La definició d'espai topològic és molt general i per tant, molt difícil provar teoremes en aquest context tan ampli. A la pràctica s'estudien diferents classes d'espais topològics que poden ser més o menys generals. Les restriccions que imposem poden ser de diferents tipus. En aquest seminari discutirem un tipus de restricció: els axiomes de separació que es refereixen a les diferents maneres en que podem "separar" punts i tancats en un espai topològic. Anirem de propietats menys restrictives a més restrictives. El que és important és que siguin propietats topològiques, és a dir, si X les satisfà i Y és homeomorf a X aleshores Y també la satisfà.

Per què la lletra T? en alemany, axioma de separació és Trennungsaxiom.

1 De T_0 a T_2

Comencem amb el primer bloc d'axiomes per imposar restriccions.

Espais T_0 o Kolmogorov

Comencem amb la propietat menys restrictiva de totes les que veurem. Un espai topològic X és T_0 si per tot parell de punts diferents existeix un obert que conté un dels punts i no l'altre.

Fixeu-vos que la topologia grollera no és T_0 si X té més d'un punt, i que la topologia discreta discreta sempre ho és. Anem a veure un altre exemple "més fi" que no és T_0.

Sigui X un conjunt que té més d'un punt, i $A \subset X$ tal que $|X \setminus A| > 1$. Definim la següent topologia: els subconjunts oberts són els subconjunts de A i també el total X. Comproveu que és una topologia i que no compleix T_0. L'espai de Sierpinski sí és T_0.

Espais T_1 o Fréchet

Un espai topològic X és T_1 si per tot parell de punts diferents $x \neq y \in X$, existeix un obert $U \subset X$ tal que $x \in U$ i $y \notin U$. (Per simetria fixeu-vos que també existeix un obert $V \subset X$ tal que $y \in V$ i $x \notin V$).

És clar que T_1 és una propietat més restrictiva que T_0: tot espai topològic T_1 és T_0 però no al revès. Un exemple d'espai T_0 que no és T_1 ja el coneixem....l'espai de Sierpinski. Però aquí en teniu un altre. Sigui X un conjunt amb més d'un punt, i ara definirem els subconjunts tancats. Fixem $x_0 \in X$ i declarem: un subconjunt és tancat si és buit o bé conté $\{x_0\}$.

Per un espai topològic general hi ha caracterizacions diferents de la propietat T_1. Són equivalents:

1. X és T_1
2. Per tot $x \in X$, $\{x\}$ és la intersecció de tots els entorns del punt x.
3. Per tot $x \in X$, $\{x\}$ és tancat.

Un exemple d'espai topològic que és T_1 és el de la topologia cofinita en un conjunt. Ara bé, la topologia cofinita en un conjunt X infinit no és Hausdorff....per què? aquesta serà la propietat T_2.

Espais T_2 o Hausdorff

Un espai topològic X és T_2 (o de Hausdorff) si per tot parell de punts diferents $x \neq y \in X$, existeixen oberts $U, V \subset X$ tal que $x \in U$, $y \in V$ i $U \cap V = \varnothing$.

Altre cop T_2 és una propietat més restrictiva que T_1: tot espai topològic T_2 és T_1 però no al revès. Per exemple, com ja hem vist la topologia cofinita en un conjunt infinit.

També hi ha diferents caracterizacions de la propietat T_2 per un espai X. Són equivalents:

1. X és T_2.
2. Per tot $x \in X$, $\{x\}$ és la intersecció de tots les clausures del punt x.
3. La diagonal $\Delta(X) = \{(x,x) \in X \times X | x \in X\} \subset X \times X$ és tancat.

Però, que dos conjunts $U, V \subset X$ siguin disjunts no vol dir que estiguin "separats", és a dir, pot passar que $\mathrm{Cl}(U) \cap \mathrm{Cl}(V) \neq \varnothing$. Diem que $U, V \subset X$ estan separats si $\mathrm{Cl}(U) \cap \mathrm{Cl}(V) = \varnothing$. Així podem posar una condició una mica més restrictiva.

Un espai topològic X és $T_{2\frac{1}{2}}$ (o de Urysohn) si per tot parell de punts diferents $x \neq y \in X$, existeixen oberts separats $U, V \subset X$ tal que $x \in U$, $y \in V$.

Es pot comprovar que aquesta és més restrictiva que T_2 però hi ha exemples de T_2 que no són $T_{2\frac{1}{2}}$, no ens n'ocuparem ara.

2 De T_3 a T_4

D'aquí en endavant assumirem que els nostres espais són T_1 ja que voldrem que els punts sigui tancats per a que les noves propietats segeueixin sent més restrictives que les anteriors.

Espais T_3 o regulars

Un espai topològic X és T_3 (o regular) si és T_1 i donats $x \in X$ i $F \subset X$ tancat amb $x \notin F$, existeixen oberts $U, V \subset X$ tal que $x \in U$, $F \subset V$ i $U \cap V = \varnothing$.

Cal que X sigui T_1 per a que sigui una condició més restrictiva que T_2, tot espai T_3 aleshores també és T_2. Ara, construir exemples de T_2 que no són T_3 ja és una mica més complicat.

Anem a veure'n un! Sigui $X = \mathbb{R}$ la recta real, i $Z = \{\frac{1}{n} | 0 \neq n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}$. Considerem els subconjunts $U_n(x) = (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})$ si $x \neq 0$ i $U_n(0) = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \setminus Z$, i prenem $\mathcal{B} = \{U_n(x) | n \in \mathbb{N}, x \in X\}$. La col·lecció $\mathcal{B}$ compleix les propietats per generar una topologia a la recta real. Fixeu-vos que Z és tancat a X, $0 \notin Z$ però tot obert que contingui Z i tot obert que contingui 0 s'han de tallar.

També hi ha altres caracterizacions de la propietat T_3. Són equivalents:

1. X és T_3.
2. Per tot $x \in X$ i $x \in U \subset X$ obert, existeix un obert $V \subset X$ tal que $x \in \mathrm{Cl}(V) \subset U$.

Espais T_4 o normals

Un espai topològic X és T_4 (o normal) si és T_1 i donats $K \subset X$ i $F \subset X$ tancats disjunts, existeixen oberts $U, V \subset X$ tal que $K \subset U$, $F \subset V$ i $U \cap V = \varnothing$.

Els espais mètric són normals. Hi ha caracterizacions diferents de la propietat T_4. Són equivalents:

1. X és T_4.
2. Per tot $K \subset X$ tancat i $K \subset \mathcal{U} \subset X$ obert, existeix un obert $\mathcal{V} \subset X$ tal que $K \subset V \subset \mathrm{Cl}(V) \subset U$.

$$\boxed{T_4 \subsetneq T_3 \subsetneq T_2 \subsetneq T_1 \subsetneq T_0} \tag{1}$$

Appendix: El Lemma d'Uryshon

Aquest és un resultat MOOOOLT important en topologia ja que permet construir aplicacions cap a $[0,1]$. És una propietat de separació per funcions contínues. Diu així (i és equivalent a T_4):

Sigui X un espai normal, i $A, B \subset X$ tancats, aleshores existeix una funció contínua $f\colon X \to [0,1]$ tal que $A \subset f^{-1}(0)$ i $B \subset f^{-1}(1)$.

En aquest seminari es descriu un guió d'apunts sobre els axiomes de separació amb exemples per veure que són diferents. En aquesta entrega heu de desenvolupar un petit treball/apunts on es descriuen les propietats, els diferents exemples i caracteritzacions equivalents de manera que un altre alumne el pogués llegir com uns apunts d'aquesta petita part de l'assignatura. A banda de les demostracions que hi falten, heu de donar-li la forma que creieu convenient.

Entrega:

1. Tots esteu donats de alta en Teams en equips que contenen el grup que us va apuntar i teniu un número d'equip assignat.
2. En els documents pdf que entregueu no hi ha de constar el vostre nom per enlloc, ha de ser anònim.
3. Aquest seminari 2 l'entregaran els grups parells. La data límit és el 26 de novembre a les 9 del matí.
4. Els grups senars rebran un dels pdfs entregats i hauran de fer-ne una revisió comentada i verificar la correcció dels arguments. El rebran el mateix dia 26 de novembre i tindran de marge fins el 3 de desembre a les 9 del matí.
5. Tots els documents els haureu de penjar en el canal de teams que teniu assignat.