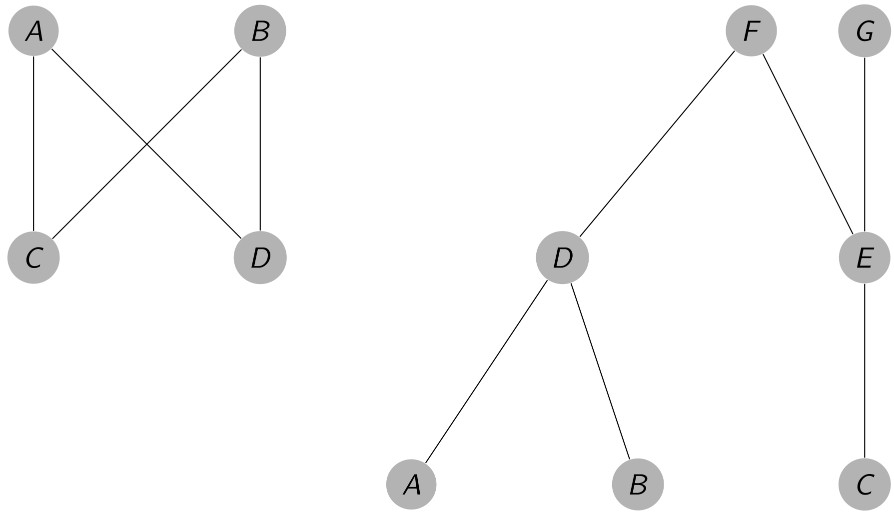
Un A-espai (o espai d'Alexandroff) és un espai topològic en el qual les interseccions arbitràries d'oberts són obertes.

1. Exemples d'A-espais.
   (a) Proveu que els espais topològics finits són A-espais.
   (b) Proveu que els espais topològics localment finits són A-espais.
   (c) Sigui P un conjunt no buit y $\leq$ un preordre en P. Demostreu els següents enunciats:
      i. La familia $\{U_x\}_{x\in P}$ definida per:
      $$U_x := \{y \in P \mid y \leq x\}$$
      genera una topologia a P.
      ii. El conjunt P amb aquesta topologia és un espai d'Alexandroff.
      iii. A més, si $\leq$ és un ordre parcial, llavors P és un espai topològic amb la propietat T_0 (és a dir, donats $p \neq q \in P$, existeix un obert $U \subset P$ tal que $p \in U$ i $q \in P \setminus U$).

2. Descriviu la topologia associada als següents posets (conjunts parcialment ordenats on les línies verticals indiquen la relació $\leq$ de baix a dalt):



3. Sigui X un A-espai. Donat un subconjunt $A \subseteq X$, definim l'embolcall obert d'A, denotem per $U(A)$, com l'intersecció de tots els oberts que contenen A. Proveu que:
   (a) $U(A)$ és obert, i si $A \subset V$ on V és obert aleshores $U(A) \subset V$. Per tant, $U(A)$ és l'obert més petit que conté el subconjunt A.
   (b) És certa la propietat anterior si X no és un A-espai? doneu un exemple.
   (c) Els oberts $U_x := U(\{x\})$ per tot $x \in X$ defineixen una base per la topologia d'X.

4. Sigui X un A-espai. Definim la següent relació a X: $x \leq y$ sii $x \in U_y$ (i.e. $U_x \subseteq U_y$). Diem que $x < y$ si $x \leq y$ i $x \neq y$. Proveu que és un preordre (és a dir, una relació transitiva i reflexiva). És antisimètrica en general?

5. Sigui $X = \{a, b, c, d\}$ i $\tau = \{\emptyset, X, \{a, b, c\}, \{b\}, \{c\}, \{d, c, b\}\{b, c\}\}$. Demostre que τ és una topologia, amb la qual X és un A-espai i dibuixeu el poset associat segons la relació de l'anterior apartat.

6. Sigui $(X, \leq)$ un conjunt amb un preordre. Dotem a X amb la topologia generada pels subconjunts $U_x = \{y \in X | y \leq x\}$ per tot $x \in X$. Proveu que X (amb aquesta topologia) és un A-espai i que U_x és l'embolcall obert d'x.

7. Sigui X un A-espai amb la propietat de Hausdorff. Què podem dir de la topologia d'X?