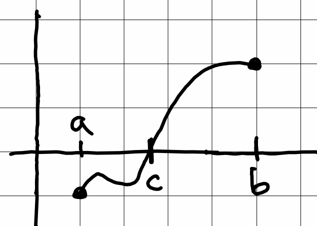
EL SECRET QUÈ S'AMAGA DARRERA EL TEOREMA DE BOLZANO: CONNEXITAT

Natàlia Castellana

Comencem també aquesta temporada amb uns deures: Busqueu en els vostres apunts de grau el teorema de Bolzano: si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ és una funció contínua amb $f(a)f(b)\leq 0$ aleshores existeix $c\in[a,b]$ amb $f(c)=0$ i repasseu la demostració



Intuïtivament ningú en dubta perquè l'interval és continu, la funció també... no tenen forats ni salts.

Ja el 1872 Cantor va mirar de formalitzar aquesta idea del continu. Informalment, prenia T tancat i acotat (en un espai mètric) tal que donats dos punts $t,t'\in T$ i $\varepsilon>0$ puc trobar una successió finita de punts $\{t_n\}$ de t a t' de manera que dos consecutius estan a distància més petita que ε.

Si prenem com a punt de partida aquesta idea de Cantor, podem seguir una evolució que acaba en la definició moderna de 1955.

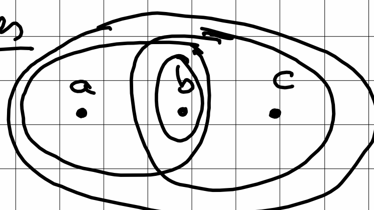
Una de les meves preferides és la de Nels Johan Lennes, 1911: un conjunt tal que sempre que s'escriu com unió de dues parts, una d'elles conté el límit d'una successió de punts de l'altra.

Anem per feina, directes a Kelley (1955).

Definició Sigui X un espai topològic, direm que X és connex si no existeixen oberts disjunts $U, V \subset X$ no buits ($U \cap V = \emptyset$) tals que $X = U \cup V$.

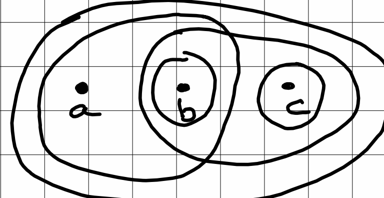
Contràriament, X és disconnex o no connex si es pot escriure com la unió disjunta de dos oberts $\neq \emptyset$, $X = U \cup V$ on $U, V \in \tau_X$, $U \cap V = \emptyset$

Exemples

1 

$\{a\}$ no és obert
$\{a,b\}$ sí però $\{c\}$ no.
$\{b\}$ obert però $\{a,c\}$ no.

CONNEX



$X = \{a,b\} \cup \{c\}$

DISCONNEX

2 $X = (-1,0) \cup (0,1) \subset \mathbb{R}$ és disconnex ja que $(-1,0) = X \cap (-\infty, 0)$ obert
$(0,1) = X \cap (0, +\infty)$ obert

$(-1,0) \cap (0,1) = \emptyset$

3 $\mathbb{R} \setminus \{p\}$ no és connex ja que
$\mathbb{R} \setminus \{p\} = (-\infty, p) \cup (p, +\infty)$

③ Ara mirem les topologies discretes i grolleres en un conjunt X.

Si $\#X > 1$ aleshores X_d no és connex ja que qualsevol descomposició en unió disjunta serà una descomposició en dos oberts disjunts, per exemple
$$X = \{x\} \cup (X \setminus \{x\}) = A \cup (X \setminus A)$$
on $A \subset X$ no buit.

X_g és connex ja que no hi ha oberts disjunts no buits en aquesta topologia.

I en el nostre univers paral·lel on hi ha una Natàlia que s'estima més els tancats? Com que el complementari d'un obert és un tancat només cal canviar obert per tancat

- X és connex si no existeixen $C, D \subset X$ tancats $\neq \emptyset$ disjunts amb $X = C \cup D$ $(C \cap D = \emptyset)$, $C, D \neq \emptyset$

És fàcil de veure ja que $X \setminus C = U$ obert i $X \setminus D = V$ és obert ... però $X \setminus C = D$ i $X \setminus D = C$. Per tant, $U, V \subset X$ de la definició també són tancats!

En un espai disconnex hi ha subconjunts oberts i tancats alhora $\neq \emptyset$, tancoberts!* En un espai connex no n'hi poden haver.

*Terminologia d'un company vostre en un examen. En anglès, clopen.

PROPOSICIÓ Sigui X un espai topològic. X és disconnex sii existeix $C \subset X$ diferent del buit i de X que és obert i tancat alhora.

Demostració Si X és disconnex aleshores $X = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ on $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \tau_X$, $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$, $\mathcal{U} \neq \emptyset, X$. Aleshores $\mathcal{V} = X \setminus \mathcal{U}$ és tancat. Per tant, és un tancobert :-).

Si existeix $C \subset X$, $C \neq \emptyset, X$ tancobert, aleshores $X \setminus C$ també compleix les mateixes propietats que C, en particular C, $X \setminus C$ són oberts,

$$X = C \cup (X \setminus C).$$

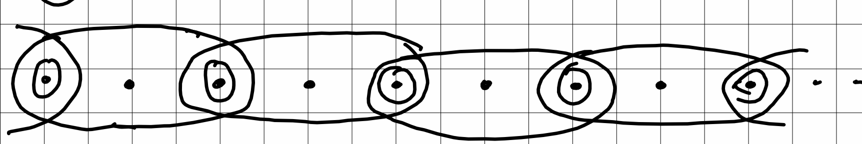
Així X és disconnex. #

Més exemples,

(4) $\mathbb{R}_\ell$, recordeu que té per base $\{[a,b) \mid a<b \in \mathbb{R}\}$ és la topologia del límit inferior. Vam veure que $[a,b)$ eren oberts i tancats alhora, així $\mathbb{R}_\ell$ no és connex, és disconnex.

$$\mathbb{R}_\ell = \underset{\mathcal{U}}{\underset{\shortparallel}{[a,b)}} \cup \big(\underbrace{(-\infty,a) \cup [b,+\infty)}_{\mathcal{V}}\big)$$

(5) I la topologia digital a $\mathbb{Z}$? (exercici)



⑥ I la topologia cofinita en un conjunt X infinit? Recordeu que tots els oberts no buits es tallen! No hi ha oberts disjunts no buits i per tant és connex.

Fins ara hem parlat de la connexitat de l'espai X però també voldrem, com per la compacitat, parlar de subconjunts connexos d'un espai topològic.

<u>Definició</u> $A \subset X$, X espai topològic, diem que A és un subconjunt connex si ho és amb la topologia subespai

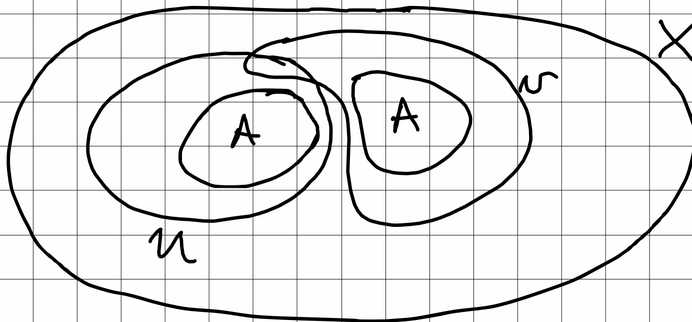
<u>Exemple</u> $X = \mathbb{R}$, $A = \underbrace{[-1,0)}_{U} \cup (0,1]$ és disconnex

U és obert : $U = (-\infty, 0) \cap A$
U és tancat : $U = (-\infty, 0] \cap A$

Ara, també volem una caracterització intrínseca al subconjunt $A \subset X$ i 2 sense involucrar la topologia subespai.

<u>PROPOSICIÓ</u>: Sigui $A \subset X$ on X espai topològic.

A és disconnex sii existeixen oberts $U, V \subset X$ tals que
$A \subset U \cup V$,
$A \cap U \neq \emptyset$
$A \cap V \neq \emptyset$
$A \cap U \cap V = \emptyset$.



<u>Demostració</u>

Suposem que A és disconnex, aleshores $A = \mathcal{U}' \cup \mathcal{V}'$ amb $\mathcal{U}', \mathcal{V}' \subset A$ oberts disjunts no buits a la topologia subespai. Per tant, existeixen $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subset X$ oberts amb $\mathcal{U}' = \mathcal{U} \cap A \subset \mathcal{U}$

$$\mathcal{V}' = \mathcal{V} \cap A \subset \mathcal{V}$$

Per tant,

$$A = \mathcal{U}' \cup \mathcal{V}' \subset \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$$
$$A \cap \mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \mathcal{U}' \cap \mathcal{V}' = \emptyset$$
$$A \cap \mathcal{U} = \mathcal{U}' \neq \emptyset$$
$$A \cap \mathcal{V} = \mathcal{V}' \neq \emptyset$$

Suposem ara que existeixen $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subset X$ complint les hipòtesis de la proposició, només cal agafar

$$\mathcal{U}' = \mathcal{U} \cap A \neq \emptyset$$
$$\mathcal{V}' = \mathcal{V} \cap A \neq 0 \quad \text{amb } \mathcal{U}' \cap \mathcal{V}' = \mathcal{U} \cap A \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$$

i $A = X \cap A = (\mathcal{U} \cup \mathcal{V}) \cap A = \mathcal{U}' \cup \mathcal{V}'$.

#

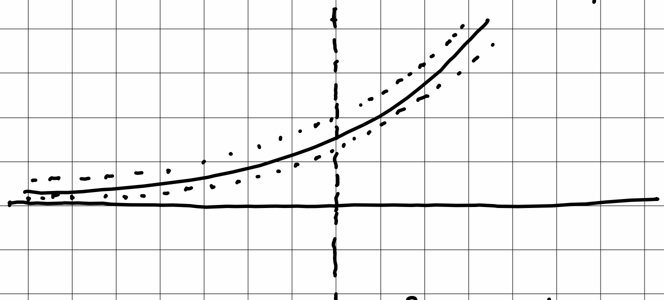
<u>Nota</u> És clar que X connex té $A \subset X$ disconnexos en general. Per exemple si tenim X infinit amb la topologia cofinita, $x \neq y \in X$ aleshores

$\{x, y\} \subset X$ és disconnex

$x \in \mathbb{R} \setminus \{y\} = \mathcal{U}$ oberts $\quad \mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \mathbb{R} \setminus \{y, x\}$

$y \in \mathbb{R} \setminus \{x\} = \mathcal{V}$ oberts $\quad \mathcal{U} \cap \mathcal{V} \cap \{x, y\} = \emptyset$.

Exemple ① $A \subset \mathbb{R}^2$ amb $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = e^x\}$
$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$



$\mathcal{U} = \{(x,y) \mid y > e^{x-1}\}$
$\mathcal{V} = \{(x,y) \mid y < e^{x-1}\}$, A no és connex

② $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ no és connex ja que

$$\mathbb{Q} = [(-\infty, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}] \cup ((\sqrt{2}, +\infty) \cap \mathbb{Q})$$

PROPOSICIÓ La connexitat és una propietat topològica, és a dir, si $X \cong Y$ i X connex aleshores Y també.

Fixeu-vos que si prenem $f: X \to Y$ un homeomorfisme aleshores si $A \subsetneq X$ és no buit i obert i tancat alhora, $f(A) \subsetneq Y$ és no buit i també obert i tancat alhora ja que f és oberta i tancada.

Però a més, es comporta bé amb les aplicacions contínues

És a dir, la imatge d'un espai topològic per una aplicació contínua és connexa.

TEOREMA: Sigui X, Y e.t., $f: X \to Y$ contínua. Si X és connex aleshores $f(X) \subset Y$ també.

Demostració: Veurem que si $f(X) \subset Y$ no és connex aleshores X tampoc. Si $f(X) \subset Y$ és disconnex aleshores existeixen oberts no buits $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subset Y$, tals que $f(X) \subset \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ i $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \cap f(X) = \emptyset$, a més $\mathcal{U} \cap f(X) \neq \emptyset$ i $\mathcal{V} \cap f(X) \neq \emptyset$.

Com que f és contínua, $f^{-1}(\mathcal{U}), f^{-1}(\mathcal{V}) \subset X$ són oberts no buits ja que $\mathcal{U} \cap f(X) \neq \emptyset$ i $\mathcal{U} \cap f(X) \neq \emptyset$. A més $X \subset f^{-1}(\mathcal{U}) \cup f^{-1}(\mathcal{V})$ ja que $f(X) \subset \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$. Finalment $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \cap f(X) = \emptyset$ tenim que

$$f^{-1}(\mathcal{U}) \cap f^{-1}(\mathcal{V}) = \emptyset.$$

Per tant X és disconnex #

Nota És cert que si $f: X \to Y$ és contínua i $A \subset X$ connex aleshores $f(A) \subset Y$ és connex, ja que $f(A) = f(i(A))$ on $i: A \hookrightarrow X$ i $f \circ i: A \hookrightarrow X \to Y$ és contínua.

I ara, per quines construccions es preserva la propietat de ser connex? unions? interseccions? clausures? De moment hem vist que es preserva per aplicacions contínues.

És clar que en general no anirà bé amb unions, la unió disjunta de dos espais topològics connexos no serà connex.

Per exemple, $X=\{a\}$, $Y=\{b\}$ són connexos.
Però si prenem la unió disjunta $X \sqcup Y$, aleshores $X \subset X \sqcup Y$ és obert i $Y \subset X \sqcup Y$ també.

Ep! Com és la topologia a la unió disjunta?

$U \subset X \sqcup Y$ és obert sii $U \cap X \in \tau_X$ i $U \cap Y \in \tau_Y$

La següent propietat dels subconjunts connexos és molt important i l'usarem vàries vegades en demostracions.

<u>LEMMA</u> Sigui X un espai topològic. Considerem uns subconjunts $C \subset D \subset X$. Sigui C connex. Si D disconnex i es pot escriure com $D = U \cup V$ amb $\emptyset \neq U, V \in \tau_X$ i $U \cap V \cap D = \emptyset$, aleshores $C \subset U$ o $C \subset V$.

<u>Demostració</u>: Suposem que $C \cap U \neq \emptyset$ i $C \cap V \neq \emptyset$. Aleshores com que $C \subset U \cup V$ i $C \cap U \cap V \subset D \cap U \cap V = \emptyset$, tindríem una descomposició de C en oberts disjunts a la topologia subespai i C no seria connex.

$\#$

Comencem veient en quines condicions podem assegurar que la unió de subconjunts connexos és connex.

PROPOSICIÓ Sigui X un espai topològic. Si $\{C_i\}_{i\in I}$ és una col·lecció de subconjunts connexos de X, tals que $\bigcap_{i\in I} C_i \neq \emptyset$, aleshores $\bigcup_{i\in I} C_i \subset X$ és connex.

Demostració: Suposem que $\bigcup_{i\in I} C_i$ no és connex. Aleshores podem escriure $\bigcup_{i\in I} C_i = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ on $\mathcal{U}, \mathcal{V} \neq \emptyset$, $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{T}_X$ amb

$$\mathcal{U} \cap (\bigcup C_i) \neq \emptyset$$
$$\mathcal{V} \cap (\bigcup C_i) \neq \emptyset$$
$$\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \cap (\bigcup C_i) = \emptyset$$

Prenem $x \in \bigcap_{i\in I} C_i \subset \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ (recordeu $\bigcap C_i \neq \emptyset$). Aleshores $x \in \mathcal{U}$ o $x \in \mathcal{V}$. Suposem $x \in \mathcal{U}$ i $x \notin \mathcal{V}$. En aquesta situació, per tot $i \in I$, $C_i \subset \mathcal{U}$ o $C_i \subset \mathcal{V}$ ja que són connexos, però com que $x \in \mathcal{U}$, tenim $C_i \subset \mathcal{U}$ per tot $i \in I$. Aleshores $\bigcup_{i\in I} C_i \subset \mathcal{U}$ i $(\bigcup C_i) \cap \mathcal{V} = \emptyset$. Arribant a contradicció!

#

Fent servir la proposició anterior i inducció no és difícil de veure que si tinc una col·lecció finita $\{C_i\}_{i=1,\dots,n}$ tal que $C_i \cap C_{i+1} \neq \emptyset$ per $i = 1, \dots, n-1$ i $C_i \subset X$ són connexos, aleshores $\bigcup_{i=1}^{n} C_i$ és connex.

Una aplicació de la proposició anterior té a veure amb la topologia producte. Fixeu-vos que ja sabem que el quocient d'un espai topològic connex és connex (ja que és la imatge per una aplicació contínua), ... però encara no sabem si $[0,1]$, $[0,1]^2$, ... ho són.

TEOREMA Sigui $X_1, X_2, \ldots, X_n$ espais topològics connexos, aleshores $X_1 \times \cdots \times X_n$ és connex.

Demostració: Fixeu-vos que una senzilla inducció redueix el problema al cas $n=2$. Per tant suposarem que tinc dos espais topològics X, Y connexos. Si X o Y són buits, $X \times Y = \emptyset$.

Per tot $x \in X$, sabem que $\{x\} \times Y \cong Y$ és connex. De la mateixa manera, per tot $y \in Y$, $X \times \{y\}$ és connex. Aleshores si fem la unió

$X \times \{y\} \cup \{x\} \times Y$ és connex ja que $(x,y) \in (X \times \{y\}) \cap (\{x\} \times Y) \neq \emptyset$.

Fixeu-vos que fixat $x_0 \in X$, puc escriure

$$X \times Y = \bigcup_{y \in Y} \{x_0\} \times Y \cup X \times \{y\}$$

$X \times Y$ està escrit com una unió d'espais topològics connexos

$$\{\{x_0\} \times Y \cup X \times \{y\}\}_{y \in Y}$$

amb intersecció no buida ja que

$$\{x_0\} \times Y \subset \bigcap_{y \in Y} (\{x_0\} \times Y \cup X \times \{y\})$$

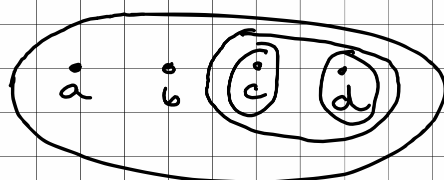
$\#$

Acabem aquest primer episodi amb una estratègia per construir nous espais topològics connexos amb els operadors clausura i interior.

Ens podem preguntar: si $A \subset X$ connex, és $\mathrm{Int}(A)$ connex? $\mathrm{Cl}(A)$ és connex?

Veiem que en el cas de l'interior podrem construir exemples en que no és cert.

X



$A = \{b, c, d\}$ és connex

però $\mathrm{Int}(A) = \{c, d\}$ no ho és.

<u>TEOREMA</u> Sigui $C \subset X$ un subconjunt connex d'un espai topològic X. Si $C \subset A \subset \mathrm{Cl}(C)$ alshores A és connex.

<u>Demostració</u> Si $C = \emptyset, X$ alshores $\mathrm{Cl}(C) = \emptyset, X$ i és clar.

Suposem A no és connex, aleshores existeixen oberts $\emptyset \neq U, V \subset X$ amb $U \cap A \neq \emptyset$ i $V \cap A \neq \emptyset$ i $A \subset U \cup V$ i $U \cap V \cap A = \emptyset$

Ara bé $C \subset A$ i és connex, hem vist que o bé $C \subset U$ o bé $C \subset V$. Suposem $C \subset U$ i per tant $C \cap V = \emptyset$. Recordem que $A \cap V \neq \emptyset$. Prenem $x \in A \cap V$, $x \in A \subset \mathrm{Cl}(C)$ i V és un entorn de x, per tant $V \cap C \neq \emptyset$ arribant a contradicció!

$(x \notin \mathrm{Cl}(C)$ i $x \in A$!! $)$

#

Els punts adherents a un connex es poden afegir sense modificar la propietat de connexitat. Això ens permetrà construir exemples 'curiosos' i 'simpàtics' d'espais topològics connexos.

Hi ha coses que passen en els espais topològics connexos que ens seran d'utilitat:

Proposició X espai topològic connex, $A \subset X$, amb $A \neq \emptyset, X$, aleshores $\partial A \neq \emptyset$.

Demostració Si $\partial A = \emptyset$ aleshores A és tancobert (obert i tancat alhora) i X no seria connex!

#

Proposició Sigui X espai topològic, $C \subsetneq X$ connex $\neq \emptyset$. Si $E \subset X$ tal que $C \cap E \neq \emptyset$ i $C \cap (X \setminus E) \neq \emptyset$ alshores $C \cap \partial E \neq \emptyset$.

Demostració Si $C \cap \partial E = \emptyset$, podem descompondre

$$C = (C \cap \mathrm{Int}(E)) \cap (C \cap (X \setminus \overline{E}))$$

i per tant C no seria connex.

#

I per acabar aquest episodi...

<u>Definició</u> Sigui X espai topològic. Diem que X és totalment disconnex si $|X| > 1$ i tot subconjunt amb més d'un punt és disconnex.

<u>Exemples</u>:

(0) X_d amb $|X| > 1$.

(1) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ és totalment disconnex: sigui $A \subset \mathbb{Q}$ amb $x \neq y \in A$, aleshores existeix $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ amb $x < z < y$, i una descomposició

$$A = \left((-\infty, z) \cap A \right) \cup \left((z, +\infty) \cap A \right)$$

(2) Sigui $\mathbb{R}_\ell$ la recta real amb la topologia del límit inferior, com que

$$\mathbb{R}_\ell = (-\infty, z) \cup [z, +\infty)$$

qualsevol $A \subset \mathbb{R}_\ell$, $x \neq y \in A$ es pot descomposar com

$$A = \left(A \cap (-\infty, z) \right) \cup \left(A \cap [z, +\infty) \right) \text{ on }$$

$$x < z < y.$$

(3) I el conjunt de Cantor?

En el següent episodi... com són els subconjunts connexos de $\mathbb{R}$?

Bonus track: en la classe ha sorgit la pregunta molt interessant sobre si el producte arbitrari de connexos és connex.

Sigui $\{C_i\}_{i\in I}$ una col·lecció d'espais topològics connexos. Considerem $\prod_{i\in I} C_i$ amb la topologia producte (no la de les caixes) amb

base $\mathcal{B} = \{\prod U_i \mid U_i \subset C_i$ obert i $U_i \subsetneq X_i$ per un nombre finit d'índexos$\}$

És $\prod_{i\in I} C_i$ connex?

Anem a fer una altra demostració del fet que $X\times Y$ és connex si X, Y ho són fent servir directament la definició.

Suposem $X\times Y = U \cup V$, $U, V \neq \emptyset$, $U\cap V = \emptyset$. Tenim les inclusions contínues

$$X \xhookrightarrow{i_X} X\times Y \qquad\qquad Y \xhookrightarrow{i_Y} X\times Y$$
$$x \longmapsto (x, y_0) \qquad\qquad y \longmapsto (x_0, y)$$

La idea és considerar $\{i_X^{-1}(U), i_X^{-1}(V)\}$ o $\{i_Y^{-1}(U), i_Y^{-1}(V)\}$ i arribar a contradicció amb el fet que X o Y són connexos.

El que farem és trobar $(x_1, y_1)\in U$, $(x_2, y_2)\in V$ que difereixin en només una coordenada i usar la inclusió de l'altra en el producte.

Prenem $(x_1,y_1)\in \mathcal{U}$, $(x_2,y_2)\in \mathcal{V}$. Si $x_1=x_2$ o $y_1=y_2$ ja tenim que difereixen en una coordenada. Si $x_1\neq x_2$ i $y_1\neq y_2$ alshores considerem $(x_1,y_2)\in X\times Y=\mathcal{U}\cup\mathcal{V}$

Si $(x_1,y_2)\in\mathcal{U}$ alshores prenem $\{\underset{\mathcal{U}}{\underset{\Uparrow}{(x_1,y_2)}}, \underset{\mathcal{V}}{\underset{\Uparrow}{(x_2,y_2)}}\}$

Si $(x_1,y_2)\in\mathcal{V}$ alshores prenem $\{\underset{\mathcal{U}}{\underset{\Uparrow}{(x_1,y_1)}}, \underset{\mathcal{V}}{\underset{\Uparrow}{(x_1,y_2)}}\}$.

Sense pèrdua de generalitat suposem que tenim $(x,y)\in\mathcal{U}$, $(x,y')\in\mathcal{V}$. Alshores considerem l'aplicació contínua

$$\begin{aligned} i: Y &\hookrightarrow X\times Y \\ y &\longmapsto (x,y) \end{aligned}$$

Podeu comprovar que $i^{-1}(\mathcal{U}), i^{-1}(\mathcal{V})\subset Y$ són oberts ja que i és contínua, $i^{-1}(\mathcal{U})\cap i^{-1}(\mathcal{V})=\emptyset$ i $Y=i^{-1}(\mathcal{U})\cup i^{-1}(\mathcal{V})$. Arribant a contradicció!

I ara, què penses? és $\prod_{i\in I} C_i$ connex en general?