VARIETATS TOPOLÒGIQUES:

QUAN MIRES AL TEU VOLTANT I L'ESPAI ÉS FAMILIAR

Natàlia Castellana

Què és una varietat topològica?

<u>DEFINICIÓ</u>: Una varietat topològica de dimensió n és un espai topològic M que compleix les següents tres condicions:

1. M és Hausdorff
2. La topologia de M admet una base numerable d'oberts.
3. Tot punt $x \in M$ admet un entorn $N \ni x$ tal que és homeomorf a $\mathbb{R}^n$ (equivalentment a una bola oberta de $\mathbb{R}^n$), i.e., existeix $\varphi : N \xrightarrow[\cong]{} \mathbb{R}^n$

Anem a fer unes observacions que responen a preguntes que segurament t'estàs fent.

La condició 3, vol dir que M és localment homeomorfa a $\mathbb{R}^n$? Diem que X espai topològic és localment euclidià si per tot $x \in X$ i obert $\mathcal{U} \ni x$ existeix un entorn $x \in N \subset \mathcal{U}$ amb N homeomorf a $\mathbb{R}^n$.

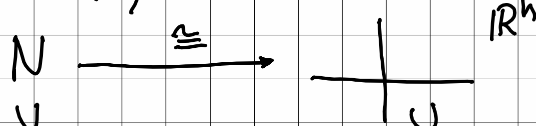
És clar que localment euclidià implica la condició 3 de la definició, i al revès?

Prenem $x \in M$, i $\mathcal{U} \subset M$ obert tal que $x \in \mathcal{U}$ i M és una varietat de dimensió n.
Aleshores existeix un entorn $x \in N$ i un homeomorfisme $\varphi : N \xrightarrow[\cong]{} \mathbb{R}^n$

Fixeu-vos que com que $\mathbb{R}^n \cong B(v, R) \subset \mathbb{R}^n$ per qualsevol $v \in \mathbb{R}^n$, $R > 0$ podem sempre canviar $\mathbb{R}^n$ per una bola oberta qualsevol. A més, sempre podem suposar que $\varphi(x) = 0$ ja que sinó composem amb l'homeomorfisme

$$t : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$v \longmapsto v - \varphi(x).$$

Com que $\mathrm{Int}(N) \neq \emptyset$ aleshores tenim



$$W := \mathrm{Int}(N) \xrightarrow[\cong]{} \varphi(\mathrm{Int}(N)) \text{ obert}$$

Així doncs, si M és una varietat, per tot $x \in M$ existeix un entorn obert $W \ni x$ i $V \subset \mathbb{R}^n$ obert, tal que són homeomorfs

$$\begin{array}{ccccc} M \supset & W & \xrightarrow[\cong]{\varphi} & V & \subset \mathbb{R}^n \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & \\ & x & & 0 & \end{array}$$

Com que $0 \in \varphi(\omega) = \mho \subset \mathbb{R}^n$ és obert, existeix $\varepsilon > 0$ tal que $B(0,\varepsilon) \subset \mho$. Així $\varphi^{-1}(B(0,\varepsilon)) = N' \ni x$ és un entorn obert de x amb

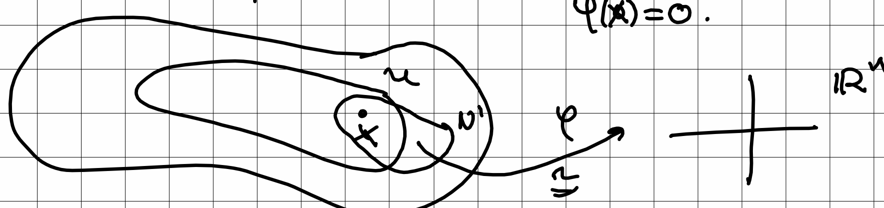
$$N' \xrightarrow[\cong]{\varphi} B(0,\varepsilon) \cong \mathbb{R}^n$$

N' és obert a M ja que és obert a $\omega \subset M$ que a la seva vegada és obert a M.

On som? Doncs donat $x \in M$ existeix un <u>obert</u> $N' \ni x$ tal que $N' \xrightarrow[\varphi]{\cong} B(0,\varepsilon) \cong \mathbb{R}^n$.

Aquesta és una altra manera de reescriure 3.

Ara tornem al principi: sigui $x \in M$, i $\mathcal{U} \ni x$ un obert qualsevol. Prenem $N \ni x$ un entorn obert tal que hi ha $\varphi : N \to \mathbb{R}^n$ homeomorfisme. $\varphi(x) = 0$.



$$\begin{array}{ccc} x \in \mathcal{U} \cap N' \text{ obert} & \longrightarrow & \varphi(\mathcal{U} \cap N') \ni 0 \\ \cap & & \wedge \\ N' & \xrightarrow[\varphi]{} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

Així, com que $\varphi(\mathcal{U} \cap N') \subset \mathbb{R}^n$ és obert, existeix $\varepsilon > 0$ amb $B(0,\varepsilon) \subset \varphi(\mathcal{U} \cap N')$. Per tant

$x \in \varphi^{-1}(B(0,\varepsilon)) \subset \mathcal{U}$ és un entorn obert homeomorf a $\mathbb{R}^n$. M és localment euclidià.

Així en particular hem vist que a la condició 3 podem suposar que N és obert. A més, a la literatura també trobarem la definició equivalent

- Per tot $x \in M$ existeix un obert $U \ni x$ i un homeomorfisme $\varphi: U \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ on V és un obert a $\mathbb{R}^n$.

Així fixeu-vos que la condició 3 és una condició <u>local</u>. Així es pot veure que les propietats topològiques de $\mathbb{R}^n$ es converteixen en propietats locals de les varietats.

<u>PROPIETATS LOCALS</u> Sigui M una varietat topològica de dimensió n, aleshores

- M és localment connexa
- M és localment connexa per camins
- M és localment compacte, per això cal considerar $\varphi^{-1}(Cl(B(0,\varepsilon))) \subset N$

$$N \xrightarrow[\cong]{\varphi} \mathbb{R}^n.$$

Per tant, les components connexes i arc-connexes són les mateixes.

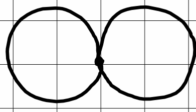
<u>COROL·LARI</u> Si M és una varietat de dim n, $\{M_i\}_{i \in I}$ components connexes, aleshores $M_i \subset M$ són obertes i tancades i $M \cong \coprod_{i \in I} M_i$ on I finit o numerable. A més cada M_i és una varietat de dimensió n.

A més, si M és compacta, cada M_i és és una varietat compacta connexa i I és un conjunt finit.

<u>Observació</u>: Com que és localment compacta, aleshores la compactificació d'Alexandroff és compacte Hausdorff ... però no necessàriament una varietat.

Per exemple, si $X = \mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}$ unió disjunta és clarament una varietat de dim 1 ja que cada $\mathbb{R}$ és un entorn dels seus punts complint la condició 3, X és Hausdorff i admet una base numerable d'oberts.

Qui és la seva compactificació d'Alexandroff? Recordeu que la compactificació d'$\mathbb{R}$ és S^1.

$\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R} \longrightarrow$  $= Y$

és la compactificació d'Alexandroff (exercici)

I Y no és una 1-varietat. Per què? pel mateix motiu que l'exemple 1 de la següent pàgina.

PROPOSICIÓ Ser varietat és una propietat topològica.

OBSERVACIONS:

(1) Les tres condicions són independents. Anem a veure exemples en que dues d'elles es compleixen i no la tercera.

• Exemple 1: Sigui $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\} \subset \mathbb{R}^2$. com a subespai.

- Veiem que X és Hausdorff ja que $X \subset \mathbb{R}^2$
- Com que $\mathbb{R}^2$ admet una base numerable d'oberts

$$\mathcal{B} = \{B((x,y),r) \mid x,y,r \in \mathbb{Q}\}$$

aleshores X també ja que una base per X és

$$\mathcal{B}' = \{B \cap X \mid B \in \mathcal{B}\}.$$

- Ara bé, no compleix la condició 3. Suposem que hi ha un entorn obert $\mathcal{U} \ni (0,0)$ homeomorf a $\mathbb{R}$ (la dimensió ha de ser 1 ja que els altres punts tenen entorns homeomorfs a $(a,b) \subset \mathbb{R}$.

Aquest entorn és arc-connex, i $(0,0)$ és interior. Si escollim punts amb coordenades de signe diferent dins $(B((0,0),\varepsilon) \cap X) \subset N$, qualsevol camí passarà pel $(0,0)$ (Bolzano). Així $N \setminus \{(0,0)\}$ tindrà com a mínim quatre components arc-connexes.

Però $\mathbb{R} \setminus \{p\}$ té només dues components arc-connexes, aleshores no poden ser homeomorfs. I cap entorn de $(0,0) \in X$ pot ser homeomorf a $\mathbb{R}$.

<u>Exemple 2</u> Prenem ara $X = \mathbb{R}_d \times \mathbb{R}$ on $\mathbb{R}_d$ és $\mathbb{R}$ amb la topologia discreta.

- Aquest espai és Hausdorff per ser producte de dos espais Hausdorff.

- <u>No</u> té una base numerable d'oberts. Recordeu que les projeccions són obertes, aleshores, com que $p: \mathbb{R}_d \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_d$ és exhaustiva i oberta, si $\mathcal{B}$ fos una base numerable d'oberts, la seva projecció donaria una base numerable de $\mathbb{R}_d$ però com a conjunt $\mathbb{R}$ no és numerable.

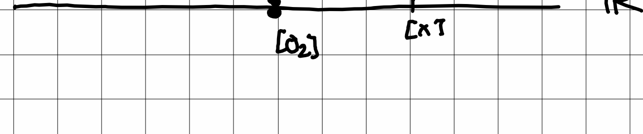
- Donat $(x,y) \in \mathbb{R}_d \times \mathbb{R}$, $\{x\} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}_d \times \mathbb{R}$ és un entorn obert que conté (x,y) i és homeomorf a $\mathbb{R}$ via la projecció a la segona coordenada.

<u>Exemple 3</u> Sigui X la recta amb dos origens.

És a dir, $X = \mathbb{R}_1 \sqcup \mathbb{R}_2 /_\sim$ on $x_1 \sim x_2$ si $x \neq 0$.

$$\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R} \xrightarrow{p} X$$

Tenim
$$p^{-1}([x_i]) = \begin{cases} \{x_1, x_2\} & \text{si } x \neq 0 \quad i = 1,2 \\ 0_1 & \text{si } x = 0 \quad i = 1 \\ 0_2 & \text{si } x = 0 \quad i = 2 \end{cases}$$



- Aquest espai no és Hausdorff. Sigui $\mathcal{U} \ni O_1$, $\mathcal{V} \ni O_2$ dos oberts, aleshores $p^{-1}(\mathcal{U})$, $p^{-1}(\mathcal{V})$ són oberts. $p^{-1}(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}_1$
$p^{-1}(\mathcal{V}) \subset \mathbb{R}_2$.

Existeix $\varepsilon_1 > 0$, $(-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \subset p^{-1}(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}_1$
Existeix $\varepsilon_2 > 0$, $(-\varepsilon_2, \varepsilon_2) \subset p^{-1}(\mathcal{V}) \subset \mathbb{R}_2$.

Si prenem $\delta < \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, tenim que

$$(-\delta_1, \delta_1) \subset p^{-1}(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}_1$$
$$(-\delta_2, \delta_2) \subset p^{-1}(\mathcal{V}) \subset \mathbb{R}_2$$

i aleshores $O_1 \in p(-\delta_1, \delta_1) \subset \mathcal{U} \subset X$ i per tant
$O_2 \in p(-\delta_2, \delta_2) \subset \mathcal{V} \subset X$ $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$

ja que $p(-\delta_1, \delta_1) \cap p(-\delta_2, \delta_2) \neq \emptyset$

Els oberts que contenen O_1 sempre tallen els oberts que contenen O_2.

<u>Definició</u> Sigui M una varietat de dimensió n, una parella $(\mathcal{U}, \varphi)$ on $\mathcal{U} \subset M$ entorn (obert), i $\varphi : \mathcal{U} \xrightarrow[\cong]{} \mathbb{R}^n$ homeomorfisme diem que és una carta local.

Una col·lecció $\{(\mathcal{U}_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ de cartes locals és un atles si $M = \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$.

Si M és compacte, admet un atles amb un número finit de cartes. (però no al revés, $\mathbb{R}$).

EXEMPLES DE VARIETATS TOPOLÒGIQUES

(0) $\mathbb{R}^n$ és una varietat topològica de dimensió . Té un atles amb una sola carta!

(1) <u>Grafs</u>: Sigui $U \subset \mathbb{R}^m$ obert i $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ contínua.

$$\mathrm{Graf}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \mid y = f(x),\ x \in U\} \subset \mathbb{R}^{n+m}$$

amb la topologia subespai.

Graf(f) és aleshores Hausdorff i té una base numerable d'oberts ja que aquestes propietats s'hereten a la topologia subespai i $\mathbb{R}^{n+m}$ les compleix.

Considerem l'aplicació contínua que projecta al primer factor

$$\begin{aligned} p : \mathrm{Graf}(f) &\longrightarrow U \subset \mathbb{R}^m \\ (x,y) &\longmapsto x \end{aligned}$$

p és contínua ja que

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Graf}(f) \arrow[r, hook, "i"] \arrow[drr, "p"'] & \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \arrow[r, "P"] & \mathbb{R} \\ & & U \arrow[u, hook, "j"'] \end{tikzcd}$$

A més, sigui $U = p(\mathrm{Graf}(f))$,

$$p : \mathrm{Graf}(f) \xrightarrow[\cong]{} U \subset \mathbb{R}^m$$

ja que

$$\begin{aligned} p^{-1} : U &\longrightarrow \mathrm{Graf}(f) \subset \mathbb{R}^{n+m} \text{ és contínua} \\ x &\longmapsto (x, f(x)) \end{aligned}$$

Aleshores si $(x,y) \in \mathrm{Graf}(f)$, existeix $\varepsilon > 0$ tal que $B(x,\varepsilon) \subset U$, $(p^{-1}(B(x,\varepsilon)), p)$ és una carta local.

Graf(f) és una varietat de dimensió m.

(2) Les esferes. Per cada $n \geq 0$, $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ és Hausdorff amb una base numerable d'oberts.

Podem recobrir S^n amb dos oberts

$$\mathcal{U}_+ = S^n \setminus \{(0,\dots,0,-1)\}$$
$$\mathcal{U}_- = S^n \setminus \{(0,\dots,0,1)\}$$

Siqui $\varphi_\pm(x_1,\dots,x_{n+1}) = \dfrac{1}{1 \pm x_{n+1}}(x_1,\dots,x_n)$ la corresponent projecció estereogràfica, aleshores

$$\varphi_\pm : \mathcal{U}_\pm \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

són contínues, i homeomorfismes com ja sabem, $\varphi_\pm$ bijectiva i

$$\varphi_\pm^{-1}(y_1,\dots,y_n) = \frac{1}{1+y_1^2+\dots+y_n^2}\left(2y_1,\dots,2y_n, \pm(1-y_1^2-\dots-y_n^2)\right)$$

contínua.

Observació Des de qualsevol punt $x \in S^n$ es pot descriure una projecció estereogràfica, només cal fer una rotació que porti x a un dels pols.

(3) Els espais projectius. Recordeu que $\mathbb{RP}^n$ és el conjunt de rectes de $\mathbb{R}^{n+1}$ que passen per l'origen. És un espai topològic quocient

$$\mathbb{RP}^n = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{(0,\dots,0)\}/\sim$$

$$(x_1,\dots,x_{n+1}) \sim \lambda(x_1,\dots,x_{n+1}) \qquad \lambda \neq 0.$$

De fet, és un quocient de l'esfera

$$\mathbb{RP}^n = S^n/_\sim \qquad x \sim -x.$$

Aleshores amb aquesta descripció es veu que $\mathbb{RP}^n$ és Hausdorff.

- Recordeu que si X compacte Hausdorff, $f: X \to Y$ exhaustiva aleshores
Y Hausdorff sii $\Delta_f = \{(x,y) \in X \times X \mid f(x) = f(y)\} \subset X \times X$ tancat.

(Exercici) sii f tancada.

Si prenem $p: S^n \longrightarrow \mathbb{RP}^n = S^n/_\sim$ alehores

$B \subset S^n$, $p^{-1}(p(B)) = B \cup A(B)$ on $A: S^n \to S^n$, $x \longmapsto -x$

és l'aplicació antipodal.

Com que A és homeomorfisme, $A(B)$ és obert (resp. tancat) si B és obert (resp. tancat). Per tant p és oberta i tancada.

Així $\mathbb{RP}^n$ és Hausdorff. A més té una base numerable d'oberts ja que p és oberta i S^n és una varietat.

Anem a construir cartes locals. Sigui

$$\mathcal{U}_i = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \mid x_i \neq 0\}$$

i $\tilde{\mathcal{U}}_i = p'(\mathcal{U}_i)$ on $p': \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{RP}^n$

$\varphi_i : \tilde{U}_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$ donada per

$$\varphi_i([x_1, \dots, x_{n+1}]) = \left(\frac{x_1}{x_i}, \dots \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i}\right)$$

φ_i està ben definida, és contínua ja que ho és

$$\begin{array}{ccccc} U_i & \twoheadrightarrow & \tilde{U}_i & \xrightarrow{\varphi_i} & \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) & & \longrightarrow & & \left(\frac{x_1}{x_i}, \dots \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i}\right) \end{array}$$

i té inversa $\varphi_i^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \tilde{U}_i$

$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto [x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_i, \dots x_n]$$

Així $\{(\tilde{U}_i, \varphi_i)\}_{i=1}^{n+1}$ és un atles.

(4) El producte cartesià de varietats

Sigui M una varietat de dimensió m i N una varietat de dimensió n. Aleshores el producte $M \times N$ amb la topologia producte és una varietat de dimensió $m+n$.

Fixeu-vos que $M \times N$ és Hausdorff i té una base numerable d'oberts que s'obté a partir de considerar productes d'oberts en bases numerables de M i N.

Com que M i N són varietats, donats $x \in M$, $y \in N$ existeixen entorns (oberts) $x \in U \subset M$, $y \in V \subset N$ i homeomorfismes

$\varphi: U \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n \quad , \quad \psi: V \to \mathbb{R}^m .$

Aleshores $(x,y) \in U \times V$ és un entorn de (x,y) a $M \times N$ tal que

$$\varphi \times \psi : U \times V \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^{n+m}$$

és un homeomorfisme.

(5) El tor $T = S^1 \times S^1$ és aleshores una varietat de dimensió 2.

De fet $T^n := S^1 \times S^1 \times \underset{n)}{\cdots} \times S^1$ és una varietat de dimensió n.

En el cas de tor, a més, $T \subset \mathbb{R}^3$ com els punts que satisfan una equació, és una superfície de revolució.

(6) Subconjunts oberts d'una varietat

Si M és una varietat i $U \subset M$ obert, aleshores U amb la topologia subespai és una varietat de la mateixa dimensió.

U és també Hausdorff i admet una base numerable d'oberts que s'obté fent intersecció amb U d'una tal base per M.

A més, si (V,φ) és una carta local per M aleshores

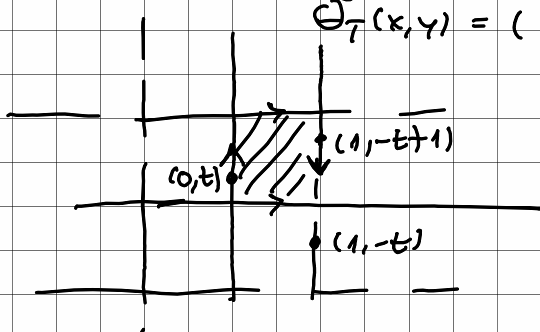
$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow[\cong]{\varphi} & \mathbb{R}^n \\ \cup & & \cup \\ U\cap N & \xrightarrow[\cong]{} & \varphi(U\cap N) \end{array}$$

$U\cap N$ és homeomorf a un obert de $\mathbb{R}^n$. I ja hem vist que prenent antiimatges de boles obertes construïm cartes locals per $U\subset M$.

(7) L'ampolla de Klein. Recordeu que l'ampolla de Klein s'obtenia fent un quocient al pla per una acció de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. Però també com un quocient del tor per una acció de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

$\mathbb{R}^2$ amb una acció de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} = \langle S,T\rangle$

$$\Theta_S(x,y) = (x,y+1)$$
$$\Theta_T(x,y) = (x+1,-y)$$



T amb una acció de $\mathbb{Z}/2 = \langle S\rangle$

$$\Theta_S : T \longrightarrow T \qquad \Theta_S([(x,y)]) = [(-x, y+\tfrac{1}{2})]$$

$$K = T/\mathbb{Z}_2.$$

Amb aquesta última descripció, els arguments usats pel $\mathbb{RP}^2$ com a quocient de S^2 per una acció de $\mathbb{Z}/2$ s'adapten per provar que $\mathbb{RP}^2$ és una varietat de dimensió 2.

I ara, la construcció estrella ...

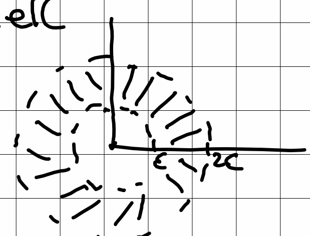
SUMA CONNEXA DE VARIETATS.

Siguin M_1 i M_2 dues varietats de la mateixa dimensió n. Escollim $p \in M_1$, $q \in M_2$, i cartes locals (U_1, φ_1), $p \in U_1$
(U_2, φ_2), $q \in U_2$ amb $\varphi_1(p) = 0$, $\varphi_2(q) = 0$.

$$\varphi_1 : U_1 \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n \quad , \quad \varphi_2 : U_2 \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n$$

Escollim $\varepsilon < 0$ tal que $B(0, 2\varepsilon) \subset U_1 \cap U_2$. Dins d'aquesta bola considerem l'anell

$$A = B(0, 2\varepsilon) \setminus Cl(B(0, \varepsilon))$$

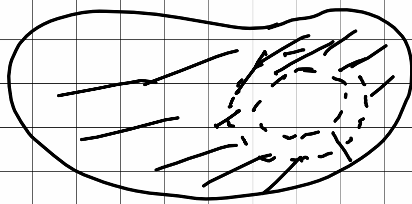


i l'homeomorfisme 'que li fa la volta'

$$\psi : A \to A \qquad \psi(x_1, \dots, x_n) = \frac{2\varepsilon^2}{x_1^2 + \dots + x_n^2} (x_1, \dots, x_n)$$

(intercanvia les vores)

Fixeu-vos que $M' = M \setminus Cl(\varphi^{-1}(B(0,\varepsilon))) \subset M$ és un obert i per tant una varietat amb altes $\mathcal{A}_{M'} = \{(U_i, \varphi_i)\}$.



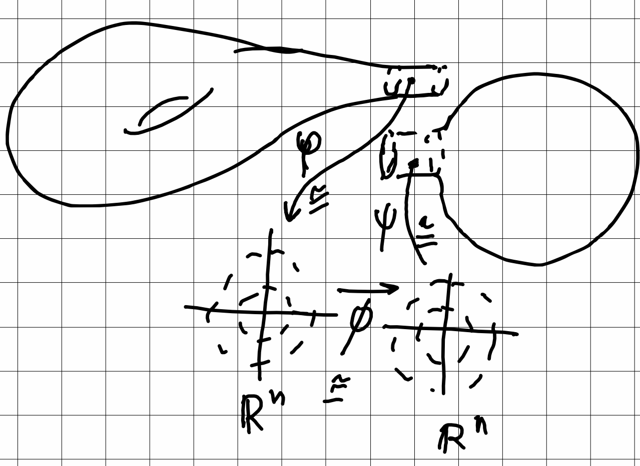
El mateix per $N' = N \setminus Cl(\psi^{-1}(B(0,\varepsilon)))$, amb altes $\mathcal{A}_{N'} = \{(U_i', \varphi_i')\}$.

Definim una nova varietat topològica de dimensió n

$$X = M' \sqcup N' / \sim$$

on $x \sim \psi^{-1}\phi\varphi(x)$ per $x \in \varphi^{-1}(B(0,2\varepsilon))$

És un espai Hausdorff, amb una base numerable d'oberts a partir de les de M' i N'



Un altes s'obté fent la unió dels altes

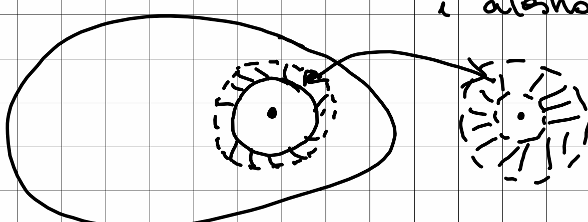
$\mathcal{A}_{M'} \cup \mathcal{A}_{N'}$

$M \# N$

Quan parlem de superfícies, varietats de dimensió 2, farem exemples concrets.

Ara bé, fixeu-vos que $M \# S^n \cong M$. Per què?

$M \setminus Cl(\varphi^{-1}(B(0,\varepsilon)))$, ara bé $S^n \setminus Cl(\psi^{-1}(B(0,\varepsilon)))$ és homeomorf a $B(0,2\varepsilon)$ (via projecció estereogràfica) i alashores



$$M \cong \frac{M \setminus Cl(\varphi^{-1}(B(0,\varepsilon))) \amalg B(0,2\varepsilon)}{\sim}$$

(mòdul detalls tècnics :-)).

<u>Exemple</u> Si M, N són varietats de dimensió 1

Acabem parlant de les <u>funcions de transició</u>

Si M és una varietat de dimensió n, i $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ és un atles, tenim que

$$M = \bigcup_{i\in I} U_i \qquad \varphi_i : U_i \xrightarrow[\cong]{} \mathbb{R}^n.$$

Quan les cartes locals tenen intersecció no buida tenim dos homeomorfismes a oberts de $\mathbb{R}^n$ per la intersecció.

Si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, $\quad U_i \cap U_j \begin{array}{l} \subset U_i \\ \subset U_j \end{array} \subset M.$

$$\varphi_i|_{U_i\cap U_j} : U_i \cap U_j \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$\varphi_j|_{U_i\cap U_j} : U_i \cap U_j \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

Els homeomorfismes

$$\varphi_{ji} : \mathbb{R}^n \supset \varphi_j(U_i \cap U_j) \xrightarrow{\varphi_j^{-1}} U_i \cap U_j \xrightarrow{\varphi_i} \varphi_i(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{R}^n$$

s'anomenen <u>funcions de transició</u>.

Aquestes funcions són molt importants per posar més estructura a les varietats. A priori només són homeomorfismes però els podríem que fossin lineals, diferenciables, ... és a dir que preservessin més estructura de $\mathbb{R}^n$.

Podem pensar que $\{\varphi_{ij}\}$ ens diuen com canvien les coordenades del punt quan canviem de mapa.

Si $\{\varphi_{ij}\}$ són funcions lineals a trossos diem que M és una <u>varietat PL</u> (piecewise linear).
Si $\{\varphi_{ij}\}$ són funcions diferenciables diem que M és una <u>varietat diferenciable</u>.

Una noció molt important és la d'<u>orientabilitat</u>. Orientar un espai vectorial és escollir una base (amb un ordre). Dues bases donen la mateixa orientació si el determinant de la matriu de canvi de base és positiu. Les bases es poden agrupar en dues classes d'equivalència segons aquest criteri.

Aleshores f preserva l'orientació si el determinant de f és positiu en cas que f és lineal. Si f és diferenciable aleshores mirem la matriu jacobiana.

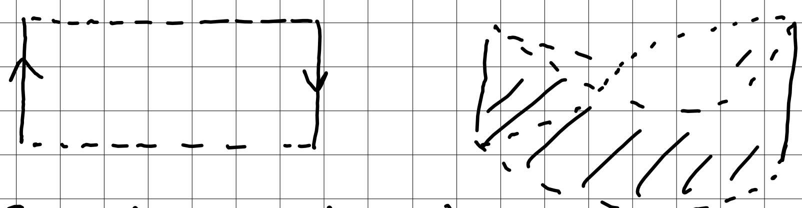
Hi ha una noció d'orientabilitat i preservar orientacions en el cas de que les funcions només siguin aplicacions contínues però no ho farem en aquest curs ... fem un vot de fe :-).

<u>DEFINICIÓ</u> Diem que M és orientable si admet un atles on totes les funcions de transició preserven l'orientació.

$\mathbb{R}^n$, S^n són orientables i es pot veure amb les cartes donades per les projeccions estereogràfiques.

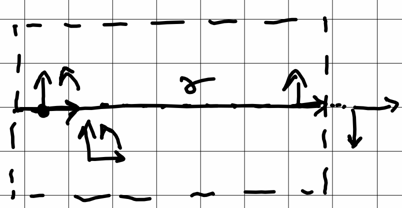
Però $\mathbb{RP}^2$ per exemple no ho és. L'exemple més paradigmàtic de varietat no orientable és la banda de Moebius (oberta)

$$M = [0,1]\times(0,1) \Big/ (0,t)\sim(1,1-t) \quad t\in(0,1)$$



Si agafem $(0,1)\times(0,1)\subset M$ està clar que és orientable ja que té una sola carta, és homeomorfa a un obert de $\mathbb{R}^2$

Escollim una orientació en aquest obert, i la traslladem a tots els punts.



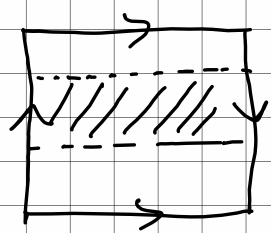
Sigui el camí

$$\begin{aligned} \gamma : [0,1] &\longrightarrow M \\ t &\longmapsto [(t,1/2)] \end{aligned}$$

i a cada punt mirem l'orientació de la base el que passarà és que

$\gamma : [0,1] \longrightarrow M \longrightarrow \{\pm 1\}$ no és contínua.

L'ampolla de Klein tampoc serà orientable ja que conté una cinta de Moebius i si fos orientable això donaria una orientació a la banda de Moebius.



El producte de varietats orientables és orientable, així el tor ho és.