I TYCHONOFF VA DIR :

EL PRODUCTE DE COMPACTES ÉS COMPACTE

Natàlia Castellana

Seguint amb el programa, què podem dir del producte d'espais topològics compactes?

Si el producte és finit venem la demostració fent servir tècniques i tàctiques estàndard en la teoria d'espais compactes.

I si el producte és infinit? Si tenim un producte arbitrari d'espais topològics amb la topologia producte, la seva compacitat és un resultat molt rellevant amb nom propi.

<u>Teorema</u> (Tychonoff, 1930) Un producte arbitrari d'espais topològics és compacte sii cadascun ho és.

La demostració d'aquest resultat fa servir de manera essencial l'axioma de l'elecció!

De fet, el 1950 el matemàtic John Kelley va escriure un article d'un parell de pàgines on demostra que el teorema de Tychonoff implica l'axioma de l'elecció

<u>Teorema</u> (Kelley, 1950) El teorema del producte de compactes de Tychonoff implica l'axioma de l'elecció.

Així el conjunt de Cantor $\prod_{\mathbb{N}} \{0,2\}$ és compacte!

Demostrarem el cas del producte finit de compactes. N'hi ha prou amb fer el cas de dos si?

Si X, Y són espais topològics alshores $X \times Y$ és compacte. Fixeu-vos que si $\prod X_\alpha$ és compacte aleshores X_α ho és per cada α ja que X_α és la imatge per la projecció que és contínua.

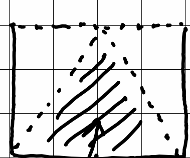
Abans ens caldrà el següent lemma que resoldrà una dificultat tècnica a la demostració.

<u>LEMMA</u>: Siguin X, Y espais topològics, Y compacte, $x \in X$ i $\mathcal{U}$ obert del producte, $\mathcal{U} \subset X \times Y$ tal que $\{x\} \times Y \subset \mathcal{U} \subset X \times Y$ aleshores existeix un obert $x \in W \subset X$ tal que $\{x\} \times Y \subset W \times Y \subset \mathcal{U}$.

- Fixeu-vos que el lemma no és cert en general!

Sigui $X = [-1,1] \times [0,1)$, $\mathcal{U} = \{ (x,y) \in X \mid |x| + |y| < 1 \}$

X



$\mathcal{U}$

No hi ha cap obert $(-\varepsilon, \varepsilon)$ tal que

$$\{0\} \times [0,1) \subset (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0,1) \subset \mathcal{U}$$

Donat $\varepsilon > 0$, i $x \in [-1,1]$ amb $|x| < \varepsilon$, sempre podem trobar y tal que $0 < y < 1$, $1 > |y| > 1 - |x| > 1 - \varepsilon$

$(x,y) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0,1)$ però $(x,y) \notin \mathcal{U}$.

<u>Demostració</u> Si volem utilitzar que Y és compacte hem de construir un recobriment contingut en $\mathcal{U}$.

Com que $\mathcal{U} \subset X \times Y$ és obert, i $\{x\} \times Y \subset \mathcal{U}$, per cada $y \in Y$ existeixen oberts

$$x \in W_y \subset X, \quad y \in V_y \subset Y, \quad (x,y) \in W_y \times V_y \subset \mathcal{U}.$$

Així tenim dues famílies d'oberts

$$\{W_y\}_{y \in Y}, \; W_y \subset X \quad \text{i} \quad x \in W_y \text{ per tot } y \in Y$$

$$x \in \bigcap_{y \in Y} W_y$$

$$\{V_y\}_{y \in Y}, \; V_y \subset Y, \quad Y = \bigcup_{y \in} V_y$$

Fixeu-vos que si agafem $W = \bigcap_{y \in Y} W_y$ tinc que

$$\{x\} \times Y \subset W \times Y \subset \bigcup_{y \in Y} W_y \times V_y \subset \mathcal{U} \text{ per construcció}$$

Quin és el problema? W no té perquè ser obert!!! És una intersecció arbitrària d'oberts. Hem de reduir aquesta intersecció a una finita, és a dir, hem de reduir les famílies anteriors d'oberts a famílies finites.

Com que Y és compacte, el recobriment $\{V_y\}_{y \in Y}$ admet un subrecobriment finit, és a dir, existeixen $\{y_1, .., y_n\} \subset Y$ amb

$$Y = V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n}.$$

Aleshores prenem les seves parelles a X,

$$\{W_{y_1}, \ldots, W_{y_n}\}$$

i considerem $W = W_{y_1} \cap \cdots \cap W_{y_n} \subset X$ obert.

Es compleix: $x \in W$

$$\{x\} \times Y \subset W \times Y \subset \bigcup_{i=1}^{n} W_{y_i} \times V_{y_i} \subset \mathcal{U} \subset X \times Y.$$

#

TEOREMA Siguin X, Y espais topològics.

$X \times Y$ és compacte sii X i Y són compactes.

Demostració: Suposem que $X \times Y$ és compacte. Aleshores, com que les projeccions $\pi_X : X \times Y \to X$ i $\pi_{X\times Y} : X \times Y \to Y$ són contínues tenim que X, Y també són compactes per ser imatges de compactes.

Suposem que X i Y són espais topològics compactes, volem veure que $X \times Y$ ho és.

Sigui $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un recobriment per oberts de $X \times Y$. Per cada $x \in X$, tenim que $\{x\} \times Y \cong Y$ és compacte.

Com que $\mathcal{U}$ també és un recobriment de $\{x\} \times Y$, tenim que per cada $x \in X$ hi ha subrecobriments finits

$$\mathcal{U}(x) = \{U_{i_1(x)}, \ldots, U_{i_{n(x)}(x)}\}$$

de manera que $\{x\}\times Y \subset \mathcal{U}_x := \bigcup_{j=1}^{n(x)} \mathcal{U}_{i_j(x)}$ obert.

Així podem recobrir cada eix $\{x\}\times Y$ amb un obert que és una unió finita d'oberts del recobriment.

Per cada $x\in X$ podem aplicar el lema anterior i trobar un obert $x\in \mathcal{W}_x \subset X$ tal que

$$\{x\}\times Y \subset \mathcal{W}_x \times Y \subset \mathcal{U}_x \subset X\times Y.$$

Si ens quedem amb la família $\{\mathcal{W}_x\}_{x\in X}$ tenim un recobriment per oberts d'X. Com que és compacte, existeixen $\{x_1, \dots, x_m\}\subset X$ tals que

$$X = \mathcal{W}_{x_1} \cup \dots \cup \mathcal{W}_{x_m}$$

Per tant, $X\times Y = \bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{W}_{x_i}\times Y \subset \bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{U}_{x_i} = \bigcup_{i=1}^{m}\bigcup_{j=1}^{n(x_i)} \mathcal{U}_{i_j(x_i)}$

És a dir, donat un recobriment per oberts qualsevol $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$, hem donat un subrecobriment finit $\{\mathcal{U}_{i_j(x_i)}\}_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n(x_i)}}$

#

Per inducció comprovem que un producte finit d'espais topològics és compacte sii cadascun d'ells ho és.