LEMA DE URYSOHN

(fem un mapa de relleu de muntanya a vall en un espai normal)

Natàlia Castellana, 2021

El lema d'Urysohn (1924) el va provar Urysohn en la seva demostració del teorema d'extensió de Tietze per espais normals.

En espais mètrics, Tietze va demostrar (1915): si $A \subset X$ és un tancat i $f: A \to \mathbb{R}$ contínua amb $\inf(f(A)) > 0$

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ \sup_A \left(\dfrac{f(a)}{1+d(x,A)^2} \right)^{\frac{1}{d(x,A)}} & x \in X \setminus A \end{cases}$$

és una extensió contínua de f a tot X.

Més tard, Hausdorff el 1919 va provar-ho treient la hipòtesi de l'ínfim

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ \inf_A \left(f(a) + \dfrac{d(x,a)}{d(x,A)} - 1 \right) & x \in X \setminus A \end{cases}$$

Lema d'Urysohn X espai topològic normal, $A, B \subset X$ tancats disjunts. Aleshores existeix una funció contínua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(a) = 0$ per tot $a \in A$ i $f(b) = 1$ per tot $b \in B$.

Recordem que en un espai topològic normal, si $A \subset X$ tancat i $\mathcal{U} \subset X$ obert amb $A \subset \mathcal{U}$, existeix un obert V tal que $A \subset V \subset Cl(V) \subset \mathcal{U}$.

Demostració: El que farem primer és definir oberts $\mathcal{U}_r \subset X$ per cada $r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ tals que

- si $r < s$ aleshores $A \subset \mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}_r \subset Cl(\mathcal{U}_r) \subset \mathcal{U}_s \subset Cl(\mathcal{U}_s) \subset \mathcal{U}_1 \subset X \setminus B$

$r = 1$ prenem $\mathcal{U}_1 = X \setminus B$ que és un obert que conté A $(A \cap B = \emptyset)$, aleshores com que X és normal existeix $\mathcal{U}_0 \subset X$ obert amb

$$A \subset \mathcal{U}_0 \subset Cl(\mathcal{U}_0) \subset \mathcal{U}_1 .$$

Ara, $\mathbb{Q}$ és numerable, així que els numerem començant amb 0 i 1,

$$\{ \underset{r_0}{\underset{\parallel}{0}}, \underset{r_1}{\underset{\parallel}{1}}, r_2, r_3, r_4, \ldots\ldots \} = \{ r_n \}_{n \in \mathbb{N}} = \mathbb{Q} \cap [0,1]$$

Ja hem definit U_0 i U_1. Per inducció suposem que hem definit U_{r_i} per $i=0,1,\dots,n$. Anem a construir $U_{r_{n+1}}$.

Agafem els números $\{r_0, r_1, \dots, r_n, r_{n+1}\}$ i els ordenem segons el seu ordre a la recta $\mathbb{R}$

$$0 = r_0 < \dots < r_e < r_{n+1} < r_m < \dots < r_1 = 1$$

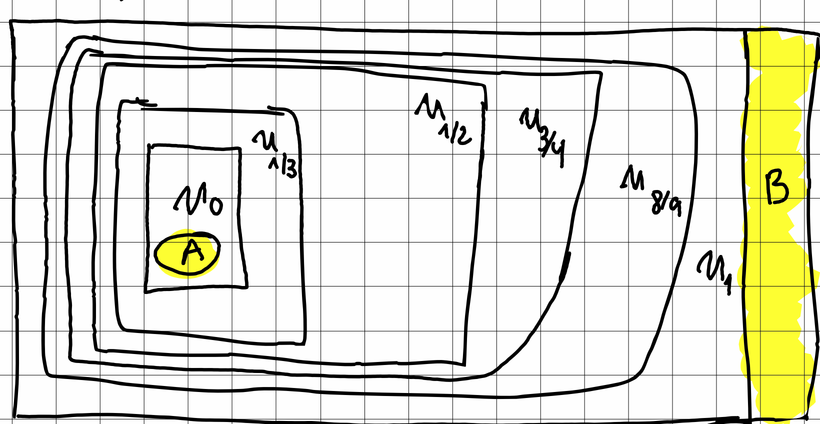
i prenem r_e el que queda abans de r_{n+1} i r_m el successor. Sabem per construcció que

$$U_{r_e} \subset Cl(U_{r_e}) \subset U_{r_m} \subset Cl(U_{r_m}).$$

Ara, com que $Cl(U_{r_e})$ és tancat, i U_{r_m} obert, apliquem la caracterització de normalitat i tenim que existeix un obert $U_{r_{n+1}}$ tal que

$$Cl(U_{r_e}) \subset U_{r_{n+1}} \subset Cl(U_{r_{n+1}}) \subset U_{r_m}$$

Ja tenim doncs $\{U_r\}_{r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]}$ amb la propietat que volíem.



Definim $f: X \longrightarrow [0,1]$ com

$$f(x) = \begin{cases} \inf(r \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \mid x \in U_r) & x \in U_1 \\ 1 & x \in X \setminus U_1 \end{cases}$$

Fixeu-vos que $f(x) = 1$ si $x \in B$ ja que $B \subset X \setminus U_1$
$f(x) = 0$ si $x \in A$ ja que $A \subset U_0$.

És contínua? Per comprovar que és contínua farem servir una subbase de la topologia subespai de $[0,1] \subset \mathbb{R}$.

$$\mathcal{S} = \{ [0,a), (b,1] \mid a,b \in (0,1) \}$$

Fixeu-vos que qualsevol element de la base
$\mathcal{B} = \{ [0,a), (a,b), (b,1] \mid a,b \in (0,1) \}$
es pot obtenir com intersecció d'elements de $\mathcal{S}$, e.g.

$$(a,b) = [0,b) \cap (a,1].$$

Només cal comprovar doncs que $f^{-1}([0,a))$ i $f^{-1}((b,1])$ són oberts a X.

Alehores també $f^{-1}((a,b)) = f^{-1}([0,b)) \cap f^{-1}((a,1])$ serà obert.

Observacions importants:

(1) $x \in Cl(\mathcal{U}_p)$ aleshores $f(x) \leq p$.

$\left[\text{ja que } \mathcal{U}_p \subset Cl(\mathcal{U}_p) \underset{s>p}{\subset} \mathcal{U}_s \subset Cl(\mathcal{U}_s) \text{ i } x \in \mathcal{U}_s \ \forall s > p\right]$

(2) $x \notin \mathcal{U}_p$ aleshores $f(x) \geq p$.

$\left[\text{ja que } \mathcal{U}_s \subset Cl(\mathcal{U}_s) \subset \mathcal{U}_p \text{ i } x \notin \mathcal{U}_s \ \forall s \leq p\right]$

Així, si $p < f(x)$ tenim que $x \notin Cl(\mathcal{U}_p)$ per (1)
si $f(x) < p$ tenim que $x \in \mathcal{U}_p$ per (2).

Ara ja podem calcular les antiimatges:

- $f^{-1}([0,a)) = \{x \in X \mid f(x) < a\}$ i per com hem definit f

$f(x) < a$ sii $\exists r < a$ amb $x \in \mathcal{U}_r$

sii $x \in \bigcup_{r<a} \mathcal{U}_r$, és a dir

$$f^{-1}([0,a)) = \underbrace{\bigcup_{r<a} \mathcal{U}_r}_{\text{obert}}$$

De manera semblant,

- $f(x) > b$ sii $\exists r > b$ amb $x \notin Cl(\mathcal{U}_r)$
sii $x \in \bigcup_{r>b} (X \setminus Cl(\mathcal{U}_r))$

$$f^{-1}((b,1]) = \bigcup_{r>b} X \setminus Cl(\mathcal{U}_r)$$

obert.

#

Fixeu-vos que si existeix una funció $f: X \to [0,1]$ contínua tal que $f(A)=0$ i $f(B)=1$ per A, B tancats, aleshores

$$A \subset f^{-1}([0,1/3)) = U \text{ obert}$$
$$B \subset f^{-1}((2/3,1]) = V \text{ obert} \quad \text{i } U \cap V = \emptyset.$$

<u>COROL·LARI</u> Sigui X un espai T_1. Són equivalents

(1) Donats $A, B \subset X$ tancats disjunts, existeixen oberts $U, V \subset X$ amb $A \subset U$, $B \subset V$ i $U \cap V = \emptyset$

(2) Donats $A, B \subset X$ tancats disjunts, existeix una funció contínua $f: X \to [0,1]$ amb $f(A)=0$ i $f(B)=1$.

A banda del teorema de Tietze per espais T_4.

<u>Teorema de Tietze</u> Tota aplicació contínua $f: A \to [0,1]$ on $A \subset X$, A tancat, X normal es pot estendre a $F: X \to [0,1]$ amb

$F(x) = f(x) \quad x \in A.$

Una altra aplicació és el teorema de metrització de Urysohn. Abans però una definició:

<u>Definició</u> Diem que un espai topològic X és segon-numerable (numerable de segon ordre) si admet una base numerable d'oberts.

Diem que és primer-numerable (o numerable de primer ordre) si per cada $x \in X$ hi ha una base numerable d'entorns en x.

Urysohn va demostrar que tot espai T_4 i numerable de segon ordre és metritzable. (i.e. existeix una mètrica que indueix la mateixa topologia). Va preguntar si T_3 era suficient i Tychonoff va provar:

<u>Teorema</u> Tot espai T_3 segon numerable és metritzable.