A TRAVÉS DEL MIRALL :

VIATGE AL MÓN DELS TANCATS

16 - 18 Setembre 2020

Natàlia Castellana Vila

Ja hem vist que el complementari d'un obert no té perquè ser obert. Aquesta família de complementaris d'oberts té un nom: són els tancats.

<u>**DEFINICIÓ**</u> Sigui X un espai topològic. Diem que $C \subset X$ és tancat sii $X \setminus C$ és obert.

Fixeu-vos que si $\mathcal{C} = \{ C \subset X \mid C \text{ tancat} \}$, tenim una bijecció

$$\begin{array}{ccc} \tau & \xleftrightarrow{\;(X\setminus -)\;} & \mathcal{C} \\ U & \longmapsto & X \setminus U \\ X \setminus C & \longmapsfrom & C \end{array}$$

I ara, com que sabem com es comporten unions i interseccions respecte complementari podem deduir com es comporten els tancats respecte aquestes construccions.

Recordeu
$$X \setminus \Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \bigcap_{i\in I} (X \setminus A_i)$$
$$X \setminus \Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) = \bigcup_{i\in I} (X \setminus A_i)$$

Així

- $\emptyset, X$ són tancats ja que $X, \emptyset$ són oberts

$$X \setminus \emptyset = X \;, \quad X \setminus X = \emptyset .$$

• Sigui $\{C_i\}_{i\in I}$ una família arbitrària de tancats. Aleshores $\{X\setminus C_i\}$ és una família arbitrària d'oberts. Sabem $\bigcup_{i\in I}(X\setminus C_i)$ és obert. Per tant, com que

$$X\setminus \bigcap_{i\in I} C_i = \bigcup_{i\in I}(X\setminus C_i) \text{ és obert, tenim que}$$

$$\bigcap_{i\in I} C_i \text{ és tancat.}$$

• Sigui $\{C_i\}$, $i=1,\dots,n$ una família finita de tancats. Aleshores $\{X\setminus C_i\}$ $i=1\dots,n$ és una família finita d'oberts. Sabem que $\bigcap_{i=1}^{n} X\setminus C_i$ és obert. Per tant, com que

$$X\setminus \bigcup_{i=1}^{n} C_i = \bigcap_{i=1}^{n}(X\setminus C_i) \text{ és obert, tenim que}$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} C_i \text{ és tancat.}$$

<u>Nota</u> Fixeu-vos que a $\mathbb{R}$, $\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[-1+\frac{1}{n}, +1-\frac{1}{n}\right] = (-1,1)$

<u>PROPOSICIÓ</u>: Sigui X un espai topològic. Aleshores

- $\emptyset, X$ són tancats.
- Les unions finites de tancats són tancades
- Les interseccions arbitràries de tancats són tancades.

IMPORTANT: Una definició alternativa de topologia és la proposició anterior definint les propietats dels tancats. És equivalent a la que hem donat abans destacant les propietats dels oberts.

I com es comporten respecte les aplicacions contínues?

PROPOSICIÓ Sigui $f: X \to Y$ una aplicació entre espais topològics

f és contínua sii [$f^{-1}(C)$ tancat si C tancat]

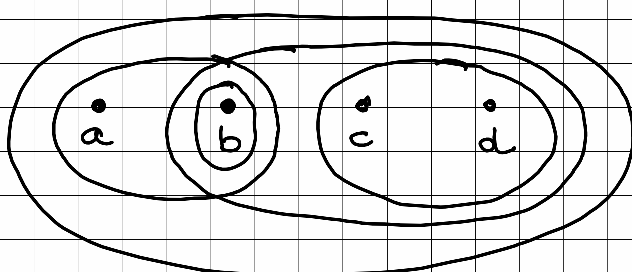
Per demostrar-la només heu de fer servir el fet de teoria de conjunts

$$X \setminus f^{-1}(C) = f^{-1}(X \setminus C).$$

EL MÓN DE LA TOPOLOGIA NO ÉS BINARI

Els subconjunts $A \subset X$ en un espai topològic no tenen perquè etiquetar-se com oberts o tancats i totes les possibilitats es poden donar!

$X = \{a, b, c, d\}$



	$\{b\}$	$\{a\}$	$\{a,b\}$	$\{b,c\}$
OBERT	✓	X	✓	X
TANCAT	X	✓	✓	X

EXEMPLES

(1) Els tancats a la topologia cofinita són els tancats.

Recordeu $U \subset X$ obert sii $X = \emptyset$ ó $X \setminus U$ finit.

(2) A la topologia grollera, els únics tancats són $\emptyset, X$.

(3) A la topologia discreta tots els subconjunts són oberts i tancats alhora.