EL MODEL ALEXANDROFF PER COMPACTAR ESPAIS

Natàlia Castellana

No hi ha res com tenir un espai compacte Hausdorff a les mans. Tenen propietats molt bones com hem vist i ens fan la vida de topòleg més fàcil.

N'hi ha 'molts'? En podem construir? Per exemple, fixeu-vos que $\mathbb{R}$ no és compacte, però $\mathbb{R} \cong (0,1) \subset S^1$ i S^1 sí ho és. Només li falta un "punt"!

Recordeu també la projecció estereogràfica, $\mathbb{R}^n \cong S^n \setminus \{(0,\ldots,0,1)\} \subset S^n$ que és compacte.

Doncs, Alexandroff va descriure una construcció que converteix un espai Hausdorff en un subespai d'un compacte només afegint un punt.

<u>DEFINICIÓ</u>: Sigui X un espai topològic. Definim una topologia a $Y = X \cup \{\infty\}$ com

$$\tau = \{ U \subset Y \mid (U \subset X \text{ i } U \in \tau_X) \text{ ó } (\infty \in U \text{ i } \underbrace{Y \setminus U \subset X}_{\text{compacte}}) \}$$

La primera cosa que hem de comprovar és que τ és una topologia. En general no ho serà, caldrà assumir que X és Hausdorff.

<u>PROPOSICIÓ</u>: Si X és un espai topològic Hausdorff, τ és una topologia.

<u>Demostració</u>: Anem a comprovar les propietats.

(1) $\emptyset \subset X$, $\emptyset \in \tau_X$ per tant $\emptyset \in \tau$.

$$Y = X \cup \{\infty\}, \quad Y \setminus Y = \emptyset \subset X \text{ compacte.}$$

(2) Sigui $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ on $U_i \subset Y$, $U_i \in \tau$.

Hem de comprovar que $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$. Sigui $I_X \subset I$ el subconjunt d'índexs

$$I_X = \{ i \in I \mid U_i \subset X \}$$

Aleshores $\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I_X} U_i \cup \bigcup_{j \in I \setminus I_X} U_j$. Fixeu-vos que si $i \in I_X$ aleshores $U_i \subset X$ és obert.

Si $I = I_X$ aleshores $\bigcup_{i \in I} U_i \subset X$ és obert per ser unió d'oberts i tenim que sí, $\bigcup U_i \in \tau$.

Si $I \setminus I_X \neq \emptyset$ aleshores per cada $j \in I \setminus I_X$ tenim $\underset{\substack{\| \\ C_j}}{Y \setminus U_j} = X \setminus (U_j \setminus \{\infty\}) \subset X$ és compacte. Aleshores

$$\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I_X} U_i \cup \bigcup_{j \in I \setminus I_X} X \setminus C_j \cup \infty \quad \text{on}$$

$X \setminus C_j$ és obert ja que C_j compacte en X Hausdorff i per tant C_j és tancat.

Aleshores

$$Y \setminus \left(\bigcup_{i\in I} U_j\right) = \bigcap_{i\in I} Y\setminus U_i \subset \underset{\overset{\shortparallel}{C_j}}{Y\setminus U_j} \quad \text{on } j\in I\setminus I_x$$

$$\shortparallel$$

$$C_j \cap \left(\bigcap Y\setminus U_j\right)$$

on $\bigcap_{j\in I}(Y\setminus U_i)$ és tancat a C_j que és compacte i tancat

Per tant, $\bigcap_{i\in I} Y\setminus U_i = Y\setminus\left(\bigcup_{i\in I} U_i\right)$ és compacte i així $\bigcup_{i\in I} U_i$ és a τ.

(3) Falta comprovar que $U, V\in\tau$ aleshores $U\cap V\in\tau$.
Distingirem els tres posibles casos que es poden donar.

- Si $U, V\subset X$ són oberts a X, aleshores $U\cap V\subset X$ és obert i per tant $U\cap V\in\tau$.
- Si $U, V\subset Y$ amb $\infty\in U\cap V$, aleshores

$$Y\setminus U,\ Y\setminus V\subset X \text{ són compactes.}$$

Aleshores $Y\setminus(U\cap V) = (Y\setminus U)\cup(Y\setminus V)$ és compacte per ser unió finita de compactes. Aleshores

$$U\cap V\in\tau$$

- Si $U\subset X$ obert a X i $V\subset Y$ amb $Y\setminus V\subset X$ compacte, aleshores

$$U\cap V = U\cap(X\cap V) = U\cap(X\setminus C) \quad \text{on}$$

C compacte.

Així $X \setminus C$ és obert ja que $C \subset X$ compacte, i per tant tancat ja que X és Hausdorff. Per tant $U \cap V \in \tau$.

#

Hem vist on juga en paper important el fet que X és Hausdorff. En realitat hem fet servir que sota aquesta hipòtesis els compactes són tancats.

Y es diu la compactificació a un punt de X.

Ara fixeu-vos que $X \subset Y = X \cup \{\infty\}$ també té la topologia subespai. És la de X?

<u>PROPOSICIÓ</u> Sigui X un espai topològic Hausdorff i Y la seva compactificació a un punt. Alashores $X \subset Y$ amb la topologia subespai és homeomorf a X.

<u>Demostració</u>. Només cal comprovar amb la definició.

- Si $U \subset X$ obert a X, alashores $U \subset Y$ és obert i $U = U \cap X$.

Per tant, $id : (X, \text{subespai}) \longrightarrow (X, \tau_X)$ és contínua. I la inversa $(X, \tau_X) \xrightarrow{id} (X, \text{subespai})$

Si $U = V \cap X$ on V és un obert a τ, alashores tenim dues possibilitats: o bé $V \subset X$ obert a X o bé $Y \setminus V \subset X$ compacte, i per tant tancat ja que X és Hausdorff. En aquest darrer cas,

$\mathcal{U} = \mathcal{V} \cap X = (X \setminus C) \cap X$ on $Y \setminus \mathcal{V} = C$ compacte en X.
és un obert a X.

Per tant, (X, τ_X) i $X \subset Y$ subespai són homeomorfs!

#

I per fi ...

<u>TEOREMA</u> Sigui Y la compactificació a un punt d'un espai Hausdorff X.
Aleshores Y és compacte!

<u>Demostració</u> Sigui $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un recobriment per oberts de Y.

Considerem ara $\mathcal{U}_X = \{U_i \cap X\}_{i \in I}$. Fixeu-vos que per la proposició anterior és un recobriment per oberts de X.

Ara escollim $j \in I$ tal que $\infty \in U_j$. Per definició $Y \setminus U_j = C_j \subset X$ compacte. Per tant $\mathcal{U}_X$ és també un recobriment per oberts de C_j, i com que és compacte, existeixen $U_{i_1}, \ldots, U_{i_n} \in \mathcal{U}$ tals que

$$C \subset (U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_n}) \cap X$$

Per tant $Y = C_j \cup Y \setminus C_j = C_j \cup U_j =$

$$= U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_n} \cup U_j .$$

$\{U_{i_1}, \ldots, U_{i_n}, U_j\} \subset \mathcal{U}$ és un subrecobriment finit de $\mathcal{U}$.

#

Per exemple, la compactificació d'Alexandroff de $\mathbb{R}^n$ és S^n (ho sabries provar?)

Ara bé, no tot és tan bonic, encara que X sigui Hausdorff, Y no té perquè ser-ho!

Per poder "separar" $\infty \in Y$ d'un $x \in X$ cal que $x \in X$ estigui contingut en un compacte amb interior no buit ja que si $\infty \in \mathcal{U}$ aleshores $Y \setminus \mathcal{U}$ és un compacte que ha de contenir $x \in X$.

<u>TEOREMA</u> Sigui X un espai topològic Hausdorff tal que tot punt té un entorn compacte, aleshores la compactificació a un punt Y és Hausdorff.

<u>Demostració</u>: Siguin $x, y \in Y$ amb $x \neq y$. Distingim dues situacions. Si $x, y \in X$ aleshores com que X és Hausdorff existeixen oberts $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subset X$ amb $x \in \mathcal{U}$, $y \in \mathcal{V}$, $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$. Ara bé $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ també són obert a Y.

Suposem $y = \infty \in Y$. Com que $x \in X$, existeix un entorn compacte que el conté, és a dir, existeix $N \subset X$ compacte amb $x \in \mathcal{U} \subset N$ on $\mathcal{U}$ obert a X. Per tant si prenem $\mathcal{V} = Y \setminus N \subset Y$ és un obert a Y, $\mathcal{U} \subset X$ també és obert a Y i $x \in \mathcal{U}$, $\infty \in \mathcal{V}$ i $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$.

#