1. Sigui X un conjunt i $\{\tau_i\}_{i\in I}$ una família de topologies en X. És $\bigcup T_i \subset \mathcal{P}(X)$ una topologia? És base per alguna topologia? I què podem dir de $\bigcap T_i \subset \mathcal{P}(X)$?

2. Sigui X un conjunt amb un operador $\Phi\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ que compleix:

   (a) Si $A \subset X$, aleshores $A \subset \Phi(A)$.

   (b) Si $A, B \subset X$ aleshores $\Phi(A \cup B) = \Phi(A) \cup \Phi(B)$.

   (c) $\Phi(\varnothing) = \varnothing$.

   (d) $\Phi(\Phi(A)) = \Phi(A)$.

   Aleshores es pot definir una topologia on A és tancat sii $\Phi(A) = A$.

   - Què obtenim si definim el següent operador: fixat $B \subset X$ considera $\Phi(A) = A \cup B$?
   - Un altre exemple a $\mathbb{R}$ i la clausura Cl agafada a la topologia usual, prenem $\Phi(A) = \mathrm{Cl}(A) \cup \{0\}$ si A no està acotat i $\Phi(A) = \mathrm{Cl}(A)$ si A està acotat. Comproveu que compleix els requisits.

3. Sigui $X = \mathbb{Z}$. Definim els següents subconjunts

$$U_n = \begin{cases} \{n\} & n \text{ senar} \\ \{n-1, n, n+1\} & n \text{ parell} \end{cases}$$

   i definim la família $\mathcal{B} = \{U_n | n \in \mathbb{Z}\}$.

   (a) Proveu que la família τ formada per tots els subconjunts de X que es poden escriure com unions d'elements de $\mathcal{B}$ és una topologia.

   (b) Donats enters $n < m$, definim $I_{n,m} = \{n, n+1, \dots, m\}$, calculeu $\mathrm{Int}(I_{n,m})$, $\mathrm{Cl}(I_{n,m})$ i $\partial I_{n,m}$.

   (c) Sigui $f_k\colon X \to X$ definida com $f_k(x) = x + k$, per a quins valors de k és f_k un homeomorfisme?

4. Sigui X un espai topològic i $A \subset X$. Diem que A és un tancat regular si $A = \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(A))$.

   (a) Proveu que si $U \subset X$ és obert, aleshores $B = \mathrm{Cl}(U)$ és un tancat regular.

   (b) Siguin $A, B \subset X$ tals que A és un tancat regular. Proveu que si $\partial A \cap \mathrm{Int}(B) \neq \emptyset$ aleshores $\mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B) \neq \emptyset$.

5. Sigui X un conjunt no numerable i fixem $x_0 \in X$. Considereu la família de subconjunts de X

$$\mathcal{T} = \left\{ U \subseteq X \;\middle|\; U = \emptyset \text{ o bé } x_0 \in U \right\}$$

   (a) Demostreu que $(X, \mathcal{T})$ és un espai topològic.

   (b) Demostreu que si U és un obert diferent del buit, aleshores $Cl(U) = X$

   (c) Demostreu que si C és un tancat diferent de X, aleshores $Int(C) = \emptyset$

   (d) Demostreu que $(X, \mathcal{T})$ no admet cap base numerable d'oberts.

6. Sigui X un espai topològic i $A \subseteq X$. Demostreu:

   (a) $Int(A) = \emptyset$ si i només si $X \backslash A$ és dens a X

(b) $Int(A) \neq \emptyset$ si i només si per a tot subconjunt dens D de X, $D \bigcap A \neq \emptyset$

(c) A és un obert si i només si tot subconjunt B de X tal que $A \bigcap B = \emptyset$, satisfa $A \bigcap Cl(B) = \emptyset$

7. Sigui $f : X \to Y$ una aplicació entre espais topològics.

   (a) f és oberta sii $f(\mathrm{Int}(A)) \subset \mathrm{Int}(f(A))$.

   (b) Sigui f és contínua i oberta, i exhaustiva. Aleshores si $\mathcal{B}$ és una base de la topologia a X, $f(\mathcal{B})$ és una base per la topologia de Y.