Topologia. Primera Prova Parcial. **Dijous, 31 d'octubre 2019.**
De 9 a 12, aules C5/243 i C5/239.

Responeu amb claredat d'exposició les següents questions. Totes les respostes han de ser degudament justificades.

1. [3 punts] Donats $a, b, c \in \mathbb{R}$, definim el següent subconjunt de $\mathbb{R}^2$

$$I_{a,b,c} = \{(c, y) \in \mathbb{R}^2 | a < y < b\}$$

i considerem la família de subconjunts $\mathcal{B} = \{I_{a,b,c} \subset \mathbb{R}^2 | a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

(a) [0.5 punt] Defineix el concepte de base d'una topologia. Demostra que existeix una única topologia τ a $\mathbb{R}^2$ tal que és la menys fina per la qual $\mathcal{B}$ n'és una base.

(b) [0.5 punt] Siguin $a_n = (\frac{1}{n}, 0)$ i $b_n = (0, \frac{1}{n})$ dues sucessions de punts a $\mathbb{R}^2$. Decideix si tenen límit o no amb la topologia τ, i calcula tots els possibles punts límit en cas de tenir-ne.

(c) [1 punt] Denotem per $X = \mathbb{R}^2$ amb la topologia τ. Considera les aplicacions $id_1 \colon X \to \mathbb{R}^2$ i $id_2 \colon \mathbb{R}^2 \to X$ que són la identitat com a conjunts, on $\mathbb{R}^2$ té la topologia mètrica usual. Són contínues? Són tancades? Són obertes?

(d) [1 punt] Prova que l'espai topològic X és homeomorf a l'espai topològic producte $\mathbb{R}_d \times \mathbb{R}$.

Solució:

(a) Sigui (X, τ) un espai topològic. Una família d'oberts $\mathcal{B} \subset \tau$ és una base per la topologia τ si per tot obert $U \subset X$ i $x \in U$ existeix un obert $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset U$.

La topologia τ menys fina que conté $\mathcal{B}$ és la topologia generada per $\mathcal{B}$ on els oberts es defineixen com els subconjunts que són unions (arbritaries) d'elements de $\mathcal{B}$. Si provem que amb aquesta definició τ és una topologia, aleshores serà la menys fina per la qual els subconjunts de $\mathcal{B}$ són oberts. Per a que sigui una topologia només cal comprovar dues propietats que ha de complir la família $\mathcal{B}$.

- Primer comprovem que $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$. Fixem-nos que

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} I_{y-1,y+1,x}$$

ja que $(x, y) \in I_{y-1,y+1,x}$.

- Cal comprovar que donats $I_1 = I_{a_1,b_1,c_1}$ i $I_2 = I_{a_2,b_2,c_2}$ elements de $\mathcal{B}$, i $(x, y) \in I_1 \cap I_2$, existeix $I_{a,b,c} \in \mathcal{B}$ tal que $(x, y) \in I_{a,b,c} \subset I_1 \cap I_2$.
Si $c_1 \neq c_2$ aleshores $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ i la propietat es compleix.
Si $c_1 = c_2 = c$ aleshores $I_1 \cap I_2 = \{c\} \times ((b_1, c_1) \cap (b_2, c_2))$. Si $(b_1, c_1) \cap (b_2, c_2) = \emptyset$ aleshores $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ i la propietat es compleix. Si $(b_1, c_1) \cap (b_2, c_2) \neq \emptyset$ i $(c, y) \in I_1 \cap I_2$, aleshores $y \in (b_1, c_1) \cap (b_2, c_2)$ és un obert a $\mathcal{R}$ amb la topologia mètrica usual. Per tant existeix $\epsilon > 0$ tal que $(y - \epsilon, y + \epsilon) \subset (b_1, c_1) \cap (b_2, c_2)$ i aleshores es compleix $(c, y) \in I_{(y-\epsilon,y+\epsilon,c)} \subset I_1 \cap I_2$.

(b) Comencem fent les següents observacions:

- X és un espai topològic Hausdorff: siguin (x_1, y_1) i (x_2, y_2) dos punts diferents a X. Si $x_1 \neq x_2$ aleshores prenem oberts $(x_1, y_1) \in I_{y_1-1,y_1+1,x_1}$ i $(x_2, y_2) \in I_{y_2-1,y_2+1,x_2}$ amb intersecció buida. Si $x_1 = x_2$ aleshores $y_1 \neq y_2$. Considerem $\epsilon < \frac{|y_1-y_2|}{3}$ i oberts $(x_1, y_1) \in I_{y_1-\epsilon,y_1+\epsilon,x_1}$ i $(x_2, y_2) \in I_{y_2-\epsilon,y_2+\epsilon,x_2}$ amb intersecció buida. Per tant, sabem que si una successió té límit aquest serà únic.
- El subespai $\mathbb{R} \cong \mathbb{R} \times \{0\} \subset X$ té la topologia discreta. Només cal veure que els punts són oberts: $\{(x, 0)\} = I_{-1,1,x} \cap (\mathbb{R} \times \{0\})$ és obert a la topologia subespai.
- El subespai $\mathbb{R} \cong \{0\} \times \mathbb{R} \subset X$ té la topologia mètrica usual. Obervem que està generada per la intersecció de la base, $\{0\} \times (a, b) = I_{a,b,0} \cap (\{0\} \times \mathbb{R})$.
- El subconjunt $\mathbb{R} \times \{0\} \subset X$ és tancat ja que el seu complementari és obert: si $(x, y) \in X$ amb $y \neq 0$, existeix $\epsilon > 0$ tal que $(x, y) \in I_{y-\epsilon,y+\epsilon,x}$ i $I_{y-\epsilon,y+\epsilon,x} \cap (\mathbb{R} \times \{0\}) = \emptyset$.
- El subconjunt $\{0\} \times \mathbb{R} \subset X$ és obert i tancat alhora: és obert perquè $\{0\} \times \mathbb{R} = \bigcup_{y\in\mathbb{R}} I_{y-1,y+1,0}$ i tancat ja que el seu complementari és obert,

$$X \setminus (\{0\} \times \mathbb{R}) = \bigcup_{x\neq 0, y\in\mathbb{R}} I_{y-1,y+1,x}.$$

Si la sucessió $\{a_n\} \subset \mathbb{R} \times \{0\}$ té límit l aleshores aquest ha de pertànyer a la clausura $\mathbb{R} \times \{0\}$ que sabem que és tancat. Però donat donat qualsevol $(x, 0) \in X$ existeix $\epsilon > 0$ tal que $I_{y-\epsilon,y+\epsilon,x}$ no conté elements de $\{a_n\}$ o només (x, y) si $x = a_n$ per algun n i $y = 0$ (recordeu que el subespai $\mathbb{R} \cong \mathbb{R} \times \{0\} \subset X$ té la topologia discreta). També podeu pensar que si $y > 0$, aleshores podem trobar ϵ tal que $\{x\} \times (y - \epsilon, y + \epsilon)$ no conté punts de l'eix $y = 0$. Si $y = 0$, aleshores els elements de la base $I_{x,y-\epsilon,y+\epsilon}$ només talla l'eix horitzontal en $(x, 0)$.

La sucessió $\{b_n\}$ té límit $(0, 0)$ ja que per tot $\epsilon > 0$, $I_{-\epsilon,+\epsilon,0}$ conté els termes b_n per $n > 1/\epsilon$. Aquest límit és únic ja que que qualsevol altre punt d'X es pot separar de la succesió (o pel fet que X és Hausdorff). També podem observar si l és límit de la successió $\{b_n\}$ aleshores com que $\{b_n\} \subset \{0\} \times \mathbb{R}$ i $\{0\} \times \mathbb{R}$ és tancat, aleshores $l \in \{0\} \times \mathbb{R}$ i El subespai $\mathbb{R} \cong \{0\} \times \mathbb{R} \subset X$ té la topologia mètrica usual.

(c) Considerem les aplicacions $id_1 : X \to \mathbb{R}^2$ i $id_2 : \mathbb{R}^2 \to X$ que són la identitat com a conjunts, on $\mathbb{R}^2$ té la topologia mètrica usual.

Els subconjunts $I_{a,b,c}$ són oberts a X però no a $\mathbb{R}^2$ amb la topologia usual, per tant, id_2 no és contínua però id_1 sí que ho és ja que si $(z, t) \in B((x, y), \epsilon)$ oberta aleshores existeix $\delta > 0$ amb $I_{t-\delta,t+\delta,z} \subset B((z, t), \delta) \subset B((x, y), \epsilon)$, així $B((x, y), \epsilon)$ també és obert a X.

Fixeu-vos que les dues aplicacions són inverses l'una de l'altra. Així id_2 és oberta i tancada, i id_1 no és oberta. A més id_1 no és un homemorfisme i aleshores si id_1 fos tancada aleshores seria un homemorfisme.

	cont.	*oberta*	*tancada*
id_1	*si*	*no*	*no*
id_2	*no*	*si*	*si*

(d) Donades bases $\mathcal{A}$ i $\mathcal{D}$ per les topologies $\mathbb{R}_d$ i $\mathbb{R}$, una base per la topologia producte s'obté $\mathcal{B}' = \{A \times B | A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{D}\}$. La topologia producte és aleshores la topologia generada per $\mathcal{B}'$.

Només hi ha una possible base per la topologia discreta $\mathcal{A} = \{\{c\} | c \in \mathbb{R}\}$ i per la topolgia usual prenem els intervals $\mathcal{D} = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{R}\}$. Així doncs $I_{a,b,c}$ és un producte d'oberts de les bases descrites i $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ és una base per la topologia producte.

2. [4.5 punts] Sigui X un espai topològic i $K \subset X$ un subconjunt. Diem que $x \in X$ és un punt exterior a K si existeix un entorn $N \subset X$ que conté el punt x tal que $N \cap K = \emptyset$. Definim $\mathrm{Ext}_X(K) \subset X$ com el subconjunt de punts exteriors.

   (a) [0.5 punt] Prova que $K \subset X$ és dens si i només si $\mathrm{Ext}_X(K) = \emptyset$.

   (b) [1 punt] Prova la següent igualtat: $\partial K = X \setminus (\mathrm{Int}_X(K) \cup \mathrm{Ext}_X(K))$.

   (c) [1 punt] Sigui $f \colon X \to Y$ una aplicació contínua. Demostra que es compleix la següent inclusió $f^{-1}(\mathrm{Ext}_Y(K)) \subset \mathrm{Ext}_X(f^{-1}(K))$.

   (d) [1 punt] Sigui $A \subset X$ amb la topologia subespai. Prova que si $K \subset X$ aleshores es compleix la inclusió $\mathrm{Ext}_X(K) \cap A \subset \mathrm{Ext}_A(K \cap A)$.

   (e) [1 punt] Siguin X i Y espais topològics, i $A \subset X$, $B \subset Y$. Demostra la següent igualtat de subconjunts: $\mathrm{Ext}_{X\times Y}(A \times B) = (\mathrm{Ext}_X(A) \times Y) \cup (X \times \mathrm{Ext}_Y(B))$.

Solució: Fixeu-vos que $x \in X$ és exterior a K si i només si $x \in \mathrm{Int}(X \setminus K) = X \setminus \mathrm{Cl}(K)$. Així

$$\mathrm{Ext}_X(K) = \mathrm{Int}(X \setminus K) = X \setminus \mathrm{Cl}(K).$$

(a) Recordeu que K és dens si i només si $\mathrm{Cl}(K) = X$.

Si K és dens aleshores tot entorn $N \subset X$ satisfà que $N \cap K \neq \emptyset$, i així no hi ha punts exteriors, $\mathrm{Ext}_X(K) = \emptyset$. D'altra banda, si $\mathrm{Ext}_X(K) = \emptyset$ aleshores tots els entorns tallen K i per tant K és dens.

Fixeu-vos que $\mathrm{Ext}_X(K) = X \setminus \mathrm{Cl}(K) = \emptyset$ si i només si $\mathrm{Cl}(K) = X$.

(b) Recordeu que $\partial K = \mathrm{Cl}(K) \cap \mathrm{Cl}(X \setminus K)$. $x \in \partial K$ sii tot entorn que conté x talla K i el seu complementari $X \setminus K$ sii x no pertany ni a $\mathrm{Int}(K)$ ni $\mathrm{Int}(X \setminus K) = \mathrm{Ext}_X(K)$ sii $x \in X \setminus (\mathrm{Int}(K) \cup \mathrm{Ext}(K))$.

(c) Si $y \in \mathrm{Ext}_Y(K)$, aleshores exiteix un entorn N i un obert amb $y \in U \subset N \subset Y \setminus K$. Si f és contínua aleshores $f^{-1}(U)$ és obert. Si $x \in f^{-1}(y)$ aleshores $x \in f^{-1}(U) \subset f^{-1}(N)$ on $f^{-1}(N)$ és un entorn de x amb $f^{-1}(N) \cap f^{-1}(K) = \emptyset$. Per tant $x \in \mathrm{Ext}(f^{-1}(K))$.

(d) Sigui $x \in \mathrm{Ext}_X(K) \cap A$, aleshores existeix un entorn N d'$x \in A$ tal que $N \cap K = \emptyset$, aleshores també $(N \cap A) \cap K = \emptyset$. Per tant a la topologia subespai $N \cap A$ és un entorn de $x \in A$ quer no conté punts de K i per tant $x \in \mathrm{Ext}_A(K \cap A)$.

(e) Recordeu que $\mathrm{Cl}(A \times B) = \mathrm{Cl}(A) \times \mathrm{Cl}(B)$. Aleshores podem descriure el conjunt de punts exteriors $\mathrm{Ext}_{X\times Y}(A\times B) = (X\times Y)\setminus(\mathrm{Cl}(A)\times \mathrm{Cl}(B)) = ((X\setminus \mathrm{Cl}(A))\times Y)\cup(X\times(Y\setminus \mathrm{Cl}(B))) = (\mathrm{Ext}_X(A) \times Y) \cup (X \times \mathrm{Ext}_Y(B))$.

3. [2.5 punts] Direm que $f \colon X \to Y$ és una immersió topològica si és contínua, injectiva i la restricció a la imatge $X \to f(X)$ és un homemorfisme on $f(X) \subset Y$ té la topologia de subespai.

   (a) [1 punt] Donada una aplicació contínua $f \colon X \to Y$ prova que si existeix $g \colon Y \to X$ contínua tal que $g \circ f = id_X$ aleshores f és una immersió topològica.

   (b) [0.5 punt] Sigui $U \subset \mathbb{R}^n$ obert i $f \colon U \to \mathbb{R}^k$ una aplicació contínua, aleshores considerem l'aplicació graf $\Theta_f \colon U \to \mathbb{R}^{n+k}$ donada per $\Theta_f(x) = (x, f(x))$. Comprova que Θ_f és una immersió topològica.

   (c) [1 punt] Demostra que $f \colon [0,1) \to \mathbb{R}^2$ definida per $f(t) = e^{2\pi i t}$ no és una immersió topològica.

Solució:

(a) Si existeix una inversa per l'esquerra de f aleshores f és injectiva: si $f(x) = f(y)$ aleshores $g(f(x)) = g(f(y))$ i com que $g \circ f = id$ tenim que $x = y$. Aleshores la restricció a la imatge $f' \colon X \to f(X)$ és una bijecció (és exhaustiva per definició de $f(X)$).

Així prenem $g' \colon f(X) \subset Y \to X$ tenim que és la inversa de $f' \colon X \to f(X)$. Observem que f' és contínua per la propietat universal de la topologia subespai: f' és contínua sii f ho és. I també g' és contínua ja que és compisició de dues aplicacions contínues, la inclusió d'un subespai i l'aplicació g. Per tant f' és un homeomorfisme i f és un homemorfisme a la seva imatge i per tant una immersió topològica.

(b) Primer observem que Θ_f és injectiva: si $\Theta_f(x) = \Theta_f(y)$ aleshores $(x, f(x)) = (y, f(y))$, i per tant $x = y$. Així la restricció a la imatge $\Theta'_f \colon U \to \Theta_f(U)$ és bijectiva. A més, és contínua per la propietat universal de la topologia subespai: Θ'_f és contínua sii Θ_f ho és.

La inversa ve donada per la composició $\Theta_f(U) \subset \mathbb{R}^{n+k} \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^n$ on π és la projecció a les primeres n coordenades i és contínua per les propietats de la topologia producte. Com que la inclusió d'un subespai també és ua aplicació contínua, aleshores la inversa és contínua per ser composició d'aplicacions contínues.

Per tant Θ_f és una immersió topològica.

(c) La imatge de f és S^1 i f és contínua i injectiva. Veure apunts de classe del dia 16 d'octubre, exemple 6, penjats al Campus Virtual per provar que $f \colon [0, 1) \to S^1$ no és oberta.