RETALLEM PER CONSTRUIR SUBESPAIS

Natàlia Castellana

Comencem amb un conjunt X i $A \subset X$ un subconjunt. Si (X, d) és un espai mètric, podem considerar la funció distància

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

restringida a $A \subset X$, $d|_A : A \times A \longrightarrow \mathbb{R}$, és a dir, si $a_1, a_2 \in A$, $d|_A(a_1, a_2) = d(a_1, a_2)$. I en aquest punt, fins i tot ens podríem oblidar de X i $(A, d|_A)$ és un espai mètric per si sol. (Comproveu que $d|_A$ compleix els requisits per ser mètrica en A .... cal fer gran cosa?)

I per tant tenim una noció d'obert a A i una d'obert a X. Les dues nocions depenen de les boles oi? Comparem les boles en A i en X. Sigui $a \in A \subset X$,

$$B_d(a, R) = \{x \in X \mid d(a, x) < R\} \subset X$$

i

$$B_{d|_A}(a, R) = \{b \in A \mid d(a, b) < R\} \subset A$$

Fixeu-vos que de la definició tenim

$$\circledast \quad B_{d|_A}(a, R) = B_d(a, R) \cap A .$$

Aleshores, com són els oberts que defineixen la topologia mètrica en A comparats amb els de X?

Per exemple, $S^1 \subset \mathbb{R}^2$.

Pensem :

Sigui $\mathcal{U} \subset A$ un obert, aleshores per tot $a \in \mathcal{U}$ existeix $\delta_a > 0$ tal que $B_{d|_A}(a, \delta_a) \subset \mathcal{U}$. Tenim que

$$\mathcal{U} = \bigcup_{a \in \mathcal{U}} B_{d|_A}(a, \delta_a) \subset A$$

Si considerem les mateixes boles en X tenim un obert

$$\mathcal{V} := \bigcup B_d(a, \delta_a) \subset X$$

(per què? és unió arbitrària d'oberts!) tal que

$$\mathcal{U} = \mathcal{V} \cap X \quad (\text{recordeu } \otimes \text{ pàgina anterior})$$

I al revès? Sigui $\mathcal{U} \subset X$ un obert, és cert que $\mathcal{U} \cap A \subset A$ és obert en A ? comprovem-ho. Sigui $x \in \mathcal{U} \cap A$, com que $x \in \mathcal{U}$ existeix $\delta_x > 0$ tal que $B_d(x, \delta_x) \subset \mathcal{U}$. Aleshores

$$B_{d|_A}(x, \delta_x) = B_d(x, \delta_x) \cap A \subset \mathcal{U} \cap A .$$

Així $\mathcal{U} \cap A$ és obert a l'espai mètric $(A, d|_A)$.

Hem vist que

$$\mathcal{U} \subset A \text{ obert sii existeix } \mathcal{V} \subset X \text{ obert tal que } \mathcal{U} = \mathcal{V} \cap A .$$

Fent interseccions d'oberts d'X amb A obtenim una topologia en A. ÉS CERT EN GENERAL?

Sigui (X,τ) un espai topològic i $A \subset X$, volem dotar $A \subset X$ amb una topologia. Aquesta topologia ha de ser compatible amb que tenim a X, τ, no una qualsevol.
En quin sentit?

Si $i : A \hookrightarrow X$ és l'aplicació inclusió, $i(a)=a \in X$.
És desitjable que sigui contínua oi? Per a que sigui contínua, $i^{-1}(U)$ ha de ser obert si U és obert. Fixeu-vos que

$$i^{-1}(U) = \{a \in A \mid i(a) \in U\} = \{a \in A \mid a \in U\}$$

$$i^{-1}(U) = U \cap A$$

<u>DEFINICIÓ</u> Sigui (X,τ) un espai topològic i $A \subset X$.
Diem que $U \subset A$ és obert si existeix un obert $W \subset X$, $W \in \tau$, tal que $U = W \cap A$.

Sigui $\tau_A = \{U \subset A \mid \text{existeix } W \in \tau \text{ tal que } W \cap A = U\}$,
aleshores τ_A és una topologia en A, anomenada **topologia subespai en $A \subset X$**.

Anem a comprovar que τ_A defineix una topologia en $A \subset X$.

(1) $\emptyset, A \in \tau_A$ ja que $\emptyset, X \in \tau$ i $\emptyset \cap A = \emptyset$ i $X \cap A = A$.

(2) Sigui $\{U_i\}_{i\in I}$, $U_i \subset A$, una família arbitrària d'oberts en A. Per definició existeixen $\{W_i\}_{i\in I}$, $W_i \subset X$ oberts a X, tals que $W_i \cap A = U_i$ per tot $i \in I$. Alshores

$$\bigcup_{i\in I} U_i = \bigcup_{i\in I} (W_i \cap A) = \Big(\bigcup_{i\in I} W_i\Big) \cap A \in \tau_A$$

ja que $\bigcup_{i\in I} W_i \in \tau$.

(3) Sigui $\{U_i\}_{i=1,\dots,n}$ una família finita on $U_i \subset A$ són oberts en A. Per definició existeixen $\{W_i\}\ i=1,\dots,n$ on $W_i \in \tau$, $W_i \cap A = U_i$ per tot $i=1,\dots,n$. Alshores

$$\bigcap_{i=1}^{n} U_i = \bigcap_{i=1}^{n} (W_i \cap A) = \Big(\bigcap_{i=1}^{n} W_i\Big) \cap A \in \tau_A$$

ja que $\bigcap_{i=1}^{n} W_i \in \tau$.

FET ✓ (A, τ_A) és un espai topològic

A més, $i : A \hookrightarrow X$ és contínua ja que si $U \in \tau$, $i^{-1}(U) = U \cap A \in \tau_A$.

<u>EXEMPLES</u>

(0) Si (X,d) és un espai mètric, i τ és la topologia induïda per la mètrica, alshores (A, τ_A) és la topologia induïda per la mètrica $d|_A : A\times A \hookrightarrow X\times X \to \mathbb{R}$.

(1) Si $A \subset X_g$, X_g conjunt amb la topologia grollera, aleshores la topologia de subespai en A també és la grollera

(2) Si $A \subset X_d$, X_d conjunt amb la topologia discreta, aleshores la topologia de subespai en A també és la discreta

X_g	A
$\emptyset$	$\emptyset \cap A = \emptyset$
X	$X \cap A = A$

$-\cap A$

X_d	A
$\mathcal{P}(X)$	$\mathcal{P}(A)$

$-\cap A$

(3) Sigui $A = [0,1] \subset X = \mathbb{R}$, aleshores tenim que

$[0, 1/2) \subset A$ és obert en A

ja que $[0,1/2) = \underset{A}{[0,1]} \underset{\cap}{\cap} \underset{\text{obert a } \mathbb{R}}{(-1/2, 1/2)}$

(4) Sigui $A = [0,1] \cup \{2\} \subset \mathbb{R}$ aleshores

$\{2\} \subset \mathbb{R}$ és obert en A ja que $A \cap (3/2, 5/2) = \{2\}$.

És tancat? $A \setminus \{2\}$ és obert? Sí.

$A \setminus \{2\} = [0,1] = A \cap (-1/2, 3/2)$

$\{2\} \subset A$ és obert i tancat a la topologia subespai.

PROPIETATS (X,τ) espai topològic, (A,τ_A) subespai topològic, $A\subset X$.

(1) $T\subset A$ tancat en A sii $T=K\cap A$ on $K\subset X$ és tancat en X.

- Si $T\subset A$ tancat aleshores $A\setminus T$ és obert. És a dir, existeix $W\subset X$ obert tal que

$$A\setminus T = W\cap A$$
$$A\cap(X\setminus T) = W\cap A$$

Aleshores $T=(X\setminus W)\cap A$, $K:=X\setminus W$ tancat

- Si $T=K\cap A$ on $K\subset X$ tancat a X, volem veure que és tancat en A. Hem de veure $A\setminus T$ és obert.

$$A\setminus T = A\setminus K\cap A = A\cap(X\setminus K\cap A) =$$
$$= A\cap \underbrace{(X\setminus K)}_{\text{obert a } X} \quad \text{obert a } A$$

Per tant, $T=K\cap A$ és tancat en A.

FÓRMULA ÚTIL: $A\setminus(A\cap C) = A\cap(X\setminus C)$, $A\subset X$, $C\subset X$

(2) • Si $A\subset X$ és obert en X aleshores

$U\subset A$ obert en A sii $U\subset X$ obert en X

• Si $A\subset X$ és tancat en X aleshores

$K\subset A$ tancat en A sii $K\subset X$ tancat en X

Fixeu-vos que si $A\subset X$ obert, i U obert en X aleshores $U\cap A$ obert en X. El mateix per tancats.

(3) La inclusió $i: A \hookrightarrow X$ és contínua i τ_A és la topologia <u>menys</u> fina tal que i és contínua

$i: A \hookrightarrow X$ és contínua ja que si $\mathcal{U} \subset X$ obert en X aleshores $i^{-1}(\mathcal{U}) = \mathcal{U} \cap A$ és obert en A per definició. A més, aquests són imprescindibles per que i sigui contínua, així que τ_A és la menys fina amb aquesta propietat.

(4) Si $f: X \to Y$ contínua, aleshores $f|_A : A \hookrightarrow X \to Y$ també per ser composició d'aplicacions contínues

(5) Què passa si (X, τ) té una base $\mathcal{B}$?

Aleshores $\mathcal{B}_A = \{ B \cap A \mid B \in \mathcal{B} \}$ és una base per la topologia subespai en $A \subset X$.

Vegem-ho: Sigui $\mathcal{W} \subset A$ un obert en A i $x \in \mathcal{W}$. Aleshores existeix un obert $\mathcal{U} \in \tau$ tal que

$$\mathcal{W} = A \cap \mathcal{U}.$$

Com que $x \in \mathcal{U}$ i $\mathcal{B}$ base per τ, existeix $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset \mathcal{U}$, i per tant,

$$x \in B \cap A \subset \mathcal{U} \cap A = \mathcal{W}$$

PROPIETAT MOOOLT ÚTIL I IMPORTANT

Siguin X, Y espais topològics, $A \subset X$ subespai topològic, i $f: Y \to A$ aplicació.

f contínua sii $i \circ f: Y \to A \hookrightarrow X$ és contínua.

<u>Demostració</u>:

Si f és contínua, i $i: A \hookrightarrow X$ contínua també alshores la composició és contínua

Suposem $i \circ f: Y \to A \hookrightarrow X$ és contínua, volem provar que $f: Y \to A$ ho és. Sigui $U \subset A$ un obert, alshores per definició existeix $W \subset X$ obert tal que $U = W \cap A$. Calculem l'antiimatge

$$f^{-1}(U) = f^{-1}(W \cap A) = f^{-1}(i^{-1}(W)) = (i \circ f)^{-1}(U),$$

que és obert ja que $i \circ f$ és contínua.

#

Com a corol·lari tenim el següent:

Si $f: X \to Y$ és una aplicació contínua alshores $f: X \to f(X)$ també és contínua ja que $f: X \to f(X) \hookrightarrow Y$ ho és.

EXEMPLES

(1) Sigui $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, aleshores $f|_{(-1,2)} : (-1,2) \longrightarrow \mathbb{R}$ és contínua i

a més $f|_{(-1,2)} : (-1,2) \longrightarrow [0,4)$ és contínua.

(2) Sigui
$$f: [0, 2\pi) \hookrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\theta \longmapsto (\cos\theta, \sin\theta),$$
aleshores
$$f: [0, 2\pi) \longrightarrow S^1 \text{ és contínua}$$
(també és bijectiva).

(3) $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ on $S^{n-1} = \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1 \}$

(4) $S^n \setminus \{N\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ on $N = (0, \dots, 0, 1)$

La projecció estereogràfica és una aplicació
$$S^n \setminus \{N\} \xrightarrow{\quad f \quad} \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$$
$P = (x_1, \dots, x_{n+1}) \longmapsto$ punt d'intersecció de la recta $\overrightarrow{NP}$ amb el pla $x_{n+1} = 0$

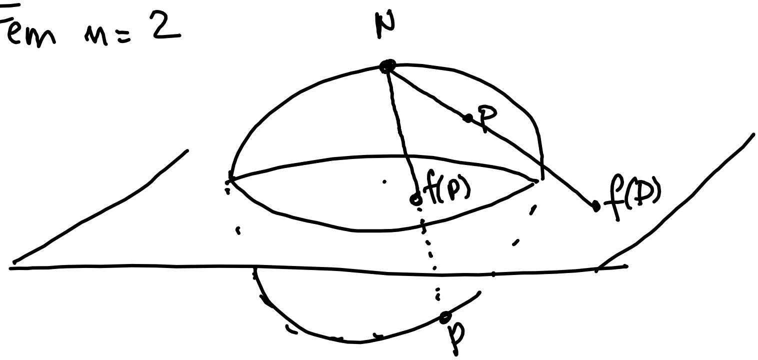
És contínua ja que ho és en
$$\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{ N \} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

A més és bijectiva amb inversa contínua.

$$f^{-1}: \underset{\mathbb{R}^{n+1}}{\overset{\cap}{\mathbb{R}^n}} \longrightarrow S^n \setminus \{N\}$$

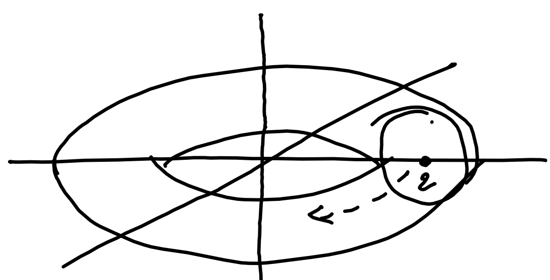
$P = (x_1, \dots, x_n) \longmapsto$ punt intersecció de la recta PN amb S^n.

Fem $n = 2$



$$f(x,y,z) = \frac{1}{1-z}(x,y) \qquad f^{-1}(a,b) = \frac{1}{1+a^2+b^2}(2a, 2b, a^2+b^2-1)$$

(5) EL TOR : $T = S^1 \times S^1 \subset \mathbb{R}^3$



És el subespai de $\mathbb{R}^2$ donat pels punts amb equació

$$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2+y^2} - 2)^2 + z^2 = 1\}$$

Fem girar $(x-2)^2 + z^2 = 1$ al voltant de l'eix OZ.

I ara, acabem veient un altre resultat molt útil per construir aplicacions contínues quan estan definides "a trossos"

<u>Proposició</u> Siguin X, Y espais topològics amb $X = A \cup B$. Considerem una aplicació $f: X \to Y$ tal que $f|_A : A \hookrightarrow X \to Y$ i $f|_B : B \hookrightarrow X \to Y$ són contínues.

Aleshores

(a) Si $A, B \subset X$ són oberts aleshores f és contínua

(b) Si $A, B \subset X$ són tancats aleshores f és contínua.

<u>Demostració</u> En general, si $U \subset Y$ tenim

$$f^{-1}(U) = (f^{-1}(U) \cap A) \cup (f^{-1}(U) \cap B) = (f|_A)^{-1}(U) \cup (f|_B)^{-1}(U)$$

(a) Si $U \subset Y$ obert, aleshores $f^{-1}(U) \cap A$ i $f^{-1}(U) \cap B$ són oberts en A i B respectivament ja que $f|_A$ i $f|_B$ són contínues. Però si A i B són oberts en X també ho són $f^{-1}(U) \cap A$ i $f^{-1}(U) \cap B$ en X i la seva unió també, així $f^{-1}(U)$ és obert per ser unió d'oberts.

(b) Feu el mateix canviant obert per tancat a tot arreu.

\#

Fixeu-vos que en general la conclusió no és certa: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \quad x \in [0, +\infty) \\ 0 & \text{si } x < 0 \quad x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

$A = [0, +\infty)$, $B = (-\infty, 0)$, $f|_A$ contínua, $f|_B$ contínua però $f^{-1}(1/2, 3/2) = f^{-1}(\{1\}) = [0, +\infty)$ no és obert.

I si canviem $X = A \cup B$ per una unió arbitrària? $X = \bigcup_{i \in I} A_i$

què és cert de la proposició anterior?

PREGUNTES

(1) Si X té la topologia cofinita, i $A \subset X$ té la topologia subespai, és també la cofinita en A? (penseu en com són els tancats...)

(2) Si X té la propietat Hausdorff i $A \subset X$ és un subespai, té també la propietat Hausdorff?

(2) Sigui $A \subset X$ un subespai d'X espai topològic.

Prenem $Z \subset A$ un subconjunt. Quina relació hi ha entre

(a) $Cl_A(Z)$ i $Cl(Z)$ on $Cl_A(Z)$ és la clausura en A i $Cl(Z)$ en X

(b) $Int_A(Z)$ i $Int(Z)$ on $Int_A(Z)$ és l'interior en A i $Int(Z)$ en X.

RESPOSTES?

SPOILER :

(1) sí oi? els tancats a la topologia subespai també són exactament els subconjunts finits o $X \cap A = A$.

(2) Sí oi? siguin $x \neq y \in A \subset X$. Com que X és Hausdorff existeixen $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subset X$ oberts amb $x \in \mathcal{U}$, $y \in \mathcal{V}$, $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$.
Aleshores $\mathcal{U} \cap A$, $\mathcal{V} \cap A$ són oberts de la topologia subespai amb $x \in \mathcal{U} \cap A$, $y \in \mathcal{V} \cap A$, i $(\mathcal{U} \cap A) \cap (\mathcal{V} \cap A) = \mathcal{U} \cap \mathcal{V} \cap A = \emptyset$.

(3) Sigui $A \subset X$ i $Z \subset A$.
$A \cap \mathrm{Int}_X(Z)$ és un obert a A i $A \cap \mathrm{Int}_X(Z) \subset Z$, per tant $A \cap \mathrm{Int}_X(Z) \subset \mathrm{Int}_A(Z)$.
Però no tenen perquè ser iguals:

$$A = [0,1], \quad X = \mathbb{R} \quad i \quad Z = [0,1).$$

Tenim que $A \cap \mathrm{Int}_X(Z) = [0,1] \cap (0,1) = (0,1)$ i Z és obert a A ja que $Z = A \cap (-1,1)$, $\mathrm{Int}_A(Z) = A$.

I les clausures? $A \subset X$ i $Z \subset A$.
Veurem que $\mathrm{Cl}_X(Z) \cap A = \mathrm{Cl}_A(Z)$.

Mètode 1 (sense punts amb la definició)

$$\mathrm{Cl}_A Z = \bigcap_{\substack{Z\subset K \\ K \text{ tancat en } A}} K = \bigcap_{\substack{Z\subset C\cap A \\ C \text{ tancat en } X}} C\cap A =$$

$$= \Big(\bigcap_{\substack{Z\subset C\cap A\subset C \\ C \text{ tancat en } X}} C\Big)\cap A = \Big(\bigcap_{\substack{Z\subset C \\ C \text{ tancat en } X}} C\Big)\cap A = \mathrm{Cl}_X(Z)\cap A$$

Mètode 2 (sense punts amb la propietat de clausura)

Com que $Z\subset \mathrm{Cl}_X(Z)\cap A$, i $\mathrm{Cl}_X(Z)\cap A$ és tancat en A, tenim $\mathrm{Cl}_A(Z)\subset \mathrm{Cl}_X(Z)\cap A$.

Anem a veure l'altra inclusió. Com que $\mathrm{Cl}_A(Z)$ és tancat en A, existeix $C\subset X$ tancat en X tal que $\mathrm{Cl}_A(Z)=A\cap C$. Aleshores tenim que $Z\subset \mathrm{Cl}_A(Z)\subset C$ i $\mathrm{Cl}_X(Z)\subset C$.

I si fem intersecció amb A,

$\mathrm{Cl}_X(Z)\cap A\subset C\cap A = \mathrm{Cl}_A(Z)$.

Així $\mathrm{Cl}_X(Z)\cap A = \mathrm{Cl}_A(Z)$.

<u>Mètode 3</u> (amb punts adherents)

Sigui $a \in A$ adherent a $Z \subset A$ amb la topologia subespai. Això vol dir que per tot entorn $a \in N \subset A$, $N \cap Z \neq \emptyset$. És equivalent a dir que per tot obert $a \in U \subset A$ en A, $U \cap Z \neq \emptyset$. Que a la vegada és equivalent a dir que per tot obert $V \subset X$ amb $a \in V$, $V \cap A \cap Z \neq \emptyset$. Com que $Z \subset A$, $V \cap A \cap Z = V \cap Z$. Per tant, és equivalent a dir que per tot $V \subset X$ obert i $a \in V$, $V \cap Z \neq \emptyset$. Així, $a \in A \cap Cl_X(Z)$.