COM IDENTIFICAR UN SUBCONJUNT COMPACTE DE $\mathbb{R}^n$ –

– EL MÈTODE HEINE-BOREL DE LES DUES PREGUNTES.

Natàlia Castellana

En aquest capítol us explicarem el mètode Heine-Borel per saber si un subconjunt de $\mathbb{R}^n$ és compacte:

- només cal fer-li dues preguntes (ets tancat? ets fitat?)

TEOREMA (Heine-Borel-Lebesgue) Sigui $\mathbb{R}^n$ amb la topologia mètrica usual.

$A \subset \mathbb{R}^n$ compacte sii A tancat i fitat.

Una mica d'història... en la forma actual el teorema es deu a E. Borel (1895) en que estudiava propietats de recobriments de subconjunts a $\mathbb{R}$ (concretament l'interval), utilitzant tècniques de E. Heine i Weierstrass. En realitat va estudiar el cas de $\mathbb{R}$, i la noció de compacte com l'hem definit encara no es coneixia formalment. El cas de $\mathbb{R}^n$ es coneix a vegades com Borel-Lebesgue.

Comencem doncs amb el clàssic a $\mathbb{R}$

Teorema (Heine-Borel 1895) Sigui $a \lneq b \in \mathbb{R}$,

$[a,b] \subset \mathbb{R}$ és compacte.

<u>Demostració:</u> Sigui $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un recobriment per oberts de $[a,b] \subset \mathbb{R}$. És a dir

$$[a,b] \subset \bigcup_{i\in I} U_i \quad , \quad U_i \subset \mathbb{R} \text{ obert per tot } i\in I.$$

Provarem que $[a,b]$ és compacte per contradicció. És a dir, suposem que $\mathcal{U}$ no admet cap subrecobriment finit.

Fixeu-vos $[a,b] = [a, \frac{a+b}{2}] \cup [\frac{a+b}{2}, b] \subset \bigcup_{i\in I} U_i$. Per tant $\mathcal{U}$ també és un recobriment de les dues meitats $[a, \frac{a+b}{2}]$, $[\frac{a+b}{2}, b]$. I almenys un dels dos subintervals no admet un subrecobriment finit (sinó podríem obtenir-ne un per $[a,b]$).

Sigui $[a_1, b_1]$ un dels dos, $[a, \frac{a+b}{2}]$ ó $[\frac{a+b}{2}, b]$, que no admet un subrecobriment finit.

Altre cop podem procedir igual i si prenem la unió $[a_1,b_1] = [a_1, \frac{a_1+b_1}{2}] \cup [\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$, recobert per $\mathcal{U}$, i sabent que no admet un subrecobriment finit de $[a_1,b_1]$, podem escollir-ne un, $[a_2,b_2]$ tal que $\mathcal{U}$ no admet cap subrecobriment finit de $[a_2,b_2]$.

Repetint el procés, obtenim una successió d'intervals encaixats $\{[a_n,b_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$\cdots \subset [a_n,b_n] \subset [a_{n-1},b_{n-1}] \subset \cdots \subset [a,b]$$

amb les següents propietats:

Per cada $n \in \mathbb{N}$,

(1) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$

(2) $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$

(3) $[a_n, b_n] \subset \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$ és un recobriment per oberts que no admet cap subrecobriment finit.

Fixeu-vos que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ és un successió creixent dins $[a,b]$ alshores té suprem. I $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ és decreixent i tindrà ínfim.

$$\alpha = \sup(a_n \mid n \in \mathbb{N}) \qquad \beta = \inf(b_n \mid n \in \mathbb{N})$$

Alshores $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] = [\alpha, \beta]$. Fixeu-vos que $\alpha \geq a_n$ per tot $n \in \mathbb{N}$ i $\beta \leq b_n$ per tot $n \in \mathbb{N}$ alshores $[\alpha, \beta] \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$. Però també, si $r \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$ alshores $r \geq a_n$ per tot $n \in \mathbb{N}$ i $r \leq b_n$ per tot $n \in \mathbb{N}$ i per tant, $r \geq \alpha$ i $r \leq \beta$. Així $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] \subset [\alpha, \beta]$.

Ara, sigui $x \in [\alpha, \beta] \subset [a,b]$. Existeix $i_0 \in I$ tal que $x \in \mathcal{U}_{i_0}$. Com que $\mathcal{U}_{i_0}$ és obert, tenim un $\varepsilon > 0$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset \mathcal{U}_{i_0}$.

Ara, si considerem un $N > 0$ tal que $\frac{b-a}{2^N} < \varepsilon$ tenim que $x \in [a_N, b_N] \subset (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset \mathcal{U}_{i_0}$

Però això no podria ser ja que aleshores recobrim $[a_N, b_N] \subset U_{i_0}$ amb un sol obert del recobriment !!! CONTRADICCIÓ

#

Això, i les propietats dels compactes és tot el que ens cal per caracteritzar els subconjunts compactes de $\mathbb{R}^n$

TEOREMA (Heine-Borel-Lebesgue) i potser Weierstrass, Bolzano, ...

$\mathbb{R}^n$ amb la topologia induïda per la mètrica usual.

$A \subset \mathbb{R}^n$ compacte sii A és tancat i fitat

Demostració

Suposem $A \subset \mathbb{R}^n$ compacte. Com que $\mathbb{R}^n$ és Hausdorff A també és tancat. Cal veure que és fitat. Prenem el següent recobriment per oberts de $\mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{U} = \{ \underset{\substack{\| \\ U_n}}{B(0,n)} \mid n \in \mathbb{N} \}$$

Aleshores $\mathcal{U}$ és també un recobriment d'A,

$$A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n .$$

Com que A és compacte, existeix un subrecobriment finit

$$A \subset \mathcal{U}_{n_1} \cup \dots \cup \mathcal{U}_{n_k} = \mathcal{U}_{\max\{n_i \mid i=1,\dots,k\}}$$

ja que $\mathcal{U}_n \subset \mathcal{U}_{n+1} \subset \dots$ Així

$$A \subset B(0, \max\{n_i \mid i=1,..k\})$$ i

per tant A és fitat.

Ara suposem que A és tancat i fitat, cal veure que és compacte. Com que A és fitat, existeix $R>0$ tal que

$$A \subset B(0,R) \subset [R,R]^n.$$

Ara bé, pel teorema vist de Heine-Borel, l'interval $[-R,R]$ és compacte. Ara, com que el producte de compactes és compacte, també és cert que

$$[-R,R]^n \text{ és compacte i tancat.}$$

Així $A \subset [-R,R]^n$ és doncs un subconjunt tancat dins un compacte, i per tant, per la propietat 2 del mantra, és compacte.

#

Observació important: aquests són teoremes sobre la topologia usual induïda per la mètrica usual

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i-y_i)^2}$$

ja que el concepte 'fitat' està estretament lligat a la mètrica. No és un concepte topològic.

Per exemple, si prenem $d'(x,y) = \max\{d(x,y), 1\}$, sabem que indueixen la mateixa topologia però els conjunts fitats són molt diferents., a d', $\mathbb{R}^n$ és fitat.

En un espai mètric, podem definir fitat com: $A \subset X$ fitat si existeix $m > 0$ tal que $d(x,y) \leq m$ per tot $x, y \in A$.

Fins a quin punt doncs funciona en espais mètrics?
(X, d) espai mètric

(1) $A \subset X$ compacte, aleshores és tancat i fitat (la mateixa demostració funciona)

(2) Però $A \subset X$ tancat i fitat no implica que A sigui compacte. Per exemple, $(\mathbb{R}, \text{disc})$ amb la mètrica discreta compleix que $d(x,y) \leq 1$ per tot $x, y \in \mathbb{R}$ però no és compacte ja que $\mathbb{R}$ no és finit.

Ara ja sabem que les esferes $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ són compactes. I per exemple $S^n \not\cong \mathbb{R}^n$ ja que S^n és compacte i $\mathbb{R}^n$ no.

Exemple Sigui T el tor, és compacte perquè

(1) $T \subset \mathbb{R}^3$ és tancat i acotat

(2) $T \cong S^1 \times S^1$ és producte de compactes

(3) $[0,1]^2 \twoheadrightarrow T$ és quocient d'un espai topològic compacte.

Pregunta És $\mathbb{R}_e$ compacte?

I ara .... taxan! el Teorema de Weirstrass!

Teorema Sigui X un espai topològic compacte. i $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicació contínua.

Aleshores f pren un valor màxim i un valor mínim, i.e., existeixen $a, b \in X$ tals que $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ per tot $x \in X$.

La demostració és una aplicació del mantra i Heine-Borel, només ens cal un petit lemma.

Lemma $A \subset \mathbb{R}$ compacte. Existeixen $m, M \in A$ tals que $m \leq a \leq M$ per tot $a \in A$.

Demostració: Sabem que A és tancat i fitat. Siguin $M = \sup(A)$ i $m = \inf(A)$.

Volem veure que $M \in A$ (ja que si $M = \sup(A)$ aleshores $a \leq M$ per tot $a \in A$). Suposem $M \notin A$, aleshores com que A és tancat, $\mathbb{R} \setminus A$ és obert i per tant existeix $\varepsilon > 0$ tal que $(M-\varepsilon, M+\varepsilon) \subset \mathbb{R} \setminus A$. Així $(M-\varepsilon, M+\varepsilon) \cap A = \emptyset$. Però aleshores M no seria la més petita de les cotes superior de A!!

Una demostració idèntica es fa per provar que $m = \inf(A) \in A$.

#

Anem a demostrar el teorema de Weierstrass per espais compactes.

Demostració: Si X és compacte i f contínua, sabem que $f(X) \subset \mathbb{R}$ és compacte. Pel lemma anterior existeixen $m, M \in f(X)$ tals que

$$m \leq f(x) \leq M \quad \text{per tot } x \in X.$$

Així existeixen $a \in X$, $b \in X$ amb $m = f(a)$ i $M = f(b)$.

#

L'ESSÈNCIA DEL TEOREMA DE WEIRSTRASS A CÀLCUL ÉS LA COMPACITAT DE L'INTERVAL $[a,b]$.

Per exemple, el pla projectiu, l'ampolla de Klein o el tor són compactes! Aleshores qualsevol funció contínua als reals tindrà un màxim i un mínim.

Si tenim un pla projectiu al forn hi haurà punts que assoliran la temperatura màxima i mínima.