ESPAIS ON TOTS ELS CAMINS PORTEN A ROMA

Natàlia Castellana

En aquest episodi introduirem una noció de connexitat que fa servir que els intervals són connexos com hem vist.

Què és un camí? Un camí en un espai topològic X és una aplicació contínua

$$\alpha : [0,1] \longrightarrow X$$

L'origen d'α és $\alpha(0)$ i el destí/final/arribada és $\alpha(1)$. Diem que α és un camí de x a y si $\alpha(0) = x$ i $\alpha(1) = y$.

Si $\alpha(0) = \alpha(1)$ diem que α és un llaç.

Propietats/cosetes que val la pena saber:

(1) Si $\alpha : [0,1] \to X$ és un camí aleshores la seva imatge $\alpha([0,1]) \subset X$ és un subconjunt connex que conté $\alpha(0)$ i $\alpha(1)$ en X.
Per tant $\alpha(0)$ i $\alpha(1)$ estan a la mateixa component connexa.

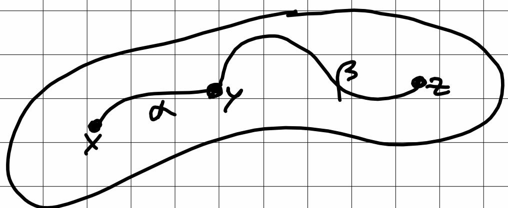
(2) Si $A \subset X$ i $\alpha : [0,1] \to X$ és un camí amb $\alpha(0) \in A$ i $\alpha(1) \notin A$, aleshores existeix $t \in [0,1]$ amb $\alpha(t) \in \partial A$.

(3) Si $\alpha : [0,1] \longrightarrow X$ és un camí amb $\alpha(0) = x$ i $\alpha(1) = y$, aleshores $\bar{\alpha} : [0,1] \to X$ amb $\bar{\alpha}(t) = \alpha(1-t)$ és un camí de y a x.

(4) Si $\alpha : [0,1] \to X$ i $\beta : [0,1] \to X$ amb $\alpha(1) = \beta(0)$ aleshores definim

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ \beta(2t-1) & 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

és un aplicació contínua que va de $\alpha(0)$ a $\beta(1)$



<u>DEFINICIÓ</u> Diem que un espai X és connex per camins (o arc-connex) si per tota parella $x, y \in X$ existeix un camí $\alpha : [0,1] \to X$ tal que $\alpha(0) = x$ i $\alpha(1) = y$.

Fixeu-vos que moltes propietats vistes per connexos són ara certes per connexos per camins.

<u>PROPIETATS</u>

(1) Si $f : X \to Y$ és contínua i X connex per camins aleshores $f(X)$ és connex per camins.

Siguin $y_1, y_2 \in f(X)$, aleshores $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$ per $x_1, x_2 \in X$.

Com que X és connex per camins, aleshores existeix $\alpha : [0,1] \to X$ contínua tal que $\alpha(0) = x_1$, $\alpha(1) = x_2$

Aleshores $f\circ\alpha : [0,1] \longrightarrow Y$ és contínua i
$f\circ\alpha(0) = f(x_1) = y_1$
$f\circ\alpha(1) = f(x_2) = y_2$, és un camí de
y_1 a y_2.

(2) Diem que un subconjunt $A \subset X$ és connex per camins si ho és amb la topologia subespai.

Per tant $A \subset X$ connex per camins si donats $a_1, a_2 \in A$ existeix una aplicació contínua $\alpha : [0,1] \longrightarrow X$ amb $\alpha([0,1]) \subset A$ i $\alpha(0) = a_1$, $\alpha(1) = a_2$.

(3) Siguin $\{C_i\}_{i\in I}$ una col·lecció de conjunts connexos per camins, $C_i \subset X$ $i \in I$, amb $\bigcap_{i\in I} C_i \neq \emptyset$ aleshores $\bigcup_{i\in I} C_i$ és connex per camins

Hem de veure que si $a \in C_i$, $b \in C_j$ amb $i \neq j$, he de trobar un camí que els uneixi. Prenem $c \in \bigcap_{i\in I} C_i$. Aleshores existeixen camins

$\alpha_a : [0,1] \longrightarrow C_i$ $\quad \alpha_a(0) = a$, $\alpha(1) = c$
$\alpha_b : [0,1] \longrightarrow C_j$ $\quad \alpha_b(0) = c$, $\alpha_b(1) = b$

Aleshores $\alpha_a * \alpha_b : [0,1] \longrightarrow \bigcup_{i\in I} C_i$ amb

$(\alpha_a * \alpha_b)(0) = \alpha_a(0) = a$
$(\alpha_a * \alpha_b)(1) = \alpha_b(1) = b$.

(4) Si X i Y són connexos per camins alashores $X\times Y$ són connexos per camins.

Siguin $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in X\times Y$. Tenim camins

$\alpha:[0,1]\longrightarrow X$ amb $\alpha(0)=x_1$, $\alpha(1)=x_2$

$\beta:[0,1]\longrightarrow Y$ $\beta(0)=y_1$, $\beta(1)=y_2$.

$$\alpha\times\beta : [0,1]\longrightarrow [0,1]\times[0,1]\longrightarrow X\times Y$$
$$t\longmapsto (t,t)\longrightarrow (\alpha(t),\beta(t))$$

és contínua i $(\alpha\times\beta)(0)=(x_1,y_1)$
$(\alpha\times\beta)(1)=(x_2,y_2)$.

Ara bé <u>no</u> és cert que si A és connex per camins, alashores $Cl(A)$ també ho és. Més endavant veurem exemples (cagatió, anus del topòleg, pinta i la puça, ...)

Quina relació hi ha entre els dos conceptes de connexitat que hem vist?

<u>TEOREMA</u>: Si X és connex per camins, alashores X és connex.

Veurem tres demostracions!

Demostració 1: Veurem que X només té una component connexa. Prenem $x \in X$ qualsevol, i sigui C una component $C \subset X$. Ara prenem $y \in X$ qualsevol. Com que X és connex per camins, existeix $\alpha : [0,1] \longrightarrow X$ amb $\alpha(0) = x$, $\alpha(1) = y$. Aleshores $x, y \in \alpha([0,1]) \subset X$, com que $\alpha([0,1])$ connex, x, y pertanyen a la mateixa component C. Per tant, $X = C$.

Demostració 2: Suposem que X no és connex, aleshores existeixen $U, V \subset X$ oberts amb $U \cap V = \emptyset$ i $X = U \cup V$. Prenem $x \in U$, $y \in V$. Com que X és connex per camins, existeix $\alpha : [0,1] \longrightarrow X$ contínua amb $\alpha(0) = x$ i $\alpha(1) = y$. Ara bé, $\alpha^{-1}(U) =: U'$, $\alpha^{-1}(V) =: V'$ són oberts disjunts tals que $U' \cup V' = [0,1]$, i no buits ja que $0 \in U'$ i $1 \in V'$. Però $[0,1]$ és connex!

Demostració 3: Fixem $x \in X$. Per cada $y \in X$ hi ha un camí $\alpha_y : [0,1] \longrightarrow X$ amb $\alpha_y(0) = y$, $\alpha_y(1) = x$. Aleshores

$$X = \bigcup_{y \in X} \alpha_y([0,1]) \quad \text{on } \alpha_y([0,1]) \supset \{x, y\} \text{ és connex.}$$

Com que $x \in \bigcap_{y \in X} \alpha_y([0,1])$, tenim que la unió és connexa i X és connex.

#

Ara bé, la implicació contrària no és certa. Hi ha espais connexos que no són connexos per camins i de fet, ja ens els han presentat.

Abans fem un petit lemma que ens serà útil.

<u>Lemma</u> $X = \{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{Z}^+\} \subset \mathbb{R}$ és totalment disconnex

<u>Demostració</u>: Primer tenim que $\{\frac{1}{n}\} \subset X$ és obert i tancat, ja que

$$\left\{\frac{1}{n}\right\} = X \cap \left[\frac{1}{n} - \varepsilon, \frac{1}{n} + \varepsilon\right]$$

$$\left\{\frac{1}{n}\right\} = X \cap \left(\frac{1}{n} - \varepsilon, \frac{1}{n} + \varepsilon\right)$$

on $\varepsilon < \frac{1}{2} \min\left(\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right|, \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right| \right)$.

Sigui $C \subset X$ un subconjunt connex. Si $\frac{1}{n} \in C$ per algun n, tenim que C no és connex, ja que $C = \{1/n\} \cup (C \setminus \{1/n\})$. Per tant, $\frac{1}{n} \notin C$ per cap n. Aleshores $C = \{0\}$. Així els subconjunts connexos estan formats per un sol punt.

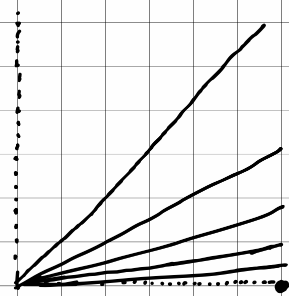
$\#$

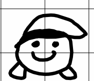
Anem a veure que el cagatió no és connex per camins.

$$L_n = \{ (x, \tfrac{x}{n}) \mid x \in [0,1] \}$$

$$A = \bigcup_{n \geq 1} L_n \quad , \quad B = \{(1,0)\}$$

$$X = A \cup B$$





TEOREMA X no és connex per camins.

Demostració Fixeu-vos que A és connex per camins ja que cada L_n ho és i $\bigcap_{n \geq 1} L_n \neq \emptyset$.

Per tant, hem de provar que no hi ha cap camí $\alpha : [0,1] \longrightarrow X$ amb $\alpha(0) = (1,0)$ i $\alpha(1) \in A$.

De fet veurem que α és constant, és a dir, un camí que comença a $(1,0)$ no en surt mai!

Sigui $C = \{ t \in [0,1] \mid \alpha(t) = (1,0) \} \subset [0,1]$. Sabem que $C \neq \emptyset$ ja que $0 \in C$, a més $[0,1]$ és connex.

Si provem que C és obert i tancat alhora, com que $C \neq \emptyset$ i $[0,1]$ connex tindrem $C = [0,1]$ i per tant α és constant.

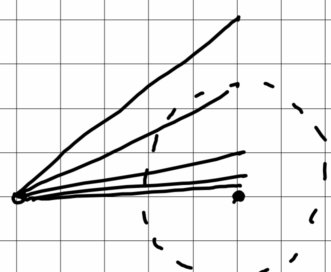
- C és tancat: fixeu-vos que $C = \alpha^{-1}((1,0)) = \{t \in [0,1] \mid \alpha(t) = (1,0)\}$ és tancat ja que α és contínua

- C és obert: sigui $t_0 \in C$, volem trobar $\delta > 0$ amb $(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset C$.

Com que α és contínua en $t_0 \in [0,1]$, donat $\varepsilon = 1/2 > 0$ existeix $\delta > 0$ tal que

$$\alpha(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset B((1,0), 1/2)$$

És important que $(0,0) \notin B((1,0), 1/2)$, així $\alpha(t) \neq (0,0)$ per tot $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.



Ara prenem la funció pendent

$$m : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$m(x,y) = y/x$$

i mesurem la pendent en els punts de $\alpha(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$

$$(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \xrightarrow{\alpha} X \xrightarrow{m} \mathbb{R}, \text{ aleshores}$$

$$m(\alpha(t_0 - \delta, t_0 + \delta)) \subset \{0\} \cup \{1/n, n \in \mathbb{Z}^+\}$$

Ara bé, $m(\alpha(t_0-\delta, t_0+\delta))$ és connex, i $\{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ és totalment disconnex, així

$$m(\alpha(t_0-\delta, t_0+\delta)) \text{ és constant,}$$

com que $m(\alpha(t_0)) = \frac{0}{1} = 0$, tenim

$$m(\alpha(t_0-\delta, t_0+\delta)) = \{0\}.$$

Ara bé, a X només hi ha un punt (x,y) amb $y/x = 0$, és a dir, $(1,0)$. Per tant

$$\alpha(t_0-\delta, t_0+\delta) = (1,0).$$

Per tant, $(t_0-\delta, t_0+\delta) \subset C$ i C és obert.

$\#$

<u>Observació</u> una adaptació d'aquest argument funciona igual amb la pinta del topòleg., i enlloc de la funció pendent, prenem la coordenada x.

Ara bé, fixeu-vos que el "problema" ve d'agafar un punt de la clausura, però si prenem tota la clausura sí són connexos per camins

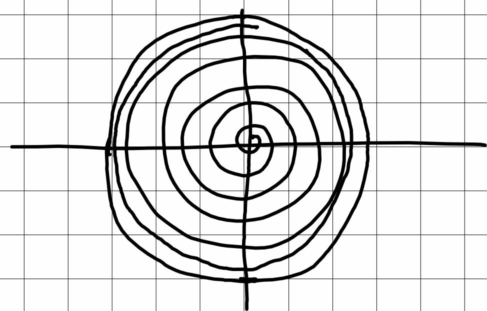
$$Cl(X) = \bigcup_{n \geq 1} L_n \cup ([0,1] \times \{0\}) \text{ en el cas } \alpha \text{ i}$$

$$Cl(X) = ([0,1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0,1]) \cup \bigcup A_n \text{ on}$$

$$A_n = \{(1/n, y) \mid y \in [0,1]\}.$$

Ara bé el remolí del topòleg ens dóna un exemple de connex per camins tal que la clausura deixa de ser-ho.

$$A = \left\{ \left(\frac{\theta}{\theta+1}, \theta\right) \text{ en coordenades polars} \;\middle|\; \theta \in (0, +\infty) \right\} \subset \mathbb{R}^2$$



La clausura és $Cl(A) = A \cup S^1$. Veiem que no és connex per camins. Prenem un camí $\alpha : [0,1] \longrightarrow Cl(A)$ amb $\alpha(0) \in S^1$. Provarem que no pot sortir de S^1, és a dir, si $\|\alpha(0)\| = 1$ aleshores $\|\alpha(t)\| = 1$ per tot $t \in [0,1]$.

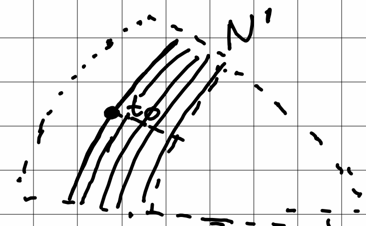
Prenem $C = \alpha^{-1}(S^1) \subset [0,1]$. $C \neq \emptyset$ ja que $\alpha(0) \in S^1$. Si provem que C és obert i tancat aleshores $C = [0,1]$ ja que $[0,1]$ és connex i $\alpha(t) \in S^1$ per tot $t \in [0,1]$.

- $C = \alpha^{-1}(S^1)$ és tancat ja que $S^1 \subset Cl(A)$ és tancat.

$$S^1 = Cl(A) \cap S^1 \text{ ó}$$
$$= Cl(A) \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)\| \geq 1\}.$$

- C és obert: sigui $t_0 \in C$. Aleshores en coordenades polars $\alpha(t_0) = (1, \gamma)$

Prenem $N = \mathcal{U}(A) \cap \left\{ (R,\theta) \;\middle|\; \begin{array}{l} 0.9 < R < 1.1 \\ \gamma - 0.1 < \theta < \gamma + 0.1 \end{array} \right\}$



Com que α és contínua, existeix $\delta > 0$ tal que $\alpha(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset N'$,

$$(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset \alpha^{-1}(N')$$

Veurem que $N' \cap S^1$ és una component connexa de N'. De fet $N' \cap S^1$ és connex per camins, per tant connex.

Si $(1, \theta_1), (1, \theta_2) \in N' \cap S^1$ aleshores

$$\alpha : [0,1] \longrightarrow N' \cap S^1$$
$$t \longmapsto (1, t\theta_1 + (1-t)\theta_2)$$

és un camí.

Si E és un subconjunt amb $N' \cap S^1 \subset E \subset N'$ aleshores hi ha $\left(\frac{\theta}{\theta+1}, \theta\right) \in C$ amb $\frac{\theta}{\theta+1} \neq 1$. Podem prendre $r > 0$ tal que $\{(R,\theta) \mid R < r\} \cap N'$

$$\{(R,\theta) \mid R > r\} \cap N'$$

donen una descomposició en oberts disjunts.

Per tant $\alpha(t_0-\delta, t_0+\delta) \subset S^1$,

$$(t_0-\delta, t_0+\delta) \subset C.$$

$\#$

De la mateixa manera que vam definir components connexes, podem definir les components connexes per camins o arc-connexes.

Donats $x, y \in X$ e.t. Diem que $x \sim y$ si existeix un camí $\alpha : [0,1] \longrightarrow X$ amb $\alpha(0) = x$ i $\alpha(1) = y$.

Comproveu que és una relació d'equivalència (ja hem vist tots els ingredients).

<u>DEFINICIÓ</u> Les components arc-connexes de X són les classes d'equivalència per la relació d'equivalència anterior.

<u>PROPIETATS</u>:

(1) Les components arc-connexes són subconjunts connexos per camins maximals.

Per veure que són connexos per camins només cal agafar la definició. Si $x, y \in C$, component arc-connexa, $x \sim y$, és a dir, existeix $\alpha : [0,1] \to C$ tal que $\alpha(0) = x$, $\alpha(1) = y$.

A més si $A \subset X$ connex per camins amb $A \cap C \neq \emptyset$ on C és una component arc-connexa alshores $A \cup C$ també és arc-connex, i per tant si $z \in A$ i $x \in C$ tenim $z \sim x$, alshores $A \subset C$.

(2) Les components connexes per camins són disjuntes ja que si $C \cap C' \neq \emptyset$ on C, C' són dues components alshores $C \cup C'$ és arc-connex i $C \subset C \cup C'$, per maximalitat, $C = C \cup C'$. També $C' = C \cup C'$ i alshores $C = C'$.

Així també podem escriure X com una unió de components arc-connexes disjuntes. Recordeu que les components arc-connexes són subconjunts connexos però potser no maximals.

La pinta del topòleg és connex però té dues components connexes per camins.

Així cada component connexa és unió de components arc-connexes.

Quan coincideixen?

<u>DEFINICIÓ</u> X espai topològic és localment arcconnex si per tot $x \in \mathcal{U}$ obert existeix un entorn N arc-connex amb $x \in N \subset \mathcal{U}$.

<u>OBSERVACIÓ</u>: Si X és localment arc connex aleshores les components arc-convexes també són obertes. I alshores

$$X = \bigcup_{i \in I} C_i \quad \text{on} \quad C_i \text{ components arc-connexes obertes}$$

tenim $C_i = X \setminus \bigcup_{j \neq i} C_j = \bigcap_{\substack{j \in I \\ j \neq i}} (X \setminus \underset{\text{tancat}}{C_j})$ tancat.

Per tant, les components arc-connexes són obertes i tancades alhora si X és localment connex per camins.

<u>TEOREMA</u> Si X és localment connex per camins, les components connexes i les components arc-connexes són les mateixes.

<u>Demostració</u>: Sigui $\emptyset \neq P \subset X$ una component arc-connexa. En particular sabem que P és connex. Alshores existeix una component connexa $D \subset X$ amb $P \subset D \subset X$.

Ara bé, P és obert i tancat i D connex, per tant $P = D$.

#

Així si X és connex i localment arc-connex, també serà connex per camins.

<u>Exemple</u> Ja hem vist que els exemples com la pinta del topòleg o el comtagotió no són localment arc-connexos ja que les components en cada cas són diferents.