I de què estan fets els conjunts disconnexos?
Hem vist que els conjunts totalment disconnexos estan fets de les unitats indivisibles més petites, els punts.

Un espai disconnex es pot separar en unió disjunta no trivial d'oberts de més d'una manera. N'hi ha alguna de 'canònica'? Parlem de subconjunts connexos maximals...

Sigui X un espai topològic, definim una relació d'equivalència a X

$x \sim y$ sii $x, y \in C \subset X$ on C connex.

- $x \sim x$ ja que $\{x\} \subset X$ és connex
- $x \sim y$ aleshores $y \sim x$ (relació simètrica)
- Anem a veure la transitivitat:
  $x \sim y$ si existeix $x, y \in D \subset X$ amb D connex
  $y \sim z$ si existeix $y, z \in E \subset X$ amb E connex

  però fixeu-vos que $y \in D \cap E$, per tant, $D \cup E$ és connex ja que $D \cap E \neq \emptyset$
  Aleshores $x, z \in D \cup E \subset X$ amb $D \cup E$ connex i $x \sim z$.

DEFINICIÓ: Sigui X e.t. amb $\sim$ definida fa un moment. Les components (connexes) de X són les classes d'equivalència per $\sim$.

<u>Exemples</u> (0) Si X és connex, aleshores només hi ha una component connexa, X.

(1) Si X és totalment disconnex aleshores les components connexes són els punts

Les classes d'equivalència formen una partició d'X i són els subconjunts connexos maximals de X.

<u>PROPIETATS</u>

(1) Cada component $C \subset X$ és connex. A més donat $p \in C$ és el subconjunt connex maximal que conté p.

Sigui C una component que conté $p \in C$. Per cada $x \in C$ hi ha un subconjunt connex $C_x \subset X$ amb $x, p \in C_x$ ja que $x \sim p$.

Observeu que $C_x \subset C$: si $y \in C_x$ aleshores com que $y, p \in C_x$ tenim $y \sim p$ i per tant $y \in C$.

Ara bé, $\bigcup_{x \in C} C_x = C$ és una unió de subconjunts connexos amb intersecció no buida ja que $p \in C_x$ per tot $x \in C$. Per tant, C és connex.

Si $p \in C$, C és el subconjunt connex maximal tal que $p \in C$. Si $p \in E$ on E connex i $E \not\subset C$ aleshores $C \cup E$ és connex ja que $p \in E \cap C \neq \emptyset$ i per tant tots $x \in E$ compleixen $x \sim p$ i per tant $x \in C$!

(2) Les components connexes són subconjunts disjunts en X.

Siguin $C_1, C_2 \subset X$ dues components connexes. Si $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$, prenem $p \in C_1 \cap C_2$, però aleshores si $x \in C_1$ $y \in C_2$ tenim que $x \sim y$ ja que $C_1 \cup C_2$ és connex. Aleshores $C_1 = C_2$.

(3) Sigui $A \subset X$ connex, aleshores $A \subset C \subset X$ per alguna component (connexa) de X.

Prenem $x \in A$ i sigui $C_x \subset X$ la component connexa de X que conté $x \in A$. Aleshores $A \cup C_x$ és connex ja que $A \cap C_x \neq \emptyset$ però aleshores $A \cup C_x = C_x$ per maximalitat i $A \subset C_x$.

(4) Les componentes connexes de X són tancades. I si n'hi ha un nombre finit, $X = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$, també són obertes.

Si C és connex, sabem que $Cl(C)$ també és connex. Aleshores com que $C \subset Cl(C)$ i C és un subconjunt connex maximal tenim que $C = Cl(C)$ i per tant, C és tancat.

Si n'hi ha un nombre finit, $C_i = X \setminus \left(\bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} C_j \right)$ és obert ja que la unió finita de tancats és tancat.

Fixeu-vos que les components no tenen perquè ser obertes. Per exemple, $\mathbb{Q}$ és totalment disconnex, les components connexes són els punts i no són obertes ($\mathbb{Q}$ no té la topologia discreta)

De fet, si les components connexes són els punts alshores l'espai és totalment disconnex.

Conèixer les components connexes d'un espai topològic ens dóna informació sobre quins espais poden ser homeomorfs!

<u>Teorema</u>: Si $f: X \to Y$ una aplicació contínua entre espais topològics aleshores si $C \subset X$ és una component connexa, $f(C) \subset D$ on D és una component connexa de Y.

Si f és un homeomorfisme alashores $f(C) = D$ és una component connexa.

<u>Demostració</u>: Com que $C \subset X$ és connex alashores $f(C) \subset Y$ és connex. Però alashores hi ha una component connexa D de Y amb $f(C) \subset D$.

Si f és un homeomorfisme, tenim que $C \subset f^{-1}(D)$ on $f^{-1}(D)$ connex però com que C és un subconjunt connex maximal tenim que $C = f^{-1}(D)$ i $f(C) = D$.

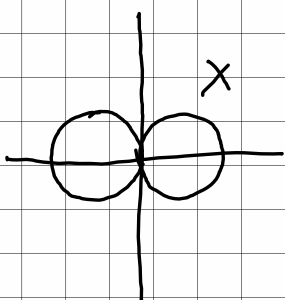
$\#$

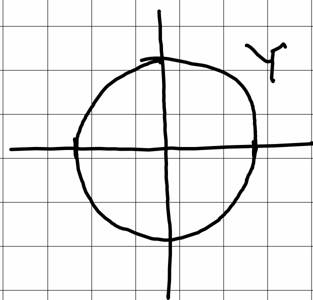
En particular, si X i Y són espais topològics homeomorfs han de tenir el mateix número de components connexes.

Exemple $X = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2+y^2=1\}$

$\cup \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2+y^2=1\}$

$Y = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=2\}$





$X \not\cong Y$ ja que $X\setminus\{(0,0)\}$ no és connex, de fet,

$X\setminus\{(0,0)\} \cong (0,1)\cup(1,2) \subset \mathbb{R}$

$Y\setminus\{(x,y)\} \cong (0,1)$ per qualsevol $(x,y)\in Y$.

Si $f: X\to Y$ fos un homeomorfisme aleshores

$f': X\setminus\{(0,0)\} \to Y\setminus\{f(0,0)\}$ també és un homeomorfisme però un té dues components connexes i l'altre només una.

Què passa amb la versió local?

<u>DEFINICIÓ</u> Sigui X espai topològic. Diem que X és localment connex si per tot $x \in X$ i obert $x \in U \subset X$ existeix un entorn connex $x \in N \subset X$.

- $\mathbb{R}^n$ és localment connex.

Fixeu-vos que $\mathbb{R}$ és connex i localment connex, ara bé $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ no és connex però continua sent localment connex.

	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	Pinta del topòleg	$\mathbb{Q}$
CONNEX	✓	✗	✓	✗
LOCALMENT CONNEX	✓	✓	✗	✗

<u>PROPOSICIÓ</u> Si X és un espai topològic localment connex, aleshores les components connexes són obertes.

<u>Demostració</u> Sigui C una component connexa que conté $x \in X$. Com que X és localment connex, sabem que existeix un entorn $x \in N \subset X$ connex. Aleshores $N \subset C$ i per tant C és oberta.

#

En particular, ja sabíem que eren tancades, alshores són tancobertes si X és localment connex.

Per exemple, pensem ... quins dels espais que coneixem són localment connexos?

És $\mathbb{R}_e$ localment connex?