TOPOCRAFT...

topologia producte generada amb caixetes

Natàlia Castellana

Donats dos espais mètrics (X, d_X), (Y, d_Y) hi ha vàries maneres de definir una mètrica 'compatible' a $X \times Y$.

Per exemple,

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{d_X(x_1, x_2)^2 + d_Y(y_1, y_2)^2}$$

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max(d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2))$$

Què vol dir 'compatible'? Volem que sobre els eixos $X \times \{y\}$, $\{x\} \times Y$ coincideixi amb les mètriques d_X i d_Y, que les projeccions siguin contínues ...

En el cas d'espais topològics $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ també volem dotar $X \times Y$ amb una topologia que tingui les mateixes propietats ('compatible') que en el cas d'espais mètrics.

En particular, volem que el producte d'oberts sigui obert però amb això no n'hi ha prou ja que les unions d'aquests també han de ser oberts.

Per això, definirem en $X \times Y$ una topologia mitjançant una base, però la topologia generada pels productes d'oberts.

<u>Definició</u>. Siguin (X, τ_X) i (Y, τ_Y) espais topològics. La topologia producte a $X \times Y$ és la topologia generada per

$$\mathcal{B} = \{ U \times V \mid U \in \tau_X, V \in \tau_Y \}$$

- Per a que aquesta definició tingui sentit cal comprovar que $\mathcal{B}$ compleix dues propietats:

(1) $X \times Y = \bigcup_{V \in \tau_Y} X \times V = \bigcup_{U \in \tau_X} U \times Y = \bigcup_{\substack{U \in \tau_X \\ V \in \tau_Y}} U \times V$

(2) Siguin $U_1 \times V_1, U_2 \times V_2 \in \mathcal{B}$. Cal veure que donat $(x,y) \in (U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2)$, existeixen oberts $x \in U'$, $y \in V'$ tals que

$$U' \times V' \subset (U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2).$$

Ara bé, com que $x \in U_1 \cap U_2$ i $U_1 \cap U_2 \in \tau_X$ és obert prenem $U' = U_1 \cap U_2$. També com que $y \in V_1 \cap V_2$ i $V_1 \cap V_2 \in \tau_Y$ prenem $V' = V_1 \cap V_2$.

Aleshores $(x,y) \in U' \times V' = (U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2)$

#

Així la topologia producte a $X \times Y$ és la menys fina que conté $\mathcal{B}$ i n'és base (i.e. per la qual el producte d'oberts és obert).

Així, $A \subset X \times Y$ és obert sii per tot $a \in A$ existeixen oberts $U \in \tau_X$, $V \in \tau_Y$ tals que

$$a \in U \times V \subset A.$$

PROPIETATS

(1) Les projeccions $\pi_X : X \times Y \to X$ són contínues.
$\pi_Y : X \times Y \to Y$

- Si $U \subset X$ és obert, cal veure que $\pi_X^{-1}(U)$ també ho és. Però $\pi_X^{-1}(U) = U \times Y$ que és obert per ser producte d'oberts.

El mateix argument per a que π_Y és contínua ja que $\pi_Y^{-1}(V) = X \times V$.

(2) Si $\mathcal{C}$ és una base per la topologia τ_X i $\mathcal{D}$ és una base per la topologia τ_Y aleshores

$$\mathcal{B} = \{ C \times D \mid C \in \mathcal{C} \text{ i } D \in \mathcal{D} \}$$

és una base per la topologia producte.

Per què? Sigui $A \subset X \times Y$ un obert, $a \in A$. Cal veure que existeixen $C \in \mathcal{C}$, $D \in \mathcal{D}$ tals que

$$a \in C \times D \subset A.$$

Escrivim $a = (x, y) \in A$. Sabem que existeixen oberts $U \in \tau_X$, $V \in \tau_Y$ tals que $a \in U \times V \subset A$.

Alshores $x \in \mathcal{U}$, $y \in \mathcal{V}$. Per ser $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ bases de les respectives topologies a X i Y, existeixen $C \in \mathcal{C}$ i $D \in \mathcal{D}$ tals que

$$x \in C \subset \mathcal{U} \quad \text{i} \quad y \in D \subset \mathcal{V}.$$

Per tant $a = (x,y) \in C \times D \subset \mathcal{U} \times \mathcal{V} \subset A$.

(3) Sigui Z un espai topològic. Alshores

$$f : Z \to X \times Y \text{ és contínua}$$
$$\text{sii}$$
$$\pi_X \circ f : Z \to X \text{ i } \pi_Y \circ f : Z \to Y \text{ són contínues.}$$

Si f és contínua alshores $\pi_X \circ f$, $\pi_Y \circ f$ també ho són ja que les projeccions hem vist que són contínues i la composició d'aplicacions contínues és contínua.

Ara suposem $\pi_X \circ f$ i $\pi_Y \circ f$ són contínues, volem comprovar que f també ho és. Només cal comprovar que l'antiimatge d'un obert de la base a la topologia producte és obert.

Sigui $\mathcal{U} \in \mathcal{T}_X$, $\mathcal{V} \in \mathcal{T}_Y$ oberts, alshores fixeu-vos que es compleix la següent equació per l'antiimatge d'un producte

$$f^{-1}(A \times B) = f^{-1}(A \times Y \cap X \times B) = f^{-1}(A \times Y) \cap f^{-1}(X \times B) = f^{-1}(\pi_X^{-1}(A)) \cap f^{-1}(\pi_Y^{-1}(B))$$

És a dir,

$$\tilde{f}^{-1}(U\times V) = \tilde{f}^{-1}(\pi_X^{-1}(U)) \cap \tilde{f}^{-1}(\pi_Y^{-1}(V)) =$$
$$= (\pi_X \circ f)^{-1}(U) \cap (\pi_Y \circ f)^{-1}(V)$$

Si $U \in \tau_X$, $V \in \tau_Y$ i $\pi_X \circ f$, $\pi_Y \circ f$ són contínues alshores $(\pi_X \circ f)^{-1}(U)$, $(\pi_Y \circ f)^{-1}(V)$ són obert a Z i la intersecció d'oberts és obert.

Per tant, $\tilde{f}^{-1}(U\times V)$ és obert a Z.

(4) Les projeccions $\pi_X : X\times Y \to X$, $\pi_Y : X\times Y \to Y$ són obertes.

Sigui $A \subset X\times Y$ obert, per veure que $\pi_X(A)$ és obert prenem $x \in \pi_X(A)$ qualsevol i comprovem que és un punt interior a $\pi_X(A)$.
Com que $x \in \pi_X(A)$, existeix $y \in Y$ tal que $(x,y) \in A$. Sabem que A és obert a la topologia producte, per tant existeixen $x \in U \in \tau_X$, $y \in V \in \tau_Y$ tals que $(x,y) \in U \times V \subset A$. Però alshores tenim

$$x = \pi_X(x,y) \in U = \pi_X(U\times V) \subset \pi_X(A).$$

Així x és interior a $\pi_X(A)$, $\pi_X(A)$ és obert i π_X és una aplicació oberta.

Un argument anàleg canviant el paper d'X i Y prova que π_Y és oberta també.

(5) Si tenim dues aplicacions contínues $f_1 : X_1 \to Y_1$ i $f_2 : X_2 \to Y_2$ aleshores

$$f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \longrightarrow Y_1 \times Y_2$$

també és contínua.

Per la propietat (3) només cal veure que $\pi_{Y_1} \circ (f_1 \times f_2)$ i $\pi_{Y_2}(f_1 \times f_2)$ són contínues. Ara bé

$$\pi_{Y_1} \circ (f_1 \times f_2) : X_1 \times X_2 \to Y_1 \qquad (x_1, x_2) \mapsto f_1(x_1)$$

$$\pi_{Y_2} \circ (f_1 \times f_2) : X_1 \times X_2 \to Y_2 \qquad (x_1, x_2) \mapsto f_2(x_2)$$

es poden descriure com composicions

$$f_1 \circ \pi_{X_1} : X_1 \times X_2 \longrightarrow X_1 \longrightarrow Y_1$$

$$f_2 \circ \pi_{X_2} : X_1 \times X_2 \longrightarrow X_2 \longrightarrow Y_2$$

d'aplicacions contínues.

$$\begin{tikzcd}
X_1 \times X_2 \arrow[r, "f_1 \times f_2"] \arrow[d, "\pi_{X_i}"'] \arrow[dr, phantom, "/\!/"] & Y_1 \times Y_2 \arrow[d, "\pi_{Y_i}"] \\
X_i \arrow[r, "f_i"'] & Y_i
\end{tikzcd} \qquad i = 1, 2$$

(6) L'aplicació $X \times Y \xrightarrow{t} Y \times X$, $t(x,y) = (y,x)$ és un homeomorfisme i

$$X \times \{*\} \xrightarrow{\pi_X} X \text{ també}$$

(fixeu-vos que $\pi_X : X \times \{*\} \to X$ és contínua bijectiva i oberta per les propietats que hem vist).

Com es relacionen la topologia producte i la topologia subespai? És a dir, donats $A \subset X$, $B \subset Y$ on X, Y espais topològics, podem considerar:

(1) A, B són subespais i $A \times B$ és un producte de subespais

(2) $A \times B$ és un subespai del producte

Són el mateix?

Proposició Siguin X, Y espais topològics i $A \subset X$, $B \subset Y$. Considerem

(a) La topologia subespai a $A \times B \subset X \times Y$
(b) La topologia producte $A \times B$ on $A \subset X$ i $B \subset Y$ són considerats subespais.

Les dues topologies són la mateixa.

Demostració:

En el cas (a), una base de la topologia subespai s'obté fent intersecció amb $A \times B$ d'una base de la topologia producte. Així obtenim

$$\mathcal{B}_1 = \{ (U \times V) \cap (A \times B) \mid U \in \mathcal{T}_X, V \in \mathcal{T}_Y \}$$

En el cas (b), una base de la topologia producte s'obté amb els productes d'oberts a A i B com subespais, així

$$\mathcal{B}_2 = \{ (U \cap A) \times (V \cap B) \mid U \in \mathcal{T}_X, V \in \mathcal{T}_Y \}$$

Ara bé $(U \times V) \cap (A \times B) = (U \cap A) \times (V \cap B)$.
Per tant $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$.

#

EXEMPLES

(0) Si (X, d_X), (Y, d_Y) són espais mètrics, aleshores la topologia producte és induïda per la mètrica

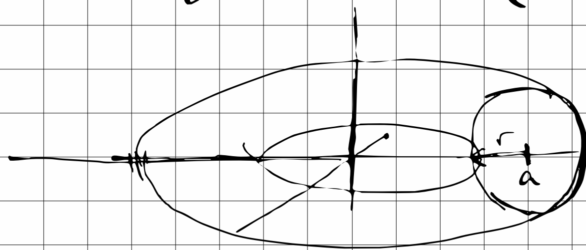
$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max \{ d(x_1, y_1), d(x_2, y_2) \}$$

ja que les boles són productes de boles en aquest cas.

Així, $\mathbb{R}^n$ amb la mètrica euclidiana dóna lloc a la topologia producte $\underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n)}$.

(1) Recordem el tor $T \subset \mathbb{R}^3$ definit com una superfície de revolució, obtinguda al girar un cercle al voltant de l'eix OZ; sigui $a > r$

$$T \cong \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left(\sqrt{x^2+y^2} - a\right)^2 + z^2 = r^2 \right\}$$



T es pot parametritzar amb dos angles, l'interior i el de rotació al voltant eix OZ.

$$S^1 \times S^1 \xrightarrow{f} T \subset \mathbb{R}^3$$

$$((\cos\theta, \sin\theta), (\cos\varphi, \sin\varphi)) \longmapsto ((a + r\cos\theta)\cos\varphi,\ (a + r\cos\theta)\sin\varphi,\ r\sin\theta)$$

$\theta, \varphi \in [0, 2\pi)$

En coordenades s'expressa

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^3 \\ ((x_1,y_1),(x_2,y_2)) & \longmapsto & ((a+rx_1)x_2, (a+rx_1)y_2, ry_1) \\ \uparrow i & & \cup \\ S^1 \times S^1 & \xrightarrow[f']{} & f(S^1 \times S^1) \\ & & \parallel \\ & & T \end{array}$$

La inversa f^{-1} ve donada per

$$f^{-1}(x,y,z) = \left(\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}-a}{r}, \frac{z}{r}\right), \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right)$$

a $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

Les dues aplicacions són contínues i inverses a la imatge de f. Així f' és un homeomorfisme.

El tor té una doble vida: com a espai topològic producte $S^1 \times S^1$ o com a subespai de $\mathbb{R}^3$.

Preguntes ... $A \subset X$, $B \subset Y$

- Com es relacionen $Cl(A \times B)$, $Cl_X(A)$, $Cl_Y(B)$? I els interiors?

- Si X, Y tenen la propietat Hausdorff, també la té $X \times Y$?

- Sigui $\mathbb{R}_{cf} = (\mathbb{R}, \text{cofinita})$, i $(\mathbb{R}^2, \text{cofinita})$ quina relació hi ha entre $\mathbb{R}_{cf} \times \mathbb{R}_{cf}$ i $\mathbb{R}^2_{cf}$?