

A TRAVÉS DEL MIRALL :  
VIATGE AL MON DELS  
TANCATS

16-18 Setembre 2020

Natàlia Castellana Vila

Ja hem vist que el complementari d'un obert no té perquè ser obert. Aquesta família de complementaris d'oberts té un nom: són els tancats.

DEFINICIÓ Sigui  $X$  un espai topològic. Diem que  $C \subset X$  és tancat si  $X \setminus C$  és obert.

Fixeu-vos que si  $\mathcal{C} = \{ C \subset X \mid C \text{ tancat} \}$ , tenim una bijecció

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xleftrightarrow{(X \setminus -)} & \mathcal{O} \\ U & \longmapsto & X \setminus U \\ X \setminus C & \longleftarrow & C \end{array}$$

Ara, com que sabem com es comporten unions i interseccions respecte complementari podem deduir com es comporten els tancats respecte aquestes construccions.

$$\text{Recordeu } X \setminus \left( \bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (X \setminus A_i)$$

$$X \setminus \left( \bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (X \setminus A_i)$$

Així

- $\emptyset, X$  són tancats ja que  $X, \emptyset$  són oberts  
 $X \setminus \emptyset = X$ ,  $X \setminus X = \emptyset$ .

- Sigui  $\{C_i\}_{i \in I}$  una família arbitrària de tancats. Aleshores  $\{X \setminus C_i\}_{i \in I}$  és una família arbitrària d'oberts. Sabem  $\bigcup_{i \in I} (X \setminus C_i)$  és obert. Per tant, com que

$$X \setminus \bigcap_{i \in I} C_i = \bigcup_{i \in I} (X \setminus C_i) \text{ és obert, tenim que } \bigcap_{i \in I} C_i \text{ és tancat.}$$

- Sigui  $\{C_i\}_{i=1, \dots, n}$  una família finita de tancats. Aleshores  $\{X \setminus C_i\}_{i=1, \dots, n}$  és una família finita d'oberts. Sabem que  $\bigcap_{i=1}^n X \setminus C_i$  és obert. Per tant, com que

$$X \setminus \bigcup_{i=1}^n C_i = \bigcap_{i=1}^n (X \setminus C_i) \text{ és obert, tenim que } \bigcup_{i=1}^n C_i \text{ és tancat.}$$

Nota Fixeu-vos que a  $\mathbb{R}$ ,  $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[-1 + \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right] = (-1, 1)$

PROPOSICIÓN: Sigui  $X$  un espai topològic. Aleshores

- $\emptyset, X$  són tancats.
- Les unions finites de tancats són tancades.
- Les interseccions arbitràries de tancats són tancades.

**IMPORTANT**: Una definició alternativa de topologia és la proposició anterior definint les propietats dels tancats. És equivalent a la que hem donat abans destacant les propietats dels oberts.

I com es comporten respecte les aplicacions contínues?

PROPOSICIÓ Sigui  $f: X \rightarrow Y$  una aplicació entre espais topològics

$f$  és contínua si i  $[f^{-1}(C) \text{ tancat si } C \text{ tancat.}]$

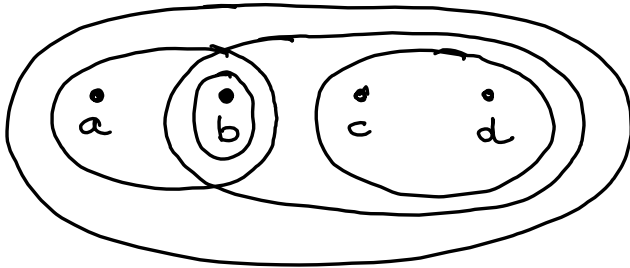
Per demostrar-la només hem de fer servir el fet de teoria de conjunts

$$X \setminus f^{-1}(C) = f^{-1}(X \setminus C)$$

## EL MÓN DE LA TOPOLOGIA NO ÉS BINARI

Els subconjunts  $A \subset X$  en un espai topològic no fan perquè etiquetar-se com oberts o tancats i totes les possibilitats es poden donar!

$$X = \{a, b, c, d\}$$



	$\{b\}$	$\{a\}$	$\{a, b\}$	$\{b, c\}$
OBERT	✓	x	✓	x
TANCAT	x	✓	✓	x

## EXAMPLES

(1) Els tancats a la topologia cofinita són els subconjunts finits.

\*Recordem  $U \subset X$  obert si  $X = \emptyset$  o  $X \setminus U$  finit.

(2) A la topologia groiera, els únics tancats són  $\emptyset, X$ .

(3) A la topologia discreta tots els subconjunts són oberts i tancats alhora.

