Do It Yourself:

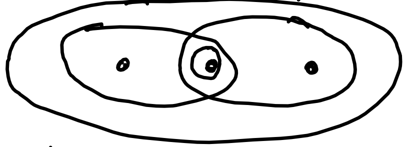
com dissenyar el teu espai topològic

Setembre 2020

Natàlia Castellana

<u>ON SOM?</u> Ja sabem què és un espai topològic (X,τ) on $\tau \subset \mathcal{P}(X)$. Hi ha diverses maneres de definir τ

(1) de manera explícita



$\emptyset, \{a,b\}, \{b\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}$

(2) mitjançant una propietat que cal comprovar que per saber si $U \in \tau$. Per exemple,

$$\tau = \{U \subset X \mid U = \emptyset \text{ o } X \setminus U \text{ finit}\}$$

o en el cas dels espais mètrics (X,d). Un subconjunt $U \subset X$ és obert si per tot $x \in U$ existeix $\delta_x > 0$ tal que $B(x,\delta) \subset U$.

Ara bé, fixeu-vos que de fet, tot obert $U \subset X$ en un espai mètric es pot escriure doncs com unió de boles,

$$U = \bigcup_{y \in U} B(y,\delta_y)$$

. Vegem-ho:

- Si $x \in U$ alshores per definició
$$x \in B(x,\delta_x) \subset \bigcup_{y \in U} B(y,\delta_y)$$
- Si $x \in \bigcup_{y \in U} B(y,\delta_y)$ alshores $x \in B(x,\delta_x) \subset U$.

Aleshores, sabem que qualsevol unió de boles

$$\bigcup_{i\in I} B(x_i, \delta_i) \subset X \quad \text{és obert}$$

(per ser una unió arbitrària d'oberts) i també sabem que qualsevol obert es pot escriure d'aquesta forma. Aquest paper que juguen les boles

$$\mathcal{B} = \{ B(x,R) \mid x\in X, R>0 \}$$

s'axiomatitza en el context més general d'espai topològic amb la següent definició.

DEFINICIÓ: Sigui (X, τ) un espai topològic i $\mathcal{B}$ una família d'oberts, $\mathcal{B} \subset \tau$.

Diem que $\mathcal{B}$ és una base de la topologia si per tot $U \in \tau$ i $x \in U$ existeix $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset U$.

EXEMPLE: (-1) τ és una base!

(0) Sigui (X, τ) un espai topològic induït per una mètrica d. Aleshores ja sabem que

$$\mathcal{B} = \{ B(x,R) \mid x\in X, R>0 \}$$

és una base per la topologia.

Però les bases no són úniques. Per exemple,

$$\mathcal{B}' = \{ B(x,\lambda) \mid x \in X, \lambda\in\mathbb{Q}, \lambda>0 \}$$

(1) Sigui X_g un espai topològic amb la topologia grollera. Aquí sí que només hi ha dues possibles bases

$$\mathcal{B} = \tau \text{ ó } \{X\}.$$

Fixeu-vos que, en general, sempre existeix com a mínim una base, $\mathcal{B} = \tau$ per qualsevol espai topològic.

(2) Comproveu que si X té la topologia discreta aleshores

$$\mathcal{B} = \{\{x\} \mid x \in X\} \text{ és una base}$$

<u>Observació</u> Igual que en la topologia induïda per una mètrica, si $\mathcal{B}$ és una base per (X, τ) i tenim que $\mathcal{U} \subset X$ obert, per $x \in \mathcal{U}$ existeix $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subset \mathcal{U}$ i podem provar que

$$\mathcal{U} = \bigcup_{x \in \mathcal{U}} B_x$$

Els oberts són unions d'oberts de la base!

I ara, podem usar aquesta caracterització per definir topologies? És a dir, escollim $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ una família de subconjunts i diem que $\mathcal{U} \subset X$ és obert si $\mathcal{U}$ es pot escriure com una unió d'elements de $\mathcal{B}$. [ÉS UNA TOPOLOGIA?]

???

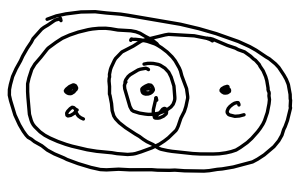
En realitat ens hem de preocupar pel que passa a les interseccions oi? Fixeu-vos en la següent propietat.

<u>LEMMA</u>: Sigui (X,τ) un espai topològic i $\mathcal{B}\subset\tau$ una base aleshores si tenim $\{B_i\}$ $i=1,\dots,n$ amb $B_i\in\mathcal{B}$ es compleix que per tot $x\in\bigcap_{i=1}^{n}B_i$ existeix $B'\in\mathcal{B}$ tal que $x\in B'\subset\bigcap_{i=1}^{n}B_i$.

La demostració diu: com que $\{B_i\}_{i=1}^{n}$ són oberts $\bigcap_{i=1}^{n}B_i$ és obert. Així com que $\mathcal{B}$ és base, per tot $x\in\bigcap_{i=1}^{n}B_i$ existeix $B'\in\mathcal{B}$ tal que

$$x\in B'\subset\bigcap_{i=1}^{n}B_i$$

Per exemple,



$\{\{a,b\}$ i $\{b,c\}\}$ no pot ser una base. Cal que $\{b\}$ hi sigui també.

La següent proposició ens permet construir topologies que tindran una base prefixada sempre hi quan es compleixi la condició descrita pel lemma.

<u>PROPOSICIÓ</u>: Sigui X un conjunt i $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ una família de subconjunts que compleix

(a) $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$

(b) Per tot $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{B}$ i $x \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ existeix $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$

Aleshores existeix una única topologia $\mathcal{T}$ a X tal que

(1) $\mathcal{B}$ és una base per aquesta topologia $\mathcal{T}$.
(2) $\mathcal{T}$ és la topologia menys fina que conté $\mathcal{B}$.

<u>Demostració</u>: Anem a definir $\mathcal{T}$,

$$\mathcal{T} = \{ \mathcal{U} \subset X \mid \mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} B_i \;, B_i \in \mathcal{B}, \text{ ó } \mathcal{U} = \emptyset \}, \text{ i.e.}$$

declarem que els oberts són unions d'elements de $\mathcal{B}$. Fixeu-vos que $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$.

Anem a comprovar que $\mathcal{T}$ és una topologia:

(1) $X \in \mathcal{T}$ per la hipòtesis (a), i $\emptyset \in \mathcal{T}$ per definició (de fet, no caldria ja que $\bigcup_{\alpha \in \emptyset} B_\alpha = \emptyset$)

(2) Sigui $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ amb $\mathcal{U}_i \in \mathcal{T}$. Aleshores per cada i

$$\mathcal{U}_i = \bigcup_{j_i \in I_i} B_{j_i} \;. \text{ Per tant,}$$

$$\bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i = \bigcup_{\substack{i \in I \\ j \in I_i}} B_{j_i} \in \mathcal{T} \;.$$

(3) Anem a comprovar que si $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{Z}$ aleshores $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \in \mathcal{Z}$. Si ho provem per la intersecció de dos oberts, aleshores és cert per qualsevol intersecció finita d'oberts per inducció (aquest és un fet general).

Suposem primer que $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{B} \subset \mathcal{Z}$, aleshores si $x \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ existeix $B_x \in \mathcal{B}$ amb $x \in B_x \subset \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ i per tant

$$\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \bigcup_{x \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}} B_x$$

Siguin $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{Z}$ qualssevols. Per definició de $\mathcal{Z}$,

$$\mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} A_i \quad i \quad \mathcal{V} = \bigcup_{j \in J} B_j$$

amb $A_i, B_j \in \mathcal{B}$ per tot $i \in I$, $j \in J$. Aleshores

$$\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \bigcup_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (A_i \cap B_j) \in \mathcal{Z} \text{ per definició.}$$

llei distributiva entre unions i interseccions

Així doncs $\mathcal{Z}$ defineix una topologia a X amb $\mathcal{B} \subset \mathcal{Z}$, i $\mathcal{B}$ és una base per aquesta topologia per construcció:

Sigui $\mathcal{U} \in \mathcal{Z}$ i $x \in \mathcal{U}$, aleshores $\mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} B_i$ i per tant existeix $i \in I$ amb

$$x \in B_i \subset \bigcup_{i \in I} B_i = \mathcal{U}.$$

I a més és la menys fina que conté $\mathcal{B}$ ja que qualsevol topologia $\mathcal{T}'$ que contingui $\mathcal{B}$ també ha de contenir les unions d'elements de $\mathcal{B}$ que justament és $\mathcal{T}$, $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$. I és única amb aquestes propietats.

#

<u>OBSERVACIÓ</u>: $\mathcal{T}$ també podria haver estat definida a la demostració de manera equivalent com

$$\mathcal{T} = \{ \mathcal{U} \subset X \mid \text{per tot } x \in \mathcal{U} \text{ existeix } B \in \mathcal{B} \text{ tal que } x \in B \subset \mathcal{U} \}$$

(en un estil proper a com es fa en espais mètrics per definir oberts)

Direm que $\mathcal{T}$ és la topologia generada per $\mathcal{B}$.

<u>EXEMPLES</u> Aprofitem per definir nous espais topològics amb nom propi.

(1) $X = \mathbb{R}$, la topologia del límit inferior a $\mathbb{R}$ és la topologia generada per

$$\mathcal{B} = \{ [a,b) \mid a<b,\ a,b \in \mathbb{R} \}$$

Anem a comprovar primer que $\mathcal{B}$ satisfà les condicions (a) i (b) de la proposició.

(a) $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [-n,n)$, per tant $\mathbb{R} = \bigcup_{[a,b)\in\mathcal{B}} [a,b)$.

(b) Siguin $[a,b)$, $[c,d) \in \mathcal{B}$. Alshores la seva intersecció també serà un interval de la forma $[c,b)$ ó $[a,b)$ suposant $a \leq c$, ó $\emptyset$. Per tant $[a,b)\cap[c,d) \in \mathcal{B}$. I es compleix (b) aleshores.

Escriurem $\mathbb{R}_\ell$ per denotar $(\mathbb{R}, \tau)$. Anem a veure alguns exemples de subconjunts oberts.

- $[a,+\infty) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [a, a+n)$ és obert.
- $(-\infty, t) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [t-n, t)$ és obert.

Per tant els complementaris $(-\infty, a)$ i $[t, +\infty)$ són tancats també!

- La unió $(-\infty, a) \cup [b, +\infty)$, $a<b$, és obert doncs, i el complementari $[a,b)$ és tancat també

- Ara, $[1,2]$ no és obert ja que $2\in[1,2]$ i no hi ha cap obert bàsic $[a,c)$ amb $2\in[a,c)\subset[1,2]$.

Però $(1,2)$ sí és obert,

$$(1,2) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [1+1/n, 2)$$

Si tornem ara a mirar complementaris,

$\mathbb{R}\setminus(1,2) = (-\infty,1]\cup[2,+\infty)$ no és obert ja no hi ha $1\in[a,b)\subset\mathbb{R}\setminus(1,2)$.

$\mathbb{R}\setminus[1,2] = (-\infty,1)\cup(2,+\infty) =$

$= \bigcup_{n\geq 2}[-n,1) \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}}[2+\frac{1}{n},\infty)$ obert

i per tant $[1,2]$ és tancat.

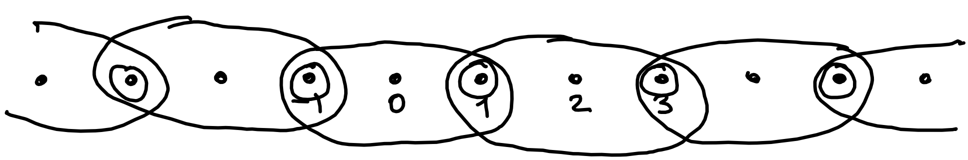
En general podem comprovar, $a<b$, $a,b\in\mathbb{R}$

$[a,b]$ tancat i no obert
(a,b) obert i no tancat
$[a,b)$ obert i tancat alhora
$(a,b]$ ni obert ni tancat

	(a,b)	$[a,b)$	$(a,b]$	$[a,b]$
obert	✓	✓	✗	✗
tancat	✗	✓	✗	✓

(2) $X=\mathbb{Z}$, la topologia digital és la topologia generada per

$$\mathcal{B} = \{B(n) \mid n\in\mathbb{N}\} \text{ on } B(n) = \begin{cases} \{n\} & n \text{ senar} \\ \{n-1,n,n+1\} & n \text{ parell} \end{cases}$$



(3) $X = \mathbb{Z}$, la topologia de les progressions aritmètiques és la topologia generada per

$$\mathcal{B} = \{ A_{a,b} \mid a,b \in \mathbb{Z} \}$$

on $A_{a,b} = \{ a + \alpha b \mid \alpha \in \mathbb{Z} \} \subset \mathbb{Z}$.

I ara, tornem a posar el focus en les aplicacions contínues... igual com passa en espais mètrics i vam discutir el primer dia, només cal comprovar la continuïtat en la preimatge dels oberts d'una base

TEOREMA: Sigui $f: X \to Y$ una aplicació entre espais topològics. Sigui $\mathcal{B}$ una base per la topologia d'Y. Alashores,

f és contínua si i només si $f^{-1}(B)$ és obert per tot $B \in \mathcal{B}$.

Demostració:

Si f és contínua, com que $B \in \mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ és obert alashores $f^{-1}(B)$ és obert.

Suposem que $f^{-1}(B)$ és obert per tot $B \in \mathcal{B}$. Sigui $U \subset Y$ obert, alashores $U = \bigcup_{i \in I} B_i$. Per tant,

$$f^{-1}(U) = f^{-1}\Big(\bigcup_{i \in I} B_i\Big) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i) \text{ és obert}$$

per ser unió d'oberts $f^{-1}(B_i)$ (hipòtesis).

$\#$