Toca enganxar,
agafeu la cola
....
la topologia quocient!

Natàlia Castellana

Fem un pas enrera i tornem a la topologia subespai, i ens ho mirem amb uns altres ulls!... Sigui X un espai topològic.

Donada una aplicació injectiva entre conjunts $f: A \hookrightarrow X$ vam definir la topologia menys fina en A per la qual f és contínua. Dieu que $U \subset A$ és obert si existeix V obert en X tal que $f(U) = f(A) \cap V$. La topologia discreta és la més fina.

Sigui ara $f: X \to Y$ una aplicació exhaustiva on X és un espai topològic. La topologia menys fina en Y per a que f sigui contínua és clarament la grollera!... i la més fina?...

DEFINICIÓ Sigui $f: X \to Y$ una aplicació exhaustiva. La topologia quocient en Y definida per f és

$$\tau_f = \{ U \subseteq Y \mid f^{-1}(U) \in \tau_X \}$$

Un subconjunt $U \subseteq Y$ és obert si i només si la seva antiimatge és oberta en X.

Fixeu-vos que per definició $f: X \to Y$ és aleshores contínua i que τ_f és la més fina amb aquesta propietat. Si afegim algun V a τ_f, aleshores $f^{-1}(V)$ no és obert a X i f deixaria de ser contínua.

Abans de seguir, anem a comprovar que és una topologia.

(1) $\emptyset = f^{-1}(\emptyset) \in \mathcal{T}_X$, per tant $\emptyset \in \mathcal{T}_f$

$X = f^{-1}(Y) \in \mathcal{T}_X$, per tant $Y \in \mathcal{T}_f$

(2) Sigui $\{U_i\}_{i \in I}$, $U_i \subset Y$ una col·lecció amb $U_i \in \mathcal{T}_f$. Per comprovar que $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_f$ cal comprovar que la seva antiimatge és obert a X.

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i) \in \mathcal{T}_X \text{ ja que } U_i \in \mathcal{T}_f$$

i per tant, $f^{-1}(U_i) \in \mathcal{T}_X$ i $\mathcal{T}_X$ és una topologia. Així $\bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i) \in \mathcal{T}_X$.

(3) Sigui $\{U_i\}_{i=1,\dots,n}$ amb $U_i \subseteq Y$ i $U_i \in \mathcal{T}_f$. Això vol dir que tenim $f^{-1}(U_i) \in \mathcal{T}_X$. Aleshores

$$\bigcap_{i=1}^{n} f^{-1}(U_i) \in \mathcal{T}_X \text{ ja que } \mathcal{T}_X \text{ és una topologia.}$$

Així $f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} f^{-1}(U_i) \in \mathcal{T}_X$ i $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{T}_f$.

FET ✓

Anem a fer un repàs de les principals propietats de $\mathcal{T}_f$ i que ens seran d'utilitat.

PROPIETATS Sigui $f: X \to Y$ exhaustiva on X és un espai topològic, Y té la topologia quocient definida per f.

(1) $f: X \to Y$ és contínua i τ_f és la topologia més fina per la qual f és contínua.

(2) $T \subset Y$ és tancat sii $f^{-1}(T) \subset X$ és tancat a X

- Si $T \subset Y$ és tancat, $Y \setminus T \in \tau_f$ (és obert a Y). Per definició $f^{-1}(Y \setminus T)$ és obert a X. Com que $f^{-1}(Y \setminus T) = X \setminus f^{-1}(T)$ és obert a X tenim que $f^{-1}(T)$ és tancat a X.

- Suposem ara que $f^{-1}(T) \subset X$ és tancat a X. $X \setminus f^{-1}(T)$ és obert a X. Altre cop,
$$X \setminus f^{-1}(T) = f^{-1}(Y \setminus T) \text{ és obert a } X$$
vol dir que $Y \setminus T$ és obert a Y i per tant T és tancat a Y.

(3) Sigui Z un espai topològic. Alsheses
$$h: Y \to Z \text{ és contínua si i només si } h \circ f: X \to Y \to Z \text{ és contínua.}$$

- Si h és contínua, alshores $h \circ f$ és contínua ja que f ho és (la composició de contínues és contínua)

- Suposem $h \circ f: X \to Z$ és contínua. Volem veure que $h: Y \to Z$ ho és.

Sigui $V \subset Z$ obert, hem de comprovar que $h^{-1}(V) \subset Y$ és obert. Ara bé, com que Y té la topologia quocient definida per f, el que hem de comprovar en realitat és que $f^{-1}(h^{-1}(V)) \subset X$ és obert. Però

$$f^{-1}(h^{-1}(V)) = (h \circ f)^{-1}(V) \text{ és obert a } X$$

ja que $h \circ f$ és contínua.

✓

En general parlarem d'aplicacions quocient.

DEFINICIÓ Diem que $f : X \to Y$ és una aplicació quocient si f és exhaustiva, X espai topològic i Y té la topologia quocient definida per f. És a dir,

$$U \subset Y \text{ obert sii } f^{-1}(U) \subset X \text{ obert.}$$

EXEMPLES:

(1) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \{a, b, c\}$ $\quad f(x) = \begin{cases} a & x<0 \\ b & x=0 \\ c & x>0 \end{cases}$

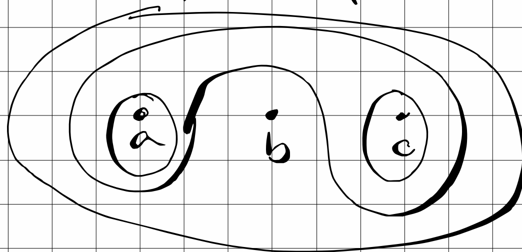
Quina és la topologia quocient definida per f?

$f^{-1}(a) = (-\infty, 0)$ aleshores $\{a\}$ obert

$f^{-1}(b) = \{0\}$ no és ~~és~~ obert, $\{b\}$ no és obert

$f^{-1}(c) = (0, +\infty)$ aleshores $\{c\}$ és obert

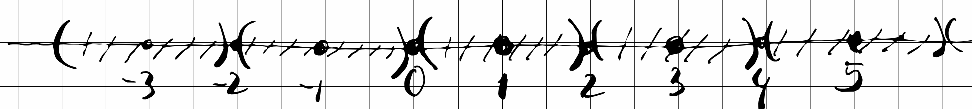
Fixeu-vos que τ_f és



(2) Sigui $p:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{Z}$ definida com

$$\begin{cases} p(x)=x & \text{si } x\in\mathbb{Z}\\ p(x)=n & \text{si } x\in(n-1,n+1) \text{ i } n \text{ senar}\end{cases}$$

Si $x\notin\mathbb{Z}$, aleshores $p(x)$ és l'enter senar més proper.



$$p^{-1}(n)=\begin{cases} n & \text{si } n \text{ parell}\\ (n-1,n+1) & \text{si } n \text{ senar}.\end{cases}$$

Per exemple, veiem que $\{n\}$ és obert si n és senar. Quin és l'obert més petit que conté un enter parell?

$$p^{-1}(\{2n-1,2n,2n+1\}) = (2n-2,2n+2) \text{ obert}$$

Així $\{2n-1,2n,2n+1\}$ és obert.

Comprovem doncs que la topologia quocient en $\mathbb{Z}$ definida per f és la topologia digital.

[Hem vist que l'obert més petit que conté $\{2n+1\}$ és ell mateix i que conté $\{2n\}$ és $\{2n-1, 2n, 2n+1\}$ alehores aquests formen una base.]

EXEMPLE MOLT IMPORTANT: EL CONJUNT DE CLASSES D'EQUIVALÈNCIA PER UNA RELACIÓ D'EQUIVALÈNCIA.

Sigui X un conjunt, amb una relació d'equivalència $\sim$. La classe d'equivalència d'un element $x \in X$ és un subconjunt de X,

$$[x] = \{y \in X \mid y \sim x\} \subset X$$

és clar que $[x] = [y]$ sii $x \sim y$. És a dir, $[x] \in \mathcal{P}(X)$.

Aleshores el conjunt de les classes d'equivalència és un conjunt de subconjunts de X

$$X/\sim = \{[x] \mid x \in X\} \subset \mathcal{P}(X)$$

i descomposa X en unió disjunta

$$X = \bigsqcup_{[x] \in X/\sim} [x]$$

Una relació d'equivalència ens dóna una partició d'X.

I al revés, si tenim una partició de X com unió disjunta de subconjunts

$$X = \dot{\bigcup_{i \in I}} X_i$$

podem definir una relació d'equivalència

$$x \sim y \text{ sii existeix } i \in I \text{ amb } x, y \in X_i$$

(comproveu que és una relació d'equivalència)

Alshores $X/_\sim \xrightarrow{\cong} I$ és una bijecció

$$[x] \longmapsto i \text{ tal que } x \in X_i$$

i $[x] = X_i$ tal que $x \in X_i$.

En l'exemple 1, la partició de $\mathbb{R}$ és

$$\mathbb{R} = (-\infty, 0) \cup \{0\} \cup (0, +\infty)$$

En l'exemple 2, la partició de $\mathbb{R}$ és

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{2n\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (2n-2, 2n+2]$$

i $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/_\sim$ dóna lloc a les aplicacions dels exemples.

Aleshores donada una partició o una relació d'equivalència (són el mateix) tenim una aplicació exhaustiva

$$p : X \longrightarrow X/\sim$$

El conjunt $X/\sim$ el diem de la topologia quocient definida per p.

A més, observem que donada qualsevol aplicació exhaustiva $f : X \to Y$ podem definir una relació d'equivalència $\sim$ en X tal que hi ha una bijecció $X/\sim \overset{\cong}{\Rightarrow} Y$. Només cal donar una partició de X i ho fem fent servir les antiimatges

$$X = \bigcup_{y \in Y} f^{-1}(y)$$

D'aquesta manera a l'exemple 1,

$$\mathbb{R} = f^{-1}(a) \cup f^{-1}(b) \cup f^{-1}(c)$$

i a l'exemple 2

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^{-1}(n)$$

Així, tota $f : X \to Y$ exhaustiva es pot veure com

$p : X \to X/\sim$ on $\sim$ és la relació definida per la partició d'X, $X = \bigcup_{y \in Y} f^{-1}(y)$.

Com és la topologia quocient a $X/_\sim$?

$\mathcal{U} \subset X/_\sim$ és obert sii $\bigcup_{[x]\in\mathcal{U}} [x] \subset X$ és obert a X

MÉS EXEMPLES:

(3) Sigui $A \subset X$, i considerem la partició
$$X = A \cup \bigcup_{x\in X\setminus A} \{x\}$$
Dóna lloc a una relació d'equivalència
$$x \sim y \text{ sii } x,y \in A \text{ ó } x = y \in X\setminus A$$
En aquest escriurem $X/_A := X/_\sim$. En aquest espai topològic quocient tenim
$$X/_A = [A] \cup \bigcup_{x\in X\setminus A} [x].$$
Com són els oberts? $\mathcal{U} \subset X/_A$ és obert sii

$\bigcup_{[x]\in\mathcal{U}} \{x\} \subset X$ obert si $[A] \notin \mathcal{U}$

$A \cup \bigcup_{\substack{[x]\in\mathcal{U} \\ [x]\neq[A]}} \{x\} \subset X$ obert si $[A] \in \mathcal{U}$

Per exemple, $X=[0,1]$, $A=\{0,1\}$, alehores

$$[0,1]=\{0,1\}\cup\bigcup_{\substack{x\in[0,1]\\ x\neq 0,1}}\{x\}$$

En l'espai topològic quocient tenim

$$[0,1]/\{0,1\} = [\{0,1\}]\cup\bigcup_{x\in(0,1)}[x]$$

Hi ha una aplicació contínua $\widetilde{\exp}$

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[r, "\text{contínua}", "\exp"'] & S^1 \\ & t \arrow[r, mapsto] & e^{2\pi i t} \\ {[0,1]} \arrow[uur, "\text{contínua}", "i"'] \arrow[rr, "p"'] & & {[0,1]/\{0,1\}} \arrow[uu, "\widetilde{\exp}"'] \end{tikzcd}$$

$\widetilde{\exp}$ és contínua sii $\widetilde{\exp}\circ p$ és contínua. Ara bé $\widetilde{\exp}\circ p=\exp\circ i$ és contínua ja que exp ho és.

$\widetilde{\exp}$ és contínua i bijectiva, és homeomorfisme?

(4) $X=\mathbb{R}$, $x\sim y$ sii $x-y\in\mathbb{Z}$. Aleshores

$[x]=\{x+n \mid n\in\mathbb{Z}\}$, i sempre podem escollir un element a $[x]$ que pertany a $[0,1]$

$$\mathbb{R}=\bigcup_{x\in[0,1)} x+\mathbb{Z} \quad \text{on } x+\mathbb{Z}=\{x+n \mid n\in\mathbb{Z}\}$$

$\mathbb{R}$?

Ara bé, si prenem

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \xrightarrow{\exp} & S^1 \quad \text{contínua} \\ t & \longmapsto & e^{2\pi i t} \end{array}$$

tenim que $\exp(n) = (1,0)$ per tot $n \in \mathbb{Z}$.
Així tenim que

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/_\sim \xrightarrow{\overline{\exp}} S^1 \quad \text{està ben definida}$$

$$\exp(x) = \exp(y) \text{ sii } x - y \in \mathbb{Z}.$$

Així $\mathbb{R}/_\sim \longrightarrow S^1$ és contínua i bijectiva.

És homeomorfisme?

Fixeu-vos que podem considerar un diagrama d'aplicacions contínues.

$$\begin{tikzcd} {[0,1]} \arrow[r, hook] \arrow[d, "p_A"] & \mathbb{R} \arrow[r, "\exp"] \arrow[d, "p_\sim"] & S^1 \arrow[d, equal] \\ {[0,1]/\{0,1\}} \arrow[r, "q"] \arrow[rr, bend right, "\widetilde{\exp}"'] & \mathbb{R}/_\sim \arrow[r, "\overline{\exp}"] & S^1 \end{tikzcd}$$

Tant q, $\overline{\exp}$, $\widetilde{\exp}$ són contínues i bijectives.

Anem a veure que la inversa de $\widetilde{\exp}$ és contínua.

Prenem $A_1 = \{z \in S^1 \mid \operatorname{Im}(z) \geq 0\} \subset \mathbb{C}$

$A_2 = \{z \in S^1 \mid \operatorname{Im}(z) \leq 0\} \subset \mathbb{C}$

Aleshores $S^1 = A_1 \cup A_2$ i $A_1 \cap A_2 = \{1, -1\}$, a més A_i són tancats (per què?)

$$\left[\begin{array}{l} A_1 = f^{-1}([0,+\infty)) \\ \quad \text{on } f : S^1 \hookrightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{\operatorname{Im}} \mathbb{R} \\ A_2 = f^{-1}((-\infty, 0]) \end{array}\right]$$

Sigui $\tilde{g}_1 : A_1 \longrightarrow \mathbb{R}$

$z \longmapsto t$ on $z = e^{2\pi i t}$ $0 \leq t \leq 1/2$

$\tilde{g}_2 : A_2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$z \longmapsto t$ on $z = e^{2\pi i t}$ $1/2 \leq t \leq 1$

$\tilde{g}_1(-1) = 1/2 = \tilde{g}_2(-1)$; $\tilde{g}_1(1) = 0$, $\tilde{g}_2(1) = 1$

però si considerem $\tilde{g}_1(1) \neq \tilde{g}_2(+1)$

$g_i : A_i \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/\sim$ tenim que

$g_1(-1) = g_2(-1)$ i $g_1(1) = g_2(1)$ ja que $1 - 0 \in \mathbb{Z}$.

Així definim $g : S^1 = A_1 \cup A_2 \to \mathbb{R}/\sim$ de manera que $g|_{A_1}$ i $g|_{A_2}$ són contínues, com que A_1, A_2 són tancats, g és contínua i inversa de $\overline{\exp}$.

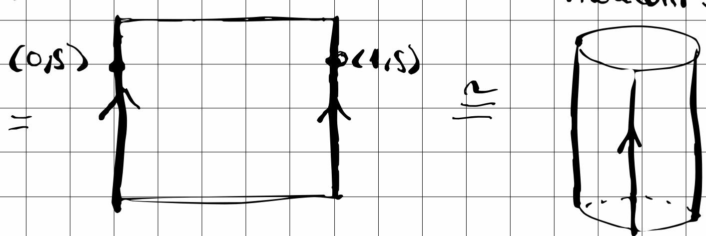
Anem a veure alguns exemples d'identificacions

(5) $X = [0,1]^2$ amb $(0,s)\sim(1,s)$ per cada $s\in I$.

És a dir, $X = \bigcup_{\substack{x\in(0,1)\\ y\in[0,1]}} A_{xy} \cup \bigcup_{y\in[0,1]} B_y$ on

$A_{xy} = \{(x,y)\}$ i $B_{xy} = \{(0,y),(1,y)\}$

Gràficament, marquem les parelles de punts identificades amb una fletxa (com un desplegable indicant on hem d'enganxar)

$X/\sim \; =$ 

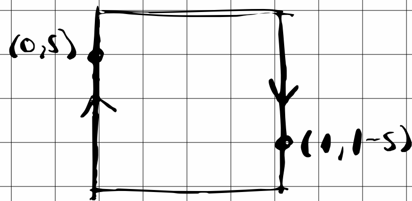
$$(x,y) \longmapsto (e^{2\pi i x}, y)$$

$$(0,y) \longrightarrow (1,y)$$
$$(1,y) \longrightarrow (1,y)$$

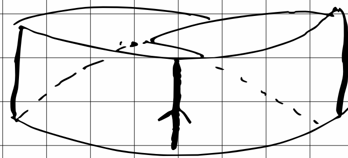
Un altre exemple és la cinta de Moëbius que s'obté com

$$X = [0,1]^2 \text{ amb } (0,s)\sim(1,1-s), \text{ és a dir}$$

$$X = \bigcup_{\substack{x\in(0,1)\\ y\in[0,1]}} A_{xy} \cup \bigcup_{y\in[0,1]} B_y \qquad B_y = \{(0,y),(1,1-y)\}$$
$$A_{xy} = \{(x,y)\}$$



$\cong$

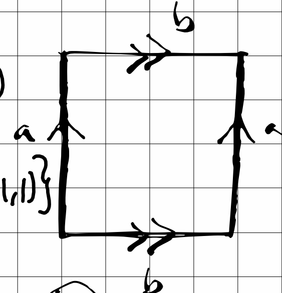


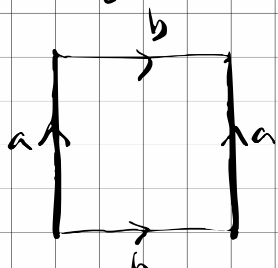
Per acabar, recordeu que hem vist el tor com a subespai de $\mathbb{R}^3$ i com a producte $S^1 \times S^1$, doncs també és un quocient de $[0,1]^2$.

$X = [0,1]^2$ $\quad$ $(0,y) \sim (1,y)$, $(x,0) \sim (x,1)$, és a dir

$$X = \left(\bigcup_{(x,y)\in(0,1)^2} A_{xy}\right) \cup \left(\bigcup_{y\in(0,1)} B_y\right) \cup \left(\bigcup_{x\in(0,1)} C_x\right) \cup D$$

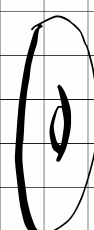
$C_x = \{(x,0),(x,1)\}$ $\quad D = \{(1,0),(0,1),(0,0),(1,1)\}$





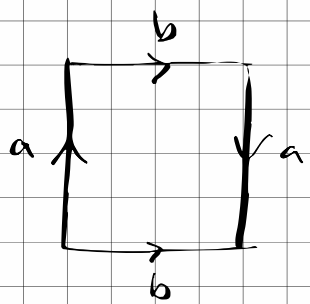
$\cong$

$\cong$



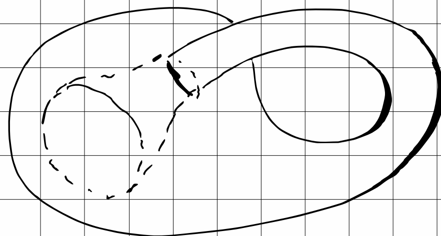
$$[0,1]^2/\sim \longrightarrow S^1 \times S^1$$
$$(x,y) \longmapsto (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y})$$

Aleshores podem fer altres variacions,



$(0,y) \sim (1,1-y)$

$(x,0) \sim (x,1)$



És l'ampolla de Klein.

I ara un personatge que no pot faltar a la galeria d'exemples d'espais topològics quocient

(6) EL PLA PROJECTIU

<u>Definició</u> L'espai projectiu $\mathbb{RP}^n$ és el conjunt de rectes que passen per l'origen de coordenades a $\mathbb{R}^{n+1}$

Quina topologia té? Una recta que passa per l'origen ve donada per un vector unitari $v \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Ara bé, v i $-v$ determinen la mateixa recta

$$S^n \underset{p}{\twoheadrightarrow} \mathbb{RP}^n = S^n/\sim \qquad v \sim -v$$

$\mathbb{RP}^n$ té la topologia quocient definida per p.

Per exemple, si $n=1$, $\mathbb{RP}^1 = S^1/_\sim \cong [0,1]/_{\{0,1\}}$

$$\begin{tikzcd}
{[0,1]} \arrow[r] & S^1 \\
t \arrow[r, mapsto] \arrow[d] & (\cos \pi t, \sin \pi t) \arrow[d] \\
{[0,1]/_{\{0,1\}}} \arrow[r, "\cong"'] & S^1/_\sim \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] \\
 & \mathbb{RP}^1
\end{tikzcd}$$

contínua i bijectiva i homeomorfisme

Si $n=2$, tenim el pla projectiu $\mathbb{RP}^2 = S^2/_{v\sim -v}$

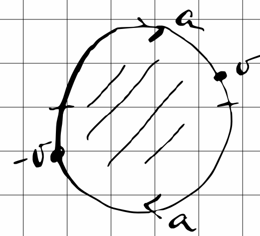
Per cada parella $\{v,-v\}$ sempre podem escollir un vector a l'hemisferi nord H_+ que és homeomorf a un disc D^2

$$\begin{tikzcd}
D^2 \arrow[r, "f"] & S^2 \\
(x,y) \arrow[r, mapsto] \arrow[d] & (x,y,\sqrt{1-x^2-y^2}) \arrow[d] \\
D^2/_\sim \arrow[r, "\bar{f}"] & S^2/_{v\sim -v}
\end{tikzcd}$$

contínua bijectiva.

$x \sim x'$ si $x, x' \in S^1$
$x = -x'$

Veurem $\bar{f}$ és homeo en propers capítols!

Així $\mathbb{RP}^2 \cong$ 

I ara acabem parlant de la propietat Hausdorff, és cert que si $f: X \to Y$ és exhaustiva i X Hausdorff aleshores Y també?

NO!

- Sigui $Y = \mathbb{R}/\mathbb{Q}$, $\underset{\emptyset}{\mathcal{U} \neq} \subset \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ és obert sii $p^{-1}(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}$ obert a $\mathbb{R}$ on

$p: \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Q}$. Ara bé com que $\mathbb{Q}$ és dens a $\mathbb{R}$, $p^{-1}(\mathcal{U}) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ i aleshores

$$[\mathbb{Q}] \in p(p^{-1}(\mathcal{U})) = \mathcal{U}.$$

Tots els oberts de $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ diferents del buit contenen el punt $[\mathbb{Q}]$!!! així $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ no és Hausdorff i $\mathbb{R}$ sí que ho és.

- Sigui $Y = [0,1]/(0,1]$, fixeu-vos que Y està format per només dos punts

$$Y = \{[0], [(0,1]]\}$$

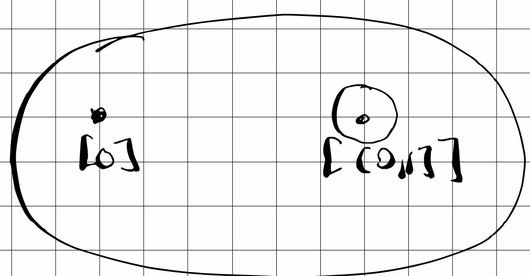
$$[0,1] \twoheadrightarrow [0,1]/(0,1]$$

$$x \longmapsto \begin{cases} [0] & \text{si } x = 0 \\ [(0,1]] & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Anem a veure quina topologia té aquest conjunt amb dos punts.

$p^{-1}([0]) = \{0\}$ no és obert a $[0,1]$
és tancat a $[0,1]$

$p^{-1}([(0,1]]) = (0,1]$ és obert a $[0,1]$



És una topologia de Sierpinsky, no té la propietat Hausdorff.

La recta amb dos origens

Sigui $X = \mathbb{R} \times \{0,1\} /_{\sim}$ on definim

$(x,0) \sim (y,1)$ si $x=y$ i $x \neq 0$. Si ho pensem en particions tenim

$$\mathbb{R} \times \{0,1\} = \coprod_{x \neq 0} \{(x,0),(x,1)\} \cup (0,0) \cup (0,1)$$

<u>Observació</u>: també podem descriure X de la següent manera

$X = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cup \{a,b\}$ amb la topologia generada per

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{array}{l} (p,q) \text{ amb } pq>0,\ (-p,0) \cup \{a\} \cup (0,q) \quad p,q \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ (-p,0) \cup \{b\} \cup (0,q) \end{array} \right\}$$

Té X la propietat Hausdorff?