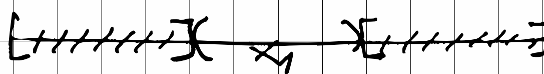
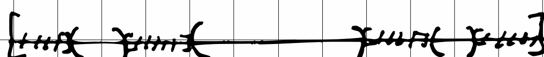
EL CONJUNT DE CANTOR

Va ser definit per Cantor (1883) com un subespai de $[0,1]$. Considerem els següents subconjunts. Sigui $I := [0,1]$

$$X_1 = (1/3, 2/3) \qquad I_1 = I \setminus X_1$$



$$X_2 = X_1 \cup (1/9, 2/9) \cup (7/9, 8/9) \qquad I_2 = I \setminus X_2$$



i així successivament,

$$X_{n+1} = X_n \cup \left[\bigcup_{k=0}^{3^n-1} \left(\frac{1+3k}{3^{n+1}}, \frac{2+3k}{3^{n+1}} \right) \right], \quad I_{n+1} = I \setminus X_{n+1}$$

Fixeu-vos que $X_i \subset I$ és un obert ja que és una unió d'oberts i per tant els complementaris I_i són tancats, per tot $i = 1, 2, \dots$

<u>Definició</u> El conjunt de Cantor és $C = \bigcap_{n \geq 0} I_n$.

(també $C = I \setminus \left(\bigcup_{n \geq 0} X_n \right)$)

També es pot definir com el subconjunt d'I de tots els nombres reals que al expressar-los en base 3 es pot fer sense usar el dígit 1

$$x = \sum_{i \geq 0} a_i 3^{-i}, \quad a_i \neq 1 \text{ per tot } i.$$

$\left[0'\widehat{2} = 1 \right.$
$\left. 0'0\widehat{2} = 0'1 \right]$
...

PROPIETATS

(1) $C \neq \emptyset$ ja que $0 \in C$ i $1 \in C$ (obs: $1 = 0'\hat{2}$)

(2) C és tancat.

(3) C no conté cap interval: si contingués un interval $[a,b] \subset C \subset [0,1]$ alshores en base 3 si tenim

$$a = \sum_{i \geq 0} a_i 3^{-i} \qquad b = \sum_{i \geq 0} b_i 3^{-i}$$

Podem considerar el k més petit tal que $a_k \neq b_k$. A la força $a_k = 0$, $b_k = 2$. Per tant existeix $N > 0$ tal que $b - a > \frac{1}{3^N}$.,

$$a < a + \frac{1}{3^N} < b$$

Com que C és la intersecció d'intervals tancats, de longitud cada cop més petita, C està contingut en una intersecció d'intervals de longitud menor que $b-a$, alshores C no pot contenir $b-a$.

(4) $\mathrm{Int}_I(C) = \emptyset$ ja que hem vist que no conté cap interval

(5) Per tant, C no té la topologia discreta.

(6) C no és numerable (repasseu la demostració que $[0,1]$ no és numerable).