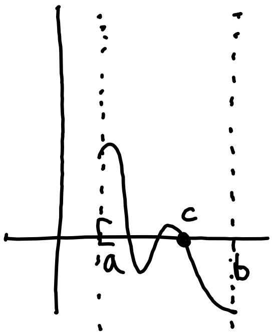
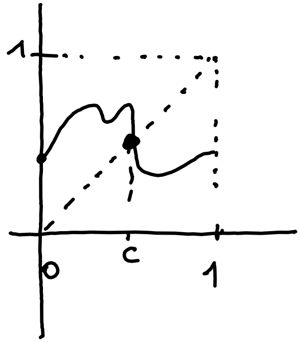
QUÈ ÉS UNA APLICACIÓ CONTÍNUA

Natàlia Castellana

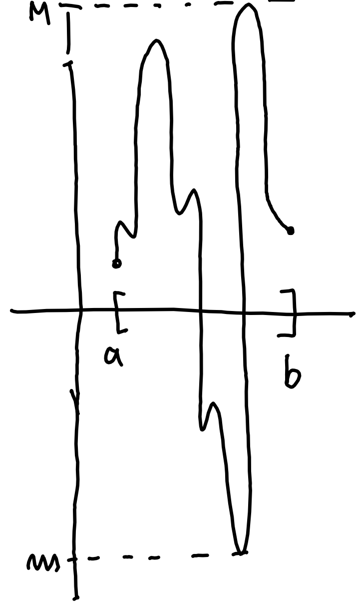
Setembre 2021



(A)



(B)



(C)

(A) Teorema de Bolzano: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ contínua tal que $f(a)f(b)\le 0$ aleshores existeix $c\in[a,b]$ amb $f(c)=0$.

(B) Teorema del punt fix: $f:[0,1]\to[0,1]$ contínua, existeix $c\in[0,1]$ amb $f(c)=c$.

(C) Teorema de Weierstrass: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ contínua té un màxim i un mínim absolut.

Són tres teoremes que són certs per funcions contínues, els coneixem de fa temps. Ens venen a confirmar que les funcions contínues són, fins a cert punt, "previsibles" en la nostra concepció del món físic.

I tu? ja saps què és una aplicació contínua?

Tanca els ulls i recorda el primer cop que algú et va parlar de funcions contínues ... (suposem domini = $\mathbb{R}$)

① Una funció és contínua si es pot dibuixar sense aixecar el llapis del paper.

② Una funció $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és contínua en un punt $a \in \mathbb{R}$ del domini si existeix $f(a) \in \mathbb{R}$ i

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a) = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

③ Una funció $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és contínua en un punt $a \in \mathbb{R}$ del domini si per tot $\varepsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ tal que si $|x-a| < \delta$ alshores $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

La definició 2 la vèiem com 'punts a prop d'a' tenen imatge 'a prop de $f(a)$'. Què vol dir a prop? 10, $0'1$, 10^{-6}, ...

La definició 3 és hardcore! tot i així treballarem amb ella. Anem a reescriure-la. Noteu que utilitza elements més bàsics que la 2.

El valor absolut és una distància / mètrica a $\mathbb{R}$.

$x, y \in \mathbb{R}$ $\qquad d(x,y) = |x-y| = |y-x|$

③ Una funció $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és contínua en un punt $a \in \mathbb{R}$ (del domini) si per tot $\varepsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ tal que si $d(x,a) < \delta$ alshores

$$d(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Fixeu-vos doncs que aquesta definició té sentit sempre que puguem parlar de distància, e.g., a

$$\mathbb{R}^n, \quad d_n(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2}$$

i per tant, sabem quan $f: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ és contínua.

(fixeu-vos n pot ser diferent de m)

- $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ és contínua en un punt $a \in \mathbb{R}^n$ si per tot $\varepsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ tal que per tot $x \in \mathbb{R}^n$ amb $d_n(x,a) < \delta$ aleshores $d_m(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

Però no només això!

Podem parlar de continuïtat en espais mètrics en general.

<u>Def</u> Una mètrica/distància en un conjunt X és una funció $d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

(1) $d(x,y) \geq 0$ per tots $x, y \in X$ i $d(x,y) = 0$ sii $x = y$.

(2) $d(x,y) = d(y,x)$ per tots $x, y \in X$

(3) [Desigualtat triangular]

$$d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z) \text{ per tots } x,y,z \in X.$$

Tornem-hi! (X,d_X), (Y,d_Y) espais mètrics

- $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ és contínua en un punt $a\in X$ si per tot $\varepsilon>0$ existeix $\delta>0$ tal que per tot $x\in X$ amb $d_X(x,a)<\delta$ aleshores $d_Y(f(x),f(a))<\varepsilon$.

De fet, la frase $\left[\text{"}x \text{ amb } d(x,a)<\delta\text{"}\right]$ es pot reescriure també com $x\in B(a,\delta)$. Recordeu que les boles de centre a i radi δ són precisament el conjunt de punts que compleixen aquesta condició.

$$B(a,\delta)=\{x\in X \mid d(a,x)<\delta\}$$

- $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ és contínua en un punt $a\in X$ si per tot $\varepsilon>0$ existeix $\delta>0$ tal que

$$f(B(a,\delta))\subset B(f(a),\varepsilon)$$

o bé $$B(a,\delta)\subset f^{-1}(B(f(a),\varepsilon)).$$

A partir d'ara parlarem globalment de funcions contínues, i direm que ho són si ho són en tots els seus punts: $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ contínua si f és contínua per tot $a\in X$.

- $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ és contínua si per tot $x\in X$ i per tot $\varepsilon>0$ existeix $\delta>0$ tal que

$$f(B(x,\delta))\subset B(f(x),\varepsilon)$$

o bé $$B(x,\delta)\subset f^{-1}(B(f(x),\varepsilon)).$$

<u>Nota</u> : La continuïtat depèn de com es comporten uns subconjunts molt especials : les boles!

* Coneixem molts espais mètrics per jugar?

$\boxed{A}$ $X = \mathbb{R}^n$

<u>A.1</u> Mètrica euclidiana $d_1(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$

<u>A.2</u> Mètrica taxista $d_2(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$
(Manhattan)

<u>A.3</u> Mètrica del màxim $d_3(x,y) = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - y_i|\}$

$\boxed{B}$ $X = \mathbb{Z}$, p nombre primer, mètrica p-àdica

$$d_4(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \dfrac{1}{p^{\gamma_p(x-y)}} & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

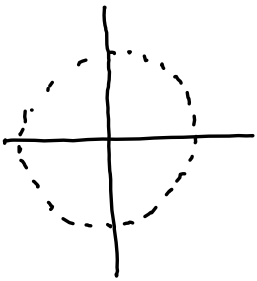
on $\gamma_p(z) = n$ sii $z = p^n z'$, $\mathrm{mcd}(z', p) = 1$

$\boxed{C}$ X conjunt $d_5(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$ és la mètrica discreta.

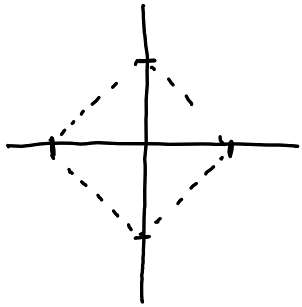
<u>Per pensar</u> : com seria el curs de càlcul de primer si prenguéssim la mètrica del taxista o del màxim?

Seria $f(x) = x^2 + 3x - 1$ contínua?

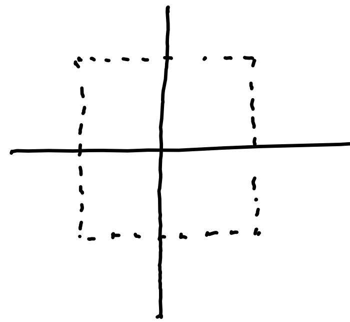
Una manera de tenir intuició sobre una mètrica és dibuixar les boles. Eg a $\mathbb{R}^2$



A1



A2



A3

B Practiquem, $d_4(0,2) = \frac{1}{2}$, $d_4(0,5) = 1$, $d_4(0,4) = 1/4$

$p = 2$

$d_4(0,n) = 1$ si n senar

$$d_4(0, 2^n) = \frac{1}{2^n}$$

$$B(0,r) = \{ z \in \mathbb{Z} \mid z = 2^n z' \ , \ z' \text{ senar i } 2^n > \tfrac{1}{r} \}$$

C. $$B(x,r) = \begin{cases} \{x\} & r \leq 1 \\ X & r > 1 \end{cases}$$

Com varia la continuitat en funció de la mètrica? Per exemple, quan és

$f : (X, d_5) \to (Y, d)$ contínua?

Sigui $x \in X$ qualsevol, $\varepsilon > 0$ qualsevol. He de dir qui és $\delta > 0$ tal que

$$f(B_{d_5}(x,\delta)) \subset B_d(f(x), \varepsilon).$$

Aquí ho tenim: sempre prenc $\delta = 1/2$ (o bé $\delta = 1$, ... qualsevol $\delta \leq 1$).
Comprovem-ho:

$B(x,\delta) = \{x\}$ si $\delta \leq 1$, aleshores $f(B(x;\delta)) = \{f(x)\} \subset B(f(x), \varepsilon)$ per qualsevol $\varepsilon > 0$. [o bé $x \in f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$]

<u>Conclusió</u> Tota aplicació $f: (X, d_S) \to (Y, d)$ és contínua!

Tornem a llegir a poc a poc la definició de continuitat: ens està dient que $f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$ té una propietat especial, conté una bola de l'espai de sortida (no és una bola però conté boles ...)

<u>DEFINICIÓ AMB MAJÚSCULES</u>: (X,d) espai mètric.

Diem que un subconjunt $A \subset X$ és obert si per tot $x \in A$ existeix $\varepsilon > 0$ tal que $B(x,\varepsilon) \subset A$.

<u>PROPIETATS</u>:

(1) Si $A \subset X$ és obert aleshores A és una unió de boles

$$A = \bigcup_{x \in A} B(x, \varepsilon_x) \quad \text{on} \quad B(x,\varepsilon_x) \subset A.$$

(2) Les boles $B(x,r) \subset X$ són oberts!

⌈ Sigui $y \in B(x,r)$, és a dir $\underset{\overset{\|}{s}}{d(x,y)} < r$.

Prenem $\delta < r - s$. Anem a comprovar que $B(y,\delta) \subset B(x,r)$: donat $z \in X$ amb $d(z,y) < \delta$ cal veure $d(z,x) < r$.

$$d(z,x) < d(z,y) + d(y,x) < \delta + s <$$
$$< r - s + s = r \quad \text{voilà!}$$

desigualtat triangular ⌋

Si combinem (1) i (2) obtenim

(3) $A \subset X$ obert sii A és una unió de boles.

.... si repassem teoria de conjunts ... $A \subset X$ obert

$$f^{-1}(A) = f^{-1}\Big(\bigcup_{x \in A} B(x,\varepsilon_x)\Big) = \bigcup_{x \in A} f^{-1}(B(x,\varepsilon_x))$$

ens porta al resultat més important ...

[Passa a la següent pàgina]

TEOREMA AMB MAIÚSCULES

Sigui $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ una aplicació entre dos espais mètrics. Són equivalents

(1) f és contínua
(2) Si $A\subset Y$ és obert aleshores $f^{-1}(A)\subset X$ també és obert.

DEMOSTRACIÓ:

$(1)\Rightarrow(2)$ Suposem que f és contínua. Sigui $A\subset Y$ obert. Volem comprovar que $f^{-1}(A)\subset X$ és obert.
Sigui $f(x)=y$, $x\in f^{-1}(A)$ on $y\in A$. Com que A és obert, existeix $\varepsilon>0$ tal que $B(y,\varepsilon)\subset A$. Aleshores, com que f és contínua, existeix $\delta>0$ tal que

$$f(B(x,\delta))\subset B(y,\varepsilon)\text{, és a dir,}$$
$$B(x,\delta)\subset f^{-1}(B(y,\varepsilon))\subset f^{-1}(A)$$

Per tant, $f^{-1}(A)$ és obert.

$(2)\Rightarrow(1)$ Volem veure que f és contínua. Sigui $x\in X$ i $\varepsilon>0$ qualssevols. Cal trobar $\delta>0$ tal que $f(B(x,\delta))\subset B(f(x),\varepsilon)$, o el que és el mateix, $B(x,\delta)\subset f^{-1}(B(f(x),\varepsilon))$.

Per hipòtesis (2), com que $B(f(x),\varepsilon)$ és obert, sabem que $f^{-1}(B(f(x),\varepsilon))$ és obert i clarament $x\in f^{-1}(B(f(x),\varepsilon))$. Així, per definició d'obert, existeix $\delta>0$ amb

$$B(x,\delta)\subset f^{-1}(B(f(x),\varepsilon))$$

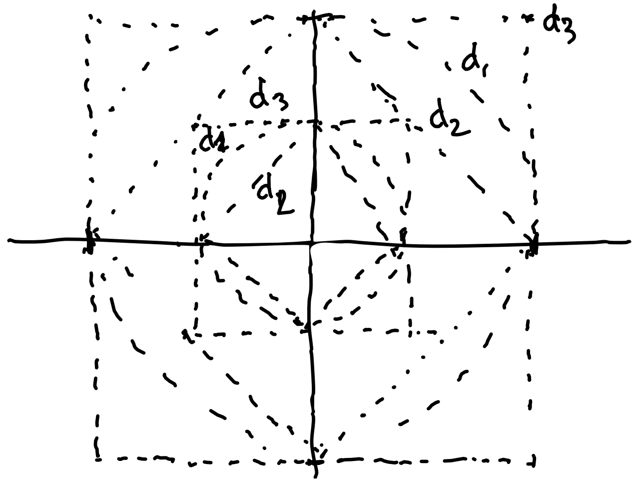
[Fi]

OBSERVACIÓ MOOOOLT IMPORTANT:

- el fet que $f:(X,d) \to (Y,d_1)$ sigui contínua en realitat depèn dels subconjunts oberts.

- Pot passar que (X,d) i (X,d') tinguin els mateixos subconjunts obert encara que $d \neq d'$!

E.g. Recordeu $(\mathbb{R}^n, d_1)$, $(\mathbb{R}^n, d_2)$, $(\mathbb{R}^n, d_3)$



$$\cdots \supset B_{d_3}(0,1) \supset B_{d_1}(0,1) \supset B_{d_2}(0,1) \supset B_{d_3}(0,r) \supset B_{d_1}(0,r) \supset B_{d_2}(0,r) \supset \cdots$$

$A \subset \mathbb{R}^n$. Són equivalents:

(1) A és obert a $(\mathbb{R}^n, d_1)$

(2) A és obert a $(\mathbb{R}^n, d_2)$

(3) A és obert a $(\mathbb{R}^n, d_3)$

• Siguin (X,d) i (X,d') espais mètrics tals que per tots $x \in X$, $\varepsilon > 0$,

* $B_d(x,\varepsilon) \subset X$ és obert a (X,d'), i
* $B_{d'}(x,\varepsilon) \subset X$ és obert a (X,d)

alshores són equivalents

(1) $A \subset X$ obert a (X,d)
(2) $A \subset X$ obert a (X,d')

[veure pàgina següent]

PER PENSAR: Sigui $f(x) = x^3 + 3x^2 - \sqrt{2}x + 1$, la funció

$$f : (\mathbb{R}, d_2) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_2),$$

és contínua?

RESPOSTA: .... com que sabem que és contínua amb d_1, alshores també ho és amb d_2, ... i d_3.

QUÈ HEM APRÈS?

- La idea de continuïtat estèn de manera natural a espais mètrics.
- Una aplicació és contínua sii la antiimatge d'un obert és obert.
- El comportament de la col·lecció de subespais oberts determina la continuïtat.

<u>Exercici</u>: Sigui X un conjunt, (X,d), (X,d') espais mètrics.

Suposem que per tot $x \in X$, $\varepsilon > 0$, la bola $B_d(x,\varepsilon)$ és obert a (X,d'). Aleshores tot obert a (X,d) també ho és a (X,d').

Sigui $A \subset X$ obert a (X,d). Prenem $x \in A$, com que A és obert existeix $\delta > 0$ tal que $B_d(x,\delta) \subset A$.

Ara bé $x \in B_d(x,\delta)$ que és obert a (X,d') per hipòtesis. Aleshores existeix $\varepsilon > 0$ tal que $x \in B_{d'}(x,\varepsilon) \subset B_d(x,\delta)$.

Si ho posem tot junt tenim que existeix $\varepsilon > 0$

$$x \in B_{d'}(x,\varepsilon) \subset B_d(x,\delta) \subset A.$$

Per tant, A també és obert a (X,d').