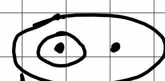
Quan amb Hausdorff no n'hi ha prou ...

Natàlia Castellana

La propietat de Hausdorff en un espai topològic ve directament motivada per la propietat anàloga que es dona en espais mètrics i boles:

(X,d) espai mètric, $x \neq y \in X$, existeix $\epsilon > 0$ tal que
$$B(x,\epsilon) \cap B(y,\epsilon) = \emptyset.$$

Però ja hem vist que aquesta propietat no es dedueix dels axiomes de topologia i hi ha espais topològics que no compleixen, per tant, no tota topologia ve induïda per una mètrica.

Per exemple, els de Sierpinsky , o la topologia dels complements finits en X infinit.

Recordeu que aquesta és una propietat que passa a topologies subespai i producte però no a quocient:

$\mathbb{R}$ és Hausdorff però $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ no ho és.

Ara bé, també hi ha situacions que hem vist en què sí:

- $A \subset X$, X compacte Hausdorff i A tancat aleshores X/A compacte Hausdorff.

Si recordeu la demostració, el punt clau és que donat $x \in X \setminus A$, sota les hipòtesis donades, existeixen oberts $x \in U$, $A \subset V$ tals que

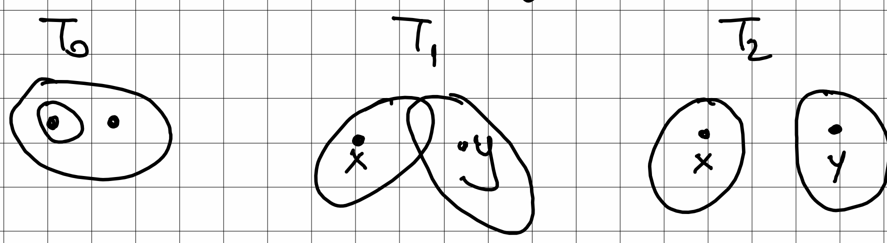
$$U \cap V = \emptyset.$$

És a dir, podem separar punts de tancats en un compacte Hausdorff. Recordeu que en un espai topològic Hausdorff els punts són tancats.

Anem a introduir tota una jerarquia de propietats de separació

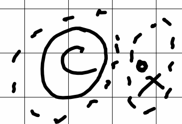
<u>AXIOMES DE SEPARACIÓ</u> X espai topològic.

- Diem que X és T_0 (o espai de Kolmogorov) si donats $x, y \in X$, amb $x \neq y$, existeix un obert que conté un dels punts però no l'altre.
- Diem que X és T_1 (o espai de Fréchet) si donats $x, y \in X$ amb $x \neq y$, existeix un obert $U \subset X$ $x \in U$, $y \notin U$.
- Diem que X és T_2 (o espai de Hausdorff) si donats $x, y \in X$ amb $x \neq y$, existeixen oberts $U, V \subset X$ amb $x \in U$, $y \in V$, $U \cap V = \emptyset$

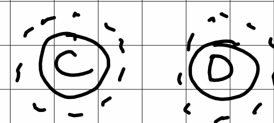


- Diem que X és T_3 (o espai regular) si és T_1 i donat un tancat $C \subset X$ i $x \notin C$ aleshores existeixen oberts $U, V \subset X$ tals que $x \in U$, $C \subset V$ i $U \cap V = \emptyset$.

- Diem que X és T_4 (o espai normal) si és T_1 i donat dos tancats disjunts $C, D \subset X$ $C \cap D = \emptyset$ existeixen oberts disjunts $U, V \subset X$ amb $C \subset U$, $D \subset V$, $U \cap V = \emptyset$.



T_3



T_4

Fixeu-vos que

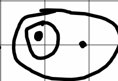
$$T_4 \subset T_3 \subset T_2 \subset T_1 \subset T_0$$

però hi ha exemples d'espais T_i que no són T_{i+1} per $i = 0, 1, 2, 3$.

<u>Observacions</u> X és T_1 si i només si tots els subconjunts finits són tancats (és a dir, si els punts són tancats)

Fixeu-vos que $\{x\} \subset X$ és tancat si $X \setminus \{x\}$ és obert: donat $y \neq x$ existeix oberts $U \ni y$ amb

$$U \subset X \setminus \{x\}, \text{ és a dir, } x \notin U.$$

Les topologies de Sierpienski  són T_0 i no són T_1.

Les topologies cofinites en X infinit són T_1 i no són T_2.

Els espais compactes Hausdorff són regulars, anem a recordar la demostració.

<u>Proposició</u> Sigui X un espai compacte Hausdorff, $A \subset X$ tancat, aleshores donat $x \notin A$ existeixen oberts $U, V \subset X$ amb $A \subset U$ i $x \in V$ i $U \cap V = \emptyset$.

<u>Demostració</u> $A \subset X$ és també compacte (un tancat dins un compacte és compacte). Sigui $a \in A$, com que X és Hausdorff tenim oberts

$$a \in U_a \quad , x \in V_a \qquad U_a \cap V_a = \emptyset .$$

Aleshores $\{U_a\}_{a\in A}$ és un recobriment per oberts de A, $A \subset \bigcup_{a\in A} U_a$. Com que A és compacte, $\{U_a\}_{a\in A}$ admet un subrecobriment finit

$$A \subset U_{a_1} \cup \dots \cup U_{a_n} .$$

Aleshores $\quad U = U_{a_1} \cup \dots \cup U_{a_n} \supset A$

$$V = V_{a_1} \cap \dots \cap V_{a_n} \ni x$$

són els oberts que compleixen les condicions de la proposició.

#

Observació: En realitat fem servir la compacitat, $A \subset X$ compacte i X Hausdorff, donat $x \notin A$ existeixen oberts $\mathcal{U} \supset A$ i $x \in \mathcal{V}$ amb $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$.

Però de fet, són normals!

Proposició Un espai topològic compacte Hausdorff és normal.

Demostració: Ja sabem per hipòtesis que és T_1.

Siguin $C, F \subset X$ tancats disjunts. Fixeu-vos que també seran compactes. Fixat $a \in C$, per la proposició anterior existeixen oberts disjunts

$$a \in \mathcal{U}_a \quad i \quad F \subset \mathcal{V}_a \quad \text{amb} \quad \mathcal{U}_a \cap \mathcal{V}_a = \emptyset$$

Fent variar $a \in C$ obtenim un recobriment per oberts de C, $\{\mathcal{U}_a\}_{a \in C}$, $C \subset \bigcup_{a \in C} \mathcal{U}_a$

Com que A és compacte, existeixen $\mathcal{U}_{a_1}, \dots, \mathcal{U}_{a_n}$ amb

$$C \subset \mathcal{U}_{a_1} \cup \dots \cup \mathcal{U}_{a_n} =: \mathcal{U}$$

i per tant $F \subset \mathcal{V}_{a_1} \cap \dots \cap \mathcal{V}_{a_n} =: \mathcal{V}$ tals

que $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$ #

Nota Si filem prim, hem provat que si X és Hausdorff i $C, F \subset X$ compactes, existeixen oberts disjunts $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subset X$, $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$ amb $C \subset \mathcal{U}$ i $F \subset \mathcal{V}$.

D'altres caracteritzacions dels espais regulars i normals són:

<u>Proposició</u> Sigui X un espai T_1.

(i) X és regular si i només si per tot $x \in X$ i obert $x \in U \subset X$ existeix un obert V tal que
$$x \in V \subset Cl(V) \subset U$$

(ii) X és normal si i només si per tot tancat $D \subset X$ i tot obert $U \subset X$ amb $D \subset U$ existeix un obert $V \subset X$ tal que
$$D \subset V \subset Cl(V) \subset U.$$

<u>Demostració</u> Només cal agafar $C = X \setminus U$ a les definicions. #

No és complicat comprovar que la propietat de regularitat es comporta bé amb la topologia subespai i producte.

<u>Teorema</u> Qualsevol subespai d'un espai topològic regular és regular. El producte d'espais topològics regulars és regular.

En el cas de normalitat tenim

<u>Teorema</u> Un subespai tancat d'un espai topològic normal és normal.

Però en general no és cert i el producte d'espais topològics normals no té perquè ser normal.

Mary Ellen Rudin (1971) va construir un espai topològic X tal que X és normal però $X \times [0,1]$ <u>No</u> ho és. Aquest és el primer exemple d'un tipus d'espais que es diuen espais de Dowker.

<u>Exemples</u>

(1) Un espai Hausdorff que no és regular.

Sigui $(\mathbb{R}, \mathcal{Z})$ amb $\mathcal{Z}$ generada per la base d'oberts

$$\mathcal{B} = \{(a,b) \mid a<b \in \mathbb{R}\} \cup \{(a,b) \setminus K \mid a<b \in \mathbb{R}\}$$

on $K = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

És Hausdorff ja que $\mathcal{Z}$ és més fina que la topologia usual induïda per la mètrica del valor absolut.

No és regular: provem que K és tancat, $0 \notin K$ i no existeixen oberts que els separin.

(2) Sigui $\mathbb{R}_\ell$ la topologia del límit inferior a $\mathbb{R}$, és a dir, la base ve donada per

$$\mathcal{B} = \{ [a,b) \mid a<b \in \mathbb{R} \}$$

Aleshores $\mathbb{R}_\ell$ és normal però

$\mathbb{R}_\ell \times \mathbb{R}_\ell$ és regular però no és normal.