Una gran parella de ball: l'interior i la clausura

Natàlia Castellana, 2020

En un espai topològic $(X,\mathcal{T})$, els subconjunts de $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ i els seus complementaris, oberts i tancats, juguen un paper essencial que descriu la continuïtat de les aplicacions.

Ara, sigui $A \subset X$ un subconjunt qualsevol, com de lluny (en termes de inclusions) està de ser obert i/o tancat?

L'obert "més proper" serà l'interior i el tancat "més proper" serà la clausura (o adherència).

<u>DEFINICIÓ</u>: Sigui X un espai topològic, $A \subset X$.

- L'interior d'A, $\mathrm{Int}(A)$, és l'obert més gran de X contingut a A
- La clausura d'A, $\mathrm{Cl}(A)$, és el tancat més petit que conté A.

I ara us esteu preguntant, això està ben definit? Es pot escriure explícitament com

- $\mathrm{Int}(A) = \bigcup\limits_{\substack{U \subset A \\ U \text{ obert}}} U$
- $\mathrm{Cl}(A) = \bigcap\limits_{\substack{A \subset C \\ C \text{ tancat}}} C$

Recordeu que la unió arbitrària d'oberts és obert i la intersecció arbitrària de tancats és tancat.

<u>Observació</u> No té sentit considerar el tancat més gran contingut en A, per exemple mireu

$$(-1,1) = \bigcup_{n=2}^{\infty} \left[-1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right]$$

o l'obert més petit que conté A, per exemple

$$[-1,1] = \bigcap_{n=2}^{\infty} \left(-1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right)$$

- Anem a provar que $\mathrm{Int}(A) = \bigcup_{\substack{U\subset A \\ U \text{ obert}}} U$. Sigui $V\subset A$ obert, aleshores $V \subset \bigcup_{\substack{U\subset A \\ U \text{ obert}}} U$. Així $\bigcup_{\substack{U\subset A \\ \text{obert}}} U$ obert i conté qualsevol $V\subset A$ obert.

- Anem a provar que $\mathrm{Cl}(A) = \bigcap_{\substack{A\subset C \\ C \text{ tancat}}} C$. He de veure que $\bigcap_{\substack{A\subset C \\ C \text{ tancat}}} C$ és tancat (ja ho sabem) i que si $K\subset X$ és un tancat amb $A\subset K$ aleshores $\bigcap_{\substack{A\subset C \\ C \text{ tancat}}} C \subset K$ ja que $K=C$ per algun índex de la intersecció.

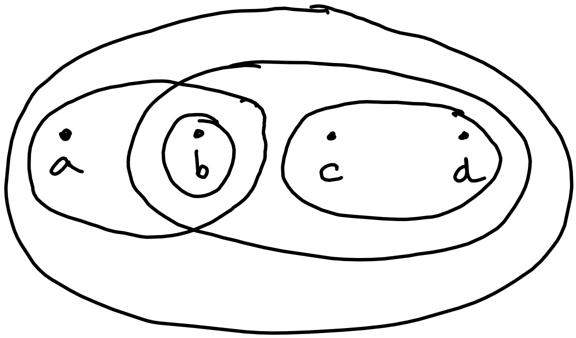
Tenim inclusions

$$\mathrm{Int}(A) \subset A \subset \mathrm{Cl}(A),$$

i per definició $\mathrm{Int}(A) = A$ sii A obert.
$\mathrm{Cl}(A) = A$ sii A tancat.

EXEMPLE

1



$A = \{b\}$ $\quad$ $\mathrm{Int}(A) = \{b\}$ $\quad$ $\mathrm{Cl}(A) = \{a,b\}$

$B = \{a\}$ $\quad$ $\mathrm{Int}(B) = \emptyset$ $\quad$ $\mathrm{Cl}(B) = \{a\}$

$C = \{b,c\}$ $\quad$ $\mathrm{Int}(C) = \{b\}$ $\quad$ $\mathrm{Cl}(C) = X$

2 Sigui X un conjunt amb la topologia cofinita. Suposem que X és infinit.

Si $A \subset X$ aleshores

$$\mathrm{Cl}(A) = \begin{cases} A & \text{si } A \text{ és finit} \\ X & \text{si } A \text{ és infinit} \end{cases}$$

[Recordeu que els tancats són $\{\emptyset, X, A \subset X \text{ finit}\}$]

$$\mathrm{Int}(A) = \begin{cases} A & \text{si } X \setminus A \text{ finit} \\ \emptyset & \text{si } X \setminus A \text{ infinit} \end{cases}$$

A la pràctica es compleix que donat $A \subset X$, on X espai topològic,

- Si $U \subset A$ on U és obert alehores $U \subset Int(A)$.
- Si $A \subset K$ on K és tancat alehores $Cl(A) \subset K$.

Anem a veure uns quants exemples més.

(3) Si X té la topologia discreta, $A \subset X$

$$Int(A) = Cl(A) = A$$

ja que A és obert i tancat alhora.

(4) $\mathbb{R}$ amb la topologia usual (és a dir, induïda per la mètrica euclidea)

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}, \quad Int(\mathbb{Q}) = \emptyset$$
$$Cl(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$$
(per què?)

Fixeu-vos que no hi ha cap bola $B(x, \delta)$ que estigui continguda a $\mathbb{Q}$. I el mateix passa per $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(5) $\mathbb{R}$ amb la topologia del límit inferior $A = [a, b) \subset \mathbb{R}$

$$Int(A) = A = Cl(A)$$ ja que és obert i tancat alhora.

Però si $A = (a,b]$ aleshores $\mathrm{Int}(A) = (a,b)$ i $\mathrm{Cl}(A) = [a,b]$.

$$A = [0,1) \subset \mathbb{R}$$

Topologia	Usual	Discreta	Grollera	Complement finit	Límit inferior
$\mathrm{Int}(A)$	$(0,1)$	A	$\emptyset$	$\emptyset$	A
$\mathrm{Cl}(A)$	$[0,1]$	A	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	A

Fixeu-vos que en alguns casos tenim $A \subsetneq X$ però $\mathrm{Cl}(A) = X$, direm que aquests són subconjunts densos.

<u>DEFINICIÓ</u> Sigui X un espai topològic, $A \subset X$. Diem que A és dens si $\mathrm{Cl}(A) = X$. (X és el tancat més petit que conté A).

Per tant, $\mathbb{Q}$ és dens a $\mathbb{R}$ amb la topologia usual i amb la grollera però no amb la discreta.

Un cop tenim $\mathrm{Int}(A) \subset A \subset \mathrm{Cl}(A)$, donem un nom a la diferència entre la clausura i l'interior.

<u>DEFINICIÓ</u>: Sigui X un espai topològic i $A \subset X$, la frontera d'A, $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Cl}(A) \setminus \mathrm{Int}(A)$
$= (X \setminus \mathrm{Int}(A)) \cap \mathrm{Cl}(A)$

Fixeu-vos que sempre és tancat per ser intersecció de dos tancats.

Hem definit $\mathrm{Int}(A)$ i $\mathrm{Cl}(A)$ en base a una propietat universal, però si em donen $x \in X$, hi ha algun criteri 'local' que em permeti comprovar si és interior o de la clausura?

Som-hi! primer definim la noció d'entorn d'un punt.

<u>DEFINICIÓ</u>: Sigui X un espai topològic, $x \in X$. Diem que $N \subset X$ és un entorn de x si existeix un obert $U \subset X$ tal que

$$x \in U \subset N.$$

<u>DEFINICIÓ</u>: Sigui X un espai topològic, $A \subset X$.

1. Diem que $x \in X$ és un punt interior de A si A és un entorn de x, és a dir, existeix un obert U tal que $x \in U \subset A$.

2. Diem que $x \in X$ és un punt adherent a A si per tot entorn N de x es compleix que
$$N \cap A \neq \emptyset.$$
(és a dir, tot entorn conté punts de A)

Observacions: X espai topològic, $A \subset X$

Si A és obert, aleshores és un entorn de tots els seus punts, i per tant, tots els punts de A són interiors.

Si A és tancat, aleshores $X \setminus A$ és obert. Si x és un punt adherent, no pot pertanyer a $X \setminus A$ ja que tindria un entorn que no talla A (seria interior a $X \setminus A$). Per tant $x \in A$. Tots els punts de A són adherents.

PROPOSICIÓ: Sigui X espai topològic, $A \subset X$.

(1) $\mathrm{Int}(A)$ és el conjunt dels punts interiors de A
(2) $\mathrm{Cl}(A)$ és el conjunt dels punts adherents de A.

Demostració:

(1) Suposem $x \in \mathrm{Int}(A)$. Anem a veure que x és un punt interior de A. Com que $\mathrm{Int}(A) = \bigcup\limits_{\substack{U \subset A \\ \text{obert}}} U$ tenim que existeix $U \subset A$ obert amb $x \in U \subset A$. Aleshores U és un entorn de x contingut a A, i x és interior.

Suposem que x és un punt interior de A. Aleshores existeix un entorn $N \subset A$ del punt x. $x \in N \subset A$. Per ser entorn, existeix un obert U amb $x \in U \subset N \subset A$. Ara $U \subset \mathrm{Int}(A)$ per definició, així $x \in \mathrm{Int}(A)$.

(2) Suposem que $x \in Cl(A)$ i comprovem que aleshores x és un punt adherent a A.
Suposem el contrari, $x \in Cl(A)$ però que x no és adherent a A. En particular $x \notin A$ i existeix un entorn de x, N, tal que $N \cap A = \emptyset$. Per tant $N \subset X \setminus A$. En particular existeix un obert $U \subset N \subset X \setminus A$, $x \in U$. Si $U \subset X \setminus A$ aleshores $A \subset X \setminus U$.
Com que $X \setminus U$ conté A i és tancat, ha de contenir la clausura, $Cl(A) \subset X \setminus U$ i per tant $x \in Cl(A) \subset X \setminus U$ implica $x \notin U$! Arribant a contradicció. Així x ha de ser adherent.

Suposem que x és un punt adherent a A, comprovem que $x \in Cl(A)$. Cal veure que $x \in C$ per tot C tancat tal que $A \subset C$ (recordar que $Cl(A) = \bigcap_{A \subset C \text{ tancat}} C$).

Suposem doncs que no, és a dir, que existeix un tancat C tal que $A \subset C$ i $x \notin C$. Aleshores $x \in X \setminus C$ que és obert. Com que $A \subset C$, tenim $X \setminus C \subset X \setminus A$, i $(X \setminus C) \cap A = \emptyset$. Així $X \setminus C$ és un entorn de x que no talla A, arribant a contradicció amb el fet que x és adherent. Per tant $x \in C$ per tot tancat C amb $A \subset C$, és a dir, x és adherent

#

Anem a veure algunes propietats

(1)	$\mathcal{U}$ obert, $\mathcal{U} \subset A$ aleshores $\mathcal{U} \subset \mathrm{Int}(A)$	C tancat, $A \subset C$ aleshores $\mathrm{Cl}(A) \subset C$
(2)	A obert sii $\mathrm{Int}(A)=A$	A tancat sii $\mathrm{Cl}(A)=A$
(3)	$\mathrm{Int}(\mathrm{Int}(A))=\mathrm{Int}(A)$ $\mathrm{Int}(A)$ obert	$\mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}(A))=\mathrm{Cl}(A)$ $\mathrm{Cl}(A)$ tancat
(4)	$A \subset B$, $\mathrm{Int}(A) \subset \mathrm{Int}(B)$	$A \subset B$, $\mathrm{Cl}(A) \subset \mathrm{Cl}(B)$
(5)	$\mathrm{Int}(X \setminus A) = X \setminus \mathrm{Cl}(A)$	$\mathrm{Cl}(X \setminus A) = X \setminus \mathrm{Int}(A)$
(6)	$\mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B)$	$\mathrm{Cl}(A \cap B) \subset \mathrm{Cl}(A) \cap \mathrm{Cl}(B)$
(7)	$\mathrm{Int}(A \cup B) \supset \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B)$	$\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$

Pel que fa a la frontera:

(8) ∂A és un tancat

(9) $\partial A \cap \mathrm{Int}(A) = \emptyset$

(10) $\partial A \cup \mathrm{Int}(A) = \mathrm{Cl}(A)$

(11) $\partial A \subset A$ sii A tancat

(12) $\partial A \cap A = \emptyset$ sii A obert

(13) $\partial A = \emptyset$ si A és obert i tancat alhora.

Així doncs la clausura i l'interior són funcions

$$\mathcal{P}(X) \underset{\mathrm{Int}}{\overset{\mathrm{Cl}}{\rightrightarrows}} \mathcal{P}(X).$$

Moltes proposicions/afirmacions admeten vàries demostracions ja que podem fer servir la descripció "universal" o la "local".

(4) Anem a veure que si $A \subset B$, aleshores $\mathrm{Int}(A) \subset \mathrm{Int}(B)$.

- Si $A \subset B$ aleshores $\mathrm{Int}(A) \subset A \subset B$. Com que $\mathrm{Int}(A)$ és obert, i $\mathrm{Int}(A) \subset B$, per definició d'$\mathrm{Int}(B)$ tenim que $\mathrm{Int}(A) \subset \mathrm{Int}(B)$.

o bé

- Per veure que $\mathrm{Int}(A) \subset \mathrm{Int}(B)$, prenem $x \in \mathrm{Int}(A)$. Com que x és un punt interior a A, existeix un entorn de x contingut en A, N,

$$x \in N \subset A$$

Però aleshores N també és un entorn de x contingut a B, així x és un punt interior a B i $x \in \mathrm{Int}(B)$.

(5) Anem a veure que $\mathrm{Int}(X \setminus A) = X \setminus \mathrm{Cl}(A)$.

Ho farem provant les dues inclusions.

- Veurem que $X \setminus Cl(A) \subset Int(X \setminus A)$. Fixeu-vos que com que $X \setminus Cl(A)$ és obert (ja que $Cl(A)$ és tancat), només cal veure que $X \setminus Cl(A) \subset X \setminus A$ (ja que aleshores està contingut en l'obert més gran que és $Int(X \setminus A)$).

  Ara bé, $A \subset Cl(A)$ i per tant $X \setminus Cl(A) \subset X \setminus A$.

- Veurem que $Int(X \setminus A) \subset X \setminus Cl(A)$. Fixeu-vos que $A \cap (Int(X \setminus A)) = \emptyset$ ja que

  $A \cap (X \setminus A) = \emptyset$ i $Int(X \setminus A) \subset X \setminus A$. Així si $x \in Int(X \setminus A)$, x no és adherent a A ja que $Int(X \setminus A)$ és un entorn de x que no talla A. Així $x \notin Cl(A)$ i $x \in X \setminus Cl(A)$.

(7) Per veure que $Int(A) \cup Int(B) \subset Int(A \cup B)$ només cal veure que $Int(A) \cup Int(B) \subset A \cup B$ ja que $Int(A) \cup Int(B)$ és obert. Ara bé, $Int(A) \subset A$ i $Int(B) \subset B$, per tant,

$$Int(A) \cup Int(B) \subset A \cup B \quad i$$

així $Int(A) \cup Int(B) \subset Int(A \cup B)$.

- Alternativa: $A \subset A \cup B$ i $B \subset A \cup B$, sabem que aleshores $Int(A) \subset Int(A \cup B)$ i $Int(B) \subset Int(A \cup B)$. Així $Int(A) \cup Int(B) \subset Int(A \cup B)$.

La igualtat no sempre és certa: $A, B \subset \mathbb{R}$ amb $A = [-1, 0]$ i $B = [0, 1]$, $A \cup B = [-1, 1]$

(11) Suposem $\partial A \subset A$, aleshores tenim

$$Cl(A) = \partial A \cup Int(A) \subset A \cup Int(A) = A$$

Així $Cl(A) \subset A$. Sempre es compleix $A \subset Cl(A)$.
Per tant $A = Cl(A)$ i A és tancat.

Si A és tancat, aleshores $Cl(A) = A$ i
$\partial A = A \setminus Int(A) \subset A$.

(12) Si $\partial A \cap A = \emptyset$ aleshores $A \subset Int(A)$ ja que
$\partial A = Cl(A) \setminus Int(A)$. Sempre es compleix
$Int(A) \subset A$ i aleshores $A = Int(A)$, per tant,
A és obert.

Si A és obert, $A = Int(A)$ i per tant
$\partial A \cap A = A \setminus Int(A) = \emptyset$.

<u>Exercici</u> Demostreu vosaltres els que queden pendents.

Alguns exemples més:

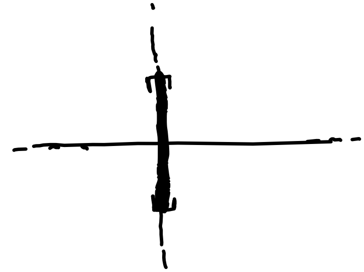
(0) $A = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ aleshores $Int(A) = \emptyset$, $Cl(A) = A \cup \{0\}$.

(1) $\mathbb{R}$, $A = \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $Int(\mathbb{Q}) = \emptyset$ $\quad \partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$
$Cl(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$

(2) $A = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$ amb la topologia del límit inferior.

$Cl(A) = [-1, 1]$ $\quad \partial A = \{1\}$
$Int(A) = [-1, 1)$

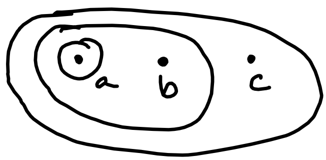
(3) $A = \{0\} \times [-1,1] \subset \mathbb{R}^2$



$\mathrm{Cl}(A) = A \qquad \partial A = A$

$\mathrm{Int}(A) = \emptyset$

(4)



$A = \{a\}$

$\mathrm{Int}(A) = A \qquad \partial A = \{b, c\}$

$\mathrm{Cl}(A) = X$

$B = \{a, c\} \quad \mathrm{Int}(B) = \{a\} \quad \mathrm{Cl}(B) = X \quad \partial B = \{b, c\}$

$C = \{c\} \quad \mathrm{Int}(C) = \emptyset \quad \mathrm{Cl}(C) = C \quad \partial C = C$

$D = \{b\} \quad \mathrm{Int}(D) = \emptyset \quad \mathrm{Cl}(D) = \{b, c\} \quad \partial D = \{b, c\}$

I ara, us demano que tornem a la primera classe, què és una funció contínua? i recordem dues de les definicions que van aparèixer.

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és contínua en $x = a$ si existeix $f(a)$ i $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) = \lim_{x \to a^-} f(x)$

(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és contínua en $x = a$ si per tot $\varepsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ tal que

$$B(x, \delta) \subset f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$$

o equivalentment

$f^{-1}(U)$ és obert si U és obert.

La definició (2) ens ha portat a treballar amb espais mètrics i espais topològics i hem definit aplicació contínua entre espais topològics.

, Però (1) intuïtivament és la que ens diu 'punts infinitessimalment propers' van a 'punts infinitessimalment propers'. En realitat, (1) parla de punts adherents i diu

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(\lim_{x\to a} x) = f(a).$$

Aquí tenim l'anàleg de la versió (1).

<u>TEOREMA</u> Sigui $f: X \to Y$ una aplicació contínua entre espais topològics i $A \subset X$. Aleshores

$$f(Cl(A)) \subset Cl(f(A))$$

<u>Demostració</u> Veurem que si $f(x) \notin Cl(f(A))$ aleshores $x \notin Cl(A)$. Si $f(x)$ no és un punt adherent a $f(A)$, aleshores existeix un entorn N de $f(x)$ tal que $N \cap f(A) = \emptyset$. Prenem un obert $U \subset N$, també compleix $U \cap f(A) = \emptyset$, $f(x) \in U$. Aleshores $x \in f^{-1}(U)$ obert per ser f contínua i $f^{-1}(U) \cap A = \emptyset$. Per tant x no és adherent a A, $x \notin Cl(A)$

#

De fet, la implicació contrària també és certa. Prova-ho!

I acabem amb una altra caracterització en termes d'entorns.

<u>TEOREMA</u> Sigui $f: X \to Y$ una aplicació entre espais topològics.
f és contínua si i només si per tot $x \in X$ i obert $\mathcal{U} \subset Y$ tal que $f(x) \in \mathcal{U}$ existeix un entorn $N \ni x$ amb $f(N) \subset \mathcal{U}$.

<u>Demostració</u>: Suposem f és contínua. Prenem $x \in X$ i $\mathcal{U} \subset Y$ obert amb $f(x) \in \mathcal{U}$. Sigui $N = f^{-1}(\mathcal{U})$, aleshores N és un obert, per tant entorn, i $x \in N$ i $f(N) = f(f^{-1}(\mathcal{U})) \subset \mathcal{U}$.

Ara anem a veure que f és contínua. Sigui $W \subset Y$ obert. Volem comprovar que $f^{-1}(W)$ és obert. Sigui $x \in f^{-1}(W)$, aleshores $f(x) \in W$ i per tant existeix un entorn $V_x \ni x$ tal que $f(V_x) \subset W$. Així $x \in V_x \subset f^{-1}(W)$, i veiem que x és un punt interior a $f^{-1}(W)$. Com que x era un punt qualsevol aleshores tots els punts de $f^{-1}(W)$ són interiors i tenim que $f^{-1}(W)$ és obert.

#

<u>PENSEU</u>: com es relacionen les aplicacions contínues i els interiors?