QUI ÉS QUI EN EL MÓN DE LES SUPERFÍCIES COMPACTES

Natàlia Castellana, 2021

TEOREMA DE CLASSIFICACIÓ

Sigui M una superfície compacta connexa, aleshores M és homeomorfa a una i només una de les següents:

$$S_g \,,\; g \geq 0 \quad \text{ó} \quad N_h \,,\; h > 0$$

on $S_g = S^2 \# \left(\#_g T\right)$ orientable de gènere g

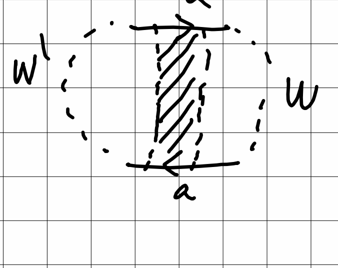
$N_h = \#_h \mathbb{RP}^2$ no-orientable de genere h

A la pràctica, com les distingim? què li hem de preguntar a una superfície?

① ETS ORIENTABLE? o el que és el mateix, conté una cinta de Moebius?

Una cinta de Moebius es dóna quan a la presentació poligonal tenim una situació

$a W a W'$



Un cop sabem si el que tenim al davant és S_g ó N_h, com ho fem saber el gènere.

2 LA CARACTERÍSTICA D'EULER D'UNA TRIANGULACIÓ

Sigui $M = \dot{\bigcup\limits_{i\in 1}^{n}} T_i$ on $\mathcal{T} = \{T_i\}$ és una triangulació alashores

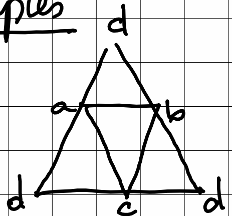
la característica d'Euler és

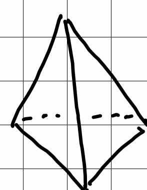
$$\chi_{\mathcal{T}} = \#\text{vèrtexs} - \#\text{arestes} + \#\text{cares}$$

(les cares són els triangles)

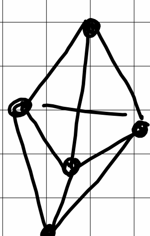
Exemples

(0)



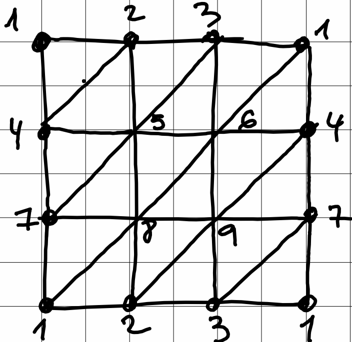


$\chi = 4 - 6 + 4 = 2$



$\chi = 5 - 9 + 6 = 2$

(1)



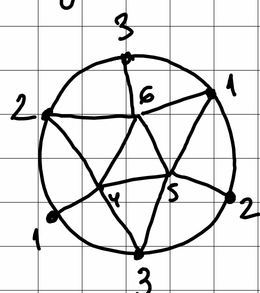
9 vertexs

18 triangles

27 arestes

Triangulació del tor $\chi = 9 - 27 + 18 = 0$

(2)



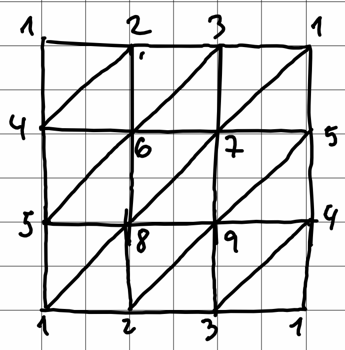
6 vèrtexs

10 triangles

15 arestes

Triangulació del pla projectiu $\chi = 6 - 15 + 10 = 1$

(3)



9 vèrtexs

18 triangles

27 arestes

Triangulació ampolla de Klein $\chi = 9 - 27 + 18 = 0$

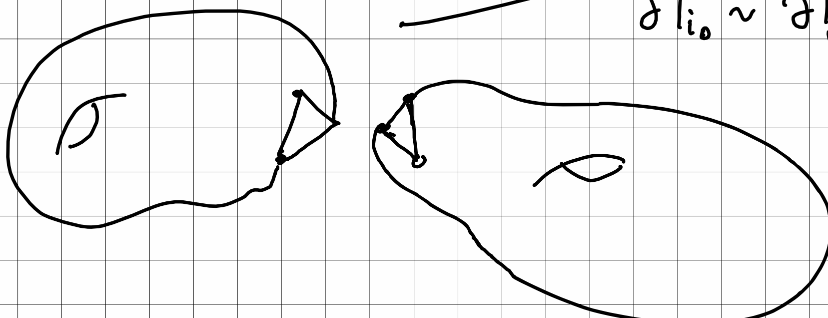
<u>Observació</u> K i T tenen una triangulació amb la mateixa χ.

Abans de seguir, anem a veure com es comporta la característica d'Euler quan fem una suma connexa donades dues triangulacions.

Sigui $\mathcal{T} = \{T_i\}$ una triangulació de M,
i $\mathcal{T}' = \{T_i'\}$ una triangulació de N,

alashores fixem triangles T_{i_0} i T_{j_0}', els buidem i enganxem

$$M \# N \cong \frac{M \setminus \mathrm{Int}(T_{i_0}) \sqcup N \setminus \mathrm{Int}(T_{j_0}')}{\partial T_{i_0} \sim \partial T_{j_0}'}$$



$M \setminus \mathrm{Int}(T_{i_0})$ té només una cara menys però manté vèrtexs i arestes.
El mateix per $N \setminus \mathrm{Int}(T_{j_0}')$. Però al fer el quocient identifiquem parelles de vèrtexs i arestes (de 6 passem a tres en total)

$$\chi(M \# N) = \chi(M) + \chi(N) - 2$$

$$= (\text{vertexs} - 3) - (\text{arestes} - 3) + (\text{cares} - 2)$$

Així,

$S_g = S^2 \# (\#_g T)$ admet una triangulació amb característica d'Euler

$$\chi(S_g) = 2-2g$$

- $g=0$ $\chi(S^2)=2$

$g=1$ $\chi(S^2\# T) = \chi(T) = 0$

Suposem $\chi(S_{g-1}) = 2-2(g-1) = 4-2g$, alashores

$$\chi(S_g) = \chi(S_{g-1}\# T) = (4-2g)+0-2 = 2-2g$$

$N_h = \#_h \mathbb{RP}^2$ admet una triangulació amb característica d'Euler

$$\chi(N_h) = 2-h$$

- $h=1$ $\chi(\mathbb{RP}^2) = 1$

Suposem $\chi(N_{h-1}) = 2-(h-1) = 3-h$, alashores

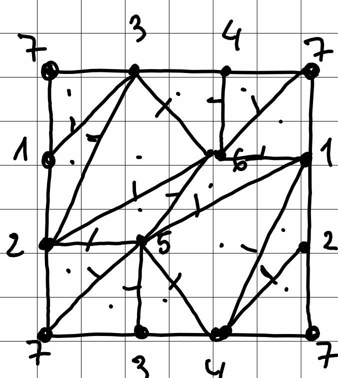
$$\chi(N_h) = \chi(N_{h-1}\# \mathbb{RP}^2) = (3-h)+1-2 =$$
$$= 2-h$$

Ara bé resulta que la característica d'Euler és un invariant topològic! No depen de la triangulació.

<u>TEOREMA</u> La característica d'Euler és un invariant topològic. És a dir, si $M \cong N$ aleshores $\chi(M) = \chi(N)$

<u>ATENCIÓ</u>: Això és topologia algebraica! Hem definit un invariant algebraic, de fet, un enter, respecte homeomorfismes.

Per exemple, provem amb una altra triangulació del tor!



vèrtexs 7

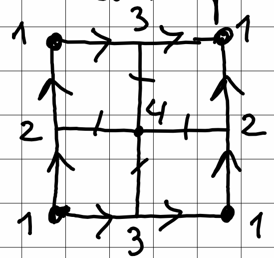
arestes 21

cares 14

$\chi = 7 - 21 + 14 = 0$

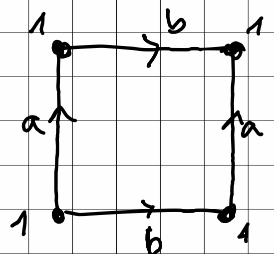
A la pràctica, podem calcular la característica d'Euler a partir de la presentació poligonal?
Sí

La característica d'Euler es pot definir per qualsevol divisió de la superfície en regions encara que no siguin triangles.



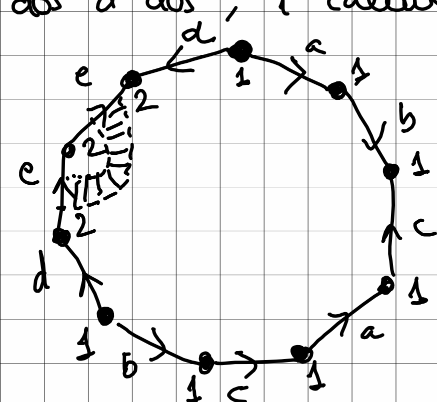
$\chi = 4 - 8 + 4 = 0$

Per exemple directament de presentació poligonal



$\chi = 1 - 2 + 1 = 0$

Escriure un polígon amb els costats identificats dos a dos, i calcula la característica d'Euler

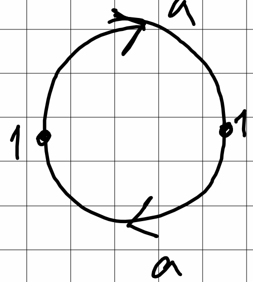


$a b c^{-1} a^{-1} c^{-1} b^{-1} d e e d^{-1}$

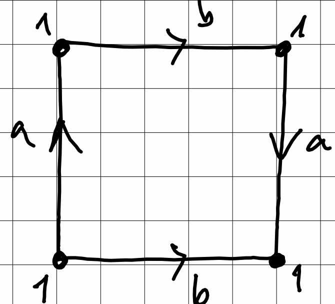
vèrtexs 2 (mirem com s'identifiquen)
arestes 5
cares 1

$\chi = 2 - 5 + 1 = -2$

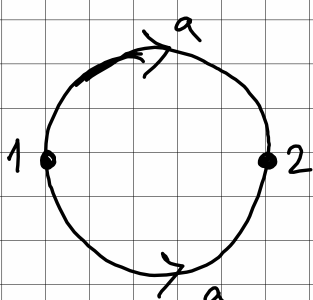
- NO ORIENTABLE
- $\chi = -2$ és N_4! $\#_4 \mathbb{RP}^2$



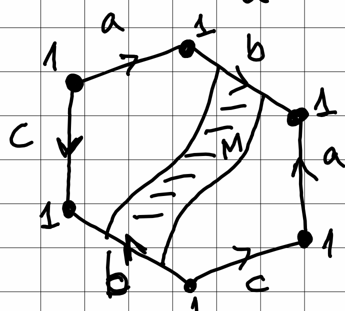
$\chi(\mathbb{R}P^2) = 1 - 1 + 1 = 1$



$\chi(K) = 1 - 2 + 1 = 0$



$\chi(S^2) = 2 - 1 + 1 = 2$



$\chi = 1 - 3 + 1 = -1$

$a b a^{-1} c^{-1} b c^{-1}$

Fixeu-vos que no és orientable ja que conté una cinta de Moebius i $\chi = -1$, qui és?

$2 - h = -1, \; h = 3$

És $N_3 = \#_3 \mathbb{R}P^2$

TEOREMA: Dues superfícies compactes connexes són homeomorfes si i només si tenen la mateixa orientabilitat i característica d'Euler.

QUI ÉS QUI?

ORIENTABLE?

SÍ

$\chi = ?$

$$g = \frac{2-\chi}{2}$$

Ets S_g

NO

$\chi = ?$

$$h = 2-\chi$$

Ets N_h

- La orientabilitat es veu de la presentació poligonal amb la presència o no d'arestes identificades en la mateixa direcció

- La característica d'Euler també es calcula amb la presentació poligonal.

I EN ALTRES DIMENSIONS?

$n=0$, alshores tota 0-varietat és una unió numerable de punts amb la topologia discreta.

$n=1$, tota corba compacta connexa és homeomorfa a S^1 (veure apunts Aquadé)

$n=3$, no hi ha una classificació però les tres varietats es coneixen "molt bé." (NOM CLAU: THURSTON)

$n=4$, fins i tot considerant només les triangulables, Markov va provar la no existència de cap algorisme per la seva classificació