

EXPONENCIALS, LOGARITMES, FUNCIONS TRIGONOMÈTRIQUES

1. Resoleu les equacions exponencials i logarítmiques següents:

- (a) $3^{1-x^2} = 1/27$ (b) $5^{x^2-5x+4} = 1/25$
(c) $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} = 7$ (d) $2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$
(e) $2 \log_{10} x - \log_{10}(x - 16) = 2$ (f) $(\ln(x - 1) + \ln(2x - 1)) \log_5 e = 1$

2. (a) Suposem que el PNB d'un país creix a un 4% anual. Quant de temps cal per duplicar-lo?
(b) Si el preu d'un producte creix a raó del 2% mensual, quina de les següents afirmacions és correcta? a) el preu s'incrementa en un 24% anual. b) el preu s'incrementa en un 26.8% anual.
(c) Una població creix a un 3% anual. En quin percentatge s'incrementa la població en 10 anys?

3. (*Interès compost*).

- (a) A quin tipus d'interès compost, aplicat mensualment, es duplica una quantitat en 10 anys? I si s'aplica anualment?
(b) Calculeu el capital inicial necessari per obtenir 500000€ després de 40 anys a un tipus d'interès anual del 6% aplicat mensualment.
(c) Calculeu el temps necessari per duplicar 1000€ a un tipus anual del 7% aplicat a) anualment, b) mensualment, c) diàriament, d) contínuament.

4. (*Desintegració radioactiva*). La desintegració dels elements radioactius segueix un model de decreixement exponencial: si $C(t)$ és la quantitat de substància radioactiva i t és el temps en anys, aleshores

$$C(t) = C_0 e^{-bt} \quad (*)$$

on C_0 és la quantitat inicial i $b > 0$ és una constant que depèn de la substància. El *període de semidesintegració* (també dit *semivida*) és el temps necessari per la desintegració de la meitat de la substància.

- (a) Comproveu que si una substància radioactiva es desintegra d'acord amb (*), aleshores el període de semidesintegració és $T = \frac{\ln 2}{b}$.
(b) Quin és el període de semidesintegració d'una substància si se sap que una tercera part es desintegra en 5 anys?
(c) Fa dos anys teníem 5 grams d'una substància radioactiva. Avui n'hi ha 4 grams. Quant en quedarà després de 3 anys?
(d) L'any passat n'hi havia 4 grams, d'una substància radioactiva. Avui n'hi ha 3 grams. Quant n'hi havia fa 10 anys?

- (e) El període de semidesintegració del radi-226 és de 1620 anys. Quin percentatge de radi quedarà després de 500 anys? Quant de temps trigarà la quantitat original en reduir-se un 75% ?
5. (Datació per C14). El mètode de detecció per C14 està basat en els fets següents. Fins que un organisme mor, la proporció entre la quantitat de C14 (radiactiu) i C12 es manté constant, aproximadament igual a 10^{-12} . Quan l'organisme mor, la quantitat de C12 no varia però el C14 es desintegra seguint un model de decreixement exponencial $C(t) = C_0 e^{-bt}$ on $b > 0$ i $C(t)$ denota la quantitat de C14 després de t anys a partir de la mort.
- (a) Determineu la constant b si se sap que la semivida del C14 és de 5700 anys.
- (b) Un estudi sobre restes animals ha donat que la proporció actual entre les quantitats de C14 i C12 a les restes és de $(0,15) 10^{-12}$. Quin percentatge de C14 s'ha desintegrat?
- (c) Quina és l'edat de les restes?
6. Demostreu, a partir de la identitat bàsica $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, les identitats següents:
- (a) $\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$ (b) $\sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$
7. Amb l'ajut del problema anterior, calculeu les expressions següents sense fer servir la calculadora:
- (a) $\tan(\arcsin(\frac{1}{2}))$ (b) $\sin(\arctan(\frac{3}{4}))$
- (c) $\cos(\arcsin(\frac{1}{2}))$ (d) $\tan(\arccos(\frac{\sqrt{2}}{2}))$
8. Resoldre les equacions trigonomètriques següents:
- (a) $\arctan(2x - 5) = \frac{\pi}{4}$ (b) $\arcsin(\sqrt{2x}) = \arccos(\sqrt{x})$
- (c) $\arcsin(\frac{x+1}{x+4}) = \frac{\pi}{6}$ (d) $\arctan(\sqrt{x}) = \frac{\pi}{3}$
9. Un quadre de 3m. d'alçada està penjat en la paret d'un museu, a 2 m. d'alçada sobre el terra. Expressau, amb l'ajut d'una funció trigonomètrica inversa, l'angle de visió del quadre per un observador de 170cm. d'alçada situat a una distància horitzontal de x m. del quadre.
10. S'ha comprovat que les temperatures diàries (en graus centígrads) en una determinada ciutat al llarg de l'any s'aproximen pel model trigonomètric següent:

$$f(t) = 15 + 20 \sin\left(\frac{2\pi}{365}(t - 101)\right)$$

on t és el temps en dies, comptat a partir del 1 de gener.

- (a) Feu un dibuix aproximat de la gràfica de $f(t)$.
- (b) Quin és el dia més calent i el més fred ? Quines són les temperatures màxima i mínima anuals?
- (c) Quina és la mitjana de les temperatures màxima i mínima?