QUE AIXEQUIN LA MÀ TOTS ELS SUBCONJUNTS CONNEXOS DE $\mathbb{R}$

Natàlia Castellana

De la mateixa manera que vam caracteritzar els subconjunts compactes de $\mathbb{R}$ amb el test Heine-Borel de dues preguntes, ara toca fer el mateix amb els subconjunts connexos.

Quins són els subconjunts connexos de $\mathbb{R}$?

Primer recordem una definició i dos fets:

(1) <u>Definició</u> $I \subset \mathbb{R}$ és un interval si donats $x < y \in I$ i $c \in \mathbb{R}$ tal que $x < c < y$ aleshores $c \in I$.

(2) Tot subconjunt de $\mathbb{R}$ acotat superiorment té un suprem (= mínima de les cotes superiors)

(3) Si $x, y \in \mathbb{R}$ amb $x < y$, existeix $z \in \mathbb{R}$ amb $x < z < y$.

<u>OBJECTIU</u>: Un subconjunt de $\mathbb{R}$ és connex si i només si és un interval.

Una implicació és clara: si $A \subset \mathbb{R}$ no és un interval aleshores <u>no</u> és connex. Si A no és un interval, existeixen $x, y \in A$, $z \notin A$ amb $x < z < y$. Per tant $A \subset (-\infty, z) \cup (z, +\infty)$.

TEOREMA (1) Siguin $a<b\in\mathbb{R}$, aleshores $[a,b]$ és connex.

(2) $\mathbb{R}$ és connex.

Demostració Primer observem que (1) implica (2).

Suposem que $\mathbb{R}$ no és connex, aleshores podem escriure $\mathbb{R}=\mathcal{U}\cup\mathcal{V}$, amb $\mathcal{U},\mathcal{V}\neq\emptyset,\mathbb{R}$, $\mathcal{U}\cap\mathcal{V}=\emptyset$. Prenem $u\in\mathcal{U}$, $v\in\mathcal{V}$ i suposem $u<v$ (sense pèrdua de generalitat).

Considerem $\mathcal{U}'=\mathcal{U}\cap[u,v]$
$\mathcal{V}'=\mathcal{V}\cap[u,v]$. Es compleix que $\mathcal{U}',\mathcal{V}'\neq\emptyset$, $\mathcal{U}'\cup\mathcal{V}'=[u,v]$ i $\mathcal{U}'\cap\mathcal{V}'=\emptyset$.

Per tant $[u,v]$ no és connex.

Anem a provar que un interval de la forma $[a,b]\subset\mathbb{R}$, $a<b\in\mathbb{R}$ és connex. Suposem $[a,b]\subset\mathcal{U}\cup\mathcal{V}$ on $\mathcal{U}\cap[a,b]\neq\emptyset$
$\mathcal{V}\cap[a,b]\neq\emptyset$, $\mathcal{U}\cap\mathcal{V}\cap[a,b]=\emptyset$

Sense pèrdua de generalitat, suposem $a\in\mathcal{U}$ i $b\in\mathcal{V}$. Si $b\in\mathcal{U}$ aleshores prenem $b'\in\mathcal{V}\cap[a,b]$ i considerem l'interval $[a,b']\subset[a,b]$.

Considerem $\mathcal{U}'=[a,b]\cap\mathcal{U}$ i $c=\sup(\mathcal{U}')$,
$\mathcal{V}'=[a,b]\cap\mathcal{V}$
fixeu-vos que $a\leq c\leq b$. Veurem que $c\notin\mathcal{U}'$ i $c\in\mathcal{V}'$ arribant a contradicció.

- Suposem $c \in V'$. Sabem $a \notin V'$, $V' \subset [a,b]$ és obert, aleshores existeix $d \in \mathbb{R}$ tal que $a < d < c$, és a dir, $(d,c] \subset V'$. Però si això passa, d és una cota superior per U' i $d < c$! Per tant $c \notin V'$.

- Suposem doncs $c \in U'$. Recordeu que $U' \subset [a,b]$ és obert a $[a,b]$ i $b \notin U'$. Per tant existeix $d \in \mathbb{R}$ amb $[c,d) \subset U'$. Però aleshores qualsevol $e \in (c,d)$, $e \in U'$, $e > c$ i c no és doncs cota superior de U'.

Així $c \notin U' \cup V' = [a,b]$ i $a \leq c \leq b$! Contradicció!

$\#$

<u>COROL·LARI</u> Un subconjunt $A \subset \mathbb{R}$ és connex si i només si és un interval.

<u>Demostració</u> Ja hem observat abans que si A no és un interval aleshores no és connex.

Hem vist que $\mathbb{R}$ és connex i $[a,b] \subset \mathbb{R}$ també. Però recordeu que si $a < b \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{R} \cong (a,b) \cong (a,+\infty) \cong (-\infty,a)$$

A més,
$$(a,b) \subset [a,b) \subset Cl((a,b)) = [a,b]$$
$$(a,b) \subset (a,b] \subset Cl((a,b)) = [a,b]$$

Per tant $[a,b)$, $(a,b]$, $(-\infty,a]$, $[a,+\infty)$ també.

$\#$

Ara de cop i volta tenim un munt d'exemples.

<u>Corol·lari</u> $\mathbb{R}^n$, $[0,1]^n$ són connexos.
Per tant, el pla projectiu, S^1, el tor, l'ampolla de Klein són connexos, banda de Moëbius.

<u>Corol·lari</u> L'esfera $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ és connexa.

<u>Demostració</u> Sigui $PN = \{(0,0,\dots,0,1)\} \subset S^n$.

Sabem que $S^n - PN \cong \mathbb{R}^n$ (projecció estereogràfica) i per tant $S^n - PN$ és connex.
Ara bé,
$PN \in Cl(S^n - PN)$ (tota bola de radi $\varepsilon > 0$ centrada a PN conté punts de l'esfera)

De fet, $Cl(S^n - \{PN\}) = S^n$, aleshores S^n és connex.

$\#$

Fixeu-vos que ara podem donar exemples d'espais connexos amb interior no connex.

$X = Cl(B(0,1)) \cup Cl(B(2,1)) \subset \mathbb{R}^2$ és connex per ser unió de connexos amb intersecció no buida.

Però $Int(X) = B(0,1) \cup B(2,1)$ que és una unió disjunta de dos oberts no buits.

Arem a veure una manera d'usar la connexitat per 'distingir' espais topològics.

Arem a veure que $\mathbb{R} \not\cong \mathbb{R}^n$ si $n>1$. Suposem que hi ha un homeomorfisme $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Com que f és bijectiva, donat $x \in \mathbb{R}$ tenim una aplicació contínua

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}\setminus\{x\} \arrow[r, "f'"] \arrow[d, hook, "i_1"] & \mathbb{R}^n \setminus \{f(x)\} \arrow[r, "(f')^{-1}"] \arrow[d, hook, "i_2"] & \mathbb{R}\setminus\{x\} \arrow[d, hook, "i_1"] \\
\mathbb{R} \arrow[r, "f"'] & \mathbb{R}^n \arrow[r, "f^{-1}"'] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

Ara bé f' és contínua també amb les topologies subespais i $(f')^{-1}$ també. Per tant,

$$\mathbb{R}\setminus\{x\} \cong \mathbb{R}^n \setminus \{f(x)\}$$

però $\mathbb{R}\setminus\{x\} = (-\infty, x) \cup (x, +\infty)$ és disconnex

i $\mathbb{R}^n \setminus \{f(x)\} \cong \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \cong S^{n-1} \times (0, +\infty)$ connex si $n>1$

Ummm ... i qui ho ha dit que $B(a,r)$ a $\mathbb{R}^n$ és connex? Si $r>0$ totes les boles són homeomorfes, i a un "cub obert"

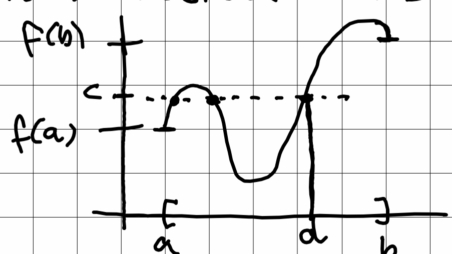
$$B(a,r) \cong B(0,1) \cong (0,1)^n$$

i $(0,1)^n$ és connex ja que $(0,1)$ ho és.

BINGO!

Tornem a fer un flashback i demostrem Bolzano en un plis-plas! Comencem amb el teorema del valor mig.

<u>TEOREMA DEL VALOR MIG</u>: Sigui $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua, $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) < c < f(b)$, aleshores existeix $d \in [a,b]$ amb $f(d) = c$



<u>Demostració</u> Com que $[a,b]$ és connex i f és contínua, $f([a,b]) \subset \mathbb{R}$ és també connex. Ara bé, sabem que aleshores $f([a,b]) \subset \mathbb{R}$ és un interval! Si $c \in \mathbb{R}$ amb

$$f(a) < c < f(b)$$

aleshores $c \in f([a,b])$, existeix $d \in [a,b]$ amb $f(d) = c$.

<u>Nota</u> A més, com que $[a,b]$ és compacte#, existeixen $m, M \in \mathbb{R}$, $f([a,b]) = [m, M] \subset \mathbb{R}$.

COROL·LARI (Bolzano) Sigui $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ contínua amb $f(a)f(b)\leq 0$, aleshores existeix $c\in[a,b]$ amb $f(c)=0$.

Demostració Només cal observar que si $f(a)f(b)\leq 0$ alleshores $f(a)\leq 0\leq f(b)$ o al revés $f(b)\leq 0\leq f(a)$. #

Així els ingredients principals són

- $[a,b]$ és connex
- la imatge d'un connex per una aplicació contínua és connex.
- els connexos a $\mathbb{R}$ són els intervals.

TEOREMA Sigui $f:X\to\mathbb{R}$ una aplicació contínua on X és un espai topològic connex. Si $p,q\in f(X)$ i $p\leq r\leq q$, aleshores $r\in f(X)$.

Anem a veure altres corol·laris importants d'aquesta història.

• TEOREMA DEL PUNT FIX DE BROUWER ($n=1$)

Si $f:[0,1]\to[0,1]$ contínua, alleshores existeix $c\in[0,1]$ amb $f(c)=c$.

Demostració Considerem $g(x) = f(x) - x$.

Alashores $g: [0,1] \longrightarrow [-1,1]$ és contínua.
A més,

$$g(0) \geq 0 \text{ ja que } f(0) \geq 0$$

$$g(1) \leq 0 \text{ ja que } f(1) \leq 1.$$

Per tant, existeix $c \in [0,1]$ amb $g(c) = 0$.
És a dir, $f(c) = c$.

\#

El teorema del punt fix de Brouwer és cert en dimensions superiors

TEOREMA DEL PUNT FIX DE BROUWER (1912)
Sigui B^n una bola tancada de dimensió n.
Tota aplicació contínua $f: B^n \longrightarrow B^n$ té un punt fix, és a dir, existeix $x \in B^n$ amb $f(x) = x$.

Observació $B^n \cong [0,1]^n$, per tant, el resultat també diu que tota aplicació contínua $f: [0,1]^n \longrightarrow [0,1]^n$ té un punt fix.

La demostració de Brouwer provava l'existència del punt fix però no és constructiva.
Utilitza eines de la topologia algebraica i la teoria d'homotopia (teoria de deformacions d'aplicacions contínues)

Més tard, Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz (1930) van presentar una demostració constructiva usant un lemma combinatorial sobre triangulacions d'un triangle, el bonic Lemma d'Sperner (1929) provat per Emanuel Sperner.

I ara, un dels meus teoremes preferits (Top 10)

TEOREMA DE BORSUK-ULAM (en dimensió 2)

Sigui $f: S^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicació contínua, alshores existeix $c \in S^2$ tal que $f(c) = f(-c)$.

Demostració. Sigui $g(x) = f(x) - f(-x)$. És contínua també. A més, $g(-x) = -g(x)$ ja que

$$g(-x) = f(-x) - f(x) = -(f(x) - f(-x)) = -g(x)$$

Sabem que S^2 és connex, per tant $g(S^2) \subset \mathbb{R}$ és connex.

Prenem $x \in S^2$ qualsevol. Si $g(x) = 0$ alshores ja hem trobat el punt $x \in S^2$ que buscàvem

$$f(x) - f(-x) = 0.$$

Sinó, $g(x)g(-x) = -g(x)^2 < 0$. Per tant, $g(x)$ i $g(-x)$ prenent valors de signe contrari.

Com que $g(S^2) \subset \mathbb{R}$ és un interval, tenim que $0 \in g(S^2)$ i per tant, existeix $y \in S^2$ amb $g(y) = 0$. És a dir,

$$f(y) = f(-y).$$

#

• Pregunta: és cert per $f: S^n \longrightarrow \mathbb{R}$ $n \geq 1$?

- En particular ens diu que <u>no</u> hi ha cap aplicació injectiva i contínua de S^2 a $\mathbb{R}$.

- Si considerem la superfície del planeta com homeomorf a S^2 i la temperatura com una aplicació contínua, aleshores en cada instant de temps hi ha dos punts antipodals amb la mateixa temperatura.

Com passa amb el teorema del punt fix de Brouwer té formulacions en dimensions superiors, totes elles espectaculars!

<u>TEOREMA DE BORSUK-ULAM</u> $n \geq 1$

(1) Sigui $f: S^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicació contínua, aleshores existeix $x \in S^n$ tal que $f(x) = f(-x)$.

(2) No existeix cap aplicació contínua $f: S^n \to S^{n-1}$ tal que $f(-x) = -f(x)$ per tot $x \in S^n$.

(3) Sigui $f: S^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicació contínua amb $f(-x) = -f(x)$ per tot $x \in S^n$, aleshores existeix $x \in S^n$ amb $f(x) = 0$.

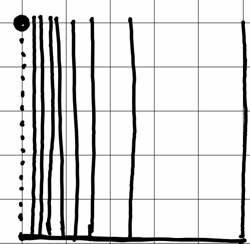
(4) (Lyusternik-Schnirelman) Si $\{F_i\}_{i=1}^{n+1}$ és un recobriment de S^n amb $n+1$ subconjunts tancats, aleshores almenys un d'ells conté una parella de punts antipodals.

(5) El mateix per un recobriment per oberts.

Ara que ja hem ampliat la llista de espais topològics connexos coneguts, anem a veure ens exemples més 'divertits'.

(1) LA PINTA i LA PUÇA (O EL POLL :-c)

$$D = \underbrace{\left([0,1]\times\{0\}\right)\cup\left(\bigcup_{n\geq 1}\left(\{1/n\}\times[0,1]\right)\right)}_{A}\cup\underbrace{\{(0,1)\}}_{B}$$



Fixeu-vos que A és connex ja que és una unió de connexos amb intersecció no buida

$$A_n = \left([0,1]\times\{0\}\right)\cup\left(\{1/n\}\times[0,1]\right)$$

$$A = \bigcup_{n\geq 1} A_n$$

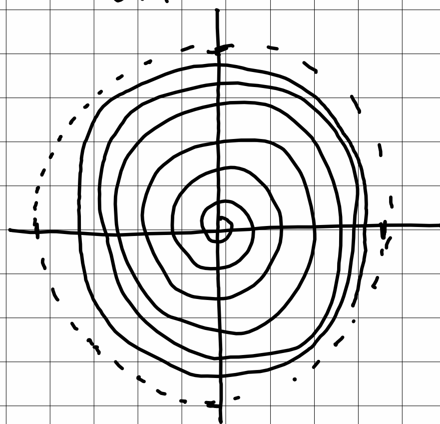
I $(0,1)\in Cl(A)$ ja que per tot $\varepsilon>0$, hi ha punts de la forma $(1/n,1)$ a distància de $(0,1)$ més petita que ε.

Per tant D és connex

$$A \subset D \subset Cl(A).$$

(2) EL REMOLÍ DEL TOPÒLEG

$A = \left\{ \left(\frac{\theta}{\theta+1}, \theta \right) \mid \theta \in (0,+\infty) \right\}$ en coordenades polars



A és connex ja que és la imatge de $(0,+\infty)$ que és connex per l'aplicació

$$f : (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\theta \longmapsto \left(\frac{\theta}{\theta+1} \cos\theta, \frac{\theta}{\theta+1} \sin\theta \right)$$

Aleshores $Cl(A)$ també és connex, així $S^1 \cup A$ és un subconjunt de $\mathbb{R}^2$.

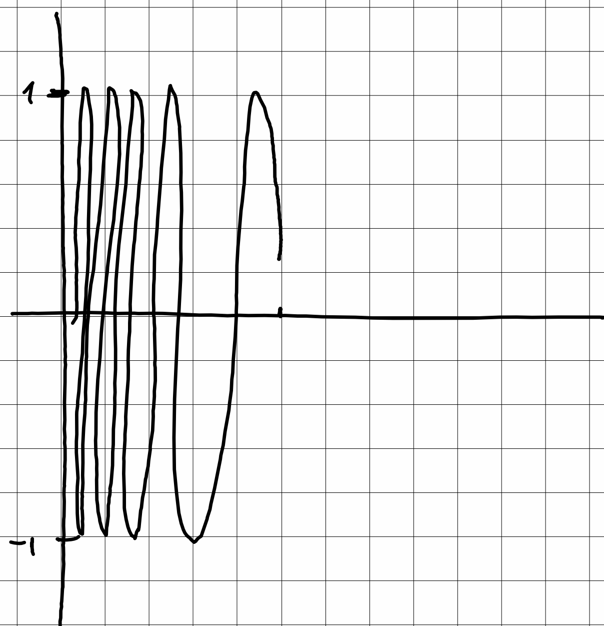
(3) EL SINUS DEL TOPÒLEG

$$T = \underbrace{\{(x, \sin(\tfrac{1}{x})) \mid 0 < x \leq 1\}}_{A} \cup \underbrace{\{(0,y) \mid -1 \leq y \leq 1\}}_{B}$$

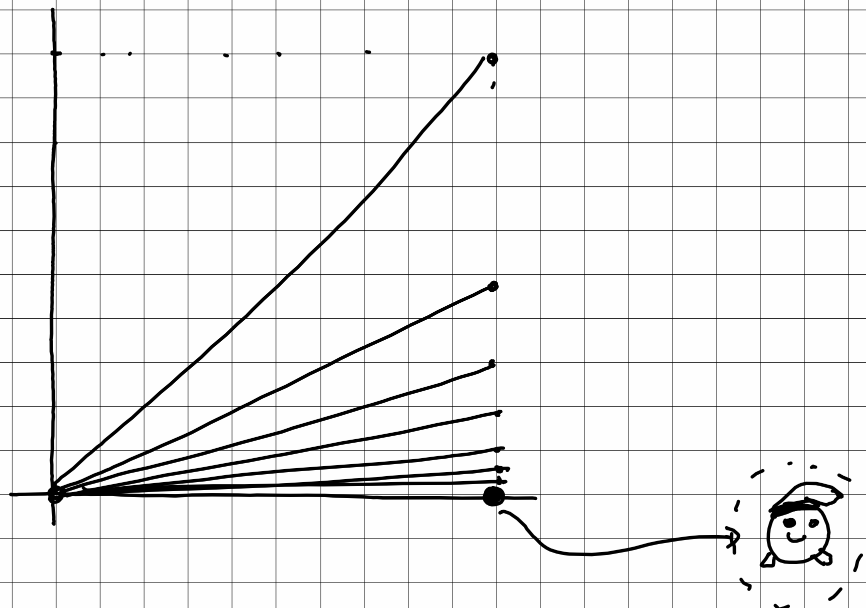
A és connex ja que és la imatge de $(0,1]$ per

$$\begin{aligned} f: (0,1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto (x, \sin(\tfrac{1}{x})) \end{aligned}$$ contínua.

Com que $B \subset Cl(A)$, T és connex.



(4) EL CAGATIÓ



$$X = \bigcup_{n\geq 1} \underbrace{\left\{ \left(x, \frac{x}{n}\right) \,\middle|\, 0 \leq x \leq 1 \right\}}_{L_n} \cup \{(0,1)\}$$

$\bigcup_{n\geq 1} L_n$ és connex ja que és una unió de connexos (cada $L_n \cong [0,1]$) amb intersecció no buida $(0,0) \in \bigcap_{n\geq 1} L_n$.

A més, $(0,1) \in Cl\left(\bigcup_{n\geq 1} L_n\right)$