LA VERSIÓ DE BUTXACA: DEFINICIONS LOCALS

Natàlia Castellana

Donada una propietat topològica, sempre es pot considerar la seva versió en entorns. Se'n diu la versió local de la definició

<u>Definició local d'una propietat P</u>:

Diem que un espai topològic X és localment (P) si per tot $x \in X$ hi ha una base local d'entorns que compleixen (P).

O dit d'una altra manera

Diem que un espai topològic X és localment (P) si per tot $x \in X$ i $U \subset X$ obert amb $x \in U$, existeix un entorn $x \in N \subset U$ que compleix P.

Per exemple, un espai topològic és localment simpàtic si per tot $x \in X$ i $U \subset X$ obert amb $x \in U$, existeix un entorn simpàtic N amb $x \in N \subset U$. <u>Però</u> no és el mateix que dir que tot punt té un entorn simpàtic.

En les següents pàgines ens centrem en el cas de la compacitat local. I veurem que si X és Hausdorff sí que podem dir que X és localment compacte si tot punt té un entorn compacte.

Analista o topòleg?

Si mireu "An introduction to abstract harmonic analysis" by Lynn Loomis

<u>DEF. ANALISTA:</u> X és localment si per tot $x \in X$ existeix un entorn N d'x, N compacte, és a dir, $x \in \mathcal{U} \subset N$, $\mathcal{U}$ obert, N compacte.

<u>Exemple</u> (a) X compacte és localment compacte.
(b) $\mathbb{R}^n$ és localment compacte $x \in \overline{B(x,1)}$.

<u>DEF. TOPÒLEG:</u> X és localment compacte si per tot $x \in X$ hi ha una base local d'entorns compactes. És a dir, per tot $x \in X$ i $x \in \mathcal{U}$ obert alehores existeix un entorn compacte $x \in N \subset \mathcal{U}$.

<u>Exemple 1</u> X compacte no és ara necessàriament localment compacte per un topòleg. Per exemple,

$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, prenem $\mathbb{Q}^*$ la compactificació a un punt. Recordem que si $K \subset \mathbb{Q}$ compacte aleshores $\mathrm{Int}(K) = \emptyset$. ($\mathbb{Q}$ no és localment compacte)

$\mathbb{Q}^*$ compacte però $0 \in (0,1) \cap \mathbb{Q}$ no té cap entorn compacte contingut a $(0,1) \cap \mathbb{Q}$.

<u>Exemple 2</u> $\mathbb{R}^n$, $\overline{B(x,\varepsilon)}$ és compacte.

Proposició Si X és un espai topològic Hausdorff les dues definicions són equivalents.

Definició analista (A) $\Leftrightarrow$ definició topològica (T)

- És clar que la Definició T implica la A. Per l'altra implicació cal el següent lemma.

Lemma X localment compacte (A) Hausdorff, $K \subset X$ compacte, $K \subset D$ on D obert. Alehores existeix un obert E amb

(a) $\overline{E}$ compacte
(b) $K \subset E \subset \overline{E} \subset D$

Demostració

Suposem $K = \{x\}$. Sigui $x \in N$ un entorn compacte. Llavors N compacte i Hausdorff (normal). Considerem $A, B \subset N$

$A = \{x\}$, $B = \underbrace{N \setminus D}_{\text{tancat}}$. Existeixen oberts $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subset N$ amb $\{x\} \subset \mathcal{U}$, $B \subset \mathcal{V}$, $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$.

Existeixen $\mathcal{U}_0, \mathcal{V}_0 \subset X$ oberts amb $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 \cap N$
$\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 \cap N$

Prenem $E = \text{Int}(\mathcal{U})$, $x \in E$ obert (*) [veure final paradoxalment]
$E \subset \mathcal{U} \subset N$

$\overline{E} \subset \overline{N} = N$ així $\overline{E}$ compacte (tancat c compacte)

$E \cap \mathcal{V}_0 \subset \mathcal{U} \cap \mathcal{V}_0 = N \cap \mathcal{U}_0 \cap \mathcal{V}_0 = \mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$,

per tant, $E \subset \underbrace{X \setminus \mathcal{V}_0}_{\text{tancat}}$ i $\overline{E} \subset X \setminus \mathcal{V}_0$.

En resum, $\bar{E} \subset N$

$$\bar{E} \subset X \setminus V_0 \,, \quad N \setminus D \subset V \subset V_0 .$$

$\bar{E} \subset N \cap (X \setminus V_0) \subset N \cap D \subset D$. I ja hem acabat el cas $K = \{x\}$.

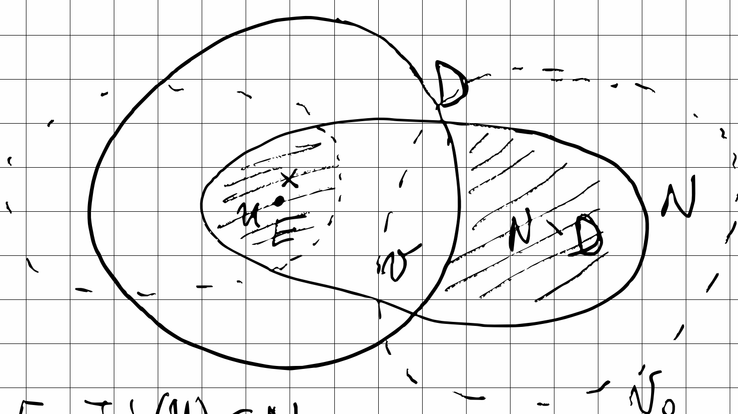
Ara el cas general. Per cada $x \in K$ existeix $E(x)$ obert amb $\overline{E(x)}$ compacte,

$$x \in E(x) \subset \overline{E(x)} \subset D$$

$$K \subset \bigcup_{x \in K} E(x) \text{ i per compacitat } K \subset \overset{E}{\overset{\shortparallel}{E(x_1) \cup \dots \cup E(x_n)}}$$

$$K \subset E \subset \bar{E} \subset \overline{E(x_1)} \cup \dots \cup \overline{E(x_n)} \subset D.$$

#



$E = \mathrm{Int}(U) \subset N$

$\bar{E} \subset N$, $E \cap V_0 = \emptyset$

$\bar{E} \subset N \cap (X \setminus V_0)$

Demostració:

Així, si X és satisfà la definició (A) donat qualsevol obert $\mathcal{U} \ni x$ podem construir un obert E amb

$$x \in E \subset \bar{E} \subset \mathcal{U}$$

on $\bar{E}$ és un entorn compacte de x.

#

Aclariment a $(*)$: per què $x \in \mathrm{Int}_X(\mathcal{U})$, $\mathcal{U} = N \cap \mathcal{U}_0$

N entorn compacte de x aleshores existeix un obert $x \in W \subset N$

D obert

Prenem $x \in W \cap \mathcal{U}_0$ obert a X, observem que

$W \subset N$ aleshores $W \cap \mathcal{U}_0 \subset N \cap \mathcal{U}_0 = \mathcal{U}$

Així existeix un obert $x \in W \cap \mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$, per tant $x \in \mathrm{Int}(\mathcal{U})$