Ja hem vist en aquest moment del curs que hi ha certs tipus d'espais amb propietats que faciliten la feina a l'hora de provar teoremes, que són més "bons": els espais compactes Hausdorff. Ara bé, hi ha molts espais que no són d'aquest tipus i una cosa que podríem esperar o aspirar a tenir és que donat un espai qualsevol, aquest es pogués descriure com un subespai d'un d'aquests espais "bons".

Direm que una aplicació contínua $\iota\colon X \to Y$ entre espais topològics és una **immersió topològica** si és un homeomorfisme de X a la seva imatge com a subespai $\iota(X) \subset Y$. Ens preguntarem que ha de complir X per admetre una immersió topològica en un compacte (Hausdorff) per exemple. A aquest procés en direm una compactificació si a més $\iota(X) \subset Y$ és un subconjunt dens. I no hi haurà una única manera de fer-ho. N'estudirem una, la més "econòmica".

1 Un petit escalfament

Penseu en $X = (0,1) \subset \mathbb{R}$. Descriu tres immersions topològiques diferents $\iota\colon X \to Y$ on Y és un espai topològic compacte Hausdorff. Ara, quina de les que has pensat sembla la més "eficient"? Alguna és una compactificació?

I ara un exemple una mica menys evident, sigui $X = \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, i pensa en una immersió topològica com abans. Pot ajudar-te pensar en una successió decreixent (o creixent) acotada de números naturals amb el seu límit.

2 La compactificació d'Alexandroff

Sigui (X, τ) un espai topològic. Considerem el conjunt $X^* = X \cup \{\infty\}$ i definim

$$\tau^* = \{U \subset X^* | U \in \tau \text{ o bé } \infty \in U \text{ i } X^* \setminus U \text{ tancat i compacte}\}$$

Comproveu que (X^*, τ^*) és un espai topològic. I observeu que si X és Hausdorff aleshores podem considerar de manera equivalent $\tau^* = \{U \subset X^* | U \in \tau \text{ o bé } \infty \in U \text{ i } X^* \setminus U \text{ compacte}\}$.

I quines propietats té aquesta construcció? A veure si resultarà que és una immersió topològica en un compacte? Doncs tenim les següents propietats que podeu comprovar:

1. X^* és un espai topològic compacte (...en un recobriment per oberts qualsevol n'hi haurà un que contindrà ∞...).
2. La inclusió $\iota\colon X \to X^*$ és contínua i és una immmersió topològica.
3. Si X no és compacte, aleshores $\iota(X)$ és un subconjunt dens de X^*.

I ara, sabries identificar $(0,1)^*$?

Però, ja seria la h... repera si X^* fos Hausdorff. Fixeu-vos que si X^* fos Hausdorff aleshores X també per ser homeomorf a un subespai d'un espai topològic Hausdorff. El següent objectiu és pensar en què li ha de passar a la topologia de X per a que X^* sigui Hausdorff si X ho és. És a dir, donat $x \in X \subset X^*$ i $\infty \in X^*$, que significa que existeixin oberts disjunts que els contenen només fent servir només informació de X?

Per entendre una mica quan es dóna aquesta propietat, anem a estudiar un altre exemple. Sigui $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ amb la topologia subespai, sabem que $\mathbb{Q}$ és Hausdorff però comprova que $\mathbb{Q}^*$ no ho és. La pista és la següent propietat de $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$: **tot els subconjunts compactes tenen interior buit!** No és fàcil, anem a veure els pasos. Sigui $A \subset \mathbb{Q}$ un subconjunt compacte.

- Sigui $x \notin A$, considerem el recobriment $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ on $U_n = \mathbb{Q} \cap ((-\infty, x - \frac{1}{n}) \cup (x + \frac{1}{n}, \infty))$ del subconjunt compacte A format per oberts encaixats. Fent servir que A és compacte tenim que donat $x \notin A$, existeix $N > 0$ tal que $[x - \frac{1}{N}, x + \frac{1}{N}] \cap A = \varnothing$.

- $A \subset \mathbb{Q}$ també és tancat.

- Sigui $a \in \mathrm{Int}(A)$, aleshores existeix $\epsilon > 0$ tal que $(a - \epsilon, a + \epsilon) \cap \mathbb{Q} \subset A$. De fet, com que A és tancat, també $[a - \epsilon, a + \epsilon] \cap \mathbb{Q} \subset A$.

- I finalment arribarem a contradicció. Prenem un número irracional $x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (a - \epsilon, a + \epsilon)$, pel primer punt i el tercer existeix $N > 0$ tal que $[x - \frac{1}{N}, x + \frac{1}{N}] \cap ([a - \epsilon, a + \epsilon] \cap \mathbb{Q}) = \varnothing$. Però si prenem un N prou gran podem suposar que $[x - \frac{1}{N}, x + \frac{1}{N}] \subset [a - \epsilon, a + \epsilon]$ i aleshores $[x - \frac{1}{N}, x + \frac{1}{N}] \cap \mathbb{Q} = \varnothing$, però això és impossible perquè els racionals són densos a $\mathbb{R}$!

3 Espais topològics localment compactes

A l'apartat anterior hem vist que si X és un espai topòlogic Haudorff tal que tot punt té un entorn compacte aleshores la compactificació d'Alexandroff X^* és un espai topològic compacte Hausdorff. I si no ho has vist, doncs ja ho pots provar :-)! És un si i només si?

Diem que un espai topològic és **localment compacte** si per tot $x \in X$ i per tot obert $x \in U \subset X$ existeix un entorn compacte $x \in N \subset U$.

1. Pensa un exemple d'espai topològic localment compacte.

2. Ja hem vist que $\mathbb{Q}$ no és localment compacte. I que me'n dius del conjunt de Cantor?

3. Ser localment compacte és un invariant topològic.

4. Si X és compacte, X no necessariament és localment compacte. Pensa el cas $0 \in \mathbb{Q}^*$.

4 Una petita proposició de regal

A veure si ets capaç de posar juntes les peces que calen per provar el següent:

Tot espai topològic Hausdorff localment compacte és T_3.

Al revès no és cert oi? què li passa al nostre vell amic $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$?

En aquest seminari es descriu un guió d'apunts sobre la compactificació d'Alexandroff amb una aplicació al final per veure com s'usa per demostrar fets. En aquesta entrega heu de desenvolupar un petit treball/apunts on es descriu què és i les propoietats de la secció 1 (és opcional completar la demostració del fet que els racionals no són localment compactes), i aplicant el mateix esperit a la secció 2 desenvolpeu com a mínim dos dels quatre punts que hi ha; tot de manera que un altre alumne el pogués llegir com uns apunts d'aquesta petita part de l'assignatura. A banda de les demostracions que hi falten, heu de donar-li la forma que creieu convenient.

Entrega:

1. Tots esteu donats de alta en Teams en equips que contenen el grup que us va apuntar i teniu un número d'equip assignat.

2. En els documents pdf que entregueu no hi ha de constar el vostre nom per enlloc, ha de ser anònim.

3. Aquest seminari 3 l'entregaran els grups senars. La data límit és el 9 de gener a les 12 del matí.

4. Els grups parells rebran un dels pdfs entregats i hauran de fer-ne una revisió comentada i verificar la correcció dels arguments, també amb un document anònim. El rebran el mateix dia 9 de gener i tindran de marge fins el 17 de gener a les 9 del matí.

5. Tots els documents els haureu de penjar en el canal de teams que teniu assignat.