ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
Τομέας Επικοινωνιών, Ηλεκτρονικής & Συστημάτων Πληροφορικής
Εργαστήριο Διαχείρησης και Βέλτριστου Σχεδιασμού Δικτύων Τηλεματικής – NETMODE

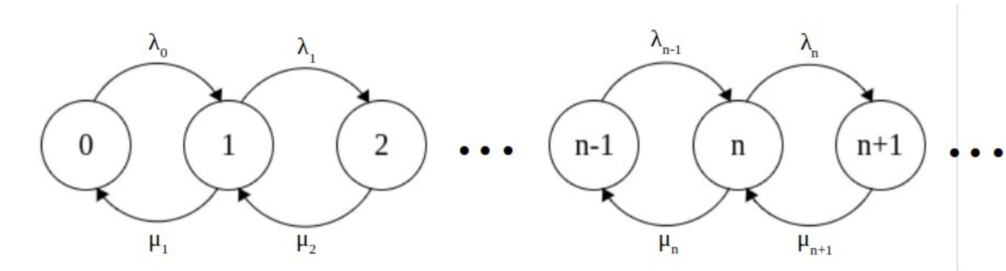
Πεγειώτη Νάταλυ
Α.Μ: 03117707

Συστήματα Αναμονής (Queuing Systems)

<u>2η Ομάδα Ασκήσεων</u>

<u>Θεωρητική μελέτη της ουράς Μ/Μ/1</u>

(α) Για να είναι εργοδική η ουρά Μ/Μ/1 πρέπει να ικανοποιεί την συνθήκη για οριακή ισορροπία – εργοδικότητα, δηλαδή πρέπει να ισχύει ότι $\rho=u=\frac{\lambda}{\mu}<1$, όπου ρ η ένταση φορτίου.
Το διάγραμμα ρυθμού μεταβάσεων της ουράς παρουσιάζεται στο ακόλουθο σχήμα:



Οι εργοδικές πιθανότητες των καταστάσεων του συστήματος προκύπτουν από τις εξισώσεις ισορροπίας ως εξής:

$\lambda P_0=\mu P_1$ ή $P_1=(\frac{\lambda}{\mu})P_0=\rho P_0$

$(\lambda+\mu)P_1=\lambda P_0+\mu P_2$ ή $P_2=\rho^2 P_0$

ή γενικότερα

$(\lambda_k+\mu_k)P_k=\lambda_{k-1}P_{k-1}+\mu_{k+1}P_{k+1}, k>1$

$P_k=\rho_k P_0, k>0$

Στην περίπτωση της Μ/Μ/1 επειδή θεωρούμε ότι η κατάσταση μπορεί να πάει από το μηδέν μέχρι το άπειρο, υπάρχουν άπειρες γραμμικές εξισώσεις, οι οποίες όμως είναι γραμμικά εξαρτημένες. Προκειμένου να γίνουν ανεξάρτητες, κάνουμε χρήση της εξίσωσης κανονικοποίησης η οποία φαίνεται πιο κάτω:

$P_0+P_1+\ldots+P_k+\ldots=1=P_0(1+\rho+\rho^2+\rho^3+\ldots)$

Εφόσον ισχύει ότι 0 < ρ < 1, η άπειρη δυναμοσειρά $(1+\rho+\rho^2+\rho^3+\ldots)\rightarrow\frac{1}{1-\rho}$

Συνεπώς $P_0(\frac{1}{1-\rho})=1$

και $P_0=(1-\rho)$ αφού $P_k=(1-\rho)\rho^k, k>0$

(β) Ο μέσος χρόνος καθυστέρησης ενός πελάτη προκύπτει από τη σχέση:

$$E[T]=\frac{E[n(t)]}{\lambda}$$

Σε κατάσταση ισορροπίας ισχύει η δοσμένη ισότητα, επομένως προκύπτει ότι ο μέσος χρόνος καθυστέρησης υπολογίζεται ως εξής:

$$E[T]=\frac{E[n(t)]}{\lambda}=\frac{\rho/(1-\rho)}{\lambda}=\frac{\lambda/(\mu-\lambda)}{\lambda}=\frac{1}{\mu-\lambda}$$

(γ) Η χωρητικότητα του συστήματος είναι άπειρη και υπάρχει εργοδικότητα, επομένως όλες οι καταστάσεις είναι απείρως επισκέψιμες. Αυτό σημαίνει ότι σε άπειρο χρόνο όλες οι καταστάσεις, συμπεριλαμβανομένου και της κατάστασης 57, μπορούν να συναντηθούν άπειρες φορές.

(δ) Όπως φαίνεται και από τις σχέσεις που έχουμε βρει, για την περιγραφή της ουράς, αυτό που μας ενδιαφέρει είναι η συχνότητα εμφάνισης των πελατών και η διεκπεραιωτική ικανότητα του εξυπηρετητή. Εφόσον το σύστημα έχει περάσει από τη μεταβατική κατάσταση και βρίσκεται πλέον σε ισορροπία, η αρχική κατάσταση δεν το επηρεάζει κατ'ουδένα τρόπο.
Επομένως αν αρχικά υπήρχαν 5 πελάτες, δε θα άλλαζε τίποτα στα αποτελέσματα που προέκυψαν πιο πάνω.

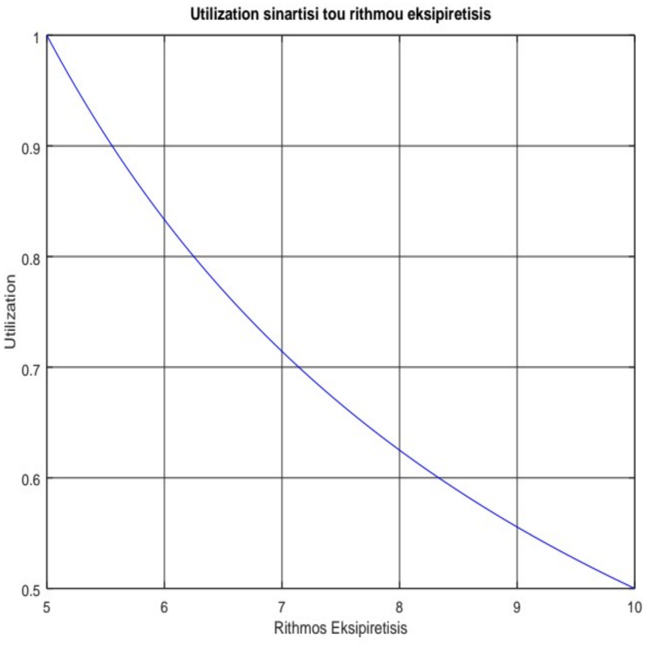
<u>Ανάλυση ουράς M/M/1 με Octave</u>

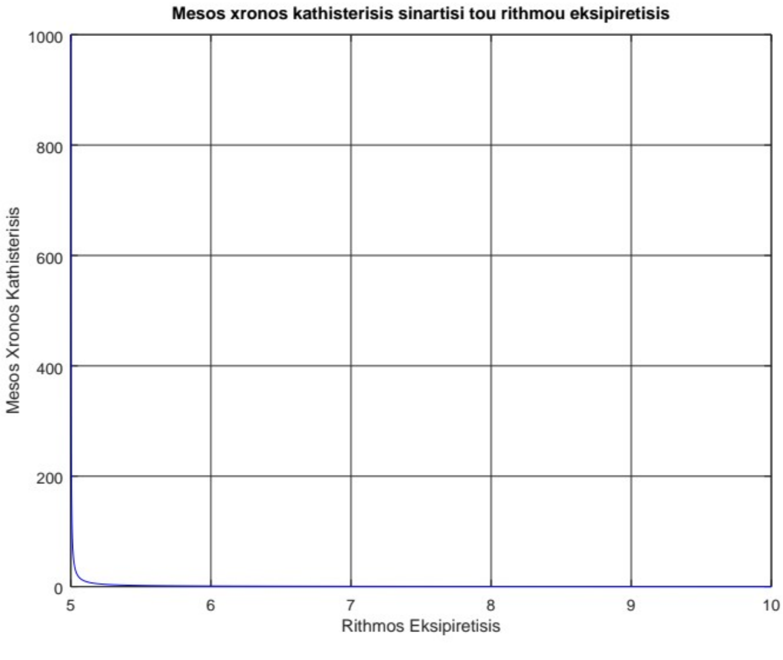
Για την υλοποίηση αυτού του μέρους της άσκησης χρησιμοποιήθηκε ο κώδικας που βρίσκεται στο αρχείο QueueingMM1.m (βλ.ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΚΩΔΙΚΑ)

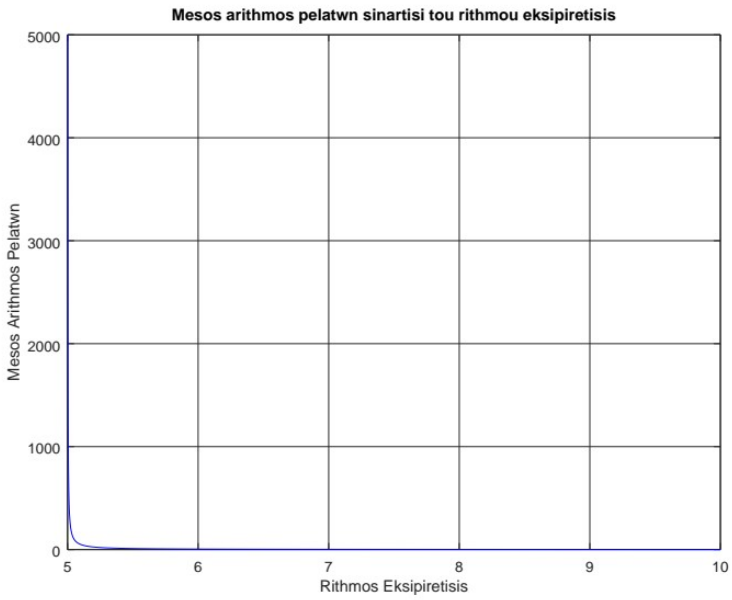
Ουρά M/M/1, οι αφίξεις της οποίας ακολουθούν κατανομή Poisson με ρυθμό λ=5 πελάτες/min

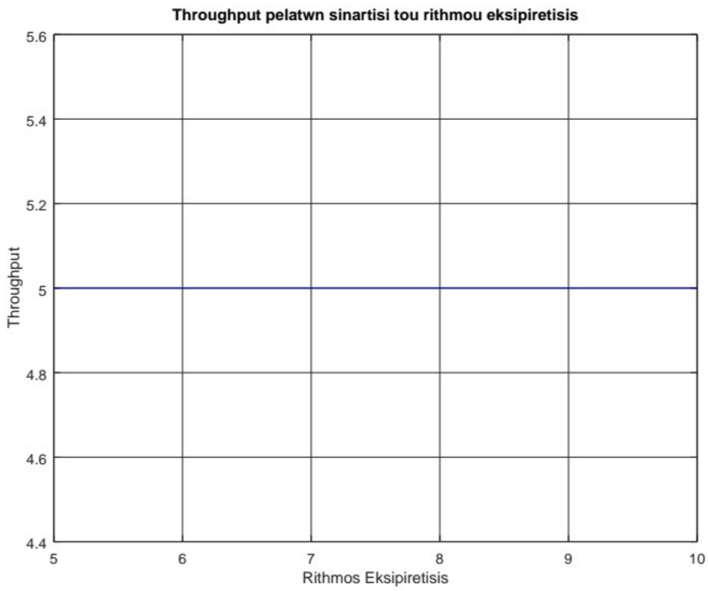
(α) Για να είναι εργοδικό το σύστημά μας, θα πρέπει ο ρυθμός εξυπηρέτησης μ να είναι μικρότερος του ρυθμού αφίξεων πελατών λ, έτσι ώστε να ικονοποιείται η συνθήκη $\rho=\frac{\lambda}{\mu}<1$. Επομένως οι αποδεκτές τιμές για τον ρυθμό εξυπηρέτησεις είναι για μ>5.

(β) Για τους επιτρεπτούς ρυθμούς εξυπηρέτησης (μ>5) προκύπτουν τα ακόλουθα διαγράμματα:









(γ) Θα επέλεγα μία τιμή κοντά στο μ=5.5 αφού όπως φαίνεται από το διάγραμμα, ο μέσος χρόνος καθυστέρησης από τη συγκεκριμένη τιμή και μετά είναι μηδενικός. Επομένως θα μπορούσαμε να επιλέξουμε ρυθμό εξυπηρέτησης μεγαλύτερο του μ=5.5, με μόνη διαφορά το κόστος υλοποίησης για μεγαλύτερη διεκπεραιωτική ικανότητα.

(δ) Παρατηρούμε ότι σε μια ουρά M/M/1 το throughput πελατών παραμένει σταθερό και ίσο με τον ρυθμό αφίξεων λ των πελατών. Αυτό συμβαίνει γιατί το σύστημά μας έχει άπειρη χωρητικότητα και άρα P[blocking]=0.

<u>Σύγκριση συστημάτων με δύο εξυπηρετητές</u>

Για την υλοποίηση αυτού του μέρους της άσκησης χρησιμοποιήθηκε ο κώδικας που βρίσκεται στο αρχείο QueueingMM2.m (βλ.ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΚΩΔΙΚΑ)

Στις δύο παράλληλες ουρές M/M/1 θεωρούμε ότι οι πελάτες φτάνουν τυχαία και ισοπίθανα ($P_1=P_2=0.5$), με συνολικό ρυθμό άφιξης λ=10 πελάτες/min.
Σύμφωνα με τις ιδιότητες της κατανομής Poisson, οι δύο ουρές έχουν ρυθμό εμφάνισης πελατών $\lambda_1=\lambda_2=0.5*\lambda=5$ πελάτες/min.
Η μέση καθυστέρηση ενός πελάτη στο σύστημα υπολογίζεται ως εξής:

$$E[T]=P_1 E[T_1]+P_2 E[T_2]=0.5\,E[T_1]+0.5\,E[T_2]$$

και εφόσον οι δύο ουρές είναι όμοιες ισχύει ότι $E[T_1]=E[T_2]$

Άρα $E[T]=E[T_1]=E[T_2]$

Επομένως για κάθε μία από τις δύο ουρές ο χρόνος καθυστέρησης είναι ίδιος και για τον υπολογισμό του χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση qsmm1 με παραμέτρους μ=10 και λ=5, οι οποίες αντιστοιχούν στις ουρές M/M/1.

Για την ουρά M/M/2 λαμβάνουμε τον μέσο χρόνο καθυστέρησης ενός πελάτη από τη συνάρτηση qsmmm.

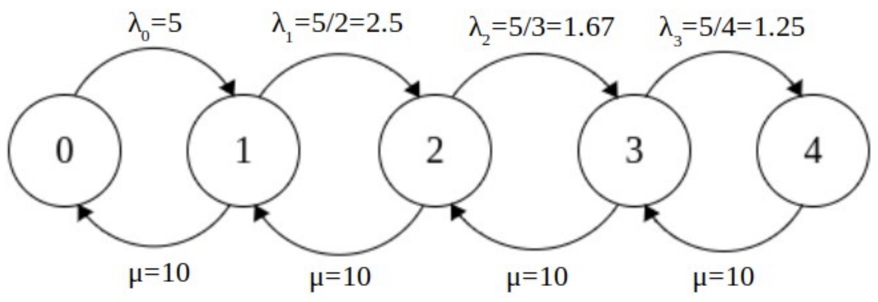
Τα αποτελέσματα που λαμβάνουμε για καθεμία από τις δύο περιπτώσεις φαίνονται πιο κάτω:

```
Average waiting time for two (2) parallel queues M/M/1:
 0.20000
Average waiting time for queue M/M/2:
 0.13333
```

Παρατηρούμε ότι ο χρόνος καθυστέρησης ενός πελάτη είναι μικρότερος στο σύστημα μίας ουράς M/M/2 σε σύγκριση με το σύστημα δύο παράλληλων ουρών M/M/1.
Συνεπώς επιλέγουμε την πρώτη υλοποίηση του συσηματος, δηλαδή μία ουρά M/M/2.

<u>Διαδικασία γεννήσεων θανάτων (birth-death process): εφαρμογή σε σύστημα M/M/1/K</u>
Για την υλοποίηση αυτού του μέρους της άσκησης χρησιμοποιήθηκε ο κώδικας που βρίσκεται στο αρχείο QueueingMM1K.m (βλ.ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΚΩΔΙΚΑ)

(α) Σύμφωνα με τα δεδομένα που μας δίνονται, $\lambda_i=5/(i+1)$ και $\mu=10$ πελάτες/min προκύπτει το πιο κάτω διάγραμμα μεταβάσεων:



Για τον υπολογισμό των εργοδικών πιθανοτήτων των καταστάσεων και της πιθανότητας απώλειας πελάτη χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις ισορροπίας $\lambda_{k-1} P_{k-1} = \mu_k P_k$

Επομένως:

1. $5P_0 = 10P_1 \rightarrow P_1 = \frac{1}{2}P_0$
2. $\frac{5}{2}P_1 = 10P_2 \rightarrow P_2 = \frac{1}{4}P_1 = \frac{1}{8}P_0$
3. $\frac{5}{3}P_2 = 10P_3 \rightarrow P_3 = \frac{1}{6}P_2 = \frac{1}{48}P_0$
4. $\frac{5}{4}P_3 = 10P_4 \rightarrow P_4 = \frac{1}{8}P_3 = \frac{1}{384}P_0$

Κάνοντας χρήση της εξίσωσης κανονικοποίησης προκύπτει ότι:

$$P_0+P_1+P_2+P_3+P_4=1 \rightarrow P_0\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{48}+\frac{1}{384}\right)=1 \rightarrow P_0=\frac{128}{211}=0.6066=60.66\%$$

Λύνοντας τις εξισώσεις βρίσκουμε τις ακόλουθες εργοδικές πιθανότητες των καταστάσεων του συστήματος:
P_1=30.33% P_2=7.58% P_3=1.26% P_4=P[blocking]=0.16%

(β) Μοντελοποίηση του πιο πάνω συστήματος ως μια διαδικασία γεννήσεων-θανάτων συνεχούς χρόνου.

i. Ο πίνακας μεταβάσεων που περιγράφει τους ρυθμούς μετάβασης ανάμεσα στις καταστάσεις του συστήματος υπολογίστηκε με χρήση της εντολής ctmcbd και φαίνεται πιο κάτω:

-5.00000	5.00000	0.00000	0.00000	0.00000
10.00000	-12.50000	2.50000	0.00000	0.00000
0.00000	10.00000	-11.66667	1.66667	0.00000
0.00000	0.00000	10.00000	-11.25000	1.25000
0.00000	0.00000	0.00000	10.00000	-10.00000

ii. Με χρήση της εντολής ctmc επιβεβαιώνουμε τις εργοδικές πιθανότητες που υπολογίσαμε στο προηγούμενη ερώτημα:

```
P =

   0.6066351   0.3033175   0.0758294   0.0126382   0.0015798
```

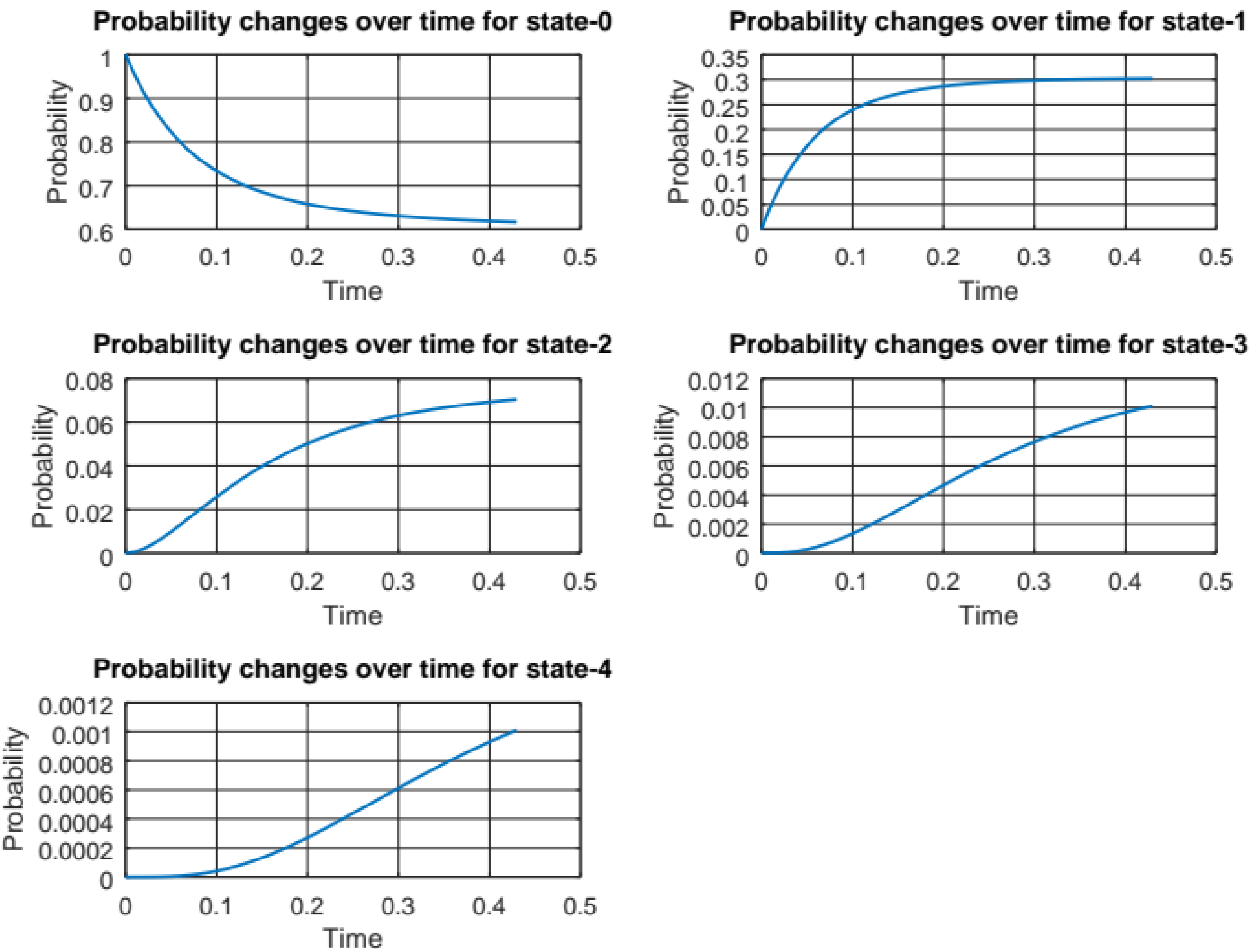
iii. Ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα δίνεται από τον τύπο $\sum_{k=1}^{i} k P_k$ και υπολογίζεται ως ακολούθως:

```
Average number of customers:
 0.49921
```

iv. Η πιθανότητα απόρριψης πελάτη όταν το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας είναι η ακόλουθη:

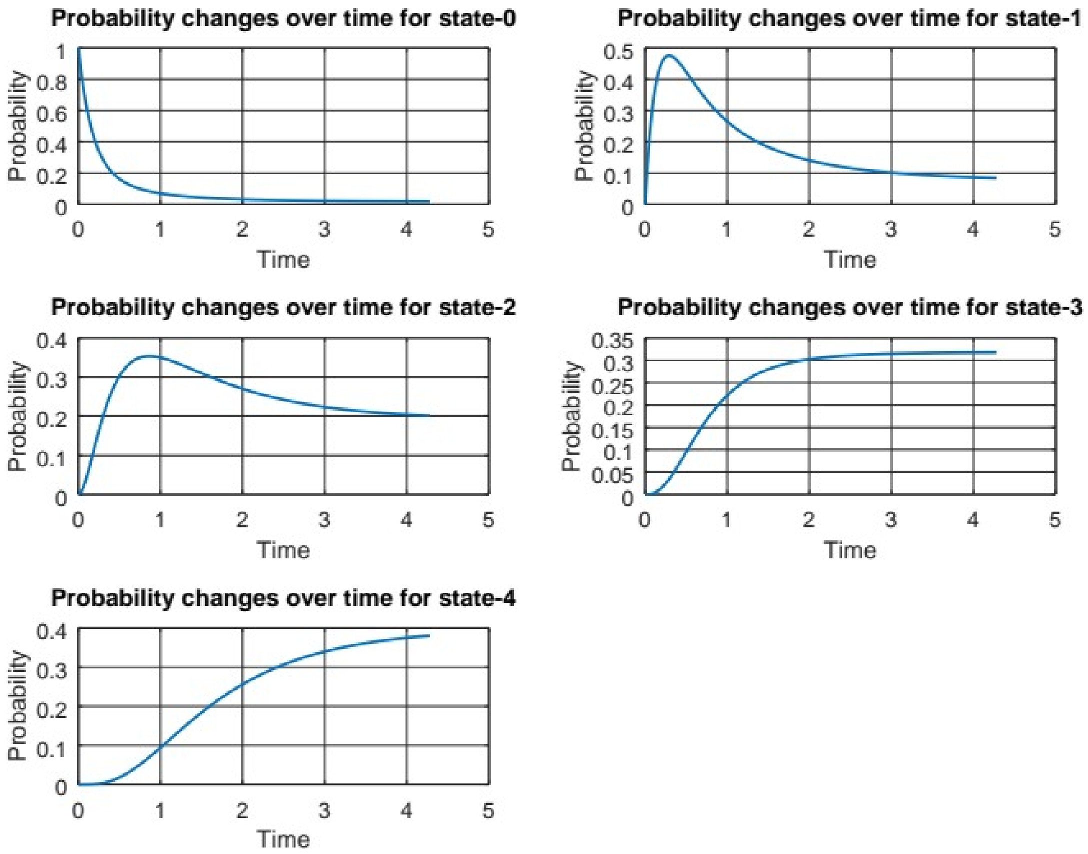
```
Blocking probability:
 0.0015798
```

v. Για τις αρχικές παραμέτρους λ=5 πελάτες/min και μ=10 προκύπτουν τα πιο κάτω διαγράμματα:

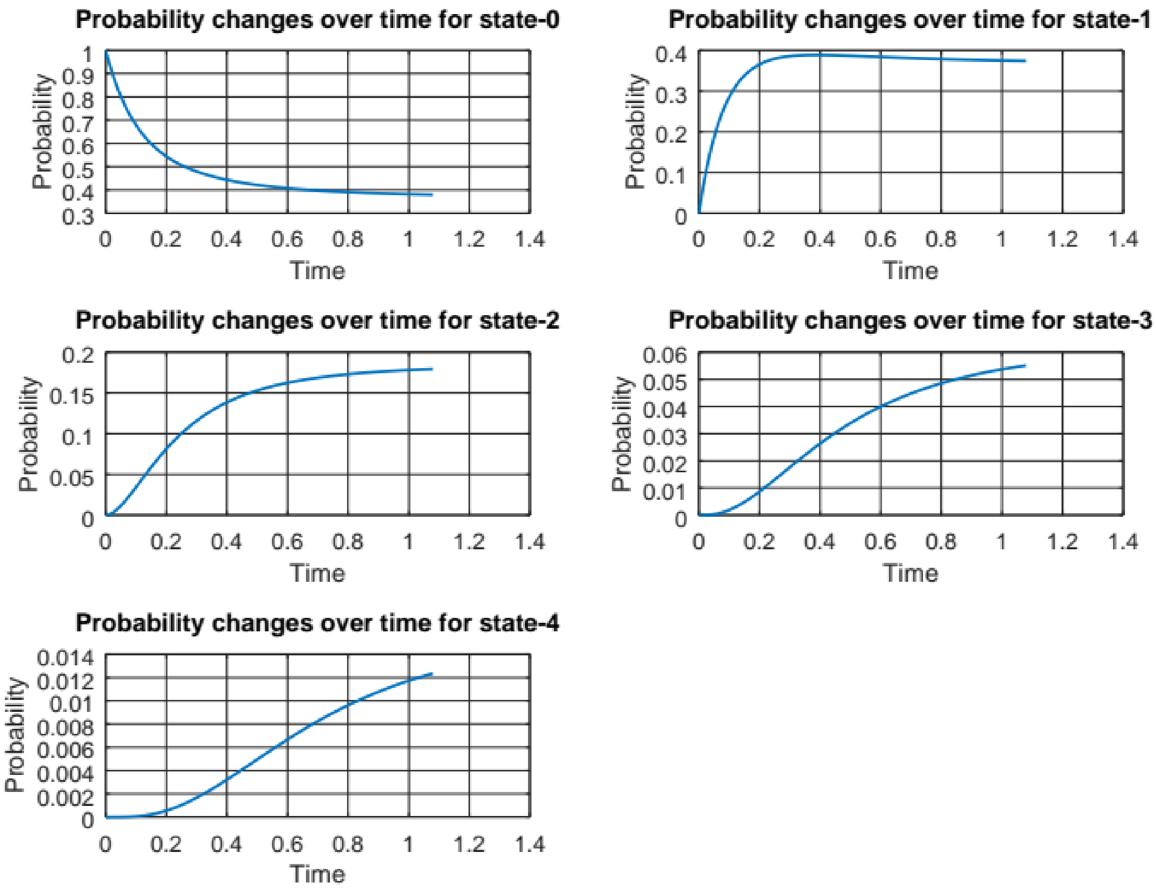


vi. Επαναλαμβάνουμε το ερώτημα v. για άλλα τέσσερα ζεύγη παραμέτρων για τα οποία τα διαγράμματα παρουσιάζονται πιο κάτω

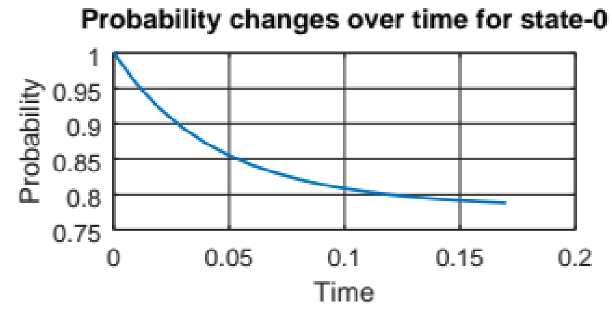
Για λ=5, μ=1:

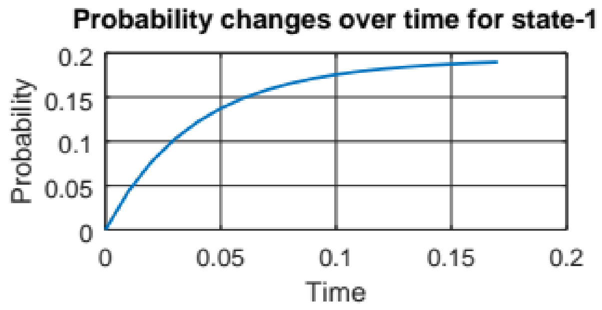


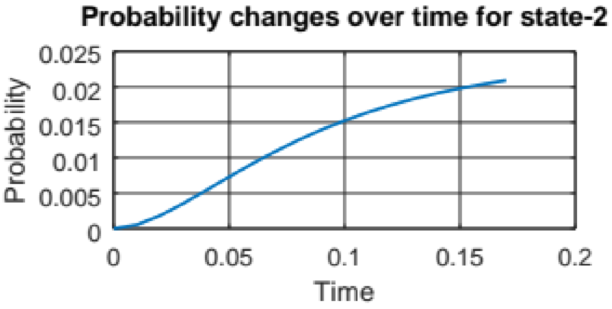
Για λ=5, μ=5:

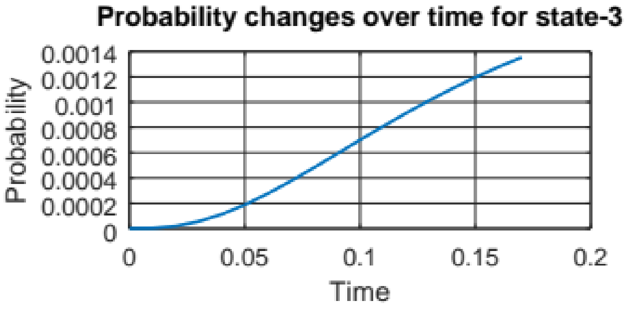


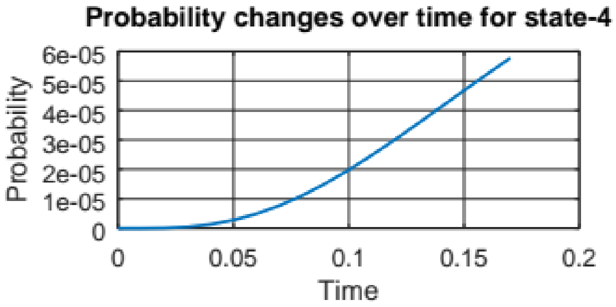
Για λ=5, μ=20:











Από τα διαγράμματα που προκύπτουν για τις διάφορες τιμές του ρυθμού εξυπηρέτησης μ, παρατηρούμε ότι όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή αυτή, τόσο πιο γρήγορα συγκλίνει το σύστημα στις εργοδικές πιθανότητες.

Επίσης παρατηρούμε ότι όσο μεγαλώνει το μ οι πιθανότητες στις οποίες συγκλίνει το σύστημα μειώνονται για όλες τις καταστάσεις, εκτός από την κατάσταση 0.

<u>Παράρτημα Κώδικα</u>

QueueingMM1.m

```
clc;
clear all;
close all;

l = 5;  #o mesos rithmos afiksewn
m = 5.001:0.001:10; #xronos eksipiretisis apo 5-10 pelates/min

#prosomiosi ouras M/M/1
[utilization, waiting_time, mean_state, throughput] = qsmm1 (l, m);

#diagramma gia to utilization sinartisi tou m
figure(1);
plot(m, utilization, 'b');
grid on;
xlabel("Rithmos Eksipiretisis");
ylabel("Utilization");
title("Utilization sinartisi tou rithmou eksipiretisis");

#diagramma gia to meso xrono kathisterisis sinartisi tou m
figure(2)
plot(m, waiting_time, 'b');
grid on;
xlabel("Rithmos Eksipiretisis");
ylabel("Mesos Xronos Kathisterisis");
title("Mesos xronos kathisterisis sinartisi tou rithmou eksipiretisis");

#diagramma gia to meso arithmo pelatwn sinartisi tou m
figure(3);
plot(m, mean_state, 'b');
grid on;
xlabel("Rithmos Eksipiretisis");
ylabel("Mesos Arithmos Pelatwn");
title("Mesos arithmos pelatwn sinariti tou rithmou eksipiretisis");

#to diagramma tou throughput pelaton sinartisi tou m
figure(4);
plot(m, throughput, 'b');
grid on;
xlabel("Rithmos Eksipiretisis");
ylabel("Throughput");
title("Throughput pelatwn sinartisi tou rithmou eksipiretisis");
```

QueueingMM2.m

```
clc;
clear all;
close all;

l = 10;
m = 10;


#prosomiosi 2 parallilon ouron M/M/1

[utilization1, waiting_time1] = qsmm1 (0.5*l, m);


# prosomiosi ouras M/M/2

[utilization2, waiting_time2] = qsmmm (l, m, 2);

disp("Average waiting time for two (2) parallel queues M/M/1: "), disp(waiting_time1);

disp("Average waiting time for queue M/M/2: "), disp(waiting_time2);
```

QueueingMM1K.m

```
clc; clear all; close all;

l = 5;
m = 10;
states = [0,1,2,3,4]; #system with capacity 4 states
initial_state = [1,0,0,0,0]; #the initial state of the system. The system is initially empty.

# define the birth and death rates between the states of the system
births = [l, l/2, l/3, l/4];
deaths = [m, m, m, m];

# mitra rithmou metavaseon
transition_matrix = ctmcbd(births,deaths);
display (transition_matrix);

# ergodikes pithanotites
P = ctmc(transition_matrix);
display(P);

# mesos arithmos pelaton sto sistima
avg_number_of_customers = 1 * P(2) + 2 * P(3) + 3 * P(4) + 4 * P(5);
disp("Average number of customers is: "), disp (avg_number_of_customers);

# pithanotita blockarismatos
pblock = P(5);
display("Blocking probability is:"), disp(pblock);

# diagrammata ekseliksis tn pithanotitwn gia kathe katastasi ksexorista
index = 0;
for T = 0:0.01:50
	index = index + 1;
	pithanotita = ctmc(transition_matrix, T, initial_state);
	Prob0(:,index) = pithanotita;
	if (pithanotita - P < 0.01)
		break;
	endif
endfor

T = 0:0.01:T;
figure (1);
for i = 1:1:5
	subplot (3, 2, i);
	plot(T, Prob0(i,:), "", "linewidth", 1.3);
	ttlstring = strcat("Probability changes over time for state-", num2str(i-1));  title(ttlstring);
	xlabel("Time");
	ylabel("Probability");
	grid on;
endfor
```