QUANTES SUPERFÍCIES COMPACTES HI HA?

LLEVAT HOMEOMORFISME!

Natàlia Castellana, 2021

Som-hi! quantes superfícies compactes hi ha? ens concentrarem en les superfícies compactes connexes.

Aleshores si M és una superfície compacta sabem que és una unió disjunta finita de superfícies compactes connexes. Així que

- quantes superfícies compactes connexes hi ha?

Comencem a fer una llista ...

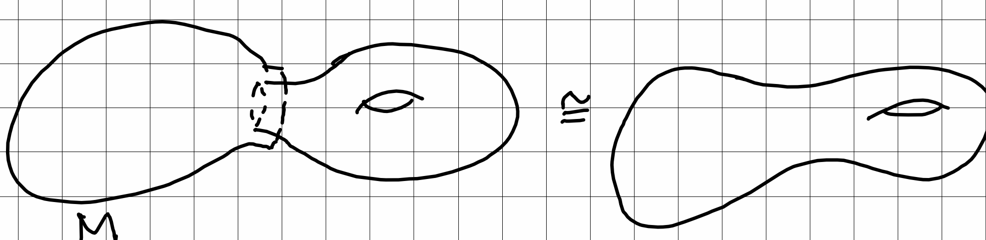
S^2, $T = S^1 \times S^1$, $\mathbb{RP}^2$, K, i fem sumes connexes amb aquestes.

SUMMA CONNEXA DE SUPERFÍCIES

Sigui M una superfície compacta connexa. Aleshores

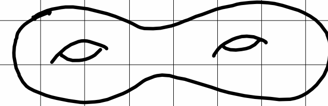
(1) $M \# S^2 \cong M$

(2) $M \# T$ és "afegir-li una nansa"

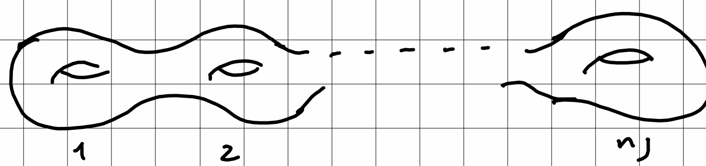


Així

$T \# T$

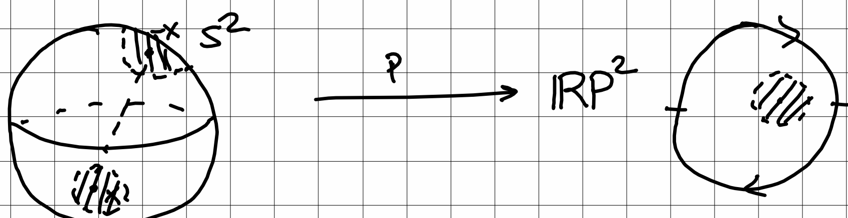


$\#_n T$



(3) $M \# \mathbb{RP}^2$ és "cosir una cinta de Moebius"

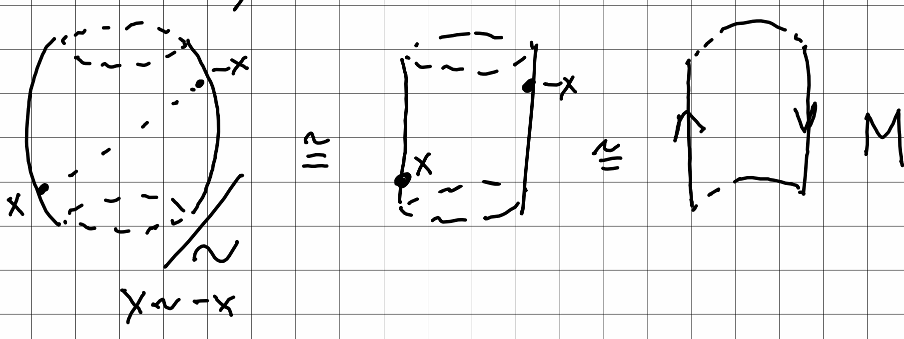
Per això cal entendre com és $\mathbb{RP}^2 \setminus D$ on D és un disc.



Si escollim un entorn homeomorf a un disc dins $\mathbb{RP}^2$, $D \subset \mathbb{RP}^2$, aleshores

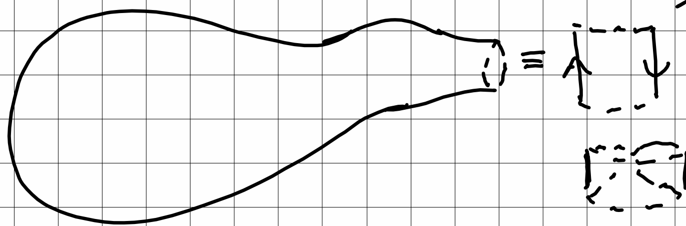
$$p^{-1}(D) \cong D_1 \cup D_2$$

$$S^2 \setminus p^{-1}(D) \Big/ \sim \;\cong\; \mathbb{RP}^2 \setminus D$$



Així $\mathbb{RP}^2 \setminus D$ és homeomorf a una cinta de Moebius.

$$M \# \mathbb{RP}^2 = M' \setminus \mathrm{Cl}(D) \sqcup M \big/ \sim$$



Fixeu-vos que la "vora" de cinta de Moebius és S^1 i per tant es pot cosir a la vora d'un disc.

<u>PROPIETATS</u> S, R superfícies compactes connexes

(1) $S \# R \cong R \# S$

(2) $S \# (R \# M) \cong (S \# R) \# M$

(3) $S \# S^2$

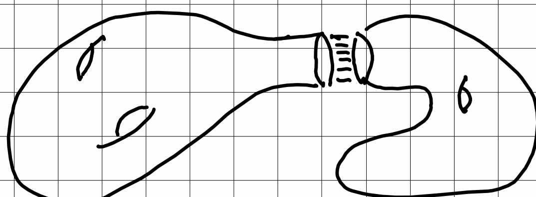
<u>Observació</u> La suma connexa l'hem descrit amb detall per comprovar que el resultat és una varietat, com a espai topològic es pot descriure de la següent manera.

Si M és una superfície, $x \in M$, prenem una carta local $\mathcal{U} \ni x$, $\varphi : \mathcal{U} \xrightarrow[\cong]{} \mathbb{R}^n$ amb $\varphi(x) = 0$. Sigui $D = \varphi^{-1}(B(0,1))$. Aleshores

$M' = M \setminus D$ és una superfície "amb vora" i la vora és $\partial M' = \varphi^{-1}(\partial B(0,1)) = \varphi^{-1}(S^1) \cong S^1$.

Si fem el mateix amb una altra superfície N, $\partial N' \cong S^1$

$$M \# N := M' \sqcup N' / \partial M' \sim \partial N'$$

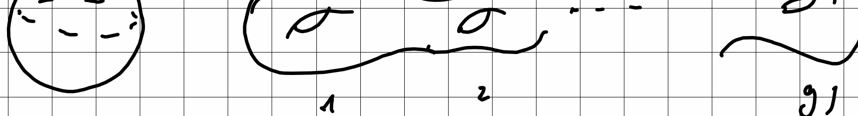


Amb aquest procés podem construir noves superfícies

DEFINICIÓ:

(1) La superfície orientable de gènere g on $g \geq 0$ és

$$S_g = S^2 \# \underbrace{T \# \cdots \# T}_{g)}$$



1 2 g)

$g = 0$

$g > 0$

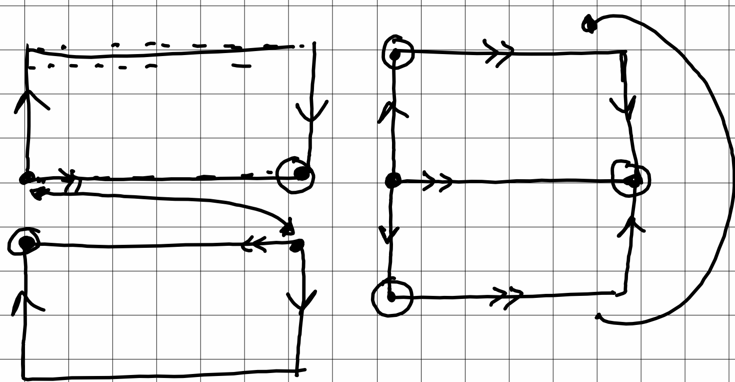
(una esfera amb n nses)

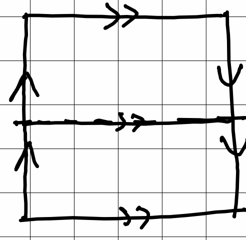
(2) La superfície no orientable de gènere $g > 0$ és

$$N_g := \underbrace{\mathbb{RP}^2 \# \cdots \# \mathbb{RP}^2}_{g)}$$

(una esfera a la que hem cosit g cintes de Moebius).

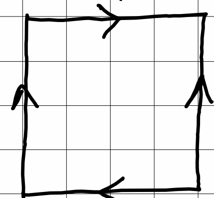
Què passa quan cosim dues cintes de Moëbius per la seva vora? $\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$

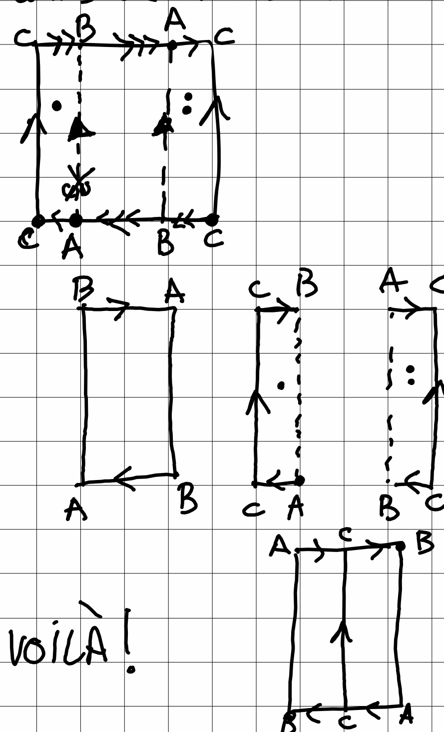




ampolla de Klein.

Un altre intent però comencem a l'ampolla de Klein i veiem que la podem tallar a través de S^1 i queden dues cintes de Moebius

$K=$ 



Sense més preliminars! VOILÀ!

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ Tota superfície compacta i connexa és homeomorfa a una i només una d'aquestes

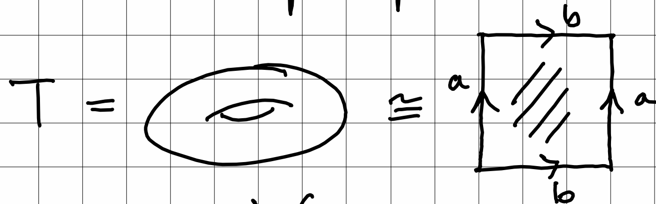
S_g, $g \geq 0$,

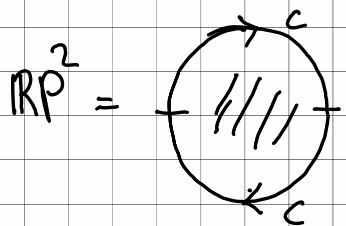
N_h $h > 0$.

Els ingredients per la classificació no són obvis i redueixen el problema a una situació combinatòria ... proper capítol!

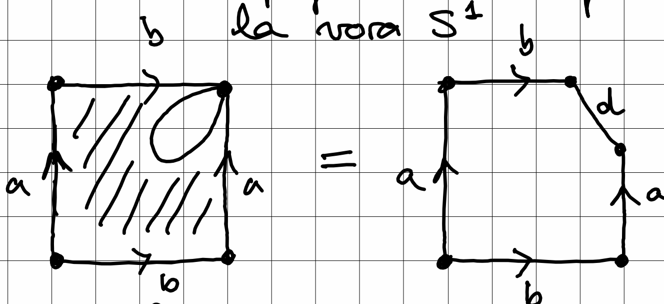
Acabem amb un exemple per veure què vol dir la unicitat. Què passa si combinem N_g i S_g?

Qui és $T \# \mathbb{RP}^2$? És a dir $S_1 \# N_1$?
Aquest exemple també ens ajuda a veure una tècnica que aplicarem en la classificació.



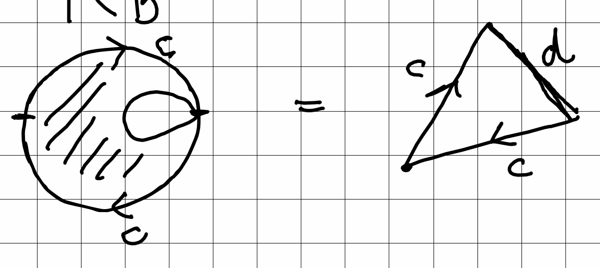


$T \# \mathbb{RP}^2$ s'obté retallant una bola oberta a cada superfície i identificant els punts de la vora S^1



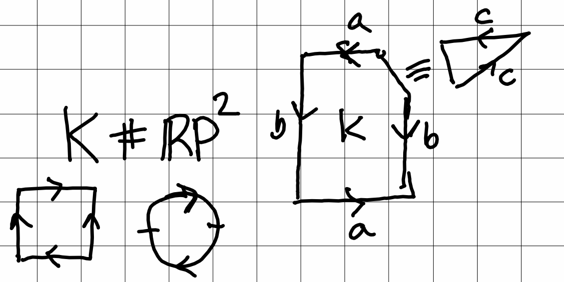
on $d \cong S^1$

$T \setminus B$



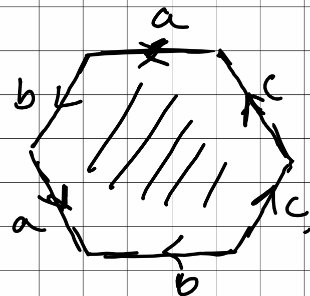
$d \cong \partial S^1$

Aleshores de la mateixa manera $K \# \mathbb{RP}^2$

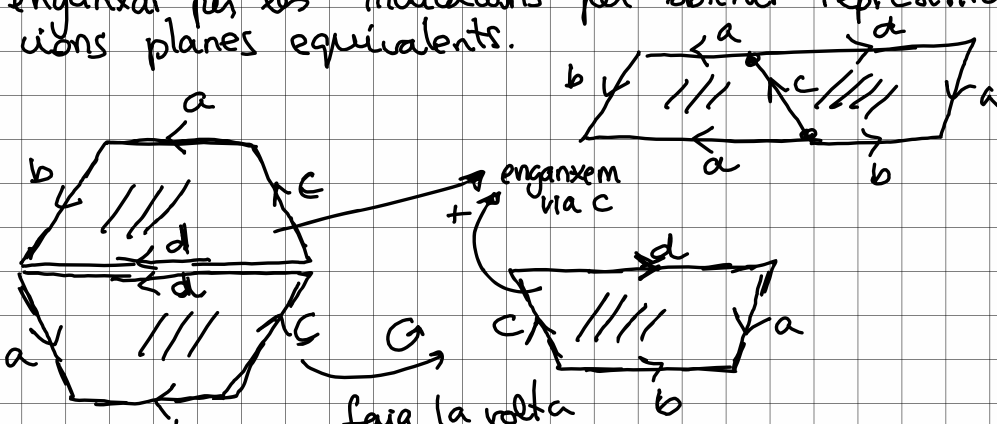


és una representació plana de la suma connexa.

És a dir

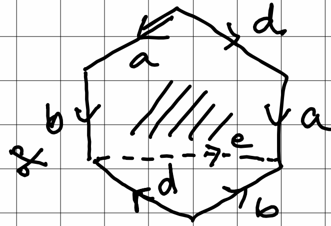


Ara bé, puc agafar les estisores i retallar i enganxar per les indicacions per obtenir representacions planes equivalents.

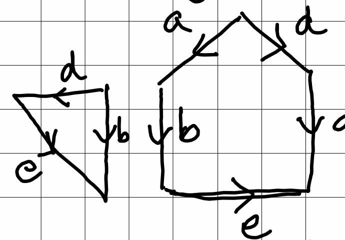


Ara tenim

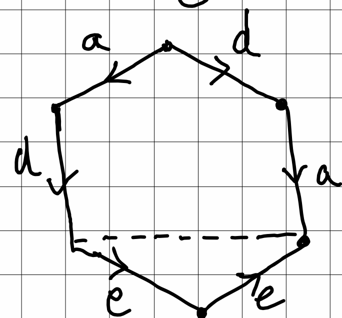
una representació plana equivalent!



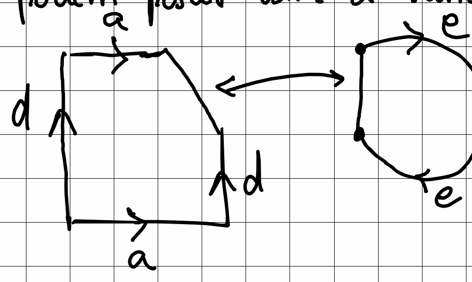
Les dues peces que hem obtenim retallant per la línia e les enganxem via b



I queda



Què podem posar com a suma connexa



$T \# \mathbb{RP}^2$

<u>Conclusió</u>: $T \# \mathbb{R}P^2 \cong K \# \mathbb{R}P^2 \cong \#_3 \mathbb{R}P^2$

(un pla projectiu es menja un dònut i es reprodueix!)

Així qualsevol suma connexa de la forma

$$S_g \# N_h \cong N_{h+2g} \quad \text{si} \quad h > 0$$

La pregunta que queda per respondre és:

- qualsevol superfície compacta connexa es pot escriure com

$$S_g \# N_h \quad \text{per certs } g \geq 0,\ h > 0.$$

$$S_g \qquad g \geq 0$$

<u>Observació</u> Una manera de distingir S_g de N_h és observar si la superfície conté una cinta de Moebius.

Ara, com calculem g un cop sabem que la nostra superfície és orientable o no?