EL RETORN DE LES APLICACIONS (CONTÍNUES)

Setembre 2020

Natàlia Castellana

I ara, ja saps què és una aplicació contínua? Només cal copiar la caracterització que vam obtenir per espais mètrics fent servir oberts.

DEFINICIÓ Siguin (X, τ_X) i (Y, τ_Y) dos espais topològics. Diem que una aplicació $f: X \to Y$ és contínua si l'antiimatge d'un obert és obert, i.e.

$$f^{-1}(U) \in \tau_X \text{ si } U \in \tau_Y.$$

Si X, Y són espais mètrics, aleshores les funcions contínues també ho són com a espais topològics.

EXEMPLES

(1) $id: (X, \tau) \longrightarrow (X, \tau)$ és contínua:

$$id^{-1}(U) = U \in \tau \text{ si } U \in \tau$$

I si considerem $id: (X, \tau) \longrightarrow (X, \tau')$ on ara tenim topologies diferents en un mateix conjunt X? És contínua si es compleix:

$$id^{-1}(U) = U \in \tau \text{ si } U \in \tau'$$

i.e. $\tau' \subset \tau$ (els oberts a τ' també ho són a τ)
τ és més fina que τ'.

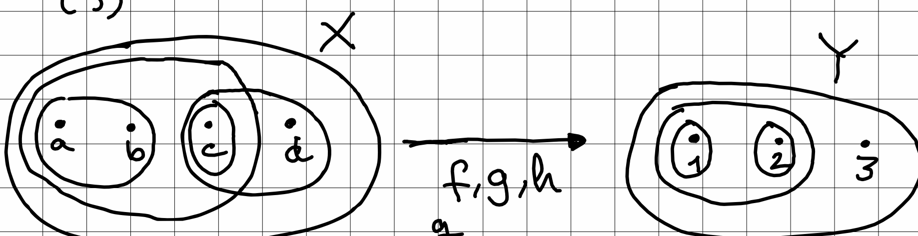
(2) Denotem X_d l'espai topològic $(X, \mathcal{T}_d)$ amb la topologia discreta i
X_g l'espai topològic $(X, \mathcal{T}_g)$ amb la topologia grollera.

Com que $\mathcal{T}_d$ és la topologia més fina i $\mathcal{T}_g$ la menys fina tenim que si Y és un espai topològic, les aplicacions

$$X_d \longrightarrow Y$$
$$Y \longrightarrow X_g$$

són sempre contínues.

(3)



$X \xrightarrow{f} Y$

X	Y
a	1
b	1
c	2
d	2

$X \xrightarrow{g} Y$

X	Y
a	2
b	2
c	1
d	3

$X \xrightarrow{h} Y$

X	Y
a	1
b	2
c	2
d	3

D'aquestes tres aplicacions, quines són contínues i quines no? Has de mirar les antiimatges dels oberts a Y, $\{\{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \emptyset\}$.

(4) L'aplicació constant és aquella que la seva imatge està formada per un sol punt.

Siguin X i Y espais topològics, $y_0 \in Y$, l'aplicació constant en y_0 és

$$c : X \longrightarrow Y, \quad c(x) = y_0 \text{ per tot } x \in X.$$

Fixeu-vos que si $U \subset Y$ obert

$$c^{-1}(U) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } y_0 \notin U \\ X & \text{si } y_0 \in U. \end{cases}$$

(5) Sigui $\mathbb{R}$ amb la topologia usual i $\mathbb{R}_{cf}$ amb la topologia cofinita.

Prenem $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{cf}$, $f(x) = \frac{x-1}{2}$.

És contínua? Sigui $U \subset \mathbb{R}_{cf}$, aleshores o bé $U = \emptyset$ o $\mathbb{R} \setminus U$ és finit. Si $U = \emptyset$, $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.
Si $\mathbb{R} \setminus U = \{x_1, \dots, x_n\}$ aleshores $U = \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$
i $f^{-1}(U) = \mathbb{R} \setminus \{2x_1+1, \dots, 2x_n+1\}$ (f bijectiva) que és obert a $\mathbb{R}$.

Per tant, f és contínua.

Si prenem $id : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{cf}$ i $id : \mathbb{R}_{cf} \longrightarrow \mathbb{R}$, són contínues? Les podem comparar? quina és més fina?

Es podria desenvolupar tot el que hem fins ara posant èmfasi en la col·lecció de subconjunts tancats enlloc dels oberts. Per exemple en la definició d'aplicació contínua

Proposició Siguin X i Y espais topològics, i $f: X \to Y$ una aplicació.

f és contínua sii $\left[\begin{array}{l}\text{donat } C \subset Y \text{ tancat tenim} \\ \text{que } f^{-1}(C) \text{ és tancat}\end{array}\right]$

Demostració

Sigui $A \subset Y$, es compleix $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$.

Aleshores és clar.

$\Rightarrow$) Sigui $C \subset Y$ tancat, aleshores $Y \setminus C$ és obert i com que f és contínua,

$$X \setminus f^{-1}(C) = f^{-1}(X \setminus C) \text{ és obert}$$

i per tant $f^{-1}(C)$ és tancat.

$\Leftarrow$) Hem de veure que l'antiimatge d'un obert és obert.

Sigui $U \subset Y$ obert, aleshores $Y \setminus U$ és tancat. Per tant $f^{-1}(Y \setminus U) = X \setminus f^{-1}(U)$ és tancat per hipòtesis. Així $f^{-1}(U) \subset X$ és obert

#

Les aplicacions entre conjunts es poden composar i ara veiem que preserven la continuitat.

PROPOSICIÓ Siguin $f: X \to Y$, i $g: Y \to Z$ dues aplicacions contínues entre espais topològics. Alshores $g \circ f: X \to Z$ és contínua.

Demostració Recordeu què passa amb les antiimatgen al fer la composició:

$$(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$$

... (i no dic res més) ... #

Ara bé, que la composició sigui contínua no vol dir que g o f ho siguin.

Per exemple, sempre va bé pensar en les topologies 'extremes': discreta i grollera.

Sigui X un conjunt amb més d'un punt (què passa si $X = \{a\}$ amb X_g i X_d?), alshores $X_d \xrightarrow{id} X_g \xrightarrow{id} X_d$ contínua

$$X_g \xrightarrow{id} X_d \xrightarrow{id} X_g \quad \text{contínua}$$

però $X_g \xrightarrow[id]{} X_d$ no és contínua.

I si enlloc d'antiimatges ens preguntem per com és l'imatge d'un obert o un tancat?

És clar que la imatge d'un obert no té perquè ser obert, i el mateix amb tancat.

Pensa exemples ... [pista: discreta / grollera]

<u>DEFINICIÓ</u>: Diem que una aplicació entre espais topològics $f: X \to Y$ és oberta (resp. tancada) si per tot $A \subset X$ obert (resp. tancat) tenim que $f(A)$ obert (resp. tancat).

Fixeu-vos que a diferència de la continuïtat, no és cert que f tancada sii f oberta ja que no tenim una fórmula general pel complementari de la imatge.

De fet, així tenim tres possibilitats per a $f: X \to Y$

- contínua
- oberta
- tancada

Doncs...

EL MÓN DE LA TOPOLOGIA TAMPOC ÉS TERNARI!!

$f : X \to Y$

		contínua	oberta	tancada
1	$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=\begin{cases} x+1 & x>0 \\ 0 & \leq 0 \end{cases}$	✗	✗	✗
2	$id: X_d \to X_g \quad \lvert X\rvert > 1$	✓	✗	✗
3	$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=\begin{cases} 1 & x\geq 1 \\ 0 & x<0 \end{cases}$	✗	✗	✓
4	$X=(0,1)_g$ (grollera) $\quad (0,1)_g \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x)=x$	✗	✓	✗
5	$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$	✓	✗	✓
6	$X_g \xrightarrow{id} X_d \quad \lvert X\rvert > 1$	✗	✓	✓
7	$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} \quad f(x,y)=x$	✓	✓	✗
8	$id: X \to X$	✓	✓	✓

① $f(x) = \begin{cases} x+1 & x>0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$

- No és contínua : $\varepsilon < 1$ $f^{-1}(-\varepsilon, \varepsilon) = (-\infty, 0]$
- No és oberta : $f((-2,-1)) = \{0\}$
- No és tancada : $f([0,1]) = \{0\} \cup (1,2]$

② $id : X_d \longrightarrow X_g$, $|X|>1$ contínua però : si $\{x\} \subset X_d$, $\{x\}$ és obert i tancat però $\{x\} \subset X_g$ no és ni obert ni tancat ja que $\{x\} \neq \emptyset$ i $\{x\} \neq X$.

⑥ $id : X_g \longrightarrow X_d$, $|X|>1$ és oberta i tancada ja que $id(\emptyset) = \emptyset$ i $id(X) = X$ però no és contínua ja que $\{x\} \subset X_d$ és obert però $id^{-1}(\{x\}) = \{x\} \subset X_g$ no ho és.

③ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

- No és contínua : $f^{-1}(1-\varepsilon, 1+\varepsilon) = [0, +\infty)$ $\varepsilon < 1$
- No és oberta : $f(\mathbb{R}) = \{0,1\}$
- És tancada :
  si $C \subset \mathbb{R}$ aleshores $f(C) = \begin{cases} \{0\} \\ \{1\} \\ \{0,1\} \end{cases}$ tancats.

④ $f : (0,1)_g \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$.

- No és contínua : $f^{-1}(1/3, 2/3) = (1/3, 2/3) \subset (0,1)_g$ no és obert.
- No és tancada : $(0,1)$ a $(0,1)_g$ és tancat però $(0,1) \subset \mathbb{R}$ no ho és.
- És oberta : $f(\emptyset) = \emptyset$ i $f(0,1) = (0,1) \subset \mathbb{R}$ obert.

(5) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

- És contínua
- No és oberta : $f(-\varepsilon, \varepsilon) = [0, \varepsilon^2)$
- És tancada

(7) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x$

- És contínua
- És oberta : sigui $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ obert. Sigui $x \in f(\mathcal{U})$; existeix $y \in \mathbb{R}$ amb $(x,y) \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$. Hi ha $\delta > 0$ tal que $B((x,y), \delta) \subset \mathcal{U}$. Però alashores $(x-\delta, x+\delta) \subset f(\mathcal{U})$. Per tant $f(\mathcal{U})$ obert.
- No és tancada : sigui $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underset{x>0}{y = \ln(x)}\}$ la gràfica del logaritme. $C \subset \mathbb{R}^2$ és tancat però $f(C) = (0, +\infty)$.

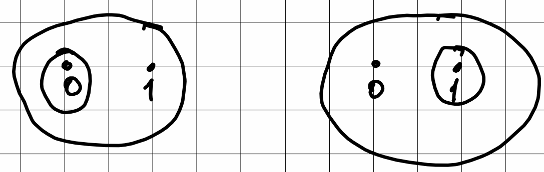
(8) $id : X \to X$ .... res a dir oi? contínua, oberta i tancada.

Fins ara no hem dit res d'una altra construcció... si $f : X \to Y$ és bijectiva alashores té inversa $f^{-1} : Y \to X$ .... és contínua si f ho és ?.

La resposta ja la sabeu .... NO!

$id : X_d \to X_g$ si $|X| > 1$.

I aquí ve la definició que ens permet dir quan dues topologies són la mateixa, per exemple, els dos espais de Sierpinski



$X = \{0,1\}$

$\tau_0 = \{\emptyset, X, \{0\}\}$ $\qquad$ $\tau_1 = \{\emptyset, X, \{1\}\}$

$$\tau_0 \neq \tau_1$$

però no diríeu que en el fons és la mateixa canviant 0 per 1?

És a dir, $f : (X, \tau_0) \longrightarrow (X, \tau_1)$ és contínua,

$$0 \longmapsto 1$$
$$1 \longmapsto 0$$

bijectiva i la seva inversa, $f^{-1} = f$ també és contínua. Tenim una bijecció de conjunts i oberts també.

<u>DEFINICIÓ</u> Siguin X, Y espais topològics, $f : X \to Y$ una aplicació és un homeomorfisme si f és contínua, bijectiva amb inversa f^{-1} contínua.

Diem que X i Y són homeomorfs si existeix un homeomorfisme $f : X \to Y$, i escriurem $X \cong Y$.

Fixeu-vos que un homeomorfisme "ha d'enviar" oberts a oberts i tancats a tancats.

PROPOSICIÓ Sigui $f: X \to Y$ una aplicació bijectiva contínua entre espais topològics.

f és un homeomorfisme sii f és tancada sii f és oberta.

Dem Veurem que f^{-1} és contínua sii f oberta.

→ Fixeu-vos que, com f és bijectiva, tenim $f^{-1}: Y \to X$ compleix, donat $A \subset X$

$$(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$$

Així f^{-1} contínua si per tot $A \subset X$ obert tenim que $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$ és obert, és a dir, f és oberta.

Igualment per tancats. f^{-1} contínua si per tot $A \subset X$ tancat tenim que $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$ és tancat, és a dir, f tancada.

#

EXEMPLES

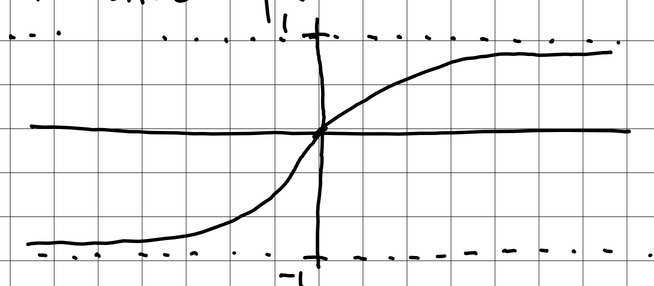
(1) Sigui $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ amb $f(x) = 3x+1$. És contínua, bijectiva amb inversa $f^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{3}$ que també és contínua.

OBSERVACIÓ: Si (X,d) és un espai mètric, $A \subset X$, aleshores A també ho és prenent

$$d: A \times A \hookrightarrow X \times X \longrightarrow \mathbb{R}.$$

I per tant (A,d) dona lloc a un espai topològic amb aquesta mètrica.

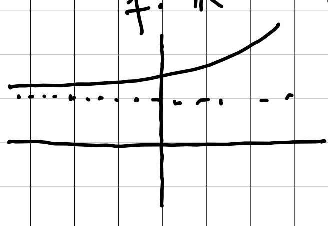
(2) Sigui $f: \mathbb{R} \to (-1,1)$ donada per $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ és un homeomorfisme.

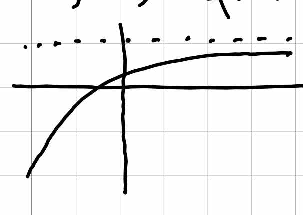


Per tant $\mathbb{R} \cong (-1,1)$

(3) $f: \mathbb{R} \longrightarrow (a,+\infty)$ $\quad f(x) = e^x + a \quad a \in \mathbb{R}$

$f: \mathbb{R} \longrightarrow (-\infty,a)$ $\quad f(x) = -e^x + a$





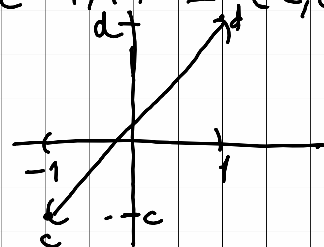
són homeomorfismes

PROPIETAT: Si $X \cong Y$ i $Y \cong Z$ alashores podem comprovar que $X \cong Z$ ja que la composició d'homeomorfismes és un homeomorfisme, recordem que
$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$$

Alashores

$$(-\infty, a) \cong \mathbb{R} \cong (a, +\infty) \quad ; \quad \mathbb{R} \cong (a, +\infty) \cong (-\infty, a] \cong$$
$$\mathbb{R} \cong (-1, 1) \qquad \cong (-1, 1] \cong$$
$$\cong (c, d). \quad a, c<d \in \mathbb{R}$$

Nota: Donats $c<d \in \mathbb{R}$, proveu que
$$(-1, 1) \cong (c, d)$$

(Pista  busqueu la recta)

(4) $a<b \in \mathbb{R}$, $g : [0,1] \longrightarrow [a,b]$
$$g(x) = (b-a)x + a$$
és un homeomorfisme, $[0,1] \cong [a,b]$

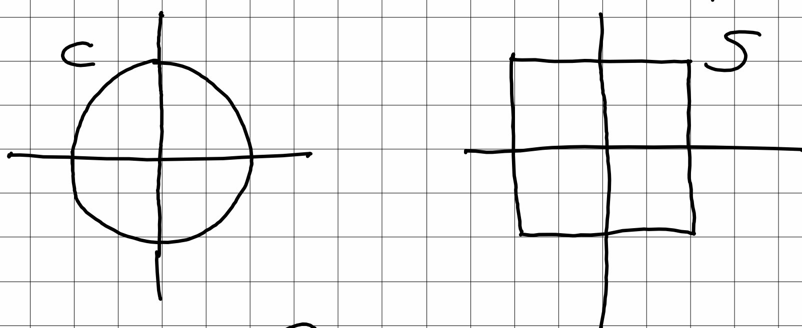
Tots els intervals tancats són homeomorfs entre ells.

(5) Fent servir les idees de (3) i (4) proveu que donats $a<b$, $c<d$, $e, f \in \mathbb{R}$ tenim

$$[a,b) \cong (c,d] \cong (-\infty, e] \cong [f, +\infty).$$

(6) Sigui $S \subset \mathbb{R}^2$, $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x|,|y|\} = 1\}$

$C \subset \mathbb{R}^2$, $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$



$$S \cong C$$

$$f : S \longrightarrow C \qquad f^{-1} : C \longrightarrow S$$

$$(x,y) \longmapsto \frac{(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad (x,y) \longmapsto \frac{(x,y)}{\max(|x|,|y|)}$$

són contínues. Aleshores $S \cong C$.

Ara acabem amb un exemple d'aplicació contínua bijectiva que no és homeomorfisme.

(7) Sigui $f : [0, 2\pi) \longrightarrow S^1 \subset \mathbb{R}^2$.
$\theta \longmapsto (\cos\theta, \sin\theta)$

Sabem que és contínua i bijectiva. Tot punt de S^1 es parametritza de forma única per un angle entre 0 i 2π.

Per a ser homeomorfisme hauria de passar que f fos oberta.

Ara bé $[0, \pi/2) = B(0, \pi/2) \subset [0, 2\pi)$ és obert.

$$\{x \in [0, 2\pi) \mid d(x, 0) < \pi/2\}$$

Però $f([0, \pi/2)) \subset S^1$ no és obert! ja que per tot $\delta > 0$,

$$B((1,0), \delta) \subset S^1 \quad , \quad f(0) = (1,0)$$

conté punts (x,y) amb coordenada $y < 0$ i $f([0, \pi/2))$ no.

- Fixeu-vos $B(0, \pi/2) \subset [0, 2\pi)$

$$\{x \in [0, 2\pi) \mid |x| < \pi/2\} = [0, \pi/2)$$

$$B((1,0), \delta) \subset S^1$$

$$\{(x,y) \in S^1 \mid \sqrt{(x-1)^2 + y^2} < \delta\}$$