1. [3 punts] Sigui $X = \mathbb{Z}$. Definim els següents subconjunts

$$U_n = \begin{cases} \{n\} & n \text{ senar} \\ \{n-1, n, n+1\} & n \text{ parell} \end{cases}$$

i definim la família $\mathcal{B} = \{U_n | n \in \mathbb{Z}\}$.

(a) Proveu que la família τ formada per tots els subconjunts de X que es poden escriure com unions d'elements de $\mathcal{B}$ és una topologia.

(b) Donats enters $n < m$, definim $I_{n,m} = \{n, n+1, \dots, m\}$, calculeu $\mathrm{Int}(I_{n,m})$, $\mathrm{Cl}(I_{n,m})$ i $\partial I_{n,m}$.

(c) Sigui $f_k\colon X \to X$ definida com $f_k(x) = x+k$, per a quins valors de k és f_k un homeomorfisme?

Solució:

(a) Cal comprovar que es compleixin dues condicions:

- X és la unió de tots els $U_n \in \mathcal{B}$ ja que

$$\mathbb{Z} = \bigcup_{n \,\text{parell}} \{n-1, n, n+1\} = \bigcup_{n \,\text{parell}} U_n \subset \bigcup_{U_n \in \mathcal{B}} U_n.$$

- Sigui $x \in U_n \cap U_m$. Cal veure que existeix U_k amb $x \in U_k \subset U_n \cap U_m$. Tenim les següents possibilitats:
  i. $n \leq m$ senars. Aleshores si la intersecció és no buida tenim que $n = m$ aleshores la intersecció és $\{n\} = U_n$.
  ii. n senar i m parell. Aleshores si la intersecció és diferent del buit tenim que $n = m-1$ o $n = m+1$ i per tant és del tipus U_n.
  iii. $n \leq m$ parells. Aleshores si la intersecció és no buida tenim que o bé $n = m$ o $n = m-2$ o $n = m+2$. En aquests casos la intersecció és U_n, $\{m-1\} = U_{m-1}$ o $\{m+1\} = U_{m+1}$.

Amb aquestes dues condicions vam veure a teoria que la família τ és tancada per interseccions finites, i que recobreix X, i per tant τ és una topologia en $\mathbb{Z}$.

(b) Observeu que si k és senar, aleshores és interior a qualsevol sunconjunt que el contingui. Si k és parell, aleshores serà interior a un conjunt si $k-1$ i $k+1$ també pertanyen al conjunt. Farem casos:

- Si n i m són senars, aleshores $I_{n,m} = \cup_{n \leq i \leq m} U_i$ és obert, i $\mathrm{Int}(I_{n,m}) = I_{n,m}$. $I_{n,m}$ no és tancat ja que el complementari conté $n-1$ i $m+1$ que són parells però no U_{n-1} ni U_{m+1}. El tancat més petit que conté $I_{n,m}$ és $\{n-1, n, \dots, m, m+1\}$. Els punts adherents que cal afegir són $n-1$ i $m+1$. La frontera és $\{n-1, m+1\}$.
- Si n i m són parells, aleshores per l'argument anterior tenim que n i m no són interiors i $I_{n,m}$ no és obert. L'interior és l'obert més gran contingut a $I_{n,m}$ que en aquest cas és $\mathrm{Int}(I_{n,m}) = \{n+1, \dots, m-1\}$. El complementari de $I_{n,m}$ és obert, i per tant $\mathrm{Cl}(I_{n,m}) = I_{n,m}$. En aquest cas la frontera és $\{n, m\}$.
- Si n és senar i m és parell aleshores fent servir els arguments anteriors tenim que $\mathrm{Int}(I_{n,m}) = \{n, \dots, m-1\}$, $\mathrm{Cl}(I_{n,m}) = \{n+1, \dots, m\}$, i $\partial I_{n,m} = \{n+1, m\}$.

- Si n és parell i m és senar aleshores fent servir els arguments anteriors tenim que $\mathrm{Int}(I_{n,m}) = \{n+1, \ldots, m\}$, $\mathrm{Cl}(I_{n,m}) = \{n, \ldots, m+1\}$, i $\partial I_{n,m} = \{n, m+1\}$.

Observeu que si k és senar, aleshores és interior a qualsevol sunconjunt que el contingui.

(c) L'aplicació f_k és bijectiva amb inversa $f_k^{-1}(x) = x - k = f_{-k}(x)$. Per comprovar que l'aplicació f_k és contínua només cal veure que l'antiimatge d'un obert de la base és obert. Si $k = 2l$ és parell tenim que

$$f_k^{-1}(U_{2n+1}) = f_k^{-1}(\{2n+1\}) = \{2(n-l)+1\} = U_{2(n-l)+1}$$

i

$$f_k^{-1}(U_{2n}) = f_k^{-1}(\{2n-1, 2n, 2n+1\}) = \{2(n-l)-1, 2(n-l), 2(n-l)+1\} = U_{2(n-l)}.$$

El mateix argument demostra que $f_{-k} = f_k^{-1}$ és contínua i per tant és homeomorfisme.

Si k és senar, $f_k^{-1}(U_1) = f_k^{-1}(\{1\}) = \{1-k\}$, i com que $1-k$ és parell, no és obert. Per tant, no és contínua.

2. [2 punts] Sigui X un espai topològic i $A \subset X$. Diem que A és un tancat regular si $A = \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(A))$.

(a) Proveu que si $U \subset X$ és obert, aleshores $B = \mathrm{Cl}(U)$ és un tancat regular.

(b) Siguin $A, B \subset X$ tals que A és un tancat regular. Proveu que si $\partial A \cap \mathrm{Int}(B) \neq \emptyset$ aleshores $\mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B) \neq \emptyset$.

Solució:

(a) Observeu que $\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(B)) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(U)))) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(U)) = B$ per un exercici de la llista. Però anem a provar que $\mathrm{Cl}(U) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(U)))$ amb doble inclusió.

De la inclusió $U \subset \mathrm{Cl}(U)$, tenim que $U \subset \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(U))$ ja que U és obert. I per tant aplicant la clausura a la inclusió tenim $\mathrm{Cl}(U) \subset \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(U)))$.

D'altra banda $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(U)) \subset \mathrm{Cl}(U)$, i aplicant la clausura a la inclusió tenim finalment $\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(U))) \subset \mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}(U)) = \mathrm{Cl}(U)$.

(b) Sigui $x \in \partial A \cap \mathrm{Int}(B)$. Com que $x \in \mathrm{Int}(B)$, existeix $x \in V \subset B$ obert. Com que $x \in \partial A$ tenim que $x \in \mathrm{Cl}(A) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(A))$. Per tant, $V \cap \mathrm{Int}(A) \neq \emptyset$. Tots els punts de $V \cap \mathrm{Int}(A) \subset V$ són interiors a B. Aleshores $\mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B) \neq \emptyset$.

Una altra manera de resoldre-ho és la següent. Suposem que $\mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B) = \emptyset$, i provarem que $\partial A \cap \mathrm{Int}(B) = \emptyset$. Aleshores $\mathrm{Int}(B) \subset X \setminus \mathrm{Int}(A)$. Per tant, està contingut a l'interior, és a dir, $\mathrm{Int}(B) \subset \mathrm{Int}(X \setminus \mathrm{Int}(A)) = X \setminus \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(A)) = X \setminus A \subset X \setminus \partial A$ ja que A és tancat ($\partial A \subset A$).

3. [2 punts] Sigui X un espai topològic i $A \subset X$. Considerem A amb la topologia subespai.

(a) Proveu que $K \subset A$ és tancat si i només si existeix $L \subset X$ tancat tal que $K = A \cap L$.

(b) Donat $D \subset A$, sigui $\mathrm{Cl}_A(D)$ la clausura com a subconjunt d' A i $\mathrm{Cl}_X(D)$ com a subconjunt d'X. Proveu que $\mathrm{Cl}_A(D) = \mathrm{Cl}_X(D) \cap A$.

(c) Sigui $D \subset A$ un subconjunt dens. Proveu que si A és dens a X, aleshores D també és dens a X.

Solució:

(a) Observeu que si K és un tancat a X aleshores $X \setminus K = U$ és obert, i per tant, tenim $A \cap K = A \cap (X \setminus U) = A \setminus (A \cap U)$ on $A \cap U$ és un obert a la topologia subespai. Així $A \cap K$ és tancat a la topologia subespai.

Suposem que $K \subset A$ és tancat en A. Aleshores $A \setminus K$ és obert, i existeix $U \subset X$ obert tal que $A \setminus K = A \cap U$. Aleshores $K = A \setminus (A \setminus K) = A \cap (X \setminus U)$.

(b) Com que $D \subset \mathrm{Cl}_X(D) \cap A$ i $\mathrm{Cl}_X(D) \cap A$ és tancat en A ja que $\mathrm{Cl}_X(D)$ és tancat en X, tenim que $\mathrm{Cl}_A(D) \subset \mathrm{Cl}_X(D) \cap A$. Ara, $\mathrm{Cl}_A(D)$ és tancat a la topologia subespai, i existeix un tancat $K \subset X$ tal que $\mathrm{Cl}_A(D) = A \cap K$. Aleshores $D \subset K$ i per tant $\mathrm{Cl}_X(D) \subset K$. Per tant, $\mathrm{Cl}_X(D) \cap A \subset K \cap A = \mathrm{Cl}_A(D)$.

(c) Com que A és dens en X i D dens en A tenim $\mathrm{Cl}_X(A) = X$ i $\mathrm{Cl}_A(D) = A$. Volem veure que $\mathrm{Cl}_X(D) = X$. Sabem que $A = \mathrm{Cl}_A(D) = \mathrm{Cl}_X(D) \cap A$. Per tant $A \subset \mathrm{Cl}_X(D)$. Aleshores com que $\mathrm{Cl}_X(D)$ és tancat, $X = \mathrm{Cl}_X(A) \subset \mathrm{Cl}_X(D)$. I per tant, $\mathrm{Cl}_X(D) = X$.

4. [2 punts] Siguin X, Y i Z espais topològics, i $p_X \colon X \times Y \to X$, $p_Y \colon X \times Y \to Y$ les projeccions a cada factor.

(a) Si X i Y tenen la propietat Hausdorff, aleshores $X \times Y$ també.

(b) Sigui $f \colon Z \to X \times Y$, proveu que f és contínua si i només si $p_X \circ f$ i $p_Y \circ f$ són contínues.

Solució:

(a) Siguin $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2) \in X \times Y$. Aleshores o bé $x_1 \neq x_2$ o bé $y_1 \neq y_2$. Si $x_1 \neq x_2$, existeixen oberts $U_1, U_2 \subset X$ amb $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$ i $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Aleshores $(x_1, y_1) \in U_1 \times Y$ i $(x_2, y_2) \in U_2 \times Y$, on $U_1 \times Y, U_2 \times Y \subset X \times Y$ són oberts amb $(U_1 \times Y) \cap (U_2 \times Y) = \emptyset$.
Si $x_1 = x_2$ i $y_1 \neq y_2$ aleshores existeixen oberts $V_1, V_2 \subset X$ amb $y_1 \in V_1$, $y_2 \in V_2$ i $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Aleshores $(x_1, y_1) \in X \times V_1$ i $(x_2, y_2) \in X \times V_2$, on $X \times V_1, X \times V_2 \subset X \times Y$ són oberts amb $(X \times V_1) \cap (X \times V_2) = \emptyset$.

(b) Les projeccions p_X i p_Y són contínues, aleshores si f és contínua tenim que les composicions $p_X \circ f$ i $p_Y \circ f$ són contínues.
Per provar que f és contínua n'hi ha prou amb comprovar que l'antiimatge d'un obert bàsic és obert ja que la topologia producte té una base formada per oberts de la forma $U \times V$ on $U \subset X$ i $V \subset Y$ són oberts. Podem descriure $U \times V = (U \times Y) \cap (X \cap V)$, i observeu que $p_X^{-1}(U) = U \times Y$ i $p_Y^{-1}(V) = X \times V$.
Aleshores

$$f^{-1}(U \times V) = f^{-1}((U \times Y) \cap (X \cap V)) = f^{-1}(p_X^{-1}(U) \cap p_Y^{-1}(V)) = f^{-1}(p_X^{-1}(U)) \cap f^{-1}(p_Y^{-1}(V))$$

és obert ja que $p_X \circ f$ i $p_Y \circ f$ són contínues i per tant $f^{-1}(p_X^{-1}(U)) \cap f^{-1}(p_Y^{-1}(V))$ és obert.