Què és un compacte metric-free !

Natàlia Castellana

Fins ara, ens hem content en construir un gran edifici, una teoria que ens permet treballar amb espais topològics, aplicacions contínues, subespais, quocients i productes. Tot tenint com a referència les propietats dels espais mètrics, i les construccions.

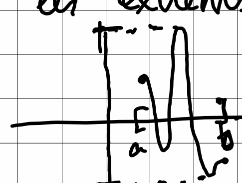
En aquesta part del curs ens centrarem en descriure propietats topològiques, què volem dir?

Diem que una propietat (P) d'un espai topològic és topològica si es preserva per homeomorfismes, és a dir, si X té la propietat (P) i $X \cong Y$ alehores Y té la propietat (P).

Ja en coneixem una: la propietat Hausdorff.

Aquesta temporada es centra en la propietat de la compacitat. La idea de compacitat segur que la coneixeu d'altres cursos d'anàlisi a $\mathbb{R}^n$,

Abans de seguir teniu <u>deures</u>: busqueu en els vostres apunts del grau (o a la literatura si no els teniu a mà), la demostració del teorema de Weierstrass: si f és una funció contínua, $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ alehores com a mínim dos punts on assoleix els extrems absoluts (màx i mín)



Ja ho has fet?... alehores passa pàgina!

Doncs ara tens uns altres deures, busca el teorema de Bolzano - Weierstrass

Tota successió acotada a $\mathbb{R}$ té una subsuccessió convergent.

Repassa la demostració altre cop abans de passar pàgina.

Els dos resultats parlen de funcions contínues o successions amb la característica comú de que la primera està definida en $[a,b]$ i la successió està continguda en $[a,b]$.

La noció d'espai topològic compacte va ser fruit de les contribucions de molts matemàtics que abordaven problemes derivats de l'anàlisis. La definició que veurem té potser l'origen en la tesis d'Émile Borel (1894) sobre funcions de variable complexa, en una part estudia els recobriments numerables per intervals oberts de $[a,b]$ ... i prova una propietat que d'alguna manera era clau en les demostracions de teoremes anteriors ... fins arribar a Alexandroff y Urysohn (ja 1929 ...).

Comencem parlant de recobriments.

<u>Definicions</u>: Sigui X un espai topològic i $A \subset X$

- Un recobriment d'X és una família $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ amb $U_i \subset X$ subconjunt d'X tal que $X = \bigcup_{i\in I} U_i$.

- Diem que el recobriment és finit si I és finit.

- Diem que el recobriment és numerable si I és numerable

- Diem que el recobriment $\mathcal{U}$ és un recobriment per oberts si $U_i \subset X$ si $U_i \in \mathcal{T}_X$ per tot $i \in I$.

- Diem que $\mathcal{U}$ és un recobriment d'A si $A \subset \bigcup_{i\in I} U_i$.

- Si $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ és un recobriment, un subrecobriment és una família $\mathcal{U}' = \{U_k\}_{k\in K}$ on $K \subset I$. És a dir, els elements de $\mathcal{U}'$ són elements de $\mathcal{U}'$,

$$\mathcal{U}' \subset \mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X).$$

Anem a veure uns quants exemples per estudiar diferents situacions.

EXEMPLES:

(1) X espai topològic.

$\mathcal{U}_0 = \{X\}$, $\mathcal{U}_1 = \{X, X\}$, $\mathcal{U}_2 = \{X\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\mathcal{U} = \{\{x\}\}_{x\in X}$

$\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1$ són recobriments finits per oberts (també tancats)

$\mathcal{U}_2$ és un recobriment numerable per oberts

$\mathcal{U}$ és un recobriment d'X (per oberts si X té τ_d).

(2) $\mathbb{R} = (-\infty, 1) \cup (0, +\infty)$ $\quad \mathcal{U} = \{(-\infty,1), (0,+\infty)\}$

(3) $\mathbb{R} = \bigcup_{i=1}^{\infty} (-i, i)$

(4) $\mathbb{R} = \dots \cup (-1,1) \cup (0,2) \cup (1,3) \cup \dots$

$\mathcal{U} = \{(i, i+2)\}_{i\in\mathbb{Z}}$

(5) $[0,1] = (1/3, 1] \cup \bigcup_{i=2}^{\infty} [0, 1-\frac{1}{i})$

$\mathcal{U} = \{(1/3, 1], [0, 1-\frac{1}{i})\ i \geq 2\}$

(6) $(0,1] = \bigcup_{i=2}^{\infty} (\frac{1}{i}, 1]$

- Penseu en els adjectius (finit, numerable, obert, ...) per aquests exemples.

- Abans de passar pàgina, penseu quins admeten subrecobriments.

Quins dels anteriors exemples admeten subrecobriments?

(1) $\mathcal{U}_0$ és un subrecobriment de $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$. Ara bé $\mathcal{U}_3$ no admet cap subrecobriment ja que al fer-ho la seva unió no seria tot X.

Prenem $x_0 \in X$, $\mathcal{U}_3 \setminus \{\{x_0\}\} = \{\{x\}\}_{\substack{x\in X \\ x\neq x_0}}$ i

aleshores $\bigcup_{\substack{x\in X\\ x\neq x_0}} \{x\} = X \setminus \{x_0\} \subsetneq X$.

(2) És un recobriment finit per oberts i no admet cap subrecobriment.

(3) És un recobriment per oberts, que admet subrecobriments, per exemple, $\mathcal{U}' = \{(-2i, 2i)\}_{i\in\mathbb{N}}$

$$\mathcal{U}' \subset \mathcal{U} = \{(-i,i)\}_{i\in\mathbb{Z}}, \quad \mathbb{R} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} (-2i, 2i)$$

Però cap de finit, si $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ és una subfamília

$$\mathcal{U}' = \{(-a_i, a_i)\}_{a_i\in\mathbb{Z}}, \ \{a_i\} \ i = 1, \dots, n$$

Però aleshores $\bigcup_{i=1}^{n} (-a_i, a_i) = (a, a) \subsetneq \mathbb{R}$.

$a = \max\{|a_i|\}_{i=1,\dots,n}$.

(4) No admet cap subrecobriment ja que si $k \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ pertany a un únic obert $(k-1, k+1) \in \mathcal{U}$.

(5) És un recobriment que admet subrecobriments finits

$$\mathcal{U}' = \{[0, 1/2), (1/3, 1]\}$$

(6) Com l'exemple 3, admet subrecobriments $\{(1/2i, 1]\}_{\mathbb{N}}$ però cap de finit.

Ara que hem fet una mica de 'gimnàstica' d'escalfament amb el concepte de recobriment i subrecobriment ... arriba la definició.

DEFINICIÓ: Sigui X un espai topològic, direm que X és compacte si tot recobriment per oberts de X admet un subrecobriment finit.

Abans de seguir, anem a definir espai topològic NO compacte.

X espai topològic NO és compacte si existeix un recobriment per oberts que no admet un subrecobriment finit.

Tornem a repassar els exemples

(1) Si X té la topologia grollera alshores X és compacte ja que $\{X\}$ serà un subrecobriment de qualsevol recobriment per oberts!

Si X té la topologia discreta, $X = \{\{x\}\}_{x \in X}$ és un recobriment per oberts, que no admet subrecobriments. Alshores si X és infinit, X no és compacte. Si X és finit sí és compacte ja que la topologia $\mathcal{T}_d$ tindrà un nombre finit d'oberts diferents.

... els espais topològics finits són compactes ja que τ_X només té un nombre finit d'oberts.

(3) $\mathbb{R}$ <u>NO</u> és compacte ja que $\mathcal{U}$ és un recobriment per oberts que no admet cap sub-recobriment finit com hem vist.

(4) Mateixa conclusió que (3)

(5) Aquest és un recobriment per oberts que admet un subrecobriment finit però per a que $[0,1]$ sigui compacte cal que això passi per <u>tot</u> recobriment per oberts. No n'hi ha prou.

(6) Igual que (3) ... $(0,1]$ no és compacte.

<u>Més exemples</u>: anem a demostrar amb la definició que X amb la topologia cofinita és compacte.

Sigui $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un recobriment de X per oberts.

Com ho faig per seleccionar-ne un subrecobriment finit? Faig el següent. Si $X = \emptyset$ ja he acabat, $\{\emptyset\}$. Si $X \neq \emptyset$, prenc $x_0 \in X$ i com que $x_0 \in \bigcup_{i\in I} U_i = X$ existeix un obert $U_{i_0} \ni x_0$ del recobriment.

Ara $X \setminus U_{i_0} = \{x_1, \dots, x_n\}$ és finit. Per cada $x_j \in X \setminus U_{i_0}$ puc escollir $U_{i_j} \ni x_j$ del recobriment. Aleshores si em quedo amb

$$\{U_{i_0}, U_{i_1}, \dots, U_{i_n}\} \subset \mathcal{U}$$

és un subrecobriment finit.

Abans de seguir veurem dos fets: com es defineix compacitat fent servir tancats i que la propietat de ser compacte és topològica.

PROPOSICIÓ (Caracterització en termes de tancats)

X és compacte sii per tota família de tancats $\{K_i\}_{i\in I}$ tals que $\bigcap_{i\in I} K_i = \emptyset$ hi ha una subfamília finita $\{K_{i_1}, \dots, K_{i_n}\}$ tal que $\bigcap_{j=1}^{n} K_{i_j} = \emptyset$.

Demostració Suposem que X és compacte i $\{K_i\}_{i\in I}$ una família de tancats amb $\bigcap_{i\in I} K_i = \emptyset$, aleshores $\mathcal{U} = \{X \setminus K_i\}$ és un recobriment per oberts d'X. Com que X és compacte, existeix un subrecobriment finit $\{X\setminus K_{i_1}, \dots, X \setminus K_{i_n}\}$, $X = \bigcup_{k=1}^{n} X\setminus K_{i_k}$ i prenent complementaris obtenim que $\emptyset = \bigcap_{k=1}^{n} K_{i_k}$.

L'altra implicació és anàloga, prenent complementaris. Sigui $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un recobriment per oberts d'X, aleshores $\{X \setminus U_i\}$ és una família de tancats amb intersecció buida. Per hipòtesi hi ha una subfamília $\{X\setminus U_{i_1}, \dots, X\setminus U_{i_n}\}$ amb intersecció buida. Aleshores $\{U_{i_1}, \dots, U_{i_n}\}$ és un subrecobriment finit.

#

Ara anem a veure que és una propietat topològica.

PROPOSICIÓ (la compacitat és una propietat topològica)

Sigui X un espai topològic compacte, i $Y \cong X$ aleshores Y és compacte.

Dem Sigui $f: X \longrightarrow Y$ un homeomorfisme, podem suposar que X és compacte (fixeu-vos que f^{-1} també és un homeomorfisme). Sigui $\mathcal{U}$ un recobriment per oberts d'Y, $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$, aleshores

$\mathcal{V} = \{f^{-1}(U_i)\}_{i \in I}$ és un recobriment per oberts d'X ja que f és contínua i

$$X = f^{-1}(Y) = f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i)$$

Com que X és compacte, existeix un subrecobriment finit $\{f^{-1}(U_{i_1}), \dots, f^{-1}(U_{i_n})\}$. Aleshores

$$X = f^{-1}(U_{i_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(U_{i_n})$$

i $$Y = f(X) = f(f^{-1}(U_{i_1})) \cup \dots \cup f(f^{-1}(U_{i_n})) =$$

$$= U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$$ ja que f és bijectiva.

Per tant $\{U_{i_1}, \dots, U_{i_n}\}$ és un subrecobriment finit.

$\#$

Ara ja sabem que $\mathbb{R} \cong (a,b) \cong (-\infty, b) \cong (a, +\infty)$ i $(0,1] \cong (a,b] \cong [a,b) \cong [a,+\infty) \cong (-\infty, b]$ <u>no</u> són compactes!

Observació: Fixeu-vos que de fet només hem fet servir que f és contínua i exhaustiva oi?
És cert que un espai topològic quocient d'un compacte és compacte?

PROPOSICIÓ Sigui $f: X \to Y$ una aplicació contínua exhaustiva, si X és compacte, Y també ho és.

Repasseu la demostració de la proposició anterior i veure-ho que tot funciona.

COROL·LARI Un espai topològic quocient d'un compacte és compacte.

Però encara no hem parlat de subconjunts compactes, fixeu-vos que un subconjunt d'un espai topològic sempre és un espai topològic amb la topologia subespai.

DEFINICIÓ Sigui X un espai topològic i $A \subset X$.
Diem que A és un subconjunt compacte de X si A és compacte amb la topologia subespai.

Ara, si no volem treballar amb recobriments de la topologia subespai, n'hi ha prou amb treballar amb oberts de X.

Exemples: $\{x\} \subset X$ sempre és compacte, i a la topologia cofinita tots els subconjunts són compactes.

<u>LEMMA</u>: X espai topològic, $A \subset X$.

A és compacte en X sii tot recobriment d'A en X per oberts admet un subrecobriment finit.

<u>Demostració</u>:

Suposem que A és compacte en X. Sigui $\{U_i\}_{i\in I}$ un recobriment per oberts d'A. És a dir, $U_i \in \mathcal{T}_X$ i $A \subset \bigcup_{i\in I} U_i$. Volem veure que admet un subrecobriment finit. Si fem intersecció amb A tenim $A = (\bigcup U_i) \cap A = \bigcup_{i\in I} (U_i \cap A)$ on $\{U_i \cap A\}_{i\in I}$

és ara un recobriment per oberts amb la topologia subespai. Com que A és compacte, existeix un subrecobriment finit, $\{U_{i_k} \cap A\}_{k=1,\dots,n}$. Aleshores, $\{U_{i_k}\}_{k=1,\dots,n}$ és un subrecobriment finit d'A

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{n} U_{i_k}.$$

Ara suposem que tot recobriment d'A en X per oberts admet un subrecobriment finit. Volem veure que A és compacte amb la topologia subespai.
Sigui $\{U_i\}_{i\in I}$ un recobriment per oberts d'A, és a dir,

$A = \bigcup_{i\in I} U_i$ i existeixen $V_i \subset X$ oberts amb $U_i = A \cap V_i$

Per tant $A \subset \bigcup_{i\in I} V_i$, $V_i \in \mathcal{T}_X$. Per hipòtesis sabem que

$\{V_i\}$ admet un subrecobriment finit, $\{V_{i_k}\}_{k=1,\dots n}$

$A \subset V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_n}$, aleshores $\{U_{i_k} = V_{i_k} \cap A\}$ és un subrecobriment finit de $\{U_i\}_{i\in I}$.

#

Com es comporten els subconjunts compactes respecte unions i interseccions ?

Ja us imagineu que les unions arbitràries de compactes no té perquè ser compacte :

- els punts $\{x\} \subset X$ sempre són subconjunts compactes ja que sempre n'hi ha prou amb un obert per 'recobrir-los'. Si les unions arbitràries de compactes fossin compactes aleshores tot seria compacte!

$$\mathbb{R} = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} \{x\} \quad \text{No és compacte.}$$

<u>PROPOSICIÓ</u> Sigui X e.t., aleshores si $\{C_i\}_{i=1}^{n}$ és una família finita de subconjunts compactes $C_i \subset X$, $\bigcup_{i=1}^{n} C_i$ també és compacte.

<u>Demostració</u> Sigui $\mathcal{U} = \{U_i\}$ un recobriment per oberts de $\bigcup_{i=1}^{n} C_i \subset X$. És a dir, $U_i \in \mathcal{T}_X$ i

$$\bigcup_{i=1}^{n} C_i \subset \bigcup_{i \in I} U_i .$$

Com que $C_j \subset \bigcup_{i=1}^{n} C_i \subset \bigcup_{i \in I} U_i$, tenim que $\mathcal{U}$ és també un recobriment de cada C_j que són compactes.

Per cada $j \in I$ existeix un subrecobriment finit $\left\{U_{i_k(j)}\right\}_{k=1}^{m_j}$

Alshores si els posem tots junts

$$\mathcal{U}' = \left\{U_{i_1(1)}, \dots, U_{i_{m_1}(1)}, \dots\dots, U_{i_1(n)}, \dots, U_{i_{m_n}(n)}\right\}$$

tenim un subrecobriment finit. #

Tampoc és cert en general que la intersecció de compactes és compacte, caldrà alguna condició extra.

Però de moment ho deixem aquí ja que per aclarir els punts que ens queden ens cal afegir la propietat Hausdorff al dibuix ...

Acabem amb una observació: fixeu-vos que si (X, τ) <u>no</u> és compacte alashores cap topologia més fina, $\tau \subset \tau'$, pot ser-ho. Si (X,τ) és no compacte alashores existeix un recobriment $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ tal que $U_i \in \tau$ i $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ que no admet cap subrecobriment finit. Però com que $\tau \subset \tau'$, $\mathcal{U}$ també és un recobriment amb les mateixes propietats a (X, τ') i per tant, (X, τ') no és compacte.

- Penseu: sigui $\mathbb{R}_\ell$ la recta real amb la topologia del límit inferior, és compacta?