

Do It Yourself:

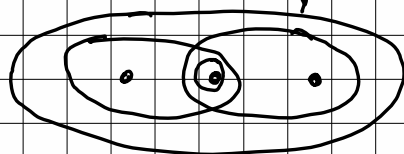
com dissenyar el
teu espai topològic

Setembre 2020

Natàlia Castellana

On som? Ja sabem què és un espai topològic (X, \mathcal{Z}) on $\mathcal{Z} \subset \mathcal{P}(X)$. Hi ha diverses maneres de definir \mathcal{Z}

(1) de manera explícita



$\emptyset, \{a, b\}, \{b\}, \{a, c\}$
 $\{a, b, c\}$

(2) mitjançant una propietat que cal comprovar que per saber si $U \in \mathcal{Z}$. Per exemple

$$\mathcal{Z} = \{U \subset X \mid U = \emptyset \text{ o } X \setminus U \text{ finit}\}$$

o en el cas dels espais mètrics (X, d) .
 Un subconjunt $U \subset X$ és obert si per tot $x \in U$ existeix $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \subset U$.

Ara bé, fixeu-vos que de fet, tot obert $U \subset X$ en un espai mètric es pot escriure doncs com unió de boles,

$$U = \bigcup_{y \in U} B(y, \delta_y) \quad \text{Vegem-ho:}$$

$$\left[\begin{array}{l} \bullet \text{ Si } x \in U \text{ aleshores, per definició} \\ \quad x \in B(x, \delta_x) \subset \bigcup_{y \in U} B(y, \delta_y) \\ \bullet \text{ Si } x \in \bigcup_{y \in U} B(y, \delta_y) \text{ aleshores } x \in B(x, \delta_x) \subset U. \end{array} \right]$$

Aleshores, sabem que qualsevol unió de boles

$$\bigcup_{i \in I} B(x_i, \delta_i) \subset X \text{ és obert}$$

(per ser una unió arbitrària d'oberts) i també sabem que qualsevol obert es pot escriure d'aquesta forma. Aquest paper que juguem les boles

$$\mathcal{B} = \{ B(x, R) \mid x \in X, R > 0 \}$$

s'axiomatitza en el context més general d'espai topològic amb la següent definició.

DEFINICIÓ: Sigui (X, \mathcal{Z}) un espai topològic i \mathcal{B} una família d'oberts, $\mathcal{B} \subset \mathcal{Z}$.

Diem que \mathcal{B} és una base de la topologia si per tot $U \in \mathcal{Z}$ i $x \in U$ existeix $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset U$.

EXEMPLE: (1) \mathcal{Z} és una base!

(0) Sigui (X, \mathcal{Z}) un espai topològic induït per una mètrica d . Aleshores ja sabem que $\mathcal{B} = \{ B(x, R) \mid x \in X, R > 0 \}$ és una base per la topologia.

Però les bases no són úniques. Per exemple,

$$\mathcal{B}' = \{ B(x, \lambda) \mid x \in X, \lambda \in \mathbb{Q}, \lambda > 0 \}$$

(1) Sigui X un espai topològic amb la topologia grolera. Aquí és que només hi ha dues possibles bases

$$\mathcal{B} = \mathbb{Z} \text{ o } \{X\}.$$

Fixeu-vos que, en general, sempre existeix amb a més una base, $\mathcal{B} = \mathbb{Z}$ per qualsevol espai topològic.

(2) Comprueu que si X té la topologia discreta aleshores

$$\mathcal{B} = \{ \{x\} \mid x \in X \} \text{ és una base}$$

Observació Igual que en la topologia induïda per una mètrica, si \mathcal{B} és una base per (X, \mathbb{Z}) , i femos que $U \subset X$ obert, per $x \in U$ existeix $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subset U$ i podem provar que

$$U = \bigcup_{x \in U} B_x$$

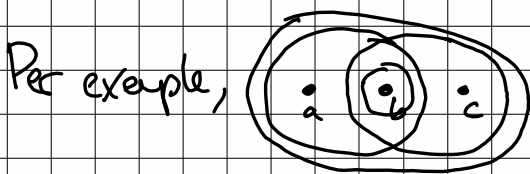
És oberts són unions d'oberts de la base!

I ara, podem usar aquesta caracterització per definir topologies? És a dir, esllun $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ una família de subconjunts i dicim que $U \subset X$ és obert si U es pot escriure com una unió d'elements de \mathcal{B} . [ÉS UNA TOPOLOGIA?] ???

En realitat ens hem de preocupar pel que passa a les interseccions oi? Fixeu-vos en la següent propietat.

LEMMA: Sigui (X, τ) un espai topològic i $\mathcal{B} \subset \tau$ una base aleshores si tenim $\{B_i\}$, $i=1, \dots, n$ amb $B_i \in \mathcal{B}$ es compleix que per tot $x \in \bigcap_{i=1}^n B_i$ existeix $B' \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B' \subset \bigcap_{i=1}^n B_i$.

La demostració diu: com que $\{B_i\}_{i=1}^n$ són oberts $\bigcap_{i=1}^n B_i$ és obert. Així com que \mathcal{B} és base, per tot $x \in \bigcap_{i=1}^n B_i$ existeix $B' \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B' \subset \bigcap_{i=1}^n B_i$.



$\{a, b\}$ i $\{b, c\}$
no pot ser una
base. Cal que
 $\{b\}$ hi sigui també.

La següent proposició ens permet construir topologies que tindran una base prefixada sempre hi quom es compleixi la condició descrita pel lemma.

PROPOSICIÓ: Sigui X un conjunt i $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$
una família de subconjunts que compleix

$$(a) X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$$

(b) Per tot $U, V \in \mathcal{B}$ i $x \in U \cap V$ existeix $B \in \mathcal{B}$
tal que $x \in B \subset U \cap V$

Aleshores existeix una única topologia \mathcal{Z} a X
tal que

- (1) \mathcal{B} és una base per aquesta topologia \mathcal{Z} .
- (2) \mathcal{Z} és la topologia menys fina que conté \mathcal{B} .

Demostració: Anem a definir \mathcal{Z} ,

$$\mathcal{Z} = \{U \subset X \mid U = \bigcup_{i \in I} B_i, B_i \in \mathcal{B}, \text{ o } U = \emptyset\}, \text{ i.e.}$$

declarem que els oberts són unions d'elements de \mathcal{B} .
Fixeu-vos que $\emptyset \in \mathcal{Z}$.

Anem a comprovar que \mathcal{Z} és una topologia:

(1) $X \in \mathcal{Z}$ per la hipòtesis (a), i $\emptyset \in \mathcal{Z}$
per definició (de fet, no caldria ja que $\bigcup_{i \in \emptyset} B_i = \emptyset$).

(2) Sigui $\{U_i\}_{i \in I}$ amb $U_i \in \mathcal{Z}$. Aleshores per cada i

$$U_i = \bigcup_{j \in I_i} B_{j_i}. \text{ Per tant,}$$

$$\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{\substack{j \in I \\ j \in I_i}} B_{j_i} \in \mathcal{Z}.$$

(3) Anem a comprovar que si $U, V \in \mathcal{Z}$ aleshores $U \cap V \in \mathcal{Z}$. Si ho provem per la intersecció de dos oberts, aleshores és cert per qualsevol intersecció finita d'oberts per inducció (aquest és un fet general).

Suposem primer que $U, V \in \mathcal{B} \subset \mathcal{Z}$, aleshores si $x \in U \cap V$ existeix $B_x \in \mathcal{B}$ amb $x \in B_x \subset U \cap V$ i per tant

$$U \cap V = \bigcup_{x \in U \cap V} B_x$$

Seguim $U, V \in \mathcal{Z}$ qualsevols. Per definició de \mathcal{Z} ,

$$U = \bigcup_{i \in I} A_i \quad i \quad V = \bigcup_{j \in J} B_j$$

amb $A_i, B_j \in \mathcal{B}$ per tot $i \in I, j \in J$. Aleshores

$$U \cap V = \bigcup_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (A_i \cap B_j) \in \mathcal{Z} \text{ per definició.}$$

Lei distributiva entre unions i interseccions

Així doncs \mathcal{Z} defineix una topologia a X amb $\mathcal{B} \subset \mathcal{Z}$, i \mathcal{B} és una base per aquesta topologia per construcció:

Supos $U \in \mathcal{Z}$ i $x \in U$, aleshores $U = \bigcup_{i \in I} B_i$ i per tant existeix $i \in I$ amb

$$x \in B_i \subset \bigcup_{i \in I} B_i = U.$$

\mathcal{I} a més és la menys fina que conté \mathcal{B} ja que qualsevol topologia \mathcal{Z}' que contingui \mathcal{B} també ha de contenir les unions d'elements de \mathcal{B} que justament és \mathcal{Z} , $\mathcal{Z} \subset \mathcal{Z}'$. \mathcal{I} és única amb aquestes propietats.

#

OBSERVACIÓ: \mathcal{Z} també podria haver estat definida a la demostració de manera equivalent com

$$\mathcal{Z} = \{ U \subset X \mid \text{per tot } x \in U \text{ existeix } B \in \mathcal{B} \text{ tal que } x \in B \subset U \}$$

(en un estil proper a com es fa en espais mètrics per definir oberts)

Direm que \mathcal{Z} és la topologia generada per \mathcal{B} .

EXEMPLES Aprofitem per definir nous espais topològics amb nom propi.

(1) $X = \mathbb{R}$, la topologia del límit inferior a \mathbb{R} és la topologia generada per

$$\mathcal{B} = \{ [a, b) \mid a < b, a, b \in \mathbb{R} \}$$

Anem a comprovar primer que \mathcal{B} satisfà les condicions (a) i (b) de la proposició.

$$(a) \quad \mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n], \text{ per tant } \mathbb{R} = \bigcup_{[a,b] \in \mathcal{B}} [a,b].$$

(b) Siguin $[a,b], [c,d] \in \mathcal{B}$. Alhora la seva intersecció també és un interval de la forma $[c,b]$ o $[a,b]$ suposant $a \leq c$, o \emptyset . Per tant $[a,b] \cap [c,d] \in \mathcal{B}$.
I es compleix (b) alhora.

Escriurem \mathbb{R}_e per denotar (\mathbb{R}, τ) . Anem a veure alguns exemples de subconjunts oberts.

- $[a, +\infty) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a, a+n)$ és obert.
- $(-\infty, t) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [t-n, t)$ és obert.

Per tant els complementaris $(-\infty, a)$ i $[t, +\infty)$ són tancats també!

• La unió $(-\infty, a) \cup [b, +\infty)$, $a < b$, és obert doncs, i el complementari $[a, b]$ és tancat també.

• Ara, $[1, 2]$ no és obert ja que $2 \in [1, 2]$ i no hi ha cap obert bàsic $[a, c)$ amb $2 \in [a, c) \subset [1, 2]$.

Però $(1, 2)$ sí és obert,

$$(1, 2) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [1 + \frac{1}{n}, 2)$$

Si tanem ara a mirar complementaris,

$\mathbb{R} \setminus (1,2) = (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$ no és obert ja
no hi ha $1 \in [a,b) \subset \mathbb{R} \setminus (1,2)$.

$\mathbb{R} \setminus [1,2] = (-\infty, 1) \cup (2, +\infty) =$
 $= \bigcup_{n \geq 2} [-n, 1) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [2 + \frac{1}{n}, \infty)$ obert
i per tant $[1,2]$ és tancat.

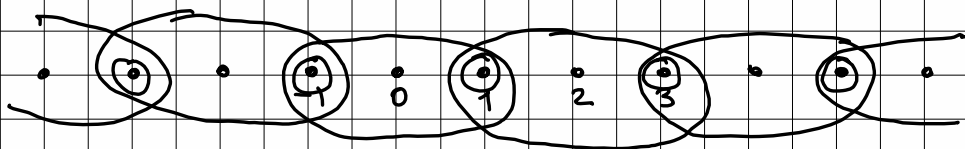
En general podem comprovar, $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$

$[a,b]$ tancat i no obert
 (a,b) obert i no tancat
 $[a,b)$ obert i tancat allhora
 $(a,b]$ ni obert ni tancat

	(a,b)	$[a,b)$	$(a,b]$	$[a,b]$
obert	✓	✓	✗	✗
tancat	✗	✓	✗	✓

(2) $X = \mathbb{Z}$, la topologia digital és la
topologia generada per

$$\mathcal{B} = \{ B(n) \mid n \in \mathbb{N} \} \text{ on } B(n) = \begin{cases} \{n\} & n \text{ senar} \\ \{n-1, n, n+1\} & n \text{ parell} \end{cases}$$



(3) $X = \mathbb{Z}$, la topologia de les progressions
aritmètiques en la topologia generada
per

$$\mathcal{B} = \{A_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

$$\text{on } A_{a,b} = \{a + \alpha b \mid \alpha \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Z}.$$

I ara, tornem a posar el focus en
les aplicacions contínues... igual com
passa en espais mètrics i vam discutir el
primer dia, només cal comprovar la
continuitat en la preimatge dels oberts
d'una base.

TEOREMA: sigui $f: X \rightarrow Y$ una aplicació entre
espais topològics. sigui \mathcal{B} una base per la
topologia d' Y . Aleshores,

f és contínua si i només si $f^{-1}(B)$ és obert per
tot $B \in \mathcal{B}$.

Demostració:

Si f és contínua, com que $B \in \mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ és obert
aleshores $f^{-1}(B)$ és obert.

Suposem que $f^{-1}(B)$ és obert per tot $B \in \mathcal{B}$.
Sigui $U \subset Y$ obert, aleshores $U = \bigcup_{i \in I} B_i$. Per
tant,

$$f^{-1}(U) = f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i) \text{ és obert}$$

per ser unió d'oberts $f^{-1}(B_i)$ (unió finita).

##

