

SPIN - OFF

DEL CAPÍTOL 5 :

LES SUBBASES

Natàlia Castellana

Recordem que ja sabem què és una base i oberts d'un espai topològic.

Si (X, \mathcal{Z}) és un espai topològic, recordem que $\mathcal{B} \subset \mathcal{Z}$ és una base si tot obert no buit es pot posar com unió d'elements de \mathcal{B} .
O, el que és el mateix, si per tot $U \subset X$ obert i $x \in U$ existeix $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset U$.

Anem a introduir el concepte de subbase.

Definició: Sigui (X, \mathcal{Z}) un espai topològic. Diem que una família d'oberts $\mathcal{S} \subset \mathcal{Z}$ és una subbase si qualsevol obert $U \subset \mathcal{Z}$ es pot escriure com una unió d'interseccions finites d'elements d' \mathcal{S} .

Per exemple, si $\mathcal{B} \subset \mathcal{Z}$ és una base. Tant \mathcal{Z} com \mathcal{B} també són subbases.

Exemple Sigui $X = \{a, b, c\}$, $\mathcal{Z} = \mathcal{P}(X)$
topologia discreta
 $\mathcal{B} = \{ \{a\}, \{b\}, \{c\} \}$ és una base
 $\mathcal{S} = \{ \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\} \}$ és una subbase.

Podem fer servir la idea de subbase per construir espais topològics.

PROPOSICIÓ Sigui X un conjunt i \mathcal{S} una família de subconjunts de X .

Si X és la unió d'elements de \mathcal{S} aleshores existeix una única topologia \mathcal{Z} en X que té \mathcal{S} per subbase tal que n'és la menys fina.

Dem Sigui $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ tal que $X = \bigcup_{S \in \mathcal{S}} S$ i

una prebase $\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{i=1}^n S_i \mid S_i \in \mathcal{S}, |I| \text{ finit} \right\}$

és a dir, \mathcal{B} està format per totes les interseccions finites d'elements de \mathcal{S} .

Sabem pel Capítol 4 que si \mathcal{B} compleix:

$$(1) X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$$

$$(2) \text{ Donats } U, V \in \mathcal{B} \text{ i } x \in U \cap V, \text{ existeix } B \in \mathcal{B} \text{ tal que } x \in B \subset U \cap V$$

existeix una única topologia tal que \mathcal{B} n'és base i és la menys fina.

Però (1) es compleix per hipòtesis i (2) es compleix per construcció.

Si $U = \bigcap_{i=1}^m S_i$, $V = \bigcap_{j=1}^m S_j$ aleshores

$U \cap V = \left(\bigcap_{i=1}^m S_i \right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^m S_j \right)$ és altre cop

una intersecció finita d'elements de \mathcal{I} ,
per tant, és de \mathcal{B} .

#