ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ.

Комбинаторика – это раздел математики, посвящённый решению задач выбора и расположения элементов некоторого множества в соответствии с заданными правилами. Комбинаторика изучает комбинации и перестановки предметов, расположение элементов, обладающее заданными свойствами. Обычный вопрос в комбинаторных задачах: сколькими способами….

Правило суммы и правило произведения

Основные правила комбинаторики – это правило суммы и правило произведения.

Правило суммы

Если элемент a можно выбрать n способами, а элемент b можно выбрать m способами, то выбор элемента из всех имеющихся («либо a, либо b») можно сделать $n + m$ способами.

Например, если на тарелке лежат 5 яблок и 6 груш, то один плод можно выбрать 5 + 6 = 11 способами.

Правило произведения

Если элемент a можно выбрать n способами, а элемент b можно выбрать m способами, то пару (a, b) можно выбрать $n \cdot m$ способами.

Например, если есть 2 разных конверта и 3 разные марки, то выбрать конверт и марку можно 6 способами ($2 \cdot 3 = 6$).

Правило произведения верно и в том случае, когда рассматривают элементы нескольких множеств:
если элемент a_1 можно выбрать n_1 способами, элемент a_2 можно выбрать n_2 способами, …, элемент a_k можно выбрать n_k способами, то набор (a_1, a_2, …, a_k) можно выбрать $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами.

Сочетания, размещения, перестановки

Пусть имеется n предметов, отмеченных числами 1, 2, …, n. Из этих предметов выбираем один, записываем число, на нём изображенное, а сам предмет либо возвращаем назад (в этом случае говорят о *выборе с возвращением*), либо он убирается и больше не может быть выбран (в этом случае говорят о *выборе без возвращения*). Повторяем эту процедуру k раз.

Запись, полученная в результате всех действий, называется *выборкой* из n элементов по k.

Запись, полученная по схеме выбора с возвращением, называется выборкой *с повторениями*, а запись, полученная по схеме выбора без возвращений, называется выборкой *без повторений*.

Пример.

Пусть имеются три предмета, отмеченные числами 1, 2, 3 (n = 3). Получим все возможные выборки с повторениями из этих трёх элементов по два (k = 2) – всего девять выборок:

1) $\boxed{1}\,\boxed{1}$
2) $\boxed{1}\,\boxed{2}$
3) $\boxed{1}\,\boxed{3}$
4) $\boxed{2}\,\boxed{1}$
5) $\boxed{2}\,\boxed{2}$
6) $\boxed{2}\,\boxed{3}$
7) $\boxed{3}\,\boxed{1}$
8) $\boxed{3}\,\boxed{2}$
9) $\boxed{3}\,\boxed{3}$

Из полученных выборок вторая, третья, четвертая, шестая, седьмая и восьмая являются выборками без повторений из трех элементов по два.

Если две выборки, отличающиеся только порядком записи символов, считают различными, то говорят о *размещении* из n элементов по k (в размещениях порядок элементов важен).

Если две выборки, отличающиеся только порядком записи символов, считают совпадающими, то говорят о *сочетании* из n элементов по k (в сочетаниях порядок элементов не важен).

Через $\overline{A}_n^k$ обозначают число различных размещений с повторениями из n элементов по k.

$$\overline{A}_n^k = n^k$$

Через A_n^k обозначают число различных размещений без повторений из n элементов по k.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Через C_n^k обозначают число различных размещений без повторений из n элементов по k.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Через $\overline{C}_n^k$ обозначают число различных размещений с повторениями из n элементов по k.

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$$

Размещение из n элементов по n называется *перестановкой* n элементов. Число различных перестановок из n элементов обозначают P_n.

$$P_n = n!$$

Пример. Пусть имеются три предмета, отмеченные числами 1, 2, 3 (n = 3). Получим все возможные размещения и сочетания из этих трёх элементов по два (k = 2), а также все возможные перестановки из этих элементов.

Ниже показаны все возможные при данных условиях выборки. Размещения с повторениями элементов (9 штук) совпадают с выборками с повторениями. Из размещений с повторениями только 6 являются размещениями без повторений. Из размещений без повторений только три являются сочетаниями без повторений. Из размещений с повторениями только 6 являются сочетаниями с повторениями.

Все три элемента можно переставить между собой 6-ю способами.

Размещения с повторениями из 3-х элементов по 2:	Размещения без повторений из 3-х элементов по 2:	Сочетания без повторений из 3-х элементов по 2:	Сочетания с повторениями из 3-х элементов по 2:	Перестановки из 3-х элементов:
1 1			1 1	1 2 3
1 2	1 2	1 2	1 2	1 3 2
1 3	1 3	1 3	1 3	2 1 3
2 1	2 1			2 3 1
2 2			2 2	3 1 2
2 3	2 3	2 3	2 3	3 2 1
3 1	3 1			
3 2	3 2			
3 3			3 3	
Количество выборок соответствующего вида, подсчитанное по формулам:				
$\overline{A}_3^2 = 3^2 = 9$	$A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$	$C_3^2 = \frac{3!}{2!\,(3-2)!} = 3$	$\overline{C}_3^2 = C_{3+2-1}^2 = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = 6$	$P_3 = 3! = 6$

Перестановки с повторениями

Пусть имеется k_1 элементов 1-го типа, k_2 элементов 2-го типа, …, k_m элементов m-го типа, причем элементы одного типа считаем неразличимыми. Тогда мы будем говорить, что у нас имеются *перестановки с повторениями*, и количество таких перестановок выражается числом

$$P(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{(k_1 + k_2 + \cdots + k_m)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!}$$

Пример. Пусть имеется следующий набор элементов: 1123 (т.е. 2 элемента 1-го типа, 1 элемент 2-го типа и 1 элемент 3-го типа). Получим все перестановки с повторениями из этих элементов:

1)	1	1	2	3
2)	1	1	3	2
3)	1	2	1	3
4)	1	3	1	2
5)	1	2	3	1
6)	1	3	2	1
7)	2	1	1	3
8)	3	1	1	2
9)	2	1	3	1
10)	3	1	2	1
11)	2	3	1	1
12)	3	2	1	1

Подсчитаем их количество:

$$P(2,1,1) = \frac{(2 + 1 + 1)!}{2! \cdot 1! \cdot 1!} = 12.$$

Сочетания с повторениями

Пусть имеется k_1 элементов 1-го типа, k_2 элементов 2-го типа, …, k_m элементов m-го типа, причем элементы одного типа считаем неразличимыми. Одним из способов получения сочетаний с повторениями из таких элементов, а также количества таких сочетаний, является использование производящей функции.

Пример. Составим производящую функцию для сочетаний с повторениями из следующих элементов: **abbcc**. С ее помощью получим все возможные сочетания длины 3 из этих элементов, а также количества этих сочетаний.

При составлении производящей функции для сочетаний с ограниченным числом повторений элементов будет использована формальная переменная t.

Элемент **a** может не попасть в сочетание ни одного раза (0 раз) либо попасть в сочетание ровно 1 раз. Формальная запись: $\mathbf{a}^0 \cdot t^0 + \mathbf{a}^1 \cdot t^1$.

Элемент **b** может не попасть в сочетание ни одного раза (0 раз) либо попасть в сочетание ровно 1 раз, либо попасть в сочетание ровно 2 раза. Формальная запись: $\mathbf{b}^0 \cdot t^0 + \mathbf{b}^1 \cdot t^1 + \mathbf{b}^2 \cdot t^2$. Аналогично для элемента **c**: $\mathbf{c}^0 \cdot t^0 + \mathbf{c}^1 \cdot t^1 + \mathbf{c}^2 \cdot t^2$.

Получим по правилу произведения производящую функцию:

$$f(t) = (1 + \mathbf{a}^1 \cdot t^1) \cdot (1 + \mathbf{b}^1 \cdot t^1 + \mathbf{b}^2 \cdot t^2) \cdot (1 + \mathbf{c}^1 \cdot t^1 + \mathbf{c}^2 \cdot t^2).$$

Перемножим скобки и соберем коэффициенты при одинаковых степенях переменной t:

$a \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot t^5 + (a \cdot b^2 \cdot c + a \cdot b \cdot c^2 + b^2 \cdot c^2) \cdot t^4 + (a \cdot b^2 + a \cdot b \cdot c + a \cdot c^2 + b^2 \cdot c + c \cdot b^2) \cdot t^3 + (a \cdot b + a \cdot c + b^2 + b \cdot c + c^2) \cdot t^2 + (a+b+c) \cdot t + 1.$

Коэффициент при t^k дает все возможные сочетания с повторениями длины k.

Получаем все сочетания с повторениями длины 3 как слагаемые в коэффициенте при t^3:

abb, abc, acc, bbc, cbb.

Чтобы найти количество таких сочетаний, в производящей функции всем элементам (кроме формальной переменной t) нужно присвоить значение, равное 1, и в полученном выражении раскрыть скобки:

$$(1 + \mathbf{1} \cdot t^1) \cdot (1 + \mathbf{1} \cdot t^1 + \mathbf{1} \cdot t^2) \cdot (1 + \mathbf{1} \cdot t^1 + \mathbf{1} \cdot t^2) = t^5 + 3 \cdot t^4 + 5 \cdot t^3 + 5 \cdot t^2 + 3 \cdot t + 1.$$

Коэффициент при t^3 показывает количество таких сочетаний длины 3: всего 5 сочетаний.