PRODUCTES INFINITS

... reconeixes el conjunt de Cantor?

Natàlia Castellana

Donats $\{(X_i, \tau_i)\}_{i=1,..,n}$ una col·lecció finita d'espais topològics, la topologia producte a $X_1 \times \dots \times X_n$ és la topologia generada per

$$\mathcal{B} = \{ U_1 \times \dots \times U_n \mid U_i \in \tau_i, \ i=1,..,n \}$$

<u>Nota</u>: estaà pensant, però si norres hem fet el cas $n=2$! procedint inductivament tenim la topologia producte a qualsevol producte finit ja que una base del producte s'obté fent productes de bases.

Totes les propietats per $n=2$ també funcionen per productes finits.

Què ens impedeix fer la mateixa definició per productes que no siguin finits? Podem fer servir la mateixa estratègia:

Si $\{(X_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ és una col·lecció arbitrària d'espais topològics, aleshores definim a $\prod_{i \in I} X_i$ la topologia generada per

$$\mathcal{B} = \{ \prod_{i \in I} U_i \mid U_i \in \tau_i \}$$

Anem a testejar com de bona és aquesta topologia respecte propietats del producte.

Sigui $\prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{R}$ on $\mathbb{R}$ té la topologia usual.

Fixeu-vos que un element de $\prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{R}$ és una successió de nombres reals $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$. Estem posant una topologia a l'espai de les successions de nombres reals.

Considerem $f: \mathbb{R} \longrightarrow \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{R}$ definida com $f(a) = \{a\}$, la successió constant. Les projeccions a cada factor són la id

$$(\pi_i \circ f): \mathbb{R} \longrightarrow \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$a \longmapsto \{a\} \longmapsto a$$

i són contínues.

Per tant, f hauria de ser contínua. PERÒ si prenem

$$\mathcal{U} = \prod_{i=1}^{\infty} (-1/i, 1/i), \text{ alehores}$$
$$f^{-1}(\mathcal{U}) = \bigcap_{i=1}^{\infty} (-1/i, 1/i) = \{0\} \quad \text{NO és obert!}$$

f no és contínua malgrat ho és a cada coordenada! El problema sorgeix de fer una intersecció arbitrària d'oberts que no té perquè ser obert. $\left[f^{-1}\left(\prod_{i \in I} U_i\right) = \bigcap_{i \in I} U_i \right]$.

La topologia que ~~just~~ hem definit en productes arbitraris se li diu la topologia de les caixes però no és la topologia producte correcta.

DEFINICIÓ: Sigui $\{(X_i, \tau_i)\}_{i\in I}$ una col·lecció arbitrària d'espais topològics. La topologia producte a $\prod_{i\in I} X_i$ és la topologia generada per

$$\mathcal{B} = \left\{ \prod_{i\in I} U_i \;\middle|\; U_i \in \tau_i,\ i\ U_i = X_i \text{ excepte en un nombre finit d'}i \right\}$$

Observacions (1) Si el producte és finit, $|I| < \infty$, aleshores coincideix amb la topologia producte ja definida.

(2) En l'exemple $\prod^{\infty} \mathbb{R}$, $U = \prod_{i=1}^{\infty} (-1/i, 1/i)$ no és obert ara amb la topologia producte.

L' EXEMPLE: CONJUNT DE CANTOR

Recordem que el conjunt de Cantor és un subconjunt de $[0,1]$ i que com a espai topològic té la topologia subespai.

$$C = \left\{ x \in [0,1] \;\middle|\; x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i},\ a_i \neq 1 \text{ per tot } i \right\}$$

Com a conjunt tenim una aplicació

$$\varphi : \prod_{i=1}^{\infty} \{0,2\} \longrightarrow C$$

$$\{a_i\} \longmapsto \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \in [0,1]$$

$\prod_{i=1}^{\infty}\{0,2\}$ és el conjunt de successions de 0's i 2's.

φ és bijectiva per definició de C.

Considerem la topologia producte a $\prod_{i=1}^{\infty}\{0,2\}$ on $\{0,2\}$ és un espai topològic discret.

Si veiem que φ és contínua i oberta tindré un homeomorfisme entre C i l'espai de successions amb valor $\{0,2\}$ amb la topologia producte.

$$\varphi : \prod_{i=1}^{\infty}\{0,2\} \longrightarrow C$$
$$\{a_i\} \longmapsto \sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{3^i}$$

- φ és contínua: sigui $c\in C$, $\varepsilon>0$, aleshores $\mathcal{U}=B(c,\varepsilon)\cap C$ és un obert de la base com a subespai. Volem veure $\varphi^{-1}(\mathcal{U})$ és obert.

Sigui $\tilde{c}\in\prod_{i=1}^{\infty}\{0,2\}$ amb $\varphi(\tilde{c})=c$. Volem trobar un obert $\mathcal{V}\ni\tilde{c}$ amb $\varphi(\mathcal{V})\subset\mathcal{U}$.

Escrivim $c=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{c_i}{3^i}$, i prenem $N>0$ prou gran tal que

$$\sum_{i=N+1}^{\infty}\frac{c_i}{3^i}<\varepsilon$$

[Com ho fem? Sigui N tal que $\frac{1}{3^N}<\varepsilon$, alehores $\sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{c_i}{3^i} = \frac{1}{3^N}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_{N+i}}{3^i}\right) \leq$

$$\leq \frac{1}{3^N}\Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{3^i}}_{=1}\Big) = \frac{1}{3^N} < \varepsilon$$

El nostre candidat és $\mathcal{V} = \{c_1\} \times \dots \times \{c_N\} \times \prod_{i=N+1}^{\infty} \{0,2\}$

Comprovem-ho.

- $\tilde{c} \in \mathcal{V}$ ja que $\tilde{c} = \{c_i\}_{i=1}^{\infty}$

- Sigui $\{x_i\} \in \mathcal{V}$, aleshores $x_i = c_i$ per $i = 1, \dots, N$ i $x_i = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases}$ $i > N$. Aleshores $x = \varphi(\{x_i\}) \in C$,

$$|x - c| = \left|\sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{x_i - c_i}{3^i}\right| \leq \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{|x_i - c_i|}{3^i} \leq$$

$$\leq \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{2}{3^i} = \frac{1}{3^N} < \varepsilon$$

Per tant $\varphi(\{x_i\}) \in B(c,\varepsilon) \cap C = \mathcal{U}$.

- φ és oberta: n'hi ha prou amb comprovar que si $\mathcal{U}$ és un obert de la base aleshores $\varphi(\mathcal{U})$ és obert ja que $f\left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(\mathcal{U}_i)$.

Prenem $\mathcal{U} = \{a_1\} \times \dots \times \{a_N\} \times \prod_{N+1}^{\infty} \{0,2\}$, i $x \in \varphi(\mathcal{U})$ qualsevol, veurem que és interior.

Escrivim $x = x_N + x'$ on $x_N = \sum_{i=1}^{N} \frac{a_i}{3^i}$ i $x' \leq \frac{1}{3^N}$.

Volem veure que existeix $\varepsilon > 0$ tal que $B(x,\varepsilon) \cap C \subset \varphi(\mathcal{U})$.

Sabem $x \in [x_N, x_N + \frac{1}{3^N}]$ ja que $x - x_N \in [0, \frac{1}{3^N}]$ alshores

$$B := B(x, \tfrac{1}{3^N}) \subset (x_N - \tfrac{1}{3^N}, x_N + \tfrac{2}{3^N})$$

Ara bé,

$$x \in C \cap B \subset (x_N - \tfrac{1}{3^N}, x_N + \tfrac{2}{3^N}) \cap C \subset$$
$$\subset [x_N, x_N + \tfrac{1}{3^N}] \cap C = \varphi(\mathcal{U}).$$

#

ATENCIÓ Acabem de veure que malgrat el producte d'un nombre finit d'espais topològics discrets té la topologia discreta, no passa el mateix amb productes infinits.

$\{0,2\}$ té la topologia discreta PERÒ

$\prod_{i=1}^{\infty} \{0,2\} \cong C$ no té la topologia discreta

(recordeu $\mathrm{Int}(C) = \emptyset$).

Per acabar ens faltaria veure que amb la topologia producte, els productes arbitraris satisfant les mateixes propietats que els finits.

Per exemple, la continuitat d'aplicacions coordenada a coordenada.

Proposició Sigui $\{(X_i, \mathcal{T}_i)\}$ una col·lecció arbitrària d'espais topològics, i Z un espai topològic. Sigui $f : Z \longrightarrow \prod_{i \in I} X_i$,

f és contínua sii $(\pi_{X_i} \circ f) : Z \to X_i$ contínua per tot $i \in I$

Demostració

Les projeccions $\prod X_i \xrightarrow{\pi_{X_i}} X_i$ són contínues ja que si $U \in \mathcal{T}_i$, aleshores $\pi_{X_i}^{-1}(U) = \prod_{\substack{j \in I \\ j \neq i}} X_j \times U_i$ és obert a la topologia producte.

Per tant, si f és contínua aleshores $(\pi_{X_i} \circ f)$ és contínua per tot $i \in I$.

Suposem $(\pi_{X_i} \circ f)$ contínues per tot $i \in I$. Per veure que f és contínua, prenem un obert de la base $\prod_{i \in I} U_i$ on $U_i = X_i$ excepte en un nombre finit, posem $i_1, \ldots, i_n$.

$$f^{-1}\left(\prod_{i \in I} U_i\right) = \bigcap (\pi_{X_i} \circ f)^{-1}(U_i) = \begin{cases} \prod X_i & \text{si } U_i = X_i \text{ per tot } i \\ \bigcap_{k=1}^{n} (\pi_{X} \circ f)^{-1}(U_{i_k}) & \text{altrament} \end{cases}$$

Però en ambdos casos el resultat és un obert a Z : $\prod X_i$ és obert o

$$\bigcap_{k=1}^{n} \left(\pi_{X_{i_k}} \circ f\right)^{-1}(U_{i_k})$$ és una intersecció finita d'oberts ja que $(\pi_{X_i} \circ f)$ són contínues.

#

Podeu comprovar vosaltres mateixos les altres propietats. Per exemple,

(1) $\pi_{X_i} : \prod X_i \longrightarrow X_i$, la projecció és contínua i oberta.

(2) Si $\{f_i : X_i \longrightarrow Y_i\}$ és una col·lecció arbitrària d'aplicacions contínues entre espais topològics aleshores

$$\prod f_i : \prod X_i \longrightarrow \prod Y_i$$ és contínua.