1. Sigui X un espai topològic i $A \subset X$. Considerem A amb la topologia subespai.
   (a) Proveu que $K \subset A$ és tancat si i només si existeix $L \subset X$ tancat tal que $K = A \cap L$.
   (b) Donat $D \subset A$, sigui $\mathrm{Cl}_A(D)$ la clausura com a subconjunt d' A i $\mathrm{Cl}_X(D)$ com a subconjunt d'X. Proveu que $\mathrm{Cl}_A(D) = \mathrm{Cl}_X(D) \cap A$.
   (c) Sigui $D \subset A$ un subconjunt dens. Proveu que si A és dens a X, aleshores D també és dens a X.

2. Donats $a, b, c \in \mathbb{R}$, definim el següent subconjunt de $\mathbb{R}^2$
$$I_{a,b,c} = \{(c, y) \in \mathbb{R}^2 | a < y < b\}$$
i considerem la família de subconjunts $\mathcal{B} = \{I_{a,b,c} \subset \mathbb{R}^2 | a, b, c \in \mathbb{R}\}$.
   (a) Siguin $a_n = (\frac{1}{n}, 0)$ i $b_n = (0, \frac{1}{n})$ dues sucessions de punts a $\mathbb{R}^2$. Decideix si tenen límit o no amb la topologia τ, i calcula tots els possibles punts límit en cas de tenir-ne.
   (b) Denotem per $X = \mathbb{R}^2$ amb la topologia τ. Considera les aplicacions $id_1 \colon X \to \mathbb{R}^2$ i $id_2 \colon \mathbb{R}^2 \to X$ que són la identitat com a conjunts, on $\mathbb{R}^2$ té la topologia mètrica usual. Són contínues? Són tancades? Són obertes?
   (c) Prova que l'espai topològic X és homeomorf a l'espai topològic producte $\mathbb{R}_d \times \mathbb{R}$.

3. Sigui X un espai topològic i $K \subset X$ un subconjunt. Diem que $x \in X$ és un punt exterior a K si existeix un entorn $N \subset X$ que conté el punt x tal que $N \cap K = \emptyset$. Definim $\mathrm{Ext}_X(K) \subset X$ com el subconjunt de punts exteriors.
   (a) Prova que $K \subset X$ és dens si i només si $\mathrm{Ext}_X(K) = \emptyset$.
   (b) Prova la següent igualtat: $\partial K = X \setminus (\mathrm{Int}_X(K) \cup \mathrm{Ext}_X(K))$.
   (c) Sigui $f \colon X \to Y$ una aplicació contínua. Demostra que es compleix la següent inclusió $f^{-1}(\mathrm{Ext}_Y(K)) \subset \mathrm{Ext}_X(f^{-1}(K))$.
   (d) Sigui $A \subset X$ amb la topologia subespai. Prova que si $K \subset X$ aleshores es compleix la inclusió $\mathrm{Ext}_X(K) \cap A \subset \mathrm{Ext}_A(K \cap A)$.
   (e) Siguin X i Y espais topològics, i $A \subset X$, $B \subset Y$. Demostra la següent igualtat de subconjunts: $\mathrm{Ext}_{X\times Y}(A \times B) = (\mathrm{Ext}_X(A) \times Y) \cup (X \times \mathrm{Ext}_Y(B))$.

4. Direm que $f \colon X \to Y$ és una immersió topològica si és contínua, injectiva i la restricció a la imatge $X \to f(X)$ és un homemorfisme on $f(X) \subset Y$ té la topologia de subespai.
   (a) Donada una aplicació contínua $f \colon X \to Y$ prova que si existeix $g \colon Y \to X$ contínua tal que $g \circ f = id_X$ aleshores f és una immersió topològica.
   (b) Sigui $U \subset \mathbb{R}^n$ obert i $f \colon U \to \mathbb{R}^k$ una aplicació contínua, aleshores considerem l'aplicació graf $\Theta_f \colon U \to \mathbb{R}^{n+k}$ donada per $\Theta_f(x) = (x, f(x))$. Comprova que Θ_f és una immersió topològica.
   (c) Demostra que $f \colon [0, 1) \to \mathbb{R}^2$ definida per $f(t) = e^{2\pi i t}$ no és una immersió topològica.

5. És cert que el producte d'espais amb topologies cofinites té la topologia cofinita?

6. Sigui $f: X \to Y$ una aplicació contínua. Proveu:

   (a) Si $g: Y \to Z$ és contínua i $g \circ f$ és una aplicació quocient, aleshores g també ho és.

   (b) Si existeix $A \subset X$ de manera que $f|_A: A \to Y$ és un aplicació quocient aleshores f també ho és.