SPIN-OFF

DEL CAPÍTOL 5:

LES SUBBASES

Natàlia Castellana, 2020

Recordem que ja sabem què és una base d'oberts d'un espai topològic.

Si (X, τ) és un espai topològic, recordem que $\mathcal{B} \subset \tau$ és una base si tot obert no buit es pot posar com unió d'elements de $\mathcal{B}$.
O, el que és el mateix, si per tot $U \subset X$ obert i $x \in U$ existeix $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset U$.

Anem a introduir el concepte de subbase.

<u>Definició</u>: Sigui (X, τ) un espai topològic. Diem que una família d'oberts $\mathcal{S} \subset \tau$ és una subbase si qualsevol obert $U \subset \tau$ es pot escriure com una unió d'interseccions finites d'elements d'$\mathcal{S}$.

Per exemple, si $\mathcal{B} \subset \tau$ és una base. Tant τ com $\mathcal{B}$ també són subbases.

<u>Exemple</u> Sigui $X = \{a, b, c\}$, $\tau = \mathcal{P}(X)$ topologia discreta

$\mathcal{B} = \{ \{a\}, \{b\}, \{c\} \}$ és una base

$\mathcal{S} = \{ \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\} \}$ és una subbase.

Podem fer servir la idea de subbase per construir espais topològics.

<u>PROPOSICIÓ</u> Sigui X un conjunt i $\mathcal{S}$ una família de subconjunts de X.

Si X és la unió d'elements de $\mathcal{S}$ aleshores existeix una única topologia $\mathcal{T}$ en X que té $\mathcal{S}$ per subbase tal que n'és la menys fina.

<u>Dem</u> Sigui $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ tal que $X = \bigcup_{S \in \mathcal{S}} S$ i

ara prenem $\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_I S_i \mid S_i \in \mathcal{S}, |I| \text{ finit} \right\}$

és a dir, $\mathcal{B}$ està format per totes les interseccions finites d'elements de $\mathcal{S}$.

Sabem pel Capítol 4 que si $\mathcal{B}$ compleix:

(1) $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$

(2) Donats $U, V \in \mathcal{B}$ i $x \in U \cap V$, existeix $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset U \cap V$

existeix una única topologia tal que $\mathcal{B}$ n'és base i és la menys fina.

Però (1) es compleix per hipòtesis i (2) es compleix per construcció.

Si $U = \bigcap_{i=1}^{n} S_i$, $V = \bigcap_{j=1}^{m} S_j$ alashores

$U \cap V = \left(\bigcap_{i=1}^{n} S_i\right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^{m} S_j\right)$ és altre cop

una intersecció finita d'elements de $\mathcal{S}$ i, per tant, és de $\mathcal{B}$.

$\#$