HI HA VIDA (CONTINUITAT) MÉS ENLLÀ DELS ESPAIS MÈTRICS

Setembre 2021

Natàlia Castellana

REPTE! Si ens oblidem de la mètrica i ens quedem amb la col·lecció d'oberts, podem desenvolupar les eines del càlcul?

Aquest repte va en la direcció o filosofia d'estudiar propietats més aviat qualitatives de les funcions i els espais. Fins on podem arribar si ens amaguen la mètrica d, ens oblidem d'epsilons i deltes i ens donen la llista d'oberts.

El terme topologia va ser introduït per Listing a "Vorstudien zur Topologie" el 1847 però en correspondència privada feia temps que l'usava. El va introduir per distingir el que anomenava geometria qualitativa davant la geometria ordinària en que les relacions quantitatives eren tractades. Posava com a exemple els nusos: la seva natura no canvia si es manté la 'continuitat' de la corda i és independent de les dimensions relatives.

Altres noms que cal citar relacionats amb aquesta filosofia són Cauchy, Schäfli, Riemann i Betti. Però va ser Poincaré el 1895 qui va consolidar moltes d'aquestes idees, al treball Analysis Situs.

Fixeu-vos que el concepte d'espai mètric no va aparèixer fins el 1906 introduït per Fréchet.

Va ser el 1914 quan Felix Hausdorff va introduir el concepte d'espai topològic amb la propietat Haussdorff (espai de Hausdorff) i una lleugera generalització de Kazimierz Kuratowski el 1922 és el que avui coneixem com espai topològic.

SOM-HI!

<u>DEFINICIÓ</u>: Sigui X un conjunt. Una topologia en X és una família τ de subconjunts de X que compleix les següents tres propietats:

(1) $\emptyset, X \in \tau$

(2) La intersecció de qualsevol família finita d'elements de τ és un element de τ.

(3) La unió que qualsevol família d'elements de τ és de τ.

Diem que τ satisfà la propietat de Hausdorff si donats $x \neq y \in X$ existeixen $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \tau$ tals que $x \in \mathcal{U}$, $y \in \mathcal{V}$, i $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$.

<u>Nota</u>
- Si $\mathcal{P}(X)$ són les parts d'X, $\tau \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$.
- De (3) es pot deduir que $\emptyset \in \tau$ prenent una unió indexada en el conjunt buit.

Diem que la parella $(X,\mathcal{T})$ és un espai topològic. Els elements d'X els anomenem punts i els elements de $\mathcal{T}$ els anomenem oberts de X.

EXEMPLES

(0) Topologia mètrica en un espai mètric (X,d).

$$\mathcal{T} = \{ \mathcal{U} \subset X \mid \mathcal{U} \text{ és obert amb la mètrica } d \}$$

Diem que $\mathcal{U}$ és obert amb la mètrica d si per tot $x \in \mathcal{U}$ existeix $\delta > 0$ tal que $B_d(x,\delta) \subset \mathcal{U}$.

Ja hem vist que $\mathcal{T}_d$ compleix tots els requisits per ser una topologia i que, a més, compleix la propietat Hausdorff.

$(X,\mathcal{T})$ és un espai topològic Hausdorff.

Mètriques diferents poden induir la mateixa topologia (ja ho hem vist).

Què passa si $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ el més petit possible o bé $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ el més gran possible?

(1) X conjunt, $\mathcal{T}_g = \{\emptyset, X\}$ compleix els requisits per ser una topologia

- $\emptyset, X \in \mathcal{T}_g$

- Qualsevol unió arbitrària es redueix a $X \cup \emptyset = X \cup X = X$ ó $\emptyset \cup \emptyset = \emptyset$.

- Qualsevol intersecció (arbitrària de fet) es redueix a $X \cap X = X$ $X \cap \emptyset = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset$.

τ_g s'anomena la topologia grollera

(2) X conjunt. $\tau_d = \mathcal{P}(X) = \{A \subset X\}$. τ_d és una topologia ja que $\emptyset, X \in \mathcal{P}(X)$ i la unió i intersecció de subconjunts de X és un subconjunt de X.

τ_d s'anomena la topologia discreta.

. Fixeu-vos que τ_d és també la topologia induïda per la mètrica discreta. Amb la mètrica discreta, $B(x, 1/2) = \{x\}$ és obert, i com que la unió arbitrària d'oberts és obert tenim que si $A \subset X$ és un subconjunt qualsevol

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \text{ és obert.}$$

Per tant és Hausdorff : $x \neq y \in X$,

$$B(x, 1/2) \cap B(y, 1/2) = \{x\} \cap \{y\} = \emptyset.$$

PENSEU : És (X, τ_g) un espai topològic Hausdorff ?

Per la definició de topologia, si $\mathcal{T}$ és una topologia en un conjunt X aleshores

$$\{\emptyset, X\} = \mathcal{T}_g \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{T}_d = \mathcal{P}(X)$$

<u>DEFINICIÓ</u>: Sigui X amb dues topologies $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$. Diem que $\mathcal{T}$ és més fina que $\mathcal{T}'$ si $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$.

Així $\mathcal{T}_d$ és la topologia més fina de totes i $\mathcal{T}_g$ és la menys fina de totes.

Seguim amb més exemples:

(3) X conjunt, la topologia cofinita en X és

$$\mathcal{T} = \{\, U \subset X \mid U = \emptyset \text{ o bé } X \setminus U \text{ finit} \,\}$$

Anem a comprovar-ho pas a pas:

- $\emptyset \in \mathcal{T}$ per definició. Ens preguntem si $X \in \mathcal{T}$. Si $X = \emptyset$ aleshores sí per definició, i si $X \neq \emptyset$ ha de complir que $X \setminus X = \emptyset$ és finit. Cert ja que $|\emptyset| = 0$.
- Sigui $\{U_i\}_{i\in I}$ amb $U_i \subset X$ i $U_i \in \mathcal{T}$. Volem comprovar que $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$. Hi ha dues possibilitats per a que sigui cert

$$\bigcup_{i\in I} U_i = \emptyset \quad \text{o} \quad X \setminus \Big(\bigcup_{i\in I} U_i\Big) \text{ finit.}$$

Sabem que $\mathcal{U}_i \in \mathcal{Z}$: $\mathcal{U}_i = \emptyset$ o $X \setminus \mathcal{U}_i$ finit.

- Si $\mathcal{U}_i = \emptyset$ per tot $i \in I$, aleshores $\bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i = \emptyset \in \mathcal{Z}$
- Sinó existeix $j \in I$ amb $\mathcal{U}_j \neq \emptyset$, aleshores

$$X \setminus \left(\bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i\right) = \bigcap_{i\in I} (X \setminus \mathcal{U}_i) \subset X \setminus \mathcal{U}_j \text{ finit},$$

i per tant $X \setminus \left(\bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i\right)$ és finit.

- Sigui $\{\mathcal{U}_i\}$, $i = 1, \dots, n$ amb $\mathcal{U}_i \in \mathcal{Z}$, és a dir, $\mathcal{U}_i = \emptyset$ ó $X \setminus \mathcal{U}_i$ finit.
  - Si existeix $j \in I$ amb $\mathcal{U}_j = \emptyset$ aleshores $\bigcap_{i\in I} \mathcal{U}_i = \emptyset \in \mathcal{Z}$
  - Sinó, $\mathcal{U}_i \neq \emptyset$ per tot $i = 1, \dots, n$ i per tant $X \setminus \mathcal{U}_i$ és finit per tot $i = 1, \dots, n$.

$$X \setminus \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{U}_i = \bigcup_{i=1}^{n} (X \setminus \mathcal{U}_i) \text{ és finit.}$$

[A diferència dels exemples anteriors, veiem que aquí les interseccions arbitràries no tenen per què ser a $\mathcal{Z}$]

Hem comprovat que $\mathcal{Z}$ és una topologia.

PENSEU: (1) És Hausdorff? Pista: $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{Z}$, com és $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$?

(2) Si X és finit, ja la coneixem?

(4) X conjunt, la topologia conumerable és

$$\mathcal{Z} = \{ \mathcal{U} \subset X \mid \mathcal{U} = \emptyset \text{ ó } X \setminus \mathcal{U} \text{ finit o numerable} \}$$

Comproveu que és una topologia fent servir les idees de (3). Quina és més fina, la cofinita o la conumerable?

(5) X conjunt, $p \in X$

- La topologia del punt particular es defineix com
$$\mathcal{Z} = \{ \emptyset, X, \ \mathcal{U} \subset X \text{ tals que } p \in \mathcal{U} \}$$
- La topologia del punt exclòs es defineix com
$$\mathcal{Z} = \{ \emptyset, X, \ \mathcal{U} \subset X \text{ tals que } p \notin \mathcal{U} \}$$

Comproveu que són topologies. Tenen la propietat Hausdorff?

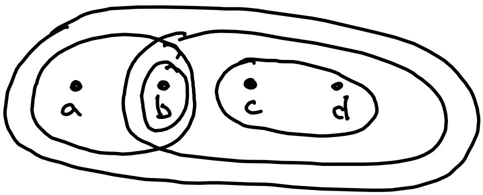
(6) $X = \mathbb{R}$ i considerem $\mathcal{Z} = \{ \emptyset, X, (-\infty, p) \text{ per } p \in \mathbb{R} \}$

És $\mathcal{Z}$ una topologia? En cas que ho sigui, és més o menys fina que la topologia amb la mètrica usual $d(x,y) = |x-y|$?

I ara, quines topologies podem posar en un conjunt finit? Bé, hi ha un nombre finit de possibilitats.

<u>NOTACIÓ</u> Per designar una topologia en un conjunt finit, farem servir diagrames on s'encerclan els punts de formen oberts. Per exemple,

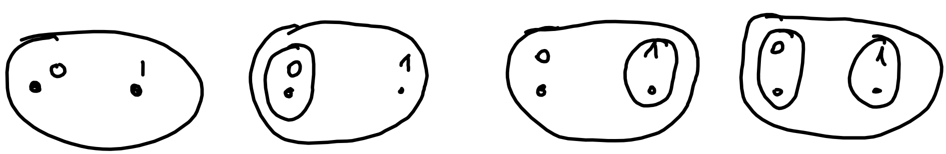
$X = \{a,b,c,d\}$

$\tau =$ 

$\tau = \{\emptyset, X, \{b\}, \{c,d\}, \{a,b\}, \{b,c,d\}\}$

Podeu comprovar que τ és una topologia.

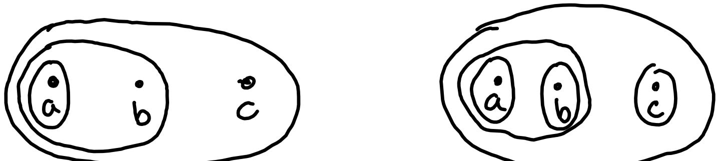
- Si $X = \{0,1\}$ tenim les possibilitats



grollera — s'anomenen topologies de Sierpinski — discreta

Quins són Hausdorff?

- Digues si els següents diagrames representen topologies en $\{a,b,c\} = X$.



I ara, segur que tu mateix em podries dir què és una aplicació contínua entre espais topològics. Que serà sinó...

DEFINICIÓ Una aplicació contínua entre espais topològics és una aplicació $f: X \to Y$ tal que $f^{-1}(\mathcal{U})$ és obert a X si $\mathcal{U}$ és obert a Y.

Voilà!

PENSEU: Si X és un conjunt qualsevol, considerem

$$X_d \xrightarrow[id]{} X_g \quad i \quad X_g \xrightarrow[id]{} X_d$$

Són contínues?