TRUCS (CRITERIS) PER SABER SI UNA SÈRIE ÉS CONVERGENT...

Natàlia Castellana, 2021

Veurem alguns criteris per saber si una sèrie és convergent o divergent. El primer ja l'hem vist.

$\boxed{\text{CRITERI 1}}$: <u>condició necessària de convergència</u>

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeix aleshores $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

<u>Exemples</u>: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{1+n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\alpha}{n}\right)$

no són convergents ja que

$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{1+n^2} = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$ no existeix, i

$\lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{\alpha}{n}\right) = 1$.

<u>DEFINICIÓ</u> Una sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és de termes positius si $a_n \geq 0$ per tot $n \geq 1$.

Aleshores $\{S_n\}$ és una successió creixent. En aquest cas, $\lim_{n\to\infty} S_n$ és ∞ o L segons si S_n està acotada o no.

Si existeix M tal que $S_n \leq M$ per tot n aleshores la sèrie és convergent.

$S_n \leq 1$. $a_n = \frac{1}{2^n}$

$\boxed{\text{CRITERI 2}}$ <u>comparació per desigualtat</u>

Siguin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ amb $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ per $n \geq 1$

Suposem que $a_n \leq b_n$ a partir d'un $n \geq n_0$.

(1) Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ és convergent aleshores $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és convergent.

(2) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és divergent aleshores $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ és divergent

<u>Exemples</u>:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Tenim que $n^2 - n < n^2$ i per tant

$$a_n = \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n^2 - n} = b_n \quad (n \geq 2)$$

Recordem que $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n}$ és convergent aleshores

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ és convergent.}$$

i $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ també.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$, $2^n < n2^n$, $\frac{1}{n2^n} < \frac{1}{2^n}$

Com que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ és convergent, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$,
alshores $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ és convergent.

$\boxed{\text{CRITERI 3}}$ Comparació pel quocient

Siguin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ amb $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ per $n \geq 1$

Sigui $L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$

1. Si $0 < L < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergent sii $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergent
2. Si $L = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergent alshores $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergent
3. Si $L = \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergent alshores $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergent

EXEMPLES

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$, $k \geq 3$. Recordeu que hem estudiat ja els casos $k = 1, 2$.

$k=1$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent.

$k=2$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ convergent. Per $k \geq 3$, comparem amb $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$

Sigui $a_n = \frac{1}{n^k}$ $k \geq 3$, $b_n = \frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n^k}{1/n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^k} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{k-2}} = 0$$

Per tant $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergent implica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergent.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n^5+n^2+1}$, $a_n = \frac{2n+3}{n^5+n^2+1}$ i comparem amb $b_n = \frac{1}{n^4}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n+3}{n^5+n^2+1}}{\frac{1}{n^4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^5+3n^4}{n^5+n^2+1} = 2$$

Per tant $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n^5+n^2+1}$ convergent ja que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ho és.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+n}{n^3+3}$, $a_n = \frac{2n^2+n}{n^3+3}$ i comparem amb $b_n = \frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n^2+n}{n^3+3}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+n^2}{n^3+3} = 2$$

Aleshores com que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ és divergent tenim que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+n}{n^3+3}$ és divergent

$\boxed{\text{CRITERI 4}}$ Criteri del quocient

Sigui $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una sèrie amb $a_n > 0$. Sigui $L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

1. Si $L < 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergent i $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
2. Si $L > 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent
3. Si $L = 1$, no tenim informació.

EXEMPLES

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n!}$, $a_n = \frac{r^n}{n!}$, $r > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{r^{n+1}/(n+1)!}{r^n/n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{r^{n+1}\cdot n!}{r^n \cdot (n+1)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{r}{n+1} = 0 < 1$$

Per tant $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n!}$ és convergent per tot valor de $r > 0$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$, $a_n = \frac{n}{2^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\, 2^n}{n \cdot 2^{n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1 \quad \text{convergent.}$$

FINS ARA, hem estudiat series de termes positius. Què podem fer en general?

Per exemple, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2-50}$ no compleix que $a_n > 0$ per tot n, però $3n^2-50>0$ si n és prou gran.

$3n^2-50>0$ si $n \geq 5$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2-50} = \sum_{n=1}^{4} \frac{1}{3n^2-50} + \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{3n^2-50} \quad \text{però}$$

ara sabem que $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{3n^2-50}$ és convergent (comparem amb $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$) i per tant

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2-50}$ és convergent.

DEFINICIÓ Sigui $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una sèrie. Diem que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és absolutament convergent si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ és convergent.

La ventatja és que $|a_n| \geq 0$ i per tant, la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ és de termes positius i podem aplicar els criteris anteriors

TEOREMA: Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és absolutament convergent aleshores és convergent i

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

EXEMPLES:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ on $a \in \mathbb{R}$. Si $a_n = \frac{a^n}{n!}$, aleshores

$$|a_n| = \frac{|a|^n}{n!}$$

Hem vist que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a|^n}{n!}$ és convergent. Per tant, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ és absolutament convergent i per tant convergent.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ on $x \in \mathbb{R}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(nx)}{n^2} \right| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Aleshores, per comparació, com que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ és convergent tenim que

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ és absolutament convergent.

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^{3/2}}$ és absolutament convergent

ja que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n^{3/2}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ és convergent

($3/2 > 1$)

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \sin^3(nx)}{2^n}$ $\qquad a_n = \dfrac{n^2 \sin^3(nx)}{2^n}$

$x \in \mathbb{R}$

Aleshores $|a_n| = \left| \dfrac{n^2 \sin^3(nx)}{2^n} \right| < \left| \dfrac{n^2}{2^n} \right| = \dfrac{n^2}{2^n}$ i

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ és convergent (criteri de comparació del quocient

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2/2^{n+1}}{n^2/2^n} = $$

$$= \lim \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1 \Big)$$

Per tant $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ també.

$\boxed{\text{CRITERI 6}}$ Criteri de Leibniz

Sigui a_n una successió decreixent de números reals positius.

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ és convergent si i només si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

EXEMPLE Anem a estudiar $\sum_{1=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$.

Anem a veure què passa primer amb els criteri anterior

- És absolutament convergent? NO.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ és divergent}$$

- Ara bé, $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ és una successió decreixent

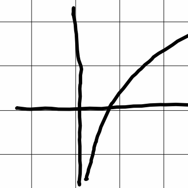
$$\frac{1}{n} > 0 \quad \text{i} \quad \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$

Pel criteri de Leibniz $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ és convergent ja que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

EXEMPLE

• $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$.

La funció $f(x)=\ln(x)$ és creixent 
aleshores

$$\ln(n) < \ln(n+1) \quad \text{i}$$

$$\frac{1}{\ln(n+1)} < \frac{1}{\ln(n)} \; ; \text{ per } n>1 \;\; \ln(n)>0$$

Així $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n)}$ és convergent perquè

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n)} = \frac{1}{\infty} = 0.$$