En aquest seminari ens centrarem en el paper que juguen els entorns en la idea de convergència i com es generalitza aquest concepte de manera que la clausura i la continuitat es poden caracteritzar en termes de convergència d'uns objectes més generals: els filtres.

1 Preliminars: Entorns locals i les seves propietats

Sigui (X, τ) un espai topològic. Un subconjunt $N \subset X$ és un entorn de $x \in X$ si existeix un obert $U \in \tau$ tal que $x \in U \subset N \subset X$. Si $\mathcal{B} \subset \tau$ és una base de la topologia aleshores els entorns $N \subset X$ també queden definits utilizant la base: $N \subset X$ és un entorn de $x \in X$ si existeix un obert bàsic $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset N \subset X$. Fixeu-vos que si $\varnothing \neq A \subset X$ amb $\mathrm{Int}(A) \neq \varnothing$, aleshores A és un entorn dels seus punts interiors.

Fixat $x \in X$. Sigui $\mathcal{N}_x = \{N \subset X |\, N \text{ és un entorn de } x\}$, que anomenem sistema d'entorns de $x \in X$. Una base d'entorns o base local en $x \in X$ és $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{N}_x$ tal que per tot $N \in \mathcal{N}_x$ existeix $B \in \mathcal{B}_x$ amb $x \in B \subset N$.

Un sistema d'entorns $\mathcal{N}_x$ compleix les següents propietats:

(N1) Si $N \in \mathcal{N}_x$ aleshores $x \in N$.

(N2) Si $N_1, N_2 \in \mathcal{N}_x$, aleshores $N_1 \cap N_2 \in \mathcal{N}_x$.

(N3) Si $N \in \mathcal{N}_x$, i $N \subset M$, aleshores $M \in \mathcal{N}_x$.

(N4) Si $N \in \mathcal{N}_x$, existeix $M \in \mathcal{N}_x$ tal que $N \in \mathcal{N}_y$ per tot $y \in M$.

(N5) $U \in \tau$ si i només si $U \in \mathcal{N}_x$ per tot $x \in U$.

Comproveu que els sistemes d'entorns compleixen les propietats anteriors $(N1) - (N5)$. A més, suposem que per cada $x \in X$ tenim una col·lecció $\mathcal{A}_x \subset \mathcal{P}(X)$ de subconjunts de X tals que compleixen les propietats $(N1) - (N4)$. Feu servir la propietat $(N5)$ per definir una topologia $\tau_{\mathcal{A}}$ en X de manera que el sistema d'entorns que obtenim $\mathcal{N}_x$ és justament $\mathcal{A}_x$. És a dir, $\mathcal{A}_x$ és un sistema d'entorns per a una topologia en X.

De manera semblant les bases locals d'entorns $\mathcal{B}_x$ compleixen les següents propietats:

(B1) Si $B \in \mathcal{B}_x$ aleshores $x \in B$.

(B2) Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_x$, aleshores existeix $B_3 \in \mathcal{B}_x$ tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

(B3) Si $B \in \mathcal{B}_x$, existeix $B_0 \in \mathcal{B}_x$ tal que per tot $y \in B_0$ existeix $B_y \in \mathcal{B}_y$ with $B_y \subset B$.

(B4) $U \in \tau$ si i només si per tot $x \in U$ existeix $B \in \mathcal{N}_x$ amb $B \subset U$.

Comproveu que les bases d'entorns locals compleixen les propietats anteriors $(B1) - (B4)$. A més, suposem que per cada $x \in X$ tenim una col·lecció $\mathcal{A}_x \subset \mathcal{P}(X)$ de subconjunts de X tals que compleixen les propietats $(B1) - (B3)$. Feu servir la propietat $(B4)$ per definir una topologia $\tau_{\mathcal{A}}$ en X de manera que el sistema d'entorns locals que obtenim $\mathcal{B}_x$ és justament $\mathcal{A}_x$. És a dir, $\mathcal{A}_x$ és una base d'entorns per a un topologia en X.

2 Convergència de successions, clausura i continuitat

Sigui X un espai topològic. Diem que una successió $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ convergeix a $x \in X$ si per tot entorn E de x, existeix $N_E \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in E$ per tot $n > N_E$.

En aquest apartat veurem la noció de convergència d'una successió en un espai topològic i com aquesta noció no caracteriza els punts adherents a un subconjunt. És clar que si $\{x_n\} \subset A \subset X$ és una successió en $A \subset X$ que convergeix a $x \in X$, aleshores $x \in \mathrm{Cl}(A)$. Però veurem amb un exemple concret que el recíproc no és cert.

Sigui X un conjunt no numerable, fixem $x_0 \in X$. Sigui $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ definit per: $A \in \tau$ si i només si ($x_0 \notin A$) o ($x_0 \in A$ i $X \setminus A$ és finit o numerable).

Comproveu que τ és una topologia en X i que es compleixen els següents fets:

1. $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ convergeix a x si i només si existeix $N > 0$ amb $x_n = x$ per tot $n > N$.

2. $x_0 \in \mathrm{Cl}(X \setminus \{x_0\})$ però $\{x_0\}$ no és límit de cap successió a $X \setminus \{x_0\}$.

3. Sigui X_d el conjunt X amb la topologia discreta, aleshores X i X_d tenen les mateixes successions convergents però l'aplicació identitat $X \to X_d$ no és contínua.

D'aquesta manera tenim, d'una banda un punt adherent a un subconjunt que no és el punt de convergència d'una successió en el subconjunt, i d'altra banda una aplicació que preserva successions convergents i els seus punts de convergència però no és contínua.

3 Hi ha vida més enllà de les successions: els filtres

Els filtres donen un contexte molt natural per l'estudi del fenòmen de la convergència en un espai topològic. Van ser introduits el 1937 per Cartan. Tenint al cap les propietats dels entorns, introduim la noció de filtre. Sigui X un conjunt. Un filtre en X és $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ tal que

1. $\varnothing \notin \mathcal{F}$, i $\mathcal{F} \neq \varnothing$.

2. Si $A, B \in \mathcal{F}$ aleshores $A \cap B \in \mathcal{F}$.

3. Si $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{P}(X)$ amb $A \subset B$, aleshores $B \in \mathcal{F}$.

Fixeu-vos que de la definició es dedueix que les interseccions finites d'elements de $\mathcal{F}$ són sempre no buides, però no ho podem afirmar de les no finites. Una altra propietat és que si $\{x\} \in \mathcal{F}$ aleshores tots els subconjunts que contenen x també són a $\mathcal{F}$. De les definicions també es dedueix que $X \in \mathcal{F}$.

Si $\mathcal{F}$ i $\mathcal{F}'$ són dos filtres, diem que $\mathcal{F}$ és més fi que $\mathcal{F}'$ si $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$. Quin és el filtre menys fi que pots construir? Té sentit parlar del filtre més fi de tots? Anem a veure uns exemples.

1. Si X és un espai topològic i $x \in X$, aleshores el sistema d'entorns $\mathcal{N}_x$ és un filtre.

2. Fixat $x_0 \in X$, definim el filtre $\mathcal{F}_{x_0} = \{A \subset X | x_0 \in A\}$.

3. El filtre de Fréchet en un conjunt infinit X és $\mathcal{F}_f = \{A \subset X | \, X \setminus A \text{ és finit}\}$.

De manera semblant definim la noció de base d'un filtre. Una base d'un filtre és $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ que compleix

1. $\varnothing \notin \mathcal{B}$, i $\mathcal{B} \neq \varnothing$.

2. Si $A, B \in \mathcal{B}$ aleshores existeix $C \in \mathcal{B}$ amb $C \subset A \cap B$.

A partir de $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ podem definir $\mathcal{F}(\mathcal{B})$ com els subconjunts $A \subset X$ tal que existeix $B \in \mathcal{B}$ amb $B \subset A$. Aleshores $\mathcal{F}(\mathcal{B})$ és un filtre si i només si $\mathcal{B}$ és una base d'un filtre. De fet, $\mathcal{F}(\mathcal{B})$ és el filtre menys fi que conté $\mathcal{B}$.

Per exemple, si $X = \mathbb{N}$, el conjunt dels nombres naturals, $\mathcal{B}_N = \{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ on $S_n = \{n, n+1, n+2, \dots\}$ és un exemple de base d'un filtre. Quin filtre defineix a $\mathcal{N}$?

3.1 Filtres maximals

Un filtre maximal és un filtre que no està contingut en cap altre filtre, excepte ell mateix. És a dir, si $\mathcal{F}$ és un filtre maximal i $\mathcal{F}'$ és un filtre més fi, $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ aleshores $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$.

Els filtres maximals es poden caracteritzar de manera intrínseca amb els subconjunts que en formen part. Si $\mathcal{F}$ és un filtre en X, són equivalents:

1. $\mathcal{F}$ és un filtre maximal.

2. Si $A \cup B \in \mathcal{F}$, aleshores $A \in \mathcal{F}$ o $B \in \mathcal{F}$.

3. Donat $A \subset X$, $A \in \mathcal{F}$ o $X \setminus A \in \mathcal{F}$.

Un fet important, si teniu curiositat i que es demostra fent servir el lemma de Zorn, és que tot filtre $\mathcal{F}$ està contingut en un filtre maximal.

3.2 Filtres induits per aplicacions

Fent servir aplicacions podem construir també nous filtres. Sigui $f\colon X \to Y$ una funció, i $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(Y)$ és un filtre.

Podem definir considerar $\{f^{-1}(A) | A \in \mathcal{F}\}$ que és una base d'un filtre en X si $A \cap f(X) \neq \varnothing$ per tot $A \in \mathcal{F}$. Aleshores definim $f^*(\mathcal{F})$ com el filtre generat per $\{f^{-1}(A) | A \in \mathcal{F}\}$

També, si $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ és un filtre, $f(\mathcal{F}) = \{f(A) | A \in \mathcal{F}\}$ no és necessariament un filtre però com abans sí una base d'un filtre. Sigui $f_*(\mathcal{F})$ el filtre generat per $f(\mathcal{F})$.

Anem a fer un exemple. Sigui $f\colon \mathbb{N} \to X$ una successió. Considerem el filtre definit anteriorment $\mathcal{F}(\mathcal{B}_N) \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Qui és $f_*(\mathcal{B}_N)$?

4 Modelem la convergència amb la noció de filtre

Ara anem a posar tota la informació junta per veure com les nocions de punts adherents, propietat de Hausdorff i continuitat es poden descriure en termes de filtres.

Sigui X un espai topològic. Diem que $x \in X$ és un punt límit d'un filtre $\mathcal{F}$ si $\mathcal{N}_x \subset \mathcal{F}$. Escrivim $\lim(\mathcal{F})$ per denotar el conjunt de punts límit de $\mathcal{F}$.

Anem a fer uns exemples.

1. Fixat $x_0 \in X$, x_0 és un punt límit de $\mathcal{F}_{x_0}$. N'hi pot haver més de punts límits d'aquest filtre?

2. Recordeu que en els nombres naturals hem considerat la base d'un filtre $\mathcal{B}_N = \{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ on $S_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$. Si $f\colon \mathbb{N} \to X$ és una successió en X, quina propietat compleixen els punts límit de $f_*(\mathcal{F}(\mathcal{B}_N))$? Quina relació tenen amb els punts de convergència de la successió? Són els mateixos?

Fixa't que en l'exemple de la topologia introduida a la secció 1, malgrat que $x_0 \in \mathrm{Cl}(X \setminus x_0)$ no és límit d'una sucessió, sí que és límit d'un filtre que conté $X \setminus x_0$, per exemple, el filtre generat per la base d'un filtre $\mathcal{B} = \{(A \setminus x_0) | A \text{ és un obert amb } x_0 \in A\}$.

Acabem amb dues propietats de convergència en filtres que relacionen clausura, convergència i continuitat. Sigui $\mathcal{F}$ un filtre en X.

1. Si $x \in \lim \mathcal{F}$, aleshores x és un punt adherent a A per tot $A \in \mathcal{F}$.
2. Sigui $A \subset X$. Aleshores $x \in \mathrm{Cl}(A)$ si i només si existeix un filtre $\mathcal{F}$ que conté A i tal que $x \in \lim \mathcal{F}$.
3. Una aplicació $f\colon X \to Y$ és contínua si i només si per tot filtre $\mathcal{F}$ i $x \in \lim \mathcal{F}$ tenim que $f(x) \in \lim f_*(\mathcal{F})$.
4. Un espai topològic X és Hausdorff si i només si tot filtre té com a molt un punt límit.