LA VIDA SECRETA DELS OBERTS

Setembre 2021

Natàlia Castellana

ON SOM?

Sigui (X,d) un espai mètric. Utilitzant la mètrica podem definir una col·lecció molt especial de subconjunts: els oberts.

$$\mathcal{O} = \{ U \subset X \mid U \text{ és obert} \}$$

on $U \subset X$ és obert si per tot $x \in U$ existeix $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \subset U$.

QUINES PROPIETATS TÉ AQUESTA COL·LECCIÓ RESPECTE LES CONSTRUCCIONS DE TEORIA DE CONJUNTS?

És a dir, aplicacions o funcions, unions, interseccions i complementaris.

(0) Aplicacions: aquesta col·lecció ens defineix la continuïtat de les aplicacions. Una aplicació $f: X \to Y$ entre espais mètrics és contínua sii la antiimatge d'un obert és obert.

(1) $\mathcal{O}$ és una col·lecció no buida: $\emptyset \in \mathcal{O}$ i també $X \in \mathcal{O}$.

(2) Unions: sigui $\{U_i\}_{i \in I}$ una col·lecció de subconjunts d'X, $U_i \subset X$, amb $U_i \in \mathcal{O}$. És a dir, una col·lecció d'oberts d'X arbitrària.

És cert que $\bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i \in \mathcal{O}$, també és obert? Anem a comprovar-ho amb la definició:

Sigui $x \in \bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i \subset X$, aleshores existeix $j \in I$ tal que $x \in \mathcal{U}_j$. Com que $\mathcal{U}_j$ és obert tenim que existeix $\delta > 0$ tal que $B(x,\delta) \subset \mathcal{U}_j$. Però aleshores

$$x \in B(x,\delta) \subset \mathcal{U}_j \subset \bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i .$$

Per tant, les unions arbitràries d'oberts són obertes.

(3) <u>Interseccions</u>: sigui altre cop $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ una col·lecció de subconjunts oberts d'X. És cert que $\bigcap_{i\in I} \mathcal{U}_i$ és obert? Intentem comprovar la definició.

Sigui $x \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{U}_i$. Aleshores $x \in \mathcal{U}_i$ per tot $i \in I$. Com que $\mathcal{U}_i$ són tots oberts, existeixen $\delta_i > 0$ tals que $x \in B(x,\delta_i) \subset \mathcal{U}_i$. Però volem trobar $\delta > 0$ tal que ens serveix per a tots, és a dir $B(x,\delta) \subset \mathcal{U}_i$ per tot $i \in I$.

Si $|I|$ és finit aleshores $\delta = \min\{\delta_i \mid i \in I\}$ i tenim $x \in B(x,\delta) \subset B(x,\delta_i)$ per tot $i \in I$ i aleshores $B(x,\delta) \subset \bigcap_{i\in I} \mathcal{U}_i$.

Les interseccions finites d'oberts són obertes.

Però si I no és finit, el conjunt $\{\delta_i \mid i \in I\} \subset \mathbb{R}^+$ pot no tenir mínim. I si considerem l'ínfim podria ser zero!!!

Vegem el següent cas a $\mathbb{R}$ amb la mètrica del valor absolut.

$$B(0, \tfrac{1}{n}) = (-1/n, 1/n) \text{ és obert a } \mathbb{R}$$

però $\bigcap_{n=1}^{\infty} B(-1/n, 1/n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (-1/n, 1/n) = \{0\}$

que no ho és.

(4) Complementaris: és cert que el complementari d'un obert és obert? Ja veieu que no oi?

Si prenem $(0,+\infty) \subset \mathbb{R}$ amb la mètrica usual del valor absolut, $\mathbb{R} \setminus (0,+\infty) = (-\infty, 0]$ i no és obert. Ja que $0 \in (-\infty, 0]$ i tota bola $(-\delta, \delta) \ni 0$, conté nombres reals estrictament positius, $\delta/2 > 0$.

(5) "Quants" en tenim? Fixeu-vos que les boles $B(x,r)$ són oberts com ja sabem de la lliçó anterior. Però a més, les boles ens permeten separar punts. Donats $x \neq y \in X$, existeixen $r_1, r_2 > 0$ tals que

$$B(x, r_1) \cap B(y, r_2) = \emptyset$$

Sigui $d = d(x,y) > 0$ ja que $x \neq y$. Prenem $r_1 = r_2 = d/3$. Vegem que $B(x,r_1) \cap B(y,r_2) = \emptyset$. Si $z \in B(x,r_1) \cap B(y,r_2)$, alshores tindríem
$$d = d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z) < d/3 + d/3 = 2d/3 < d \;!!!$$

- QUÈ HEM APRÈS? Donat un espai mètric (X,d) podem considerar la col·lecció dels seus subconjunts oberts. Aquesta satisfà les següents propietats

(1) $\emptyset$, X són oberts

(2) Les unions arbitràries d'oberts són obertes.

(3) Les interseccions finites d'oberts són obertes.

(4) Si $x \neq y \in X$ aleshores existeixen oberts (boles) $U, V \subset X$ tals que $x \in U$, $y \in V$ i $U \cap V = \emptyset$.

(5) El complementari d'un obert no té perquè ser obert.

PER PENSAR:

(1) Sigui X un conjunt qualsevol amb la mètrica discreta. Descriu la col·lecció dels seus subconjunts oberts.

(2) Sigui (X,d) un espai mètric, i $\lambda>0$. Considerem ara

$$d_\lambda : X\times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

amb $d_\lambda(x_1,x_2) = \lambda d(x_1,x_2)$.

Com varia la col·lecció d'oberts de (X,d_λ) respecte la de (X,d).

(3) Si (X,d_X) i (Y,d_Y) són espais mètrics. És $X\times Y$ un espai mètric?

- Penseu en $\mathbb{R}^2$ a partir d'$\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2\cong \mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

(4) Sigui (X,d) un espai mètric. Considerem

$\bar{d} : X\times X \to \mathbb{R}$ com $\bar{d}(x,y) = \min\{d(x,y), 1\}$.

Com varia la col·lecció d'oberts d'$(X,\bar{d})$ respecte (X,d)?