INSTRUCCIONS: L'entrega d'aquest seminari per escrit es farà pels grups de seminari creats, en format TeX, i la data límit és el 15 de novembre a les 10h. Es valorarà la correcció dels arguments, i la presentació clara i ordenada.

En aquest seminari ens centrarem en el paper que juguen els entorns en la idea de convergència i com es generalitza aquest concepte de manera que la clausura i la continuitat es poden caracteritzar en termes de convergència d'uns objectes més generals: els filtres.

1 Convergència de successions, clausura i continuitat

Sigui (X, τ) un espai topològic. Un subconjunt $N \subset X$ és un entorn de $x \in X$ si existeix un obert $U \in \tau$ tal que $x \in U \subset N \subset X$. Si $\mathcal{B} \subset \tau$ és una base de la topologia aleshores els entorns $N \subset X$ també queden definits utilizant la base: $N \subset X$ és un entorn de $x \in X$ si existeix un obert bàsic $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset N \subset X$. Fixeu-vos que si $\varnothing \neq A \subset X$ amb $\mathrm{Int}(A) \neq \varnothing$, aleshores A és un entorn dels seus punts interiors.

En aquest apartat veurem la noció de convergència d'una successió en un espai topològic i com aquesta noció no caracteriza els punts adherents a un subconjunt. Diem que una successió $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ convergeix a $x \in X$ si per tot entorn E de x, existeix $N_E \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in E$ per tot $n > N_E$.

Comproveu que si $\{x_n\} \subset A \subset X$ és una successió en $A \subset X$ que convergeix a $x \in X$, aleshores $x \in \mathrm{Cl}(A)$. Però veurem amb un exemple concret que el recíproc no és cert.

Sigui X un conjunt no numerable, fixem $x_0 \in X$. Sigui $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ definit per: $A \in \tau$ si i només si ($x_0 \notin A$) o ($x_0 \in A$ i $X \setminus A$ és finit o numerable).

Comproveu que τ és una topologia en X i que es compleixen els següents fets:

1. $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ convergeix a x si i només si existeix $N > 0$ amb $x_n = x$ per tot $n > N$.
2. $x_0 \in \mathrm{Cl}(X \setminus \{x_0\})$ però $\{x_0\}$ no és límit de cap successió a $X \setminus \{x_0\}$.
3. Sigui X_d el conjunt X amb la topologia discreta, aleshores X i X_d tenen les mateixes successions convergents però l'aplicació identitat $X \to X_d$ no és contínua.

D'aquesta manera tenim, d'una banda un punt adherent a un subconjunt que no és el punt de convergència d'una successió en el subconjunt, i d'altra banda una aplicació que preserva successions convergents i els seus punts de convergència però no és contínua.

2 Hi ha vida més enllà de les successions: els filtres

Els filtres donen un contexte molt natural per l'estudi del fenòmen de la convergència en un espai topològic. Van ser introduits el 1937 per Cartan. Tenint al cap les propietats dels entorns, introduim la noció de filtre. Sigui X un conjunt. Un filtre en X és $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ tal que

1. $\varnothing \notin \mathcal{F}$, i $\mathcal{F} \neq \varnothing$.
2. Si $A, B \in \mathcal{F}$ aleshores $A \cap B \in \mathcal{F}$.
3. Si $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{P}(X)$ amb $A \subset B$, aleshores $B \in \mathcal{F}$.

Fixeu-vos que de la definició es dedueix que les interseccions finites d'elements de $\mathcal{F}$ són sempre no buides, però no ho podem afirmar de les no finites. Una altra propietat és que si $\{x\} \in \mathcal{F}$ aleshores tots els subconjunts que contenen x també són a $\mathcal{F}$. De les definicions es dedueix que sempre tenim $X \in \mathcal{F}$.

Si $\mathcal{F}$ i $\mathcal{F}'$ són dos filtres, diem que $\mathcal{F}$ és més fi que que $\mathcal{F}'$ si $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$. Quin és el filtre menys fi que pots construir? Té sentit parlar del filtre més fi de tots? Anem a veure uns exemples.

1. Si X és un espai topològic i $x \in X$, aleshores el sistema d'entorns $\mathcal{N}_x$ és un filtre.

2. Fixat $x_0 \in X$, definim el filtre $\mathcal{F}_{x_0} = \{A \subset X | x_0 \in A\}$.

3. El filtre de Fréchet en un conjunt infinit X és $\mathcal{F}_f = \{A \subset X | X \setminus A \text{ és finit}\}$.

De manera semblant definim la noció de base d'un filtre. Una base d'un filtre és $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ que compleix

1. $\varnothing \notin \mathcal{B}$, i $\mathcal{B} \neq \varnothing$.

2. Si $A, B \in \mathcal{B}$ aleshores existeix $C \in \mathcal{B}$ amb $C \subset A \cap B$.

A partir de $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ podem definir $\mathcal{F}(\mathcal{B})$: donat $A \subset X$, $A \in \mathcal{F}$ si existeix $B \in \mathcal{B}$ amb $B \subset A$.

Comproveu que donat $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$, aleshores $\mathcal{F}(\mathcal{B})$ és un filtre si i només si $\mathcal{B}$ és una base d'un filtre. De fet, $\mathcal{F}(\mathcal{B})$ és el filtre menys fi que conté $\mathcal{B}$.

Per exemple, si $X = \mathbb{N}$, el conjunt dels nombres naturals, $\mathcal{B}_N = \{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ on $S_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$ és un exemple de base d'un filtre. Quin filtre defineix a $\mathbb{N}$? Proveu que per $A \subset \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{F}(\mathcal{B}_N)$ si i només si existeix $N > 0$ tal que $n \in A$ per tot $n > N$, és a dir, $S_{N+1} \subset A$.

Sigui $f\colon X \to Y$ una funció, i $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ és un filtre. Aleshores $f(\mathcal{F}) = \{f(A) | A \in \mathcal{F}\}$ no és necessariament un filtre però comproveu que sí és una base d'un filtre. Sigui $f_*(\mathcal{F})$ el filtre generat per $f(\mathcal{F})$.

Per exemple, si $f\colon \mathbb{N} \to X$ és una successió en X, escriu explícitament el filtre $f_*(\mathcal{F}(\mathcal{B}_N))$.

3 Modelem la convergència amb la noció de filtre

Sigui ara X un espai topològic. Diem que $x \in X$ és un punt límit d'un filtre $\mathcal{F}$ si $\mathcal{N}_x \subset \mathcal{F}$. Escrivim $\lim(\mathcal{F})$ per denotar el conjunt de punts límit de $\mathcal{F}$.

Anem a fer uns exemples.

1. Fixat $x_0 \in X$, x_0 és un punt límit de $\mathcal{F}_{x_0}$. N'hi pot haver més de punts límits d'aquest filtre?

2. Si $f\colon \mathbb{N} \to X$ és una successió en X, quina propietat compleixen els punts límit de $f_*(\mathcal{F}(\mathcal{B}_N))$? Quina relació tenen amb els punts de convergència de la successió? Són els mateixos?

Fixa't que en l'exemple de la topologia introduida a la secció 1, malgrat que $x_0 \in \mathrm{Cl}(X \setminus x_0)$ no és límit d'una sucessió, sí que és límit d'un filtre que conté $X \setminus x_0$, per exemple, el filtre generat per la base d'un filtre $\mathcal{B} = \{(A \setminus x_0) | A \text{ és un obert amb } x_0 \in A\}$.

Acabem amb dues propietats de convergència en filtres que relacionen clausura, convergència i continuitat. Sigui $\mathcal{F}$ un filtre en X.

1. Si $x \in \lim \mathcal{F}$, aleshores x és un punt adherent a A per tot $A \in \mathcal{F}$.

2. Sigui $A \subset X$. Aleshores $x \in \mathrm{Cl}(A)$ si i només si existeix un filtre $\mathcal{F}$ que conté A i tal que $x \in \lim \mathcal{F}$.

3. Una aplicació $f\colon X \to Y$ és contínua si i només si per tot filtre $\mathcal{F}$ i $x \in \lim \mathcal{F}$ tenim que $f(x) \in \lim f_*(\mathcal{F})$.