LA RECEPTA DE LA CLASSIFICACIÓ DE LES SUPERFÍCIES COMPACTES CONNEXES:

- INGREDIENTS
- PROCEDIMENT

Natàlia Castellana, 2021

Dedicarem aquest capítol a veure com es cuina la classificació de les superfícies compactes connexes.

TEOREMA CLASSIFICACIÓ SUPERFÍCIES COMPACTES CONNEXES

(Brahana, 1921, Möbius 1861, Jordan 1866, ...)

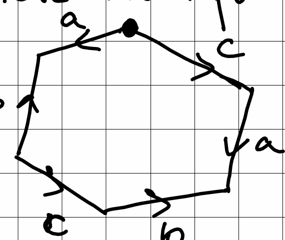
Tota superfície compacta connexa és homeomorfa a una i només una de les següents:

- S_g $\quad g\geq 0 \quad S_g \cong S^2 \# \underbrace{T \# \cdots \# T}_{g}$
  orientable de gènere g
- N_g $\quad g>0 \quad N_g \cong \mathbb{RP}^2 \# \cdots \# \mathbb{RP}^2$
  no orientable de gènere g

Hi ha dos ingredients principals

(A) Tota superfície compacta connexa es pot escriure com un polígon amb els costats identificats dos a dos

E.g.

$ab^{-1}cba^{-1}c^{-1} =$ 

- T_2 $\quad aba^{-1}b^{-1}$
- $\mathbb{RP}^2$ $\quad aa$
- K $\quad aba^{-1}b$
- S^2 $\quad aa$

(B) Tot polígon amb els costats identificats es pot reduir a una presentació de la forma

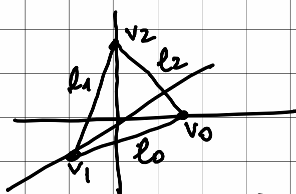
$$a_1a_1 \cdots a_na_n b_1c_1b_1^{-1}c_1^{-1} \cdots b_mc_mb_m^{-1}c_m^{-1}$$

VARIETATS COMBINATÒRIES : TRIANGULACIONS

Sigui M una superfície compacta connexa. Una triangulació de M és una família finita $\{T_1, \dots, T_n\}$ on $T_i \subset M$ tancats tals que hi ha homeomorfismes

$$\varphi_i : T \longrightarrow T_i$$

on $T = \{ (t_0, t_1, t_2) \in \mathbb{R}^3 \mid t_0 + t_1 + t_2 = 1 \}$ és un triangle.

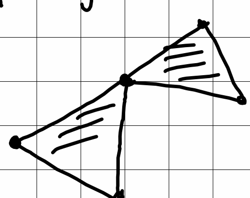


$v_0 = (1, 0, 0)$
$v_1 = (0, 1, 0)$
$v_2 = (0, 0, 1)$

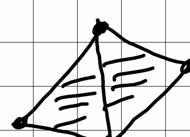
Els vèrtexs de T_i són $\{\varphi_i(v_0), \varphi_i(v_1), \varphi_i(v_2)\}$
I les arestes són $\{\varphi_i(l_j)\}_{j=0,1,2}$

on l_0 és el segment que uneix v_0 i v_1
l_1 és el segment que uneix v_1 i v_2
l_2 és el segment que uneix v_2 i v_0

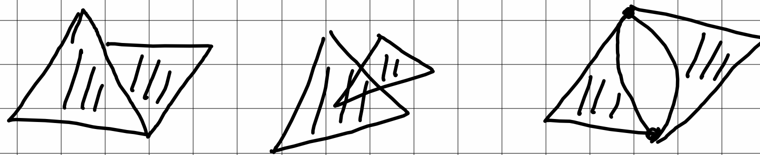
S'ha de complir que si $T_i \cap T_j \neq \emptyset$ aleshores $T_i \cap T_j$ és un sol vèrtex o una sola aresta



ó

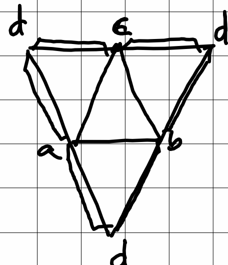


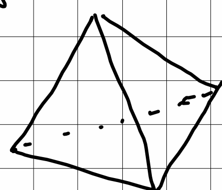
Però no es permeten interseccions del tipus



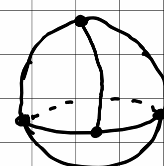
Exemples

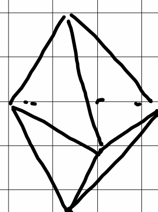
(0) Una triangulació de l'esfera



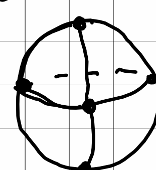


Tetraedre

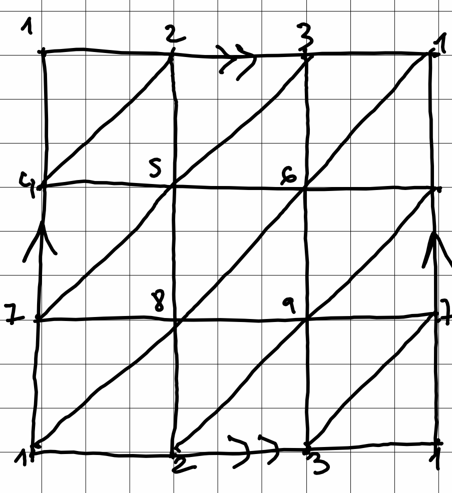




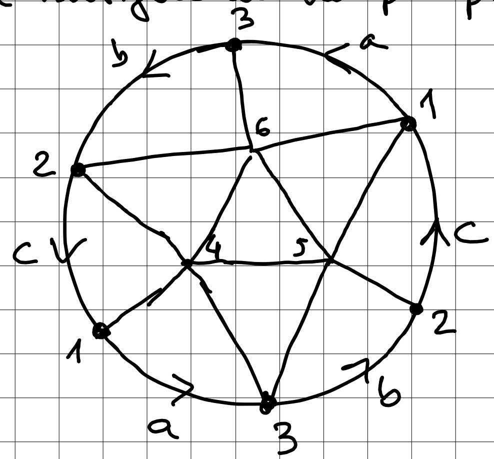
Octaedre



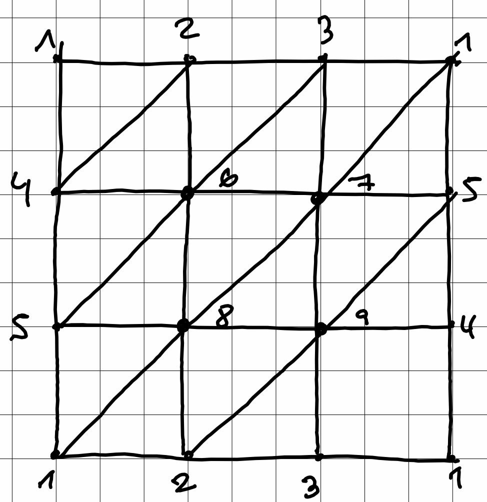
(1) Una triangulació del tor amb 9 vèrtexs i 18 triangles.



(2) Una triangulació del pla projectiu $\mathbb{R}P^2$ amb 6 vèrtexs, i 10 triangles



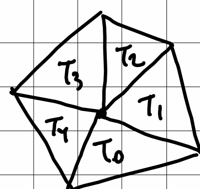
(3) Una triangulació d'una ampolla de Klein



Fixeu-vos que en una triangulació d'una superfície compacta connexa (sense vora)

(1) Cada aresta ho és d'exactament dos triangles.

(3) Si v és un vèrtex, els triangles al seu voltant es poden ordenar de manera cíclica $T_0, T_1, \ldots, T_n = T_0$ de manera T_i i T_{i+1} tenen una aresta en comú



<u>TEOREMA</u> (Radó, 1925) Tota superfície compacta admet una triangulació.

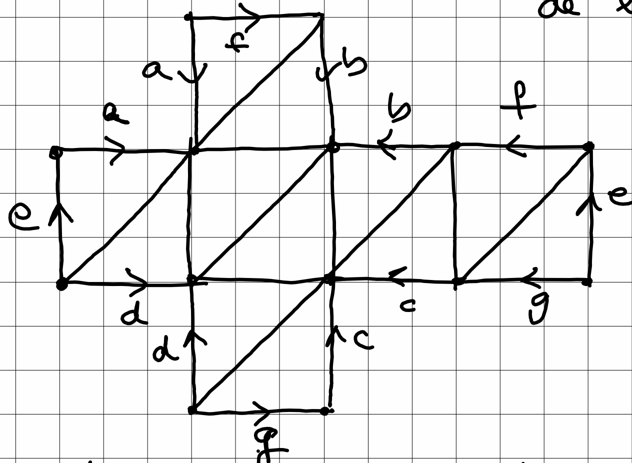
La demostració d'aquest resultat fa ús d'una versió forta del teorema de la corba de Jordan que val la pena mencionar. La versió clàssica en dimensió 2 diu el següent

<u>Teorema de la corba de Jordan</u> Una corba tancada simple (sense autointerseccions) divideix el pla en dues components connexes. Una d'aquestes és acotada ("interior de la corba") i l'altra no ("exterior de la corba"). La frontera de cada component és la corba.

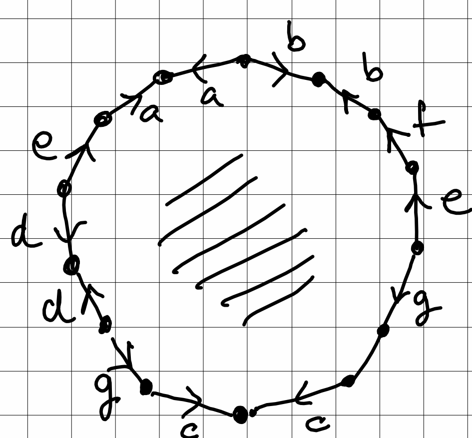
I per a què fem servir les triangulacions?

Doncs d'alguna manera ja ho hem vist, amb una triangulació puc donar una projecció plana de la superfície com un polígon amb costats identificats dos a dos.

Per exemple, tots coneixem aquesta triangulació de l'esfera :-)



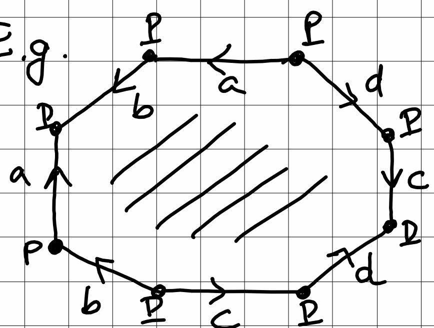
Que es pot escriure com un 14-gon amb les identificacions d'arestes dos a dos.



<u>CONCLUSIÓ</u>: Tota superfície compacta connexa admet una presentació com un polígon amb els costats identificats dos a dos.

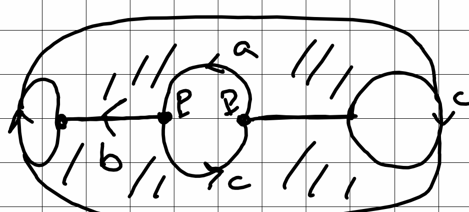
I al revès, tot polígon amb els costats identificats dos a dos dóna lloc a una superfície.

E.g.

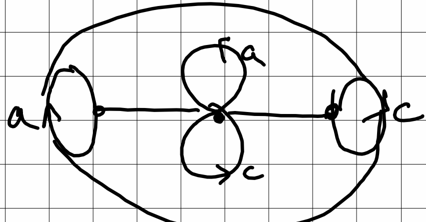


Quina superfície és?

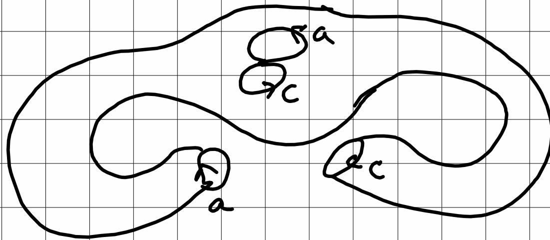
Anem a enganxar les arestes.
Primer b i d, plegant de dalt a baix



Engenxam el punt P ja que tots els vèrtexs han d'acabar identificats



Ara estirem les puntes ...



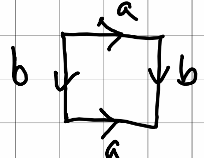
I acabem enganxant les arestes a i c

$T \# T$

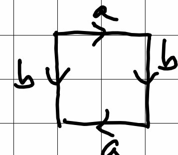
Hem completat un pas de la topologia a la combinatòria ja que per donar una superfície només cal que escrigui la seqüència d'identificacions d'arestes a la vora d'un n-gon seguint una orientació.

L'exemple anterior és $dcd^{-1}c^{-1}bab^{-1}a^{-1}$.
Per exemple el tor i l'ampolla de Klein són

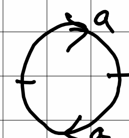
T $aba^{-1}b^{-1}$



K $abab^{-1}$



$\mathbb{RP}^2$ aa



I EN DIMENSIONS SUPERIORS?

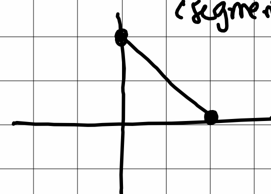
Comencem definint els "triangles".

<u>Definició</u> Un n-símplex Δ és

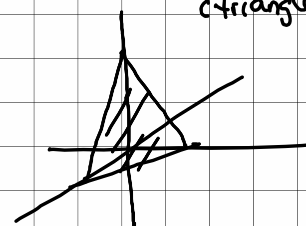
$$\Delta^n = \{(x_0,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^{n+1} \mid x_0+x_1+\dots+x_n=1\}\subset\mathbb{R}^{n+1}$$

$n=0$ (punt)

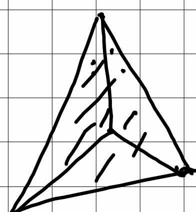
$n=1$ (segment)



$n=2$ (triangle)



$n=3$

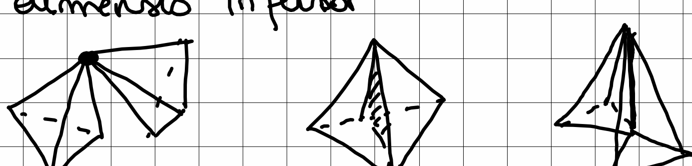


tetraedre ple

Una triangulació d'una varietat M compacta de dimensió n és una col·lecció $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ on $T_i \subset M$ són subconjunts tancats i per cada i tenim un homeomorfisme

$$\varphi_i : \Delta^n \longrightarrow T_i$$

De manera que si $T_i \cap T_j \neq \emptyset$ s'ha de complir que la intersecció és un símplex sencer de dimensió inferior



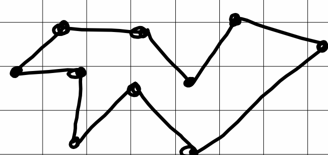
Diem que M és triangulable (una varietat combinatòria) si admet una triangulació.

Què es sap? Kneser va fer la pregunta

- és cert que tota varietat admet una triangulació?

$n=0$ Res a dir, ✓.

$n=1$ Tota corba admet una triangulació



(folklore)

$n=2$ SÍ. Radó, 1925 (de fet, totes són PL)

$n=3$ SÍ. Moise, 1952 (de fet, totes són diferenciables)

$n=4$ NO. Casson, hi ha una varietat que no admet cap triangulació.

$n \geq 5$ NO. Manolescu, 2014

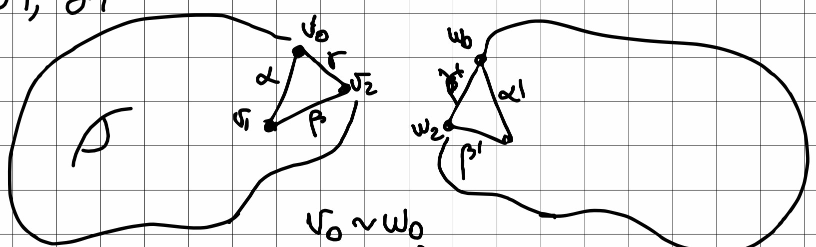
Totes les varietats diferenciables són triangulables.

COM ES VEU LA SUMA CONEXA ?

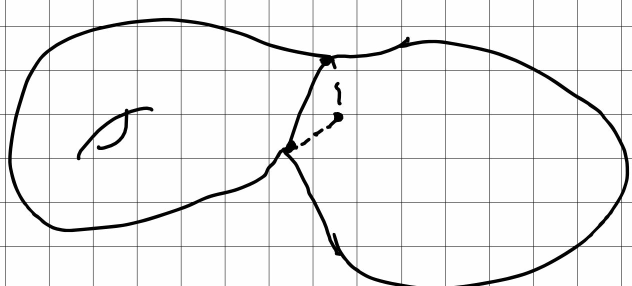
Si M, N són dues superfícies amb triangulacions $\{T_i\}_{i=1}^{m}$ i $\{T_i'\}_{i=1}^{n}$

alshores podem fer la suma connexa de la següent manera.

Escollim triangles $T_i \subset M$ i $T_i' \subset N$. Els buidem i els enganxem pels vertexs i arestes ∂T, $\partial T'$



$v_0 \sim w_0$
$v_1 \sim w_1$
$v_2 \sim w_2$ $\alpha \sim \alpha'$, $\beta \sim \beta'$, $\gamma \sim \gamma'$.



MÈTODE DE REDUCCIÓ DE PARAULES QUE DEFINEIXEN SUPERFÍCIES.

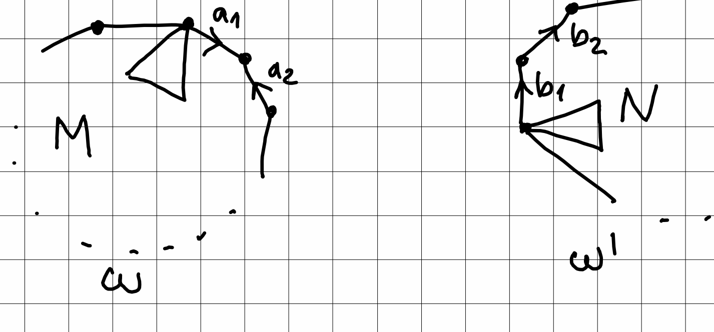
Donada una superfície compacta connexa M hi ha moltes maneres de donar un presentació com un polígon amb costats identificats dos a dos.

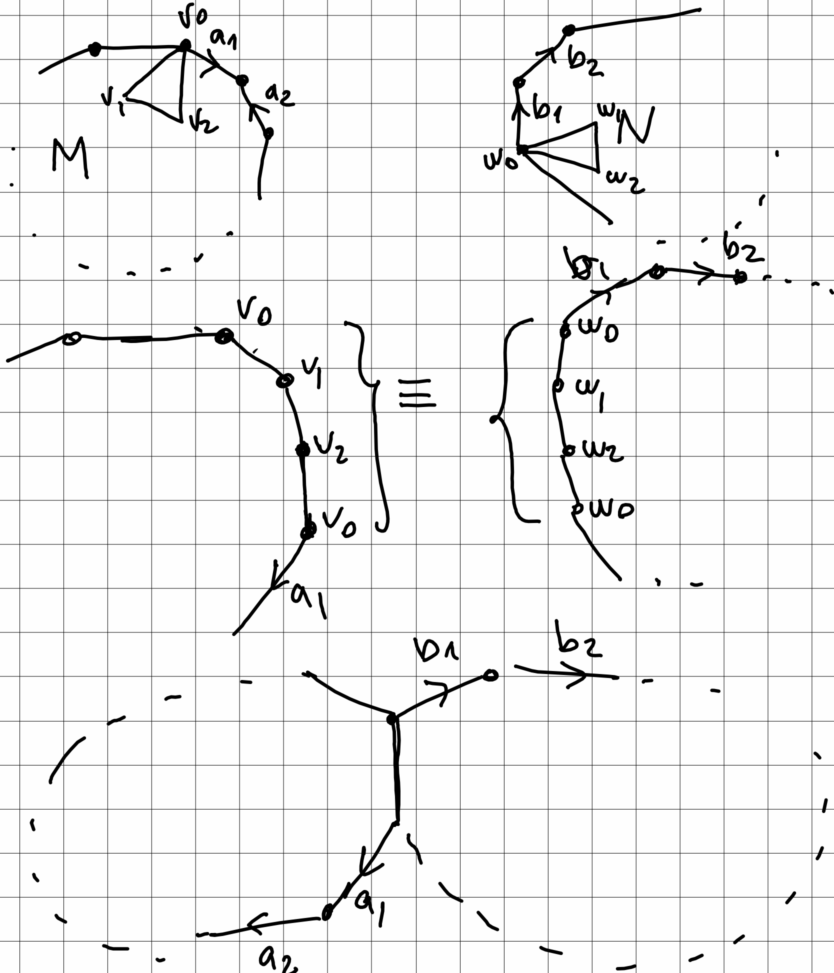
<u>DEFINICIÓ</u> Diem que una paraula definint una superfície està en forma normal si és de la forma

$$\omega = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}$$
$$\omega = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_r b_r a_r^{-1} b_r^{-1} c_1 c_1 \cdots c_s c_s$$

A partir representem les superfícies com una paraula en $\{a_i^{\pm 1}\}_{i=1}^{n}$ i tal que cada lletra només apareix dos cops representant les identificacions en un polígon.
Així $dabccba^{-1}d$ ho és
però $abaacdc^{-1}$ no ho és.

Com fem la suma connexa?



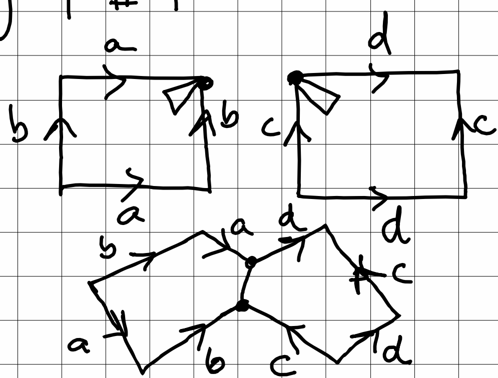


És a dir, el nou poligon és la concatenació de les dues paraules

$M \# N$ té presentació ww'.

Exemples

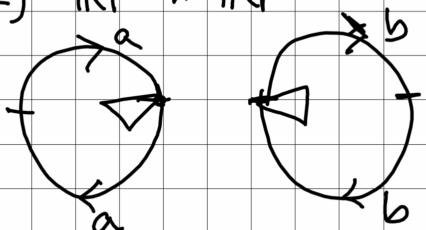
1) $T \# T$



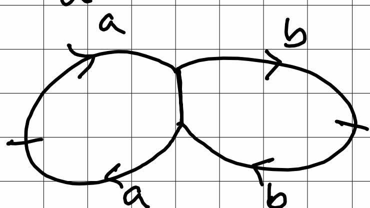
$b^{-1}a^{-1}ba \# dc^{-1}d^{-1}c$

$b^{-1}a^{-1}badc^{-1}d^{-1}c$

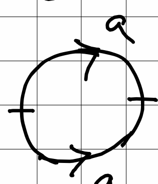
2) $\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$



$aa \# bb$



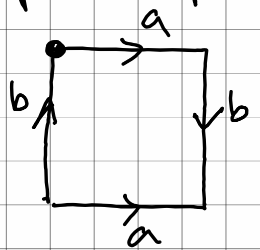
$aabb$

3) S^2 es 

$aa^{-1} = 1$ Neutre.

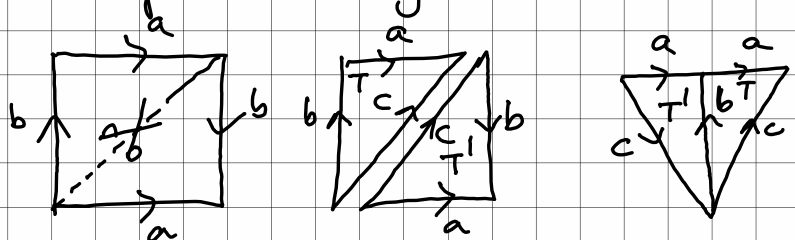
Ara bé, les presentacions no són úniques i depenen de com 'despleguem' la triangulació.

Per exemple, si prenem l'ampolla de Klein K

$K =$ 

$aba^{-1}b$

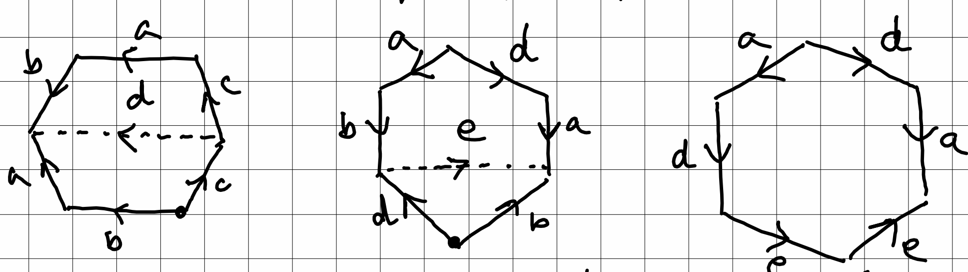
Si retallem per la diagonal, marquem la identificació i enganxem b tenim ...



$aba^{-1}b$ $\qquad\qquad$ $aacc$

Així $K \cong \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$

O bé recordeu $T \# \mathbb{RP}^2 \cong K \# \mathbb{RP}^2 \cong \# \mathbb{RP}^2$



$aba^{-1}bcc$ $\qquad$ $abd^{-1}ba^{-1}d^{-1}$ $\qquad$ $adeea^{-1}d^{-1}$
$= a^{-1}d^{-1}adee$

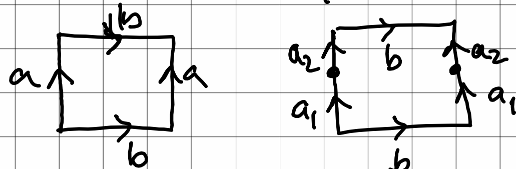
TRANSFORMACIONS PERMESES EN UNA PRESENTACIÓ POLIGONAL DE M

(0) Reetiquetar / canviar de nom les arestes

$$aba^{-1}b^{-1} \equiv cdc^{-1}d^{-1}$$

(1) Dividir o consolidar

$$aba^{-1}b^{-1} = a_1a_2ba_2^{-1}a_1^{-1}b^{-1}$$



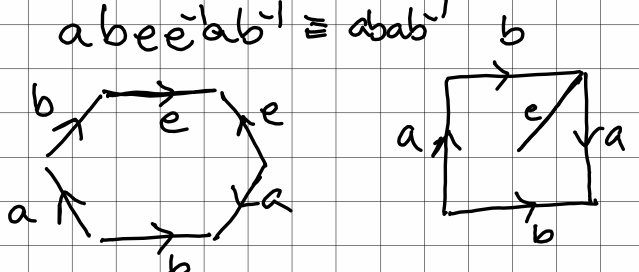
(2) Rotar $\quad aba^{-1}b^{-1} \equiv ba^{-1}b^{-1}a \equiv a^{-1}b^{-1}ab$

$$\equiv b^{-1}aba^{-1}.$$

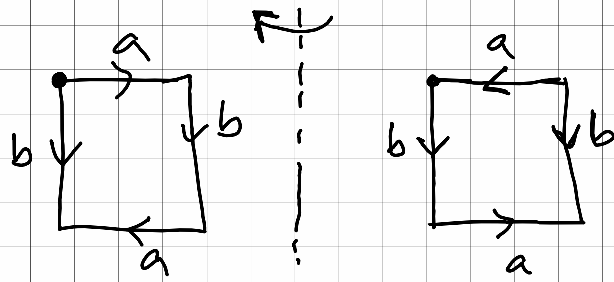
(3) Tallar i enganxar $\quad abab^{-1} \equiv abe, ab^{-1}e^{-1}$

(4) Plegar / desplegar

$$abee^{-1}ab^{-1} \equiv abab^{-1}$$



(5) Reflexió $abab^{-1} \equiv a^{-1}b^{-1}a^{-1}b$



Reflexió $a^{-1}ba^{-1}b^{-1}$

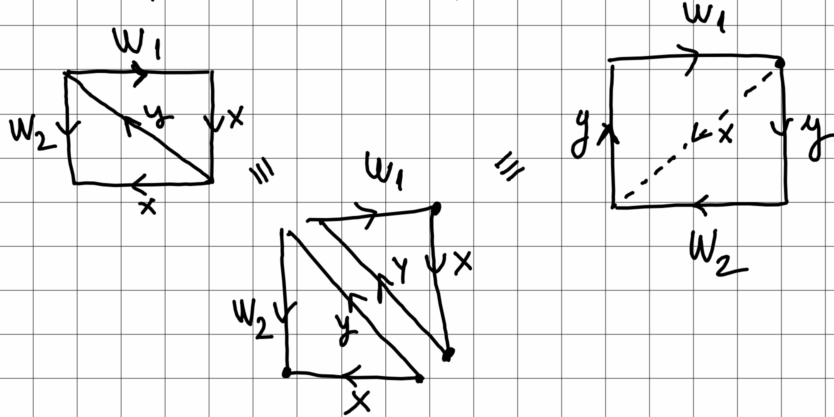
La demostració per reduir qualsevol paraula a una forma normal es basa en descriure un algorisme

<u>Pas 0</u> S'eliminen parelles aa^{-1} amb (4) i es consoliden les que es puguin amb (1)

<u>Pas 1</u> Primer es descriu un procediment de manera que en la presentació tots els vèrtexs de la rosa s'identifiquen a un de sol.

<u>Pas 2</u> Si la presentació té dues lletres en el mateix sentit es posen de costat

$$x x W_1^{-1} W_2 \equiv y W_1 y W_2$$

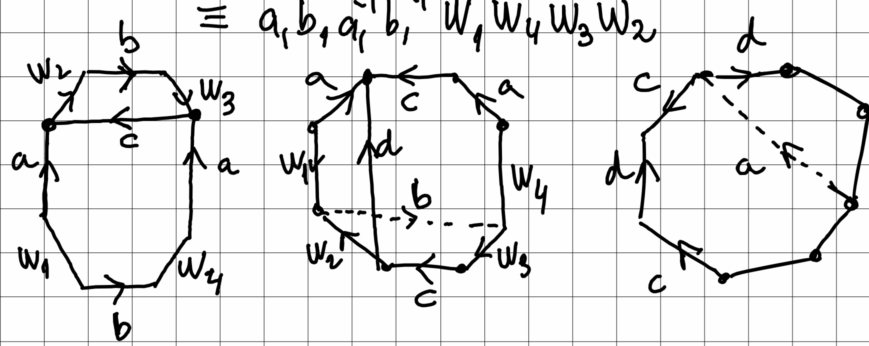


D'aquesta manera sempre que una aresta aparegui amb la mateixa orientació es pot moure aparellada al principi (vegeu exemple ampolla Klein)

<u>Pas 3</u> Les parelles a, b, a^{-1}, b^{-1} que apareixen separades es poden agrupar.

$$W_1 \, a \, W_2 \, b \, W_3 \, a^{-1} \, W_4 \, b^{-1}$$

$$\equiv a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} W_1 W_4 W_3 W_2$$



Amb aquest algorisme (mòdul simplificacions d'arestes pel camí) s'acaba obtenint una presentació en la forma normal

$1, \quad a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1} c_1 c_1 \cdots c_m c_m, \quad a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}$

$S_0 \qquad S_n \# N_m \qquad S_n$

Ara bé, com que $S_1 \# N_1 \cong N_3$ al final tenim

$$S_n \# N_m \cong N_{m+2n}$$

Ara bé, com les distingim a la pràctica?

Qui és qui?