Topologia. Primera Prova Parcial. **Dijous, 12 de novembre 2020.**
Aules C3b/005-C3b/009 **De 9 a 12**

INSTRUCCIONS:

1. Responeu amb claredat d'exposició les següents questions. Totes les respostes han de ser degudament justificades.
2. El temps per realitzar la prova no s'allagarà sota cap circumstància.
3. Primer llegiu totes i cadascuna de les preguntes. Comenceu responent i deixant en net totes aquelles de les que us trobeu més segurs.
4. Si teniu dubtes sobre la interpretació d'algun enunciat, demaneu a la persona que estigui a l'aula en tasques de supervisió.

PROBLEMES:

1. [4 punts] Fixem $p \in \mathbb{R}$. Donat $U \subset \mathbb{R}$, diem que $U \in \tau_p$ si i només si $p \notin U$ o $\mathbb{R} \setminus U$ és finit.
   (a) [1 punt] Comprova que τ_p és una topologia en $\mathbb{R}$ (es diu topologia de Fort).
   (b) [0.5 punt] Siguin $A = \{2\}$ i $B = (0, 1]$ subconjunts de $\mathbb{R}$. Calcula els seus interiors, clausures i fronteres en la topologia de Fort segons el valor de $p \in \mathbb{R}$.
   (c) [0.5 punt] Defineix la propietat de Hausdorff en un espai topològic X i comprova si $(\mathbb{R}, \tau_p)$ la satisfà o no.
   (d) [1 punt] Caracteritza els subconjunts tancats per aquesta topologia a $\mathbb{R}$ i fes una llista de tots els subconjunts densos de $(\mathbb{R}, \tau_p)$.
   (e) [1 punt] Si $p \neq q \in \mathbb{R}$, comprova que $\tau_p \neq \tau_q$ però $(\mathbb{R}, \tau_p)$ i $(\mathbb{R}, \tau_q)$ són homeomorfs.

   Solució:

   (a) Comprovem les propietats que ha de complir τ per ser una topologia.
   - Primer veiem que $\varnothing \in \tau$ perquè $p \notin \varnothing$, i $\mathbb{R} \in \tau$ ja que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{R} = \varnothing$ és finit.
   - Sigui $\{U_i\}_{i \in I}$, on $U_i \in \tau$ per tot $i \in I$. Si cap dels U_i conté p, $p \notin U_i$ per tot $i \in I$, aleshores $p \notin \bigcup U_i$, i $\bigcup U_i \in \tau$. Sinó, existeix un $j \in I$ tal que $\mathbb{R} \setminus U_j$ és finit, i aleshores $\mathbb{R} \setminus (\bigcup U_i) = \bigcap(\mathbb{R} \setminus U_i) \subset \mathbb{R} \setminus U_j$. I per tant $\mathbb{R} \setminus (\bigcup U_i)$ també és finit i $\bigcup U_i \in \tau$.
   - Sigui $\{U_i\}_{i=1,\dots,n}$ on $U_i \in \tau$ per tot $i = 1, \dots, n$. Si $\mathbb{R} \setminus U_j$ és finit per tot i, aleshores $\mathbb{R} \setminus (\bigcap U_i) = \bigcup(\mathbb{R} \setminus U_i)$ és finit ja que és una unió finita de conjunts finits i $\bigcap U_i \in \tau$. Sinó, existeix $1 \leq j \leq n$ tal que $p \notin U_j$ i aleshores $p \notin \bigcap U_i$, així $\bigcap U_i \in \tau$.

   (b) Si $p \neq 2$ aleshores A és obert i $\mathrm{Int}(A) = A$. Si $p = 2$ aleshores A no pot contenir cap obert no buit i $\mathrm{Int}(A) = \varnothing$. Com que A és finit, el seu complementari és obert, i per tant A sempre és tancat. Aleshores $\mathrm{Cl}(A) = A$. Així si $p \neq 2$, $\mathrm{Fr}(A) = A \setminus A = \varnothing$ i si $p \neq 2$ aleshores $\mathrm{Fr}(A) = A \setminus \varnothing = A$.

   Si $p \notin B$ aleshores B és obert i $\mathrm{Int}(B) = B$. Si $p \in B$ aleshores B no és obert i $\mathrm{Int}(B) = B \setminus \{p\}$ és l'obert més gran contingut a B. Observem que els subconjunts finits són tancats ja que el seu complementari és obert. Com que B no és finit, no podrà estar contingut en cap tancat finit. Si $p \in B$ aleshores B és tancat i $\mathrm{Cl}(B) = B$ i si $p \notin B$ aleshores el tancat més petit que conté B és $\mathrm{Cl}(B) = B \cup \{p\}$. Aleshores, en ambdues situacions, $\mathrm{Fr}(B) = \mathrm{Cl}(B) \setminus \mathrm{Int}(B) = \{p\}$.

(c) Un espai topològic X és Hausdorff si donats $x \neq y \in X$, existeixen oberts $U, V \subset X$ tals que $x \in U$, $y \in V$ i $U \cap V = \varnothing$.

Per provar que $(\mathbb{R}, \tau)$ és Hausdorff he de començar prenent $x \neq y \in \mathbb{R}$. Si considerem $x = p$, aleshores $y \in \{y\}$ és obert ($p \notin \{y\}$), $x \in \mathbb{R} \setminus \{y\}$ també és obert (el seu complementari és finit), i la seva intersecció és buida ($\{y\} \cap (\mathbb{R} \setminus \{y\}) = \varnothing$). Si $x \neq p$ i $y \neq p$ aleshores $\{x\}$ i $\{y\}$ són dos oberts disjunts que contenen x i y respectivament.

(d) El subconjunts tancats són els complementaris dels oberts, per tant, $C \subset \mathbb{R}$ és tancat si $p \in C$ o C és finit. Un subconjunt $D \subset \mathbb{R}$ és dens si $\mathrm{Cl}(D) = \mathbb{R}$. Primer veiem que D no pot ser finit (aleshores és tancat ,$\mathrm{Cl}(D) = D \subsetneq \mathbb{R}$), però si D no és finit aleshores $\mathrm{Cl}(D) = D \cup \{p\}$. Així, només tenim dues possibilitats si volem que $\mathrm{Cl}(D) = \mathbb{R}$: $D = \mathbb{R}$ o $D = \mathbb{R} \setminus \{p\}$.

(e) Les topologies τ_p i τ_q no són iguals si $p \neq q$, ja que $\{p\}$ és obert a τ_q però no a τ_p. Ara bé, anem a veure que són homeomorfes. Definim $f(x) = x$ si $x \notin \{p, q\}$, $f(p) = q$ i $f(q) = p$. Aleshores f és bijectiva, i la seva inversa és ella mateixa ($f \circ f = id$). Provem $f\colon (X, \tau_p) \to (X, \tau_q)$ és tancada. Si $C \subset \mathbb{R}$ és finit aleshores $f(C)$ també, i si $p \in C$ aleshores $f(p) = q \in f(C)$. Intercanviant el paper de p i q, la inversa $f\colon (X, \tau_q) \to (X, \tau_p)$ també és tancada, així $f\colon (X, \tau_p) \to (X, \tau_q)$ és contínua. En resum, f és un homeomorfisme.

Una altra opció podria ser la següent. Sigui $f\colon (\mathbb{R}, \tau_p) \to (\mathbb{R}, \tau_q)$ definida per $f(x) = x - p + q$. És bijectiva amb inversa $f^{-1}(x) = x + p - q$. Anem a veure que són contínues. Ho comprovarem amb la família de tancats. Si $C \subset \mathbb{R}$ és finit aleshores $f^{-1}(C)$ també i $f(C)$ també. Si $p \in C$ aleshores $f(p) = q \in f(C)$ i si $q \in C$ aleshores $p \in f^{-1}(C)$. Així f és tancada i contínua. Per tant, f és un homeomorfisme.

2. [2 punts] Sigui $f\colon X \to Y$ una aplicació entre espais topològics. Demostra els següents fets:

(a) L'aplicació f és tancada si i només si per tot $A \subset X$, $\mathrm{Cl}(f(A)) \subset f(\mathrm{Cl}(A))$.

(b) Si f és exhaustiva i tancada i $U \subset X$ és obert, aleshores $\mathrm{Fr}(f(\mathrm{Cl}(U))) \subset f(\mathrm{Cl}(U)) \cap f(X \setminus U)$.

Solució:

(a) Si f és tancada aleshores $f(\mathrm{Cl}(A)) \subset Y$ és tancat ja que $\mathrm{Cl}(A)$ ho és. A més, $f(A) \subset f(\mathrm{Cl}(A))$ ja que $A \subset \mathrm{Cl}(A)$. Per tant com que la clausura de A és el tancat més petit que conté $f(A)$ tenim $\mathrm{Cl}(f(A)) \subset f(\mathrm{Cl}(f(A)))$.

Suposem ara que es compleix $\mathrm{Cl}(f(A)) \subset f(\mathrm{Cl}(A))$ per tot $A \subset X$. Sigui $C \subset X$ un subconjunt tancat, $\mathrm{Cl}(C) = C$. Aleshores per hipòtesis $\mathrm{Cl}(f(C)) \subset f(\mathrm{Cl}(C)) = f(C)$. Tenim així la inclusió $\mathrm{Cl}(f(C)) \subset f(C)$. Aleshores, com que sempre es compleix $f(C) \subset \mathrm{Cl}(f(C))$, per doble inclusió hem demostrat que $\mathrm{Cl}(f(C)) = f(C)$ i per tant $f(C)$ és tancat.

(b) Com que f és tancada tenim que $f(\mathrm{Cl}(U))$ és tancat, $\mathrm{Cl}(f(\mathrm{Cl}(C))) = f(\mathrm{Cl}(U))$. Aleshores

$$\mathrm{Fr}(f(\mathrm{Cl}(U))) = f(\mathrm{Cl}(U)) \setminus \mathrm{Int}(f(\mathrm{Cl}(U))) = f(\mathrm{Cl}(U)) \cap (Y \setminus \mathrm{Int}(f(\mathrm{Cl}(U)))) =$$
$$= f(\mathrm{Cl}(U)) \cap \mathrm{Cl}(Y \setminus f(\mathrm{Cl}(U)))$$

Ara bé, com que f és exhaustiva tenim que $Y \setminus f(\mathrm{Cl}(U))) \subset f(X \setminus \mathrm{Cl}(U))$, i com que $U \subset \mathrm{Cl}(U)$, aleshores $X \setminus \mathrm{Cl}(U) \subset X \setminus U$. Així $\mathrm{Cl}(Y \setminus f(\mathrm{Cl}(U))) \subset \mathrm{Cl}(f(X \setminus U)) = f(X \setminus U)$ ja que f és tancada i $X \setminus U$ tancat. En resum,

$$\mathrm{Fr}(f(\mathrm{Cl}(U))) = f(\mathrm{Cl}(U)) \cap \mathrm{Cl}(Y \setminus f(\mathrm{Cl}(U))) \subset f(\mathrm{Cl}(U)) \cap f(X \setminus U)$$

3. [2 punts] Sigui X un espai topològic. Definim la següent relació d'equivalència: $x \sim y$ si i només si $\mathrm{Cl}(\{x\}) = \mathrm{Cl}(\{y\})$. Sigui $p\colon X \to X/\sim$ l'aplicació quocient. Prova els següents enunciats:

(a) Si $A \subset X$ és obert o tancat, aleshores $p^{-1}(p(A)) = A$.

(b) L'aplicació quocient és oberta i tancada.

Solució:

(a) Sigui $A \subset X$. Sempre es compleix $A \subset p^{-1}(p(A)) = \{y \in X | Cl(\{x\}) = \mathrm{Cl}(\{y\}), x \in A\}$. Anem a veure si A és obert o tancat, aleshores es compleix l'altra inclusió, $p^{-1}(p(A)) \subset A$. Sigui $z \in p^{-1}(p(A))$, aleshores $\mathrm{Cl}(\{x\}) = \mathrm{Cl}(\{z\})$ per algun $x \in A$.

En particular, $x \in \mathrm{Cl}(\{z\})$ per algun $x \in A$. És a dir, $x \in A$ és un punt adherent a $\{z\}$. Si A és obert i $x \in A$, tenim que $A \cap \{z\} \neq \varnothing$, i per tant $z \in A$.

Si A és tancat tenim que $z \in \mathrm{Cl}(\{z\}) = \mathrm{Cl}(\{x\}) \subset \mathrm{Cl}(A) = A$, i per tant, $z \in A$.

(b) Sigui $A \subset X$ un subconjunt obert (resp. tancat). Aleshores p serà oberta (resp. tancada) si $p(A) \subset X/\sim$ és obert (resp. tancat). Ara, com que $X/\sim$ té la topologia quocient induïda per p, $p(A) \subset X/\sim$ és obert (resp. tancat) sii $p^{-1}(p(A)) \subset X$ és obert (resp. tancat). Per l'apartat (a), tenim que $p^{-1}(p(A)) = A$ si A és obert o tancat, per tant, p és oberta (resp. tancada).

4. [2 punts] Siguin τ_1 i τ_2 dues topologies en un mateix conjunt X. Considerem l'aplicació diagonal $i\colon X \hookrightarrow X \times X$, $i(x) = (x, x)$. Prenem la topologia producte $(X, \tau_1) \times (X, \tau_2)$ en $X \times X$. Sigui $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ la topologia en X definida per la inclusió i, és a dir, la topologia menys fina per la qual i és contínua. Demostra que:

(a) La topologia τ és més fina, és a dir, $\tau_i \subset \tau$ per $i = 1, 2$.

(b) El conjunt $\mathcal{B} = \{U_1 \cap U_2 | U_1 \in \tau_1, U_2 \in \tau_2\}$ és una base per la topologia τ.

Solució:

(a) Com que les projeccions $\pi_i\colon (X_1, \tau_1) \times (X_2, \tau_2) \to (X_i, \tau_i)$ per $i = 1, 2$ són contínues, podem composar amb la inclusió diagonal i i obtenim aplicacions contínues $\pi_1 \circ i$ i $\pi_2 \circ i$. Ara bé, aquestes composicions són la identitat com aplicacions de conjunts ja que $\pi_i(i(x)) = \pi_i(x, x) = x$ per $i = 1, 2$. Aleshores $id = \pi_i \circ i\colon (X, \tau) \to (X, \tau_i)$ és contínua per $i = 1, 2$ i per tant els oberts a τ_i també ho són a τ. Així $\tau_i \subset \tau$ per $i = 1, 2$.

Una altra manera de provar-ho. Si $i\colon X \hookrightarrow X \times X$ és contínua, aleshores $i^{-1}(U_1 \times X) \in \tau$ si $U_1 \subset X$ és obert a τ_1 ja que $U_1 \times X$ és obert a $(X, \tau_1) \times (X, \tau_2)$. Però $i^{-1}(U_1 \times X) = U_1$. De la mateixa manera $i^{-1}(X \times U_2) = U_2 \in \tau$ si $U_2 \in \tau_2$.

(b) Com que τ és la topologia menys fina tal que i és contínua tenim que $U \in \tau$ sii $U = i^{-1}(W)$ amb $W \subset X \times X$ obert a $(X, \tau_1) \times (X, \tau_2)$. Donada una base $\mathcal{C}$ per la topologia producte, aquesta topologia τ tindrà una base $\mathcal{B}$ formada per $\mathcal{B} = \{i^{-1}(W) | W \in \mathcal{C}\}$ ja que $f^{-1}(\bigcup_{i \in I} W_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(W_i)$.

Una base $\mathcal{C}$ de la topologia producte està formada per productes d'oberts $U_1 \times U_2$ on $U_i \in \tau_i$ per $i = 1, 2$. Ara bé,

$$i^{-1}(U_1 \times U_2) = \{x \in X | (x, x) \in U_1 \times U_2\} = \{x \in X | x \in U_1 \cap U_2\} = U_1 \cap U_2$$

Per tant, $\mathcal{B} = \{U_1 \cap U_2 | U_1 \in \tau_1, U_2 \in \tau_2\}$ és una base per la topologia τ.