EL MANTRA DELS COMPACTES HAUSDORFF

Natàlia Castellana

Hi ha tres propietats que són molt rellevants en les propietats dels espais topològics compactes. Per això mereixen un capítol especial.

PROPIETAT 1: La imatge d'un compacte per una aplicació contínua és compacte

PROPIETAT 2: Un subconjunt tancat en un compacte és compacte.

PROPIETAT 3: Un subconjunt compacte en un Hausdorff és tancat.

Fixeu-vos en la següent conseqüència d'aquestes propietats:

CONSEQÜÈNCIA: tota aplicació contínua d'un compacte en un Hausdorff és tancada.

En particular, si és bijectiva, serà un homeomorfisme! És a dir, no cal preocupar-nos per la inversa, és gratis!

Dedicarem aquest capítol a demostrar aquestes propietats i treure'n conseqüències.

PROPOSICIÓ 1 Sigui $f: X \to Y$ una aplicació contínua entre espais topològics. Si $A \subset X$ és compacte aleshores $f(A) \subset Y$ és compacte també.

Demostració: Per veure que $f(A) \subset Y$ és compacte he de començar amb un recobriment per oberts qualsevol i provar que admet un subrecobriment finit.

Sigui $\{U_i\}_{i \in I} = \mathcal{U}$ un recobriment per oberts de $f(A)$ en Y. És a dir,

$$U_i \in \mathcal{T}_Y \quad i \quad f(A) \subset \bigcup_{i \in I} U_i .$$

Considerem el recobriment $\{f^{-1}(U_i)\}_{i \in I}$. Com que f és contínua,

$$f^{-1}(U_i) \subset X \text{ oberts}$$

$$A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i)$$

Per tant, tenim un recobriment per oberts d'A en X. Com que A és compacte, admet un subrecobriment finit

$$\{f^{-1}(U_{i_1}), \dots, f^{-1}(U_{i_n})\}, \quad A \subset \bigcup_{j=1}^{n} f^{-1}(U_{i_j})$$

Alehores $f(A) \subset f\left(\bigcup_{j=1}^{n} f^{-1}(U_{i_j})\right) = \bigcup_{j=1}^{n} f(f^{-1}(U_{i_j})) \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j}$

i per tant $\{U_{i_1}, \dots, U_{i_n}\}$ és un subrecobriment finit de $\mathcal{U}$.

#

PROPOSICIÓ 2 Sigui X un espai topològic compacte, i $C \subset X$ tancat. Aleshores C és compacte.

Demostració:

Sigui $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un recobriment per oberts de C en X,

$$C \subset \bigcup_{i \in I} U_i \quad , \quad U_i \in \tau_X$$

Com que C és tancat, $X \setminus C$ és obert i per tant, si l'afegim a la col·lecció $\mathcal{U}$ obtenim un recobriment per oberts de X, $X = \bigcup_{i \in I} U_i \cup (X \setminus C)$.

Sigui $\mathcal{V} = \mathcal{U} \cup \{X \setminus C\}$, aleshores tenim que $\mathcal{V}$ és un recobriment per obert de X que és compacte. Per tant $\mathcal{V}$ admet un subrecobriment finit,

$$X = U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_n} \cup (X \setminus C).$$

Com que $C \cap (X \setminus C) = \emptyset$, $C \subset U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_n}$ i per tant, $\{U_{i_1}, \ldots, U_{i_n}\}$ és un subrecobriment finit de C.

$\#$

Fixeu-vos que la implicació contrària no és certa. Per exemple, sigui $\mathbb{R}$ amb la topologia cofinita. Tots els subconjunts són compactes però n'hi ha que no són tancats.

- Primera sorpresa: no sempre els compactes són tancats.

Però ...

PROPOSICIÓ 3: Sigui X un espai topològic Hausdorff, Sigui $A \subset X$ compacte, aleshores A és tancat.

- MOLTA ATENCIÓ A LA TÈCNICA DE LA DEMOSTRACIÓ!

Demostració Podem suposar que $A \neq \emptyset$ i $A \neq X$.

Provarem que $X \setminus A$ és obert veient que tots els seus punts són interiors. Donat $x \in X \setminus A$, construirem un obert $\mathcal{U} \ni x$ i $x \in \mathcal{U} \subset X \setminus A$.

Sigui $a \in A$, com que $x \in X \setminus A$ tenim $x \neq a$. Fem servir que X és Hausdorff: existeixen oberts $\mathcal{U}_a, \mathcal{V}_a \subset X$ amb $x \in \mathcal{U}_a$, $a \in \mathcal{V}_a$, $\mathcal{U}_a \cap \mathcal{V}_a = \emptyset$. Fem aquest procés per tot $a \in A$.

Acabem amb dues famílies d'oberts $\{\mathcal{U}_a\}_{a\in A}$, $\{\mathcal{V}_a\}_{a\in A}$ tals que

$$x \in \bigcap_{a\in A} \mathcal{U}_a = \mathcal{U} \quad \text{ja que } x \in \mathcal{U}_a \text{ per tot } a \in A$$

$$A \subset \bigcup_{a\in A} \mathcal{V}_a = \mathcal{V} \quad \text{ja que } a \in \mathcal{V}_a \text{ per tot } a \in A$$

A més, $\mathcal{U}_a \cap \mathcal{V}_a = \emptyset$ per tot $a \in A$ implica que $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$. I per tant $\mathcal{U} \subset X \setminus A$

PERÒ $\mathcal{U}$ no té perquè ser obert ja que és una intersecció arbitrària d'oberts. Seria obert si podem reduir tota la situació a famílies finites d'oberts. Fem servir que A és compacte.

Com que A és compacte, $\mathcal{V}$ admet un subrecobriment finit, $\{V_{a_1}, \ldots, V_{a_n}\}$ tal que, si considerem les parelles $\{U_{a_1}, \ldots, U_{a_n}\}$,

$$A \subset V_{a_1} \cup \ldots \cup V_{a_n} = V$$

$$x \in U_{a_1} \cap \ldots \cap U_{a_n} = U$$

i $U \cap V = \emptyset$, per tant $x \in U \subset X \setminus V \subset X - A$.

#

<u>COROL·LARI</u> Sigui X un espai topològic Hausdorff, i $\{C_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una família, $C_\alpha \subset X$ compactes.

Aleshores $\bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha \subset X$ és compacte.

<u>Demostració</u>: Com que X és Hausdorff, cada C_α és tancat per la proposició anterior. Aleshores $\bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha$ és tancat.

Ara bé $\bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha \subset C_\alpha$ també és tancat en C_α que és compacte. Aleshores $\bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha$ és compacte també.

#

Recordeu que la topologia cofinita a $\mathbb{R}$ no és Hausdorff, i en aquest cas tenim compactes que no són tancats.

COROL·LARI AMB MAJÚSCULES

Sigui $f: X \to Y$ una aplicació contínua entre espais topològics tals que X és compacte i Y és Hausdorff, aleshores f és tancada.

En particular, si a més f és bijectiva aleshores és un homeomorfisme.

Demostració Sigui $A \subset X$ tancat.

Per la proposició 2, A és compacte ja que X és compacte.

Per la proposició 1, $f(A)$ és compacte en Y, ja que f és contínua.

Per la proposició 3, $f(A) \subset Y$ és tancat ja que Y és Hausdorff.

#

- Quantes topologies pots posar en un conjunt finit per a que sigui Hausdorff?

(pensa un moment abans de passar pàgina...)

Les topologies compactes i Hausdorff en un conjunt X són com un punt d'equilibri entre aquestes dues propietats. Vegem-ho.

Sigui (X, τ) un espai topològic Hausdorff i $\tau_1 \subset \tau \subset \tau_2$ dues topologies. τ_1 és menys fina que τ i τ_2 és més fina.

Per tant, $id : (X, \tau) \longrightarrow (X, \tau_1)$ són

$$id : (X, \tau_2) \longrightarrow (X, \tau)$$

contínues i bijectives.

Fixeu-vos que si (X, τ_1) és Hausdorff, com que (X, τ) és compacte, pel corol·lari anterior $id : (X, \tau) \longrightarrow (X, \tau_1)$ és un homeomorfisme i per tant $\tau = \tau_1$.

És a dir, no hi ha topologies menys fines que siguin Hausdorff.

Fixeu-vos que si (X, τ_2) és compacte, com que (X, τ) és Hausdorff, pel corol·lari anterior $id : (X, \tau_2) \longrightarrow (X, \tau)$ és un homeomorfisme i per tant $\tau = \tau_2$.

És a dir, no hi ha topologies més fines que siguin compactes.

Per exemple, si X és finit aleshores és compacte i només la topologia discreta el fa Hausdorff.

Fixeu-vos que estrictament amb la definició només sabem que els conjunts finits són compactes, i la topologia cofinita també ens dóna exemples d'espais compactes. (bé, la topologia grollera en qualsevol espai).

Si una topologia té un nombre finit d'oberts alehores també serà compacte.

I també podem comparar topologies:
si (X,τ) no és compacte i $\tau \subset \tau'$ aleshores (X,τ') tampoc.

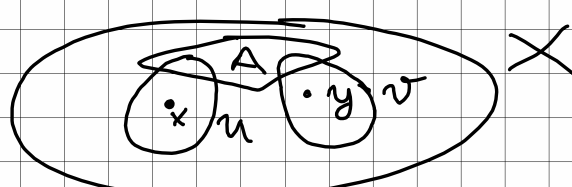
Ja sabem, per la proposició 1, per exemple, que el quocient d'un compacte és compacte, sabem que no tots els subespais d'un compacte ho són (sí si són tancats per la proposició 2). Encara no sabem res dels productes ... i tampoc de $[0,1] \subset \mathbb{R}$!! o dels subconjunts tancats i acotats de $\mathbb{R}^n$!!

BONUS: La propietat Hausdorff no es comporta del tot bé respecte $\sim$. Per exemple, $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ no és Hausdorff. Ara bé, si ho combinem amb compacitat tot va moooolt millor.

Proposició: Sigui X un espai compacte Hausdorff i $A \subset X$ tancat. Aleshores X/A és compacte Hausdorff.

Demostració: Primer, X/A és compacte ja que és la imatge de X per $p: X \to X/A$ que és contínua.
Anem a veure que és Hausdorff. Siguin $p(x) \neq p(y) \in X/A$.

Suposem primer que $x, y \notin A$. Com que X té la propietat Hausdorff aleshores existeixen oberts $x \in U$, $y \in V$ amb $U \cap V = \emptyset$. Però podria passar que $p(U) \cap p(V) \neq \emptyset$ (si $U \cap A \neq \emptyset$ i $V \cap A \neq \emptyset$)



Per això cal modificar-los de manera que a més de ser disjunts també $U \cap A = V \cap A = \emptyset$. Fem servir que A és tancat. Si prenem $U' = U \cap (X \setminus A)$ i $V' = V \cap (X \setminus A)$ tenim que són oberts que compleixen

$$U' \cap V' = \emptyset, \quad U' \cap A = V' \cap A = \emptyset$$

i $x \in U'$, $y \in V'$.

A més, $p(\mathcal{U}')$ i $p(\mathcal{V}')$ són oberts a X/A ja que

$p^{-1}(p(\mathcal{U}')) = \mathcal{U}' \subset X$ oberts a X

$p^{-1}(p(\mathcal{V}')) = \mathcal{V}' \subset X$ obert a X.

Ens falta provar el cas en que $p(x) \neq p(y)$ i $y \in A$.
Recordem que

$$\left[\begin{array}{l} A \subset X \text{ tancat}, X \text{ compacte alshores } A \text{ compacte} \\ x \in X \setminus A \end{array} \right]$$

Com que X és Hausdorff, reproduim la demostració de la proposició 3 (compacte en un Hausdorff és tancat) i veiem que estem en les condicions de construir dos oberts

$A \subset \mathcal{U}$ obert amb $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$.
$x \in \mathcal{V}$ obert $\quad \mathcal{V} \subset X \setminus A$.

Per tant $p(\mathcal{U}) \cap p(\mathcal{V}) = \emptyset$ i $p(\mathcal{U}), p(\mathcal{V}) \subset X/A$ oberts

ja que $p^{-1}(p(\mathcal{U})) = \mathcal{U}$ són oberts a X.
$p^{-1}(p(\mathcal{V})) = \mathcal{V}$

#