ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
Τομέας Επικοινωνιών, Ηλεκτρονικής & Συστημάτων Πληροφορικής
Εργαστήριο Διαχείρησης και Βέλτριστου Σχεδιασμού Δικτύων Τηλεματικής – NETMODE

Πεγειώτη Νάταλυ
Α.Μ: 03117707

Συστήματα Αναμονής (Queuing Systems)

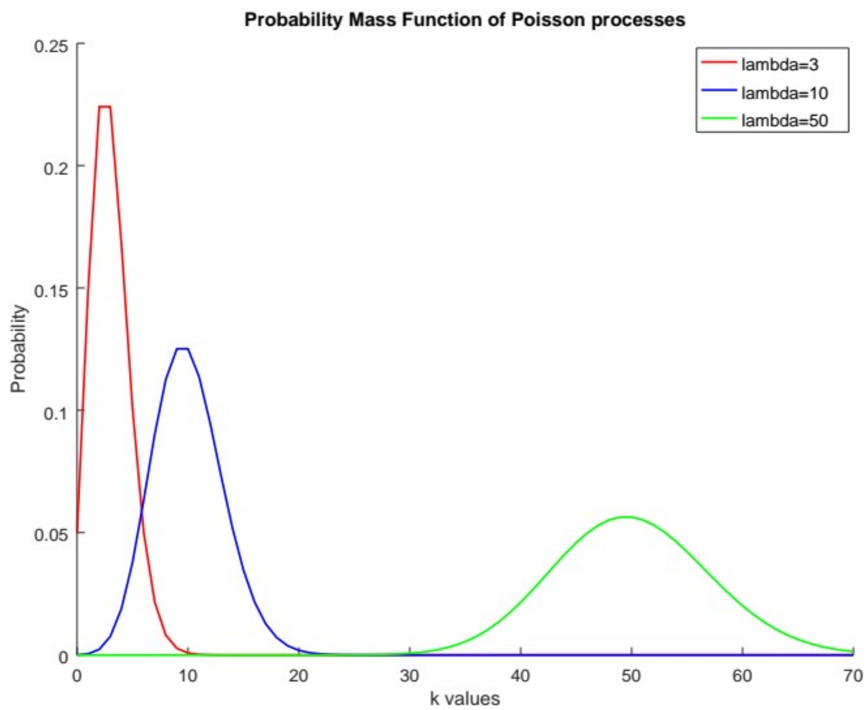
<u>1η Ομάδα Ασκήσεων</u>

<u>Κατανομή Poisson</u>

Για την υλοποίηση αυτού του μέρους της άσκησης χρησιμοποιήθηκε ο δοσμένος κώδικας (αρχείο demo1a.m), έπειτα από κάποιες μικρές τροποποιήσεις.

Α) Συνάρτηση μάζας πιθανότητας της κατανομής Poisson

Από την εκτέλεση του κώδικα προκύπτει το πιο κάτω διάγραμμα:



Σύμφωνα με τη
θεωρία η μέση τιμή μιας στοχαστικής ανέλιξης κατανομής Poisson είναι ίση με λ, κάτι το οποίο αποδεικνύεται από το διάγραμμα, αφού η μέγιστη τιμή σε κάθε μία από τις τρεις περιπτώσεις παρουσιάζεται για k ίσο με λ. Παρατηρούμε ότι για μικρές τιμές του λ η γραφική παράσταση βρίσκεται τοποθετημένη κοντά στον κατακόρυφο άξονα y’y, έχει μικρή έκταση στον οριζόντιο άξονα (k values) ενώ πολύ μεγαλύτερη στον κατακόρυφο (Probability). Καθώς το λ μεγαλώνει, η γραφική παράσταση απομακρύνεται από τον κατακόρυφο άξονα (μετακινείται προς τα δεξιά), το σχήμα της διατηρείται το ίδιο αλλά απλώνεται-ανοίγει, μεγαλώνει δηλαδή η έκταση του στον οριζόντιο άξονα ενώ το ύψος του μικραίνει, διατηρώντας όμως σταθερό το εμβαδόν του. Για μεγάλες τιμές του λ αρχίζει να μοιάζει με καμπάνα και πλησιάζει την κατανομή Gauss.

B) Μέση τιμή και διακύμανση κατανομής Poisson

Για λ=30 το πρόγραμμα μας δίνει τα πιο κάτω αποτελέσματα για τη μέση τιμή και τη διακύμανση αντίστοιχα:

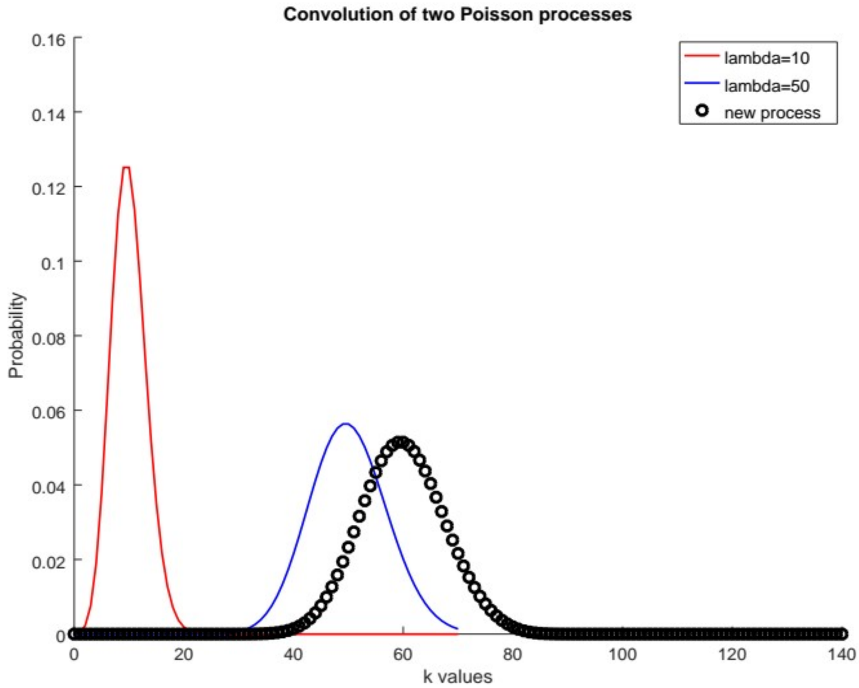
```
Mean value of Poisson with lambda 30 is
>> display(mean_value);
mean_value =  30.000
```

```
Variance of Poisson with lambda 30 is
>> display(variance);
variance =  30.000
```

Παρατηρούμε ότι η μέση τιμή και η διακύμανση έχουν την ίδια τιμή, γεγονός που συμφωνεί με τη θεωρία για την κατανομή Poisson.

Γ) Υπέρθεση κατανομών Poisson

Από την εκτέλεση του κώδικα λαμβάνουμε το ακόλουθο διάγραμμα που περιλαμβάνει τις κατανομές για λ=10, λ=50 και τη συνέλιξή τους:



Παρατηρούμε ότι η κατανομή της στοχαστικής ανέλιξης που προκύπτει είναι Poisson, με συντελεστή λ=60. Σύμφωνα με τη θεωρία, από τη συνέλιξη δύο στοχαστικών ανελίξεων Poisson με παραμέτρους λ_1, λ_2 προκύπτει στοχαστική ανέλιξη με παράμετρο $\lambda=\lambda_1+\lambda_2$ (στην προκειμένη περίπτωση $\lambda_1=10$ και $\lambda_2=50$), υπό την προϋπόθεση ότι οι δύο ανελίξεις είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Δ) Κατανομή Poisson ως το όριο μιας διωνυμικής κατανομής

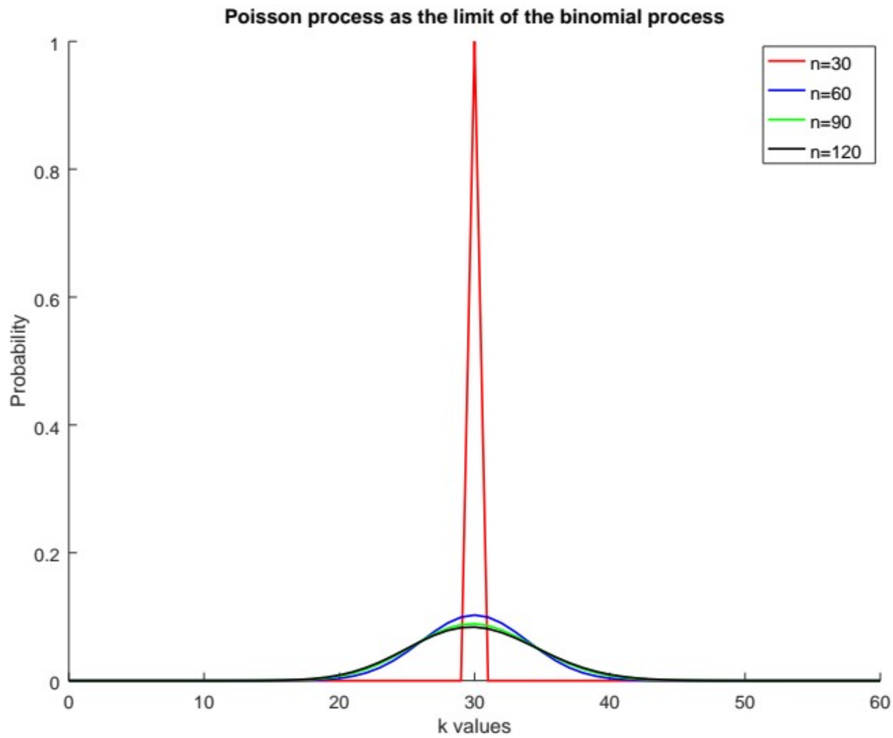
Η κατανομή Poisson μπορεί να υπολογιστεί ως μία προσέγγιση της διωνυμικής κατανομής.
Η διωνυμική κατανομή είναι μια διακριτή συνάρτηση κατανομής τυχαίας μεταβλητής. Περιγράφει ένα τυχαίο πείραμα με δυο πιθανά αποτελέσματα (επιτυχία - αποτυχία) και πιθανότητα επιτυχίας p που επαναλαμβάνεται n φορές, ενώ πιθανότητα αποτυχίας 1-p.
Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή X που εκφράζει τον αριθμό των επιτυχιών. Η πιθανότητα να έχουμε k επιτυχίες σε n ανεξάρτητα πειράματα με πιθανότητα επιτυχίας p κάθε φορά είναι:

$$\mathrm{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}. \qquad \text{για } k = 0, 1,\ldots, n$$

Για $n \to \infty$ και $p \to 0$ έτσι ώστε np σταθερό, η διωνυμική κατανομή συγκλίνει στην κατανομή Poisson με παράμετρο λ=np.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} P(X=k) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\lambda^k}{k!}\right)\left(\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n^k}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!}\cdot\lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n}\right)}_{\to 1}\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}_{\to e^{-\lambda}}\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\to 1} \\
&= \frac{\lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda}}{k!}
\end{aligned}$$

Στο ακόλουθο διάγραμμα παρατηρούμε την εξέλιξη μιας διωνυμικής κατανομής για τις τιμές n=30, 60, 90, 120.



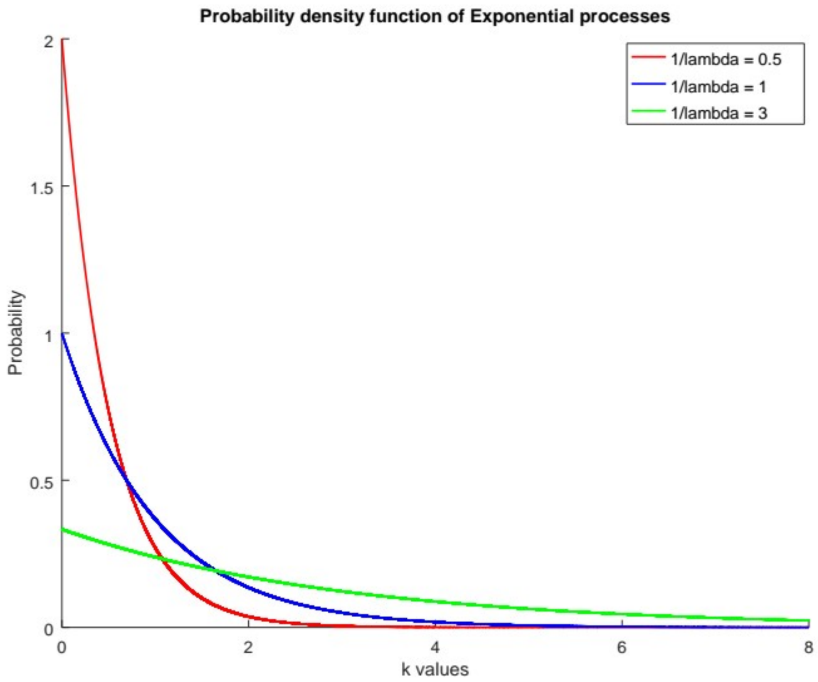
Παρατηρούμε ότι καθώς το n μεγαλώνει, η γραφική παράσταση προσεγγίζει καλύτερα την επιθυμητή κατανομή Poisson, η οποία όπως εξηγήσαμε προκύπτει για $n \to \infty$.

<u>Εκθετική Κατανομή</u>

Για την υλοποίηση αυτού του μέρους της άσκησης χρησιμοποιήθηκε ο κώδικας που βρίσκεται στο αρχείο codeExp.m (βλ.ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΚΩΔΙΚΑ)

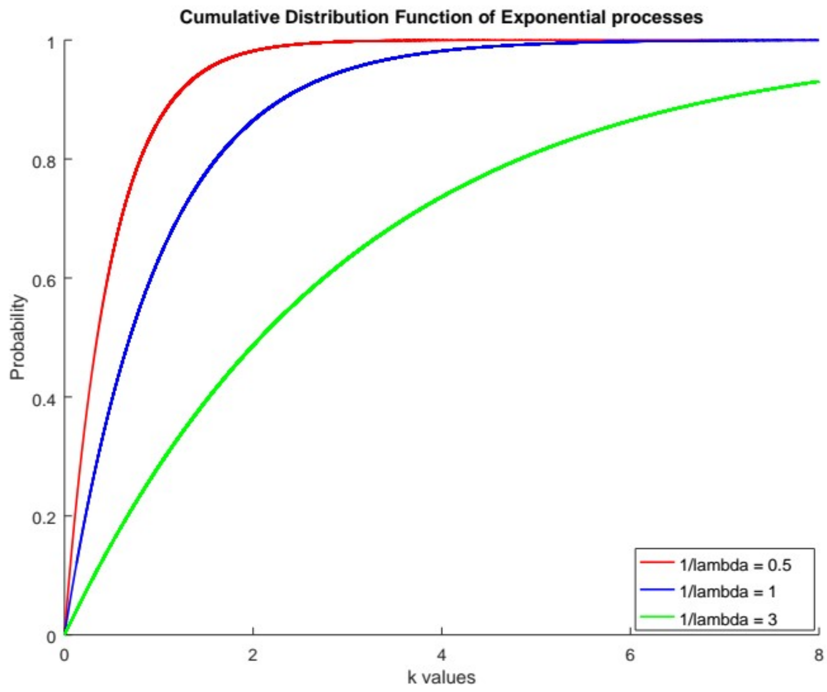
Α) Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της εκθετικής κατανομής

Στο πιο κάτω διάγραμμα παρουσιάζεται η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των εκθετικών κατανομών με μέσους όρους λ=[0.5, 1, 3]:



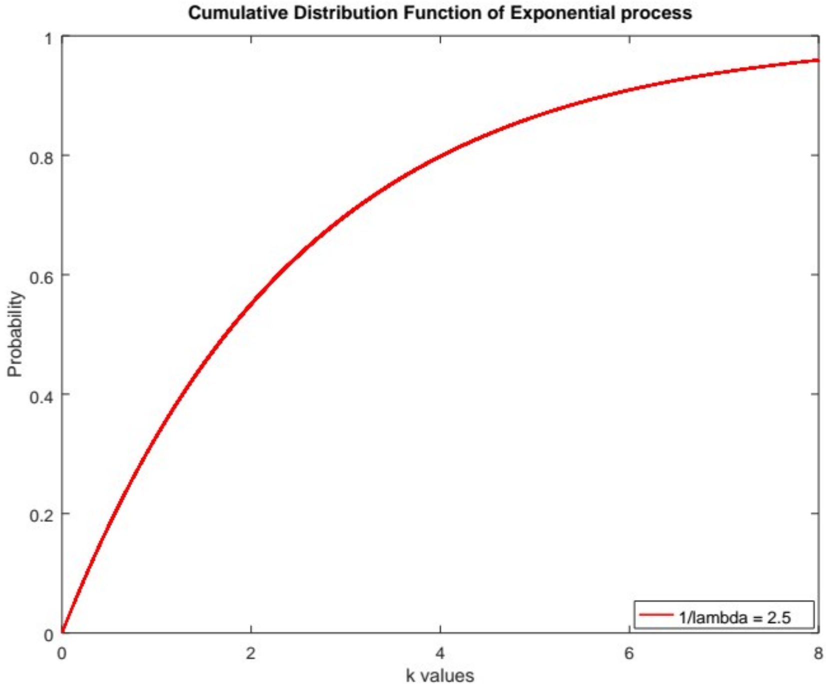
Β) Συνάρτηση κατανομής πιθανότητας της εκθετικής κατανομής

Στο διάγραμμα που ακολουθεί παρουσιάζεται η αθροιστική συνάρτηση κατανομής των εκθετικών κατανομών του προηγούμενου ερωτήματος:



Γ) Απώλεια μνήμης της εκθετικής κατανομής

Πιο κάτω παρουσιάζεται η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας της εκθετικής κατανομής για 1/λ=2.5:



Η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας (CDF) της εκθετικής κατανομής ορίζεται ως εξής:

$$F_X(x)=P[X\le x]=\begin{Bmatrix} 1-e^{-\lambda x}, x\ge 0 \\ 0, x<0 \end{Bmatrix}$$

Αφού 1/λ=2.5, συνεπώς λ=0.4. Τότε:

$$P[X>30000]=1-P[X\le 30000]=1-(1-e^{-0.4\times 30000})=e^{-12000}$$

και

$$P[X>50000|X>20000]=\frac{P(X>50000\cap X>20000)}{P(X>20000)}=\frac{P(X>50000)}{P(X>20000)}=\frac{1-P(X\le 50000)}{1-P(X\le 200000)}$$

$$\rightarrow P[X>50000|X>20000]=\frac{1-(1-e^{-0.4\times 50000})}{1-(1-e^{-0.4\times 20000})}=\frac{e^{-20000}}{e^{-8000}}=e^{-12000}$$

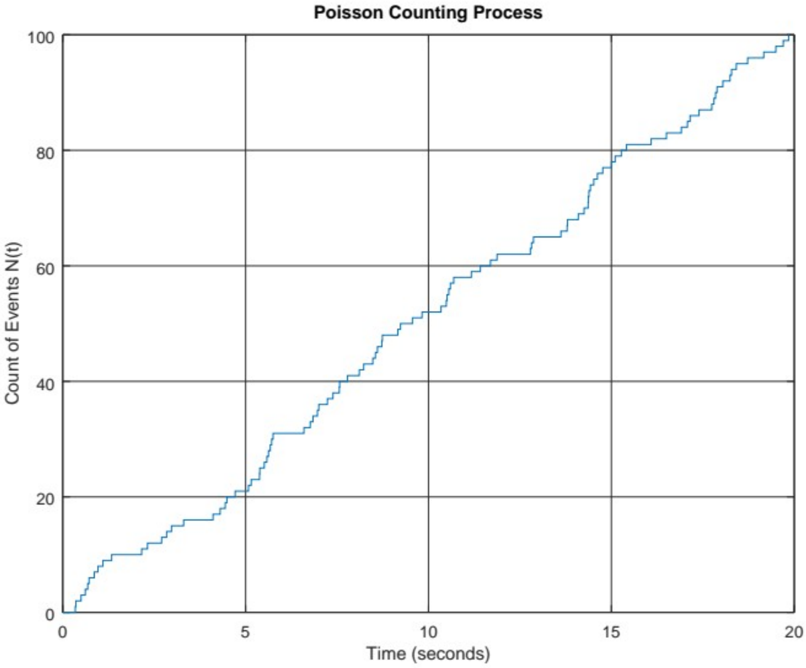
Παρατηρούμε ότι οι δύο πιθανότητες είναι ίσες. Πρόκειται για την ιδιότητα έλλειψης μνήμης που παρουσιάζεται στην εκθετική κατανομή, δηλαδή την ιδιότητα σύμφωνα με την οποία για τον υπολογισμό κάποιας πιθανότητας ενός γεγονότος κάποια χρονική στιγμή δε μας ενδιαφέρει η τιμή της πιθανότητας του ίδιου γεγονότος οποιαδήποτε στιγμή στο παρελθόν.
Για παράδειγμα στην περίπτωση που μόλις έχω ξεκινήσει να μιλάω στο τηλέφωνο ή στην περίπτωση που μιλάω ήδη στο τηλέφωνο εδώ και μία ώρα, η πιθανότητα να συνεχίσω να μιλάω για άλλα 10 λεπτά είναι ακριβώς η ίδια.

Διαδικασία Καταμέτρησης Poisson

Για την υλοποίηση αυτού του μέρους της άσκησης χρησιμοποιήθηκε ο κώδικας που βρίσκεται στο αρχείο codeP.m (βλ. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΚΩΔΙΚΑ)

A) Διαδικασία καταμέτρησης Poisson N(t)

Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι οι χρόνοι που μεσολαβούν ανάμεσα στην εμφάνιση δύο διαδοχικών γεγονότων Poisson ακολουθούν εκθετική κατανομή.
Πιο κάτω παρουσιάζεται η διαδικασία καταμέτρησης Poisson που προκύπτει για 100 διαδοχικά τυχαία γεγονότα, σύμφωνα με τα δεδομένα που μας δόθηκαν.



B) Μέσος αριθμός γεγονότων

Γνωρίζουμε ότι σε ένα χρονικό παράθυρο ΔT = t1 – t2 ο αριθμός των γεγονότων ακολουθεί κατανομή Poisson.

Υπολογίζουμε τον μέσο αριθμό γεγονότων που συμβαίνουν στη μονάδα του χρόνου για όλες τις ζητούμενες τιμές γεγονότων. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν παρουσιάζονται δεξιά.

Παρατηρούμε ότι ο μέσος αριθμός γεγονότων στη μονάδα του χρόνου είναι για όλες τις περιπτώσεις περίπου ίσος με 5.
Ισχύει δηλαδή ότι πραγματοποιούνται 5 γεγονότα ανά δευτερόλεπτο.
Επίσης όσο πιο μεγάλος είναι ο αριθμός δειγμάτων φαίνεται ο μέσος αριθμός να πληριάζει περισσότερο στην επιθυμητή τιμή.

```
 100
samples:
mean_num_events =  5.1203

 200
samples:
mean_num_events =  5.2392

 300
samples:
mean_num_events =  5.0129

 500
samples:
mean_num_events =  4.7602

 1000
samples:
mean_num_events =  4.8412

 10000
samples:
mean_num_events =  4.9755
```

<u>Παράρτημα Κώδικα</u>

codeExp.m

```
clc;
clear all;
close all;

# TASK A

k = 0:0.00001:8;
l = [0.5, 1, 3];
for i = 1:columns(l)
	exponential(i, :) = exppdf(k, l(i));
endfor

colors = "rbg";
figure(1);
hold on;
for i = 1:columns(l)
	plot(k, exponential(i, :), colors(i), "linewidth",1 .2);
endfor
hold off;

title("Probability density function of Exponential processes");
xlabel("k values");
ylabel("Probability");
legend("1/lamba = 0.5", "1/lambda = 1", "1/lambda = 3");



#TASK B

for i = 1:columns(l)
	exponential(i, :) = expcdf(k, l(i));
endfor
colors = "rbg";
figure(2);
hold on;
for i=1:columns(l)
	plot(k, exponential(i, :), colors(i), "linewidth", 1.2);
endfor
hold off;

title("Cumulative Distribution Function of Exponential processes");
xlabel("k values");
ylabel("Probability");
legend("1/lambda = 0.5", "1/lambda = 1", "1/lambda = 3","location","southeast");
```

```
#TASK C

l = 2.5;
exponential = expcdf(k, l);
figure(3);
plot(k, exponential, colors(1), “linewidth”, 1.2);
title("Cumulative Distribution Function of Exponential process");
xlabel("k values");
ylabel("Probability");
legend("1/lambda = 2.5", "location","southeast");
```

codeP.m

```
clc;
clear all;
close all;

# TASK A

k = 0:1:100;
number_of_samples = 100;
lambda = 0.2;
exp_numb = exprnd(lambda,1, number_of_samples);
exp_samples(1) = 0;
for i=1:columns(exp_numb)
	exp_samples(i+1) = exp_samples(i) + exp_numb(i);
endfor

figure(1);
stairs(exp_samples, k);
title("Poisson Counting Process");
xlabel("Time (seconds)");
ylabel("Count of Events N(t)");
grid on;



# TASK B

number_of_samples=[100, 200, 300, 500, 1000, 10000];
number_of_tests = columns(number_of_samples);
for j=1:number_of_tests
	exp_numb = exprnd(lambda,1, number_of_samples(j));
	exp_samples(1) = 0;
	for i=1:columns(exp_numb)
		exp_samples(i+1) = exp_samples(i) + exp_numb(i);
	endfor
	n=number_of_samples(j)+1;
	last_value=exp_samples(n);
	mean_num_events=number_of_samples(j)/last_value;
	display(number_of_samples(j));
	display("samples:")
	display(mean_num_events);
	display(" ")
endfor
```