$\mathbb{Q}$ NO ÉS LOCALMENT COMPACTE.

Natàlia Castellana 2021

L'objectiu d'aquesta nota és provar que $\mathbb{Q}$ <u>no</u> és localment compacte. Veurem que els subconjunts compactes de $\mathbb{Q}$ tenen interior buit, no poden ser entorns.

Suposem que $A \subset \mathbb{Q}$ és compacte, i prenem $r \notin A$. Definim un recobriment de A.

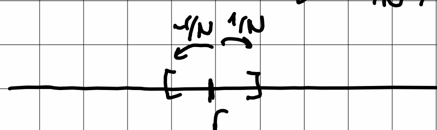
$$\mathcal{U}_n = \{ q \in \mathbb{Q} \mid |q - r| > \tfrac{1}{n} \} = \mathbb{Q} \cap \left((-\infty, r - 1/n) \cup (r + 1/n, +\infty) \right)$$

$$\mathcal{U}_n \subset \mathcal{U}_{n+1}, \quad \mathcal{U} = \{ \mathcal{U}_n \}_{n=1}^{\infty}$$

A més, $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n = \mathbb{Q} \cap \left((-\infty, r) \cup (r, +\infty) \right)$

Com que $r \notin A$ tenim que $A \subset \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n$. Així com que A és compacte, tenim existeixen $\mathcal{U}_{n_1}, \dots, \mathcal{U}_{n_r}$ tals que $A \subset \mathcal{U}_{n_1} \cup \dots \cup \mathcal{U}_{n_r}$, a més són encaixats. Per tant hi ha $N > 0$ tal que $A \subseteq \mathcal{U}_N$ i

$$[r - 1/N, r + 1/N] \cap A = \emptyset$$



És a dir, si $r \notin A$ existeix $N > 0$ tal que

$$A \cap [r - 1/N, r + 1/N] = \emptyset.$$

Seguim, volem veure $\mathrm{Int}(A) = \emptyset$.

Siqui $a \in \text{Int}(A)$, existeix $\varepsilon > 0$ tal que
$$(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap \mathbb{Q} \subset A.$$

Recordem que els subconjunts compactes en un espai topològic Hausdorff són tancats. Per tant, A és tancat i alashores, ($a-\varepsilon$, $a+\varepsilon$ són adherents)

$$[a-\varepsilon, a+\varepsilon] \cap \mathbb{Q} \subseteq A.$$

Ara escollim $r \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Per l'apartat anterior, existeix $N > 0$ tal que

$$[r - \tfrac{1}{N}, r + \tfrac{1}{N}] \cap A = \emptyset$$

Alashores $[r - \frac{1}{N}, r + \frac{1}{N}] \cap [a-\varepsilon, a+\varepsilon] \cap \mathbb{Q} = \emptyset$.

- Podem agafar $N \gg 0$ de manera que

$$[r - \tfrac{1}{N}, r + \tfrac{1}{N}] \subset [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$$

alashores $[r - \frac{1}{N}, r + \frac{1}{N}] \cap \mathbb{Q} = \emptyset$!!!