3, 2, 1...

ACCIÓ

(D'UN GRUP EN UN ESPAI TOPOLÒGIC!)

Natàlia Castellana

Dedicarem un capítulet a una nova manera de construir espais topològics fent servir un dels conceptes més 'xul·los' en matemàtics: les accions de grups.

DEFINICIÓ: Sigui G un grup i X un conjunt. Una acció de G en X consisteix en una permutació $\Theta_g : X \longrightarrow X$ per cada $g \in G$ (i.e. bijecció) que compleix les dues condicions següents:

(1) Si $e \in G$ és l'element neutre, $\Theta_e = id$.
(2) Per cada $g, h \in G$, $\Theta_g \circ \Theta_h = \Theta_{gh}$.

Exemple • El grup simètric Σ_n actua en $\{1, 2, \dots, n\}$ on $\Theta_\sigma(i) = \sigma(i)$.

• El grup $\mathbb{Z}/2$ actua a $\mathbb{R}^n$. Si $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{1, \sigma\}$ alshores $\Theta_\sigma(x_1, \dots, x_n) = (-x_1, \dots, -x_n)$.

• El grup $\mathbb{Z}$ actua a $\mathbb{R}$, $\Theta_n(x) = x + n$. O també $\mathbb{Z}^n$ actua en $\mathbb{R}^n$
$$\Theta_{(a_1 \dots a_n)}(x_1, \dots, x_n) = (a_1 + x_1, \dots, a_n + x_n).$$

També es pot entendre l'acció d'un grup en un conjunt com una aplicació
$$G \times X \xrightarrow{\Theta} X \qquad \Theta(g, x) = \Theta_g(x)$$

Fixeu-vos que un grup actua en si mateix fent servir el producte
$$\Theta : G\times G \longrightarrow G \,, \quad \Theta(g,h) = gh$$
aleshores
$$\Theta_g(h) = gh.$$

Per exemple, $\mathbb{Z}/4$ actua en $\{0,1,2,3\}$ amb la multiplicació i si $\mathbb{Z}/4 = \langle \sigma \rangle = \{1,\sigma,\sigma^2,\sigma^3\}$ aleshores
$$\Theta_\sigma : \{0,1,2,3\} \longrightarrow \{0,1,2,3\}$$
és la permutació (0123).

Hi ha una sèrie de nocions que van lligades a la definició d'acció d'un grup en un conjunt.

__DEFINICIÓ__ Sigui X un conjunt amb una acció d'un grup G. Sigui $x\in X$, aleshores

- l'òrbita de $x\in X$ és el subconjunt de X
$$G\cdot x = \{\Theta_g(x) \mid g\in G\} \subset X$$
- l'estabilitzador de $x\in X$ és el subgrup de G
$$G_x = \{g\in G \mid \Theta_g(x) = x\} < G$$

Diem que $x\in X$ és un punt fix si $G_x = G$, és a dir, $\Theta_g(x) = x$ per tot $g\in G$. Una acció és lliure si $G_x = \{1\}$ per tot $x\in X$.

Fixeu-vos que Θ_g és bijectiva amb inversa $\Theta_{g^{-1}}$.

Exemples

(1) $\mathbb{Z}$ actuant en $\mathbb{R}$, $\Theta_n(x) = x+n$. Aleshores

$$\mathbb{Z}\cdot x = \{x+n \mid n\in\mathbb{Z}\}$$
$$\mathbb{Z}_x = \{0\}$$

(2) $\mathbb{Z}/2$ actuant en $\mathbb{R}^n$, $\Theta_\sigma(x_1,\dots,x_n) = (-x_1,\dots,-x_n)$

$\mathbb{Z}/2\cdot\vec{x} = \{\vec{x},-\vec{x}\}$ on $\vec{x} = (x_1,\dots,x_n)$ si $\vec{x}\neq\vec{0}$

$\mathbb{Z}/2\cdot\vec{0} = \vec{0}$

$(\mathbb{Z}/2)_{\vec{x}} = \{1\}$ si $\vec{x}\neq 0$

$(\mathbb{Z}/2)_{\vec{0}} = \mathbb{Z}/2$

Fixeu-vos que tenim una partició de X fent servir les òrbites

$$X = \bigcup_{x\in X} G\cdot x$$ i $Gx = Gy$ sii existeix $g\in G$ tal que $\Theta_g(x) = y$.

Aleshores la relació d'equivalència

$$x\sim y \text{ sii } x\in G\cdot y$$

ens permet considerar el conjunt de classes d'equivalència $X/\sim$ que escrivim X/G.

$X/G \subset P(X)$ i una aplicació exhaustiva $X \xrightarrow[\pi]{} X/G$

X/G es diu el conjunt d'òrbites de X per G.

Però, com que estem en un curs de topologia, ens interessen les transformacions que preserven l'estructura d'oberts / tancats.

DEFINICIÓ Sigui X un espai topològic i G un grup una acció de G en X és un homeomorfisme $\Theta_g : X \longrightarrow X$ per cada $g \in G$ de manera que

(1) $\Theta_e = id$ on e és l'element neutre

(2) $\Theta_{gh} = \Theta_g \circ \Theta_h \quad , g,h \in G$

Tots els exemples anteriors en són exemples amb les topologies mètriques a $\mathbb{R}$.

Aleshores l'espai d'òrbites és un espai topològic amb la topologia quocient.

$$X \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow X/G.$$

Exemples

(1) Sigui $\mathbb{Z}$ actuant en $\mathbb{R}$ via traslacions

$$\mathbb{R} \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

Observem que $\mathbb{Z} \cdot x$ sempre conté un element a l'interval $[0,1]$.

Així podem considerar

$$[0,1] \overset{i}{\underset{\text{contínua}}{\hookrightarrow}} \mathbb{R}$$
$$\downarrow p \quad \text{contínua}$$
$$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

Ara bé, $\{0,1\}$ pertanyen a la mateixa òrbita,

$$\begin{array}{ccc} [0,1] & \overset{i}{\hookrightarrow} & \mathbb{R} \\ p' \downarrow & & \downarrow p \\ [0,1]/\{0,1\} & \xrightarrow{j} & \mathbb{R}/\mathbb{Z} \end{array}$$

aleshores j és contínua ja que $j \circ p' = p \circ i$ ho és. El mateix argument que en el capítol anterior prova que
$$S^1 \underset{\cong}{\longrightarrow} [0,1]/\{0,1\} \underset{\cong}{\longrightarrow} \mathbb{R}/\mathbb{Z}.$$

(2) $\mathbb{Z}/2$ actua en S^n amb l'acció

$$A_\sigma : S^n \longrightarrow S^n \qquad \text{que anomenem } \underline{\text{antipodal}}$$
$$\vec{x} \longmapsto -\vec{x}$$

Aleshores del capítol anterior sabem que
$$\mathbb{R}P^n \underset{\cong}{\longrightarrow} S^n/\mathbb{Z}/2$$

Sabem que $p: X \twoheadrightarrow X/G$ és contínua ja que hem dotat X/G de la topologia quocient induïda per p. En general p no té perquè tenir més propietats però en el cas de la topologia quocient tenim la següent proposició.

PROPOSICIÓ La projecció $p: X \to X/G$ és oberta on G és un grup actuant en l'espai topològic X.

DEM: Per veure que és oberta hem de comprovar que si $A \subset X$ és obert aleshores $p(A)$ ho és.

Fixeu-vos que $p(A) \subset X/G$ és obert si $p^{-1}(p(A)) \subset X$ ho és (per definició).

$$p^{-1}(p(A)) = \{x \in X \mid p(x) \in p(A)\} = \{x \in X \mid G \cdot x \in p(A)\}$$

$$= \{x \in X \mid \text{existeix } g \in G \text{ i } y \in A \text{ tal que } x = \theta_g(y)\}$$

$$= \bigcup_{g \in G} \theta_g(A)$$

Ara bé $A \subset X$ obert, i fixat $g \in G$, θ_g és homeomorfisme, aleshores $\theta_g(A)$ és obert per tot $g \in A$. Com que les unions arbitràries d'oberts és obert tenim

$$p^{-1}(p(A)) = \bigcup \theta_g(A) \subset X \text{ obert}$$

i per tant $p(A)$ és obert també. #

Exemples

- $\mathbb{Z}/n$ actua en el conjunt (espai topològic discret) $X=\{1,\dots,n\}$. Fixeu-vos que

$$\mathbb{Z}/n = \langle (1,\dots,n)\rangle \subset \Sigma_n$$

Aleshores hi ha una sola òrbita $\mathbb{Z}/n\cdot 1 = X$ i $X/\mathbb{Z}/n = \{1\}$.

- Σ_n també actua en $\{1,\dots,n\}$ i de fet, és el grup de totes les bijeccions.

Moltes vegades les simetries de l'espai on actua el grup és el que el defineix.

- D_{2n} és el grup dihèdric de $2n$ elements definit com el grup de simetries (rígides) en el pla d'un polígon d'n costats. Està generat per rotacions i reflexions

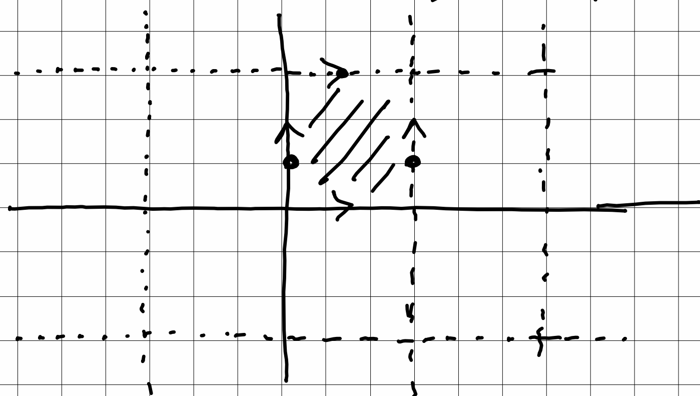
- El grup icosaèdric és el grup d'isometries de l'icosaedre i té 120 elements.

I acabem, altre cop .... el tor: subespai, producte, quocient!

Sigui $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ on $\mathbb{Z}^n$ actua per traslacions en les coordenades. Si $n=2$ aleshores tenim

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$$

Fixeu-vos que tota òrbita té un representant (no necessàriament únic) a $[0,1]\times[0,1]$



I dins d'aquest quadrat hi ha parelles en la mateixa òrbita que acaben identificades

$$(0,x) \sim (1,x)$$
$$(x,0) \sim (x,1)$$

Així doncs hi ha una aplicació contínua i bijectiva

$$\mathbb{T} \cong [0,1]^2/\sim \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

que és un homeomorfisme

De la mateixa manera podem obtenir l'ampolla de Klein com un espai d'òrbites. Sigui $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} = \langle S, T\rangle$ on $S=(1,0)$, $T=(0,1)$

Definim l'acció

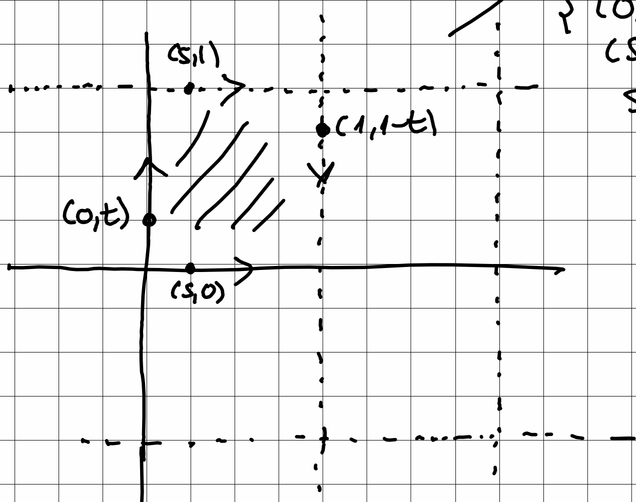
$$\theta_S(x,y) = (x, y+1)$$

$$\theta_T(x,y) = (x+1, -y)$$

Així l'espai d'òrbites té les següents identificacions

$$\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \cong \mathbb{R}^2 / \{(x,y)\sim(n+x, m+(-1)^n y), n,m\in\mathbb{Z}\}$$

$$\cong [0,1]\times[0,1] \Big/ \begin{array}{l}\{(0,t)\sim(1,1-t)\} \\ (s,0)\sim(s,1) \\ s,t\in[0,1]\end{array}$$



L'ampolla de Klein!

I ara, una acció de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ en el tor ...

Sigui $f: T \longrightarrow T$ on $T = [0,1]^2/\sim \;\cong \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$

$$[(x,y)] \longrightarrow [(-x, y+\tfrac{1}{2})]$$

aleshores proveu que $f \circ f = id$ i per tant dóna lloc a una acció de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ en T.

Sabries identificar $T/\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$?