare în acest caz $P(B)$? Observăm că nu, deoarece dintre cele două bile ce sunt vopsite în culoarea roşie una din ele este vopsită şi în culoarea albastră şi deci $P(B)$ nu se schimbă după producerea evenimentului A: $P(B/A)= =P(B)=0,5$. Astfel evenimentele A şi B sunt independente în pereche. La fel demonstrăm independenţa perechilor A şi C; B şi C.

Pe de altă parte aceste trei evenimente A, B şi C nu sunt independete în totalitate. Întradevăr, conform definiţiei verificăm independeţa evenimentelor $A \cap B$ şi C : fie evenimentul $A \cap B$ nu s-a produs, atunci $P(C)=0,5$; fie evenimentul $A \cap B$ s-a produs deja, deci am extras bila colorată în rosu şi albastru. Atunci, în mod obligatoriu, se produce şi evenimentul C, deoarece avem extrasă bila colorată în toate cele trei culori- rosu, albasru şi negru. Astfel, $P(C/A \cap B)=1$. Aşadar, evenimentele $A \cap B$ şi C sunt dependente şi, deci, evenimentele A, B şi C nu sunt independete în totalitate.

Pentru un sistem de evenimente A_1 , A_2 , ... , A_n independente în totalitate are loc formula (2.22) de înmulţire a probabilităţilor:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i). \qquad (2.22)$$

Remarcă. Dacă evenimentele A_1 , A_2 , ... , A_n sunt independente în totalitate atunci la fel sunt şi cele opuse $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, ... , $\overline{A}_n$.

S-a menţionat deja că trecerea la evenimentul opus $\overline{A}$ deseori facilitează calculul probabilităţilor. Un exemplu elocvent este următorul.

Probabilitatea producerii a cel puţin unui eveniment dintr-un grup de evenimente independente în totalitate.

Fie că evenimentele $A_1, A_2, \dots, A_n$ sunt independente în totalitate şi se cunosc probabilităţile $P(A_1), P(A_2), \dots, P(A_n)$. Se cere de aflat probabilitatea producerii a cel puţin unuia din evenimentele $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Considerăm evenimentul A – „se produce cel puţin unul din evenimentele $A_1, A_2, \dots, A_n$".

Aşadar, $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, evenimentele A_i şi A_j, $i \neq j$ fiind în general compatibile. A calcula $P(A) = P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)$, folosind formula (2. 5), este destul de greu. Situaţia se schimbă în bine dacă trecem la evenimentul $\overline{A}$ – „nu se va produce nici unul din evenimentele $A_1, A_2, \dots, A_n$".

Deci, $\overline{A} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_i$. Deoarece $A_1, A_2, \dots, A_n$ s-au considerat independente în totalitate, la fel independente în totalitate vor fi şi $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \dots, \overline{A}_n$, iar atunci:

$$P(\overline{A}) = \prod_{i=1}^{n} P(\overline{A}_i).$$

Însă,

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}).$$

Deci:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(\overline{A}_i), \qquad (2.\ 23)$$

iar $P(\overline{A}_i) = 1 - P(A_i)$, de aceea din (2. 23) rezultă

$$P(A) = 1 - \prod_{i=1}^{n}[1 - P(A_i)]. \qquad (2.24)$$

Probabilităţile $P(A_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ fiind date, calculul probabilităţii evenimentului A cu formula (2. 24) devine un exerciţiu simplu de aritmetică.

Din cele menţionate mai sus putem formula

Teorema 2.3. Fie date n evenimente independente în totalitate $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pentru care se cunosc probabilităţile lor:

$$P(A_1) = p_1,\ P(A_2) = p_2, \ldots,\ P(A_n) = p_n.$$

Probabilitatea producerii a cel puţin unui eveniment din grupul A_1, $A_2, \ldots, A_n$ independente în totalitate (evenimentul A), este egală cu diferenţa dintre 1 şi produsul probabilităţilor evenimentelor opuse $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}, \ldots, \overline{A_n}$. Deci,

$$P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_n, \qquad (2.25)$$

unde

$$P(\overline{A_1}) = 1 - p_1 = q_1,\ P(\overline{A_2}) = 1 - p_2 = q_2, \ldots,\ P(\overline{A_n}) = 1 - p_n = q_n.$$

Remarcă. Dacă evenimentele $A_1, A_2, \ldots, A_n$ au aceiaşi probabilitate p, atunci din (2.25) urmează formula

$$P(A) = 1 - q^n.$$

Probabilitatea apariţiei doar a unui eveniment dintr-un grup de evenimente independente în totalitate.

În anumite situaţii apare necesitatea de a calcula probabilitatea apariţiei unui singur eveniment dintr-un grup anumit de evenimente independente.

Exemplul 2.8. Fie trei eveniente independente in totalitate A_1, A_2 şi A_3, pentru care $P(A_1)=p_1$, $P(A_2)=p_2$ şi $P(A_3)=p_3$. De calculat probabilitatea apariţiei doar a unui singur eveniment din toate trei.

Rezolvare. Apariţia doar a evenimentului A_1 este echivalentă cu apariţia evenimentului $A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}$; numai a evenimentului A_2 este echivalentă cu apariţia evenimentului $A_2 \cap \overline{A_1} \cap \overline{A_3}$; numai a evenimentului A_3 este echivalentă cu apariţia evenimentului $A_3 \cap \overline{A_1} \cap \overline{A_2}$. Evenimentele $A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}$, $A_2 \cap \overline{A_1} \cap \overline{A_3}$ şi $A_3 \cap \overline{A_1} \cap \overline{A_2}$ sunt incompatibile, deci

$$P(A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} + A_2 \cap \overline{A_1} \cap \overline{A_3} + A_3 \cap \overline{A_1} \cap \overline{A_2}) =$$

$$= P(A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) + P(A_2 \cap \overline{A_1} \cap \overline{A_3}) + P(A_3 \cap \overline{A_1} \cap \overline{A_2}) =$$

$$= P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) + P(A_2) \cdot P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_3}) + P(A_3) \cdot P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) =$$

$$= p_1 \cdot q_2 \cdot q_3 + p_2 \cdot q_1 \cdot q_3 + p_3 \cdot q_1 \cdot q_2.$$

Aici $q_1 = P(\overline{A_1}) = 1 - p_1$, $q_2 = P(\overline{A_2}) = 1 - p_2$ şi $q_3 = P(\overline{A_3}) = 1 - p_3$.

Exemplul 2.9. Trei trăgători trag asupra unei ţinte câte o dată. Probabilităţile de a nimeri ţinta sunt respectiv egale cu 0,7 ; 0,8 şi 0,9 pentru fiecare. Să se calculeze probabilităţile evenimentelor:

A – „vor nimeri ţinta toţi trăgătorii".

B – „va nimeri ţinta doar un trăgător".

C – „va nimeri ţinta cel puţin unul din trăgători”.

Rezolvare. Considerăm evenimentele:

A_1 – „primul trăgător nimereşte ţinta”.

A_2 – „al doilea trăgător nimereşte ţinta”.

A_3 – „al treilea trăgător nimereşte ţinta”.

$$P(A_1) = 0{,}7;\ P(A_2) = 0{,}8;\ P(A_3) = 0{,}9.\ A = A_1 \cap A_2 \cap A_3.$$

Evenimentele A_1, A_2 şi A_3 fiind independente, vom obţine:

$$P(A) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) =$$
$$= 0{,}7 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}504.$$

Pentru evenimentul B vom avea:

$$B = (A_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3) \cup (\overline{A}_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3) \cup (\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3). \quad (2.25)$$

Termenii sumei (2. 25) sunt evenimente incompatibile două câte două, iar evenimentele din paranteze sunt independente, de aceea:

$$P(B) = P(A_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3) + P(\overline{A}_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3) + P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3) =$$

$$= P(A_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1) \cdot P(A_2) \cdot P(\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(A_3) =$$

$$= 0{,}7 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}3 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}1 + 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}9 = 0{,}014 + 0{,}024 + 0{,}054 = 0{,}092.$$

Punem în evidenţă evenimentul opus lui C: $\overline{C}$ – „nici unul din trăgători nu nimereşte ţinta”. $P(\overline{C}) = P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(\overline{A}_3) =$ $= 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}006$. Astfel $P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - 0{,}006 = 0{,}994$.

Răspuns. $P(A) = 0{,}504$; $P(B) = 0{,}092$; $P(C) = 0{,}994$.

Exemplul 2.10. Pentru un vânător probabilitatea de a nimeri în ţintă la o tragere este egală cu 0,4. De câte ori trebuie să se tragă pentru a se putea afirma cu o probabilitate ce depăşeşte 0,9, că ţinta a fost atinsă cel puţin o dată?

Rezolvare. Fie, evenimentul A – „vânătorul a nimerit ţinta cel puţin o dată". Atunci $\overline{A}$ – „vânătorul nu nimereşte ţinta nici o dată".

Notăm prin n – numărul necesar de trageri

$$P(\overline{A}) = (0,6)^n \text{ şi } P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - (0,6)^n.$$

Din condiţiile problemei rezultă relaţia $1 - (0,6)^n \geq 0,9$ sau $0,1 \geq (0,6)^n$. Vom logaritma în baza 10 ambele părţi ale acestei inecuaţii. Obţinem $n \lg 0,6 \leq \lg 0,1$. Împărţim prin $\lg 0,6 < 0$. ambele părţi şi venim la inecuaţia $n \geq \frac{\lg 0,1}{\lg 0,6} = 4,5$, de unde rezultă $n \geq 5$ (n este număr întreg).

Răspuns. Vânătorul trebuie să tragă în ţintă cel puţin de 5 ori.

Exemplul 2.11. Într-un magazin intră două persoane pentru a face cumpărături. Probabilitatea că prima persoană face cumpărături este 0,7, iar pentru a doua probabilitatea este egală cu 0,8. Să se calculeze probabilităţile evenimentelor:

A – „cel puţin o persoană va face cumpărături".

B – „cel mult o persoană va face cumpărături".

Rezolvare. Fie, A_1 – „prima persoană va face cumpărături";

A_2 – „a doua persoană va face cumpărături".

Atunci, $A = A_1 \cup A_2$, evenimentele A_1 şi A_2 sunt compatibile şi independente, de aceea:

$$P(A) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_1) =$$

$$= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1) \cdot P(A_2).$$

Deoarece $P(A_1) = 0{,}7$, iar $P(A_2) = 0{,}8$ vom obţine, $P(A) = 0{,}7 + 0{,}8 - 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 1{,}5 - 0{,}56 = 0{,}94. \Rightarrow P(A) = 0{,}94.$

Acelaşi rezultat se obţine şi pe altă cale: $\overline{A}$ – „nici o persoană nu va face cumpărături".

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2) = 1 - P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) =$$

$$= 1 - 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 1 - 0{,}06 = 0{,}94. \quad \Rightarrow \quad P(A) = 0{,}94.$$

Evemimentul B este $B = \overline{A_1 \cap A_2}$. Atunci

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - P(A_1 \cap A_2) = 1 - P(A_1) \cdot P(A_2) =$$

$$= 1 - 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 1 - 0{,}56 = 0{,}44. \quad \Rightarrow \quad P(B) = 0{,}44.$$

Acelaşi răspuns se obţine dacă vom folosi formulele lui De Morgan (1.1): $B = \overline{A_1 \cap A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$. Evenimentele $\overline{A_1}$ şi $\overline{A_2}$ fiind şi ele compatibile şi independente, obţinem

$$P(B) = P(\overline{A_1} \cup \overline{A_2}) = P(\overline{A_1}) + P(\overline{A_2}) - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) =$$

$$= 0{,}3 + 0{,}2 - 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}44. \quad \Rightarrow \quad P(B) = 0{,}44.$$

Răspuns. $P(A) = 0{,}94$; $P(B) = 0{,}44$.

Probleme

2.1. Pe un stadion sunt instalate trei ecrane. Probabilităţile că la un moment dat funcţionează ecranele sunt respectiv egale cu 0,9 ; 0,8 şi 0,7. Să se afle probabilităţile evenimentelor:

A – „funcţionează două ecrane".

B – „funcţionează cel mult un ecran".

C – „funcţionează trei ecrane".

2.2. Pentru asamblarea unui dispozitiv sunt folosite piese de la trei strunguri. Primul strung produce 20% din piese, al doilea – 30% , iar al treilea – 50% . Să se afle probabilităţile că din trei piese luate la întâmplare:

a) toate vor fi produse la diferite strunguri;

b) toate vor fi produse la strungul al treilea;

c) două piese vor fi produse la strungul al doilea.

2.3. Probabilitatea că un student va promova primul examen este egală cu 0,9, al doilea – 0,7, şi al treilea – 0,6 . Să se calculeze probabilităţile evenimentelor:

A – studentul va promova două examene;

B – studentul va promova nu mai puţin de două examene;

C – studentul va promova cel mult două examene.

2.4. Un trăgător trage asupra unei ţinte până la prima nimerire. Probabilitatea de a nimeri la o tragere este de 0,8. Să se afle probabilitatea că se vor face patru trageri.

2.5. Şase vânători au văzut o vulpe şi au tras în ea simultan. Admitem că fiecare din ei nimereşte şi ucide vulpea cu probabilitatea $1/3$. Să se calculeze probabilitatea că vulpea va fi vânată.

2.6. Cuvântul „vector" este format din litere scrise pe cartonaşe. Ele se amestecă, apoi se iau la întâmplare patru pe rând. Să se afle probabilitatea că va fi format cuvântul „voce".

2.7. Pentru a face practica de producere la 30 de studenţi li s-au oferit 15 locuri în Chişinău, 8 locuri în Orhei şi 7 în Bălţi. Să se afle probabilitatea că doi studenţi oarecare vor face practica în acelaşi oraş.

2.8. La un depozit sunt stocate cutii cu încălţăminte: 40 din ele conţin încălţăminte de culoare neagră, în 25 cutii se află încălţăminte cafenie, în 23 – albă şi 12 cutii conţin încălţăminte roşie. Exterior cutiile nu se deosebesc. Să se afle probabilitatea că o cutie, luată la întâmplare va fi cu încălţăminte roşie sau albă.

2.9. Se aruncă un zar. Să se afle probabilităţile evenimentelor:

A – La o singură aruncare a zarului va cădea faţa cu un număr de puncte par sau divizibil la trei.

B – La trei aruncări ale zarului o singură dată va cădea un număr de puncte par sau divizibil la trei.

C – La patru aruncări a zarului cel puţin o dată va cădea un număr de puncte par sau divizibil la trei.

2.10. La întâmplare se formează un număr din două cifre. Să se afle probabilităţile evenimentelor:

A – numărul format se împarte la 2 sau la 5.

B – numărul se împarte la 2 şi la 5.

2.11. Treizeci de cartonaşe cu numere de la 11 până la 40 scrise pe ele se introduc într-o cutie şi se amestecă bine. Să se afle probabilitatea că un cartonaş extras la întâmplare va conţine numărul divizibil la 2 sau la 3.

2.12. Se aruncă trei zaruri. Să se afle probabilitatea evenimentului „cel puţin pe unul din ele vom avea 3 puncte".

2.13. Profesorul a pregătit pentru examenul de matematică 20 de bilete. Printre ele 5 sunt de algebră, 5 de geometrie şi 10 de teoria probabilităţilor. Un student ia succesiv trei bilete, fără a returna biletul luat. Să se afle probabilităţile evenimentelor:

A – s-au luat 3 bilete de algebră;

B – printre cele luate este un singur bilet de geometrie;

C – printre biletele luate se află cel puţin un bilet de teoria probabilităţilor.

2.14. Doi trăgători trag asupra unei ţinte câte o dată. Probabilitatea de a nimeri pentru primul trăgător este egală cu 0,8 , iar pentru al doilea – 0,6. Să se afle probabilităţile că în ţintă se va nimeri:

a) doar o dată;

b) cel puţin o dată.

2.15. Un tehnician deserveşte trei strunguri. Probabilitatea că pe parcursul unui schimb primul strung va avea nevoie de intervenţia tehnicianului este egală cu 0,7, pentru al doilea strung

probabilitatea este egală cu 0,75 , pentru al treilea – 0,8 . Să se afle probabilitatea că pe parcursul unui schimb vor avea nevoie de intervenţie două strunguri oarecare.

2.16. Într-o urnă se află 8 bile albe şi 12 bile negre. La întâmplare se extrag succesiv câte o bilă până la apariţia bilei albe. Să se calculeze probabilităţile evenimentelor:

A – a fost nevoie de 4 extrageri, dacă bila extrasă de fiecare dată e returnată în urmă ;

B – a fost nevoie de 4 extrageri atunci când bila extrasă nu este returnată în urnă ;

2.17. Despre producerea unei avarii semnalizează două aparate – automat. Probabilitatea că va reacţiona la avarie primul semnalizator este de 0,95 , iar pentru cel de al doilea – 0,9. Să se afle probabilităţile evenimentelor:

A – semnalul va sosi măcar de la un aparat de semnalizare;

B – semnalul va proveni doar de la un semnalizator;

2.18. Probabilitatea de a câştiga pe un bilet loto este egală cu 1 / 7. O persoană cumpără 5 bilete. Să se afle probabilităţile evenimentelor:

A – câştigătoare vor fi toate biletele;

B – nici un bilet nu va fi câştigător;

C – cel puţin un bilet va fi câştigător;

2.19. Biletul de examinare conţine 3 întrebări. Probabilităţile că studentul cunoaşte răspunsurile la prima şi a doua întrebare sunt egale cu 0,9

fiecare, pentru a treia întrebare această probabilitate este egală c 0,8 . Să se afle probabilitatea că studentul va promova examenu dacă pentru aceasta este nevoie ca el să cunoască răspunsurile:

a) la toate întrebările din bilet;

b) cel puţin la două întrebări ale biletului.

2.20. În biletele de examinare sunt introduse câte 2 întrebă teoretice şi câte o problemă. S-au întocmit 28 de bilete. Studentul pregătit 50 de întrebări teoretice şi 22 de probleme. Să se afl probabilitatea că studentul va răspunde la un bilet luat l întâmplare.

2.21. Într-o partidă de 60 de piese, 4 sunt cu defecte. Toată partida est împărţită în 4 grupuri egale. Să se afle probabilitatea că în fiecar grup va nimeri câte o piesă cu defect.

2.22. De la un magazin pleacă un camion spre 4 depozite, unde sun stocate mărfuri. Probabilitatea că marfa dorită se află la prim depozit este egală cu 0,9 , pentru depozitul Nr. 2 probabilitatea est de 0,95. La depozitul Nr. 3 marfa e găsită cu o probabilitate egal cu 0,8 , iar la al patrulea – 0,6 . Să se afle probabilitatea că doar la u depozit nu se va găsi marfa dorită.

2.23. Trei echipe A_1, A_2, şi A_3 din liga A fac competiţii sportive cu alt trei echipe B_1, B_2, şi B_3 din liga B. Probabilitatea că echipele di liga A vor câştiga meciurile cu echipele din liga B sunt următoarele

A_1 câştigă la B_1 cu $p_1 = 0,8$;

A_2 câştigă la B_2 cu $p_2 = 0,4$;

A_3 câştigă la B_3 cu $p_3 = 0{,}4$;

Pentru câştigul unei ligi este necesar să se câştige nu mai puţin de două meciuri. Să se afle probabilitatea că va câştiga liga A.

2.24. Se verifică calitatea unui lot de televizoare. Probabilitatea că un televizor nu va corespunde standardului este egală cu 0,1. Să afle probabilităţile evenimentelor:

A – din trei televizoare verificate la întâmplare doar unul nu va corespunde standardului.

B – nestandard va fi doar al patrulea televizor, supus verificării calităţii.

2.25. Într-un studiou de televiziune sunt trei camere video. Probabilitatea că la un moment dat este în funcţie o cameră oarecare este egală cu 0,6 . Să se afle probabilitatea că la un moment dat funcţionează măcar o cameră video.

2.26. Se aruncă de 3 ori două zaruri. Să se afle probabilitatea evenimentului A – „se obţin 6 puncte la prima aruncare, 8 puncte la a doua şi 7 puncte la aruncarea a treia".

2.27. Pentru examen sunt pregătite 40 de întrebări, incluse câte 2 în 20 de bilete. Pentru a susţine examenul este suficient ca studentul să răspundă măcar la o întrebare din bilet. Să se afle probabilitatea că examenul va fi susţinut, dacă studentul nu cunoaşte răspunsurile la 8 întrebări.

§3. Formula probabilităţii totale. Formula lui Bayes

Fie date evenimentele A_1, A_2, ..., A_n, care formează un sistem complet, adică

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega \tag{3.1}$$

şi sunt incompatibile câte două, deci

$$A_i \cap A_j = \varnothing, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.2}$$

Considerăm evenimentul A care se produce doar însoţit de unul din evenimentele A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. În continuare avem:

$$A = A \cap \Omega = A \cap (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) =$$

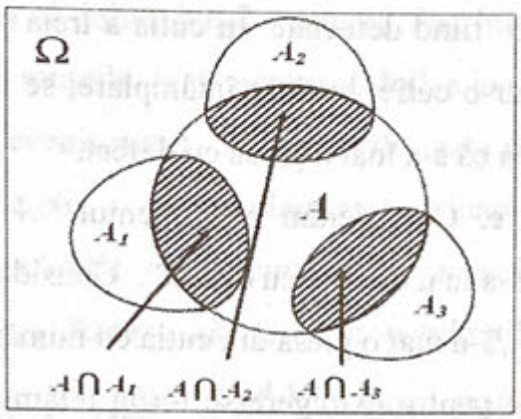
$$= (A \cap A_1) \cup (A \cap A_2) \cup \ldots \cup (A \cap A_n). \tag{3.3}$$

Prin urmare, din (3. 3) primim:

$$P(A) = P((A \cap A_1) \cup (A \cap A_2) \cup \ldots \cup (A \cap A_n)). \tag{3.4}$$

Evenimentele A_1, A_2, ..., A_n sunt incompatibile câte două. La fel rămân şi evenimentele $A \cap A_1$, $A \cap A_2$, ..., $A \cap A_n$, de aceea (3. 4) poate fi copiată astfel:

$$P(A) = P(A \cap A_1) + P(A \cap A_2) + \ldots + P(A \cap A_n). \tag{3.5}$$



Vom aplica la fiecare termen din partea dreaptă a egalității (3. 5) formula de înmulțire a probabilităților și vom veni la următoarea relație:

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A/A_1) + P(A_2) \cdot P(A/A_2) + \ldots + P(A_n) \cdot P(A/A_n), \quad (3.6)$$

care poartă numele de **formula probabilității totale.**

Această formulă poate fi scrisă mai compact:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(A/A_i). \quad (3.7)$$

Remarcă. Evenimentele $A_1, A_2, \ldots, A_n$, de obicei, se numesc **ipoteze.** Rezolvarea problemelor prin aplicarea formulei (3.7) începe cu introducerea acestor ipoteze. Succesul depinde în mare parte de aceea cât de reușit au fost introduse ipotezele: este necesar să fie verificate relațiile (3.1) și (3. 2).

Formula (3.7) (sau (3.6)) acumulează probabilitățile de la toate ipotezele, obținându-se **probabilitatea totală.**

Exemplul 3.1. Trei cutii identice conțin piese. În prima cutie sunt 10 piese, dintre care 3 sunt cu defecte. A doua cutie conține 15 piese,

printre ele 5 fiind defectate. În cutia a treia se află 20 piese, defectate fiind 4. Dintr-o cutie, luată la întâmplare, se ia o piesă. Să se calculeze probabilitatea că s-a luat o piesă cu defect.

Rezolvare. Considerăm evenimentul A – „dintr-o cutie, luată la întâmplare, s-a luat o piesă cu defect". Considerăm evenimentele ipoteze:

A_i – „S-a luat o piesă din cutia cu numărul i, $i = 1, 2, 3$".

Deoarece pentru extragere se i-a la întâmplare una din cele 3 cutii identice, putem considera:

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}.$$

Calculăm probabilităţile condiţionate cu formula clasică:

$$P(A/A_1) = \frac{3}{10}; P(A/A_2) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}; \; P(A/A_3) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}.$$

Atunci, aplicând formula (3. 6) pentru $n = 3$, obţinem:

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A/A_1) + P(A_2) \cdot P(A/A_2) + P(A_3) \cdot P(A/A_3) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{10} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{9 + 10 + 6}{30} = \frac{1}{3} \cdot \frac{25}{30} = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{18} \approx 0{,}28.$$

Răspuns. Probabilitatea de a lua o piesă cu defect dintr-o cutie, luată la întâmplare, este egală cu 0,28.

Exemplul 3.2. La un club sportiv sunt 15 mingi, dintre care 9 sunt noi. Pentru primul joc au fost luate la întâmplare 3 mingi, care ulterior au

fost returnate. Pentru al doilea joc din nou au fost luate 3 mingi. Să se afle probabilitatea că mingile, luate pentru al doilea joc, vor fi toate noi.

Rezolvare. Fie, evenimentul A – „mingile luate pentru al doilea joc sunt toate noi". Nu se ştie ce fel de mingi au fost luate pentru primul joc, de aceea vom face ipotezele: A_i – „sunt luate i mingi noi pentru primul joc", $i = 0, 1, 2, 3$. Pentru calcularea probabilităţilor ipotezelor vom aplica formula clasică $P(A_i) = \frac{m(A_i)}{n}$. Aşadar, obţinem:

$$P(A_0) = \frac{C_6^3}{C_{15}^3}; \quad P(A_1) = \frac{C_9^1 \cdot C_6^2}{C_{15}^3}; \quad P(A_2) = \frac{C_9^2 \cdot C_6^1}{C_{15}^3}; \quad P(A_3) = \frac{C_9^3}{C_{15}^3};$$

$$P(A/A_0) = \frac{C_9^3}{C_{15}^3}; P(A/A_1) = \frac{C_8^3}{C_{15}^3}; P(A/A_2) = \frac{C_7^3}{C_{15}^3}; \quad P(A/A_3) = \frac{C_6^3}{C_{15}^3};$$

Pentru a calcula $P(A)$ vom folosi formula probabilităţii totale (3. 6):

$$P(A) = P(A_0) \cdot P(A/A_0) + P(A_1) \cdot P(A/A_1) + P(A_2) \cdot P(A/A_2) + P(A_3) \times$$

$$\times P(A/A_3) = \frac{C_6^3}{C_{15}^3} \cdot \frac{C_9^3}{C_{15}^3} + \frac{C_9^1 \cdot C_6^2}{C_{15}^3} \cdot \frac{C_8^3}{C_{15}^3} + \frac{C_9^2 \cdot C_6^1}{C_{15}^3} \cdot \frac{C_7^3}{C_{15}^3} + \frac{C_9^3}{C_{15}^3} \cdot \frac{C_6^3}{C_{15}^3} = 0{,}089.$$

Răspuns. Probabilitatea că pentru al doilea joc au fost luate 3 mingi noi este egală cu 0,089.

Exemplul 3.3. De pe un submarin se lansează asupra unui distrugător 4 torpile. Probabilitatea că o torpilă va lovi distrugătorul este egală cu 0,3. Pentru scufundarea distrugătorului sunt suficiente 2 torpile, iar dacă o singură torpilă loveşte distrugătorul el se scufundă cu probabilitatea 0,6. Să se afle probabilitatea că distrugătorul se va scufunda.

Rezolvare. Considerăm evenimentele:

A – "distrugătorul se va scufunda";

A_i – "distrugătorul este lovit de i torpile", $i = 0, 1, 2, 3, 4$;

$\overline{A}$ – "distrugătorul nu se va scufunda".

Este mai raţional să calculăm $P(\overline{A})$, şi ulterior $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.

Avem, deci:

$$P(\overline{A}) = P(A_0)\cdot P(\overline{A}/A_0) + P(A_1)\cdot P(\overline{A}/A_1) + P(A_2)\cdot P(\overline{A}/A_2) +$$

$$+P(A_3)\cdot P(\overline{A}/A_3) + P(A_4)\cdot P(\overline{A}/A_4) = P(A_0)\cdot P(\overline{A}/A_0) + P(A_1)\cdot P(\overline{A}/A_1),$$

deoarece

$$P(\overline{A}/A_2) = P(\overline{A}/A_3) = P(\overline{A}/A_4) = 0;$$

$$P(A_0) = (1-0,3)^4 = (0,7)^4 \approx 0,24.$$

$P(A_1)$ – este probabilitatea evenimentului că o torpilă din cele 4 lansate va lovi distrugătorul. Această probabilitate se calculează cu formula lui Bernoulli.

$$P(A_1) = C_4^1 \cdot 0,3 \cdot (0,7)^3 \approx 0,41.$$

Probabilităţile condiţionate sunt următoarele:

$$P(\overline{A}/A_0) = 1; \quad P(\overline{A}/A_1) = 1 - 0,6 = 0,4.$$

Prin urmare,

$$P(\overline{A}) = 0,24 \cdot 1 + 0,41 \cdot 0,4 \approx 0,4.$$

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) \approx 0{,}6.$$

Răspuns. Probabilitatea, că distrugătorul se va scufunda, este egală cu 0,6.

Admitem că, evenimentul A se poate produce doar în condiţiile producerii evenimentelor – ipoteze $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Ca şi în cazul formulei probabilităţii totale ipotezele formează un sistem complet de evenimente incompatibile, deci, verifică condiţiile (3.1) şi (3.2). Fie că în rezultatul experimentului s-a produs A. Producerea evenimentului A furnizează informaţie suplimentară despre probabilităţile $P(A_1), P(A_2), \ldots, P(A_n)$. Astfel, putem formula problema verificării probabilităţilor ipotezelor sau a calculării probabilităţilor condiţionate

$$P(A_1/A),\ P(A_2/A),\ \ldots,\ P(A_n/A).$$

Vom determina, deci, $P(A_j/A)$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Pornim de la formula de înmulţire a probabilităţilor:

$$P(A \cap A_j) = P(A) \cdot P(A_j/A) = P(A_j) \cdot P(A/A_j). \qquad (3.8)$$

Din (3.8) rezultă:

$$P(A) \cdot P(A_j/A) = P(A_j) \cdot P(A/A_j), \qquad (3.9)$$

iar din (3.9) concludem:

$$P(A_j/A) = \frac{P(A_j) \cdot P(A/A_j)}{P(A)}. \qquad (3.10)$$

Vom înlocui în (3.10) probabilitatea $P(A)$ cu expresia dată de formula probabilităţii totale (3.7) şi vom obţine formula:

$$P(A_j / A) = \frac{P(A_j) \cdot P(A / A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(A / A_i)}, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \qquad (3.11)$$

care se numeşte **formula lui Bayes** (după numele savantului englez).

Remarcă. Formula lui Bayes (3.11) ne dă valorile probabilităţilor condiţionate ale ipotezelor A_1, A_2, ... , A_n. Dacă aceste ipoteze au fost introduse corect, atunci probabilităţile condiţionate $P(A_j / A)$ vor fi aproape de cele necondiţionate $P(A_j)$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Atunci când probabilităţile ipotezelor A_j sunt egale între ele, fie $P(A_j) = p$, formula (3.11) devine mai simplă, deci are loc (3.12):

$$P(A_j / A) = \frac{P(A / A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A / A_i)}. \qquad (3.12)$$

Exemplul 3.4. Un supermarket primeşte pantofi de la 3 fabrici. Se ştie că 35% din ei sunt de la fabrica Nr.1, 40% vin de la fabrica Nr.2 şi restul sunt produşi de fabrica Nr.3. Fabrica Nr.1 dă 5% rebut, a doua – 2% rebut şi a treia – 8% rebut al producţiei sale.

O persoană a cumpărat o pereche de pantofi, care s-a dovedit a fi de calitate. Care este probabilitatea că această pereche de pantofi este produsă la fabrica Nr. 2 ?

Rezolvare. Deoarece supermarketul primeşte pantofi de la 3 fabrici, ipotezele vor fi următoare: A_i – „o pereche de pantofi e produsă la fabrica Nr. i “, $i = 1, 2, 3$.

Din datele problemei calculăm probabilităţile acestor ipoteze:

$$P(A_1) = \frac{35}{100} = 0,35; \quad P(A_2) = \frac{40}{100} = 0,4; \quad P(A_3) = \frac{25}{100} = 0,25.$$

S-a produs evenimentul A – „persoana a cumpărat o pereche de pantofi de calitate". Se cere de calculat $P(A_2 / A)$. Vom aplica formula lui Bayes (3.13) pentru $n = 3$.

$$P(A_2 / A) = \frac{P(A_2) \cdot P(A / A_2)}{\sum_{i=1}^{3} P(A_i) \cdot P(A / A_i)}. \qquad (3.13)$$

Producţia de calitate a fabricii Nr.1 constituie 95%, de aceea: $P(A / A_1) = 0,95$. Analogic, $P(A / A_2) = 0,88$ şi $P(A / A_3) = 0,92$.

Prin urmare,

$$P(A_2 / A) = \frac{0,4 \cdot 0,88}{0,35 \cdot 0,95 + 0,4 \cdot 0,88 + 0,25 \cdot 0,92} \approx 0,385.$$

Se observă că această probabilitate este aproape de $P(A_2) = 0,4$.

Răspuns. Probabilitatea, că persoana a cumpărat o pereche de pantofi de calitate, produsă la fabrica Nr.2, este egală cu 0,385.

Exemplul 3.5. Pentru participare la competiţii se aleg studenţi din trei grupe academice. Din prima grupă se iau 4 studenţi, din a doua grupă – 6 şi din grupa a treia – 5. Probabilităţile, că un student din grupele 1, 2, 3 va fi inclus în selecţionata Universităţii sunt egale cu 0,9; 0,7; şi 0,8 respectiv. Un student, luat la întâmplare, a fost inclus în selecţionată. Să se afle probabilitatea că el este din prima grupă.

Rezolvare. Fie, evenimentul A – „un student luat la întâmplare este inclus în selecţionata Universităţii". Considerăm evenimentele ipoteze:

A_1 – „studentul este din prima grupă";

A_2 – „studentul este din grupa a doua";

A_3 – „studentul este din grupa a treia".

Trebuie să calculăm $P(A_1/A)$. Folosim formula (3.11) (pentru trei ipoteze). Calculăm probabilităţile: $P(A_1) = 4/15$; $P(A_2) = 2/5$; $P(A_3) = 1/3$; $P(A/A_1) = 0{,}9$; $P(A/A_2) = 0{,}7$; $P(A/A_3) = 0{,}8$. Prin urmare,

$$P(A_1/A) = \frac{\frac{4}{15}\cdot\frac{9}{10}}{\frac{4}{15}\cdot\frac{9}{10}+\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{10}+\frac{1}{3}\cdot\frac{8}{10}} = \frac{4\cdot 9}{4\cdot 9+6\cdot 7+5\cdot 8} \approx 0{,}3.$$

Răspuns. Probabilitatea că studentul inclus în selecţionată este din prima grupă este egală cu 0,3.

Exemplul 3.6. Un magazin de mobilă primeşte fotolii de la 3 fabrici. Prima fabrică furnizează magazinului 20% din fotolii, de la fabrica a doua sunt achiziţionate 30%, iar de la a treia – 50% din fotolii. Fabrica Nr.1 asigură 95% fotolii de calitate, fabrica Nr.2 – 98%, iar cea de a treia fabrică – 97% calitate. Să se afle probabilităţile că un cumpărător a cumpărat un fotoliu defectat, produs la fabrica Nr.1, Nr.2 sau Nr.3 respectiv.

Rezolvare. Considerăm evenimentele:

A_1 – fotoliul este produs la fabrica Nr.1;

A_2 – fotoliul este produs la fabrica Nr.2;

A_3 – fotoliul este produs la fabrica Nr.3;

A – cumpărătorul a cumpărat un fotoliu defectat.

Trebuie să calculăm $P(A_1/A)$, $P(A_2/A)$ şi $P(A_3/A)$. Pentru aceasta vom folosi formula lui Bayes.

$$P(A_j/A) = \frac{P(A_j)\cdot P(A/A_j)}{\sum_{i=1}^{3} P(A_i)\cdot P(A/A_i)}, \; j = 1, 2, 3. \qquad (3.14)$$

Calculăm mai întâi numitorul fracţiei din partea dreaptă a formulei (3.14). Din condiţiile problemei rezultă.

$$P(A_1) = \frac{20}{100} = 0{,}2; \; P(A_2) = \frac{30}{100} = 0{,}3; \; P(A_3) = \frac{50}{100} = 0{,}5.$$

Fabrica Nr.1 asigură 95% fotolii de calitate, prin urmare procentul defecţiunilor este de 5%, deci $P(A/A_1) = 0{,}05$, respectiv $P(A/A_2) = 0{,}02$, $P(A/A_3) = 0{,}03$. Atunci,

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i)\cdot P(A/A_i) = P(A_1)\cdot P(A/A_1) + P(A_2)\cdot P(A/A_2) +$$

$$+ P(A_3)\cdot P(A/A_3) = 0{,}2\cdot 0{,}05 + 0{,}3\cdot 0{,}02 + 0{,}5\cdot 0{,}03 = 0{,}031.$$

Astfel, probabilitatea că sa cumpărat un fotoliu defectat este de 0,031.

$$P(A_1/A) = \frac{P(A_1)\cdot P(A/A_1)}{P(A)} = \frac{0{,}2\cdot 0{,}05}{0{,}031} = \frac{10}{31} \approx 0{,}322.$$

$$P(A_2/A) = \frac{P(A_2)\cdot P(A/A_2)}{P(A)} = \frac{0{,}3\cdot 0{,}02}{0{,}031} = \frac{6}{31} \approx 0{,}194.$$

$$P(A_3/A) = \frac{P(A_3)\cdot P(A/A_3)}{P(A)} = \frac{0{,}5\cdot 0{,}03}{0{,}031} = \frac{15}{31} \approx 0{,}484.$$

Răspuns. Probabilitatea că s-a cumpărat un fotoliu defectat, produs la fabrica Nr.1 este egală cu 0,322 , produs la fabrica Nr.2 e de 0,194 , iar pentru cel de la fabrica Nr.3 este egală cu 0,484.

Remarcă. Probabilităţile ipotezelor $P(A_1)$, $P(A_2)$, ... , $P(A_n)$ sunt date (sau se calculează uşor, reieşind din datele problemei). Ele se numesc **probabilităţi apriori** (apriorice).

Formula lui Bayes (3.11) ne oferă posibilitatea de a reevalua (rectifica) aceste probabilităţi, fiind cunoscut rezultatul experimentului (producerea evenimentului A). Probabilităţile $P(A_1/A)$, $P(A_2/A)$, ... , $P(A_n/A)$ se numesc **probabilităţi aposteriori** (aposteriorice).

Probleme

3.1. Pentru asamblare de la primul strung sosesc 40% din numărul total de piese, de la al doilea strung – 30%, de la al treilea – 20%, iar de la al patrulea sosesc 10% de piese. Se ştie că primul strung produce 2% rebut, al doilea – 1%, al treilea – 0,5%, şi strungului al patrulea îi revin 0,2% de piese rebut. Să se afle probabilitatea că o piesă ajunsă la asamblare va fi de calitate.

3.2. Asupra unui avion se produc trei împuşcături. Probabilităţile de a nimeri sunt egale cu 0,4 ; 0,5 şi 0,7, respectiv. Pentru ca avionul să fie doborât sunt suficiente 3 nimeriri. La o singură nimerire avionul este doborât cu probabilitatea 0,2, la două nimeriri el este doborât cu o probabilitate de 0,6.

a) Să se afle probabilitatea că în rezultatul a trei împuşcături avionul va fi doborât.

b) Avionul a fost doborât. Să se afle probabilitatea că aceasta s-a întâmplat în rezultatul a două nimeriri.

3.3. Într-o urnă sunt 10 bile, dintre care 7 sunt albe. O bilă a căzut din urnă. Să se calculeze probabilitatea că o bilă extrasă ulterior din urnă va fi de culoare albă.

3.4. Două urne au aceeaşi componenţă: a bile albe şi b bile negre. O bilă oarecare se trece din prima urnă în a doua. Ulterior o bilă se ia din urna a doua şi se trece în prima. După aceste proceduri din prima urnă la întâmplare se extrage o bilă. Să se calculeze probabilitatea că bila extrasă va fi neagră.

3.5. În componenţa unui detaşament sunt 2 brigăzi de studenţi ai anului 2 şi o brigadă de la anul întâi. Într-o brigadă de la anul întâi sunt 5 băieţi şi 3 fete. Iar în una de la anul doi – 4 băieţi şi 6 fete. Dintr-o brigadă luată la întâmplare se ia un student pentru a fi trimis în oraş.

a) Să se afle probabilitatea că în oraş va pleca un băiat.

b) Studentul ce pleacă în oraş e băiat. Să se afle probabilitatea că el este student de la anul 1.

3.6. La un spital sunt internaţi bolnavi care suferă de boli B_1, B_2, sau B_3. De boala B_1 suferă 50% din numărul total al bolnavilor, de boala B_2 – 30%, iar de boala B_3 – 20%. Probabilităţile de vindecare a acestor boli sunt egale cu 0,7 ; 0,8 şi 0,9 respectiv. Un bolnav a fost externat sănătos. Să se afle probabilitatea că el suferea de boala B_2.

3.7. Biletele de examinare conţin 40 de întrebări. Se consideră că studentul e pregătit excelent, dacă el cunoaşte răspunsurile la toate întrebările, e pregătit bine când cunoaşte răspunsurile la 35 de întrebări, e mediu pregătit, dacă ştie 25 răspunsuri şi e slab pregătit, dacă cunoaşte doar 10 răspunsuri. Din cei 20 de studenţi, care s-au prezentat la examen, 8 sunt pregătiţi excelent, 6 – bine, mediu pregătiţi sunt 4 şi pregătiţi slab – 2 studenţi. Un student a răspuns la toate 3 întrebări din biletul de examinare. Să se calculeze probabilităţile evenimentelor:

A – „studentul este pregătit bine".

B – „studentul este pregătit slab".

3.8. Trei uzine produc becuri. Prima uzină produce 45% din toată producţia, a doua – 40% şi a treia – 15%. 70% din becuri, produse la prima uzină sunt de calitate, 80 pentru a doua şi 81% la a treia. Un magazin primeşte marfă de la aceste trei uzine. Să se calculeze probabilitatea că un bec cumpărat la magazin va fi de calitate.

3.9. Doi trăgători trag asupra unei ţinte câte o dată. Probabilitatea de a nimeri pentru primul este 0,2, iar pentru al doilea – 0,6. În ţintă s-a nimerit o dată. Să se afle probabilitatea că a nimerit al doilea trăgător.

3.10. În două urne sunt bile albe şi negre. În prima: 5 bile albe şi 6 bile negre, iar în urna a doua – 4 bile albe şi 8 negre. Din prima în a doua urnă sunt trecute la întâmplare 3 bile. Ulterior din a doua urnă sunt extrase 4 bile. Să se afle probabilitatea că toate bilele extrase vor fi de culoare albă.

3.11. Sunt 6 urne cu structurile: două urne conţin câte 2 bile albe şi 4 negre, trei urne conţin câte 2 bile albe şi 8 bile negre, iar o urnă conţine 6 bile albe şi 2 negre. Se extrage la întâmplare o bilă din una din urne. Să se afle:

a) Probabilitatea că bila extrasă va fi albă;

b) Probabilitatea că bila albă extrasă să aparţină uneia din structurile date.

3.12. Într-un pluton sunt 20 de ţintaşi. Printre ei 4 sunt foarte buni, 10 – buni şi 6 sunt mediocri. Un ţintaş foarte bun nimereşte ţinta cu probabilitatea 0,9, unul bun – cu probabilitatea 0,7, iar cel

mediocru – cu 0,5. Doi ţintaşi, luaţi la întîmplare, trag câte o dată. Să se calculeze probabilitatea că ambii ţintaşi vor nimeri în ţintă.

3.13. Un magazin dispune de becuri produse la 2 uzine. Prima uzină furnizează 60 % din becuri, iar cea dea doua – 40% . Din 100 becuri ale primei uzine 90 sunt standard, iar din 100 produse la a doua standard sunt 80. Să se afle probabilitatea că un bec luat la întâmplare de pe raft va fi standard.

3.14. S-au pregătit pentru examen 25 de bilete a câte 2 întrebări din cele 50 diferite. Studentul a pregătit răspunsurile la 40 de întrebări. Să se afle probabilitatea că examenul va fi promovat, dacă pentru aceasta este suficient să se răspundă corect la două întrebări dintr-un bilet sau la o întrebare dintr-un bilet şi la o întrebare din alt bilet.

3.15. O firmă de producere a calculatoarelor primeşte piese de la 3 parteneri cu probabilităţile $p_1 = 0{,}25$, $p_2 = 0{,}5$ şi $p_3 = 0{,}25$. Probabilităţile că piesele vor fi bune sunt respectiv egale cu 0,9 ; 0,95 şi 0,85 pentru fiecare partener. Să se afle probabilitatea că un calculator luat la testare va funcţiona bine.

3.16. Pentru asamblarea unui televizor sunt utilizate piese de la 4 firme: prima firmă are rebut 0,1% , a doua – 0,2% , a treia – 0,25 , iar rebutul firmei a patra este de 0,5% . Randamentul firmelor este în proporţie 4 : 3 : 2 : 1. O piesă luată la întâmplare s-a dovedit a fi standard. Să se afle probabilităţile, că această piesă este furnizată de: a) Prima firmă; c) A treia firmă;

b) A doua firmă; d) A patra firmă.

3.17. Sunt date 10 urne identice. În 9 din ele se află câte 2 bile albe şi 2 negre, iar într-o urnă avem 5 bile albe şi o bilă neagră. Dintr-o urnă luată la întâmplare s-a extras o bilă albă. Să se afle probabilitatea că extragerea s-a făcut din urna, care conţine 5 bile albe.

3.18. Într-un grup sunt 20 de trăgători. Cinci din eu nimeresc în ţintă cu probabilitatea 0,8; şapte – cu probabilitatea 0,7; şase cu probabilitatea 0,6 şi doi cu probabilitatea 0,5. Un trăgător luat la întâmplare a tras, dar nu a nimerit în ţintă. Să se afle probabilitatea că el aparţine celui de-al treilea grup.

3.19. Un călător, aflându-se la gară, poate apela la oarecare din cele 3 case. Probabilităţile de adresare la fiecare din ele depinde de locul de plasare a lor şi sunt egale cu 0,3 ; 0,45 şi 0,25 respectiv. Probabilităţile că la momentul adresării casele nu dispun de bilete sunt egale: pentru prima – 0,4 ; pentru a doua – 0,2 şi pentru a treia – 0,1. Călătorul s-a adresat la o casă şi a procurat bilet. Să se afle probabilitatea că el a făcut-o la prima casă.

3.20. Pentru a participa la competiţii sportive au fost convocaţi studenţi din două grupe academice: din prima grupă – 10 studenţi , iar din a doua – 8 . Probabilitatea de a participa la competiţii pentru un student din prima grupă este egală cu 0,9 , iar pentru unul din grupa a doua – 0,7 . Să se afle probabilitatea că un student , luat la întâmplare, va participa la competiţii.

§4. Experimente repetate

Fie că se fac n – experimente (probe) independente, în rezultatul cărora de fiecare dată se produce evenimentul A sau $\overline{A}$.

Exemplul 4.1. a) Se aruncă o monedă de 100 de ori. A –„apare stema", $\overline{A}$ – „apare valoarea". b) Sunt supuse verificării 200 de articole. A – „un articol e standard", $\overline{A}$ – „un articol nu este standard".

Definiția 4.1. Experimentele se numesc **independente**, dacă probabilitatea producerii lui A într-un experiment nu depinde de rezultatele celorlalte experimente.

Presupunem că probabilitatea $P(A)$ este constantă, deci, nu variază de la un experiment la altul. La fel constantă va fi şi $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$. Notăm:

$$P(A) = p\,;\ P(\overline{A}) = q. \tag{4.1}$$

În multe probleme practice ne interesează probabilitatea producerii lui A în aceste n experimente de m ori $(0 \le m \le n)$. Notăm această probabilitate $P_n(m)$. Astfel, rezultatul a m experimente va fi evenimentul A, iar a celorlalte $n-m$ va fi evenimentul $\overline{A}$. De exemplu, producerea lui A în 3 din 4 experimente, e posibilă în următoarele succesiuni.

$$A\,A\,A\,\overline{A}\ ;\ A\,A\,\overline{A}\,A\ ;\ A\,\overline{A}\,A\,A\ ;\ \overline{A}\,A\,A\,A$$

În cazul a n – experimente pot avea loc succesiunile

$$\underbrace{A\,A\ldots A}_{m}\,\underbrace{\overline{A}\ldots\overline{A}}_{n-m},\quad \overline{A}\,\underbrace{A\ldots A}_{m}\,\overline{A}\ldots\overline{A},\ \ldots,\ \underbrace{\overline{A}\ldots\overline{A}}_{n-m}\,\underbrace{A\ldots A}_{m}$$

Probabilitatea unei succesiuni, în care A se produce de m ori, iar $\overline{A}$ de $n-m$ ori, este egală cu $p^m q^{n-m}$ în virtutea notaţiilor (4.1) şi teoremei de înmulţire a probabilităţilor evenimentelor independente. Numărul succesiunilor este evident C_n^m. Aşa cum succesiunile formează un sistem de evenimente incompatibile, avem:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}. \qquad (4.2)$$

Exemplul 4.2. Cineva a cumpărat 6 bilete de loterie. Probabilitatea că un bilet să fie câştigător este egală cu 0,3. Să se calculeze probabilitatea că vor fi câştigătoare 4 bilete.

Rezolvare. A – „ un bilet de loterie este câştigător ". $p = P(A) = 0{,}3$. $q = P(\overline{A}) = 0{,}7$. $n = 6$; $m = 4$. Să calculăm, că din 6 bilete cumpărate câştigătoare vor fi 4 bilete, deci $P_6(4)$. Aplicăm formula (4.2) şi atunci

$$P_6(4) = C_6^4\,(0{,}3)^4(0{,}7)^2 = \frac{6!}{4!\cdot 2!}\cdot 0{,}0081\cdot 0{,}49 = 15\cdot 0{,}0081\cdot 0{,}49 \approx 0{,}06.$$

Răspuns. Probabilitatea că se va cîştiga cu 4 bilete din cele 6 cumpărate, este egală cu 0,06.

Exemplul 4.3. Într-un magazin au intrat 6 cumpărători. Probabilitatea că unul din ei solicită încălţăminte de mărimea 42 este egală cu 0,25. Să se afle probabilitatea că cel puţin 2 cumpărători solicită încălţăminte de mărimea 42.

Rezolvare. Considerăm evenimentul A – „un cumpărător solicită încălţăminte de mărimea 42".

$$P(A) = p = 0{,}25;\ P(\overline{A}) = q = 0{,}75.$$

Evenimentul B – „ din 6 cumpărători cel puţin 2 solicită încălţăminte Nr.42".

Fie, B_i – „ i cumpărători din 6 solicită încălţăminte Nr. 42, $i = 2, 3, 4, 5, 6$". Probabilităţile $P(B_i)$ pot fi calculate de formula (4. 2), iar

$$P(B) = \sum_{i=2}^{6} P(B_i).$$

Problema poate fi rezolvată mai simplu, trecând la evenimentul opus $\overline{B}$ – „mai puţin de doi cumpărători (0 sau 1) solicită încălţăminte Nr.42".

$\overline{B} = B_0 \cup B_1$, deci

$$P(\overline{B}) = P(B_0) + P(B_1) = P_6(0) + P_6(1) = C_6^0(0{,}25)^0 \cdot (0{,}75)^6 +$$

$$+ C_6^1(0{,}25) \cdot (0{,}75)^5 \approx 0{,}178 + 0{,}356.$$

$P(\overline{B}) \approx 0{,}534$. $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0{,}534 \approx 0{,}466$. $P(B) \approx 0{,}47$.

Răspuns. Probabilitatea că din 6 cumpărători cel puţin 2 vor solicita încălţăminte Nr.42 este egală cu 0,47.

Remarcă. Formula (4. 2) poartă numele de **formula lui Bernoulli**. Dacă ţinem cont de formula de calcul pentru C_n^m (vezi (1.11)), atunci formula lui Bernoulli (4. 2) poate fi scrisă şi astfel

$$P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m} \qquad (4.3)$$

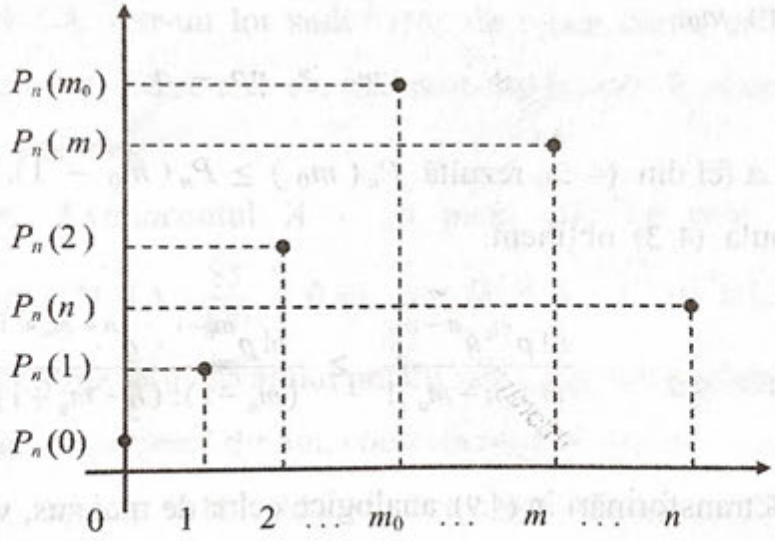
Aşadar, într-o serie de n experimente independente evenimentul A se poate produce de $0, 1, \ldots, m, \ldots, n$ ori cu probabilităţile

$$P_n(0), P_n(1) \ldots, P_n(m), \ldots, P_n(n), \tag{4. 4}$$

care sunt determinate de formula lui Bernoulli (4. 2) (sau (4. 3)). Şirul probabilităţilor (4. 4) creşte până la o valoare maximă, pe urmă descreşte.

Definiţia 4.2. Se numeşte **cel mai probabil număr** de producere a evenimentului A în seria de n experimente independente numărul m_0, pentru care

$$P_n(m_0) = \max_{0 \le m \le n} P_n(m) \tag{4. 5}$$



Deoarece m_0 este cel mai probabil număr de producere a lui A, atunci $P_n(m_0) \ge P_n(m_0 + 1)$. După ce aplicăm formula (4. 3) obţinem

$$\frac{n!}{m_0(n-m_0)!} p^{m_0} q^{n-m_0} \ge \frac{n!\, p^{m_0+1} \cdot q^{n-m_0-1}}{(m_0+1)!\ (n-m_0-1)!}. \tag{4. 6}$$

După transformări în (4. 6) venim la inegalitatea

$$\frac{q}{n-m_0} \geq \frac{p}{m_0+1}. \tag{4.7}$$

Transformăm (4.7) după cum urmează

$$\frac{q}{n-m_0} - \frac{p}{m_0+1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(m_0+1)q - (n-m_0)p}{(n-m_0)(m_0+1)} \geq 0.$$

Deoarece $(n-m_0)(m_0+1) > 0$, rezultă $(m_0+1)q-(n-m_0)p \geq 0$ sau $m_0(p+q) \geq np-q$, dar $p+q = 1$, de aceea venim la inegalitatea pentru m_0:

$$m_0 \geq np - q. \tag{4.8}$$

La fel din (4. 5) rezultă $P_n(m_0) \geq P_n(m_0 - 1)$. Iar după ce aplicăm formula (4. 3) obţinem

$$\frac{n!\,p^{m_0}q^{n-m_0}}{m_0!(n-m_0)!} \geq \frac{n!\,p^{m_0-1}\cdot q^{n-m_0+1}}{(m_0-1)!\,(n-m_0+1)!}. \tag{4.9}$$

După transformări în (4.9), analogice celor de mai sus, venim la inegalitatea

$$\frac{p}{m_0} \geq \frac{q}{n-m_0+1}, \tag{4.10}$$

iar din (4.10) rezultă

$$m_0 \leq np + p. \tag{4.11}$$

Inegalităţile (4.8) şi (4.11) ne conduc la o inegalitate dublă pentru m_0

$$np - q \le m_0 \le np + p, \qquad (4.12)$$

iar (4.12) poate fi scrisă şi astfel:

$$m_0 \in [np - q;\ np + p]. \qquad (4.13)$$

Lungimea intervalului (4.13) este egală cu 1. Într-adevăr,

$$np + p - (np - q) = np + p - np + q = p + q = 1.$$

Dacă extremităţile intervalului $[np - q\ ;\ np + p]$ sunt numere fracţionare, atunci m_0 este egal cu numărul întreg, care este situat între ele. Atunci când $np - q$ şi $np + p$ sunt numere întregi există două numere m_0 şi $m_0 - 1$ cu o probabilitate maximă de producere a evenimentului A.

Exemplul 4.4. Într-un lot sunt 150 de piese, dintre care 85% au calitatea superioară. Să se afle cel mai probabil număr de piese de calitate superioară în acest lot.

Rezolvare. Evenimentul A – „o piesă din lot este de calitate superioară". $p = P(A) = \frac{85}{100} = 0{,}85$; $q = P(\overline{A}) = 1 - p = 0{,}15$; $n = 150$.

Calculăm extremităţile intervalului pentru m_0 – cel mai probabil număr de piese de calitate superioară din lot, conform relaţiei (4.13):

$$np - q = 150 \cdot 0{,}85 - 0{,}15 = 127{,}5 - 0{,}15 = 127{,}35,$$

$$np + p = 150 \cdot 0{,}85 + 0{,}85 = 127{,}5 + 0{,}85 = 128{,}35.$$

Astfel, $m_0 \in [127{,}35\ ;\ 128{,}35]$, de unde rezultă, că $m_0 = 128$.

Răspuns. Cel mai probabil număr de piese de calitate superioară din lotul de 150 de piese este egal cu 128.

Exemplul 4.5. Procentul de încolţire a seminţelor este de 80 la sută. Să se afle cel mai probabil număr de seminţe încolţite din 9 seminţe.

Rezolvare. Evenimentul A – „o sămânţă încolţeşte".

$$p = P(A) = \frac{80}{100} = 0{,}8. \quad q = 1 - p = 0{,}2. \quad n = 9.$$

$$np - q = 9 \cdot 0{,}8 - 0{,}2 = 7{,}2 - 0{,}2 = 7.$$

$$np + p = 9 \cdot 0{,}8 + 0{,}8 = 7{,}2 + 0{,}8 = 8. \quad m_0 \in [7; 8],$$

Se obţin două valori: $m_0 - 1 = 7$ şi $m_0 = 8$.

$$P_9(7) = P_9(8) = \max_{0 \le m \le 9} P_9(m). \tag{4.14}$$

Relaţia (4.14) se verifică uşor, aplicând formula lui Bernoulli (4. 3).

Calculele cu această formulă devin destul de laborioase atunci când numărul de experimente n este mare.

Exemplul 4.6. La o tragere se nimereşte în ţintă cu probabilitatea $p = 0{,}75$. Să se afle probabilitatea, că în rezultatul a 500 de trageri vom nimeri ţinta de 270 de ori.

Rezolvare. Evenimentul A – „se nimereşte în ţintă la o tragere".

$$p = P(A) = 0{,}75; \; q = P(\overline{A}) = 1 - p = 0{,}25; \; n = 500; \; m = 270.$$

Prin urmare, în virtutea formulei lui Bernoulli (4. 3) obţinem:

$$P_{500}(270) = C_{500}^{270}(0{,}75)^{270} \cdot (0{,}25)^{230} = \frac{500!}{270! \cdot 230!}(0{,}75)^{270}(0{,}25)^{230}.$$

Formal problema e rezolvată, deoarece rezultatul este aflat. Totuşi obţinerea valorii numerice finale a probabilităţii $P_{500}(270)$ constituie o procedură foarte dificilă. Chiar dacă pornim în aventura de a calcula această probabilitate, vom obţine o valoare aproximativă în urma rotungirilor inevitabile. De aceea pentru n mari formula lui Bernoulli nu se aplică. Mai uşor şi mai rapid valoarea aproximativă a lui $P_n(m)$ se obţine aplicând formula locală a lui Laplace.

Fie, că se efectuează un număr mare n de experimente independente. În rezultatul unui experiment se produce evenimentul A cu o probabilitate constantă $p = P(A)$, sau $\overline{A}$ cu probabilitatea $q = P(\overline{A}) = 1 - p$.

Atunci

$$P_n(m) \approx \frac{\varphi(x_{m,n})}{\sqrt{npq}}, \tag{4.15}$$

unde

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \tag{4.16}$$

$$x_{m,n} = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}. \tag{4.17}$$

Formula (4.15) se numeşte **formula locală a lui Laplace.** Valoarea probabilităţii $P_n(m)$, obţinută cu această formulă, este aproximativă. Gradul aproximării creşte odată cu creşterea numărului de experimente n.

Această formulă se aplică astfel. Pentru valorile date ale n, m, p şi q calculăm $x_{m,n}$ cu (4.17). Ulterior, din tabel aflăm valoarea funcţiei

$\varphi(x_{m,n})$. Tabelul valorilor funcţiei (4.16) îl putem găsi în orice manual sau problemar de *Teoria probabilităţilor şi Statistica matematică*. Valoarea din tabel se împarte la $\sqrt{npq}$ şi se obţine o valoare aproximativă a probabilităţii $P_n(m)$.

Să facem unele observaţii, referitor la funcţia $\varphi(x)$.

1. Funcţia $\varphi(x)$ este pară, adică $\varphi(-x) = \varphi(x)$. De aceea în tabel sunt date valorile ei doar pentru $x \geq 0$.

2. $$\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = 0. \qquad (4.18)$$

3. Pentru $x > 4$, $\varphi(x) \approx 0$ de aceea, graţie (4.18), în tabel sunt date valorile funcţiei $\varphi(x)$ pentru $0 \leq x \leq 4$.

Exemplul 4.7. Probabilitatea producerii evenimentului A în fiecare din cele 400 de probe independente este constantă şi egală cu 0,2. Să se afle probabilitatea că evenimentul A se va produce de 80 de ori.

Rezolvare. $n = 400$; $m = 80$; $p = 0{,}2$; $q = 0{,}8$. Deoarece n este suficient de mare, vom aplica formula (4.15) la calculul $P_{400}(80)$. Calculăm $x_{m,n}$ pentru $n = 400$, $m = 80$.

$$x_{80,400} = \frac{80 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = \frac{80 - 80}{8} = 0.$$

Din tabel aflăm $\varphi(0) = 0{,}3989$. Prin urmare,

$$P_{400}(80) \approx \frac{1}{8}\, 0{,}3989 \approx 0{,}04986 \approx 0{,}05.$$

Răspuns. $P_{400}(80) \approx 0{,}05$.

Pentru valori mari ale lui n formula (4.15) ne dă valoarea aproximativă a probabilităţii $P_n(m)$. Dacă $p = P(A)$ este mică, n – mare iar produsul $np = \lambda$ rămâne mic (≤ 10), se recomandă formula (4.19) pentru calculul probabilităţii $P_n(m)$:

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \tag{4.19}$$

care se numeşte **formula lui Poisson** şi asigură o aproximaţie mai bună pentru valoarea exactă a $P_n(m)$.

Exemplul 4.8. La o centrală telefonică conectarea incorectă se întâmplă cu probabilitatea $p = \frac{1}{200}$. Să se calculeze probabilitatea că din cele 200 de conectări vor fi:

a) o singură conectare incorectă;

b) mai mult de 2 conectări incorecte.

Rezolvare. a) $n = 200$; $p = 1/200$; $\lambda = np = 200 \cdot (1/200) = 1$.

Din tabelul valorilor funcţiei $P_n(m)$ aflăm $P_{200}(1) \approx 0{,}3679$.

b) $n = 200$; $p = 1/200$; $\lambda = np = 1$; $m > 2$.

Avem: $P_{200}(m > 2) = 1 - P_{200}(m \leq 2) = 1 - [P_{200}(0) + P_{200}(1) + P_{200}(2)] =$

$= 1 - [0{,}3679 + 0{,}3679 + 0{,}1839] = 0{,}0803 \approx 0{,}08$.

Răspuns. $P_{200}(1) \approx 0{,}3679$; $P(m > 2) \approx 0{,}08$.

Frecvent întâlnite sunt situaţiile când ne interesează probabilitatea că într-o serie de n probe independente evenimentul A se va produce de un număr de ori m cuprins între două numere date m_1 şi m_2, deci

$P_n(m_1 \le m \le m_2)$. Vom nota această probabilitate $P_n(m_1; m_2)$.

De exemplu, într-o serie de 500 de experimente ne interesează probabilitatea $P_{500}(250 \le m \le 350)$, pentru $p = 0{,}7; q = 0{,}3$. Evident,

$$P_{500}(250 \le m \le 350) = P_{500}(250) + P_{500}(251) + \ldots + P_{500}(350). \quad (4.20)$$

Fiecare termen din partea dreaptă a egalităţii (4.20) poate fi calculat cu formula locală a lui Laplace (4.15). Avem de calculat în total 101 termeni şi ulterior de sumat. Este o procedură nici uşoară şi nici plăcută. Din fericire, există o cale mai raţională de a determina asemenea probabilităţi.

Fie, că probabilitatea producerii evenimentului A în fiecare din cele n experimente independente este constantă şi egală cu $p = P(A)$, $q = P(\overline{A}) = 1 - p$. Dacă numărul de experimente n este mare atunci

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \quad (4.21)$$

unde $\Phi(x)$ este funcţia lui Laplace

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (4.22)$$

şi

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, \; x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}. \quad (4.23)$$

Formula (4.21) se numeşte **formula integrală a lui Laplace**.

Formula locală şi cea integrală a lui Laplace asigură o exactitate bună pentru $P_n(m)$ şi $P_n(m_1; m_2)$ în cazurile când produsul npq e de

ordinul sutelor. În orice caz, e de dorit ca npq să nu fie mai mic decât 20. Pentru funcţia Laplace (4. 22) sunt întocmite tabele, care fac parte din manualele de *Teoria probabilităţilor şi Statistica matematică.*

Formula (4. 21) pentru valoarea aproximativă a probabilităţii $P_n(m_1; m_2)$ se aplică în felul următor:

1. Pentru valorile date ale lui n, m_1, m_2, p şi q calculăm x_1 şi x_2 cu formulele (4. 23).
2. Din tabelul valorilor funcţiei $\Phi(x)$ aflăm $\Phi(x_1)$ şi $\Phi(x_2)$.
3. Calculăm diferenţa $\Phi(x_2) - \Phi(x_1)$ care reprezintă valoarea aproximativă a probabilităţii $P_n(m_1; m_2)$.

Pentru a putea aplica cu succes formula (4.21) la rezolvarea problemelor este util să cunoaştem proprietăţile fundamentale ale funcţiei lui Laplace $\Phi(x)$.

1. Funcţia $\Phi(x)$ este o funcţie impară, deci pentru orice $x \in R$

$$\Phi(-x) = -\Phi(x) \qquad (4.24)$$

Această proprietate rezultă din proprietăţile integralelor definite.

2. Funcţia $\Phi(x)$ este o funcţie crescătoare, adică $\Phi(x_2) > \Phi(x_1)$, dacă $x_2 > x_1$. Într-adevăr,

$$\Phi(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{x_1} e^{-\frac{t^2}{2}}dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}}dt =$$

$$= \Phi(x_1) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}}dt,$$

iar de aici rezultă

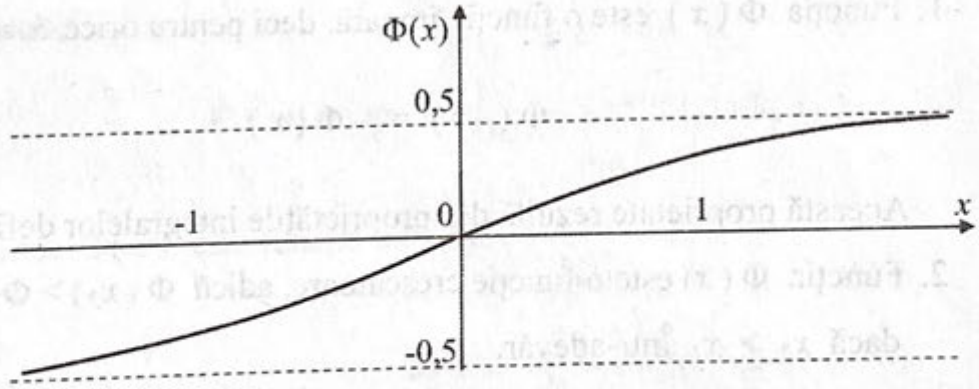
$$\Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt > 0. \qquad (4.25)$$

Partea dreaptă în (4. 25) este pozitivă ca o integrală definită de la o funcţie pozitivă

3. $$\lim_{x \to \infty} \Phi(x) = \frac{1}{2}. \qquad (4.26)$$

În tabel sunt date valorile funcţiei $\Phi(x)$ pentru $x \in [0; 4]$. Pentru $x > 4$ luăm $\Phi(x) = \frac{1}{2}$ reieşind din proprietatea (4. 26).

Atunci când trebuie să calculăm $\Phi(x)$ pentru $x < 0$, folosim proprietatea (4. 24). Graficul funcţiei $\Phi(x)$ este prezentat mai jos



Exemplul 4.9. Sunt supuse unui control tehnic 400 de piese. Probabilitatea că o piesă nu va trece controlul este egală cu 0,2. Să se afle probabilitatea că numărul de piese, care nu vor trece controlul tehnic, va fi cuprins între 70 şi 100.

Rezolvare. $n = 400$; $m_1 = 70$; $m_2 = 100$; A – „o piesă nu trece controlul tehnic"

$$p = P(A) = 0{,}2, \quad q = P(\overline{A}) = 1 - p = 0{,}8.$$

Trebuie să aflăm $P_{400}(70 \le m \le 100)$. Vom aplica formula (4. 21). Calculăm valorile x_1 şi x_2 ale argumentului x conform (4. 23). Avem:

$$x_1 = \frac{70 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = \frac{70 - 80}{8} = -\frac{10}{8} = -\frac{5}{4} = -1{,}25;$$

$$x_2 = \frac{100 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = \frac{100 - 80}{8} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2} = 2{,}50.$$

Prin urmare,

$$P_{400}(70; 100) = P_{400}(70 \le m \le 100) \approx \Phi(2{,}50) - \Phi(-1{,}25) =$$

$$= \Phi(2{,}50) + \Phi(1{,}25).$$

Din tabelul valorilor funcţiei $\Phi(x)$ aflăm:

$$\Phi(1{,}25) = 0{,}3944; \quad \Phi(2{,}50) = 0{,}4938;$$

$$P_{400}(70; 100) \approx 0{,}3944 + 0{,}4938 = 0{,}8882.$$

Răspuns. $P_{400}(70; 100) \approx 0{,}89.$

Remarcă. Inegalitatea $m_1 \le m \le m_2$ este echivalentă cu inegalitatea următoare

$$\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} \le \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \le \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} \qquad (4.27)$$

sau, din (4. 23) şi (4. 27)

$$x_1 \le \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \le x_2. \qquad (4.28)$$

Din (4. 21) şi (4. 28) rezultă

$$P\left(x_1 \le \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \le x_2\right) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1). \qquad (4.29)$$

Relaţia (4. 29) reprezintă o formă nouă a formulei integrale a lui Laplace.

Să calculăm în continuare probabilitatea $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right)$, pentru orice $\varepsilon > 0$. Inegalitatea $\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon$ este echivalentă cu următoarea inegalitate dublă

$$-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} \le \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \le \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}. \qquad (4.30)$$

Aplicând (4. 29), din (4. 30) vom obţine

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) = P\left(-\sqrt{\frac{n}{pq}} \le \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \le \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \approx$$

$$\approx \Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) - \Phi\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Prin urmare,

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \qquad (4.31)$$

Remarcă. Se ştie că raportul $\frac{m}{n}$ reprezintă frecvenţa relativă a evenimentului A într-o serie de n experimente independente, iar p este probabilitatea producerii evenimentului A în rezultatul unui experiment. Astfel, (4.31) ne dă probabilitatea că frecvenţa relativă a lui A nu va devia de probabilitatea lui în fiecare experiment mai mult decît cu $\varepsilon > 0$.

Exemplul 4.10. Avem un lot de piese. Probabilitatea că o piesă din acest lot e cu defect, este egală cu 0,1. Să se afle numărul de piese, care trebuie luat pentru a putea afirma cu o probabilitate de 0,9544 ca frecvenţa lui va devia de la $p = P(A)$ nu mai mult decât cu $\varepsilon = 0{,}03$.

Rezolvare. Din datele problemei rezultă

$$P\left(\left| \frac{m}{n} - 0{,}1 \right| \leq 0{,}03 \right) = 0{,}9544.$$

Pe de altă parte, conform (4. 31) putem scrie

$$2\Phi\left(0{,}03\sqrt{\frac{n}{0{,}1 \cdot 0{,}9}} \right) = 0{,}9544$$

sau $\quad 2\Phi(0{,}1\sqrt{n}) = 0{,}9544, \quad \Phi(0{,}1\sqrt{n}) = 0{,}4772.$

Din tabelul valorilor funcţiei $\Phi(x)$ aflăm $\Phi(2) = 0{,}4772$, de unde rezultă $0{,}1\sqrt{n} = 2$ sau $n = 400$.

Răspuns: Trebuie de luat 400 de piese din lotul dat.

Relaţia (4.31) ne dă evaluarea probabilităţii devierii frecvenţei evenimentului A de la probabilitatea sa $p = P(A)$.

Bernoulli a stabilit următorul rezultat: pentru orice $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left| \frac{m}{n} - p \right| < \varepsilon \right) = 1, \tag{4.32}$$

care ne arată, că atunci când numărul de experimente creşte, frecvenţa relativă m / n a evenimentului A se apropie de probabilitatea sa $p = P(A)$. Egalitatea (4. 32) este cunoscută sub numele de **legea numerelor mari**.

În continuare, considerăm cazul când probabilitatea producerii evenimentului A se schimbă de la un experiment la altul şi ia valorile $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Atunci probabilitatea că A se va produce de m ori în rezultatul a n experimente independente este egală cu coeficientul pe lîngă x^m al polinomului.

$$\Phi(x) = (q_1 + p_1 x) \ldots (q_n + p_n), \tag{4.33}$$

unde $q_i = 1 - p_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Exemplul 4.11. Se trage de 4 ori asupra unei ţinte. Probabilităţile de a nimeri sunt respectiv egale cu 0,4 ; 0,3 ; 0,2 şi 0,1. Să se afle probabilităţile, că în rezultatul acestor trageri:

a) nu vom nimeri nici o dată, o dată, de 2 ori, de 3 ori sau de 4 ori;

b) vom nimeri cel puţin o dată;

c) vom nimeri nu mai puţin de 2 ori.

Rezolvare. Numărul de experimente $n = 4$. Respectiv $p_1 = 0{,}4$; $p_2 = 0{,}3$; $p_3 = 0{,}2$; $p_4 = 0{,}1$. Prin urmare,

$$q_1 = 1 - p_1 = 0{,}6\,; \quad q_2 = 1 - p_2 = 0{,}7;$$

$$q_3 = 1 - p_3 = 0{,}8\,; q_4 = 1 - p_4 = 0{,}9.$$

a) Formăm funcţia (4. 33) pentru $n = 4$:

$$\varphi(x) = (q_1 + p_1 x)(q_2 + p_2 x)(q_3 + p_3 x)(q_4 + p_4 x) =$$

$$= (0{,}6 + 0{,}4\,x)(0{,}7 + 0{,}3\,x)(0{,}8 + 0{,}2\,x)(0{,}9 + 0{,}1\,x) =$$

$$= 0{,}302 + 0{,}460\,x + 0{,}205\,x^2 + 0{,}031\,x^3 + 0{,}002\,x^4.$$

Deci, $P_4(0) = 0{,}302;\ P_4(1) = 0{,}46;\ P_4(2) = 0{,}205;$

$$P_4(3) = 0{,}031;\ P_4(4) = 0{,}002.$$

b) $$P_4(m \geq 1) = 1 - P_4(0) = 1 - 0{,}302 = 0{,}698.$$

c) $$P_4(m \geq 2) = 1 - P_4(0) - P_4(1) = 1 - 0{,}302 - 0{,}46 = 0{,}238.$$

Răspuns. a) $P_4(0) = 0{,}302;\ P_4(1) = 0{,}46;\ P_4(2) = 0{,}205;$
$P_4(3) = 0{,}031;\ P_4(4) = 0{,}002.$

b) $P_4(m \geq 1) \approx 0{,}7.$

c) $P_4(m \geq 2) \approx 0{,}24.$

Fie, că în rezultatul unei probe, care se repetă de n ori, poate să se producă unul din evenimentele $A_1, A_2, \ldots, A_k$ cu probabilităţile $p_1 = P(A_1)$, $p_2 = P(A_2), \ldots, p_k = P(A_k)$. Evident, $p_1 + p_2 + \ldots + p_k = 1$. Dacă notăm prin $P_n(m_1; m_2; \ldots; m_k)$ probabilitatea că A_1 se va produce de m_1 ori, A_2 – de m_2 ori, ..., A_k – de m_k ori, $n = m_1 + m_2 + \ldots + m_k$, atunci

$$P_n(m_1; m_2; \ldots; m_k) = \frac{n!}{m_1! \ldots m_k!}\, p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_k^{m_k} \qquad (4.34)$$

Exemplul 4.12. O ţintă este împărţită în 3 sectoare. Probabilităţile de a nimeri în aceste sectoare la o tragere sunt egale cu 0,5 , 0,3 şi 0,2 respectiv. Să se afle probabilităţile evenimentelor, că în rezultatul a 6 împuşcături vom nimeri:

A – „de 3 ori în primul sector, de 2 ori în sectorul al doilea şi o dată în al treilea sector".

B – „de 4 ori în primul sector, şi de 2 ori în sectorul al doilea".

C – „de 3 ori în primul sector, de 2 ori în sectorul al doilea, o dată în al treilea sector sau de 4 ori în primul sector, de 2 ori în sectorul al doilea".

Rezolvare. Vom aplica formula (4. 34) pentru $n = 6$, $m_1 = 3$, $m_2 = 2$, $m_3 = 1$ şi $p_1 = 0{,}5$, $p_2 = 0{,}3$, $p_3 = 0{,}2$. Primim

$$P(A) = P_6(3;\,2;\,1) = \frac{6!}{3!\cdot 2!\cdot 1!}(0{,}5)^3(0{,}3)^2(0{,}2)^1 \approx 0{,}135.$$

Pentru $n = 6$, $m_1 = 4$, $m_2 = 2$, $m_3 = 0$ şi $p_1 = 0{,}5$, $p_2 = 0{,}3$, $p_3 = 0{,}2$ formula (4. 34) ne dă

$$P(B) = P_6(4;\,2;\,0) = \frac{6!}{4!\cdot 2!\cdot 0!}(0{,}5)^4(0{,}3)^2(0{,}2)^0 \approx 0{,}084.$$

Evenimentele A şi B sunt incompatibile, iar $C = A \cup B$. Atunci

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) = P_6(3;2;1) + P_6(4;2;0) \approx 0{,}219.$$

Răspuns. $P(A) = P_6(3;\,2;\,1) \approx 0{,}135;$

$$P(B) = P_6(4;\,2;\,0) \approx 0{,}084;$$

$$P(C) = P_6(3;2;1) + P_6(4;2;0) \approx 0{,}219.$$

Probleme

4.1. Procentul de încolţire a seminţelor de grâu constituie 80 la sută. Să se afle probabilităţile că din 6 seminţe vor încolţi:

a) trei seminţe;

b) nu mai puţin de trei seminţe;

c) patru seminţe.

4.2. Într-o familie sunt 4 copii. Considerând că naşterea unui băiat şi a unei fete este egal posibilă, să se afle probabilităţile evenimentelor:

a) în familie sunt trei băieţi;

b) în familie sunt nu mai puţin de trei băieţi;

c) în familie sunt doi băieţi.

4.3. O bază deserveşte 6 magazine. Probabilitatea de a primi oferta unui magazin este egală cu 0,6. Să se afle probabilităţile evenimentelor:

A – baza primeşte ofertele a 5 magazine;

B – baza va primi nu mai puţin de 5 oferte;

C – baza va primi nu mai mult de 4 oferte.

4.4. Ţinta are forma unui pătrat cu latura a, în care este înscris un cerc. Se fac 4 trageri. Să se afle probabilitatea că se va nimeri de 3 ori în cercul înscris.

4.5. Probabilitatea de a nimeri în ţintă este egală cu 0,3. De câte ori trebuie de tras pentru ca numărul cel mai probabil de nimeriri să fie egal cu 25?

4.6. Conform datelor statistice 20% din populaţie au părul de culoare neagră, 30% – întunecată, 40% – blond şi 10% sunt cu părul roşcat.

La întâmplare se formează un grup de 6 persoane. Să se afle probabilităţile că:

a) în grup sunt nu mai puţin de trei blonzi;

b) în grup avem cel puţin o persoană cu părul roşcat;

c) în grup vor fi doi blonzi, doi cu părul roşcat, unul cu părul întunecat şi unul cu părul negru.

4.7. Probabilitatea de a câştiga pe un bilet de loterie este egală cu 1 / 3. Să se calculeze probabilităţile că din 6 bilete vor fi câştigătoare:

a) două bilete;

b) nu mai puţin de două bilete.

4.8. Se produc 5 împuşcături independente asupra unei ţinte. Probabilitatea de a nimeri la o împuşcătură este egală cu 0,2. Pentru a distruge ţinta este nevoie de 3 nimeriri. Să se calculeze probabilitatea că ţinta va fi distrusă.

4.9. Într-un tren cu 6 vagoane urcă 12 pasageri, care pot ocupa orice vagon. Să se calculeze probabilitatea că:

a) în fiecare vagon vor urca câte 2 pasageri;

b) într-un vagon nu va urca nici un pasager, în altul va urca un pasager, în 2 vagoane vor urca câte 2 pasageri, iar în restul vagoanelor vor urca 3 şi respectiv 4 pasageri.

4.10. Un magazin a primit 1000 de sticle cu bere. Probabilitatea că la transportare o sticlă se va strica este egală cu 0,003. Să se afle probabilitatea că magazinul va primi:

a) două sticle stricate; b) mai mult de două sticle stricate.

4.11. Probabilitatea că o pereche de adidaşi este de calitate superioară este egală cu 0,5. La magazin s-au adus 400 de perechi. Să se afle probabilitatea că între ele vor fi nu mai puţin de 194 şi nu mai mult de 208 perechi de calitate superioară. $x_1 = -0,6$

$x_2 = 0,8$

4.12. Probabilitatea producerii lui A în cele 900 probe independente este egală cu 0,5. Să se calculeze probabilitatea că devierea frecvenţei relative de probabilitatea lui A în modul nu va depăşi 0,02.

4.13. Evenimentul A se produce în fiecare din cele 1000 de probe independente cu probabilitatea 0,75. Să se calculeze

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < 0{,}01\right).$$

4.14. Probabilitatea producerii lui A în fiecare experiment este egală cu 0,5. Să se afle numărul de experimente, pentru care cu $P = 0{,}7698$ să se poată afirma: frecvenţa relativă deviază de $P(A)$ în modul nu mai mult decât cu 0,2.

4.15. În fiecare din cele 600 probe independente evenimentul A se produce cu o probabilitate egală cu 0,85. Să se calculeze

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < 0{,}0055\right).$$

4.16. Probabilitatea că un cumpărător solicită încălţăminte de mărimea 40 este egală cu 0,2. Să se afle probabilităţile că din 5 cumpărături această încălţăminte o vor solicita:

a) un cumpărător; b) cel puţin un cumpărător.

4.17. Într-un lot sunt 10 piese. Probabilitatea că o piesă e standard este egală cu 0,9. Să se afle probabilitatea că printre ele se află cel mult una nestandard.

4.18. Probabilitatea că un călător nu va prinde autobusul, este egală cu 0,02. Să se afle cel mai probabil număr de călători, care nu vor prinde autobusul, dacă numărul total al lor este de 855.

4.19. O bază en gros deserveşte 12 magazine. De la fiecare magazin vine comanda pentru marfă cu o probabilitate 0,3. Să se afle cel mai probabil număr de comenzi şi probabilitatea respectivă.

4.20. Probabilitatea nimeririi în ţintă la o tragere este egală cu 0,4. Să se afle probabilitatea de a nimeri ţinta de 100 de ori în rezultatul a 320 de trageri.

4.21. Se fac 600 trageri. Probabilitatea de a nimeri în ţintă la o tragere este egală cu 0,4. Să se afle probabilitatea că ţinta va fi atinsă de un număr de ori cuprins între 200 şi 250.

4.22. O firmă a lansat pe piaţă 720 seturi de lenjerie de pat. Probabilitatea că un set e cu defecte este egală cu 0,008. Să se afle probabilitatea că cel mult 10 seturi vor avea defecte.

4.23. O fabrică produce mese pentru computere. Se ştie că în medie 90% din ele sunt calitative. Să se afle probabilitatea că printre cele 90 de mese numărul celor calitative va fi cuprins între 790 şi 820.

4.24. Probabilitatea că un bec este bun de de exploatare, este egală cu 0,9. Să se afle probabilitatea că din cele 800 de becuri produse nu mai puţin de 700 vor fi bune de exploatare.

4.25. Să se afle probabilitatea că din cele 500 de seminţe introduse în sol nu vor răsări 130, dacă se ştie că probabilitatea de încolţire a unei seminţe este egală cu 0,75.

4.26. Probabilitatea producerii evenimentului A într-un experiment este egală cu 0,2. Să se calculeze probabilitatea că evenimentul A se va produce de 104 ori în 400 experimente independente.

4.27. La o firmă sunt produse televizoare. Probabilitatea, că un televizor este de calitate superioară este egală cu 0,75. Să se afle cel mai probabil număr de televizoare de calitate superioară, printre cele 150 produse de firmă.

4.28. Probabilitatea producerii evenimentului A în fiecare în cele 100 de experimente independente este egală cu 0,5. Să se afle numărul m de produceri a lui A dacă $P_{100}(m) = 0{,}048$.

4.29. Au fost sădiţi 400 de copaci. Probabilitatea că unul din ei se va prinde este egală cu 0,8. Să se afle probabilitatea, că numărul de copaci, care se vor prinde, va fi mai mare de 250.

4.30. Probabilitatea producerii evenimentului A în fiecare experiment este egală cu 0,8. Să se afle numărul n de experimente efectuate, dacă

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - 0{,}8\right| \leq 0{,}04\right) = 0{,}95.$$

CAPITOLUL II
VARIABILE ALEATOARE

§ 1. Variabile aleatoare discrete

Definiţia 1.1. Se numeşte **variabilă aleatoare** orice variabilă care ia valori la întâmplare, în dependenţă de rezultatul experimentului.

Exemple. Numărul de studenţi care vor susţine examenul pe nota 7, numărul de puncte, care apar la aruncarea unui zar, rezultatul obţinut în urmă unei măsurări, durata funcţionării unui bec electric, numărul de laptopuri, care s-au vândut într-o zi la magazinul specializat.

Aceste exemple ne arată că există variabile aleatoare, ale căror valori posibile sunt izolate una de alta şi variabile aleatoare cu valori care acoperă un interval. Astfel, variabilele aleatoare pot fi de două tipuri: **discrete** şi **continue**.

Definiţia 1.2. Variabila aleatoare se numeşte **discretă**, dacă mulţimea valorilor posibile ale ei este discretă (valorile sunt izolate una de alta).

De exemplu, numărul de nimeriri în ţintă în rezultatul a 4 împuşcături, numărul de pasageri, transportaţi pe o rută.

O variabilă aleatoare discretă este caracterizată de mulţimea valorilor posibile, care poate fi finită sau infinită, dar numărabilă. Vom studia doar variabilele discrete cu o mulţime finită de valori.

Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – valorile posibile ale variabilei aleatoare.

Această mulţime însă nu caracterizează pe deplin variabila aleatoare. Mai e nevoie de probabilităţile acestor valori.

Vom nota în continuare variabilele aleatoare prin litere greceşti ξ, η, ζ, folosind şi indicii, dacă e nevoie.

De exemplu, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$; $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$.

La fel vom nota probabilităţile:

$$p_1 = P(\xi = x_1), \ldots, p_n = P(\xi = x_n).$$

Legea de repartiţie a variabilei aleatoare discrete poate fi dată în forma unei matrice:

$$\xi: \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

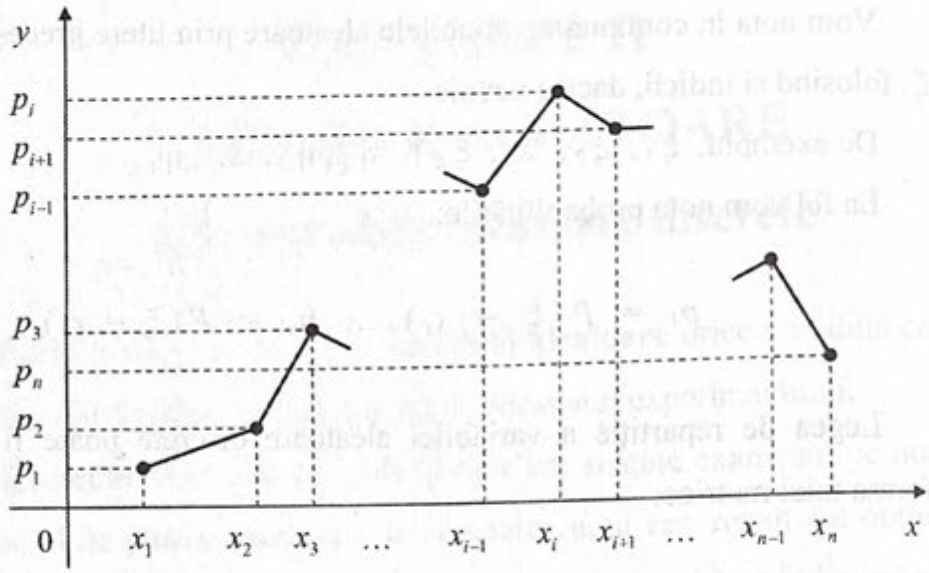
Într-o lege de repartiţie valorile posibile sunt aranjate în ordine crescătoare, deci $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$.

Evident,

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1. \tag{1.2}$$

Legea de repartiţie a variabilei aleatoare discrete ξ poate fi reprezentată grafic, dacă vom depune în sistemul de coordonate xOy punctele $M_i(x_i; p_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Ele se unesc cu o linie frântă şi în rezultat se obţine **poligonul de repartiţie** a variabilei aleatoare discrete ξ.



Exemplul 1.1. O monedă se aruncă de 2 ori. Să se afle legea de repartiţie a variabilei ξ – numărul de steme apărute.

Rezolvare: Aruncarea de două ori a unei monede este însoţită de spaţiul evenimentelor elementare: $\{ VV, VS, SV, SS \}$ unde: V – est evenimentul „a căzut valoarea monedei"; S – „a căzut stema monedei".

Variabila aleatoare ξ ia 3 valori: 0, 1, 2.

$$P(\xi = 0) = P(VV) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4};$$

$$P(\xi = 1) = P(VS) + P(SV) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2};$$

$$P(\xi = 2) = P(SS) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Prin urmare, ξ are legea de repartiţie

$$\xi: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix},$$

ce respectă condiţia (1. 2).

Exemplul 1.2. Se produc 3 împuşcături asupra unei ţinte. Probabilitatea de a nimeri în ţintă la o împuşcătură este egală cu 0,7. Să se afle legea de repartiţie a variabilei aleatoare ξ – numărul de nimeriri în ţintă.

Rezolvare. Valorile posibile ale lui ξ sunt $0, 1, 2, 3$ deoarece la 3 împuşcături putem nimeri în ţintă de $0, 1, 2$ sau 3 ori.

Probabilităţile respective le vom calcula folosind formula lui Bernoulli $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$. În cazul exemplului $n = 3$, $p = 0{,}7$, $q = 0{,}3$. Calculăm succesiv:

$$P(\xi = 0) = C_3^0 (0{,}7)^0 (0{,}3)^3 = 0{,}027;$$

$$P(\xi = 1) = C_3^1 (0{,}7)^1 (0{,}3)^2 = 0{,}189;$$

$$P(\xi = 2) = C_3^2 (0{,}7)^2 (0{,}3)^1 = 0{,}441;$$

$$P(\xi = 3) = C_3^3 (0{,}7)^3 (0{,}3)^0 = 0{,}343.$$

Legea de repartiţie a variabilei ξ va fi

$$\xi: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0{,}027 & 0{,}189 & 0{,}441 & 0{,}343 \end{pmatrix}.$$

Fie, ξ o variabilă aleatoare discretă, având repartiţia (1.1), iar c o constantă. Prin definiţie, variabila aleatoare $c\xi$ va avea repartiţia

$$c\xi: \begin{pmatrix} cx_1 & cx_2 & \dots & cx_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Considerăm variabila aleatoare η cu repartiţia (1. 4):

$$\eta: \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_m \\ q_1 & q_2 & \dots & q_m \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

Definiţia 1.4. Variabilele aleatoare ξ şi η caracterizate de repartiţiile (1.1) şi (1. 4) se numesc **independente** dacă pentru orice i şi j evenimentele $\{\xi = x_i\}$ şi $\{\eta = y_j\}$ sunt independente.

Variabila $\xi \pm \eta$ are repartiţia (1. 5):

$$\xi \pm \eta: \begin{pmatrix} x_1 \pm y_1 & x_1 \pm y_2 & \dots & x_i \pm y_j & \dots & x_n \pm y_m \\ p_{11} & p_{12} & \dots & p_{ij} & \dots & p_{nm} \end{pmatrix}, \tag{1.5}$$

unde

$$p_{ij} = P(\xi = x_i; \eta = y_j). \tag{1.6}$$

Variabila aleatoare $\xi \cdot \eta$ are repartiţia (1. 7):

$$\xi \cdot \eta: \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & \dots & x_i y_j & \dots & x_n y_m \\ p_{11} & p_{12} & \dots & p_{ij} & \dots & p_{nm} \end{pmatrix}, \tag{1.7}$$

iar variabila aleatoare ξ / η $(\eta \neq 0)$ are repartiţia (1. 8):

$$\xi / \eta: \begin{pmatrix} x_1 / y_1 & x_1 / y_2 & \dots & x_i / y_j & \dots & x_n / y_m \\ p_{11} & p_{12} & \dots & p_{ij} & \dots & p_{nm} \end{pmatrix}. \tag{1.8}$$

Remarcă. Din relaţiile (1.5) - (1.8) rezultă că la efectuarea operaţiilor aritmetice asupra variabilelor aleatoare discrete, aceste operaţii se fac doar cu valorile posibile ale acestor variabile aleatoare, iar probabilităţile lor se calculează cu formula (1.6). Atunci când ξ şi η sunt independente $p_{ij} = p_i \cdot q_j$.

Exemplul 1.3. Fie dată variabila aleatoare

$$\xi: \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 & 1 & 4 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}15 & 0{,}25 \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

Să se afle legea de repartiţie a variabilei 2ξ.

Rezolvare. Conform (1. 3) variabila aleatoare 2ξ va avea repartiţia

$$2\xi: \begin{pmatrix} -6 & -4 & 0 & 2 & 8 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}15 & 0{,}25 \end{pmatrix}.$$

Exemplul 1.4. Pentru variabila aleatoare ξ, care are repartiţia (1. 9) să se afle repartiţia variabilei ξ^3.

Rezolvare. Pentru a afla legea de repartiţie a variabilei ξ^3 vom ridica la puterea a treia valorile lui ξ din (1. 9). Prin urmare, primim (1.10):

$$\xi^3: \begin{pmatrix} -27 & -8 & 0 & 1 & 64 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}15 & 0{,}25 \end{pmatrix}. \tag{1.10}$$

Exemplul 1.5. Fie date variabilele aleatoare discrete:

$$\xi: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}; \quad \eta: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}, \tag{1.11}$$

unde $q = 1 - p$. Să se afle suma acestor variabile.

Rezolvare. Conform definiţiei sumei $\xi + \eta$ vom avea

$$\xi + \eta: \begin{pmatrix} 0+0 & 1+0 & 0+1 & 1+1 \\ q^2 & pq & qp & p^2 \end{pmatrix}.$$

Deci, suma variabilelor aleatoare (1.11) va avea repartiţia (1.12):

$$\xi + \eta: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ q^2 & 2pq & p^2 \end{pmatrix}. \tag{1.12}$$

Remarcă. În exemplul 1.5 variabilele ξ şi η au aceeaşi repartiţie. S-ar părea că e mai simplu să formăm repartiţia $2\xi = \xi + \xi$. Însă, conform definiţiei, variabila 2ξ are repartiţia

$$2\xi: \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ q & p \end{pmatrix}.$$

Se obţine, deci, o altă variabilă aleatoare care nu coincide cu (1.12).

Exemplul 1.6. Variabilele aleatoare independente ξ şi η caracterizate de legile de repartiţie:

$$\xi: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}4 \end{pmatrix}; \quad \eta: \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Să se afle legea de repartiţie a produsului $\xi \cdot \eta$.

Rezolvare. Valorile posibile ale produsului $\xi \cdot \eta$ vor fi determ de produsul valorilor lui ξ şi η. La fel se vor înmulţi probabil respective, deoarece ξ şi η sunt independente. În tabelul de mai jos prezentate calculele respective:

ξ	η	$\xi \cdot \eta$	Probabilităţi
0	−1	0	$0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}02$
0	0	0	$0{,}1 \cdot 0{,}3 = 0{,}03$
0	1	0	$0{,}1 \cdot 0{,}5 = 0{,}05$
1	−1	−1	$0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}04$
1	0	0	$0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}06$
1	1	1	$0{,}2 \cdot 0{,}5 = 0{,}1$
2	−1	−2	$0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}06$
2	0	0	$0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}09$
2	1	2	$0{,}3 \cdot 0{,}5 = 0{,}15$
3	−1	−3	$0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}08$
3	0	0	$0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}12$
3	1	3	$0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}20$

Astfel variabila produs $\xi \cdot \eta$ va lua valorile $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$.

Calculăm, în continuare, probabilităţile valorilor variabilei produs $\xi \cdot \eta$:

$P(\xi \cdot \eta = -3) = 0{,}08;$

$P(\xi \cdot \eta = -2) = 0{,}06;$

$P(\xi \cdot \eta = -1) = 0{,}04;$

$P(\xi \cdot \eta = 0) = 0{,}02 + 0{,}03 + 0{,}05 + 0{,}06 + 0{,}09 + 0{,}12 = 0{,}37;$

$P(\xi \cdot \eta = 1) = 0{,}10;$

$P(\xi \cdot \eta = 2) = 0{,}15;$

$P(\xi \cdot \eta = 0) = 0{,}20.$

Prin urmare, variabila $\xi \cdot \eta$ va avea legea de repartiţie

$$\xi \cdot \eta : \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0{,}08 & 0{,}06 & 0{,}04 & 0{,}37 & 0{,}1 & 0{,}15 & 0{,}2 \end{pmatrix}.$$

Fiind dată legea de repartiţie a variabilei aleatoare ξ putem afla unii parametri numerici, care caracterizează proprietăţile fundamentale ale repartiţiei: valoarea medie, în jurul căreia sunt situate valorile posibile, împrăştierea acestor valori etc...

Definiţia 1.5. Se numeşte **valoare medie** a variabilei aleatoare discrete ξ şi se notează $M\xi$ numărul

$$M\xi = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i . \qquad (1.13)$$

Remarcă. Atunci când variabila aleatoare ξ ia un şir numărabil de valori, valoarea medie se calculează cu formula:

$$M\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i , \qquad (1.14)$$

în ipoteza că seria (1.14) este absolut convergentă.

Definiţia 1.6. Se numeşte **moment iniţial** de ordinul $k\,(k \in N)$ şi se notează prin α_k numărul (1.15)

$$\alpha_k = M\xi^k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i . \tag{1.15}$$

Definiţia 1.7. Se numeşte **moment centrat** de ordinul $k\,(k \in N)$ şi se notează prin μ_k, numărul (1.16)

$$\mu_k = M(\xi - M\xi)^k = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M\xi)^k p_i . \tag{1.16}$$

Definiţia 1.8. Se numeşte **dispersie** a variabilei aleatoare ξ şi se notează prin $D\xi$ numărul

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M\xi)^2 \cdot p_i . \tag{1.17}$$

Definiţia 1.9. Se numeşte **abatere medie pătratică** a variabilei aleatoare ξ şi se notează prin $\sigma\xi$ numărul

$$\sigma\xi = \sqrt{D\xi} . \tag{1.18}$$

Exemplul 1.7. Variabila aleatoare ξ are legea de repartiţie

$$\xi : \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 11 \\ 0{,}14 & 0{,}20 & 0{,}49 & 0{,}17 \end{pmatrix}.$$

Să se afle valoarea medie $M\xi$, dispersia $D\xi$ şi abaterea medie pătratică $\sigma\xi$.

Rezolvare. Calculăm valoarea medie cu formula (1.13).

$$M\xi = 3 \cdot 0{,}14 + 5 \cdot 0{,}20 + 7 \cdot 0{,}49 + 11 \cdot 0{,}17 = 6{,}72 .$$

Folosind formulele (1.17) şi (1.18) obţinem:

$$D\xi = \sum_{i=1}^{n}(x_i - M\xi)^2 \cdot p_i = (3-6{,}72)^2 \cdot 0{,}14 + (5-6{,}72)^2 \cdot 0{,}20 +$$

$$+ (7-6{,}72)^2 \cdot 0{,}49 + (11-6{,}72)^2 \cdot 0{,}17 \approx 5{,}68;$$

$$\sigma\xi = \sqrt{D\xi} = \sqrt{5{,}68} \approx 2{,}38.$$

Răspuns. $M\xi = 6{,}72$, $D\xi \approx 5{,}68$, $\sigma\xi = 2{,}38$.

Exemplul 1.8. Se aruncă 2 zaruri. Să se afle legea de repartiţie a variabilei aleatoare ξ – suma punctelor apărute pe ambele zaruri.

Rezolvare. Mulţimea valorilor posibile ale lui ξ va coincide cu mulţimea 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. Pentru a calcula probabilităţile (1. 5) ale acestor valori vom desena un tabel. În prima linie vom trece sumele punctelor, iar mai jos de fiecare sumă dăm explicit cum se formează ea: primul termen este numărul de puncte de pe primul zar, iar al doilea termen este numărul de puncte de pe al doilea zar.

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1+1	1+2	1+3	1+4	1+5	1+6	2+6	3+6	4+6	5+6	6+6
	2+1	2+2	2+3	2+4	2+5	3+5	4+5	5+5	6+5	
		3+1	3+2	3+3	3+4	4+4	5+4	6+4		
			4+1	4+2	4+3	5+3	6+3			
				5+1	5+2	6+2				
					6+1					

Din acest tabel imediat rezultă legea de repartiţie a variabilei ξ:

$$\xi : \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{1}{18} & \frac{1}{12} & \frac{1}{9} & \frac{5}{36} & \frac{1}{6} & \frac{5}{36} & \frac{1}{9} & \frac{1}{12} & \frac{1}{18} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}.$$

Prin urmare,

$$M\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = 2\cdot\frac{1}{36} + 3\cdot\frac{1}{18} + 4\cdot\frac{1}{12} + 5\cdot\frac{1}{9} + 6\cdot\frac{5}{36} + 7\cdot\frac{1}{6} + 8\cdot\frac{5}{36} + 9\cdot\frac{1}{9} + 10\cdot\frac{1}{12} +$$

$$+ 11\cdot\frac{1}{18} + 12\cdot\frac{1}{36} = \frac{1+3+6+10+15+21+20+18+15+11+6}{18} = \frac{126}{18} = 7.$$

Răspuns. $M\xi = 7$. $D\xi = \frac{210}{36} = \frac{35}{6}$ $\sigma\xi = 2,41$

Matricea (1.1) este o formă comodă de prezentare a legii de repartiţie a variabilei aleatoare discrete ξ. Această formă foloseşte probabilităţile $p_i = P(\xi = x_i)$, care nu poate fi aplicată pentru variabile aleatoare continue.

De aceea se mai foloseşte probabilitatea $P(\xi < x)$, care, evident, e funcţie de x.

Definiţia 1.9. Se numeşte **funcţie de repartiţie** a variabilei aleatoare ξ funcţia,

$$F_\xi(x) = P(\xi < x). \tag{1.19}$$

Funcţia de repartiţie (1.19) există pentru toate tipurile de variabile aleatoare, atât discrete cât şi continue.

Dacă variabila aleatoare ξ are repartiţia (1.1), atunci funcţia ei de repartiţie are forma

$$F_\xi(x) = \sum_{x_i < x} P(\xi = x_i). \tag{1.20}$$

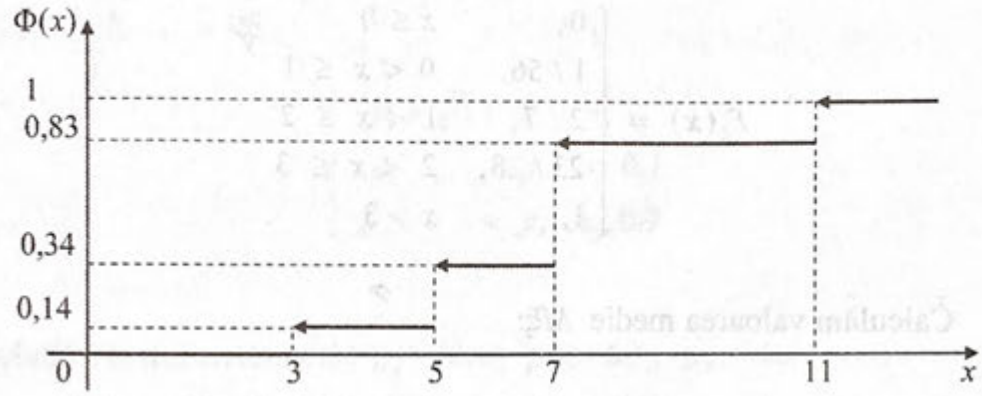
Graficul funcţiei (1.20) este în formă de scară.

Exemplul 1.9. Să se afle funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare ξ din exemplul 1.7 şi să se traseze graficul ei.

Rezolvare. Folosind formula (1.20) venim la expresia următoare pentru funcţia de repartiţie a acestei variabile aleatoare.

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 3 \\ 0{,}14, & 3 < x \le 5 \\ 0{,}34, & 5 < x \le 7 \\ 0{,}83, & 7 < x \le 11 \\ 1, & x > 11 \end{cases} \quad . \tag{1.21}$$

Graficul funcţiei (1. 21) este



Exemplul 1.10. O urnă conţine 3 bile albe şi 5 negre. Din ea se extrag simultan 3 bile. Să se afle funcţia de repartiţie şi valoarea medie a numărului de bile negre extrase.

Rezolvare. Fie, ξ – numărul de bile negre printre cele 3 extrase. Valorile posibile ale lui ξ vor fi 0 , 1 , 2 sau 3. Calculăm probabilităţile acestor valori:

$$P(\xi = 0) = \frac{C_3^3}{C_8^3} = \frac{1}{56}; \qquad P(\xi = 1) = \frac{C_5^1 \cdot C_3^2}{C_8^3} = \frac{15}{56};$$

$$P(\xi = 2) = \frac{C_5^2 \cdot C_3^1}{C_8^3} = \frac{15}{28}; \qquad P(\xi = 3) = \frac{C_5^3}{C_8^3} = \frac{5}{28}.$$

Legea de repartiţie a variabilei ξ:

$$\xi : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{56} & \frac{15}{56} & \frac{15}{28} & \frac{5}{28} \end{pmatrix}. \qquad (1.22)$$

Funcţia de repartiţie o vom afla aplicând formula (1. 20) asupra matricei (1. 22). Avem:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1/56, & 0 < x \le 1 \\ 2/7, & 1 < x \le 2 \\ 23/28, & 2 < x \le 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}. \qquad (1.23)$$

Calculăm valoarea medie $M\xi$:

$$M\xi = 0 \cdot \frac{1}{56} + 1 \cdot \frac{15}{56} + 2 \cdot \frac{15}{28} + 3 \cdot \frac{5}{28} = \frac{15 + 60 + 30}{56} = \frac{105}{56} = 1{,}875.$$

Răspuns. Funcţia de repartiţie este dată de (1.23). $M\xi = 1{,}875$.

Exemplul 1.11. Variabila aleatoare ξ ia valorile $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 =$ $M\xi = 0{,}1$; $M\xi^2 = 0{,}9$. Să se afle probabilităţile $p_i = P(\xi = x_i)$, $i = 1, 2, 3$

Rezolvare. Legea de repartiţie a variabilei ξ va fi:

$$\xi : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix},$$

unde $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. Pe de altă parte $M\xi = 0{,}1$ şi $M\xi^2 = 0{,}9$, de aceea avem relaţiile:

$$-1 \cdot p_1 + 0 \cdot p_2 + 1 \cdot p_3 = 0{,}1;$$

$$(-1)^2 \cdot p_1 + 0^2 \cdot p_2 + 1^2 p_3 = 0{,}9 .$$

Astfel se ajunge la sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ -p_1 \qquad + p_3 = 0{,}1 \\ p_1 \qquad + p_3 = 0{,}9 \end{cases} .$$

Soluţia acestui sistem este $p_1 = 0{,}4$; $p_2 = 0{,}1$; $p_3 = 0{,}5$.

Răspuns. $p_1 = P(\xi = -1) = 0{,}4$;

$p_2 = P(\xi = 0) = 0{,}1$;

$p_3 = P(\xi = 1) = 0{,}5$.

Probleme

1.1. O monedă se arunc de 7 ori. Să se calculeze valoarea medie şi dispersia numărului de apariţii a stemei.

1.2. Doi ţintaşi efectuează asupra unei ţinte independent unul de altul câte 2 împuşcături. Probabilitatea de a nimeri în ţintă pentru primul ţintaş este 0,5, iar pentru al doilea – 0,6. Să se afle legea de repartiţie şi sa se calculeze valoarea medie şi dispersia variabilei ξ – numărul de nimeriri în ţintă.

1.3. Un lot de 50 pachete de ţigări conţine 6 pachete cu defecte. O persoană cumpără 5 pachete. Să se afle legea de repartiţie, valoarea medie şi dispersia numărului de pachete cu defecte cumpărate.

1.4. Sunt date variabilele aleatoare discrete:

$$\xi_1 : \begin{pmatrix} -4 & 6 & 10 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 : \begin{pmatrix} 0,21 & 0,54 & 0,61 \\ 0,1 & 0,5 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Să se afle valorile medii $M\xi_1$ şi $M\xi_2$.

1.5. Se efectuează 4 trageri asupra unei ţinte. Probabilităţile de a nime în ţintă sunt respectiv: $p_1 = 0,6$; $p_2 = 0,4$; $p_3 = 0,5$; $p_4 = 0,2$ Să se afle legea de repartiţie a numărului de nimeriri în ţintă. Să calculeze valoarea medie, dispersia şi abaterea medie pătratică acestui număr.

1.6. Probabilitatea că un dispozitiv nu funcţionează , este egală cu 0,2. Să se scrie legea de repartiţie a numărului de dispozitive nefuncţionale, dacă se verifică 10 din ele. Să se calculeze valoarea medie, dispersia şi abaterea medie pătratică a acestui număr.

1.7. Se aruncă 2 zaruri. Să se afle legea de repartiţie, valoarea medie şi dispersia variabilei aleatoare ξ – produsul numărului de puncte apărute pe zaruri.

1.8. S-au cumpărat 10 bilete de loterie. Probabilitatea de a câştiga cu un bilet este egală cu 0,4. Să se afle legea de repartiţie, valoarea medie şi dispersia numărului de bilete câştigătoare.

1.9. Variabila aleatoare ξ are două valori posibile x_1 şi x_2, $(x_1 < x_2)$. $P(\xi = x_1) = 0{,}3$. $P(\xi = x_2) = 0{,}7$. Să se afle aceste valori, dacă $M\xi = 2{,}7$, $D\xi = 0{,}21$.

1.10. Variabila aleatoare ξ are legea de repartiţie:

$$\xi : \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 3 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

Să se afle legile de repartiţie ale variabilelor: ξ^2; 3ξ; $0{,}5\xi - 2$.

1.11. Dintr-o urnă, care conţine 5 bile albe şi 3 bile negre se extrage consecutiv fără returnare în urnă câte o bilă până la apariţia bilei albe. Să se afle legea de repartiţie a numărului de bile negre extrase. Să se calculeze valoarea medie şi dispersia acestui număr.

1.12. Dintr-un lot de piese se ia pentru control consecutiv câte una. Dacă piesa luată este rebut, atunci controlul se încheie. Se verifică cel mult 5 piese. Probabilitatea ca o piesă să fie rebut este egală cu 0,1. Să se afle legea de repartiţie, valoarea medie şi dispersia numărului de piese controlate.

1.13. Într-un lot de 10 piese 3 sunt defectate. La întâmplare se iau 3 piese. Să se afle legea de repartiţie a numărului de piese luate cu defect. Să se calculeze valoarea medie şi dispersia.

1.14. Variabila aleatoare ξ ia două valori x_1 şi x_2, $(x_1 < x_2)$. $P(\xi = x_1) = 0{,}6$. $M\xi = 1{,}4$. $D\xi = 0{,}24$. Să se afle legea de repartiţie a variabilei aleatoare date.

1.15. Automobilul circulă pe o stradă, unde sunt instalate 3 semafoare, care deschid lumina verde cu o durată de 1,5 min, galbenă cu durata de 0,3 min. şi cea roşie are o durată de 1,2 min. Să se afle legea de repartiţie a variabilei aleatoare ξ – numărul de opriri a automobilului pe această stradă.

1.16. Un lot conţine 25 de piese, printre care 6 sunt nestandard. Se iau la întâmplare 3 piese. Să se construiască legea de repartiţie a numărului de piese nestandard printre cele luate.

1.17. Doi baschetbalişti aruncă pe rând mingea în coş. Probabilitatea de a nimeri în coş pentru primul este de 0,8, iar pentru al doilea – 0,7. În total se fac 5 aruncări. Fie că primul nimereşte în coş de ξ_1 ori,

iar al doilea – de ξ_2 ori. Să se afle legile de repartiţie ale variabilelor aleatoare ξ_1 şi ξ_2, dacă începe a arunca primul.

1.18. O monedă se aruncă de 6 ori. Să se afle legea şi funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare ξ – raportul dintre numărul de apariţii a stemei şi cel al valorii monedei.

1.19. Se produc 6 trageri asupra unei ţinte. Probabilitatea de a nimeri în ţintă la o tragere este egală cu 0,2. Să se afle funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare ξ – numărul de nimeriri în ţintă. Să se calculeze $P(1 \leq \xi \leq 5)$.

1.20. Într-o secţie de producere a pieselor de schimb rebutul constituie 5%. La întâmplare se iau 6 piese. Să se afle legea de repartiţie, valoarea medie şi dispersia variabilei aleatoare ξ – numărul de piese rebut luate.

1.21. Dintr-o urnă cu 6 bile albe şi 4 bile negre se extrage succesiv câte o bilă de 5 ori. Să se afle legea de repartiţie, valoarea medie, dispersia şi abaterea medie pătratică a variabilei aleatoare ξ – numărul de bile albe extrase, dacă bila extrasă de fiecare dată este returnată în urnă.

§ 2. Variabile aleatoare continue

Definiţia 2.1. Variabila aleatoare ξ se numeşte **continuă** dac mulţimea valorilor posibile ale ei acoperă un interval (finit sau infinit).

Exemplul 2.1. Durata funcţionării unui dispozitiv, distanţa de la locu de lansare până la cel de cădere a unui obuz, rezultatul măsurării une lungimi, greutăţi, volum, valoarea termică a aerului pe parcursul unu interval de timp.

Pentru o variabilă aleatoare continuă legea de repartiţie nu poate fi realizată în forma (1.1), dat fiind faptul că valorile posibile ale lui ξ alcătuiesc o mulţime nenumărabilă şi, deci, nu pot fi date probabilităţile $P(\xi = x_i)$. Pe lângă aceasta, ulterior vom vedea, că aceste probabilităţi sunt nule pentru o variabilă aleatoare continuă. Din aceste motive vom folosi probabilităţile evenimentelor $\{\xi < x\}$.

Definiţia 2.2. Se numeşte **funcţie de repartiţie** a variabilei aleatoare ξ funcţia:

$$F_\xi(x) = P(\xi < x). \tag{2.1}$$

Funcţia de repartiţie există pentru orice variabilă aleatoare, atât continuă cât şi discretă. Ea caracterizează pe deplin variabila aleatoare din punct de vedere al teoriei probabilităţilor. Vom enunţa în continuare proprietăţile fundamentale ale funcţiei de repartiţie.

1. Funcţia $F_\xi(x)$ este definită pentru orice $x \in R$.

Aceasta rezultă imediat din (2.1).

2. $$0 \le F_\xi(x) \le 1. \tag{2.2}$$

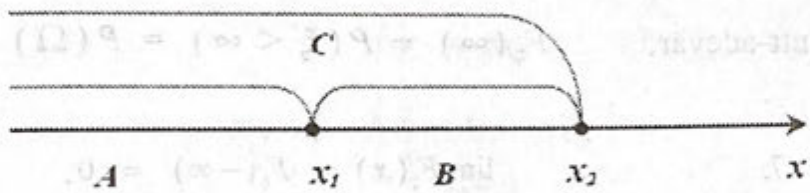
Relaţia (2. 2) rezultă din faptul că funcţia de repartiţie reprezintă o probabilitate, care, după cum se ştie, este cuprinsă între 0 şi 1:

3. $$P(x_1 \le \xi < x_2) = F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1), \qquad (2.3)$$

pentru orice $x_1, x_2 \in R, x_1 < x_2$.

Pentru a demonstra relaţia (2. 3) considerăm evenimentele:

$$A = \{\xi < x_1\}, B = \{x_1 \le \xi < x_2\}, C = \{\xi < x_2\}.$$



Evident, $C = A \cup B$, $A \cap B = \varnothing$. Prin urmare,

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B),$$

sau

$$P(\xi < x_2) = P(\xi < x_1) + P(x_1 \le \xi < x_2), \qquad (2.4)$$

iar din (2. 4) imediat rezultă (2. 3).

4. Funcţia de repartiţie este o funcţie nedescrescătoare , adică:

$$F_\xi(x_1) \le F_\xi(x_2) \qquad (2.5)$$

pentru orice $x_1, x_2 \in R, x_1 < x_2$.

Inegalitatea (2. 5) rezultă din (2. 3), deoarece probabilitatea e întotdeauna nenegativă.

5. $$P(\xi \geq x) = 1 - F_\xi(x). \qquad (2.6)$$

Evenimentele $\{\xi < x\}$ şi $\{\xi \geq x\}$ sunt opuse. Din această cauză

$$P(\xi \geq x) = 1 - P(\xi < x) = 1 - F_\xi(x).$$

6. Dacă $x \to \infty$ atunci $F_\xi(x) \to 1$. Această relaţie se scrie astfel:

$$\lim_{x \to \infty} F_\xi(x) = F_\xi(\infty) = 1. \qquad (2.7)$$

Într-adevăr, $F_\xi(\infty) = P(\xi < \infty) = P(\Omega) = 1.$

7. $$\lim_{x \to -\infty} F_\xi(x) = F_\xi(-\infty) = 0. \qquad (2.8)$$

Într-adevăr, $F_\xi(-\infty) = P(\xi < -\infty) = P(\varnothing) = 0.$

Proprietăţile enunţate caracterizează funcţia de repartiţie $F_\xi(x)$ ca pe una definită pentru orice $x \in R$, nedescrescătoare, cu valori cuprinse între 0 şi 1.

Remarcă. La proprietăţile enunţate mai pot fi adăugate încă două:

8. Funcţia de repartiţie $F_\xi(x)$ este o funcţie continuă la stânga.

9. Funcţia $F_\xi(x)$ poate avea doar descontinuităţi de speţa I (salturi finite) şi numărul lor este cel mult numărabil.

Exemplul 2.2. Se dă funcţia de repartiţie a unei variabile aleatoare continue ξ.

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ ax^2, & 0 < x \leq 2 \\ 1, & x > 2. \end{cases} \qquad (2.9)$$

Să se afle: a). Parametrul a.

b). $P\left(\frac{1}{2} \le \xi < \frac{3}{2}\right)$.

Să se traseze graficul funcţiei $F_\xi(x)$.

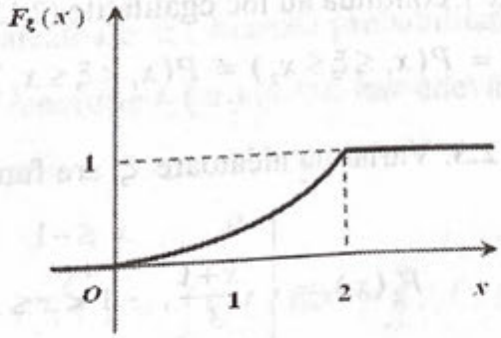
Rezolvare. a). În virtutea continuităţii avem: $ax^2 = 1$ pentru $x = 2$, deci, $a \cdot 2^2 = 1$. Rezultă $a = 1/4$. Prin urmare, funcţia de repartiţie (2.9) devine:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{x^2}{4}, & 0 < x \le 2 \\ 1, & x > 2. \end{cases} \qquad (2.10)$$

b). Din (2. 3) rezultă:

$$P\left(\frac{1}{2} \le \xi < \frac{3}{2}\right) = F_\xi\left(\frac{3}{2}\right) - F_\xi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}.$$

Graficul funcţiei de repartiţie (2.10):



Răspuns: $a = \frac{1}{4}$, $P\left(\frac{1}{2} \le \xi < \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}$. Graficul funcţiei de repartiţie $F_\xi(x)$ e prezentat în desen.

Pentru variabila aleatoare ξ cu funcţia de repartiţie $F_\xi(x)$ continuă are loc relaţia

$$P(\xi = x) = 0. \tag{2.11}$$

Într-adevăr, dacă în (2. 3) luăm $x_1 = x$ şi $x_2 = x + \Delta x$ atunci vom obţine

$$P(x \le \xi < x + \Delta x) = F_\xi(x + \Delta x) - F_\xi(x). \tag{2.12}$$

Trecem la limită în (2.12) când $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} P(x \le \xi < x + \Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} [F(x + \Delta x) - F_\xi(x)].$$

În virtutea continuităţii funcţiei $F_\xi(x)$ partea dreaptă tinde la 0, iar în partea stângă vom obţine $P(\xi = x)$, deci (2.11).

Astfel, pentru o variabilă aleatoare ξ, care are funcţia de repartiţie $F_\xi(x)$ continuă au loc egalităţile (2.13):

$$P(x_1 \le \xi < x_2) = P(x_1 \le \xi \le x_2) = P(x_1 < \xi \le x_2) = P(x_1 < \xi < x_2). \tag{2.13}$$

Exemplul 2.3. Variabila aleatoare ξ are funcţia de repartiţie

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1 \\ \frac{x+1}{3}, & -1 < x \le 2 \\ 1, & x > 2. \end{cases} \tag{2.14}$$

Să se afle $P(1 \le \xi < 3)$.

Rezolvare. Pentru a afla această probabilitate vom folosi formula (2.3), conform căreia din (2.14) primim:

$$P(1 \le \xi < 3) = F_\xi(3) - F_\xi(1) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Răspuns. $P(1 \le \xi < 3) = \frac{1}{3}$.

Funcţia de repartiţie $F_\xi(x)$ este o caracteristică importantă a variabilei aleatoare ξ. Ea însă nu este unică. În cazul funcţiilor de repartiţie derivabile se introduce noţiunea de densitate de repartiţie (sau densitate de probabilitate).

Definiţia 2.3. Se numeşte **densitate de repartiţie** a variabilei aleatoare ξ funcţia notată prin $f_\xi(x)$, care reprezintă derivata de ordinul întâi de la funcţia de repartiţie $F_\xi(x)$, deci

$$f_\xi(x) = F'_\xi(x). \tag{2.15}$$

Formula (2. 3) exprimă $P(x_1 \le \xi < x_2)$ prin funcţia de repartiţie $F_\xi(x)$ a variabilei aleatoare ξ. Aceeaşi probabilitate poate fi exprimată şi prin densitatea de repartiţie $f_\xi(x)$ (2.15). Într-adevăr, conform formulei Newton-Leibniz avem:

$$F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} F'_\xi(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} f_\xi(x)\,dx. \tag{2.16}$$

Din (2. 3) şi (2.16) rezultă,

$$P(x_1 \le \xi < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f_\xi(x)dx. \tag{2.17}$$

Remarcă. Egalitatea (2.17) poate fi scrisă şi astfel

$$P(\xi \in [x_1; x_2)) = \int_{x_1}^{x_2} f_\xi(x)dx. \tag{2.18}$$

În virtutea relaţiilor (2.13) în partea stângă a formulei (2.18) poate fi şi unul din intervalele $[x_1; x_2]$, $(x_1; x_2)$, sau $(x_1; x_2]$.

Exemplul 2.4. Variabila aleatoare ξ are densitatea de repartiţie

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0;1] \\ 0, & \notin [0;1] \end{cases}.$$

Să se afle $P(\xi \in (1/3; 1/2))$.

Rezolvare. Vom aplica formula (2.18):

$$P(\xi \in (1/3; 1/2)) = \int_{1/3}^{1/2} 2x dx = 2\int_{1/3}^{1/2} x dx = 2 \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_{1/3}^{1/2} = x^2\Big|_{1/3}^{1/2} =$$

$$= (1/2)^2 - (1/3)^2 = 5/36.$$

Răspuns. $P(\xi \in (1/3; 1/2)) = 5/36$.

Densitatea de repartiţie $f_\xi(x)$ are proprietăţile:

1. $$f_\xi(x) \ge 0. \tag{2.19}$$

Inegalitatea (2.19) rezultă din (2.15), deoarece derivata funcţiei nedescrescătoare $F_\xi(x)$ este nenegativă.

2. $$\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)\,dx = 1. \qquad (2.20)$$

Conform (2.17) pentru $x_1 = -\infty$ şi $x_2 = \infty$, avem

$$P(-\infty < \xi < \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)\,dx. \qquad (2.21)$$

Pe de altă parte evenimentul $\{-\infty < \xi < \infty\}$ este unul sigur şi are probabilitatea egală cu 1. Astfel, relaţia (2.21) justifică (2.20).

Egalitatea (2.15) ne arată că fiind dată funcţia de repartiţie $F_\xi(x)$ a variabilei aleatoare ξ, prin derivare aflăm densitatea de repartiţie $f_\xi(x)$. Invers, dacă variabila ξ este caracterizată de densitatea $f_\xi(x)$ putem afla funcţia de repartiţie a ei prin integrare, deci

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(u)\,du. \qquad (2.22)$$

Într - adevăr, conform definiţiei $F_\xi(x) = P(\xi < x)$, iar evenimentul $(\xi < x)$ este echivalent cu următorul $(-\infty < \xi < x)$. Prin urmare, dacă ţinem cont de (2.21), putem scrie:

$$F_\xi(x) = P(\xi < x) = P(-\infty < \xi < x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(u)\,du.$$

Exemplul 2.5. Variabila aleatoare ξ are densitatea de repartiţie

$$f_\xi(x) = \begin{cases} a\sin x, & x \in [0;\pi] \\ 0, & x \notin [0;\pi]. \end{cases} \qquad (2.3)$$

Să se afle:

1. Parametrul a.

2. Funcţia de repartiţie $F_\xi(x)$.

3. $P(\xi \in [\pi/4; \pi/3])$.

Rezolvare a). Pentru a afla parametrul a vom folosi proprietatea a doua a densităţii, $f_\xi(x)$ conform căreia vom avea

$$a\int_0^\pi \sin x\, dx = 1 \Rightarrow a = 1/2.$$

Substituim această valoare a lui a în (2. 23) şi obţinem densitatea

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin x, & x \in [0;\pi] \\ 0, & x \notin [0;\pi]. \end{cases} \qquad (2.24)$$

b). Să aflăm funcţia de repartiţie $F_\xi(x)$ cu (2. 22). Pentru aceasta vom distinge 3 cazuri:

b1). $x \le 0$. $\quad F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(u)du = \int_{-\infty}^{x} 0\, du = 0.$

b2). $0 < x \le \pi$.

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{0} f_\xi(u)\,du + \int_0^x f_\xi(u)\,du = \frac{1}{2}\int_0^x \sin u\, du = -\frac{1}{2}\cos u\Big|_0^x = \frac{1}{2}(1-\cos x$$

b3). $x > \pi$.

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{0} f_\xi(u)\,du + \int_0^\pi f_\xi(u)\,du + \int_\pi^x f_\xi(u)\,du = \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin u\, du = -\frac{1}{2}\cos u\Big|_0^\pi =$$

Prin urmare,

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \frac{1}{2}(1-\cos x), & 0<x\le\pi\\ 1, & x>\pi.\end{cases} \qquad (2.25)$$

c).

$$P(\xi\in[\pi/4;\pi/3]) = \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/3}\sin u\,du - \frac{1}{2}\cos u\Big|_{\pi/4}^{\pi/3} = -\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}-1}{4}.$$

Răspuns. $a = 1/2$. Funcţia de repartiţie este dată de (2. 25).

$$P\left(\xi\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}\right]\right) = \frac{\sqrt{2}-1}{4}.$$

Pentru variabilele aleatoare continue ca şi pentru cele discrete un rol important îl are valoarea medie şi dispersia.

Definiţia 2.4. Se numeşte **valoare medie** a variabilei aleatoare continue ξ cu valori din intervalul $[a, b]$ numărul

$$M\xi = \int_a^b x\, f_\xi(x)\,dx. \qquad (2.26)$$

Atunci când valorile posibile ale lui ξ aparţin axei Ox valoarea medie (2. 26) coincide cu integrala improprie

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{\xi}(x)\, dx. \qquad (2.27)$$

Similar cu cazul discret se defineşte dispersia variabilei aleatoare continue ξ.

Definiţia 2.5. Se numeşte **dispersie** a variabilei aleatoare $\xi \in [a\,;b]$ numărul:

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = \int_a^b (x - M\xi)^2 f_{\xi}(x)\, dx. \qquad (2.28)$$

Pentru variabila $\xi \in (-\infty\,;\infty)$ conform (2. 28) avem

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^2 f_{\xi}(x)\, dx. \qquad (2.29)$$

Valoarea medie (2. 27) şi dispersia (2. 29) există doar în cazul când integralele respective sunt convergente.

Abaterea medie pătratică (2. 30) a variabilei aleatoare continue ξ se defineşte ca şi în cazul discret (vezi (1.18))

$$\sigma\xi = \sqrt{D\xi}. \qquad (2.30)$$

Exemplul 2.6. Funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare ξ este

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ \dfrac{x-1}{2}, & 1 < x \le 3 \\ 1, & x > 3. \end{cases} \qquad (2.31)$$

Să se calculeze valoarea medie $M\xi$ şi dispersia $D\xi$.

Rezolvare. Vom calcula mai întâi densitatea de repartiţie $f_{\xi}(x)$ prin formula (2.15). Astfel, din (2. 31) obţinem

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in (1;3] \\ 0, & x \notin (1;3]. \end{cases} \tag{2. 32}$$

Prin urmare, din (2. 26), (2. 28) şi (2. 32) rezultă

$$M\xi = \int_1^3 x \cdot \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2}\int_1^3 x\,dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_1^3 = \frac{1}{4}x^2\Big|_1^3 = \frac{1}{4}(3^2 - 1^2) = \frac{1}{4} \cdot 8 = 2.$$

$$D\xi = \int_1^3 (x-2)^2 \cdot \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2}\int_1^3 (x-2)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^3 (x^2 - 4x + 4)\,dx = \frac{1}{2}\int_1^3 x^2\,dx - 2\int_1^3 x\,dx + 2\int_1^3 dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_1^3 - 2 \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_1^3 + 2x\Big|_1^3 = \frac{1}{6}(3^3 - 1^3) - (3^2 - 1^2) + 2(3-1) = \frac{1}{3}.$$

Răspuns. $M\xi = 2$; $D\xi = \frac{1}{3}$.

Vom enunţa în continuare unele proprietăţi ale valorii medii şi dispersiei, care sunt adevărate atât pentru variabilele aleatoare continue cât şi pentru cele discrete:

$$Mc = c, \quad c \in R. \tag{2. 33}$$

$$M(c\xi) = cM\xi. \tag{2. 34}$$

Fie ξ_1 şi ξ_2 – două variabile aleatoare arbitrare. Atunci

$$M(\xi_1 + \xi_2) = M\xi_1 + M\xi_2. \tag{2. 35}$$

Formula (2. 35) poate fi extinsă asupra oricărui număr de variabile aleatoare, deci are loc formula

$$M(\sum_{i=1}^{n}\xi_i) = \sum_{i=1}^{n} M\xi_i. \qquad (2.36)$$

Din proprietăţile (2. 33) -(2. 36) enunţate rezultă egalitatea (2. 37)

$$M(\sum_{i=1}^{n} a_i\xi_i + b) = \sum_{i=1}^{n} a_i M\xi_i + b. \qquad (2.37)$$

Dispersia unei variabile aleatoare ξ posedă proprietăţile:

$$Dc = 0, \; c \in R. \qquad (2.38)$$

Într-adevăr, (2. 38) rezultă din definiţie şi proprietăţile valorii medii

$$Dc = M(c - Mc)^2 = M(c-c)^2 = M0 = 0.$$

$$D(c\xi) = c^2 D\xi. \qquad (2.39)$$

Demonstrăm (2. 39).

$$D(c\xi) = M[c\xi - M(c\xi)]^2 = M[c(\xi - M\xi)]^2 = c^2 M(\xi - M\xi)^2 = c^2 D\xi,$$

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2. \qquad (2.40)$$

Avem

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = M(\xi^2 - 2\xi \cdot M\xi + (M\xi)^2) = M\xi^2 - 2M(\xi \cdot M\xi) +$$

$$+ M(M\xi)^2 = M\xi^2 - 2M\xi \cdot M\xi + (M\xi)^2 = M\xi^2 - (M\xi)^2.$$

Remarcă. Formula (2.40), de obicei, se numeşte **formula de calcul** pentru dispersie. Ea e frecvent folosită la rezolvarea problemelor, care necesită calculul dispersiei unei variabile aleatoare ξ.

Fie ξ_1 şi ξ_2 – două variabile aleatoare arbitrare. Atunci

$$D(\xi_1 + \xi_2) = M[(\xi_1 + \xi_2) - M(\xi_1 + \xi_2)]^2 = M[(\xi_1 - M\xi_1) + (\xi_2 - M\xi_2)]^2 =$$

$$= M(\xi_1 - M\xi_1)^2 + 2M[(\xi_1 - M\xi_1)(\xi_2 - M\xi_2)] + M(\xi_2 - M\xi_2)^2. \quad (2.41)$$

Definiţia 2.6. Se numeşte **moment de corelaţie** şi se notează prin $K_{\xi_1\xi_2}$ numărul

$$K_{\xi_1\xi_2} = M[(\xi_1 - M\xi_1)(\xi_2 - M\xi_2)]. \quad (2.42)$$

Din (2.41) şi (2.42) rezultă (2.43)

$$D(\xi_1 + \xi_2) = D\xi_1 + 2K_{\xi_1\xi_2} + D\xi_2. \quad (2.43)$$

Atunci când ξ_1 şi ξ_2 sunt independente, $K_{\xi_1\xi_2} = 0$ şi

$$D(\xi_1 + \xi_2) = D\xi_1 + D\xi_2. \quad (2.44)$$

Formula (2.44) afirmă că dispersia sumei a două variabile aleatoare independente este egală cu suma dispersiilor.

Analogic sunt introduse noţiunele de momente ale variabilelor aleatoare continue.

Definiţia 2.7. Se numeşte **moment iniţial** de ordinul $k \in N$ şi se notează prin α_k numărul

$$\alpha_k = M\xi^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_\xi(x)\,dx. \tag{2.45}$$

Se numeşte **moment centrat** de ordinul $k \in N$, şi se notează prin μ_k numărul

$$\mu_k = M(\xi - M\xi)^k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^k f_\xi(x)\,dx. \tag{2.46}$$

Remarcă. Momentul iniţial α_k şi cel centrat μ_k există doar atunci când integralele inproprii (2.45) şi (2.46) sunt convergente.

Dacă valoarile variabilei aleatoare sunt concentrate pe $[\,a\,;\,b\,]$, atunci integralele (2.45) şi (2.46) vor fi calculate de formulele (2.47) şi respectiv (2.48):

$$\alpha_k = \int_a^b x^k f_\xi(x)\,dx. \tag{2.47}$$

$$\mu_k = \int_a^b (x - M\xi)^k f_\xi(x)\,dx. \tag{2.48}$$

Exemplul 2.7. Variabila aleatoare ξ are funcţia de repartiţie

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x \le 1 \\ \frac{1}{4}(x-1), & 1 < x \le 5 \\ 1, & x > 5 \end{cases}. \tag{2.49}$$

Să se afle:

a) Densitatea de repartiţie $f_\xi(x)$.

b) Valoarea medie $M\xi$ şi dispersia $D\xi$.

c) $P(\xi \in (2;3))$.

Să se traseze graficele funcţiilor $F_\xi(x)$ şi $f_\xi(x)$.

Rezolvare. a) Aflăm densitatea $f_\xi(x)$ conform formulei (2.15). Pentru (2.49) obţinem

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x \le 1 \\ \frac{1}{4}, & 1 < x \le 5 \\ 0, & x > 5. \end{cases} \qquad (2.50)$$

b) Calculăm $M\xi$ şi $D\xi$:

$$M\xi = \int_1^5 x\frac{1}{4}dx = \frac{1}{4}\int_1^5 x\,dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^5 = 3.$$

Pentru $M\xi^2$ avem,

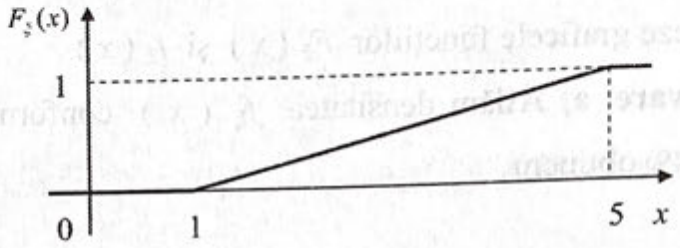
$$M\xi^2 = \int_1^5 x^2\frac{1}{4}dx = \frac{1}{4}\int_1^5 x^2\,dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_1^5 = \frac{31}{3}.$$

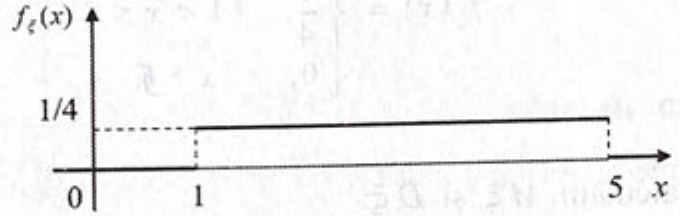
Din formula (2.40) obţinem

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \frac{31}{3} - 3^2 = \frac{4}{3}.$$

c) $$P(\xi\in(2;3)) = \int_2^3 f_\xi(x)dx = \int_2^3\frac{1}{4}dx = \frac{1}{4}.$$

Graficele funcţiilor $F_\xi(x)$ şi $f_\xi(x)$:





Răspuns. Densitatea de repartiţie $f_\xi(x)$ este dată de formula (2. 50)

$$M\xi = 3.\ D\xi = \frac{4}{3}.\ P(\xi \in (2;3)) = \frac{1}{4}.$$

Graficele funcţiilor $F_\xi(x)$ şi $f_\xi(x)$ sunt prezentate mai sus.

Probleme

2.1. Variabila aleatoare ξ are funcţia de repartiţie

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x \le 0 \\ \dfrac{x}{5}, & 1 < x \le 5 \\ 0, & x > 5 \end{cases}.$$

Să se afle:

a). Densitatea de repartiţie $f_\xi(x)$.

b). Valoarea medie $M\xi$, dispersia $D\xi$ şi $M\xi^2$.

c). $p_1 = P(\xi \in (0,3))$, $p_2 = P(\xi \in (0,5))$,
$p_3 = P(\xi \in (0,6))$, $p_4 = P(\xi \in (1,10))$.

Să se traseze graficele funcţiilor $F_\xi(x)$ şi $f_\xi(x)$.

2.2. Variabila aleatoare ξ are funcţia de repartiţie

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x \le 0 \\ x^3 + ax, & 0 < x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

Să se afle:

a) Parametrul a.

b) Densitatea de repartiţie $f_\xi(x)$.

c) Valoarea medie $M\xi$ şi dispersia $D\xi$.

b) $P(\xi \in (0{,}5\,;2))$.

Să se traseze graficele funcţiilor $F_\xi(x)$ şi $f_\xi(x)$.

2.3. Densitatea de repartiţie a variabilei aleatoare ξ este

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ c\,x^2\,e^{-\frac{x^2}{2a^2}}, & x > 0, \end{cases}$$

unde c e o constată, $a > 0$ – parametru.

Să se afle:

a). Valoarea constantei c.

b). Valoarea medie $M\xi$ şi dispersia $D\xi$.

2.4. Se dă funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare ξ

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \sin x, & 0 < x \le \pi/2 \\ 1, & x > \pi/2 \end{cases}$$

Să se afle:

a) Densitatea de repartiţie $f_\xi(x)$.

b) Valoarea medie $M\xi$ şi dispersia $D\xi$.

c) $P(\xi \in (\pi/4\,;\pi/3))$.

2.5. Se dă densitatea de repartiţie a variabilei aleatoare ξ

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in [0\,;\pi/2] \\ 0, & x \notin [0\,;\pi/2] \end{cases}$$

Să se afle:

a) Funcţia de repartiţie $F_\xi(x)$.

b) Valoarea medie $M\xi$, dispersia $D\xi$ şi abaterea medie pătratică $\sigma\xi$.

c) $P(\xi \in (\pi/4 ; 2\pi/3))$.

2.6. Se dă densitatea de repartiţie a unei variabile aleatoare ξ

$$f_\xi(x) = \begin{cases} x - \dfrac{1}{2}, & x \in [1;2] \\ 0, & x \notin [1;2] \end{cases}$$

Să se afle:

a) Funcţia de repartiţie $F_\xi(x)$.

b) Valoarea medie $M\xi$, dispersia $D\xi$ şi abaterea medie pătratică $\sigma\xi$.

c) $P(\xi \in (0;2))$.

Să se construiască graficele funcţiilor $F_\xi(x)$ şi $f_\xi(x)$.

2.7. Variabila aleatoare ξ are densitatea de repartiţie

$$f_\xi(x) = \frac{2c}{1+x^2}.$$

Să se afle:

a) Parametrul c.

b) Funcţia de repartiţie $F_\xi(x)$.

c) Valoarea medie $M\xi$.

d) $P(\xi \in [0;1])$.

2.8. Variabila aleatoare ξ a re densitatea de repartiţie

$$f_\xi(x) = \begin{cases} c\,arctg\,x, & x \in [0;1] \\ 0, & x \notin [0;1]. \end{cases}$$

Să se afle:

a) Parametrul c.

b) Funcţia de repartiţie $F_\xi(x)$.

c) Valoarea medie $M\xi$ şi dispersia $D\xi$.

d) $P(\xi \in [0{,}5;2{,}5])$.

Să se deseneze graficele funcţiilor $F_\xi(x)$ şi $f_\xi(x)$.

2.9. Se dă densitatea de repartiţie a unei variabile aleatoare ξ

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{c^2 - x^2}}, & x \in [-c;c] \\ 0, & x \notin [-c;c]. \end{cases}$$

Să se afle:

a) Valoarea medie şi dispersia variabilei aleatoare ξ.

b) $P(\xi \in [0;c/2])$.

2.10. Variabila aleatoare ξ are densitatea de repartiţie

$$f_\xi(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}.$$

Să se afle:

a) Funcţia de repartiţie $F_\xi(x)$.

b) Valoarea medie $M\xi$ şi dispersia $D\xi$.

c) $P(\xi \in [-1/2; 1/2])$.

2.11. Variabila aleatoare ξ are funcţia de repartiţie

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1 \\ a + b \arcsin x, & -1 < x \le 1 \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Să se afle:

a) Parametrii a şi b.

b) Densitatea de repartiţie $f_\xi(x)$.

c) Valoarea medie şi dispersia variabilei aleatoare ξ.

2.12. Variabila aleatoare ξ are densitatea de repartiţie

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \dfrac{x^m}{m!} e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$$

Să se afle valoarea medie, dispersia şi abaterea medie pătratică a variabilei aleatoare ξ.

2.13. Variabila aleatoare ξ are funcţia de repartiţie

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x^2/16, & 0 < x \le 2 \\ x - 7/4, & 2 < x \le 11/4 \\ 1, & x > 11/4 \end{cases}$$

Să se afle:

a) Densitatea de repartiţie $f_\xi(x)$.

b) Valoarea medie $M\xi$, dispersia $D\xi$ şi abaterea medie pătratică $\sigma\xi$.

c) $P(\xi \in [1; 3/2])$.

Să se deseneze graficele funcţiilor $F_\xi(x)$ şi $f_\xi(x)$.

2.14. Variabila aleatoare ξ are funcţia de repartiţie

$$F_\xi(x) = a + b\, arctg\, x.$$

Să se afle:

a) Parametrii a şi b.

b) Densitatea de repartiţie $f_\xi(x)$.

Să se traseze graficele funcţiilor $F_\xi(x)$ şi $f_\xi(x)$.

2.15. Variabila aleatoare ξ are densitatea de repartiţie

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ a/x^2, & x > 1. \end{cases}$$

Să se afle:

a) Parametrul a.

b) Funcţia de repartiţie $F_\xi(x)$.

c) $P(\xi \in [3; 4])$.

2.16. Variabila aleatoare ξ are densitatea de repartiţie

$$f_\xi(x) = \begin{cases} -(3/4)x^2 + (9/2)x - 6, & x \in [2;4] \\ 0, & x \notin [2;4] \end{cases}$$

Să se afle:

a) Funcţia de repartiţie $F_\xi(x)$.

b) Valoarea medie $M\xi$ şi dispersia $D\xi$.

2.17. Se dă densitatea de repartiţie a variabilei aleatoare ξ

$$f_\xi(x) = \begin{cases} -(3/4)x^2 + 6x - 45/4, & x \in [3;5] \\ 0, & x \notin [3;5] \end{cases}$$

Să se afle:

a) Funcţia de repartiţie $F_\xi(x)$.

b) Valoarea medie $M\xi$ şi dispersia $D\xi$.

2.18. Se dă funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare ξ

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2 \\ (x-2)^2, & 2 < x \le 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}.$$

Să se afle:

a) Densitatea de repartiţie $f_\xi(x)$.

b) Valoarea medie $M\xi$, dispersia $D\xi$ şi abaterea medie pătratică $\sigma\xi$.

c) $p_1 = P(\xi \in [1;2{,}5])$, $p_2 = P(\xi \in [2{,}5;3{,}5])$.

§3. Variabile aleatoare clasice

În teoria probabilităţilor există câteva categorii de variabile aleatoare, care datorită utilizării lor largi în diverse domenii au fost numite clasice.

a. Repartiţia binomială

Fie că se efectuează n experimente (probe) independente. Rezultatul unui experiment este evenimentul A sau $\overline{A}$. $P(A)=p$; $P(\overline{A}) = 1-p = q$. Evident, numărul de realizări al evenimentului A în aceste n experimente este o variabilă aleatoare ξ cu valorile posibile $0, 1, 2, \ldots, m, \ldots, n$. Probabilităţile acestor valori se vor calcula prin formula lui Bernoulli, astfel

$$P(\xi = m) = P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}. \tag{3.1}$$

Scriind legea de repartiţie a acestei variabile în forma (1.1), venim la următoarea matrice

$$\xi : \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & m & \ldots & n \\ q^n & npq^{n-1} & \ldots & C_n^m p^m q^{n-m} & \ldots & p^n \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

Definiţia 3.1. Variabila aleatoare ξ cu legea de repartiţie (3. 2) se numeşte variabilă **aleatoare binomială. Repartiţia** (3. 2) se numeşte **repartiţie binomială**. Denumirea de binomială este motivată de faptul că probabilitatea (3.1) reprezintă termenul general al dezvoltării binomului Newton $(q+p)^n$:

$$(q+p)^n = q^n + npq^{n-1} + \ldots + C_n^m p^m q^{n-m} + \ldots + nqp^{n-1} + p^n.$$

Funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare (3. 2) va fi (3. 3)

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \sum_{m=0}^{n-1} P_n(m), & 0 < m \le n \\ 1, & m > n \end{cases} \quad (3.3)$$

Să calculăm valoarea medie $M\xi$ a variabilei aleatoare binomiale. Avem

$$M\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = \sum_{m=0}^{n} m C_n^m p^m q^{n-m}. \quad (3.4)$$

Considerăm egalitatea

$$(q+pt)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m (pt)^m q^{n-m}. \quad (3.5)$$

Derivăm ambele părţi ale (3. 5) în raport cu t. Obţinem

$$n(q+pt)^{n-1} p = \sum_{m=0}^{n} m C_n^m p^m t^{m-1} q^{n-m}. \quad (3.6)$$

Dacă luăm în (3. 6) $t = 1$ şi ţinem cont de faptul că $p + q = 1$ venim la relaţia

$$np = \sum_{m=0}^{n} m C_n^m p^m q^{n-m}. \quad (3.7)$$

Comparând egalităţile (3. 4) şi (3.7) concludem,

$$M\xi = np. \tag{3. 8}$$

Pentru dispersie vom folosi formula $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$. Preventiv calculăm momentul iniţial de ordinul doi al variabilei binomiale ξ

$$M\xi^2 = \sum_{m=0}^{n} m^2 C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Vom înmulţi ambele părţi ale egalităţii (3. 6) prin t şi vom obţine

$$n(q+pt)^{n-1}pt = \sum_{m=0}^{n} m C_n^m p^m t^m q^{n-m}. \tag{3. 9}$$

Derivăm egalitatea (3. 9) în raport cu t şi obţinem

$$np(q+pt)^{n-1} + n(n-1)(q+pt)^{n-2}p^2 t = \sum_{m=0}^{n} m^2 C_n^m p^m t^{m-1} q^{n-m}.$$

De aici pentru $t = 1$ şi $p + q = 1$ avem $M\xi^2 = np + n(n-1)p^2$. Prin urmare, ţinând cont de (3. 8), obţinem pentru dispersie

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = np + n(n-1)p^2 - (np)^2 = np(1-p) = npq.$$

Deci, pentru variabila aleatoare binomială

$$D\xi = npq. \tag{3.10}$$

Exemplul 3.1. Se trage de trei ori într-o ţintă. Probabilitatea de a nimeri la o tragere este egală cu 0,8. Să se afle legea de repartiţie, funcţia de repartiţie $F_\xi(x)$, valoarea medie $M\xi$ şi dispersia $D\xi$ a variabilei aleatoare ξ – numărul de nimeriri în ţintă.

Rezolvare. Considerăm evenimentul A – «ţinta este atinsă la o tragere». Atunci $p = P(A) = 0{,}8$; $q = P(\overline{A}) = 1 - p = 0{,}2$. Valorile posibile ale variabilei aleatoare ξ sunt 0, 1, 2, 3. Probabilităţile acestor valori le vom calcula cu formula lui Bernoulli:

$$P(\xi = 0) = P_3(0) = C_3^0 (0{,}8)^0 (0{,}2)^3 = 0{,}008,$$

$$P(\xi = 1) = P_3(1) = C_3^1 (0{,}8)^1 (0{,}2)^2 = 0{,}096,$$

$$P(\xi = 2) = P_3(2) = C_3^2 (0{,}8)^2 (0{,}2)^1 = 0{,}384,$$

$$P(\xi = 3) = P_3(3) = C_3^3 (0{,}8)^3 (0{,}2)^0 = 0{,}512.$$

Deci, variabila aleatoare binomială ξ va avea legea de repartiţie

$$\xi : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0{,}008 & 0{,}096 & 0{,}384 & 0{,}512 \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

Funcţia de repartiţie (3.3) a variabilei ξ având legea (3.11) va fi

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 0{,}008, & 0 < x \le 1 \\ 0{,}104, & 1 < x \le 2 \\ 0{,}488, & 2 < x \le 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases} \tag{3.12}$$

Valoarea medie $M\xi$, după cum rezultă din (3. 8) va fi

$$M\xi = np = 3 \cdot 0{,}8 = 2{,}4.$$

Dispersia, conform (3.10) va fi

$$D\xi = npq = 3 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}48.$$

Răspuns: Legea de repartiţie şi funcţia de repartiţie sunt reprezentate de (3.11) şi respectiv de (3.12). $M\xi = 2{,}4$. $D\xi = 0{,}48$.

b. Repartiţia Poisson

Procedura de calcul a probabilităţii $P_n(m)$ devine anevoioasă când n este mare. Presupunem că odată cu creşterea lui n probabilitatea $p = P(A)$ descreşte, devenind suficient de mică ($p \leq 0{,}1$). La fel vom admite, că produsul $np = \lambda$ rămâne constant. Calculăm:

$$\lim_{n\to\infty} P_n(m) = \lim_{n\to\infty} C_n^m p^m q^{n-m} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^m\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-m} =$$

$$= \frac{\lambda^m}{m!} \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{n^m} \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-m} = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}.$$

Astfel,

$$\lim_{n\to\infty} P_n(m) = P(m) = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}. \qquad (3.13)$$

Aşadar, pentru valori mari ale lui n, avem $P_n(m) \approx P(m)$ şi din (3.13) obţinem repartiţia

$$\xi : \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & m & \cdots \\ e^{-\lambda} & \lambda e^{-\lambda} & \cdots & \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} & \cdots \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

Uşor se verifică

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1.$$

Definiţia 3.2. Variabila aleatoare ξ, cu legea de repartiţie (3.14) se numeşte **variabilă aleatoare Poisson**. Repartiţia (3.14) se numeşte **repartiţie Poisson**.

Calculăm valoarea medie $M\xi$ a repartiţiei Poisson. În virtutea relaţiei (3.14) avem

$$M\xi = \sum_{m=0}^{\infty} mP(\xi = m) = \sum_{m=0}^{\infty} m\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda} = \sum_{m=1}^{\infty} m\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!} =$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda \quad (k = m-1).$$

Astfel,

$$M\xi = \lambda. \tag{3.15}$$

Pentru calculul dispersiei vom folosi formula $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$, de aceea mai întâi calculăm $M\xi^2$, reieşind din (3.14)

$$M\xi^2 = \sum_{m=0}^{\infty} m^2 P(\xi = m) = \sum_{m=0}^{\infty} m^2 \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} = \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} =$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} [(m-1)+1] \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} (m-1) \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!} + \lambda e^{-\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!} =$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\lambda^{m-2}}{(m-2)!} + \lambda e^{-\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!} = \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} + \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda^2 + \lambda.$$

Luând în evidenţă (3.15) pentru dispersia $D\xi$ obţinem

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

Deci,

$$D\xi = \lambda. \tag{3.16}$$

Remarcă: Relaţiile (3.15) şi (3.16) ne indică sensul probabilistic al parametrului λ din repartiţia Poisson: acest parametru reprezintă valoarea medie şi dispersia variabilei aleatoare Poisson.

Exemplul 3.2. O staţie telefonică deserveşte 1000 de abonaţi. Într-un interval dat de timp abonatul apelează la serviciul staţiei independent de alţii cu probabilitatea $p = 0{,}005$. Să se calculeze probabilitatzea că în intervalul dat s-au înregistrat nu mai mult de 7 apeluri.

Rezolvare. Avem: $n = 1000$; $p = P(A) = 0{,}005$. Deci $\lambda = np = 1000 \cdot 0{,}005 = 5$. Fie ξ – numărul de apeluri. Atunci

$$P(\xi \le 7) = \sum_{m=0}^{7} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} = \sum_{m=0}^{7} \frac{5^m}{m!} e^{-5} =$$

$\frac{5^7}{7!} e^{-5} = 0,092$

$$= e^{-5}\left(1 + 5 + \frac{5^2}{2} + \frac{5^3}{6} + \frac{5^4}{24} + \frac{5^5}{120} + \frac{5^6}{720} + \frac{5^7}{5040}\right) \approx 0{,}867.$$

Răspuns. $P(\xi \le 7) \approx 0{,}867.$

c. Repartiţia geometrică

Fie că se fac experimente independente, iar în rezultatul fiecăruia din ele se realizează A sau $\overline{A}$. $P(A) = p$, $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - p = q$. Seria de experimente continuă până la realizarea evenimentului A. Notăm prin ξ – numărul de experimente, care se fac. Evident, ξ este o variabilă aleatoare discretă cu valorile posibile $1, 2, \ldots, m, \ldots$, şi

$$P(\xi = m) = q^{m-1} p. \tag{3.17}$$

Probabilitatea (3.17) se obţine cu formula de înmulţire a probabilităţilor evenimentelor independente.

Repartiţia variabilei aleatoare ξ va fi următoarea

$$\xi : \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & m & & \ldots \\ p & qp & \ldots & q^{m-1} & p & \ldots \end{pmatrix}. \tag{3.18}$$

Definiţia 3.3. Variabila aleatoare ξ, cu legea de repartiţie (3.18) se numeşte variabilă aleatoare **geometrică**, iar matricea (3.18) se numeşte **repartiţie geometrică .**

Remarcă. Repartiţia (3.18) se numeşte geometrică deoarece probabilităţile (3.17) reprezintă o progresie geometrică infinit descrescătoare cu raţia $q < 1$ şi

$$\sum_{m=1}^{\infty} P(\xi = m) = \sum_{m=1}^{\infty} pq^{m-1} = \frac{p}{1-q} = 1. \qquad 3.19)$$

Suma probabilităţilor din (3.19) fiind unu, confirmă matricei (3.18) statutul de repartiţie a variabilei aleatoare ξ.

Calculăm valoarea medie $M\xi$ şi dispersia $D\xi$ a repartiţiei geometrice.

$$M\xi = \sum_{m=1}^{\infty} mq^{m-1}p = p\sum_{m=1}^{\infty} mq^{m-1} = p\sum_{m=1}^{\infty} m\frac{d}{dq}(q^m) =$$

$$= p\frac{d}{dq}\left(\frac{q}{1-q}\right) = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}.$$

$$M\xi^2 = \sum_{m=1}^{\infty} m^2 q^{m-1}p = p\sum_{m=1}^{\infty} m^2 q^{m-1} = p\frac{d}{dq}\left(\sum_{m=1}^{\infty} mq^m\right) =$$

$$= p\frac{d}{dq}\left(q\sum_{m=1}^{\infty} mq^{m-1}\right) = p\frac{d}{dq}\left(q\frac{d}{dq}\sum_{m=1}^{\infty} q^m\right) =$$

$$= p\frac{d}{dq}\left(q\frac{d}{dq}\left(\frac{q}{1-q}\right)\right) = p\frac{d}{dq}\left(\frac{q}{p^2}\right) =$$

$$= p\frac{d}{dq}\left(\frac{q}{(1-q)^2}\right) = \frac{1+q}{p^2}.$$

Prin urmare, după cum rezultă din relaţia pentru $M\xi$,

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \frac{1+q}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

Astfel, s-a obţinut (3. 20), deci valoarea medie $M\xi$ şi dispersia $D\xi$ a repartiţiei geometrice:

$$M\xi = \frac{1}{p}; \quad D\xi = \frac{q}{p^2}. \tag{3.20}$$

Vom continua cu studiul unor variabile aleatoare clasice continue.

d. Repartiţia uniformă

Definiţia 3.4. Se spune că variabila aleatoare continuă ξ are repartiţia uniformă pe $[a; b]$, dacă:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a; b] \\ 0, & x \notin [a; b]. \end{cases} \tag{3.21}$$

Vom afla funcţia de repartiţie $F_\xi(x)$ a acestei variabile aleatoare. Integrând densitatea de repartiţie (3. 21) considerăm trei cazuri:

a). Fie $x \le a$. Atunci,

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(u)\,du = \int_{-\infty}^{x} 0\,du = 0;$$

b). Fie $a < x \le b$. Atunci,

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(u)\,du = \int_{-\infty}^{a} f_\xi(u)\,du + \int_{a}^{x} f_\xi(u)\,du = \int_{-\infty}^{a} 0\,du + \int_{a}^{x} \frac{du}{b-a} = \frac{x-a}{b-a};$$

c). Fie $x > b$. Atunci,

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(u)\,du = \int_{-\infty}^{a} f_\xi(u)\,du + \int_{a}^{b} f_\xi(u)\,du + \int_{b}^{x} f_\xi(u)\,du =$$

$$= \int_{a}^{b} f_\xi(u)\,du = \int_{a}^{b} \frac{du}{b-a} = \frac{b-a}{b-a} = 1.$$

Prin urmare,

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x \le b \\ 1, & x > b \end{cases} \qquad (3.22)$$

Pentru valoarea medie $M\xi$, avem:

$$M\xi = \int_{a}^{b} x\, f_\xi(x)\,dx = \int_{a}^{b} \frac{x\,dx}{b-a} = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2}\Bigg|_{b}^{a} = \frac{(b^2-a^2)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}.$$

Deci

$$M\xi = \frac{a+b}{2}. \tag{3.23}$$

Calculăm $M\xi^2$ pentru a veni la dispersia $D\xi$.

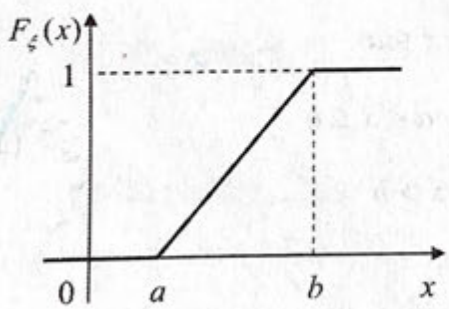
$$M\xi^2 = \int_a^b x^2 f_\xi(x)\,dx = \int_a^b \frac{x^2 dx}{b-a} = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_a^b = \frac{(b^3-a^3)}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}.$$

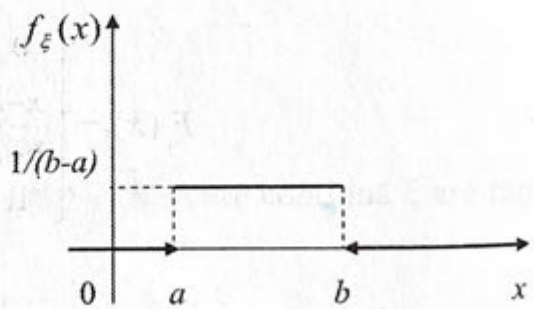
$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Deci,

$$D\xi = \frac{(b-a)^2}{12}. \tag{3.24}$$

Graficele funcţiilor $F_\xi(x)$ şi $f_\xi(x)$ sunt prezentate mai jos:





Exemplul 3.3. Variabila aleatoare ξ are densitatea de repartiţie

$$f_\xi(x) = \begin{cases} c, & x \in [1,5] \\ 0, & x \notin [1,5]. \end{cases}$$

Să se afle:

a) Valoarea constantei c, pentru care ξ va avea repartiţia uniformă pe intervalul $[1, 5]$.

b) Funcţia de repartiţie $F_\xi(x)$.

c) Valoarea medie $M\xi$, dispersia $D\xi$ şi abaterea medie pătratică $\sigma\xi$.

Rezolvare. a) Vom determina valoarea lui c din relaţia

$$\int_a^b f_\xi(x)\,dx = 1.$$

Avem, deci $\int_1^5 c\,dx = 1$. De unde $c = 1/(5-1) = 1/4$. Prin urmare, densitatea de repartiţie uniformă pe $[1, 5]$ va fi

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 1/4, & x \in [1,5] \\ 0, & x \notin [1,5]. \end{cases} \tag{3.25}$$

b) Funcţia de repartiţie $F_\xi(x)$ a acestei variabile aleatoare va fi determinată de (3.22):

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ \dfrac{x-1}{4}, & 1 < x \le 5 \\ 1, & x > 5. \end{cases} \tag{3.26}$$

c) Folosind (3.23) şi (3.24) vom afla $M\xi$, $D\xi$ şi $\sigma\xi$:

$$M\xi = \frac{a+b}{2} = \frac{1+5}{2} = 3;$$

$$D\xi = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(5-1)^2}{12} = \frac{4}{3};$$

$$\sigma\xi = \sqrt{D\xi} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Răspuns. Densitatea de repartiţie $f_\xi(x)$ este dată de (3. 25), funcţia de repartiţie $F_\xi(x)$ - de (3. 26), iar caracteristicile numerice sunt: $M\xi = 3$; $D\xi = 4/3$; $\sigma\xi = 2\sqrt{3}/3$.

e. Repartiţia exponenţială

Definiţia 3.5. Variabila aleatoare continuă ξ, se numeşte **exponenţială,** dacă densitatea de repartiţie a ei este

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \end{cases} \tag{3.27}$$

unde $\lambda > 0$ este un parametru.

Să aflăm funcţia de repartiţie $F_\xi(x)$ a variabilei aleatoare exponenţiale. Reieşind din (3. 27), considerăm două cazuri:

a). Fie $x \leq 0$, atunci

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(u)du = \int_{-\infty}^{x} 0\, du = 0;$$

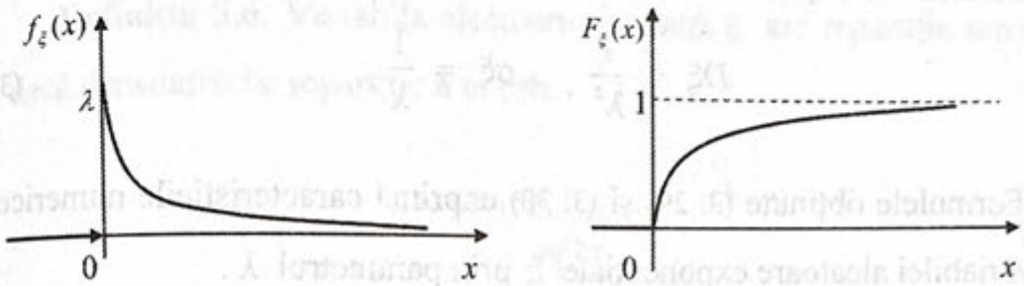
b). Pentru $x > 0$, avem

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(u)du = \int_{-\infty}^{0} f_\xi(u)du + \int_{0}^{x} f_\xi(u)du = \int_{-\infty}^{0} 0\,du + \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda u}du = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Prin urmare,

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}. \tag{3.28}$$

Graficele funcţiilor (3. 27) şi (3. 28) sunt prezentate mai jos:



Calculăm valoarea medie $M\xi$, dispersia $D\xi$ şi abaterea medie patratică $\sigma\xi$ a variabilei exponenţiale.

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)\,dx = \lambda\int_{0}^{\infty} x e^{-\lambda x}\,dx.$$

Integrăm prin părţi notând:

$$u = x; \quad du = dx;$$
$$dv = e^{-\lambda x}dx; \quad v = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}.$$

Aplicarea formulei de integrare prin părţi ne dă

$$M\xi = -xe^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda}.$$

Deci,

$$M\xi = \frac{1}{\lambda}. \tag{3. 29}$$

În mod similar se calculează $D\xi$. Folosim formula $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$.

Pentru obţinerea cantităţii $M\xi^2$ vom integra prin părţi de două ori. Definitiv se obţine

$$D\xi = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \sigma\xi = \frac{1}{\lambda}. \tag{3.30}$$

Formulele obţinute (3. 29) şi (3. 30) exprimă caracteristicile numerice ale variabilei aleatoare exponenţiale ξ prin parametrul λ.

Exemplul 3.4. Variabila aleatoare ξ reprezintă durata de funcţionare a unui bec şi are repartiţia exponenţială. Durata medie fiind de 400 ore, să se afle $P(\xi \geq 600)$.

Rezolvare. Avem: $M\xi = 400$. Prin urmare $\lambda = \frac{1}{400}$. Deci,

$$P(\xi \geq 600) = 1 - P(\xi < 600) = 1 - F_\xi(600) =$$

$$= 1 - \left(1 - e^{-(1/400)600}\right) = e^{\frac{-3}{2}} \approx 0{,}22.$$

Răspuns. $P(\xi \geq 600) \approx 0,22$.

Un rol deosebit printre repartiţiile variabilelor aleatoare continue îi revine repartiţiei normale (Gauss).

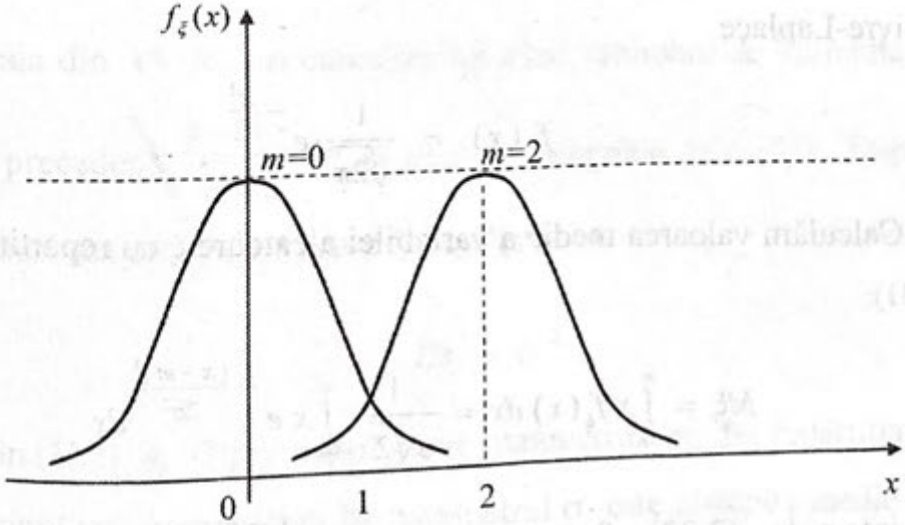
f. Repartiţia normală

Definiţia 3.6. Variabila aleatoare continuă ξ are repartiţia **normală**, dacă densitatea de repartiţie a ei este

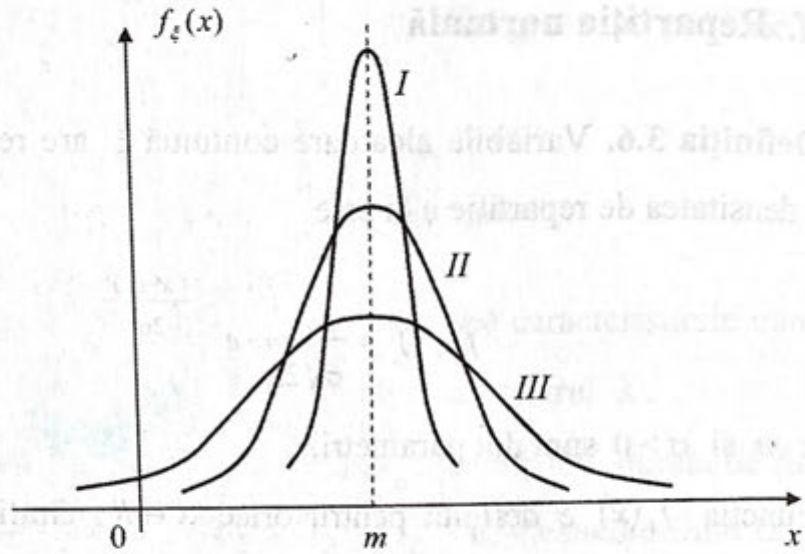
$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (3.31)$$

unde m şi $\sigma > 0$ sunt doi parametri.

Funcţia $f_\xi(x)$ e definită pentru orice $x \in R$. Graficul ei are alura (forma) unui clopot şi este simetric faţă de dreapta $x = m$. Valoarea maximă este atinsă pentru $x = m$ şi este egală cu $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$. Atunci când variază parametrul m graficul funcţiei $f_\xi(x)$ suferă translaţii în direcţia axei Ox fără să-şi schimbe forma.



Atunci când se schimbă σ alura clopotelui se schimbă: cu cât σ este mai mare cu atât alura clopotelui este mai plată. Odată cu micşorarea lui σ alura clopotelui devine mai ascuţită. În figura de mai jos sunt date trei curbe normale (I, II, III) pentru $x = m$; $\sigma_I < \sigma_{II} < \sigma_{III}$.



Punctele $x_1 = m - \sigma$ şi $x_2 = m + \sigma$ sunt puncte de inflexiune ale graficului. Mulţimea tuturor variabilelor aleatoare repartizate normal cu parametrii m şi σ se notează prin $N(m\,;\,\sigma^2)$.

Remarcă. Dacă luăm în (3. 31) $m = 0$ şi $\sigma = 1$, obţinem (3. 32) - densitatea de repartiţie standard $N(0\,;\,1)$, utilizată în teorema locală Moivre-Laplace

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} . \qquad (3.32)$$

Calculăm valoarea medie a variabilei aleatoare ξ cu repartiţia normală (3. 31):

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)\, dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\, dx . \qquad (3.33)$$

În integrala (3.33) facem substituţia $\frac{x-m}{\sigma} = t$, de unde rezultă $x = m + \sigma t$, $dx = \sigma dt$. Atunci,

$$M\xi = \frac{m}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t\, e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt . \qquad (3.34)$$

Integrala din primul termen al sumei (3.34) este binecunoscuta integrală Euler-Poisson $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}$, iar cea din termenul al doilea este egală cu zero ca o integrală de la o funcţie impară în limite simetrice.

Remarcă. Este utilizată şi următoarea variantă a integralei Euler – Poisson

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi} .$$

Definitiv obţinem

$$M\xi = m . \tag{3. 35}$$

Calculăm dispersia:

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^2 f_\xi(x)\, dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx . \tag{3. 36}$$

Integrala din (3. 36) se calculează făcând schimbul de variabilă ca şi în cazul precedent $\frac{x-m}{\sigma} = t$, şi ulterior integrând prin părţi. După aceste proceduri se ajunge la următorul rezultat,

$$D\xi = \sigma^2 . \tag{3. 37}$$

Din (3.35) şi (3.37) concludem: parametrul m din repartiţia normală reprezintă valoarea medie, iar parametrul σ este abaterea medie pătratică a variabilei aleatoare ξ.

Funcţia de repartiţie a variabilei din repartiţia normală $N(m; \sigma^2)$ va fi

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(u)\,du = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(u-m)^2}{2\sigma^2}}\,du. \tag{3.38}$$

Facem în integrala (3.38) schimbul de variabilă $\frac{u-m}{\sigma} = t$, $u = m + \sigma t$, $du = \sigma dt$. Prin urmare,

$$F_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt + \int_{0}^{\frac{x-m}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt. \tag{3.39}$$

Prima integrală din partea dreaptă a (3. 39) este integrala de tip Euler-Poisson şi deci $\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \sqrt{2\pi}/2$, iar a doua integrală se exprimă prin funcţia lui Laplace $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$. Se obţine următoarea expresie pentru funcţia de repartiţie normală $N(m;\sigma^2)$,

$$F_\xi(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right). \tag{3.40}$$

Remarcă. Forma (3.40) a funcţiei de repartiţie normale este binevenită, deoarece ea reduce calculul valorilor ei la valorile funcţiei lui Laplace, pentru care sunt întocmite tabele speciale.

Se ştie că $P(x_1 \le \xi < x_2) = F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1)$. Pentru o variabilă aleatoare repartizată normal $N(m;\sigma^2)$ din (3.40) vom avea

$$P(x_1 \le \xi < x_2) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x_2-m}{\sigma}\right) - \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{x_1-m}{\sigma}\right),$$

deci

$$P(x_1 \le \xi < x_2) = \Phi\left(\frac{x_2-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-m}{\sigma}\right). \tag{3.41}$$

Uneori se cere de calculat $P(|\xi - m| < \varepsilon)$. Vom aplica (3.41):

$$P(|\xi - m| < \varepsilon) = P(-\varepsilon < \xi - m < \varepsilon) = P(m - \varepsilon < \xi < m + \varepsilon) =$$

$$= \Phi\left(\frac{m+\varepsilon-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{m-\varepsilon-m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Prin urmare,

$$P(|\xi - m| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right). \tag{3.42}$$

Dacă vom lua în (3.42) $\varepsilon = 3\sigma$ vom obţine

$$P(|\xi - m| < 3\sigma) = 2\Phi(3) = 2 \cdot 0{,}49865 = 0{,}9973,$$

deci,

$$P(|\xi - m| < 3\sigma) = 0{,}9973. \tag{3.43}$$

Relaţia (3. 43) ne arată că valorile variabilei $N(m; \sigma^2)$ aproape sigur aparţin intervalului $(m - 3\sigma; m + 3\sigma)$. Această afirmaţie este cunoscută în teoria probabilităţilor ca " **regula celor 3 σ** ".

Exemplul 3.5. Variabila aleatoare ξ este repartizată normal cu parametrii $m = 2$ şi $\sigma = 1$. Să se calculeze $P(0 \le \xi < 3)$.

Rezolvare. Vom aplica (3.41) pentru $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $m = 2$, $\sigma = 1$.

$$P(0 \le \xi < 3) = \Phi\left(\frac{3-2}{1}\right) - \Phi\left(\frac{0-2}{1}\right) = \Phi(1) - \Phi(-2) = \Phi(1) + \Phi(2) =$$

$$= 0{,}3413 + 0{,}4772 = 0{,}8185.$$

Răspuns: $P(0 \le \xi < 3) \approx 0{,}819$.

Probleme

3.1. Un dispozitiv are 3 elemente, care funcţionează independent. Probabilitatea, că la un moment dat elementul nu funcţionează, este egală cu 0,1. Să se afle legea de repartiţie a numărului de elemente care pot ieşi din funcţie.

3.2. Un lot conţine 10% piese defectate. La întâmplare se iau 4 piese. Să se scrie legea de repartiţie a variabilei aleatoare ξ - numărul de piese defectate printre cele 4 luate.

3.3. Un vânător, care dispune de 4 cartuşe trage până la atingerea ţintei (sau până se termină cartuşele). Să se afle valoarea medie şi dispersia numărului de cartuşe consumat, dacă probabilitatea atingerii ţintei la o tragere este 0, 25.

3.4. Se trage într-o ţintă până la 2 nimeriri. Să se afle valoarea medie a numărului de trageri, dacă probabilitatea de a nimeri ţinta la o tragere este egală cu 0, 2.

3.5. Pe parcursul unei ore la o staţie telefonică sosesc în medie 60 apeluri. Să se calculeze probabilitatea, că pe durata a 30 *sec* nu va fi nici un apel.

3.6. Un text cu 100 de pagini conţine 500 de greşeli. Să se calculeze probabilitatea, că o pagină conţine cel puţin 3 greşeli.

3.7. Variabila aleatoare ξ are repartiţia normală cu valoarea medie $M\xi = 40$ şi dispersia $D\xi = 200$. Să se calculeze $P(30 < \xi < 80)$.

3.8. Statura unui bărbat matur este o variabilă aleatoare, care are repartiţia normală. Fie că statura medie este egală cu 175 *cm*, iar abaterea medie pătratică – 6 *cm*. Să se afle probabilitatea, că cel puţin unul din 5 bărbaţi, luaţi la întâmplare, va avea o statură cuprinsă între 170 *cm* şi 180 *cm*.

3.9. Variabila aleatoare ξ are repartiţia normală cu densitatea

$$f_\xi(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{50}}.$$

Să se afle valoarea medie $M\xi$, dispersia $D\xi$ şi $P(3 \le \xi \le 8)$.

3.10. Valoarea medie şi abaterea medie pătratică a unei variabile aleatoare normale sunt egale cu 10 şi 2 respectiv. Să se afle probabilitatea, că în rezultatul unei probe această variabilă să ia valori din intervalul (12 ; 14).

3.11. Variabila aleatoare ξ este repartizată normal cu valoarea medie $M\xi = 0$ şi dispersia $D\xi = 1$. Să se calculeze $P(-0{,}5 < \xi < -0{,}1)$ şi $P(1 < \xi < 2)$.

3.12. Eroarea comisă la o măsurare este variabilă aleatoare, repartizată normal cu valoarea medie $M\xi = 0$ şi abaterea medie pătratică $\sigma\xi = 3$. Să se afle $P(\xi \in [-9 ; 9])$.

3.13. Câte zaruri trebuie de aruncat pentru ca valoarea medie $M\xi$ variabilei aleatoare ξ – numărul de zaruri cu 2 puncte apărute, fie egală cu 6?

3.14. Pe o masă s-au aruncat 25 de monede. Să se calculez $P(8 \le \xi \le 15)$, unde ξ este numărul stemelor căzute.

3.15. Variabila aleatoare ξ are funcţia de repartiţie

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-0,6x}, & x \ge 0 \end{cases} .$$

Să se afle $M\xi$, $D\xi$ şi $P(\xi \in [2;5])$.

3.16. Variabila aleatoare ξ are densitatea de repartiţie

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 10e^{-10x}, & x \ge 0 \end{cases} .$$

Să se afle valoarea medie $M\xi$, dispersia $D\xi$ şi abaterea me pătratică $\sigma\xi$ a acestei variabile aleatoare.

3.17. Rezultatele măsurării distanţei dintre două localităţi sunt varia aleatoare repartizate normal cu parametrii $m = 16km$, $\sigma = 1($ Fie, ξ – distanţa dintre aceste localităţi. Să se afle:

a) $P(\xi \ge 15,8\ km)$;

b) $P(\xi \le 16,25\ km)$;

c) $P(15,75\ km \le \xi \le 16,3\ km)$.

§4.Variabile aleatoare bidimensionale discrete

Deseori rezultatul experimentului este descris de mai multe variabile aleatoare, sau de un vector cu mai multe dimensiuni.

Exemplul 4.1. Locul căderii obuzului la tragere este determinat de 2 numere: abscisa şi ordonata punctului de cădere.

Aceste coordonate sunt întâmplătoare şi depind de rezultatul fiecărei trageri, deci pot fi interpretate ca o variabilă aleatoare cu două componente (coordonate) sau **variabilă aleatoare bidimensională**. Vom nota componentele ei prin ξ şi η. Variabila bidimensională va fi notată cu ζ. Astfel $\zeta = (\xi ; \eta)$ este variabilă aleatoare bidimensională (vector aleator) având componentele ξ şi η.

Mulţimea valorilor posibile $\{x ; y\} = \{(x ; y) : \xi = x ; \eta = y\}$ poate fi interpretată ca o mulţime de puncte în plan, ale căror coordonate carteziene sunt x şi y.

Ca şi în cazul variabilelor aleatoare unidimensionale vom distinge **variabile aleatoare bidimensionale discrete** şi **variabile aleatoare bidimensionale continue**.

În acest paragraf vom studia variabilele aleatoare bidimensionale discrete.

Definiţia 4.1. Se numeşte **lege de repartiţie** a variabilei aleatoare bidimensionale discrete un tabel, unde sunt trecute valorile posibile:

$$\xi = x_i,\ i = 1, 2, \ldots, m;\ \eta = y_j,\ j = 1, 2, \ldots, n$$

şi probabilităţile respective

$$p_{ij} = P(\xi = x_i ;\ \eta = y_j). \tag{4.1}$$

Astfel, repartiţia unei variabile aleatoare bidimensionale discrete o putem prezenta în forma unui tabel cu dublă intrare:

Tabelul 4.1.

$\xi \backslash \eta$	y_1	y_2	$\dots$	y_j	$\dots$	y_n	$P(\xi = x_i)$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\dots$	p_{1j}	$\dots$	p_{1n}	p_1
x_2	p_{21}	p_{22}	$\dots$	p_{2j}	$\dots$	p_{2n}	p_2
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\dots$	p_{ij}	$\dots$	p_{in}	p_i
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_m	p_{m1}	p_{m2}	$\dots$	p_{mj}	$\dots$	p_{mn}	p_m
$P(\eta = y_j)$	q_1	q_2	$\dots$	q_j	$\dots$	q_n	

Evenimentele $\{\xi = x_i ; \eta = y_j\}$, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$, formează un sistem complet de evenimente, de aceea

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1. \tag{4.2}$$

Pe de altă parte

$p_{i1} + p_{i2} + \dots + p_{in} = P(\xi = x_i ; \eta = y_1) + P(\xi = x_i ; \eta = y_2) + \dots +$

$+ P(\xi = x_i ; \eta = y_n) = P(\xi = x_i ;$ $\eta =$ orice valoare posibilă $) =$

$= P(\xi = x_i) = p_i$.

Prin urmare,

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = p_i, \quad i = 1, \dots, m. \tag{4.3}$$

În mod similar

$$p_{1j} + p_{2j} + \ldots + p_{mj} = P(\xi = x_1;\ \eta = y_j) + P(\xi = x_2;\ \eta = y_j) + \ldots +$$

$$+ P(\xi = x_m;\ \eta = y_j) = P(\xi = \text{orice valoare posibilă};\ \eta = y_j) =$$

$$= P(\eta = y_j) = q_j.$$

$$\sum_{i=1}^{m} p_{ij} = q_j,\quad j = 1, \ldots, n. \tag{4. 4}$$

Astfel, pentru a obţine probabilitatea ca ξ să ia valoarea x_i vom face suma probabilităţilor (4. 3) din linia i a tabelului 4.1. Analogic, pentru a obţine probabilitatea ca η să ia valoarea y_j vom face suma probabilităţilor (4. 4) din coloana j a acestui tabel. Deci, variabila aleatoare ξ (prima componentă a variabilei bidimensionale ζ) are probabilităţile valorilor posibile ale sale pe coloana mărginală din dreapta a tabelului variabilei bidimensionale. Din acest motiv, prima coloană a tabelului 4.1 şi ultima coloana formează repartiţia variabilei unidimensionale ξ

$$\xi : \begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_m \\ p_1, & p_2, & \ldots, & p_m \end{pmatrix}. \tag{4. 5}$$

Prima linie şi linia mărginală de jos a tabelului cu intrare dublă constituie repartiţia variabilei aleatoare unidimensionale η

$$\eta : \begin{pmatrix} y_1, & y_2, & \ldots, & y_n \\ q_1, & q_2, & \ldots, & q_n \end{pmatrix}. \tag{4. 6}$$

Concluzie. Fiind dată repartiţia variabilei aleatoare bidimensionale $\zeta = (\xi, \eta)$, din ea întotdeauna putem deduce repartiţiile (4. 5) şi (4. 6) ale variabilelor aleatoare unidimensionale ξ şi η (componentele variabilei bidimensionale ζ).

Exemplul 4.1. Avem 2 urne cu bile numerotate. În prima urnă sunt 6 bile, dintre care una are nr.1, două au nr.2 şi 3 bile poartă nr.3. A doua urnă la fel conţine 6 bile: două cu nr.1 , 3 bile cu nr.2 şi o bilă cu nr.3. Din ambele urne se extrage câte o bilă. Fie, ξ – numărul bilei extrase din prima urnă, η – numărul bilei extrase din urna a doua.

Să se afle legea de repartiţie a variabilei aleatoare $\zeta = (\xi, \eta)$.

Rezolvare. Valorile variabilei bidimensionale discrete $\zeta = (\xi, \eta)$ vor fi următoarele:

$(1;1)$ se realizează de $1 \times 2 = 2$ ori,

$(1;2)$ se realizează de $1 \times 3 = 3$ ori,

$(1;3)$ se realizează de $1 \times 1 = 1$ ori,

$(2;1)$ se realizează de $2 \times 2 = 4$ ori,

$(2;2)$ se realizează de $2 \times 3 = 6$ ori,

$(2;3)$ se realizează de $2 \times 1 = 2$ ori,

$(3;1)$ se realizează de $3 \times 2 = 6$ ori,

$(3;2)$ se realizează de $3 \times 3 = 9$ ori,

$(3;3)$ se realizează de $3 \times 1 = 3$ ori.

În total vom avea $6 \times 6 = 36$ valori. Probabilităţile (4.1) ale acestor valori vor fi calculate ca raportul dintre numărul de realizări a lor şi numărul total de valori egal cu 36. De exemplu, pentru $(3;2)$ vom avea probabilitatea

$$P(\xi = 3; \eta = 2) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}.$$

Prin urmare, variabila aleatoare $\zeta = (\xi, \eta)$ va avea legea de repartiţie

$\xi \backslash \eta$	1	2	3	$P(\xi = x_i)$
1	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{36}$	$p_1 = \frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{18}$	$p_2 = \frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$p_3 = \frac{1}{2}$
$P(\eta = y_j)$	$q_1 = \frac{1}{3}$	$q_2 = \frac{1}{2}$	$q_3 = \frac{1}{6}$	

Evident, suma probabilităţilor (vezi (4. 2)) din acest tabel este egală cu 1. Din acest tabel uşor se deduc legile de repartiţie ale variabilelor aleatoare ξ şi η:

$$\xi : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}; \quad \eta : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/3 & 1/2 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

Valorile medii $M\xi$ şi $M\eta$ ale componentelor ξ şi η pot fi calculate prin formulele:

$$M\xi = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i p_{ij}, \tag{4.7}$$

$$M\eta = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} y_j p_{ij}. \tag{4. 8}$$

Din (4.7) rezultă $M\xi = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i p_{ij} = \sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$,

deci

$$M\xi = \sum_{i=1}^{m} x_i p_i \ . \tag{4.9}$$

La rândul său, formula (4. 8) ne conduce la rezultatul următor

$$M\eta = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} y_j p_{ij} = \sum_{j=1}^{n} y_j \sum_{i=1}^{m} p_{ij} = \sum_{j=1}^{n} y_j q_j \ ,$$

deci

$$M\eta = \sum_{j=1}^{n} y_j q_j . \tag{4.10}$$

Formulele (4.7) şi (4. 8) ne indică metoda de calcul a valorilor medii $M\xi$ şi $M\eta$ reieşind din legea de repartiţie a variabilei bidimensionale (tabelul cu intrare dublă), iar formulele (4. 9) şi (4. 10) pot fi utilizate la calculul $M\xi$ şi $M\eta$ după ce am evidenţiat legile de repartiţie (4. 5) şi (4.6) ale componentelor ξ şi η.

Exemplul 4.2. Să se calculeze valorile medii $M\xi$ şi $M\eta$ ale variabilelor aleatoare ξ şi η din exemplul 4.1.

Rezolvare. Vom utiliza formula (4.7) pentru a afla $M\xi$.

$$M\xi = 1\cdot\frac{1}{18} + 1\cdot\frac{1}{12} + 1\cdot\frac{1}{36} + 2\cdot\frac{1}{9} + 2\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{18} + 3\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{4} + 3\cdot\frac{1}{12} =$$

$$= \frac{2+3+1+8+12+4+18+27+9}{36} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}.$$

Pentru $M\eta$ conform formulei (4. 8) avem

$$M\eta = 1\cdot\frac{1}{18}+1\cdot\frac{1}{9}+1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{12}+2\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{36}+3\cdot\frac{1}{18}+3\cdot\frac{1}{12} =$$

$$= \frac{2+4+6+6+12+18+3+6+9}{36} = \frac{11}{6} = 1\frac{5}{6}.$$

Vom calcula acum mediile $M\,\xi$ şi $M\,\eta$ folosind formulele (4. 9) şi (4.10). Avem, deci:

$$M\xi = 1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\frac{1}{2} = \frac{1+4+9}{6} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3};$$

$$M\eta = 1\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{6} = \frac{2+6+3}{6} = \frac{11}{6} = 1\frac{5}{6}.$$

E firesc, că s-au obţinut aceleaşi rezultate.

Răspuns. $M\xi = 2\frac{1}{3}$; $M\eta = 1\frac{5}{6}$.

Dispersiile $D\xi$ şi $D\eta$ la fel pot fi calculate folosind tabelul cu intrare dublă 4.1: repartiţia variabilei aleatoare bidimensionale discrete $\zeta = (\xi, \eta)$,

$$D\xi = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_i - M\xi)^2\, p_{ij} \tag{4.11}$$

şi

$$D\eta = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}(y_j - M\eta)^2\, p_{ij}\,. \tag{4.12}$$

Din (4.11) uşor se obţine

$$D\xi = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (x_i - M\xi)^2 p_{ij} = \sum_{i=1}^{m} (x_i - M\xi)^2 \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = \sum_{i=1}^{m} (x_i - M\xi)^2 p_i,$$

iar din (4.12) obţinem

$$D\eta = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} (y_j - M\eta)^2 p_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (y_j - M\eta)^2 \sum_{i=1}^{m} p_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (y_j - M\eta)^2 q_j.$$

Prin urmare, dispersiile $D\xi$ şi $D\eta$ pot fi calculate şi reieşind din repartiţiile unidimensionale (4. 5) şi (4. 6):

$$D\xi = \sum_{i=1}^{m} (x_i - M\xi)^2 p_i, \tag{4.13}$$

$$D\eta = \sum_{j=1}^{n} (y_j - M\eta)^2 q_j. \tag{4.14}$$

Deseori, însă, e mai raţional să folosim formula de calcul pentru dispersie (respectiv pentru ξ şi η):

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2, \quad D\eta = M\eta^2 - (M\eta)^2. \tag{4.15}$$

Exemplul 4.3. Să se calculeze dispersiile $D\xi$ şi $D\eta$ ale variabilelor aleatoare ξ şi η din exemplul 4.1.

Rezolvare. Pentru a calcula $D\xi$ şi $D\eta$ vom folosi formulele (4.13) şi (4.14):

$$D\xi=\left(1-\frac{7}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+\left(2-\frac{7}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{3}+\left(3-\frac{7}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=\left(-\frac{4}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+\left(-\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{9};$$

$$D\eta=\left(1-\frac{11}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{3}+\left(2-\frac{11}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{2}+\left(3-\frac{11}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}=\left(-\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{7}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}=\frac{17}{36}.$$

Să calculăm dispersiile $D\xi$ şi $D\eta$ aplicând formula (4.15). Pentru $M\xi^2$ şi $M\eta^2$ vom avea respectiv:

$$M\xi^2 = 1^2\cdot\frac{1}{6}+2^2\cdot\frac{1}{3}+3^2\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6}+\frac{4}{3}+\frac{9}{2} = 6;$$

$$M\eta^2 = 1^2\cdot\frac{1}{3}+2^2\cdot\frac{1}{2}+3^2\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{3}+2+\frac{3}{2} = \frac{23}{6}.$$

Prin urmare:

$$D\xi = M\xi^2-(M\xi)^2 = 6-\left(\frac{7}{3}\right)^2 = 6-\frac{49}{9} = \frac{5}{9};$$

$$D\eta = M\eta^2-(M\eta)^2 = \frac{23}{6}-\left(\frac{11}{6}\right)^2 = \frac{23}{6}-\frac{121}{36} = \frac{17}{36}.$$

Răspuns. $D\xi = \frac{5}{9}$; $D\eta = \frac{17}{36}$.

Am văzut că din legea de repartiţie a variabilei bidimensionale $\zeta = (\xi, \eta)$ se pot deduce legile de repartiţie ale componentelor ξ şi η, respectiv (4. 5) şi (4. 6). Din păcate, din legile unidimensionale (4. 5) şi

(4.6) nu putem deduce legea bidimensională (Tabelul 4.1). Pentru construirea tabelului 4.1 pe lângă legile variabilelor ξ şi η este necesar să cunoaştem aşa numitele **legi condiţionate de repartiţie.** La definiţia lor e folosită noţiunea de probabilitate condiţionată. Pentru două evenimente aleatoare A şi B are loc formula:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \tag{4.16}$$

unde $P(B) > 0$. Pentru a caracteriza dependenţa dintre componentele ξ şi η ale variabilei aleatoare bidimensionale $\zeta = (\xi, \eta)$ introducem noţiunea de **repartiţie condiţionată** (lege condiţionată de repartiţie). Fie, că variabila aleatoare η (componentă a variabilei bidimensionale $\zeta = (\xi, \eta)$) ia valoarea y_j. Vom nota prin $p(x_i / y_j)$ probabilitatea că variabila ξ ia valoarea x_i în condiţia $\eta = y_j$, adică

$$p(x_i / y_j) = P(\xi = x_i / \eta = y_j). \tag{4.17}$$

Probabilitatea condiţionată (4.17) poate fi calculată cu formula (4.16), anume

$$p(x_i / y_j) = \frac{P(\xi = x_i;\ \eta = y_j)}{P(\eta = y_j)} = \frac{p_{ij}}{q_j}. \tag{4.18}$$

În mod similar, introducem probabilitatea condiţionată

$$p(y_j / x_i) = P(\eta = y_j / \xi = x_i). \tag{4.19}$$

Utilizând (4.16) în calcularea (4.19) obţinem

$$p(y_j / x_i) = \frac{P(\eta = y_j;\ \xi = x_i)}{P(\xi = x_i)} = \frac{p_{ij}}{p_i}. \qquad (4.20)$$

Definiţia 4.2. Se numeşte **repartiţie a variabilei ξ condiţionată de valoarea y_j a variabilei η** repartiţia

$$\xi / y_j : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ p(x_1 / y_j) & p(x_2 / y_j) & \dots & p(x_m / y_j) \end{pmatrix}. \qquad (4.21)$$

Definiţia 4.3. Se numeşte **repartiţie a variabilei aleatoare η condiţionată de valoarea x_i a variabilei ξ** repartiţia

$$\eta / x_i : \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ p(y_1 / x_i) & p(y_2 / x_i) & \dots & p(y_n / x_i) \end{pmatrix}. \qquad (4.22)$$

Evident, variabila ξ are n repartiţii condiţionate (conform numărului de valori ale variabilei $\eta : y_1, y_2, \dots, y_n$).

Respectiv, variabila aleatoare η are m repartiţii condiţionate (de valorile $x_1, x_2, \dots, x_m$ ale variabilei aleatoare ξ).

Exemplul 4.4. Variabila aleatoare bidimensională discretă $\zeta = (\xi, \eta)$ are repartiţia dată în tabelul următor:

$\xi \backslash \eta$	2,3	2,7
26	0,05	0,09
30	0,12	0,30
41	0,08	0,11
50	0,04	0,21

Să se afle legile condiţionate de repartiţie $\xi / \eta = 2,7$ şi $\eta / \xi = 30$.

Rezolvare. Legea de repartiţie $\xi / \eta = 2,7$ va avea forma (4. 21). Calculăm probabilităţile condiţionate ale acestor valori, aplicând (4.18):

$$P(\xi = 26/\eta = 2,7) = \frac{P(\xi = 26; \eta = 2,7)}{P(\eta = 2,7)} = \frac{0,09}{0,09 + 0,30 + 0,11 + 0,21} = \frac{0,09}{0,71} = \frac{9}{71};$$

$$P(\xi = 30/\eta = 2,7) = \frac{P(\xi = 30;\ \eta = 2,7)}{P(\eta = 2,7)} = \frac{0,30}{0,71} = \frac{30}{71};$$

$$P(\xi = 41/\eta = 2,7) = \frac{P(\xi = 41;\ \eta = 2,7)}{P(\eta = 2,7)} = \frac{0,11}{0,71} = \frac{11}{71};$$

$$P(\xi = 50/\eta = 2,7) = \frac{P(\xi = 50;\ \eta = 2,7)}{P(\eta = 2,7)} = \frac{0,21}{0,71} = \frac{21}{71}.$$

Prin urmare, se obţine legea condiţionată de repartiţie (4. 23)

$$\xi / \eta = 2,7 : \begin{pmatrix} 26 & 30 & 41 & 50 \\ 9/71 & 30/71 & 11/71 & 21/71 \end{pmatrix}. \qquad (4.23)$$

Legea de repartiţie $\eta / \xi = 30$ va avea forma (4. 22). Valorile posibile a lui η sunt $y_1 = 2,3$ şi $y_2 = 2,7$. Aflăm probabilităţile condiţionate, aplicând (4. 20):

$$P(\eta = 2,3/\xi = 30) = \frac{P(\eta = 2,3/\xi = 30)}{P(\xi = 30)} = \frac{0,12}{0,12+0,30} = \frac{0,12}{0,42} = \frac{2}{7};$$

$$P(\eta = 2,7/\xi = 30) = \frac{P(\eta = 2,7/\xi = 30)}{P(\xi = 30)} = \frac{0,3}{0,42} = \frac{5}{7}.$$

Datele obţinute ne permit să scriem legea condiţionată de repartiţie (4.24) a variabilei $\eta / \xi = 30$,

$$\eta/\xi = 30 : \begin{pmatrix} 2,3 & 2,7 \\ 2/7 & 5/7 \end{pmatrix}. \qquad (4.24)$$

O caracteristică importantă a repartiţiei condiţionate este **valoarea medie condiţionată**.

Definiţia 4.4. Se numeşte **valoare medie a variabilei aleatoare** ξ, **condiţionată de** $\eta = y$ cantitatea

$$M(\xi/\eta = y) = \sum_{i=1}^{m} x_i p(x_i/y). \qquad (4.25)$$

Similar se defineşte valoarea medie condiţionată a variabilei aleatoare η,

$$M(\eta/\xi = x) = \sum_{j=1}^{n} y_j p(y_j/x). \qquad (4.26)$$

Uneori (4. 25) şi (4. 26) se notează $M(\xi / y)$ şi respectiv $M(\eta / x)$. Evident, atunci când variază y se schimbă şi $M(\xi / y)$, iar la variaţia lui x se schimbă $M(\eta / x)$. Deci, valorile medii condiţionate sunt funcţii de y şi x respectiv. Ele se numesc **funcţii de regresie**:

$$M(\xi / \eta = y) = \psi(y); \tag{4. 27}$$

$$M(\eta / \xi = x) = \varphi(x). \tag{4. 28}$$

Funcţia $\varphi(x)$ dată de (4.28) reprezintă regresia variabilei η asupra variabilei ξ, iar funcţia $\psi(y)$, definită de (4. 27), este regresia lui ξ asupra η.

Exemplul 4.5. Variabila aleatoare bidimensională $\zeta = (\xi, \eta)$ are repartiţia dată în tabel

ξ \ η	10	14	18
3	0,25	0,15	0,32
6	0,10	0,05	0,13

Să se afle:

a) Valoarea medie condiţionată $M(\xi / \eta = 10)$.

b) Valoarea medie condiţionată $M(\eta / \xi = 6)$.

Rezolvare. a) Aflăm legea condiţionată de repartiţie a variabilei ξ pentru $\eta = 10$. Variabila ξ ia valorile $x_1 = 3$ şi $x_2 = 6$. Aflăm probabilităţile condiţionate ale acestor valori:

$$P(\xi = 3/\eta = 10) = \frac{P(\xi = 3;\ \eta = 10)}{P(\eta = 10)} = \frac{0{,}25}{0{,}25 + 0{,}10} = \frac{5}{7};$$

$$P(\xi = 6/\eta = 10) = \frac{P(\xi = 6;\ \eta = 10)}{P(\eta = 10)} = \frac{0{,}10}{0{,}35} = \frac{2}{7}.$$

Prin urmare,

$$\xi/\eta = 10: \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 5/7 & 2/7 \end{pmatrix}. \qquad (4.29)$$

Calculăm valoarea medie condiţionată a variabilei (4. 29), aplicând formula (4. 25). Avem $M(\xi/\eta = 10) = 3 \cdot \frac{5}{7} + 6 \cdot \frac{2}{7} = \frac{15}{7} + \frac{12}{7} = 3\frac{6}{7}$.

b) Aflăm legea condiţionată de repartiţie a variabilei η pentru $\xi = 6$. Variabila η ia 3 valori $y_1 = 10$, $y_2 = 14$ şi $y_3 = 18$. Calculăm probabilităţile condiţionate ale acestor valori:

$$P(\eta = 10/\xi = 6) = \frac{P(\eta = 10;\ \xi = 6)}{P(\xi = 6)} = \frac{0{,}10}{0{,}1 + 0{,}05 + 0{,}13} = \frac{10}{28};$$

$$P(\eta = 14/\xi = 6) = \frac{P(\eta = 14;\ \xi = 6)}{P(\xi = 6)} = \frac{0{,}05}{0{,}28} = \frac{5}{28};$$

$$P(\eta = 18/\xi = 6) = \frac{P(\eta = 18;\ \xi = 6)}{P(\xi = 6)} = \frac{0{,}13}{0{,}28} = \frac{13}{28}.$$

Legea de repartiţie a variabilei aleatoare η, condiţionată de $\xi = 6$ va fi

$$\eta/\xi = 6: \begin{pmatrix} 10 & 14 & 18 \\ 10/28 & 5/28 & 13/28 \end{pmatrix}. \qquad (4.30)$$

Calculăm valoarea medie condiționată a variabilei (4. 30) aplicând formula (4. 26):

$$M(\eta/\xi=6)=10\cdot\frac{10}{28}+14\cdot\frac{5}{28}+18\cdot\frac{13}{28}=\frac{100+70+234}{28}=\frac{404}{28}=14\frac{3}{7}.$$

Răspuns. $M(\xi/\eta=10)=3\frac{6}{7}$; $M(\eta/\xi=6)=14\frac{3}{7}$.

Pentru a caracteriza variabila aleatoare bidimensională $\zeta=(\xi,\eta)$, pe lângă valorile medii $M\xi$, $M\eta$ și dispersiile $D\xi$, $D\eta$, sunt utilizate și alte caracteristici numerice. Printre acestea se află **momentul de corelație.**

Definiția 4.5. Se numește **moment de corelație** al variabilelor ξ, η și se notează $K_{\xi\eta}$ numărul,

$$K_{\xi\eta}=M[(\xi-M\xi)(\eta-M\eta)]. \tag{4.31}$$

Pentru variabila bidimensională $\zeta=(\xi,\eta)$ descrisă de repartiția din tabelul 4.1 momentul $K_{\xi\eta}$ se calculează prin formula (4. 32),

$$K_{\xi\eta}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_i-M\xi)(y_j-M\eta)p_{ij}. \tag{4.32}$$

După ce aplicăm la partea dreaptă a formulei (4. 31) proprietățile valorii medii, venim la următoarea formulă pentru calculul momentului de corelație

$$K_{\xi\eta}=M(\xi\eta)-M\xi\cdot M\eta. \tag{4.33}$$

Momentul de corelație $K_{\xi\eta}$ caracterizează legătura (corelația) dintre variabilele ξ și η.

Exemplul 4.6. Să se afle momentul de corelație al variabilelor aleatoare ξ și η din Exemplul 4.1.

Rezolvare. Vom calcula momentul $K_{\xi\eta}$, aplicând formula (4. 33). Calculăm mai întâi $M(\xi\eta)$:

$$M(\xi\eta) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j p_{ij} =$$

$$=1\cdot1\cdot\frac{1}{18}+1\cdot2\cdot\frac{1}{12}+1\cdot3\cdot\frac{1}{36}+2\cdot1\cdot\frac{1}{9}+2\cdot2\cdot\frac{1}{6}+2\cdot3\cdot\frac{1}{18}+3\cdot1\cdot\frac{1}{6}+3\cdot2\cdot\frac{1}{4}+3\cdot3\cdot\frac{1}{12}=$$

$$=\frac{1}{18}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{2}{9}+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{3}{4}=\frac{2+6+3+8+24+12+18+54+27}{36}=\frac{77}{18}.$$

Prin urmare,

$$K_{\xi\eta} = M(\xi\eta) - M\xi\cdot M\eta = \frac{77}{18}-\frac{7}{3}\cdot\frac{11}{6} = \frac{77-77}{18} = 0.$$

Răspuns. $K_{\xi\eta} = 0.$

Din definiţia momentului de corelaţie $K_{\xi\eta}$ rezultă că el se măsoară în unităţi pătrate. Acest lucru devine uneori incomod.

Pentru a obţine o caracteristică, a cărei valoare nu depinde de unităţile de măsură ale variabilelor ξ şi η, se introduce o caracteristică nouă - coeficientul de corelaţie.

Definiţia 4.10. Se numeşte **coeficient de corelaţie** al variabilelor aleatoare ξ şi η şi se notează prin $k_{\xi\eta}$ numărul

$$k_{\xi\eta} = \frac{K_{\xi\eta}}{\sqrt{D\xi}\cdot\sqrt{D\eta}}. \qquad (4.34)$$

Pentru orice variabile aleatoare ξ şi η avem $-1 \le k_{\xi\eta} \le 1$, sau

$$\left|k_{\xi\eta}\right| \le 1. \qquad (4.35)$$

Coeficientul de corelaţie (4. 34) cu proprietatea (4. 35) este un indicator al legăturii dintre două variabile aleatoare.

Variabilei aleatoare bidimensionale $\zeta = (\xi, \eta)$ i se poate asocia vectorul valorilor medii $(M\xi; M\eta)$ şi matricea de corelaţie

$$K = \begin{pmatrix} K_{\xi\xi} & K_{\xi\eta} \\ K_{\eta\xi} & K_{\eta\eta} \end{pmatrix}. \tag{4.36}$$

Din definiţia momentului de corelaţie (4. 31) rezultă, că

$$K_{\xi\xi} = D\xi, \quad K_{\eta\eta} = D\eta. \tag{4.37}$$

La fel este evident, că

$$K_{\xi\eta} = K_{\eta\xi}, \tag{4.38}$$

deci matricea de corelaţie (4. 36) este una simetrică. Din aceste motive bazate pe proprietăţile (4. 37) şi (4. 38), ea se mai scrie de forma

$$K = \begin{pmatrix} D_\xi & K_{\xi\eta} \\ & D_\eta \end{pmatrix}.$$

Exemplul 4.7. Să se determine coeficientul de corelaţie $k_{\xi\eta}$, vectorul valorilor medii ($M\xi$; $M\eta$) şi matricea de corelaţie K ale variabilelor aleatoare ξ şi η din Exemplul 4.1.

Rezolvare. În Exemplul 4.6 avem determinat momentul $K_{\xi\eta} = 0$, în Exemplul 4.3 sunt calculate dispersiile $D\xi = \frac{5}{9}$ şi $D\eta = \frac{17}{36}$, iar în Exemplul 4.2 avem stabilite mediile $M\xi = \frac{7}{3}$ şi $M\eta = \frac{11}{6}$. Astfel primim:

coeficientul de corelaţie $k_{\xi\eta} = 0$;

vectorul valorilor medii ($M\xi$; $M\eta$) = ($\frac{7}{3}$; $\frac{11}{6}$);

matricea de corelaţie $K = \begin{pmatrix} 5/9 & 0 \\ 0 & 17/36 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 5/9 & 0 \\ & 17/36 \end{pmatrix}$.

Răspuns. $k_{\xi\eta} = 0$; ($M\xi$; $M\eta$) = ($\frac{7}{3}$; $\frac{11}{6}$); $K = \begin{pmatrix} 5/9 & 0 \\ & 17/36 \end{pmatrix}$.

Probleme

4.1. Variabila aleatoare bidimensională $\zeta = (\xi, \eta)$ are legea de repartiţie

$\xi \backslash \eta$	-1	0	1
0	0,01	0,04	0,05
1	0,06	0,24	0,10
2	0,05	0,15	0,10
3	0,04	0,07	0,09

Să se afle:

a) Legile de repartiţie ale variabilelor ξ şi η.

b) Valorile medii $M\xi$ şi $M\eta$.

c) Dispersiile $D\xi$ şi $D\eta$.

d) Coeficientul de corelaţie $k_{\xi\eta}$.

4.2. Se trage de 2 ori asupra unei ţinte. Probabilitatea de a nimeri la o tragere este egală cu p, iar de a rata este $q = 1 - p$. Se consideră variabilele aleatoare: ξ – numărul de nimeriri, η – numărul de ratări.

Să se afle:

a) Legea de repartiţie a variabilei aleatoare bidimensionale $\zeta = (\xi, \eta)$.

b) Valorile medii $M\xi$ şi $M\eta$.

c) Dispersiile $D\xi$ şi $D\eta$.

d) Momentul de corelaţie $K_{\xi\eta}$.

4.3. Variabila bidimensională $\zeta = (\xi, \eta)$ are legea de repartiţie

ξ \ η	-2	0	4
0	0,03	0,04	0,15
1	0,08	0,24	0,02
2	0,05	0,10	0,10
3	0,04	0,06	0,09

Să se afle:

a) Legile de repartiţie ale variabilelor aleatoare ξ şi η.

b) Valorile medii $M\xi$ şi $M\eta$.

c) Dispersiile $D\xi$ şi $D\eta$.

d) Coeficientul de corelaţie $k_{\xi\eta}$.

4.4. O monedă se aruncă de 2 ori. Considerăm variabilele aleatoare: numărul de apariţii a stemei, η – numărul de apariţii a valorii.

Să se afle:

a) Legea de repartiţie a variabilei bidimensionale $\zeta = (\xi, \eta)$

b) Valorile medii $M\xi$ şi $M\eta$.

c) Dispersiile $D\xi$ şi $D\eta$.

d) Momentul de corelaţie $K_{\xi\eta}$.

4.5. Variabila aleatoare bidimensională $\zeta = (\xi, \eta)$ are legea de reparti

ξ \ η	5	10	15
0	0,01	0,04	0,05
1	0,06	0,24	0,10
3	0,05	0,15	0,10
5	0,04	0,07	0,09

Să se afle:

a) Legile de repartiţie ale variabilelor aleatoare ξ şi η.

b) Valorile medii $M\xi$ şi $M\eta$.

c) Dispersiile $D\xi$ şi $D\eta$.

d) Coeficientul de corelaţie $k_{\xi\eta}$ al variabilelor ξ şi η.

4.6. Repartiţia variabilei aleatoare $\zeta = (\xi, \eta)$ este dată în tabel

ξ \ η	20	40	60
10	3λ	λ	0
20	2λ	4λ	2λ
30	λ	2λ	5λ

Să se afle:

a) Parametrul λ.

b) Valorile medii $M\xi$ şi $M\eta$.

c) Dispersiile $D\xi$ şi $D\eta$.

d) Coeficientul de corelaţie $k_{\xi\eta}$.

4.7. Variabila aleatoare bidimensională $\zeta = (\xi, \eta)$ are repartiţia următoare:

ξ \ η	2	4	5	9
0,5	0,02	0,12	0,14	0,19
0,7	0,11	0,05	0,24	0,13

Să se afle:

a) Legile de repartiţie ale variabilelor aleatoare ξ şi η.

b) Valorile medii $M\xi$ şi $M\eta$.

c) Dispersiile $D\xi$ şi $D\eta$.

d) Legea de repartiţie a variabilei ξ, condiţionată de $\eta = 5$.

e) Legea de repartiţie a variabilei η, condiţionată de valoarea $\xi = 0{,}7$.

4.8. Este dată variabila aleatoare bidimensională discretă $\zeta = (\xi, \eta)$.

ξ \ η	0,4	0,8
2	0,15	0,05
5	0,30	0,12
8	0,35	0,03

Să se afle:

a) Legile de repartiţie ale variabilelor aleatoare ξ şi η.

b) Legea condiţionată de repartiţie a variabilei aleatoare pentru $\eta = 0{,}4$.

c) Legea condiţionată a variabilei aleatoare η, pentru $\xi = 5$.

d) Valorile medii condiţionate $M(\xi / \eta = 0{,}4)$ şi $M(\eta / \xi =$

4.9. Variabila aleatoare bidimensională discretă $\zeta = (\xi, \eta)$ are reparti

ξ \ η	1	2	3
2,5	0,12	0,13	0,2
3,5	0,15	0,21	0,19

Să se afle:

a) Legile condiţionate ale variabilei aleatoare η.

b) Legile condiţionate ale variabilei aleatoare ξ.

c) $M(\eta / \xi = 3{,}5)$ şi $M(\xi / \eta = 2)$.

4.10. Variabilele aleatoare ξ şi η sunt independente şi au legile de repartiţie

$$\xi: \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 & 4 \\ 0{,}15 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}35 \end{pmatrix}; \quad \eta: \begin{pmatrix} 13 & 17 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Să se afle:

a) Valorile medii $M\xi$ şi $M\eta$.

b) Dispersiile $D\xi$ şi $D\eta$.

c) Legea de repartiţie a variabilei aleatoare bidimensionale $\zeta = (\xi, \eta)$.

4.11. Este dată variabila aleatoare bidimensională discretă $\zeta = (\xi, \eta)$.

ξ \ η	–4	0	2	5
10	0,05	0,15	0,17	0,13
20	0,12	0,08	0,24	0,06

Să se afle:

a) Dispersiile $D\xi$ şi $D\eta$.

b) Coeficientul de corelaţie $k_{\xi\eta}$.

§5. Variabile aleatoare bidimensionale continue

Fie $\zeta = (\xi ; \eta)$ – o variabilă aleatoare bidimensională, având componentele continue. În asemenea caz legea de repartiţie a ei nu poate fi prezentată sub forma unui tabel similar cu Tabelul 4.1. Ca şi în cazul variabilelor aleatoare unidimensionale în loc de probabilităţile $P(\xi = x ; \eta = y)$ se consideră probabilităţile $P(\xi < x ; \eta < y)$. Evident, aceste probabilităţi sunt dependente de x şi y.

Definiţia 5.1. Se numeşte **funcţie de repartiţie** a variabilei aleatoare bidimensionale $\zeta = (\xi ; \eta)$ funcţia

$$F_\zeta(x ; y) = P(\xi < x ; \eta < y). \tag{5.1}$$

Funcţia (5.1) se mai numeşte **funcţie de repartiţie bidimensională**. Funcţia $F_\zeta(x;y)$ e definită pentru orice $(x;y) \in R^2$ şi posedă următoarele proprietăţi:

$$0 \le F_\zeta(x ; y) \le 1. \tag{5.2}$$

Relaţia (5.2) rezultă din faptul că $F_\zeta(x ; y)$ e definită ca o probabilitate, care, după cum se ştie, e cuprinsă între 0 şi 1.

Funcţia de repartiţie este nedescrescătoare în raport cu fiecare argument al său, adică

$$F_\zeta(x_1 ; y) \le F_\zeta(x_2 ; y) \tag{5.3}$$

pentru orice $x_1, x_2, y \in R$, $x_1 < x_2$.

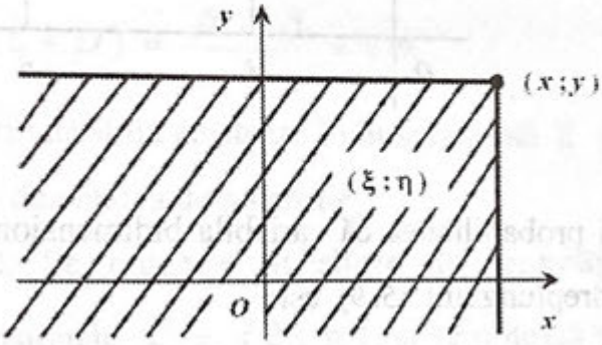
$$F_\zeta(x ; y_1) \le F_\zeta(x ; y_2) \tag{5.4}$$

pentru orice $x, y_1, y_2 \in R$, $y_1 < y_2$.

$$F_\zeta(-\infty\,;\,y) \;=\; F_\zeta(x\,;-\infty) \;=\; F_\zeta(-\infty\,;-\infty) \;=\; 0. \qquad (5.5)$$

$$F_\zeta(\infty\,;\,\infty) \;=\; 1. \qquad (5.6)$$

Geometric, funcţia (5.1) (cu proprietăţile (5. 3) şi (5. 4)) poate fi interpretată astfel: $F_\zeta(x;y)$ este probabilitatea că punctul aleator (ξ ; η) va nimeri în domeniul haşurat.



Evident,

$$F_\zeta(x;\infty) = P(\xi < x;\ \eta < \infty) = P(\xi < x) = F_\xi(x).$$

Astfel

$$F_\zeta(x;\infty) \;=\; F_\xi(x). \qquad (5.7)$$

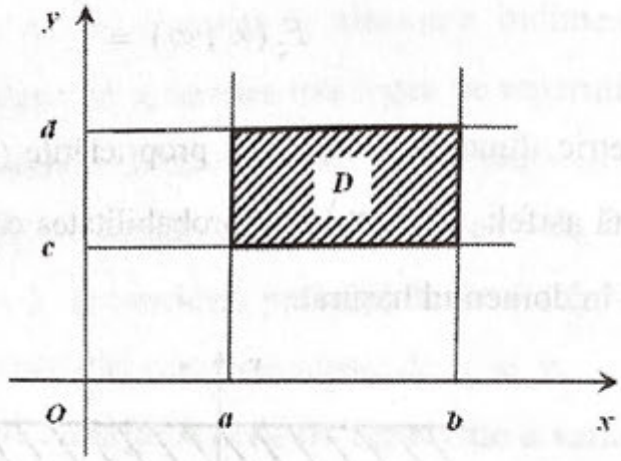
În mod similar se obţine

$$F_\zeta(\infty;y) \;=\; F_\eta(y). \qquad (5.8)$$

Relaţiile (5. 7) şi (5. 8) ne arată că din funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare bidimensionale $\zeta = (\xi\,;\eta)$ întotdeauna putem afla funcţiile de repartiţie unidimensionale (mărginale): a componentei ξ şi a componentei η.

Considerăm dreptunghiul

$$D = \{(x;y) : a \le x < b;\ c \le y < d\}. \quad (5.$$



Atunci probabilitatea că variabila bidimensională $\zeta = (\xi;\eta)$ va nimeri în dreptunghiul (5. 9) este

$$P(\zeta = (\xi;\eta) \in D) = F_\zeta(b;d) - F_\zeta(b;c) - F_\zeta(a;d) + F_\zeta(a;c). \quad (5.10)$$

Acest fapt, evident, rezultă din interpretarea geometrică a funcţiei (5.1).

Exemplul 5.1. Variabila aleatoare bidimensională $\zeta = (\xi;\eta)$ are funcţia de repartiţie $F_\zeta(x;y) = \sin x \sin y$. Să se afle $P(\zeta \in D)$, dacă

$$D = \left\{(x;y) : \frac{\pi}{6} \le x < \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{4} \le y < \frac{\pi}{3}\right\}.$$

Rezolvare. Pentru a afla $P(\zeta \in D)$ vom aplica formula (5. 10), unde $a = \frac{\pi}{6}$; $b = \frac{\pi}{2}$; $c = \frac{\pi}{4}$; $d = \frac{\pi}{3}$. Prin urmare,

$$P(\xi \in D) = P\left(\frac{\pi}{6} \le \xi < \frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{4} \le \eta < \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= F_\zeta\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{3}\right) - F_\zeta\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{4}\right) - F_\zeta\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right) + F_\zeta\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4} =$$

$$= 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}.$$

Răspuns. $P(\zeta \in D) = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4} \approx 0{,}08.$

În unele cazuri variabila aleatoare bidimensională $\zeta = (\xi;\eta)$ poate fi caracterizată de densitatea de repartiţie.

Definiţia 5.2. Se numeşte **densitate de repartiţie** a variabilei aleatoare bidimensionale $\zeta = (\xi;\eta)$ şi se notează prin $f_\zeta(x;y)$ derivata a doua mixtă de la funcţia de repartiţie $F_\zeta(x;y)$,

$$f_\zeta(x;y) = \frac{\partial^2 F_\zeta(x;y)}{\partial x\,\partial y}. \tag{5.11}$$

Evident, densitatea de repartiţie $f_\zeta(x;y)$ există doar pentru variabilele, a căror funcţie de repartiţie admite derivate de ordinul doi.

Exemplul 5.2. Să se afle densitatea de repartiţie pentru variabila aleatoare $\zeta = (\xi;\eta)$ din exemplul 5.1.

Rezolvare. Derivând funcţia de repartiţie $F_\zeta(x;y) = \sin x \sin y$ de două ori (o dată în raport cu x şi o dată în raport cu y) obţinem $f_\zeta(x;y) = \cos x \cos y$.

Răspuns. $f_\zeta(x;y) = \cos x \cos y$, dacă $\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4} \le y \le \frac{\pi}{3}$.

Din (5. 11) rezultă

$$F_\zeta(x\,;y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_\zeta(u\,;\,v)\,du\,dv. \tag{5. 12}$$

Densitatea de repartiţie posedă proprietăţile:

$$f_\zeta(x\,;y) \geq 0. \tag{5. 13}$$

Proprietatea (5. 13) rezultă din faptul că $F_\zeta(x\,;y)$ este o funcţie nedescrescătoare în raport cu x şi y.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_\zeta(x\,;y)\,dx\,dy = 1. \tag{5. 14}$$

Relaţia (5. 14) se obţine uşor din (5. 12) pentru $x = \infty$, $y = \infty$, dacă ţinem cont de (5. 6). Fiind dată densitatea de repartiţie bidimensională $f_\zeta(x\,;y)$ putem afla $P(\zeta \in D)$:

$$P(\zeta \in D) = \iint_D f_\zeta(x\,;\,y)\,dx\,dy. \tag{5. 15}$$

Se ştie că $F_\xi(x) = F_\zeta(x\,;\infty)$, de aceea din (5. 12) pentru $y = \infty$ vom obţine $F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f_\zeta(u\,;\,v)\,du\,dv$. Derivăm ambele părţi ale acestei egalităţi în raport cu x. Obţinem

$$F'_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\zeta(x;y)\,dy.$$

Pe de altă parte $F'_\xi(x) = f_\xi(x)$ este densitatea de repartiţie a componentei ξ. Prin urmare,

$$f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\zeta(x\,;\,y)\,dy. \tag{5. 16}$$

Similar se obţine densitatea de repartiţie $f_\eta(y)$ a componentei η,

$$f_\eta(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\zeta(x\,;\,y)\,dx. \tag{5.17}$$

Formulele (5.16) şi (5.17) ne arată, că din densitatea de repartiţie bidimensională $f_\zeta(x;y)$ întotdeauna putem afla densităţile de repar - tiţie $f_\xi(x)$ şi $f_\eta(y)$ ale componentelor ξ şi η.

Exemplul 5.3. Variabila aleatoare bidimensională $\zeta = (\xi\,;\eta)$ are densitatea de repartiţie

$$f_\zeta(x\,;y) = \frac{a}{(1+x^2)\,(1+y^2)}\,. \tag{5.18}$$

Să se afle:

a) Valoarea parametrului a.

b) Funcţia de repartiţie $F_\zeta(x;y)$.

c) $P(\zeta = (\xi\,;\eta) \in D)$, unde D este un dreptunghi cu vârfurile în punctele $O(0,0)$, $A(0,1)$, $B(\sqrt{3},1)$, şi $C(\sqrt{3},0)$.

Rezolvare. a) Pentru a afla valoarea parametrului a din (5.18) vom folosi proprietatea (5.14) a densităţii, conform căreia

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{(1+x^2)\,(1+y^2)}\,dx\,dy = 1.$$

Calculăm integrala din partea stângă,

$$a\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{1+y^2} = a\cdot arctg\,x\,\Big|_{-\infty}^{\infty} arctg\,y\,\Big|_{-\infty}^{\infty} = a\pi^2.$$

Deci, $a\pi^2 = 1$. De unde rezultă că $a = 1/\pi^2$. Astfel, densitatea de repartiţie $f_\zeta(x;y)$ este funcţia (5.19)

$$f_\zeta(x;y) = \frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}. \tag{5.19}$$

b) Aflăm funcţia de repartiţie $F_\zeta(x;y)$ folosind (5.12).

$$F_\zeta(x;y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} \frac{du\,dv}{\pi^2(1+u^2)(1+v^2)} = \frac{1}{\pi^2} arctg\, u\,|_{-\infty}^{x}\; arctg\, v\,|_{-\infty}^{y} =$$

$$= \left(\frac{1}{\pi} arctg\, x + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi} arctg\, y + \frac{1}{2}\right).$$

Deci,

$$F_\zeta(x;y) = \left(\frac{1}{\pi} arctg\, x + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi} arctg\, y + \frac{1}{2}\right). \tag{5.20}$$

c) $$P(\zeta = (\xi;\eta) \in D) = \int_0^{\sqrt{3}}\int_0^1 \frac{dx\,dy}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)} = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}\int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} arctg\, x\,|_0^{\sqrt{3}}\; arctg\, y\,|_0^1 = \frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{1}{12}.$$

Răspuns. a) $a = 1/\pi^2$.

b) Funcţia de repartiţie $F_\zeta(x;y)$ este dată de (5.20).

c). $P(\zeta \in D) = 1/12$.

Fie $\zeta = (\xi ; \eta)$ – o variabilă aleatoare bidimensională cu densitatea de repartiţie $f_\zeta(x ; y)$.

Definiţia 5.3. Se numeşte **densitate de repartiţie** a variabilei aleatoare ξ condiţionată de $\eta = y$ funcţia,

$$\varphi(x / y) = \frac{f_\zeta(x ; y)}{f_\eta(y)}. \tag{5.21}$$

Definiţia 5.4. Se numeşte **densitate de repartiţie** a variabilei aleatoare η condiţionată de $\xi = x$ funcţia,

$$\psi(y / x) = \frac{f_\zeta(x ; y)}{f_\xi(x)}. \tag{5.22}$$

Dacă ţinem cont de formulele (5.16) şi (5.17) pentru $f_\xi(x)$ şi $f_\eta(y)$, atunci (5.21) şi (5.22) pot fi scrise în forma

$$\varphi(x / y) = \frac{f_\zeta(x ; y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_\zeta(x ; y)\, dx}. \tag{5.23}$$

$$\psi(y / x) = \frac{f_\zeta(x ; y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_\zeta(x ; y)\, dy}. \tag{5.24}$$

Din (5.23) şi (5.24) rezultă că, densităţile condiţionate $\varphi(x / y)$ şi $\psi(y / x)$ pot fi determinate fiind cunoscută doar densitatea bidimensională $f_\zeta(x ; y)$. Formulele (5. 21) şi (5. 22) pot fi scrise şi astfel:

$$f_\zeta(x;y) = f_\eta(y) \cdot \varphi(x/y), \tag{5.25}$$

$$f_\zeta(x;y) = f_\xi(x) \cdot \psi(y/x). \tag{5.26}$$

Concluzie. Din (5. 25) şi (5. 26) rezultă, că densitatea de repartiţie $f_\zeta(x;y)$ a variabilei aleatoare bidimensionale poate fi determinată prin înmulţirea densităţii unei componente a ei la densitatea de repartiţie condiţionată a celeilalte componente.

La fel ca şi pentru variabilele discrete, putem introduce noţiunea de valoare medie condiţionată (5. 27) şi (5. 28):

$$M(\xi/\eta = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,\varphi(x/y)\,dx. \tag{5.27}$$

$$M(\eta/\xi = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y\,\psi(y/x)\,dy. \tag{5.28}$$

Definiţia 5.5. Variabilele aleatoare ξ şi η se numesc **independente** dacă legea de repartiţie a uneia din ele nu depinde de faptul, ce valori posibile a luat cealaltă.

Din această definiţie rezultă că repartiţiile condiţionate ale variabilelor independente coincid cu cele necondiţionate.

Se ştie că variabilele aleatoare ξ şi η sunt independente dacă şi numai dacă

$$F_\zeta(x;y) = F_\xi(x) \cdot F_\eta(y). \tag{5.29}$$

După ce derivăm ambele părţi ale egalităţii (5. 29) de 2 ori: odată în raport cu x şi a doua oară în raport cu y, obţinem

$$\frac{\partial^2 F_\zeta(x;y)}{\partial x \partial y} = \frac{dF_\xi(x)}{dx} \cdot \frac{dF_\eta(y)}{dy}$$

sau

$$f_\zeta(x;y) = f_\xi(x) \cdot f_\eta(y). \qquad (5.30)$$

Remarcă. Relaţia (5. 29) (sau (5. 30)) reprezintă condiţia necesară şi suficientă ca variabilele ξ şi η să fie independente. De aici rezultă că oarecare din ele poate fi luată ca definiţie a independentei lor.

La fel ca şi pentru variabilele bidimensionale discrete, pentru cele continue sunt importante caracteristicile numerice, cum sunt $M\xi$ şi $M\eta$, $D\xi$ şi $D\eta$.

Fie $f_\zeta(x;y)$ – densitatea de repartiţie a variabilei bidimensionale $\zeta = (\xi;\eta)$. Atunci valorile medii pot fi calculate cu formulele

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x f_\zeta(x;y)\,dx\,dy, \qquad (5.31)$$

$$M\eta = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y f_\zeta(x;y)\,dx\,dy, \qquad (5.32)$$

iar dispersiile se pot calcula prin formulele

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^2 f_\zeta(x;y)\,dx\,dy, \qquad (5.33)$$

$$D\eta = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(y - M\eta)^2 f_\zeta(x;y)\,dx\,dy. \tag{5.34}$$

Remarcă. În unele cazuri este mai raţional să se aplice formulele (4.15) la calculul dispersiilor (5.33) şi (5.34).

Exemplul 5.4. Variabila aleatoare $\zeta = (\xi ; \eta)$ are densitatea de repartiţie

$$f_\zeta(x;y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin(x+y), & x \in D \\ 0, & x \notin D, \end{cases} \tag{5.35}$$

unde $D = \{(x;y): 0 \le x \le \pi/2;\ 0 \le y \le \pi/2\}$.

Să se afle: a) $M\xi$ şi $M\eta$, b) $D\xi$ şi $D\eta$.

Rezolvare. a) Pentru $M\xi$ şi $M\eta$ vom folosi formulele (5.31) şi (5.32). Integralele se vor calcula pe intervalul $[0 ; \pi/2]$. Astfel,

$$M\xi = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} x\sin(x+y)\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} x[\cos x - \cos(x+\pi/2)\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

Repartiţia e simetrică, de aceea şi $M\eta = \pi/4$.

b) Pentru $D\xi$ avem

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} x^2\sin(x+y)\,dx\,dy - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} x^2[\cos x - \cos(x + \frac{\pi}{2})]dx - \frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{2} - 2.$$

Densitatea de repartiţie (5. 35) este o funcţie simetrică în raport cu argumentele sale x, y, de aceea $D\eta = D\xi$.

Răspuns. a) $M\xi = \pi/4$; $M\eta = \pi/4$.

b) $D\xi = \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{2} - 2$; $D\eta = \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{2} - 2$.

La fel ca şi în cazul variabilelor aleatoare bidimensionale discrete pentru a evidenţia legătura dintre componentele ξ şi η ale variabilei bidimensionale $\zeta = (\xi; \eta)$ se introduce noţiunea de moment de corelaţie.

Definiţia 5.6. Se numeşte **moment de corelaţie** a variabilelor ξ şi η şi se notează prin $K_{\xi\eta}$ numărul

$$K_{\xi\eta} = M[(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)]. \qquad (5.36)$$

Pentru variabilele continue momentul (5.36) se calculează prin formula

$$K_{\xi\eta} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x - M\xi)(y - M\eta) f_\zeta(x; y)\, dx\, dy. \qquad (5.37)$$

În unele cazuri este mai raţional să folosim formula (4.33) la calculul momentului $K_{\xi\eta}$, care este adevărată pentru toate tipurile de variabile aleatoare (atât discrete cât şi continue).

Exemplul 5.5. Variabila aleatoare $\zeta = (\xi ; \eta)$ are densitatea de repartiţie $f_\zeta(x ; y)$ din Exemplul 5.4. Să se calculeze $K_{\xi\eta}$.

Rezolvare. Vom folosi formula

$$K_{\xi\eta} = M(\xi\eta) - M\xi \cdot M\eta . \tag{5.38}$$

În virtutea rezultatelor Exemplului 5.4 formula (5.38) ne dă:

$$K_{\xi\eta} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} x\, y \sin(x + y)\, dx\, dy - M\xi \cdot M\eta =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} x\, y (\sin x \cos y + \cos x \sin y)\, dx\, dy - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x \sin x\, dx \int_0^{\pi/2} y \cos y\, dy + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x \cos x\, dx \int_0^{\pi/2} y \sin y\, dy - \frac{\pi^2}{16} =$$

$$= \int_0^{\pi/2} x \sin x\, dx \int_0^{\pi/2} y \cos y\, dy - \frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{16} - 1.$$

Răspuns. $K_{\xi\eta} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{16} - 1.$

La fel ca şi în cazul variabilelor discrete se introduce noţiunea de coeficient de corelaţie $k_{\xi\eta}$,

$$k_{\xi\eta} = \frac{K_{\xi\eta}}{\sqrt{D\xi} \cdot \sqrt{D\eta}} . \tag{5.39}$$

Este evident, $\left|k_{\xi\eta}\right| \leq 1$ sau

$$-1 \leq k_{\xi\eta} \leq 1. \tag{5.40}$$

S-a menţionat deja: coeficientul de corelaţie (5.39), (5.40) indică legătura dintre variabilele aleatoare ξ şi η. Cu cât $\left|k_{\xi\eta}\right|$ e mai aproape de 1 cu atât legătura dintre ξ şi η e mai strânsă. Atunci când ξ şi η sunt dependente liniar $\left|k_{\xi\eta}\right| = 1$. Într-adevăr, fie

$$\eta = a\xi + b, \tag{5.41}$$

unde a $(a \neq 0)$ şi b sunt două constante reale. Avem

$$D\eta = D(a\xi + b) = D(a\xi) + D(b) = a^2 D\xi.$$

Astfel,

$$D\eta = a^2 D\xi. \tag{5.42}$$

Calculăm $K_{\xi\eta}$:

$$K_{\xi\eta} = M[(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)] = M[(\xi - M\xi)(a\xi + b - M(a\xi + b))] =$$

$$= M[(\xi - M\xi)(a\xi + b - aM\xi - b)] = M[(\xi - M\xi)(a\xi - aM\xi)] =$$

$$= aM(\xi - M\xi)^2 = aD\xi.$$

Prin urmare, ţinând cont de (5.42), obţinem

$$k_{\xi\eta} = \frac{K_{\xi\eta}}{\sqrt{D\xi}\cdot\sqrt{D\eta}} = \frac{a\cdot D\xi}{\sqrt{D\xi}\cdot\sqrt{a^2\cdot D\xi}} = \frac{a}{|a|},$$

iar de aici rezultă

$$k_{\xi\eta} = \begin{cases} 1, & a > 0 \\ -1, & a < 0. \end{cases}$$

Dependenta (în particular cea liniară (5. 41)) este cazul extremal al legăturii dintre variabilele aleatoare ξ şi η. Un alt caz extremal este cel de independenţă.

Dacă variabilele aleatoare ξ şi η sunt independente, atunci $M(\xi\eta) = M\xi\cdot M\eta$, iar în asemenea cazuri din (5. 38) rezultă, că $K_{\xi\eta} = 0$. Deci, pentru două variabile independente momentul de corelaţie $K_{\xi\eta}$ şi coeficientul de corelaţie $k_{\xi\eta}$ sunt egale cu 0.

Definiţia 5.7. Variabilele aleatoare ξ şi η, ale cărui coeficient de corelaţie este egal cu 0, se numesc **necorelate**.

Rezultă, din cele expuse mai sus, că două variabile aleatoare independente sunt şi necorelate. Afirmaţia reciprocă, în general, nu este adevărată. Adică două variabile aleatoare necorelate nu sunt neapărat şi independente. Totuşi, dacă variabilele ξ şi η au repartiţia normală, sunt necorelate atunci ele sunt şi independente.

Astfel, pentru variabilele aleatoare ξ şi η, cu *repartiţia normală*, noţiunile de *independenţă* şi *necorelativitate* sunt **echivalente.**

Exemplul 5.6. Variabila aleatoare $\zeta = (\xi ; \eta)$ are densitatea de repartiţie $f_\zeta(x ; y)$ din Exemplul 5.4. Să se calculeze coeficientul de

corelaţie $k_{\xi\eta}$ şi să se determine dacă variabilele aleatoare ξ şi η sunt necorelate.

Rezolvare. În Exemplul 5.5 este calculat momentul de corelaţie $K_{\xi\eta} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{16} - 1$, iar în Exemplul 5.4 sunt stabilite dispersiile

$$D\xi = D\eta = \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{2} - 2.$$

Astfel, conform formulei (5.39) coeficientul de corelaţie $k_{\xi\eta}$ este

$$k_{\xi\eta} = \frac{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{16} - 1}{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{16} - 2} \approx -0{,}2 \neq 0.$$

Deoarece $k_{\xi\eta} \neq 0$, variabilele aleatoare ξ şi η sunt corelate.

Răspuns. $k_{\xi\eta} \approx -0{,}2$. Variabilele aleatoare ξ şi η sunt corelate.

Probleme

5.1. Variabila aleatoare bidimensională $\zeta = (\xi ; \eta)$ este repartizată uniform în triunghiul, format de dreptele $y = x$, $y = 0$ şi $x = 2$. Să se afle coeficientul de corelaţie $k_{\xi\eta}$ al variabilelor ξ şi η.

5.2. Variabilele aleatoare ξ şi η sunt independente şi repartizate uniform pe intervalele $[-1 ; 1]$ şi $[0 ; 2]$ respectiv. Să se afle funcţia de repartiţie $F_\zeta(x ; y)$ şi densitatea de repartiţie $f_\zeta(x ; y)$ a variabilei aleatoare bidimensionale $\zeta = (\xi ; \eta)$.

5.3. Variabila aleatoare bidimensională $\zeta = (\xi ; \eta)$ are densitatea de repartiţie

$$f_\zeta(x ; y) = \begin{cases} \cos x \cos y, & 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} ;\ 0 \le y \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$$

Să se afle:

a) Funcţia de repartiţie $F_\zeta(x ; y)$.

b) Coeficientul de corelaţie $k_{\xi\eta}$ al variabilelor aleatoare ξ şi η.

5.4. Variabila aleatoare bidimensională $\zeta = (\xi ; \eta)$ are densitatea de repartiţie

$$f_\zeta(x;y) = \begin{cases} a \cdot cos(x-y), & 0 \le x \le \frac{\pi}{2};\ 0 \le y \le \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$$

Să se afle:

a) Valoarea parametrului a.

b) Valorile medii $M\xi$ şi $M\eta$.

c) Dispersiile $D\xi$ şi $D\eta$.

d) Momentul de corelaţie $K_{\xi\eta}$ şi coeficientul de corelaţie $k_{\xi\eta}$.

5.5. Se dă densitatea de repartiţie a unei variabile bidimensionale $\zeta = (\xi;\eta)$,

$$f_\zeta(x;y) = \frac{a}{1+(x^2+y^2)^2}.$$

Să se afle:

a) Valoarea parametrului a.

b) Raza cercului cu centrul în originea de coordonate, încât probabilitatea de a nimeri în el, să fie egală cu 0,5.

5.6. Variabila aleatoare bidimensională $\zeta = (\xi;\eta)$ are densitatea de repartiţie

$$f_\zeta(x;y) = ae^{-(x+1)^2-|y|}.$$

Să se afle:

a) Parametrul a.

b) Densităţile de repartiţie $f_\xi(x)$ şi $f_\eta(y)$.

c) Valorile medii $M\xi$ şi $M\eta$.

d) Dispersiile $D\xi$ şi $D\eta$.

e) Sunt dependente sau nu variabilele ξ şi η.

f) Momentul de corelaţie $K_{\xi\eta}$ şi coeficientul de corelaţie $k_{\xi\eta}$.

5.7. Variabila aleatoare bidimensională $\zeta = (\xi ; \eta)$ are densitatea de repartiţie uniformă în cercul cu raza $r = 2$,

$$f_\zeta(x ; y) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi}, & x^2 + y^2 \le 4 \\ 0, & x^2 + y^2 > 4 \end{cases}$$

Să se afle:

a) Valorile medii $M\xi$ şi $M\eta$.

b) Dacă sunt dependente sau nu variabilele ξ şi η.

5.8. Variabila aleatoare bidimensională $\zeta = (\xi ; \eta)$ are densitatea de repartiţie

$$f_\zeta(x;y) = ae^{-\frac{(x+3)^2}{8} - \frac{(y-1)^2}{2}}.$$

Să se afle:

a) Parametrul a. b) $P(\xi < -3 ; \ \eta < 4)$.

5.9. Componentele ξ şi η ale variabilei aleatoare bidimensionale $\zeta = (\xi ; \eta)$ sunt independente şi au densităţile de repartiţie

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 5e^{-5x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad \text{şi} \quad f_\eta(y) = \begin{cases} 2e^{-2y}, & y \ge 0 \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

Să afle:

a) Densitatea de repartiţie $f_\zeta(x ; y)$ a variabilei bidimensionale.

b) Funcţia de repartiţie $F_\zeta(x;y)$.

c) Valorile medii $M\xi$ şi $M\eta$.

d) Dispersiile $D\xi$ şi $D\eta$.

e) Momentul $K_{\xi\eta}$ şi coeficientul $k_{\xi\eta}$ de corelaţie al variabilelor ξ şi η.

5.10. Se dă densitatea de repartiţie a variabilei bidimensionale ζ.

$$f_\zeta(x;y) = \begin{cases} 4xye^{-x^2-y^2}, & x \geq 0, \quad y \geq 0 \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$$

Să se afle:

a) Valorile medii $M\xi$ şi $M\eta$.

b) Dispersiile $D\xi$ şi $D\eta$.

c) Momentul de corelaţie $K_{\xi\eta}$ şi coeficientul de corelaţie $k_{\xi\eta}$.

5.11. Variabila aleatoare $\zeta = (\xi;\eta)$ are densitatea de repartiţie

$$f_\zeta(x;y) = \begin{cases} x+y, & 0 \leq x \leq 1; \quad 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$$

Să se afle coeficientul de corelaţie $k_{\xi\eta}$ al variabilelor ξ şi η.

5.12. Variabila aleatoare bidimensională $\zeta = (\xi;\eta)$ are densitatea de repartiţie

$$f_\zeta(x;y) = ae^{-x^2-2xy-4y^2}.$$

Să se afle:

a) Parametrul a.

b) Densităţile de repartiţie mărginale $f_\xi(x)$ şi $f_\eta(y)$.

c) Densităţile de repartiţie condiţionate $\varphi(x/y)$ şi $\psi(y/x)$.

5.13. Se dă densitatea de repartiţie bidimensională

$$f_\zeta(x;y) = \begin{cases} \frac{1}{4}\sin x \sin y, & 0 \le x \le \pi; \quad 0 \le y \le \pi \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$$

Să se afle:

a) Valorile medii $M\xi$ şi $M\eta$.

b) Dispersiile $D\xi$ şi $D\eta$.

c) Momentul de corelaţie $K_{\xi\eta}$.

5.14. Variabila aleatoare bidimensională $\zeta = (\xi;\eta)$ are funcţia de repartiţie

$$F_\zeta(x;y) = \left(\frac{1}{\pi}arctg\,2x + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}arctg\,3y + \frac{1}{2}\right).$$

Să se afle:

a) Densitatea de repartiţie $f_\zeta(x;y)$.

b) $P(\xi < 1/2;\ \eta < 1/3)$.

5.15. Variabila aleatoare bidimensională $\zeta = (\xi;\eta)$ are funcţia de repartiţie

$$F_\zeta(x;y) = (1-e^{-2x})(1-e^{-3y}), \quad x \ge 0,\ y \ge 0.$$

Să se afle densitatea de repartiţie a variabilei $\zeta = (\xi;\eta)$.

5.16. Variabila aleatoare bidimensională $\zeta = (\xi ; \eta)$ are densitatea de repartiţie

$$f_\zeta(x;y) = \frac{3\sqrt{3}}{\pi} e^{-4x^2-6xy-9y^2}.$$

Să se afle legile condiţionate de repartiţie ale variabilelor ξ şi η.

5.17. Variabila aleatoare bidimensională $\zeta = (\xi ; \eta)$ este repartizată uniform în dreptunghiul $D = \{(x;y):\ 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b\}$.

Să se afle:

a) Densitatea de repartiţie $f_\zeta(x;y)$.

b) Funcţia de repartiţie $F_\zeta(x;y)$ a variabilei bidimensionale.

c) Densităţile de repartiţie $f_\xi(x)$ şi $f_\eta(y)$.

5.18. Variabila aleatoare $\zeta = (\xi ; \eta)$ are densitatea de repartiţie

$$f_\zeta(x;y) = \begin{cases} a(x+y), & 0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le 1 \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$$

Să se afle:

a) Parametrul a. b) $P(\xi + \eta \le 1)$.

5.19. Variabila aleatoare $\zeta = (\xi ; \eta)$ este repartizată uniform în triunghiul, format de dreptele $y = 1 - x$, $y = 0$ şi $x = 0$.

Să se afle:

a) Densitatea de repartiţie $f_\zeta(x;y)$.

b) Densităţile de repartiţie mărginale $f_\xi(x)$ şi $f_\eta(y)$.

c) Momentul de corelaţie $K_{\xi\eta}$ şi coeficientul de corelaţie $k_{\xi\eta}$.

d) Dacă sunt independente sau nu variabilele ξ şi η.

CAPITOLUL III

ELEMENTE DE STATISTICĂ MATEMATICĂ

§1. Populaţie statistică. Selecţie

Statistica matematică se ocupă cu elaborarea metodelor de colectare, prelucrare şi analiză a datelor statistice.

Pentru a studia un fenomen la început se colectează unele date statistice şi se înregistrează. La această etapă acţionează mai întâi **statistica descriptivă**. În cadrul ei se culeg datele statistice, care urmează a fi prelucrate.

Noţiunea fundamentală este cea de **populaţie statistică**.

Definiţia 1.1. Se numeşte **populaţie statistică** orice mulţime, care formează obiectul unei analize statistice.

Exemplul 1.1. Mulţimea locuitorilor unui oraş sau sat. Mulţimea seturilor de mobilă, produse la o fabrică. Mulţimea studenţilor unei instituţii de învăţământ. Mulţimea mijloacelor de transport dintr-o localitate, etc.

Definiţia 1.2. Elementele unei populaţii statistice se numesc **unităţi statistice** sau **indivizi**.

Exemplul 1.2. Unităţi statistice pot fi locuitorii unei ţări, localităţi, dulapurile la o fabrică de mobilă, unităţile de transport, cărţile care se află pe rafturile unei biblioteci.

Definiţia 1.3. Se numeşte **caracteristică** trăsătura comună tuturor unităţilor unei populaţii. Caracteristicele pot fi **calitative** sau **cantitative**.

Definiţia 1.4. O caracteristică se numeşte **cantitativă,** dacă poate fi măsurată. În caz contrar, caracteristica se numeşte **calitativă.**

Exemplul 1.3. Fie că se studiază populaţia unei localităţi. Caracteristice calitative ale populaţiei sunt studiile (primare, medii, superioare), culoarea ochilor (negri, verzi, căprui, albaştri). Caracteristice cantitative: numărul de studenţi care au susţinut examenul pe nota " 8 "; vârsta unei persoane; dimensiunile unei piese, supuse controlului tehnic.

Caracteristicile cantitative pot fi **discrete** sau **continue.**

Definiţia 1.5. Caracteristica se numeşte **discretă,** dacă ea poate lua doar valori izolate şi **continuă** dacă ea poate lua orice valoare dintr-un interval.

Exemplul 1.4. Caracteristici discrete: numărul de unităţi de transport dintr-o localitate, numărul de bilete câştigătoare într-o loterie; Caracteristici continue: statura unei persoane, durata funcţionării unui bec electric, greutatea unei bovine supuse controlului.

Definiţia 1.6. Se numeşte **volum** al populaţiei statistice numărul tuturor unităţilor (indivizilor) acestei populaţii.

Vom nota acest număr prin N. Volumul populaţiei statistice de obicei este destul de mare. Din această cauză nu se studiază toate unităţile acestei populaţii. Uneori este chiar lipsit de sens acest studiu. De exemplu, atunci când studiul unităţilor conduce la nimicirea lor. De aceea din toată populaţia se ia la întâmplare un număr relativ mic de unităţi, care se studiază.

Definiţia 1.7. Se numeşte **populaţie selectată** sau **selecţie** mulţimea tuturor unităţilor luate la întâmplare din populaţia statistică. Numărul elementelor selecţiei se numeşte **volumul** ei.

Vom nota volumul selecţiei prin n. Statistica matematică, de regula, studiază doar caracteristici cantitative. Fie ξ – o caracteristică a populaţiei statistice de volum N. Facem o selecţie de volum n. Admitem că valoarea x_1 s-a obţinut de n_1 ori, valoarea x_2 – de n_2 ori, ..., valoarea x_m – de n_m ori: $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$. Evident $n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n$.

Definiţia 1.8. Se numeşte **frecvenţa absolută** a valorii x_i numărul n_i, iar raportul n_i / n se numeşte **frecvenţa relativă** a acestei valori şi se notează

$$f(x_i) = n_i / n. \tag{1.1}$$

Definiţia 1.9. Se numeşte **serie statistică** (sau **repartiţie statistică** a selecţiei) tabelul

x_1	x_2	$\ldots$	x_m
n_1	n_2	$\ldots$	n_m

(1.2)

sau tabelul

x_1	x_2	$\ldots$	x_m
n_1 / n	n_2 / n	$\ldots$	n_m / n

(1.3)

Remarcă: O serie statistică poate avea forma (1.2) (deci, frecventele caracteristicii ξ sunt cele absolute n_i), sau forma (1.3) (fiind date frecventele relative (1.1) $f(x_i) = n_i / n$).

Exemplul 1.6. În tabel sunt trecute rezultatele a 20 de măsurări

Valorile caracteristicii	2	6	10	12	14
Frecvenţa absolută	1	5	7	3	4

Să se scrie seria statistică în frecvenţe relative.

Rezolvare. $n = 20$; $f(x_1) = 1/20$; $f(x_2) = 5/20$; $f(x_3) = 7/20$; $f(x_4) = 3/20$; $f(x_5) = 4/20$. Seria statistică va fi:

Valorile caracteristicii	2	6	10	12	14
Frecvenţa relativă	1 / 20	5 / 20	7 / 20	3 / 20	4 / 20

Remarcă. Seria statistică (1.2) (sau (1.3)) se mai numeşte **lege statistică de repartiţie.**

Fie dată repartiţia statistică a caracteristicii ξ. Notăm prin n_x – numărul de valori $x_i < x$. Evident n_x / n este funcţie de x. Notăm această funcţie prin $F_S(x)$.

Definiţia 1.10. Se numeşte **funcţie statistică (empirică) de repartiţie** a caracteristicii ξ şi se notează prin $F_S(x)$ funcţia

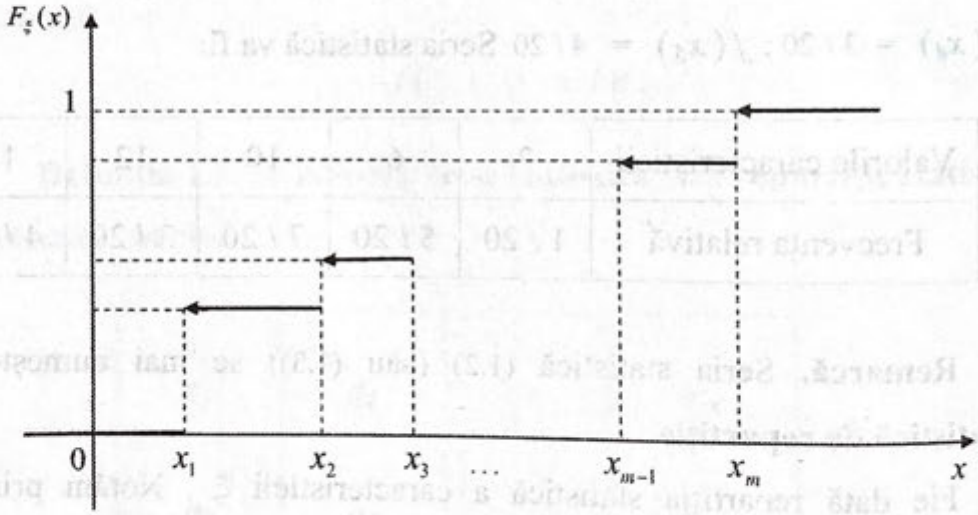
$$F_S(x) = n_x / n = \sum_{x_i < x} n_i / n. \qquad (1.4)$$

Din definiţia repartiţiei statistice (1.2) şi din (1.4) rezultă

$$F_S(x) = \begin{cases} 0, & x \le x_1 \\ n_1/n, & x_1 < x \le x_2 \\ (n_1+n_2)/n, & x_2 < x \le x_3 \\ \dots\dots\dots\dots & \\ \sum_{i=1}^{m-1} n_i/n, & x_{m-1} < x \le x_m \\ 1, & x > x_m. \end{cases} \quad (1.5)$$

Funcţia $F_S(x)$ se numeşte funcţie statistică de repartiţie sau funcţie empirică de repartiţie deoarece ea se obţine în baza datelor statistice (empirice).

Graficul funcţiei (1.5) este prezentat mai jos:



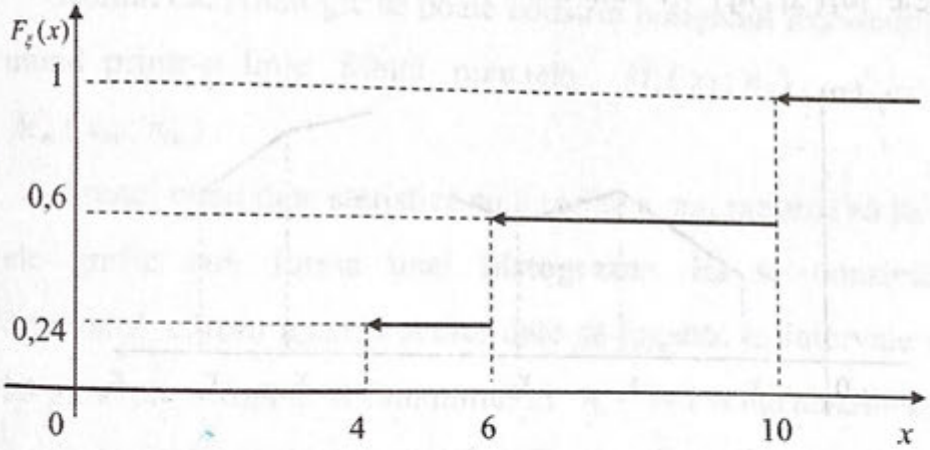
Exemplul 1.7. Să se afle funcţia statistică de repartiţie $F_S(x)$, având dată seria:

Valorile x_i	4	6	10
Frecvenţele n_i	12	18	20

Rezolvare: $n = 12 + 18 + 20 = 50$. Pentru $x \le 4$, $F_S(x) = 0$. Pentru $4 < x \le 6$, $F_S(x) = 12/50 = 0{,}24$. Pentru $6 < x \le 10$ avem $F_S(x) = (12 + 18)/50 = 30/50 = 3/5 = 0{,}6$, $F_S(x) = (12 + 18 + 20)/50 = 50/50 = 1$ pentru $x > 10$. Prin urmare,

$$F_s(x) = \begin{cases} 0, & x \le 4 \\ 0{,}24, & 4 < x \le 6 \\ 0{,}6, & 6 < x \le 10 \\ 1, & x > 10. \end{cases} \qquad (1.6)$$

Graficul funcţiei (1.6) este prezentat mai jos:



Remarcă: Repartiţia statistică (1.2) variază de la o selecţie la alta. Prin urmare, caracteristica ξ poate fi privită ca o variabilă aleatoare.

Funcţia de repartiţie a acestei variabile aleatoare $F_\xi(x)$ se numeşte **funcţie teoretică de repartiţie** sau **funcţie de repartiţie a populaţiei statistice.**

În virtutea legii numerelor mari

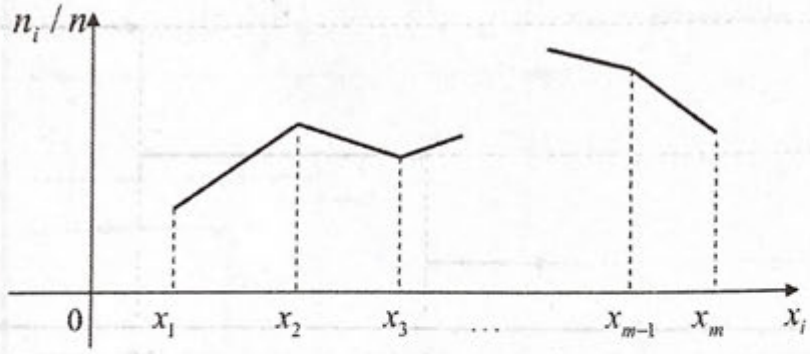
$$\lim_{n \to \infty} P(|F_S(x) - F_\xi(x)| < \varepsilon) = 1. \qquad (1.7)$$

În baza relaţiei (1.7) funcţia statistică de repartiţie se foloseşte pentru a estima (aproxima) funcţia de repartiţie a populaţiei statistice $F_\xi(x)$ care, de obicei, nu se ştie.

Se poate demonstra, că funcţia $F_S(x)$ posedă proprietăţi similare cu cele ale funcţiei $F_\xi(x) = P(\xi < x)$.

Cu scopul de a face datele statistice mai convingătoare sunt utilizate diverse prezentări geometrice ale acestora. Cele mai răspândite sunt **poligonul şi histograma.**

Pentru a construi poligonul frecvenţelor relative pe axa absciselor sunt depuse valorile x_i, iar pe axa ordonatelor – frecvenţele relative n_i / n. Punctele $M_i(x_i; n_i / n)$ sunt unite printr-o linie frântă.



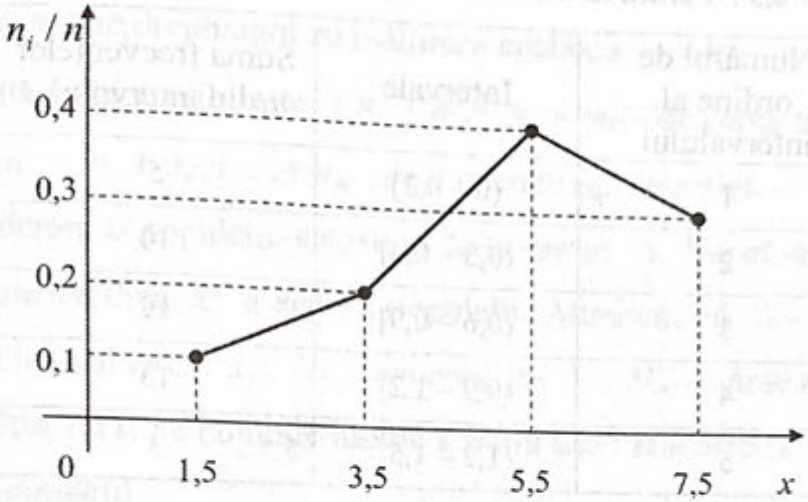
Exemplul 1.8. Fie dată seria statistică

x_i	1,5	3,5	5,5	7,5
n_i	1	2	4	3
n_i / n	0,1	0,2	0,4	0,3

Să se construiască poligonul frecvenţelor relative.

Rezolvare. Pe axa absciselor depunem valorile $x_1 = 1,5$; $x_2 = 3,5$; $x_3 = 5,5$ şi $x_4 = 7,5$, iar pe axa ordonatelor – valorile $n_1 / n = 1 / 10 = 0,1$; $n_2 / n = 2 / 10 = 0,2$; $n_3 / n = 4 / 10 = 0,4$; $n_4 / n = 3 / 10 = 0,3$.

Punctele $M_1(1,5;\ 0,1)$, $M_2(3,5;\ 0,2)$, $M_3(5,5;\ 0,4)$ şi $M_4(7,5;\ 0,3)$ le unim printr-o linie frântă.



Remarcă. Analogic se poate construi poligonul frecvenţelor absolute, unind printr-o linie frântă punctele $M_1(x_1; n_1)$, $M_2(x_2; n_2)$, ..., $M_m(x_m; n_m)$.

Atunci când date statistice sunt multe e mai raţional să se interpreteze ele grafic sub forma unei **histograme.** Ea se construieşte astfel: Intervalul, cărora aparţin aceste date se împarte în intervale mai mici de lungime constantă h. Aflăm numărul n_i (frecvenţa absolută) a valorilor x_i, care nimeresc în intervalul i. Pe axa absciselor depunem intervalele, iar pe fiecare interval construim câte un dreptunghi cu înălţimea n_i / nh. Histograma obţinută va fi cea a frecvenţelor relative.

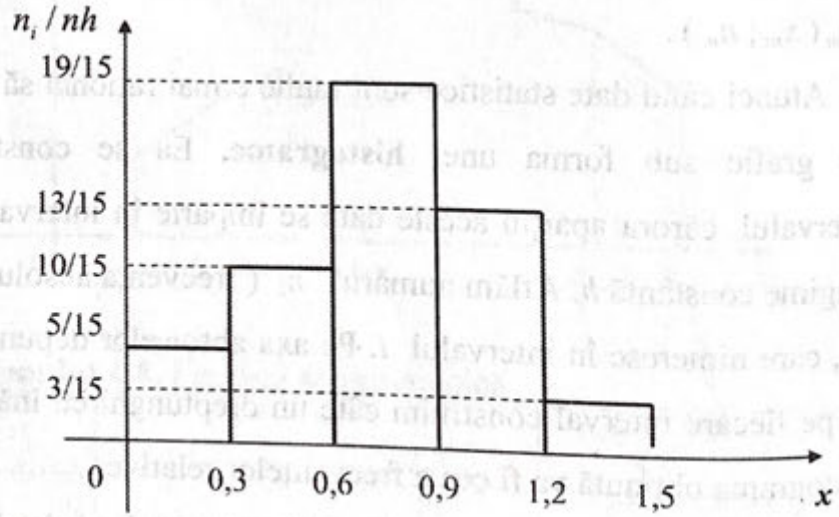
Exemplul 1.9. Să se construiască histograma după datele statistice

x_i	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
n_i	1	2	2	3	4	3	6	8	5	5	5	3	1	1	1

Rezolvare. Vom diviza intervalul $[0\,;1{,}5]$ în intervale de lungimea $h = 0{,}3$. Venim la tabelul:

Numărul de ordine al intervalului	Intervale	Suma frecvenţelor n_i din intervalul i	Frecvenţa relativă
1	(0 – 0,3]	5	5 / 50
2	(0,3 – 0,6]	10	10 / 50
3	(0,6 – 0,9]	19	19 / 50
4	(0,9 – 1,2]	13	13 / 50
5	(1,2 – 1,5]	3	3 / 50

Construim histograma:



Aria unui dreptunghi este egală cu $\frac{n_i}{nh} \cdot h = \frac{n_i}{n}$, deci cu frecven relativă a valorii x_i, iar suma ariilor tuturor dreptunghiurilor este 1

Remarcă. În mod similar se construieşte histograma frecvenţelor absolute. Pe axa absciselor depunem intervalele, iar pe fiecare interval construim câte un dreptunghi cu înălţimea egală cu n_i / h.

Aria unui dreptunghi este $(n_i / h) \cdot h = n_i$, iar suma ariilor va fi egală cu $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$, deci cu volumul selecţiei.

Considerăm o populaţie statistică de volumul N. Fie că e nevoie de studiat caracteristica ξ a acestei populaţii. Admitem că N_1 unităţi ale populaţiei iau valoarea x_1, N_2 – valoarea $x_2, \ldots, N_m$ – valoarea x_m.

Definiţia 1.11. Se numeşte **medie a populaţiei statistice** şi se notează prin M_p numărul

$$M_p = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{m} x_i N_i . \tag{1.8}$$

De regulă, media populaţiei statistice (1.8) nu se cunoaşte. Pentru a determina o valoare aproximativă a ei se face o selecţie de volumul n. Admitem că în rezultatul acestei selecţii caracteristica ξ a luat valoarea x_1 de n_1 ori, valoarea x_2 de n_2 ori, ..., valoarea x_m de n_m ori.

Definiţia 1.12. Se numeşte **media selecţiei** şi se notează prin M_s numărul

$$M_s = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} x_i n_i . \tag{1.9}$$

Pentru a caracteriza împrăştierea valorilor x_i ale caracteristicii ξ se introduce noţiunea de dispersie a populaţiei statistice.

Definiţia 1.13. Se numeşte **dispersie a populaţiei statistice** şi se notează prin D_p numărul

$$D_p = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{m} (x_i - M_p)^2 \cdot N_i . \qquad (1.10)$$

Definiţia 1.14. Se numeşte **abatere medie pătratică** a populaţiei statistice numărul

$$\sigma_p = \sqrt{D_p} . \qquad (1.11)$$

Pentru a caracteriza împrăştierea valorilor posibile ale caracteristicii ξ într-o selecţie de volum n se foloseşte dispersia selecţiei, ce revine din (1.10).

Definiţia 1.15. Se numeşte **dispersie a selecţiei** de volum n numărul

$$D_s = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} (x_i - M_s)^2 \cdot n_i . \qquad (1.12)$$

Remarcă: Pe lângă dispersia D_s a selecţiei se introduce printr-o formulă de tip (1.11) şi **abaterea medie pătratică a selecţiei** înlocuindu-se „p" prin „s", deci

$$\sigma_s = \sqrt{D_s} .$$

Sunt folosite şi alte caracteristici numerice ale selecţiei (pe lângă medie, dispersie şi abatere medie pătratică a selecţiei).

Definiţia 1.16. Se numeşte **modul al selecţiei** valoarea x_i a caracteristicii ξ, căreia îi corespunde frecvenţa maximă. Se notează M_0.

Exemplul 1.10. Este dată seria de repartiţie a caracteristicii ξ.

x_i	1	3	8	10
n_i	5	4	15	6

Să se afle modulul M_0 al selecţiei.

Rezolvare. Avem $n_1 = 5$, $n_2 = 4$, $n_3 = 15$ şi $n_4 = 6$. Cea mai mare frecvenţă $n_3 = 15$ o are valoarea $x_3 = 8$. Prin urmare, $M_0 = 8$.

Definiţia 1.17. Se numeşte **mediana selecţiei** valoarea x_i a caracteristicii ξ ce împarte seria statistică în două părţi egale ca număr, în funcţie de frecvenţe. Mediana selecţiei se notează prin M_e.

Dacă n este impar, se caută valoarea cu numărul de ordine $(n+1)/2$, adică $M_e = x_{(n+1)/2}$. Dacă n este par, $(n+1)/2$ se termină în $0,5$, iar mediana M_e se caută ca medie aritmetică a termenilor de la mijlocul seriei, dată de (1.13)

$$M_e = \frac{x_{n/2} + x_{(n/2)+1}}{2}, \qquad (1.13)$$

Calculul mediei selecţiei M_s cu formula (1.9), de obicei, este o procedură greoaie (chiar şi în cazul când avem un calculator). Din fericire, există metode care simplifică calculele. Una din ele este cea de trecere de la valorile x_i la nişte valori convenţionale, care sunt numere relativ mici şi întregi

$$U_i = \frac{x_i - c}{h}, \qquad (1.14)$$

unde c şi h sunt două constante alese special. În calitate de c se ia, de regulă, valoarea lui x_s a caracteristicii ξ cu cea mai mare frecvenţă.

Atunci când valorile x_i alcătuiesc o progresie aritmetică, raţia ei se ia în calitate de h. În aceste condiţii valorile convenţionale (1.14) vor fi numere întregi. Într-adevăr, avem

$$U_i = \frac{x_i - c}{h} = \frac{x_i - x_s}{h} = \frac{x_1 + (i-1)h - [x_1 + (s-1)h]}{h} =$$

$$= \frac{x_1 + ih - h - x_1 - sh + h}{h} = \frac{h(i-s)}{h} = i - s,$$

iar $i - s$ este, evident, un număr întreg. Astfel, pentru M_s în loc de (1.9) e mai bine să se folosească formula

$$M_s = \frac{h}{n} \sum_{i=1}^{m} \frac{x_i - c}{h} \cdot n_i + c \,. \tag{1.15}$$

Uşor se verifică coincidenţa părţilor drepte din (1.9) şi (1.15). Pentru a demonstra acest lucru vom transforma partea dreaptă din (1.15) după cum urmează

$$\frac{h}{n} \sum_{i=1}^{m} \frac{x_i - c}{h} \cdot n_i + c = \frac{h}{n} \cdot \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{m} (x_i - c) \cdot n_i + c =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} x_i n_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} c \cdot n_i + c = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} x_i n_i - \frac{c}{n} \sum_{i=1}^{m} n_i + c =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} x_i n_i - \frac{c}{n} \cdot n + c = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} x_i n_i - c + c = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} x_i n_i \,.$$

S-a obţinut valoarea părţii drepte din (1.9).

Exemplul 1.11. Se dă repartiţia statistică a unei caracteristice ξ.

x_i	120,7	125,7	130,7	135,7	140,7
n_i	10	12	30	25	15

Să se scrie repartiţia statistică a caracteristicii ξ în valori condiţionate.

Rezolvare. Vom lua în calitate de c valoarea $x_3 = 130{,}7$, care are frecvenţa maximă $n_3 = 30$, iar în calitate de h vom lua raţia acestei progresii aritmetice, $h = 5$. Venim la următoarea repartiţie

U_i	-2	-1	0	1	2
n_i	10	12	30	25	15

Pentru a simplifica calculul dispersiei selecţiei se foloseşte formula

$$D_s = \frac{h^2}{n}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{x_i - c}{h}\right)^2 \cdot n_i - (M_s - c)^2. \qquad (1.16)$$

Ca şi în cazul precedent, prin transformări elementare putem reduce expresia din partea dreaptă a formulei (1.16) la partea dreaptă din (1.12).

Remarcă. Nu întotdeauna datele statistice acumulate formează o progresie aritmetică. Atunci intervalul de apartenenţă a datelor este împărţit în intervale egale de lungimea h. Se calculează numărul de valori n_i a caracteristicii ξ, care aparţine fiecărui interval. În calitate de x_i se ia mijlocul intervalului.

Exemplul 1.12. Sunt date rezultatele unei selecţii:

135	133	124	132	104	152	134	130	129	120	122	124	117	123	123
129	121	122	125	131	147	124	137	112	126	128	111	129	115	147
131	132	137	119	125	120	129	125	123	127	132	118	133	132	132
134	131	120	135	132	125	132	108	114	121	133	133	135	131	125
114	115	122	131	125	132	120	126	115	117	118	118	132	134	127
127	124	135	128	127	115	144	129	120	137	127	125	116	132	120
117	127	118	109	127	122	120	135	116	118	133	136	125	126	119
126	129	127	129	124	127	132	126	131	127	130	126	134	135	127
124	123	123	130	132	143	122	129	120	134	108	132	121	111	123
140	137	120	125	131	118	120	120	136	129	127	116	138	128	133
122	131	128	140	138	134	120	126	109	137	111	115	117	130	113
126	115	124	125	118	115	128	123	129	128	120	115	134	118	135
134	123	117	140	124										

Volumul selecţiei $n = 185$.

a) Să se afle frecvenţele relative.

b) Să se construiască poligonul şi histograma repartiţiei date.

c) Să se afle funcţia statistică de repartiţie.

d) Să se calculeze: media selecţiei M_s, dispersia selecţiei D_s, abaterea medie pătratică a selecţiei σ_s.

Rezolvare. a) Vom folosi datele statistice ale problemei pentru a întocmi repartiţia selecţiei de forma (1.2). Deoarece volumul selecţiei n este mare ($n = 185$), vom considera intervale de lungimea $h = 5$:

$$(100 - 105]; (105 - 110]; \ldots; (150 - 155].$$

Astfel se ajunge la următoarea repartiţie a selecţiei:

Intervale / Frecvenţe	(100 – 105]	(105 – 110]	(110 – 115]	(115 – 120]	(120 – 125]	(125 – 130]	(130 – 135]	(135 – 140]	(140 – 145]	(145 – 150]	(150 – 155]
n_i	1	4	15	31	35	40	42	12	2	2	1

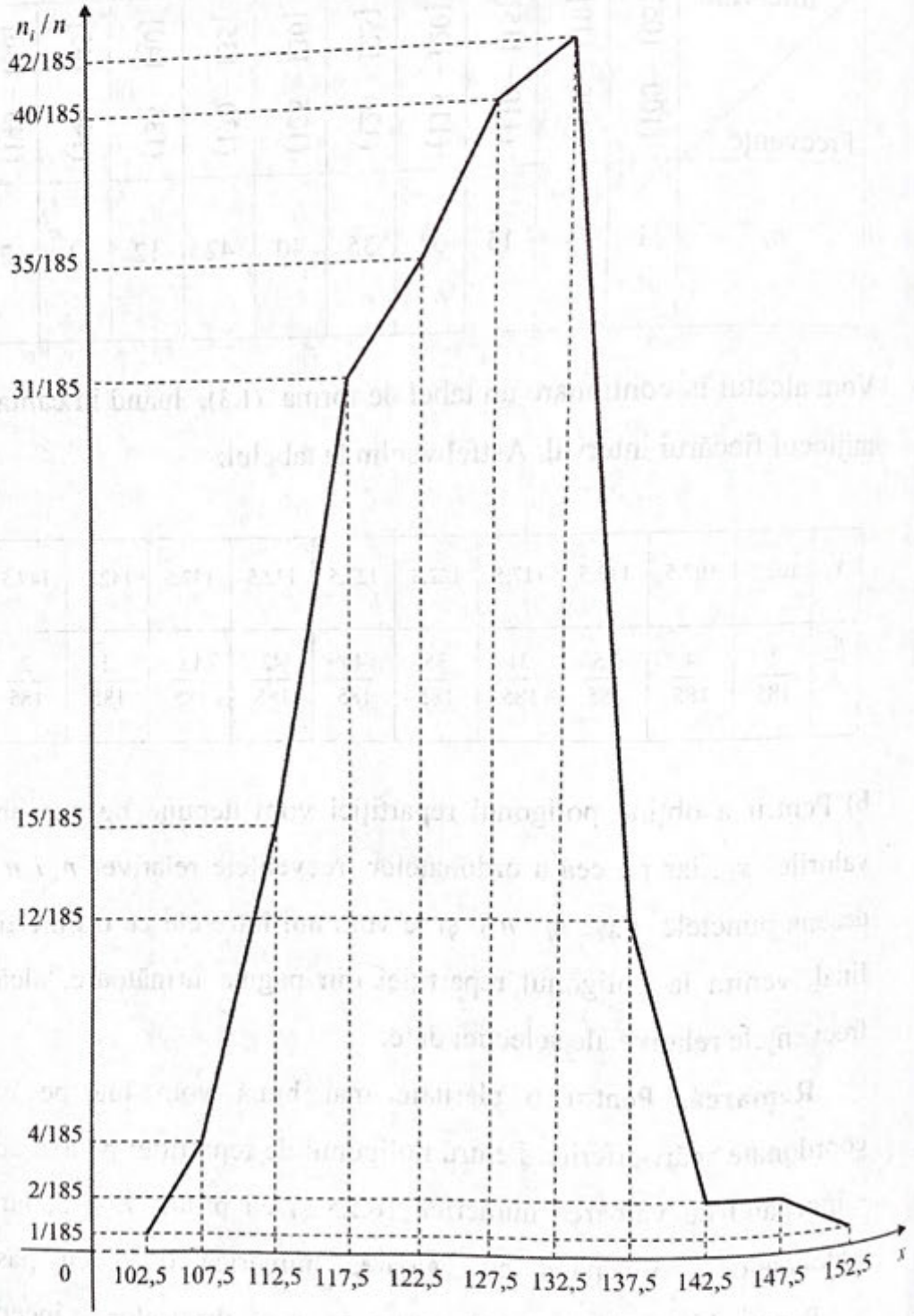
Vom alcătui în continuare un tabel de forma (1.3), luând în calitate de x_i mijlocul fiecărui interval. Astfel venim la tabelul:

x_i	102,5	107,5	112,5	117,5	122,5	127,5	132,5	137,5	142,5	147,5	152,5
$\frac{n_i}{n}$	$\frac{1}{185}$	$\frac{4}{185}$	$\frac{15}{185}$	$\frac{31}{185}$	$\frac{35}{185}$	$\frac{40}{185}$	$\frac{42}{185}$	$\frac{12}{185}$	$\frac{2}{185}$	$\frac{2}{185}$	$\frac{1}{185}$

b) Pentru a obţine poligonul repartiţiei vom depune pe axa absciselor valorile x_i, iar pe cea a ordonatelor frecvenţele relative n_i / n. Vom desena punctele $(x_i ; n_i / n)$ şi le vom uni între ele cu o linie frântă. În final, venim la poligonul repartiţiei din pagina următoare, alcătuit din frecvenţele relative ale selecţiei date.

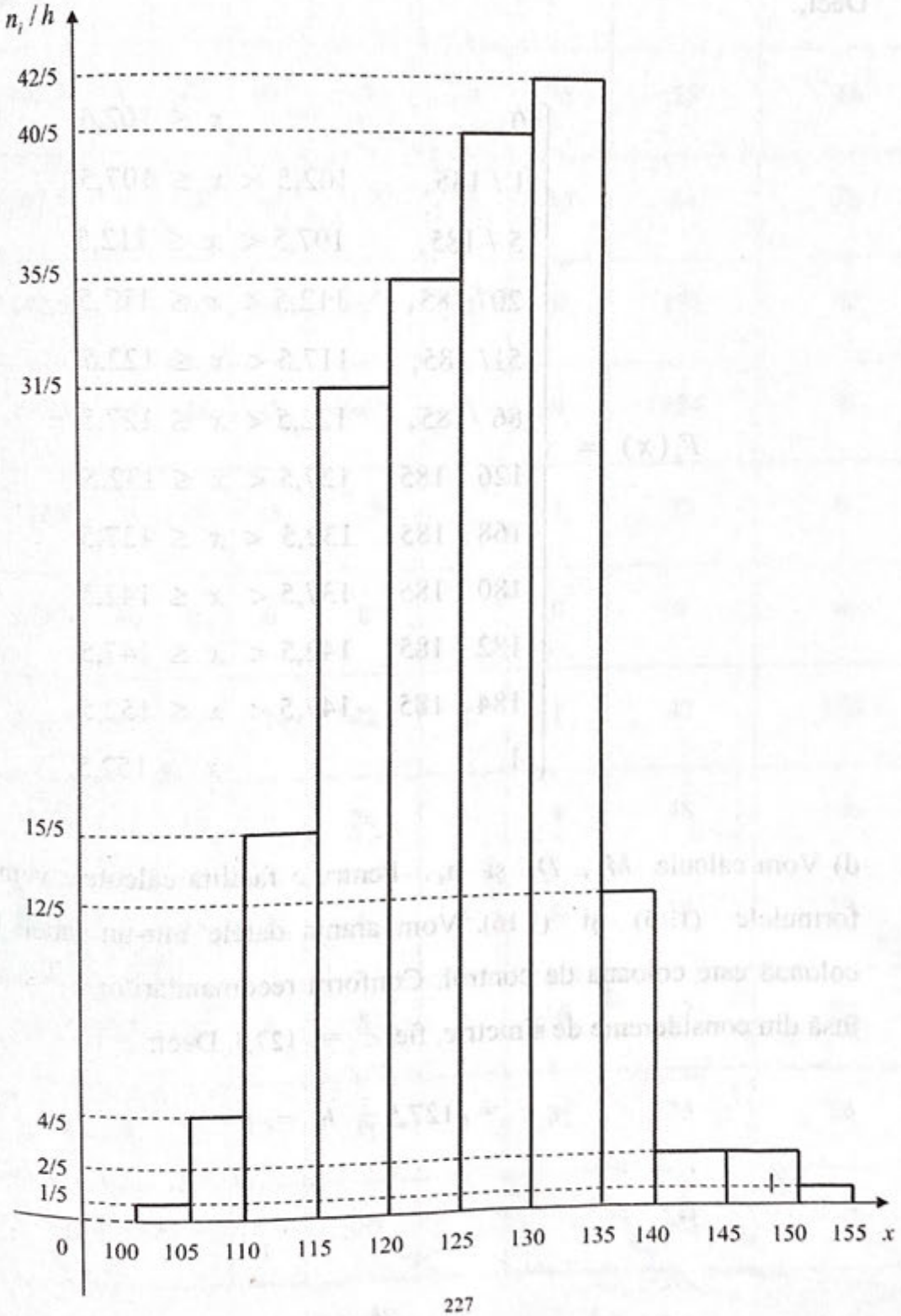
Remarcă. Pentru o claritate mai bună vom lua pe axele de coordonate scări diferite. Pentru poligonul de repartiţie: pe axa absciselor - începând cu valoarea numerică 102,5 şi cu pasul $h = 5$, iar pe axa ordonatelor - începând cu valoarea numerică 0 şi cu pasul 1/5.

Pentru histograma ce va urma: pe axa absciselor - începând cu valoarea numerică 100 şi cu pasul $h = 5$, iar pe axa ordonatelor - începând cu valoarea numerică 0 şi cu pasul 1/185.



Histograma o vom construi astfel. Pe axa absciselor vom depune punctele $100, 105, \ldots, 155$. Pe fiecare din intervalele $(100; 105]$,

(105 ; 110] , … , (150 ; 155] vom construi dreptunghiuri, având bazele aceste intervale, iar înălţimile egale cu n_i / h. În cazul nostru, primim



c) Pentru a determina funcţia statistică (empirică) de repartiţie vom folosi formula (1.5). În calitate de valoarea x_i vom lua mijlocul fiecărui interval. Deci,

$$F_s(x) = \begin{cases} 0, & x \le 102{,}5 \\ 1/185, & 102{,}5 < x \le 107{,}5 \\ 5/185, & 107{,}5 < x \le 112{,}5 \\ 20/185, & 112{,}5 < x \le 117{,}5 \\ 51/185, & 117{,}5 < x \le 122{,}5 \\ 86/185, & 122{,}5 < x \le 127{,}5 \\ 126/185, & 127{,}5 < x \le 132{,}5 \\ 168/185, & 132{,}5 < x \le 137{,}5 \\ 180/185, & 137{,}5 < x \le 142{,}5 \\ 182/185, & 142{,}5 < x \le 147{,}5 \\ 184/185, & 147{,}5 < x \le 152{,}5 \\ 1, & x > 152{,}5. \end{cases}$$

d) Vom calcula M_s, D_s şi σ_s. Pentru a facilita calculele vom folosi formulele (1.15) şi (1.16). Vom aranja datele într-un tabel. Ultima coloană este coloana de control. Conform recomandărilor $c = 132{,}5$, însă din considerente de simetrie, fie $c = 127{,}5$. Deci:

$$c = 127{,}5; \quad h = 5$$

Mijlocul intervalului	n_i	$x_i - c$	$\frac{x_i - c}{h}$	$\frac{x_i - c}{h} \cdot n_i$	$\frac{x_i - c}{h} + 1$	$\left(\frac{x_i - c}{h}\right)^2$	$\left(\frac{x_i - c}{h}\right)^2 \cdot n_i$	$\left(\frac{x_i - c}{h} + 1\right)^2 \cdot n_i$
102,5	1	-25	-5	-5	-4	25	25	16
107,5	4	-20	-4	-16	-3	16	64	36
112,5	15	-15	-3	-45	-2	9	135	60
117,5	31	-10	-2	-62	-1	4	124	31
122,5	35	-5	-1	-35	0	1	35	0
127,5	40	0	0	0	1	0	0	40
132,5	42	5	1	42	2	1	42	168
137,5	12	10	2	24	3	4	48	108
142,5	2	15	3	6	4	9	18	32
147,5	2	20	4	8	5	16	32	50
152,5	1	25	5	5	6	25	25	36
$n = 185$				-78			548	577

Pentru verificarea corectitudinii calculelor se folosește identitatea:

$$\sum n_i (u_i + 1)^2 = \sum n_i \cdot u_i^2 + 2\sum n_i u_i + n,$$

unde $U_i = \frac{x_i - c}{h}$. Așa cum $577 = 548 - 2 \cdot 78 + 185$, facem concluzia: calculele din tabel sunt corecte. Să calculăm M_s și D_s, utilizând datele din tabel.

$$M_s = \frac{-78}{185} \cdot 5 + 127{,}5 = -2{,}1 + 127{,}5 = 125{,}4.$$

$$D_s = \frac{5^2}{185} \cdot 548 - (125{,}4 - 127{,}5)^2 \approx$$

$$\approx 74{,}05 - (-2{,}1)^2 \approx 74{,}05 - 4{,}41 \approx 69{,}6.$$

$$\sigma_s = \sqrt{D_s} \approx \sqrt{69{,}6} \approx 8{,}34.$$

Remarcă. Atunci când date statistice s-au acumulat foarte multe pentru rezolvarea problemelor de acest tip sunt folosite calculatoare performante, care dispun de programe speciale. E suficient să introducem în calculator datele inițiale, să folosim instrumentariul electronic și să scoatem la printer rezultatele.

Probleme

1.1. Să se construiască poligonul repartiţiei în frecvente absolute

x_i	1	4	5	7
n_i	10	20	14	6

1.2. Să se construiască poligonul repartiţiei în frecvenţe relative

x_i	2	4	5	7	10
n_i / n	0,15	0,20	0,10	0,25	0,30

1.3. În tabel sunt reproduse datele unei selecţii:

56	76	65	66	76	62	89	48	62	50	47	80	67	87	78	55	67	51
73	75	61	88	46	57	65	60	72	28	75	51	69	68	65	34	77	63
57	61	42	85	49	41	62	63	80	62	65	75	56	66	92	60	43	52
80	68	70	76	62	55	42	87	81	67	65	81	90	38	58	60	79	79
50	64	70	58	77	73	54	58	77	86	52	61	42	70	93	54	65	51
53	64	65	76	88	59	62	67	62	90	88	69	61	81	65	72	58	68
94	54	58	58	81	57	70	71	78	52	93	89	57	68	70	58	72	57
62	63	87	61	91	57	57	66	68	40	63	86	48	75	66	83	64	55
75	65	67	54	70	44	51	86	67	58	73	71	46	86	68	79	50	58
66	69	61	64	78	78	60	46	71	71	74	79	65	61	62	84	53	67
83	43	64	67	50	60	83	61	83	67	67	58	46	73	58	47	76	81
72	66	83	73	71	70	60	68	52	51	63	63	75	61	80	51	63	62
46	48	53	59														

Volumul selecţiei este 220.

a) Să se facă gruparea datelor pe intervale de lungimea $h = 5$.

b) Să se scrie repartiţia statistică a acestei selecţii pe intervale.

c) Să se construiască histograma repartiţiei.

d) Să se scrie expresia pentru funcţia statistică de repartiţie.

e) Să se calculeze media selecţiei M_s, dispersia selecţiei D_s şi abaterea medie pătratică a selecţiei σ_s.

1.4. În tabelul de mai jos sunt date rezultatele măsurării staturii a 100 de studenţi:

Statura	154-158	158-162	162-166	166-170	170-174	174-178	178-182
Nr. de studenţi	10	14	22	27	17	7	3

Să se calculeze media şi dispersia acestei selecţii.

1.5. Să se calculeze dispersia selecţiei după rezultatele de mai jos

x_i	2502	2804	2903	3028
n_i	8	30	60	2

1.6. Datele unui sondaj sunt date în tabelul ce urmează:

71	62	43	80	70	44	42	25	48	55	58	44	14	55	56	49	54	63
60	57	70	52	74	65	61	60	72	69	68	47	30	62	81	56	55	38
68	55	74	50	29	35	55	52	27	58	50	62	80	49	68	68	81	66
64	41	45	48	68	79	56	82	76	84	47	44	72	58	58	80	61	55
66	36	69	44	88	88	73	39	70	70	35	51	69	50	59	35	43	71
54	65	85	63	59	52	88	64	60	61	31	64	48	49	50	41	62	42
76	81	76	70	76	75	53	66	87	74	61	68	13	44	61	53	46	69
71	58	63	73	56	65	53	77	39	83	45	55	77	61	42	72	49	52
67	62	68	72	46	76	67	53	70	76	56	62	38	59	53	50	76	52
73	34	51	60	61	58	72	49										

Volumul selecţiei $n = 170$.

a) Să se facă gruparea datelor pe intervale de lungimea $h = 5$.

b) Să se construiască histograma repartiţiei în frecvenţe absolute şi relative.

c) Să se afle funcţia statistică de repartiţie şi să se construiască graficul ei.

d) Să se calculeze media M_s, dispersia D_s şi abaterea medie pătratică σ_s a selecţiei.

1.7. După datele repartiţiei statistice

x_i	10,2	10,4	10,6	10,8	11,0	11,2	11,4	11,6	11,8
n_i	2	5	8	12	20	15	12	10	6

Să se calculeze media M_s şi dispersia D_s a selecţiei.

1.8. În scopul studierii solicitărilor un magazin de încălţăminte a făcut un sondaj şi au fost obţinute datele statistice despre mărimile pantofilor vânduţi:

40 38 43 41 42 40 38 41 40 42 41 40 42 39 41 41 36 43
41 42 41 41 40 40 39 42 40 43 37 40 42 43 42 38 40 40
41 41 41 40 43 42 42 39 43 41 40 43 41 42 42 39 43 41
42 40 41 39 43 40 38 37 40 39 39 41 42 40 43 42

Să se afle :

1. Seria statistică.
2. Media M_s a selecţiei.
3. Dispersia D_s a selecţiei.
4. Funcţia statistică de repartiţie .

1.9. Este dată repartiţia după statură a elevilor de la o şcoală profesională

143-146	146-149	149-152	152-155	155-158	158-161	161-164
1	2	8	26	65	120	181

164-167	67-170	170-173	173-176	76-179	179-182	182-185	185-188
201	170	120	64	28	10	3	1

Să se afle :

1. Funcţia statistică de repartiţie.
2. Media M_s a selecţiei
3. Dispersia D_s şi abaterea medie pătratică σ_s a selecţiei.
4. Să se construiască histograma repartiţiei (în frecvente absolute şi relative).

1.10. În tabelul de mai jos sunt date rezultatele unor măsurări

Rezultate	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50
n_i	3	4	6	9	15	11

50-55	55-60	60-65	65-70	70-75	75-80
10	8	7	4	2	1

$n = 80$

Să se afle :

1. Media M_s a selecţiei.
2. Dispersia D_s şi abaterea medie pătratică σ_s a selecţiei.
3. Funcţia empirică de repartiţie.
4. Să se construiască histograma (în frecvente absolute şi relative).

1.11. În scopul studierii solicitărilor, un magazin de haine pentru bărbaţi a realizat un sondaj, obţinînd datele statistice despre mărimile costumelor vândute:

50 48 54 52 54 50 48 52 50 52 52 50 52 46 52 54 46 56
46 54 50 52 50 50 48 52 50 54 48 50 52 54 52 48 50 50
52 46 52 50 54 52 52 48 54 52 50 54 56 52 52 48 54 54
54 50 52 46 54 50 48 56 50 48 48 52 52 50 54 56 54 52

Să se afle :

1. Seria statistică.
2. Media M_s a selecţiei.
3. Dispersia D_s şi abaterea medie pătratică σ_s a selecţiei.
4. Funcţia statistică de repartiţie .
5. Să se construiască poligonul frecventelor relative.

§ 2. Estimarea parametrilor

O problemă importantă în statistica matematică este cea de **estimare a parametrilor**. Admitem, că se ştie tipul legii de repartiţie a caracteristicii ξ din populaţia statistică. De regulă, legile de repartiţie a variabilelor aleatoare depind de careva parametri. De exemplu, legea de repartiţie normală depinde de 2 parametri m şi σ, legea de repartiţie exponenţială e dependentă de un parametru λ. Pentru a stabili legea concretă de repartiţie e nevoie să ştim aceşti parametri.

A estima parametrii unei repartiţii înseamnă a determina cât mai exact valorile lor. Estimarea o putem face dispunând de rezultatele selecţiei, adică de valorile $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ale caracteristicii ξ. Atunci când facem o altă selecţie de acelaşi volum, evident, se vor obţine alte valori. Astfel, $x_1, x_2, \ldots, x_m$ pot fi considerate variabile aleatoare notate $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$.

Definiţia 2.1. Se numeşte **estimaţie statistică** a parametrului necunoscut din populaţia statistică o funcţie de valorile $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Remarcă. Valorile $x_1, x_2, \ldots, x_m$ variază de la o selecţie la alta. Astfel aceste valori pot fi privite ca nişte rezultate numerice (numere) atunci când selecţia a fost făcută sau ca nişte variabile aleatoare ξ_i până la efectuarea selecţiei.

Orice estimaţie a parametrului necunoscut θ după rezultatele selecţiei este o funcţie de aceste valori

$$\theta = \theta(x_1, x_2, \ldots, x_m) \tag{2.1}$$

Funcţia (2.1) este o funcţie de variabilele aleatoare $x_1, x_2, \ldots, x_m$, deci este la rândul său o variabilă aleatoare. Estimaţia (2.1) trebuie de ales astfel ca ea să aproximeze parametrul necunoscut θ cât se poate de bine.

Definiţia 2.2. Vom spune că estimaţia $\bar{\theta}$ este **nedeplasată** sau **absolut corectă** (sau **fără erori sistematice**) dacă

$$M\bar{\theta} = \theta \tag{2.2}$$

Definiţia 2.3. Vom spune că estimaţia $\bar{\theta}$ este una **consistentă** pentru parametrul θ dacă

$$\lim_{n \to \infty} P(\left|\bar{\theta} - \theta\right| < \varepsilon) = 1 \tag{2.3}$$

Media selecţiei, calculată după rezultatele unei selecţii $x_1, x_2, \ldots, x_m$ este evident un număr. Dacă facem o altă selecţie de acelaşi volum se va obţine alt număr. Astfel această medie poate fi privită ca o variabilă aleatoare ξ şi deci putem vorbi despre repartiţia acestei variabile aleatoare, respectiv despre valoarea medie şi dispersia ei.

De obicei, media populaţiei statistice nu este cunoscută şi se cere de a o estima având la dispoziţie rezultatele selecţiei.

Teorema 2.1. Media selecţiei M_s, este o estimaţie nedeplasată a mediei populaţiei.

Dispersia selecţiei serveşte în calitate de estimaţie pentru dispersia populaţiei, însă această estimaţie este una deplasată, deoarece se ştie că

$$M(D_s) = \frac{n-1}{n} \cdot D_p \tag{2.4}$$

Din (2.4) se observă, că dispersia selecţiei în medie este mai mică decât dispersia populaţiei statistice cu $\frac{D_p}{n}$. Este evident cum trebuie să "corectăm" dispersia selecţiei pentru ca ea să ne deie o estimaţie nedeplasată (2. 2) a dispersiei populaţiei statistice: vom înmulţi dispersia selecţiei D_s la $n/(n-1)$ şi vom obţine estimaţia populaţiei statistice, pe care o vom nota prin $\overline{D}_s$, deci

$$\overline{D}_s = \frac{n}{n-1} D_s \tag{2.5}$$

Întradevăr, din (2.5) primim

$$M(\overline{D}_s) = M\left(\frac{n}{n-1} D_s\right) = \frac{n}{n-1} M(D_s) = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot D_p = D_p.$$

Astfel, în calitate de estimaţie pentru dispersia populaţiei statistice D_p se ia, de obicei, dispersia corectată a selecţiei

$$\overline{D}_s = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{m} (x_i - M_s)^2 \cdot n_i \tag{2.6}$$

Remarcă. Examinând formulele (2. 6) şi (1.12) observăm că în (1.12) în faţa sumei este $1/n$, iar în (2. 6) în faţa sumei este $1/(n-1)$.

Evident, că pentru volumul n mare al selecţiei diferenţa dintre n şi $n-1$ este mică. În consecinţă dispersia selecţiei D_s şi cea corectată $\overline{D}_s$ vor fi aproape egale. În investigaţiile practice se utilizează dispersia corectată $\overline{D}_s$ pentru $n < 30$.

Fie că s-a obţinut o estimaţie $\bar{\theta}$ a parametrului necunoscut θ. Este clar că $\bar{\theta}$ trebuie să fie aproape de valoarea lui θ. Estimaţia $\bar{\theta}$ cu atât mai bună cu cât diferenţa $|\theta - \bar{\theta}|$ va fi mai mică. Deci, de dorit ca pentru un $\delta > 0$ (suficient de mic) să avem $|\theta - \bar{\theta}| < \delta$. Astfel δ caracterizează exactitatea estimării. Însă diferenţele $|\theta - \bar{\theta}|$ diferă între ele pentru selecţii diferite. În acest sens diferenţa $|\theta - \bar{\theta}|$ poate fi privită ca o variabilă aleatoare şi are sens să vorbim despre $P(|\theta - \bar{\theta}| < \delta)$.

Definiţia 2.4. Se numeşte **coeficient de încredere** sau **probabilitate de încredere** a estimaţiei $\bar{\theta}$ probabilitatea

$$P(|\theta - \bar{\theta}| < \delta) = \gamma. \tag{2.7}$$

De obicei, valoarea γ a probabilităţii de încredere (2.7) se indică aproape de 1, pentru a ne apropia de estimarea consistentă (2.3). Doar se doreşte ca valoarea $\bar{\theta}$ să estimeze parametrul necunoscut θ aproape sigur ($P(\Omega) = 1$). Inegalitatea $|\theta - \bar{\theta}| < \delta$ este echivalentă cu $\bar{\theta} - \delta < \theta < \bar{\theta} + \delta$. Prin urmare,

$$P(|\theta - \bar{\theta}| < \delta) = P(\bar{\theta} - \delta < \theta < \bar{\theta} + \delta) = \gamma. \tag{2.8}$$

Definiţia 2.5. Intervalul $(\bar{\theta} - \delta ; \bar{\theta} + \delta)$, căruia î-i aparţine parametrul necunoscut θ cu probabilitatea (2.8), se numeşte **interval de încredere.**

Remarcă. Pentru diferite selecţii se vor obţine diferite valori pentru θ. Deci, extremităţile $\bar{\theta} - \delta$ şi $\bar{\theta} + \delta$ ale intervalului de încredere sunt variabile aleatoare.

Admitem că o caracteristică ξ a populaţiei statistice este repartizată normal cu parametrii m şi σ. Vom pune problema estimării parametrului necunoscut m atunci când al doilea parametru σ este cunoscut. Să aflăm intervalul de încredere, care acoperă m cu o probabilitate de încredere γ. Fie, că în rezultatul selecţiei de volum n s-au obişnuit valorile $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Dacă facem altă selecţie atunci şi aceste valori se vor schimba. Astfel, putem interpreta $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ca nişte variabile aleatoare ξ_1, $\xi_2, \ldots, \xi_m$, care au aceiaşi repartiţie ca şi ξ. Aceasta implică (2.9)

$$M\xi_1 = M\xi_2 = \ldots = M\xi_m = M\xi = m \tag{2.9}$$

şi (2.10)

$$\sigma\xi_1 = \sigma\xi_2 = \ldots = \sigma\xi_m = \sigma\xi = \sigma . \tag{2.10}$$

Media selecţiei M_s la fel ca şi abaterea medie pătratică a selecţiei σ_s se vor schimba de la o selecţie la alta, deci, pot fi considerate variabile aleatoare cu parametrii

$$M(M_s) = m, \quad \sigma(\sigma_s) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} . \tag{2.11}$$

Vom cere ca să fie satisfăcută condiţia

$$P(|M_s - m| < \delta) = \gamma . \tag{2.12}$$

Se ştie, că pentru o variabilă aleatoare repartizată normal are loc relaţia

$$P(|\xi - m| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right), \tag{2.13}$$

unde

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2}\, dt \qquad (2.14)$$

este funcţia lui Laplace. Vom scrie relaţia (2.13) pentru $\xi = M_s$; $\sigma\xi = \sigma / \sqrt{n}$:

$$P(|M_s - m| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right). \qquad (2.15)$$

Notăm $z = \left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right)$. Atunci $\delta = \frac{z\sigma}{\sqrt{n}}$ şi relaţia (2.15) poate fi scrisă astfel

$$P(|M_s - m| < \frac{z\sigma}{\sqrt{n}}) = 2\Phi(z). \qquad (2.16)$$

Ţinând cont de faptul că inegalitatea $|x| < a$ este echivalentă cu inegalitatea $-a < x < a$, din (2.16) concludem:

$$P(M_s - \frac{z\sigma}{\sqrt{n}} < m < M_s + \frac{z\sigma}{\sqrt{n}}) = 2\Phi(z) = \gamma. \qquad (2.17)$$

Relaţia (2.17) ne indică intervalul de încredere $(M_s - \frac{z\sigma}{\sqrt{n}}\,;\, M_s + \frac{z\sigma}{\sqrt{n}})$, care acoperă parametrul necunoscut m al repartiţiei normale cu o probabilitate de încredere γ.

Remarcă. Utilizând tabelul valorilor funcţiei Laplace (2.14) din ecuaţia $\Phi(z) = \gamma/2$ aflăm pentru fiecare valoare dată a lui γ, valoarea respectivă a argumentul z.

Remarcă. Numărul $\delta = z\sigma / \sqrt{n}$ exprimă precizia estimării pentru γ fixat.

a) Din expresia lui δ rezultă imediat că atunci când volumul n al selecţiei creşte, valoarea lui δ descreşte, deci, precizia estimării creşte.

b) Odată cu creşterea probabilităţii de încredere $\gamma = 2\Phi(z)$ creşte şi valoarea lui z (Φ este o funcţie crescătoare). Prin urmare, atunci creşte şi δ (lungimea intervalului de încredere).

Concluzie: Cerinţa ca probabilitatea de încredere γ să fie mare conduce la micşorarea preciziei estimării parametrului m (a se vedea relaţia (2.12)).

Exemplul 2.1. Variabila aleatoare ξ are repartiţia normală cu abaterea medie pătratică $\sigma = 3$. Probabilitatea de încredere $\gamma = 0{,}95$. Să se afle intervalul de încredere pentru valoarea medie $M\xi$, dacă în rezultatul unei selecţii de volumul $n = 36$ s-a constatat că $M_s = 4{,}1$.

Rezolvare. Din ecuaţia $\Phi(z) = \gamma / 2$ avem $\Phi(z) = 0{,}95 / 2 = 0{,}475$. Din tabelul valorilor funcţiei $\Phi(z)$ aflăm $z = 1{,}96$.

Prin urmare,

$$\delta = \frac{z\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}96 \cdot 3}{\sqrt{36}} = \frac{1{,}96 \cdot 3}{6} = \frac{1{,}96}{2} = 0{,}98.$$

Extremităţile intervalului de încredere vor fi:

$$M_s - \delta = M_s - 0{,}98 = 4{,}1 - 0{,}98 = 3{,}12;$$

$$M_s + \delta = M_s + 0{,}98 = 4{,}1 + 0{,}98 = 5{,}08.$$

Deci $M\xi \in (3{,}12; 5{,}08)$.

Răspuns: $P(M\xi \in (3{,}12; 5{,}08)) = 0{,}95$.

Fie, caracteristica ξ este repartizată normal cu parametrii m şi σ. Se pune problema estimării lui m, când σ nu este cunoscut. Evident că nu

putem determina intervalul de încredere pentru m cu ajutorul relaţiei (2.17), unde e prezent σ (necunoscut !). Din fericire, putem construi cu ajutorul datelor selecţiei de volum n, o variabilă aleatoare η

$$\eta = \frac{M_s - m}{\sqrt{\overline{D}_s / n}}, \tag{2.18}$$

unde M_s este media selecţiei, $\overline{D}_s$ e dispersia corectată a selecţiei. Variabila aleatoare (2.18) are repartiţia lui Student cu $n - 1$ grade de libertate.

Densitatea de repartiţie a variabilei η este

$$f_\eta(x\,;n) = B_n \cdot \left(1 + \frac{x^2}{n-1}\right)^{-n/2}, \tag{2.19}$$

unde

$$B_n = \frac{\Gamma(n/2)}{\sqrt{\pi(n-1)}\;\Gamma(n-1)/2}, \tag{2.20}$$

iar $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ e funcţia gama. Funcţia $\Gamma(x)$ satisface ecuaţia funcţională $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$. În particular, $\Gamma(n+1) = n\,!$.

Din (2.19) şi (2.20) se observă imediat, că repartiţia lui Student depinde parametric doar de n – volumul selecţiei. Prin urmare,

$$P\left(\left|\frac{M_s - m}{\sqrt{\overline{D}_s / n}}\right| < t_\gamma\right) = 2\int_0^{t_\gamma} f_\eta(x\,;n)\,dx = \gamma. \tag{2.21}$$

După ce inegalitatea din (2.21) o vom înlocui cu una dublă echivalentă vom obţine

$$P(M_s - t_\gamma \sqrt{\overline{D}_s / n} < m < M_s + t_\gamma \sqrt{\overline{D}_s / n}) = \gamma. \quad (2.22)$$

Relaţia (2.22) ne dă intervalul de încredere

$$(M_s - t_\gamma \sqrt{\overline{D}_s / n} ; M_s + t_\gamma \sqrt{\overline{D}_s / n}) \quad (2.23)$$

pentru parametrul m (media populaţiei statistice) în cazul când σ nu este cunoscut.

Exemplul 2.2. Caracteristica ξ a populaţiei statistice este repartizată normal cu parametrii m şi σ. S-a făcut o selecţie de volumul $n = 16$. S-a calculat $M_s = 20{,}2$ şi $\overline{D}_s = 0{,}64$. Să se estimeze parametrul m cu o probabilitate de încredere $P = 0{,}95$.

Rezolvare. Vom aplica relaţia (2.22). Pentru $\gamma = 0{,}95$, $n = 16$, din tabelul valorilor t_γ aflăm $t_\gamma = 2{,}13$. Prin urmare, extremităţile intervalului de încredere (2.23) vor fi

$$M_s - t_\gamma \sqrt{\frac{\overline{D}_s}{n}} = 20{,}2 - 2{,}13 \cdot \sqrt{\frac{0{,}64}{16}} = 20{,}2 - 2{,}13 \cdot \frac{0{,}8}{4} = 20{,}2 - 0{,}426 = 19{,}774;$$

$$M_s + t_\gamma \sqrt{\frac{\overline{D}_s}{\gamma}} = 20{,}2 + 2{,}13 \cdot \sqrt{\frac{0{,}64}{16}} = 20{,}626.$$

Deci, $P(19{,}774 < m < 20{,}626) = 0{,}95$.

Răspuns. Cu probabilitatea $P = 0{,}95$ parametrul $m \in (19{,}774 ; 20{,}626)$.

Remarcă. Se poate demonstra că

$$\lim_{n \to \infty} B_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tag{2.24}$$

şi

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x^2}{n-1}\right)^{-n/2} = e^{-x^2/2}, \tag{2.25}$$

iar din (2. 24) şi (2. 25) rezultă,

$$\lim_{n \to \infty} f_\eta(x;n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}. \tag{2.26}$$

ceea ce înseamnă, că repartiţia lui Student tinde spre repartiţia normală cu parametrii $m = 0$ şi $\sigma = 1$ atunci când volumul selecţiei $n \to \infty$. De aceea pentru selecţii de volumul $n > 30$ putem înlocui repartiţia Student cu cea normală. În asemenea cazuri relaţia (2. 21) cu utilizarea egalităţii (2. 26) ne dă estimarea (2. 27),

$$P\left(\left|\frac{M_s - m}{\sqrt{\overline{D}_s / n}}\right| < t_\gamma\right) = 2\int_0^{t_\gamma} e^{-x^2/2} dx = \gamma. \tag{2.27}$$

În continuare ne vom pune ca obiectiv să estimăm parametrul necunoscut σ al repartiţiei normale $N(m; \sigma^2)$ al caracteristicii ξ. Fie că sa făcut o selecţie de volum n şi sa calculat abaterea medie pătratică corectată a selecţiei $\overline{\sigma}_s = \sqrt{\overline{D}_s}$. Vom cere să fie verificată relaţia

$$P(|\sigma - \bar{\sigma}_s| < \delta) = \gamma. \tag{2.28}$$

După unele transformări inegalitatea $|\sigma - \bar{\sigma}_s| < \delta$ poate fi adusă la forma

$$\bar{\sigma}_s\left(1 - \frac{\delta}{\bar{\sigma}_s}\right) < \sigma < \bar{\sigma}_s\left(1 + \frac{\delta}{\bar{\sigma}_s}\right). \tag{2.29}$$

Notăm $q = \frac{\delta}{\bar{\sigma}_s}$. Atunci (2.29) devine

$$\bar{\sigma}_s(1 - q) < \sigma < \bar{\sigma}_s(1 + q). \tag{2.30}$$

Vom determina, în continuare, parametrul q. Pentru aceasta vom introduce variabila aleatoare

$$\chi = \frac{\bar{\sigma}_s}{\sigma}\sqrt{n-1}. \tag{2.31}$$

Densitatea de repartiţie a variabilei aleatoare χ este

$$f_\chi(x; n) = \frac{x^{n-2}\, e^{-x^2/2}}{2^{\frac{n-3}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}. \tag{2.32}$$

Se observă imediat, că densitatea (2.32) nu depinde de σ, dar numai de volumul selecţiei n. Vom transforma (2.30) după cum urmează

$$\frac{1}{\overline{\sigma}_s(1+q)} < \frac{1}{\sigma} < \frac{1}{\overline{\sigma}_s(1-q)}. \qquad (2.33)$$

Înmulţim inegalitatea (2.33) prin $\overline{\sigma}_s\sqrt{(n-1)}$ şi obţinem

$$\frac{\sqrt{n-1}}{1+q} < \frac{\overline{\sigma}_s\sqrt{n-1}}{\sigma} < \frac{\sqrt{n-1}}{1-q}. \qquad (2.34)$$

Ţinând cont de definiţia variabilei aleatoare χ, (vezi 2.31) inegalitatea (2.34) ne conduce la inegalitatea următoare

$$\frac{\sqrt{n-1}}{1+q} < \chi < \frac{\sqrt{n-1}}{1-q}.$$

După ce aplicăm formula (2.17) din capitolul II, venim la relaţia

$$P\left(\frac{\sqrt{n-1}}{1+q} < \chi < \frac{\sqrt{n-1}}{1-q}\right) = \int_{\frac{\sqrt{n-1}}{1-q}}^{\frac{\sqrt{n-1}}{1+q}} f(x;n)\,dx = \gamma. \qquad (2.35)$$

Din ecuaţia (2.35) pentru volumul dat n al selecţiei cu probabilitatea de încredere γ (la fel dată), putem afla parametrul q. În practică la determinarea lui q sunt utilizate tabele speciale. În final, pentru valoarea determinată a lui q aflăm intervalul de încredere (2.30) pentru parametrul σ. Astfel relaţia (2.28) este verificată.

Exemplul 2.3. Caracteristica ξ a populaţiei statistice este repartizată normal cu parametrii m *şi* σ. Din populaţie s-a făcut o selecţie de volumul $n = 25$. Abaterea medie pătratică corectată a selecţiei

$\bar{\sigma}_s = 0{,}8$. Să se afle intervalul de încredere pentru parametrul necunoscut σ, care-l acoperă cu o probabilitate $\gamma = 0{,}95$.

Rezolvare. Pentru $n = 25$ şi $\gamma = 0{,}95$ din tabel aflăm $q = 0{,}32$. Calculăm extremităţile intervalului de încredere pentru σ (vezi (2.30)). Avem

$$\bar{\sigma}_s (1 - q) = 0{,}8 (1 - 0{,}32) = 0{,}8 \cdot 0{,}68 = 0{,}544;$$

$$\bar{\sigma}_s (1 + q) = 0{,}8 (1 + 0{,}32) = 1{,}056.$$

Prin urmare, $0{,}544 < \sigma < 1{,}056$.

Răspuns. Intervalul $(0{,}544 ; 1{,}056)$ acoperă parametrul necunoscut σ cu o probabilitate $\gamma = 0{,}95$.

Remarcă. În teoria erorilor precizia de obicei este caracterizată de abaterea medie pătratică σ a erorilor, comise la fiecare măsurare. Pentru a estima parametrul σ se foloseşte abaterea medie corectată a selecţiei $\bar{\sigma}_s$ (după rezultatele a n măsurări). Întrucât rezultatele măsurărilor sunt independente, au aceiaşi valoare medie şi dispersie, teoria expusă mai sus este aplicabilă la estimarea preciziei măsurărilor.

Exemplul 2.4. S-au efectuat 17 măsurări. Abaterea medie pătratică corectată a erorilor comise s-a dovedit a fi $\bar{\sigma}_s = 0{,}12$. Să se estimeze precizia măsurărilor cu o probabilitate de încredere $\gamma = 0{,}99$.

Rezolvare. Din tabel pentru $n = 17$ şi $\gamma = 0{,}99$ aflăm $q = 0{,}64$. Prin urmare,

$$\bar{\sigma}_s (1 - q) = 0{,}12 (1 - 0{,}64) = 0{,}12 \cdot 0{,}36 = 0{,}004;$$

$$\bar{\sigma}_s (1 + q) = 0{,}12 (1 + 0{,}64) = 0{,}12 \cdot 1{,}64 = 1{,}20.$$

Intervalul de încredere este $0{,}04 < \sigma < 1{,}20$.

Răspuns. $P(\sigma \in (0{,}004 ; 1{,}20)) = 0{,}99$.

Probleme

2.1. Să se determine intervalul de încredere pentru parametrul necunoscut m al repartiţiei normale, dacă se ştie al doilea parametru σ, media selecţiei M_s şi $P = 0{,}99$.

a) $\sigma = 4$; $M_s = 10{,}2$; $n = 16$,

b) $\sigma = 5$; $M_s = 16{,}8$; $n = 25$.

2.2. Caracteristica ξ a unei populaţii statistice este repartizată normal. S-a făcut o selecţie de volumul $n = 25$ şi s-a calculat $\sigma_s = 0{,}8$. Să se afle intervalul de încredere, care acoperă abaterea medie pătratică σ a populaţiei statistice cu o probabilitate egală cu $0{,}95$.

2.3. Să se afle intervalul de încredere pentru parametrul m al repartiţiei normale, dacă abaterea medie pătratică $\sigma = 5$, $M_s = 2{,}3$. Volumul selecţiei $n = 40$, iar intervalul de încredere acoperă parametrul necunoscut m cu probabilitatea $P = 0{,}92$.

2.4. Pentru caracteristica ξ, repartizată normal sunt date: abaterea medie pătratică $\sigma = 2$; media selecţiei $M_s = 5{,}4$; volumul selecţiei $n = 50$. Să se afle intervalul de încredere pentru valoarea medie a populaţiei, care o acoperă cu probabilitatea $P = 0{,}97$.

2.5. S-au efectuat 25 de măsurări ale unei caracteristice ξ cu un dispozitiv a cărui eroare sistematica lipseşte. Considerând că erorile măsurărilor sunt repartizate normal cu abaterea medie pătratică $\sigma = 2m$. Să se afle intervalul de încredere care acoperă valorile mărimii măsurabile cu o probabilitate $P = 0{,}98$. Media selecţiei $M_s = 100m$.

2.6. La cântărirea unei greutăţi au fost obţinute următoarele rezultate 129; 125 ; 130 ; 122 ; 135 ; 125 ; 120 ; 130 ; 127 ; 126. Să se afle eroarea medie pătratică a cântarului şi să se afle intervalul de încredere al cărui probabilitate ar fi egală cu 0,92 .

2.7. S-a făcut o selecţie, având ca rezultate: 1,5 ; 2,1 ; 1,9 ; 1,7 ; 2,3 ; 1,6; 2,0; 2,4 ; 1,8 ; 1,75. Să se afle intervalul de încredere, care ar acoperi cu probabilitatea $P = 0{,}93$ valoarea medie m a unei repartiţii normale cu parametrul $\sigma = 0{,}4$.

2.8. Să se afle intervalul de încredere pentru valoarea medie m a repartiţiei normale după datele selecţiei din exemplul 2.7 pentru cazul când parametrul σ nu este cunoscut.

2.9. Dintr-o populaţie statistică s-a făcut o selecţie de volumul $n = 20$ şi s-au obţinut următoarele rezultate: 3,1 ; 3,3 ; 2,9 ; 3,0 ; 3,1 ; 3,2 ; 3,25 ; 2,85 ; 3,15 ; 2,86 ; 3,20 ; 3,28 ; 2,88 ; 3,11 ; 3,31 ; 2,93 ; 2,79 ; 3,25 ; 3,16 ; 2,86. În ipoteza, că aceste rezultate reprezintă o repartiţie normală să dispersia σ^2 cu probabilitatea de încredere $P = 0{,}95$.

2.10. S-au efectuat 300 de experimente independente şi în fiecare din ele probabilitatea necunoscută p de producere a unui eveniment A este constantă. Evenimentul A s-a produs de 250 de ori. Să se afle intervalul de încredere, care acoperă parametrul p cu probabilitatea $P = 0{,}95$.

§3. Corelaţie. Linii de regresie

Două variabile aleatoare ξ şi η pot fi **independente** sau **dependente.** La rândul său dependenţa dintre ele poate fi diferită. Aceste variabile pot fi dependente **funcţional**, adică există o funcţie f încât $\eta = f(\xi)$. De exemplu, $\eta = 2\xi$, $\eta = \xi^2 + 1$, $\eta = e^{\xi} + \sin 2\xi$, etc...

Din nefericire, dependenţa funcţională se realizează destul de rar, deoarece, de regulă, variabilele ξ şi η se află sub influenţa unor factori aleatori (întâmplători), care generează o dependenţă statistică.

Definiţia 3.1. Se spune că variabilele ξ şi η sunt **dependente statistic,** dacă variaţia unei variabile conduce la schimbarea legii de repartiţie a celeilalte variabile.

Un caz particular al dependenţei statistice îl constituie dependenţa de corelaţie.

Definiţia 3.2. Se spune, că între variabilele aleatoare ξ şi η există o **dependenţă de corelaţie** sau că ele sunt **corelate,** dacă odată cu variaţia unei variabile variază (se schimbă) media celeilalte variabile.

Exemplul 3.1. Fie η recolta de legume la un hectar, iar ξ – cantitatea de îngrăşăminte introduse. Evident, recolta va depinde de cantitatea de îngrăşăminte, care s-au introdus în sol, însă nu putem afirma că un *kg* de îngrăşăminte conduce la creşterea recoltei, de exemplu, cu 10 *kg*. Se ştie, totuşi, că recolta medie este o funcţie de cantitatea de îngrăşăminte introduse, adică între recoltă şi îngrăşăminte există o corelaţie.

Pentru variabila bidimensională $\zeta = (\xi, \eta)$ au fost introduse mediile condiţionate:

$$M\xi / \eta = y, \tag{3.1}$$

$$M\eta / \xi = x. \tag{3.2}$$

Pentru o variabilă discretă aceste medii sunt calculate cu formulele (4.25) şi (4.26), iar pentru una continuă cu formulele (5.27) şi (5.28), cap. II.

Atunci când variază y, media (3.1) este o funcţie de y, respectiv media (3.2) este o funcţie de x, deci:

$$M\xi / y = \psi(y), \tag{3.3}$$

$$M\eta / x = \varphi(x). \tag{3.4}$$

Definiţia 3.3. Ecuaţia (3.3) se numeşte **ecuaţia liniei de regresie a variabilei aleatoare ξ asupra variabilei aleatoare η**, iar ecuaţia (3.4) este **ecuaţia liniei de regresie a lui η asupra ξ**.

Pentru estimarea mediilor condiţionate sunt folosite mediile condiţionate, obţinute din rezultatele selecţiei.

Prin medie condiţionată $\overline{y}_x$ înţelegem media aritmetică a valorilor caracteristicii η pentru valoarea $\xi = x$. Respectiv media condiţionată $\overline{x}_y$ este media aritmetică a valorilor caracteristicii ξ pentru valoarea $\eta = y$.

Odată cu schimbarea lui x se schimbă şi $\overline{y}_x$. La fel schimbarea lui y conduce la schimbarea lui $\overline{x}_y$. Astfel $\overline{y}_x$ e funcţie de x, iar $\overline{x}_y$ e funcţie de y.

Prin urmare, avem

$$\overline{y}_x = \varphi_s(x), \tag{3.5}$$

$$\overline{x}_y = \psi_s(y). \tag{3.6}$$

Ecuaţia (3.5) se numeşte ecuaţia liniei de regresie a selecţiei variabilei η asupra ξ, iar (3.6) - ecuaţia liniei de regresie a selecţiei variabilei ξ asupra η.

Mai jos urmează descrierea metodei de determinare a funcţiilor de regresie $\varphi_s(x)$ şi $\psi_s(y)$.

Presupunem, că se studiază caracteristicile ξ şi η a populaţiei statistice. S-a efectuat o selecţie, în rezultatul căreia pentru $(\xi ; \eta)$ a fost obţinut şirul de valori:

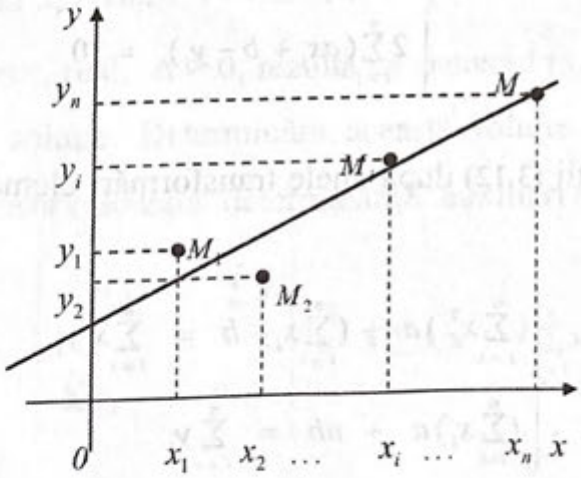
$$(x_1 ; y_1),\ (x_2 ; y_2),\ \dots,\ (x_n ; y_n). \tag{3.7}$$

Pentru a determina funcţiile de regresie, din ecuaţiile (3.5) şi (3.6) dispunem doar de şirul (3.7) (rezultatul selecţiei). În primul rând se cere de aflat tipul funcţiei de regresie.

Prin punctele $M_i(x_i ; y_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ se poate duce o infinitate de curbe. Pentru a determina linia, în jurul căreia sunt concentrate punctele M_i ele se reprezintă grafic în sistemul de coordonate xOy.

Să admitem, de exemplu, că şirul de puncte (3.7) este situat în jurul unei drepte:

$$y = ax + b. \tag{3.8}$$



Linia dreaptă (3.8) depinde de 2 parametri a şi b. La determinarea acestor parametri cel mai frecvent este folosită **metoda celor mai mici pătrate**. Esenţa metodei constă în a determina a şi b astfel încât suma pătratelor diferenţelor $ax_i + b - y_i$ să fie minimă. Considerăm funcţia

$$F(a;b) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2 . \tag{3.10}$$

Remarcă. Membrul drept al expresiei (3.10) cu adevărat este o funcţie de parametrii necunoscuţi a şi b, deoarece (x_i ; y_i) sunt numere, determinate de şirul (3.7).

Valorile lui a şi b, pentru care funcţia (3.10) atinge valoarea minimă, verifică sistemul de ecuaţii(condiţii necesare pentru extrem):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(a;b)}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial F(a;b)}{\partial b} = 0 \end{cases} \tag{3.11}$$

Sistemul (3.11) pentru funcţia (3.10) devine

$$\begin{cases} 2\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)x_i = 0 \\ 2\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i) = 0 \end{cases} \tag{3.12}$$

Sistemul de ecuaţii (3.12) după unele transformări elementare ne conduce la următorul:

$$\begin{cases} (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)a + (\sum_{i=1}^{n} x_i)\ b = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ (\sum_{i=1}^{n} x_i)a + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i . \end{cases} \tag{3.13}$$

Am obţinut un sistem de 2 ecuaţii cu 2 necunoscute a şi b. Utilizând media de selecţie

$$M_s\,\xi = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

pentru caracteristica ξ, calculăm determinantul principal al sistemului liniar (3.13):

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & n \end{vmatrix} = n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 = n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (n\,M_s\,\xi)^2 =$$

$$= n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2n^2\,(M_s\,\xi)^2 + n^2\,(M_s\,\xi)^2 =$$

$$= n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2n\cdot M_s\,\xi\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i + n^2\,(M_s\,\xi)^2 =$$

$$= n[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2M_s\,\xi\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n}(M_s\,\xi)^2] =$$

$$= n\sum_{i=1}^{n}(x_i - M_s\,\xi)^2 \geq 0. \qquad (3.14)$$

Remarcă. Determinantul principal (3.14) este nul numai în cazul trivial, când $x_i = const$, $i = 1, 2, ..., n$.

Deoarece, real, $\Delta > 0$, rezultă că sistemul (3.13) este compatibil şi are o singură soluţie. Determinăm această soluţie prin regula lui Cramer. Pentru aceasta calculăm determinanţii auxiliari Δ_a şi Δ_b:

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i & n \end{vmatrix} = n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i\cdot\sum_{i=1}^{n} y_i, \qquad (3.15)$$

$$\Delta_b = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} y_i \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i y_i . \qquad (3.16)$$

Prin urmare, din (3.14) - (3.16) rezultă:

$$a = \frac{\Delta_a}{\Delta} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}, \qquad (3.17)$$

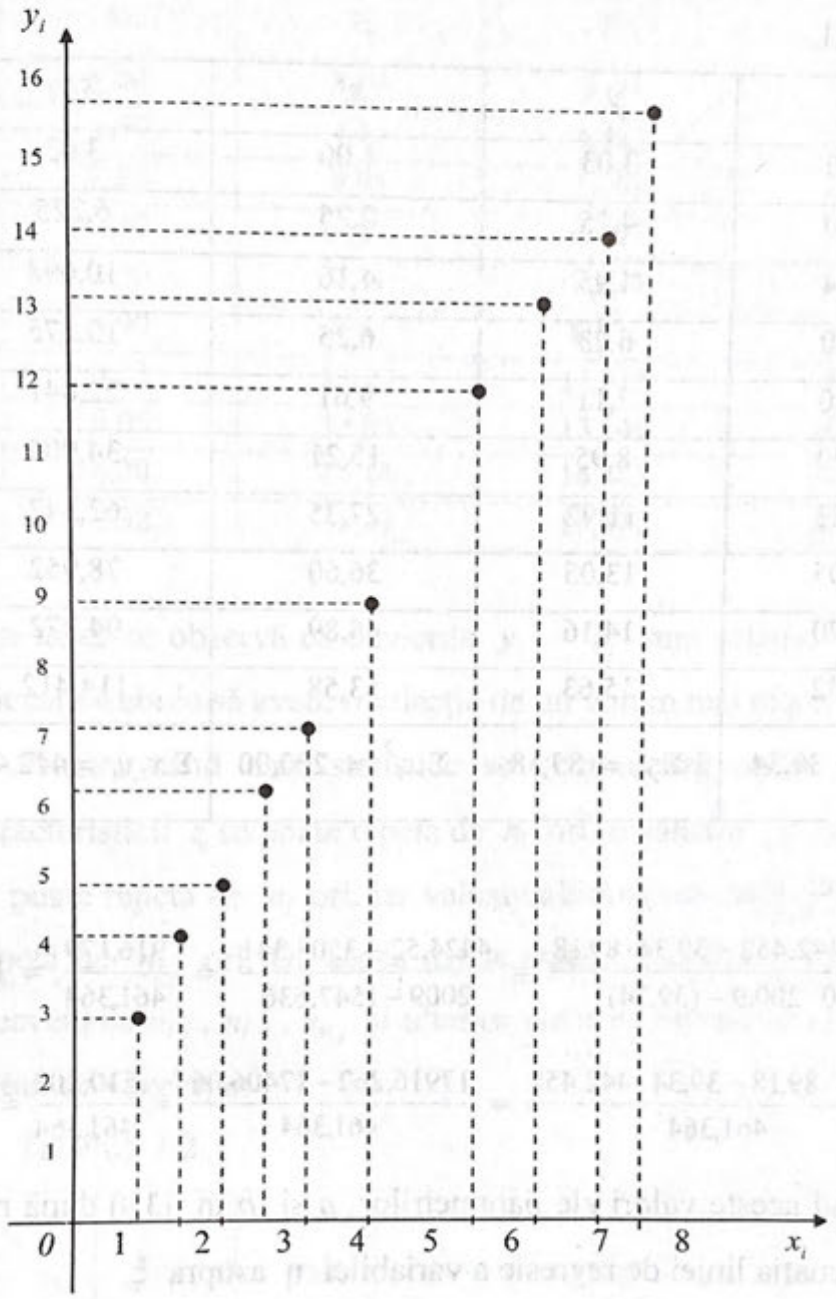
$$b = \frac{\Delta_b}{\Delta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2} . \qquad (3.18)$$

Formulele (3.17) şi (3.18) exprimă parametrii liniei de regresie (3.8) prin rezultatele selecţiei (3.7).

Exemplul 3.2. Să se afle ecuaţia liniei de regresie a caracteristicii η asupra ξ din datele selecţiei:

x_i	1,00	1,50	2,04	2,50	3,10	3,90	5,23	6,05	6,70	7,32
y_i	3,03	4,15	4,95	6,23	7,11	8,95	11,92	13,05	14,16	15,63

Rezolvare. Pentru a vedea care este forma dependenţei dintre ξ şi η (liniară, pătrată, etc.) vom depune în sistemul de coordonate xOy punctele $(x_i; y_i)$, $i = 1, 2, \ldots, 10$.



Se observă că linia de regresie a caracteristcii η asupra caracteristicii ξ se aseamănă cu o dreaptă dată de ecuaţia $y = ax + b$. Vom determina parametrii a şi b aplicând formulele (3.17) şi (3.18). Pentru ordonarea calculelor întocmim tabelul 3.1.

Tabelul 3.1.

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1,00	3,03	1,00	3,03
1,50	4,15	2,25	6,225
2,04	4,95	4,16	10,098
2,50	6,23	6,25	15,575
3,10	7,11	9,61	22,041
3,90	8,95	15,21	34,905
5,23	11,92	27,35	62,342
6,05	13,05	36,60	78,952
6,70	14,16	44,89	94,872
7,32	15,63	53,58	114,412
$\Sigma x_i = 39{,}34$	$\Sigma y_i = 89{,}18$	$\Sigma x_i^2 = 200{,}90$	$\Sigma x_i y_i = 442{,}452$

Prin urmare:

$$a = \frac{10 \cdot 442{,}452 - 39{,}34 \cdot 89{,}18}{10 \cdot 200{,}9 - (39{,}34)^2} = \frac{4424{,}52 - 3508{,}341}{2009 - 1547{,}636} = \frac{916{,}179}{461{,}364} \approx 1{,}9858;$$

$$b = \frac{200{,}9 \cdot 89{,}18 - 39{,}34 \cdot 442{,}452}{461{,}364} = \frac{17916{,}262 - 17406{,}06}{461{,}364} = \frac{510{,}202}{461{,}364} \approx 1{,}106.$$

Introducând aceste valori ale parametrilor a şi b în (3.8) după rotungiri obţinem ecuaţia liniei de regresie a variabilei η asupra ξ,

$$y = 1{,}99\,x + 1{,}11. \tag{3.19}$$

Să vedem cât de bine reprezintă ecuaţia (3.19) datele selecţiei (3.7). Pentru aceasta vom întocmi un tabel, în care vor fi trecute valorile $(x_i\,;y_i)$, $i = 1, 2, ..., 10$ din şirul (3.7) şi valorile $Y_i = ax_i + b$, calculate cu ecuaţia (3.19). O coloană a acestui tabel va fi rezervată diferenţelor $y_i - Y_i$ dintre valorile statistice y_i şi cele teoretice Y_i (calculate cu (3.19)).

x_i	y_i	Y_i	$y_i - Y_i$
1,00	3,03	3,10	-0,07
1,50	4,15	4,085	0,065
2,04	4,95	5,169	-0,219
2,50	6,23	6,085	0,145
3,10	7,11	7,279	-0,169
3,90	8,95	8,871	0,079
5,23	11,92	11,518	0,402
6,05	13,05	13,149	-0,099
6,70	14,16	14,443	-0,283
7,32	15,63	15,677	-0,047

Din tabel se observă că devierile $y_i - Y_i$ sunt relativ mici. Pentru a le micşora trebuie să avem o selecţie de un volum mai mare.

Atunci când date statistice se acumulează multe o valoare x_i a caracteristicii ξ se poate repeta de n_i ori, o valoare y_j a caracteristicii η se poate repeta de n_j ori, iar valoarea bidimensională $(x_i ; y_j)$ se poate repeta de n_{ij} ori. De aceea datele statistice obţinute sunt grupate după frecvenţele n_{ij}, n_{io}, n_{oj} şi ulterior ele sunt trecute în tabelul 3.2, numit **tabel de corelaţie.**

Tabelul 3.2.

$\xi \backslash \eta$	y_1	y_2	...	y_j	...	y_k	n_ξ
x_1	n_{11}	n_{12}	...	n_{1j}	...	n_{1k}	n_{1o}
x_2	n_{21}	n_{22}	...	n_{2j}	...	n_{2k}	n_{2o}
...	...	...	...	...	...	...	...
x_i	n_{i1}	n_{i2}	...	n_{ij}	...	n_{ik}	n_{io}
...	...	...	...	...	...	...	...
x_m	n_{m1}	n_{m2}	...	n_{mj}	...	n_{mk}	n_{mo}
n_η	n_{o1}	n_{o2}	...	n_{oj}	...	n_{ok}	n

În linia i a acestui tabel sunt înscrise frecvenţele valorii x_i în pereche cu fiecare din valorile y_j, $j = 1, 2, \ldots, k$. De aceea

$$\sum_{j=1}^{k} n_{ij} = n_{io}, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{3.20}$$

În coloana j din tabelul de corelaţie sunt înscrise frecvenţele valorii y_j în pereche cu fiecare din valorile x_i, $i = 1, 2, \ldots, m$. De aceea

$$\sum_{i=1}^{m} n_{ij} = n_{oj}, \quad j = 1, 2, \ldots, k. \tag{3.21}$$

Astfel, utilizând (3.20) şi (3.21), din tabelul de corelaţie se poate deduce repartiţia statistică a caracteristicii ξ,

	x_1	x_2	$\ldots$	x_i	$\ldots$	x_m
ξ:	n_{1o}	n_{2o}	$\ldots$	n_{io}	$\ldots$	n_{mo}

(3.22)

şi a caracteristicii η,

	y_1	y_2	$\ldots$	y_j	$\ldots$	y_k
η:	n_{o1}	n_{o2}	$\ldots$	n_{oj}	$\ldots$	n_{ok}

(3.23)

Din (3. 22) rezultă (3. 24), deci

$$M_s\xi = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i\, n_{io}, \quad n = n_{10} + n_{20} + \ldots + n_{m0}, \tag{3.24}$$

iar din (3. 23) putem scrie (3. 25), deci,

$$M_s\eta = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} y_j\, n_{oj}, \quad n = n_{01} + n_{02} + \ldots + n_{0k}. \tag{3.25}$$

În cele ce urmează, prezentăm un tabel de corelaţie şi prin el exemplificăm cele spuse mai sus.

Exemplul 3.3. În rezultatul unei selecţii s-au obţinut următoarele date statistice pentru caracteristica bidimensională $\zeta = (\xi ; \eta)$.

ξ \ η	100	120	140	160	180	n_ξ
5	2	3				5
10	1	4				5
15		3	5			8
20			10	1		11
25			8			8
30				6		6
35				1	4	5
40				1	1	2
n_η	3	10	23	9	5	$n = 50$

În prima coloană a acestui tabel sunt trecute valorile caracteristicii ξ : 5 , 10 , 15 , 20 , 25 , 30 , 35 , 40 , iar în prima linie – valorile caracteristicii η : 100 , 120 , 140 , 160 şi 180. La intersecţia liniilor cu coloanele sunt trecute frecvenţele n_{ij}. De exemplu cifra "8" indică faptul că valorile (25 ; 140) se întâlnesc de 8 ori. Ultima coloană a tabelului conţine frecvenţele n_ξ a caracteristicii ξ.

De exemplu, $n_\xi = 11$ înseamnă că valoarea $\xi = 20$ se întâlneşte de 11 ori: de 10 ori în pereche cu $\eta = 140$ şi o dată în pereche cu $\eta = 160$.

Ultima linie a tabelului conţine frecvenţele n_η. De exemplu, $n_\eta = 23$ înseamnă că valoarea $\eta = 140$ se întâlneşte de 23 ori: de 5 ori în pereche cu $\xi = 15$, de 10 ori în pereche cu $\xi = 20$ şi de 8 ori în pereche cu $\xi = 25$.

$$n = \sum_{i=1}^{8} n_{io} = \sum_{j=1}^{5} n_{oj} = \sum_{i=1}^{8} \sum_{j=1}^{5} n_{ij} = 50. \tag{3.26}$$

Vom scrie sistemul de ecuaţii (3.13) pentru cazul când rezultatele selecţiei sunt prezentate în tabelul de corelaţie (Tabelul 3.2). Ţinând cont de (3.26) obţinem sistemul (3.27):

$$\begin{cases} (\sum_{i=1}^{m} x_i^2 n_{io})\, a + (\sum_{i=1}^{m} x_i n_{io})\, b = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} x_i y_j n_{ij} \\ (\sum_{i=1}^{m} x_i n_{io})\, a + nb = \sum_{j=1}^{k} y_j n_{oj}. \end{cases} \tag{3.27}$$

Graţie (3.24), (3.25) şi formulei pentru momentul iniţial de ordinul doi (3.28)

$$M_s\xi^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} n_{io} x_i^2, \tag{3.28}$$

putem aduce sistemul de ecuaţii (3.27) la forma:

$$\begin{cases} (nM_s\xi^2)\, a + (nM_s\xi)\, b = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} x_i y_j n_{ij} \\ (nM_s\xi)\, a + nb = nM_s\eta. \end{cases} \tag{3.29}$$

A doua ecuaţie a sistemului (3.29), după ce împărţim ambele părţi prin n, devine

$$b = M_s\eta - (M_s\xi)\, a. \tag{3.30}$$

Vom căuta ecuaţia liniei de regresie a variabilei (caracteristicii) η asupra ξ în forma

$$\overline{y}_x = ax + b, \tag{3.31}$$

unde $\overline{y}_x$ este media condiţionată a caracteristicii η pentru $\xi = x$.

Vom introduce în (3.31) valoarea lui b dată de (3.30). Venim la ecuaţia

$$\overline{y}_x - M_s\eta = a(x - M_s\xi). \tag{3.32}$$

Din prima ecuaţie a sistemului (3.29) avem

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} x_i y_j n_{ij} - (nM_s\xi)\, b}{nM_s\xi^2}. \tag{3.33}$$

Introducem în (3.33) valoarea lui b dată de (3.30). Obţinem

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} x_i y_j n_{ij} - nM_s\xi \cdot nM_s\eta + n(M_s\xi)^2 a}{nM_s\xi^2}. \tag{3.34}$$

Rezolvăm (3.34) în raport cu a şi primim

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} x_i y_j n_{ij} - nM_s\xi \cdot M_s\eta}{n[M_s\xi^2 - (M_s\xi)^2]}. \tag{3.35}$$

Deoarece $\sigma_s^2\xi = D_s\xi = M_s\xi^2 - (M_s\xi)^2$, putem scrie (3.35) astfel:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} x_i y_j n_{ij} - nM_s\xi \cdot nM_s\eta}{n\sigma_s^2\xi}. \tag{3.36}$$

Înmulţim ambele părţi ale egalităţii (3.36) cu $\sigma_s\xi / \sigma_s\eta$. Venim la relaţia

$$a \cdot \frac{\sigma_s\xi}{\sigma_s\eta} = \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} x_i y_j n_{ij} - nM_s\xi \cdot M_s\eta}{n\sigma_s\xi \cdot \sigma_s\eta}. \tag{3.37}$$

Notăm

$$k_{\xi\eta}^{s} = \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} x_i y_j n_{ij} - nM_s\xi \cdot M_s\eta}{n\sigma_s\xi \cdot \sigma_s\eta}. \tag{3.38}$$

Atunci din (3.37) şi (3.38) rezultă, că

$$a = k_{\xi\eta}^{s} \cdot \frac{\sigma_s\eta}{\sigma_s\xi}. \tag{3.39}$$

Substituim această valoare a lui a în ecuaţia (3.32) şi venim la ecuaţia

$$\overline{y}_x - M_s\eta = k_{\xi\eta}^{s}\frac{\sigma_s\eta}{\sigma_s\xi}(x - M_s\xi). \tag{3.40}$$

Definiţia 3.4. Cantitatea (3.38), notată prin $k_{\xi\eta}^{s}$ se numeşte **coeficient de corelaţie al selecţiei** dintre ξ şi η. Cantitatea (3.39) se numeşte **coeficient de regresie.** Dreapta având ecuaţia (3.40) se numeşte **dreaptă empirică de regresie** a lui η asupra lui ξ.

Procedând în mod similar putem obţine ecuaţia dreptei empirice de regresie a lui ξ asupra lui η

$$\overline{x}_y - M_s\xi = k^s_{\xi\eta}\frac{\sigma_s\xi}{\sigma_s\eta}(y - M_s\eta). \tag{3.41}$$

Remarcă. Ecuaţia (3.40) poate fi scrisă în forma simetrică (3.42),

$$\frac{\overline{y}_x - M_s\eta}{\sigma_s\eta} = k^s_{\xi\eta}\frac{x - M_s\xi}{\sigma_s\xi}, \tag{3.42}$$

iar ecuaţia (3.41) în forma (3.43),

$$\frac{\overline{x}_y - M_s\xi}{\sigma_s\xi} = k^s_{\xi\eta}\frac{y - M_s\eta}{\sigma_s\eta}. \tag{3.43}$$

Remarcă. Coeficientul de corelaţie al selecţiei $k^s_{\xi\eta}$ dat de (3.38) reprezintă o estimare a coeficientului de corelaţie (3.44) a variabilelor ξ şi η,

$$k_{\xi\eta} = \frac{M[(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)]}{\sigma\xi\sigma\eta} = \frac{M(\xi\eta) - M\xi\cdot M\eta}{\sigma\xi\cdot\sigma\eta}. \tag{3.44}$$

Putem demonstra, că

$$|k^s_{\xi\eta}| \le 1. \tag{3.45}$$

Inegalitatea (3.45) este o proprietate similară cu a coeficientului teoretic de corelaţie $k_{\xi\eta}$. Expresia (3. 38) pentru coeficientul de corelaţie al selecţiei $k^s_{\xi\eta}$ poate fi copiată în forma (3. 46),

$$k_{\xi\eta}^{s} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} x_i y_j n_{ij} - M_s\xi \cdot M_s\eta}{\sigma_s\xi \cdot \sigma_s\eta}. \tag{3.46}$$

Pentru a determina ecuaţiile liniilor de regresie (3.40) (sau (3.41)) avem nevoie de a calcula caracteristicile numerice ale selecţiei: mediile selecţiei $M_s\xi$ şi $M_s\eta$, abaterile medii pătratice $\sigma_s\xi$ şi $\sigma_s\eta$, precum şi coeficientul de corelaţie al selecţiei $k_{\xi\eta}^{s}$. Evident, pentru a face acest lucru pot fi utilizate formulele (3.24) şi (3.25) pentru $M_s\xi$ şi $M_s\eta$, formulele

$$\sigma_s\xi = \sqrt{D_s\xi} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}(x_i - M_s\xi)^2 n_{io}}, \tag{3.47}$$

$$\sigma_s\eta = \sqrt{D_s\eta} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}(y_j - M_s\eta)^2 n_{oj}} \tag{3.48}$$

pentru $\sigma_s\xi$ şi $\sigma_s\eta$, iar pentru $k_{\xi\eta}^{s}$ formula (3.46).

Utilizarea formulelor (3.24), (3.25), (3.46) - (3.48) conduce la calcule laborioase. Pentru a facilita calculele de la valorile x_i şi y_j se recomandă a trece la valorile noi u_i şi v_j:

$$u_i = \frac{x_i - c_1}{h_1}, \quad v_j = \frac{y_j - c_2}{h_2}. \tag{3.49}$$

Constantele c_1 şi c_2, h_1 şi h_2 în (3.49) sunt alese astfel ca noile cantităţi u_i , v_j să fie numere întregi şi relativ mici (pozitive, negative şi aproape de zero).

De exemplu, putem lua în calitate de c_1 valoarea x_i cu frecvenţă maximă n_{i0} , iar în calitate de c_2 cantitatea y_j , care are frecvenţa maximă

n_{oj}. Numărul h_1 poate fi cel mai mare divizor comun pentru cantităţile $x_i - c_1$ şi h_2 – cel mai mare divizor al cantităţilor $y_j - c_2$. Urmând aceste proceduri venim cu adevărat la cantităţi u_i, v_j relativ mici, deci, şi calculele vor fi mai uşoare.

Astfel, $M_s\xi$ şi $M_s\eta$ vor fi calculate cu formulele

$$M_s\xi = \frac{h_1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i - c_1}{h_1}\cdot n_{io} + c_1, \tag{3.50}$$

$$M_s\eta = \frac{h_2}{n}\sum_{j=1}^{k}\frac{y_j - c_2}{h_2}\cdot n_{oj} + c_2. \tag{3.51}$$

Dispersiile $D_s\xi$ şi $D_s\eta$ vor fi calculate cu formulele

$$D_s\xi = \frac{h_1^2}{n}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{x_i - c_1}{h_1}\right)^2\cdot n_{io} - (M_s\xi - c_1)^2. \tag{3.52}$$

$$D_s\eta = \frac{h_2^2}{n}\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{y_j - c_2}{h_2}\right)^2\cdot n_{oj} - (M_s\eta - c_2)^2. \tag{3.53}$$

Coeficientul de corelaţie al selecţiei $k^s_{\xi\eta}$ se va calcula folosind formula

$$k^s_{\xi\eta} = \frac{\frac{h_1 h_2}{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k}\frac{x_i - c_1}{h_1}\cdot\frac{y_j - c_2}{h_2}\cdot n_{ij} - (M_s\xi - c_1)(M_s\eta - c_2)}{\sigma_s\xi\cdot\sigma_s\eta}. \tag{3.54}$$

Pentru a ilustra eficienţa formulelor (3.50) – (3.54) la calculul parametrilor liniilor de regresie (3.40), (3.41) vom lua un exemplu.

Exemplul 3.4. Să se afle ecuaţia liniei de regresie a lui ξ asupra η şi cea a liniei de regresie a lui η asupra ξ, dispunând de tabelul de corelaţie din Exemplul 3.3.

Rezolvare. Vom lua pentru c_1 valoarea 20, iar pentru c_2 – valoarea 140, respectiv $h_1 = 5$ şi $h_2 = 10$, deci:

$$c_1 = 20;\ c_2 = 140;\ h_1 = 5;\ h_2 = 10;$$

Din tabel se observă imediat că variabila aleatoare ξ ia valorile

$$x_1 = 5;\ x_2 = 10;\ x_3 = 15;\ x_4 = 20.$$

$$x_5 = 25;\ x_6 = 30;\ x_7 = 35;\ x_8 = 40,$$

iar variabila η ia valorile

$$y_1 = 100;\ y_2 = 120;\ y_3 = 140;\ y_4 = 160;\ y_5 = 180.$$

Vom trece la valorile

$$u_i = \frac{x_i - c_1}{h_1} = \frac{x_i - 20}{5};\quad v_j = \frac{y_j - c_2}{h_2} = \frac{y_j - 140}{10};$$

$$i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. \qquad j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Venim la tabelul:

u_i \ v_j	-4	-2	0	2	4	n_ξ
-3	2	3				5
-2	1	4				5
-1		3	5			8
0			10	1		11
1			8			8
2				6		6
3				1	4	5
4				1	1	2
n_η	3	10	23	9	5	$n = 50$

Să calculăm în continuare $M_s\xi$ şi $D_s\xi$ folosind formulele (3.50), (3.52). Pentru ordonarea calculelor vom întocmi tabelul:

u_i	n_i	$u_i \cdot n_i$	$u_i + 1$	u_i^2	$u_i^2 \cdot n_i$	$(u_i + 1)^2$	$(u_i + 1)^2 \cdot n_i$
-3	5	-15	-2	9	45	4	20
-2	5	-10	-1	4	20	1	5
-1	8	-8	0	1	8	0	0
0	11	0	1	0	0	1	11
1	8	8	2	1	8	4	32
2	6	12	3	4	24	9	54
3	5	15	4	9	45	16	80
4	2	8	5	16	32	25	50
Σ	50	10			182		252

Verificăm calculele, prin identitatea (3.55),

$$\Sigma (u_i + 1)^2 n_i = \Sigma u_i^2 n_i + 2 \Sigma u_i n_i + n . \qquad (3.55)$$

$$252 = 182 + 2 \cdot 10 + 50 \Leftrightarrow 252 = 252.$$

$$M_s\xi = \frac{5}{50} \cdot 10 + 20 = 1 + 20 = 21. \Rightarrow M_s\xi = 21.$$

$$D_s\xi = \frac{25}{50} \cdot 182 - (21 - 20)^2 = \frac{182}{2} - 1^2 = 91 - 1 = 90.$$

Prin urmare,

$$\sigma_s\xi = \sqrt{D_s\xi} = \sqrt{90} \cong 9{,}49.$$

Vom calcula $M_s\eta$ şi $D_s\eta$ folosind formulele (3.51) şi (3.53). Pentru aceasta alcătuim tabelul următor:

v_j	n_j	$v_j \cdot n_j$	$v_j + 1$	v_j^2	$v_j^2 \cdot n_j$	$(v_j + 1)^2$	$(v_j + 1)^2 \cdot n_j$
-4	3	-12	-3	16	48	9	27
-2	10	-20	-1	4	40	1	10
0	23	0	1	0	0	1	23
2	9	18	3	4	36	9	81
4	5	20	5	16	80	25	125
Σ	50	6			204		266

Verificăm corectitudinea calculelor după formula (3.55)

$$266 = 204 + 2 \cdot 6 + 50 \Leftrightarrow 266 = 266.$$

Prin urmare,

$$M_s\eta = \frac{10}{50} \cdot 6 + 140 = \frac{6}{5} + 140 = 1{,}2 + 140 = 141{,}2.$$

$$D_s\eta = \frac{100}{50} \cdot 204 - (141{,}2 - 140)^2 = 2 \cdot 204 - (1{,}2)^2 = 408 - 1{,}44 \approx 406{,}56.$$

$$\sigma_s\eta = \sqrt{D_s\eta} = \sqrt{406{,}56} \approx 20{,}16.$$

Trecem la calculul coeficientului de corelaţie al selecţiei $k^s_{\xi\eta}$, deaceea vom întocmi un nou tabel de corelaţie, analogic celui dat la început. În el vor fi trecute valorile u_i şi v_j:

u_i \ v_j	-4	-2	0	2	4	$v = \Sigma n_{ij} u_i$	$u_i v$
-3	2 (-8, -6)	3 (-6, -9)				-14	42
-2	1 (-4, -2)	4 (-8, -8)				-12	24
-1		3 (-6, -3)	5 (0, -5)			-6	6
0			10 (0, 0)	1 (2, 0)		2	0
1			8 (0, 8)			0	0
2				6 (12, 12)		12	24
3				1 (2, 3)	4 (16, 12)	18	54
4				1 (2, 4)	1 (4, 4)	6	24
$u = \Sigma n_{ij} v_j$	-8	-20	3	19	16		
$u v_j$	32	40	0	38	64		$\Sigma = 174$

În fiecare celulă a acestui tabel sunt înscrise: pe centru – n_{ij}; în colţul de sus pe dreapta – $n_{ij} \cdot v_j$; în colţul de jos la stânga – $n_{ij} \cdot u_i$.

Calculăm $k^s_{\xi\eta}$ cu formula (3.54), folosind datele ultimului tabel.

$$k_{\xi\eta}^{s} = \frac{\frac{5\cdot 10}{50}\cdot 174-(21-20)(141{,}2-140)}{9{,}49\cdot 20{,}16} = \frac{174-1\cdot 1{,}2}{191{,}32} = \frac{172{,}8}{191{,}32} \approx 0{,}9.$$

Coeficientul de corelaţie este aproape de 1, prin urmare, liniile de regresie vor fi linii drepte date de ecuaţiile (3.40) şi (3.41).

Pentru (3.40) se va obţine

$$\overline{y_x} - 141{,}2 = 0{,}9 \cdot \frac{20{,}16}{9{,}49}(x-21)$$

sau $\overline{y_x} - 141{,}2 = 1{,}91(x-21) \Leftrightarrow \overline{y_x} - 141{,}2 = 1{,}91x - 40{,}1.$

Astfel linia de regresie a variabilei η asupra variabilei ξ va avea ecuaţia

$$\overline{y_x} = 1{,}91\,x + 101{,}1.$$

Introducem datele respective în ecuaţia (3.41) pentru a obţine regresia variabilei ξ asupra variabilei η.

$$\overline{x_y} - 21 = 0{,}9 \cdot \frac{9{,}49}{20{,}16}(y - 141{,}2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{x}_y - 21 = 0{,}42\,y - 59{,}8 \Leftrightarrow \overline{x}_y = 0{,}42\,y - 38{,}8.$$

Am vorbit anterior despre o dependenţă de corelaţie liniară dintre caracteristicile ξ şi η. Evident, între aceste caracteristici (variabile) poate să existe o dependenţă de corelaţie neliniară. Determinarea tipului acestei dependenţe (tip parabolic, hiperbolic, logaritmic etc...), în principiu, nu se deosebeşte ca metodă de cele expuse mai sus (pentru dependenţa liniară).

Definiţia 3.5. Regresia definită de relaţia

$$\overline{y}_x = \varphi_x(x) \tag{3.56}$$

sau

$$\overline{x}_y = \psi_x(y)\ , \tag{3.57}$$

unde φ şi ψ sunt funcţii neliniare, se numeşte **regresie curbilinie**.

Rezolvarea problemei regresiei curbilinie (3. 56), (3. 57) se face, ca şi în cazul celei liniare în două etape.

La etapa întâi se depun în sistemul de coordonate xOy punctele $(x_i\,;y_i)$ obţinute în rezultatul selecţiei.

La etapa a doua se evidenţiază caracterul dependenţei funcţionale dintre ξ şi η după norul de puncte din planul xOy.

După ce sa stabilit tipul dependenţei funcţionale dintre ξ şi η urmează procedura de determinare a parametrilor funcţiei φ (sau ψ).

În cazul când sa ajuns la concluzia unei dependente parabolice, deci la o linie de regresie a variabilei η asupra variabilei ξ de forma

$$\overline{y}_x = ax^2 + bx + c, \tag{3.58}$$

urmează să calculăm parametrii a, b şi c.

Lucrul acesta îl putem face ca şi în cazul regresiei liniare prin procedura **metodei celor mai mici pătrate**.

La finele acestei proceduri venim la sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} (\sum x_i^2)\,a + (\sum x_i)\,b + nc = \sum y_i \\ (\sum x_i^3)\,a + (\sum x_i^2)\,b + (\sum x_i)\,c = \sum x_i y_i \\ (\sum x_i^4)\,a + (\sum x_i^3)\,b + (\sum x_i^2)\,c = \sum x_i^2 y_i \end{cases} \tag{3.59}$$

Rezolvăm sistemul de ecuaţii (3.59) în raport cu a, b, c. Ulterior, înlocuim valorile obţinute în (3.58) şi obţinem ecuaţia de regresie dorită.

În mod similar putem proceda şi în cazul altor tipuri de regresie curbilinie.

Probleme

În problemele 3.1 – 3.5 sunt prezentate rezultatele selecţiilor de volumul $n = 10$. Să se afle ecuaţiile liniilor de regresie $\overline{y}_x = ax + b$.

3.1.

x_i	1	2,5	3	4,2	5	5,9	7	8,3	9,1	10
y_i	1	3,93	7,02	9,45	14	15,4	18,75	21	26,5	28,35

3.2.

x_i	0,7	2	3,2	4	4,9	6,25	7,5	8	9,33	11
y_i	5	3,55	2,9	2	0,6	0	-1,25	-1,95	-3	-4,36

3.3.

x_i	0,5	2,6	3,9	6	7,5	9	11,4	13,2	14	15,9
y_i	3	6,2	8,5	13,2	16,7	20	24,5	27,4	30,3	32,5

3.4.

x_i	1,3	2	3,5	4	5,2	6,3	6,9	9	10,5	13
y_i	3,9	5	6,4	7,2	8	10	10,5	12,3	14,2	15,5

3.5.

x_i	0,7	2	4	5	7	9	11	12	14	16
y_i	3	6,2	15,1	18	27	33,7	40,5	46,3	53	62,5

În problemele 3.6 – 3.13 să se afle ecuaţia liniei de regresie a variabilei ξ asupra variabilei η şi ecuaţia liniei de regresie a variabilei η asupra variabilei ξ, având datele selecţiilor de volum mare.

3.6.

ξ \ η	14 – 19	19 – 24	24 – 29	29 – 34	34 – 39	n_ξ
16,5 – 18,5	2	2				4
18,5 – 20,5	3	4				7
20,5 – 22,5		15	6	2		23
22,5 – 24,5		11	22	14	2	49
24,5 – 26,5			18	29	10	57
26,5 – 28,5				3	7	10
n_η	5	32	46	48	19	$n = 150$

3.7.

ξ \ η	20 – 25	25 – 30	30 – 35	35 – 40	40 – 45	45 – 50	n_ξ
16 – 18	2	3					5
18 – 20	3	5	1				9
20– 22		9	25	3			37
22 – 24			13	4	5	2	24
24 – 26					3	2	5
n_η	5	17	39	7	8	4	$n = 80$

3.8.

ξ \ η	125	150	175	200	225	250	n_ξ
18		1					1
23	1	2	3				6
28		5	2	1			8
33			12	8			20
38				7	3		10
43					3	1	4
48						1	1
n_η	1	8	17	16	6	2	$n = 50$

3.9.

ξ \ η	16 – 21	21 – 26	26 – 31	31 – 36	36 – 41	41 – 46	n_ξ
150	3	7	2				12
200		2	8	6			16
250		3	50	4			57
300			2	6			8
350				2	1	1	4
400					2	1	3
n_η	3	12	62	18	3	2	$n = 100$

3.10.

ξ \ η	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70	n_ξ
14 – 20	3						3
20 – 26	7	2	3				12
26– 32	2	8	50				60
32 – 38		6	4	2	2		14
38 – 44				6	3	1	10
44 – 50					4	2	6
n_η	12	16	57	8	9	3	$n = 105$

3.11.

ξ \ η	20	30	40	50	60	n_ξ
15	7	5				12
25	20	23				43
35		30	47	2		79
45		10	11	20	6	47
55			9	7	3	19
n_η	27	68	67	29	9	200

3.12.

ξ \ η	15	20	25	30	35	n_ξ
40	5	7				12
50		4	16	23		43
60		8	20	32	27	87
70			11	29	2	42
80				9	7	16
n_η	5	19	47	93	36	200

3.13.

ξ \ η	3	9	15	21	27	33	n_ξ
25				1		1	2
35			1	5	4	5	15
45			2	18	10	2	32
55		6	14	2	2		24
65		6	3				9
75	4	8					12
85	6						6
n_η	10	20	20	26	16	8	100