Topologia. Primera Prova Parcial. **Dijous, 12 de novembre 2020.**
Aules C3b/005-C3b/009 **De 9 a 12**

INSTRUCCIONS:

1. Responeu amb claredat d'exposició les següents questions. Totes les respostes han de ser degudament justificades.
2. El temps per realitzar la prova no s'allagarà sota cap circumstància.
3. Primer llegiu totes i cadascuna de les preguntes. Comenceu responent i deixant en net totes aquelles de les que us trobeu més segurs.
4. Si teniu dubtes sobre la interpretació d'algun enunciat, demaneu a la persona que estigui a l'aula en tasques de supervisió.

PROBLEMES:

1. [4 punts] Fixem $p \in \mathbb{R}$. Donat $U \subset \mathbb{R}$, diem que $U \in \tau_p$ si i només si $p \notin U$ o $\mathbb{R} \setminus U$ és finit.
   (a) [1 punt] Comprova que τ_p és una topologia en $\mathbb{R}$ (es diu topologia de Fort).
   (b) [0.5 punt] Siguin $A = \{2\}$ i $B = (0, 1]$ subconjunts de $\mathbb{R}$. Calcula els seus interiors, clausures i fronteres en la topologia de Fort segons el valor de $p \in \mathbb{R}$.
   (c) [0.5 punt] Defineix la propietat de Hausdorff en un espai topològic X i comprova si $(\mathbb{R}, \tau_p)$ la satisfà o no.
   (d) [1 punt] Caracteritza els subconjunts tancats per aquesta topologia a $\mathbb{R}$ i fes una llista de tots els subconjunts densos de $(\mathbb{R}, \tau_p)$.
   (e) [1 punt] Si $p \neq q \in \mathbb{R}$, comprova que $\tau_p \neq \tau_q$ però $(\mathbb{R}, \tau_p)$ i $(\mathbb{R}, \tau_q)$ són homeomorfs.
2. [2 punts] Sigui $f : X \to Y$ una aplicació entre espais topològics. Demostra els següents fets:
   (a) L'aplicació f és tancada si i només si per tot $A \subset X$, $\mathrm{Cl}(f(A)) \subset f(\mathrm{Cl}(A))$.
   (b) Si f és exhaustiva i tancada i $U \subset X$ és obert, aleshores $\mathrm{Fr}(f(\mathrm{Cl}(U))) \subset f(\mathrm{Cl}(U)) \cap f(X \setminus U)$.
3. [2 punts] Sigui X un espai topològic. Definim la següent relació d'equivalència: $x \sim y$ si i només si $\mathrm{Cl}(\{x\}) = \mathrm{Cl}(\{y\})$. Sigui $p : X \to X/\sim$ l'aplicació quocient. Prova els següents enunciats:
   (a) Si $A \subset X$ és obert o tancat, aleshores $p^{-1}(p(A)) = A$.
   (b) L'aplicació quocient és oberta i tancada.
4. [2 punts] Siguin τ_1 i τ_2 dues topologies en un mateix conjunt X. Considerem l'aplicació injectiva diagonal $i : X \hookrightarrow X \times X$, $i(x) = (x, x)$. Si prenem la topologia producte $(X, \tau_1) \times (X, \tau_2)$ en $X \times X$, sigui $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ la topologia en X definida per la inclusió i, és a dir, la topologia menys fina per la qual i és contínua. Demostra que:
   (a) La topologia τ és més fina, és a dir, $\tau_i \subset \tau$ per $i = 1, 2$.
   (b) El conjunt $\mathcal{B} = \{U_1 \cap U_2 | U_1 \in \tau_1, U_2 \in \tau_2\}$ és una base per la topologia τ.