

PROPAGACIÓ D'ERRORS

Qualsevol mesura experimental x té un cert marge d'error Δx . Si ara avaluem sobre aquesta variable una funció $y = f(x)$, quin error hem d'esperar a y ?

L'error $\pm \Delta x$ es 'propagarà' a un error $\pm \Delta y$. Quina relació hi ha entre Δx i Δy ?

Distingirem entre error i precisió (o error relatiu). La precisió és $\frac{\Delta x}{x}$, i sovint s'expressa en percentatge.

Hem de recordar la definició de derivada

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

i aproximem $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x)$ si $\Delta x \approx 0$. O bé

$$\Delta y \approx f'(x) \Delta x \text{ si } \Delta x \approx 0$$

Si parlem de precisió, dividim per y ,

$$\frac{\Delta y}{y} \approx \frac{y'x}{y} \frac{\Delta x}{x}$$

Arem a veure uns exemples,

• Precisió del logaritme

Tenim $x = 10 \pm 2\%$, posem $y = \ln x$,
alleshores

$$\Delta y = \frac{1}{x} \Delta x, \quad \frac{\Delta y}{y} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x \cdot \Delta x}{y} = \frac{1}{y} \frac{\Delta x}{x}$$

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{1}{y} \frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{\ln 10} \cdot 0.02 \approx 8.7 \cdot 10^{-3}$$

$$\text{Així } \ln 10 = 2.3 \pm 0.9\%$$

• Precisió de l'àrea d'una circumferència

$$\text{Si } S = \pi R^2 \text{ alleshores } \Delta S = 2\pi R \Delta R$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta S}{S} &= \frac{2\pi R}{S} \cdot \Delta R = \frac{2\pi R}{\pi R^2} \Delta R = \\ &= 2 \frac{\Delta R}{R} \end{aligned}$$

Així si R té una precisió del 5%, l'àrea té una precisió del 10%.

Anem a fer els exercicis de la Qüestió 4.

19) Utilitzen la propagació d'errors per aproximar les expressions següents:

(a) $\sqrt{2,01} = \sqrt{2+0,01}$

$$y = \sqrt{x}, \quad x=2, \quad \Delta x = 0,01$$

$$\begin{aligned}\Delta y &= y' \Delta x = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Delta x = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot 0,01 = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot 0,01\end{aligned}$$

$$\sqrt{2,01} = \sqrt{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{4} 0,01$$

(b) $\ln(1,03) = \ln(1+0,03)$

$$y = \ln(x), \quad x=1, \quad \Delta x = 0,03$$

$$\Delta y = \frac{1}{x} \Delta x = 1 \cdot \Delta x = 0,03$$

$$\ln(1,03) \approx \ln 1 \pm 0,03 \approx 0,03$$

(c) $e^{0,2} = e^{0+0,2}$

$$y = e^x, \quad x=0, \quad \Delta x = 0,2$$

$$\Delta y = e^x \Delta x = e^0 \Delta x = \Delta x = 0,2$$

$$e^{0,2} = 1 \pm 0,2$$

20) Una pizzeria elabora pizzes que haurien de tenir 20 cm de radi.

(a) Si es comet un error de 0'1 cm, quin és l'error resultant en la quantitat de pizza (àrea).

$$\begin{aligned} A &= \pi R^2 & \Delta A &= 2\pi R \cdot \Delta R = 2\pi R \cdot 0'1 \\ & & &= 2\pi \cdot 20 \cdot 0'1 = \\ & & &= 4\pi \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

b)

L'error relatiu o precisió

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{2\pi R \Delta R}{\pi R^2} = 2 \frac{\Delta R}{R}$$

$$\frac{\Delta A}{A} = 2 \cdot 3\% = 6\%$$

c) Si volem que $\frac{\Delta A}{A} \leq 4\%$, quin error ens podem permetre en el radi?

$$2 \cdot \frac{\Delta R}{R} \leq 4\% \quad , \quad \frac{\Delta R}{R} \leq 2\%$$

Per tant si $R = 20 \text{ cm}$, aleshores $\Delta R \leq \frac{2 \cdot 20 \text{ cm}}{100} = 0'4 \text{ cm}$.