Пример оформления заданий КР№2

Задание 1. Булева функция $\phi(a, b, c)$ задана как суперпозиция некоторых функций $\phi_i(x, y)$

$$\phi(a, b, c) = \phi_6(\phi_1(a, \phi_2(c, b)), \phi_{14}(\phi_9(b, c), \phi_{10}(b, a))).$$

1) По заданной суперпозиции получить соответствующее логическое выражение;
2) Получить таблицу значений заданной функции;
3) Получить СДНФ, СКНФ, СПНФ заданной функции;
4) Получить представление заданной функции в виде минимальных ДНФ и КНФ;
5) Получить представление заданной функции в виде сокращенной БДР.

   По сокращенной БДР записать представление функции:

   – с помощью оператора IF-THEN-ELSE (ITE-представление);
   – в виде ДНФ;
   – в виде КНФ.

Решение.

1) $\phi(a, b, c) = (a \wedge (c \not\to b)) \oplus ((b \sim c) \mid \bar{a})$.
2) Порядок выполнения операций и таблица значений:

			2	1	6	3	5	4
a	b	c	$(a \wedge$	$(c \not\to b))$	$\oplus$	$((b \sim c)$	$\mid$	$\bar{a})$
0	0	0	0	0	**0**	1	0	1
0	0	1	0	1	**1**	0	1	1
0	1	0	0	0	**1**	0	1	1
0	1	1	0	0	**0**	1	0	1
1	0	0	0	0	**1**	1	1	0
1	0	1	1	1	**0**	0	1	0
1	1	0	0	0	**1**	0	1	0
1	1	1	0	0	**1**	1	1	0

3) СДНФ: $\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c \vee \bar{a} \cdot b \cdot \bar{c} \vee a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} \vee a \cdot b \cdot \bar{c} \vee a \cdot b \cdot c.$

   СКНФ: $(a \vee b \vee c) \cdot (a \vee \bar{b} \vee \bar{c}) \cdot (\bar{a} \vee b \vee \bar{c}).$

   СПНФ: $\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c \vee \bar{a} \cdot b \cdot \bar{c} \vee a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} \vee a \cdot b \cdot \bar{c} \vee a \cdot b \cdot c =$

$= (a\oplus1)\cdot(b\oplus1)\cdot c \oplus (a\oplus1)\cdot b\cdot(c\oplus1) \oplus a\cdot(b\oplus1)\cdot(c\oplus1) \oplus a\cdot b\cdot(c\oplus1) \oplus a\cdot b\cdot c =$

$= a\cdot b\cdot c\oplus a\cdot c\oplus b\cdot c\oplus c \oplus a\cdot b\cdot c \oplus a\cdot b \oplus b\cdot c \oplus b \oplus a\cdot b\cdot c \oplus a\cdot c \oplus a\cdot b \oplus a \oplus a\cdot b\cdot c \oplus a\cdot b \oplus a\cdot b\cdot c =$

$= \cancel{a\cdot b\cdot c}\oplus \cancel{a\cdot c}\oplus \cancel{b\cdot c}\oplus c \oplus \cancel{a\cdot b\cdot c} \oplus \cancel{a\cdot b} \oplus \cancel{b\cdot c} \oplus b \oplus \cancel{a\cdot b\cdot c} \oplus \cancel{a\cdot c} \oplus \cancel{a\cdot b} \oplus a \oplus \cancel{a\cdot b\cdot c} \oplus a\cdot b \oplus a\cdot b\cdot c =$

$= a\cdot b\cdot c \oplus a\cdot b \oplus a \oplus b \oplus c.$

4) Минимальная ДНФ:

ab \ c	0	1
00		1
01	1	
11	1	1
10	1	

$\bar a \cdot \bar b \cdot c$, $b \cdot \bar c$, $a \cdot b$, $a \cdot \bar c$

$b \cdot \bar c \lor a \cdot \bar c \lor a \cdot b \lor \bar a \cdot \bar b \cdot c$

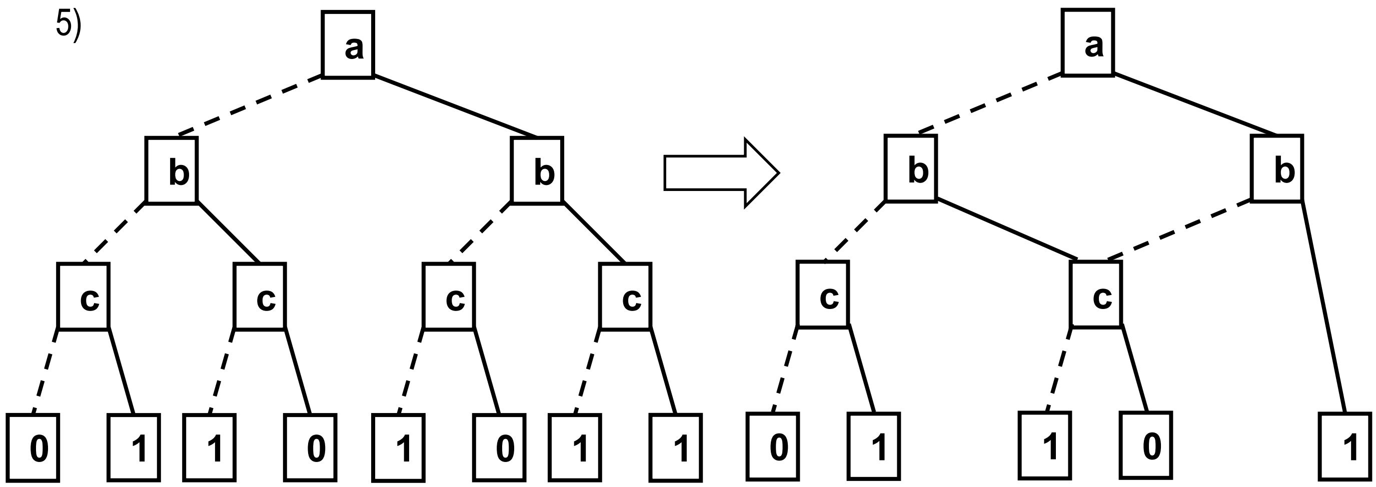
Минимальная КНФ:

ab \ c	0	1
00	0	
01		0
11		
10		0

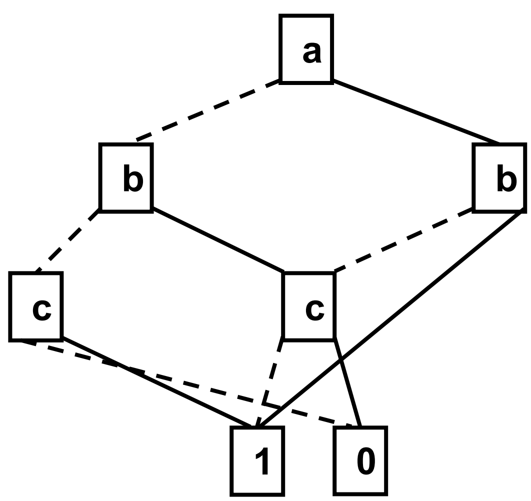
$a \lor b \lor c$, $a \lor \bar b \lor \bar c$, $\bar a \lor b \lor \bar c$

$(a \lor b \lor c) \cdot (a \lor \bar b \lor \bar c) \cdot (\bar a \lor b \lor \bar c)$

5)



Сокращенная БДР с минимальным числом узлов:



ДНФ: $\bar a \cdot \bar b \cdot c \lor \bar a \cdot \bar b \cdot \bar c \lor a \cdot \bar b \cdot \bar c \lor a \cdot b =$

$= \bar a \cdot \bar b \cdot c \lor \bar a \cdot b \cdot \bar c \lor a \cdot (\bar b \cdot \bar c \lor b) =$

$= \bar a \cdot \bar b \cdot c \lor \bar a \cdot b \cdot \bar c \lor a \cdot \bar c \lor a \cdot b =$

$= \bar a \cdot \bar b \cdot c \lor (\bar a \cdot b \lor a) \cdot \bar c \lor a \cdot b =$

$= \bar a \cdot \bar b \cdot c \lor b \cdot \bar c \lor a \cdot \bar c \lor a \cdot b.$

КНФ: $(a \lor b \lor c) \cdot (a \lor \bar b \lor \bar c) \cdot (\bar a \lor b \lor \bar c).$

```
IF a THEN
    IF b THEN
        f := TRUE
    ELSE
        IF c THEN
            f := FALSE
        ELSE
            f := TRUE
ELSE
    IF b THEN
        IF c THEN
            f := FALSE
        ELSE
            f := TRUE
    ELSE
        IF c THEN
            f := TRUE
        ELSE
            f := FALSE
```

Задание 2. Булева функция f(a, b, c, d) задана своими значениями. Используя метод Куайна-Мак-Класки, найти минимальную ДНФ этой функции.

f(a, b, c, d) = (1000 1111 1001 0000).

Решение.

a	b	c	d	f(a,b,c,d)
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

T. I		T. II		T. III		T. IVa		T. IVб		T. V		
0	0000	0	0000	0,1	0-00	0,5	-000	0,5	-000	0,5	-000	✓
1	0100	1	0100	0,5	-000	0,1	0-00	0,1	0-00	0,1	0-00	✗
2	0101	5	1000	1,2	010-	1,3	01-0	1,3,2,4	01--	1,3,2,4	01- -	✓
3	0110	2	0101	1,3	01-0	2,4	01-1	~~1,2,3,4~~	~~01--~~	6	1011	✓
4	0111	3	0110	2,4	01-1	1,2	010-	6	1011			
5	1000	4	0111	3,4	011-	3,4	011-					
6	1011	6	1011	6	1011	6	1011					

Элементарные конъюнкции:

-000 : $\neg b \cdot \neg c \cdot \neg d$

01- - : $\neg a \cdot b$

1011 : $a \cdot \neg b \cdot c \cdot d$

Минимальная ДНФ:

$\neg b \cdot \neg c \cdot \neg d \vee \neg a \cdot b \vee a \cdot \neg b \cdot c \cdot d$.

Задание 3. Дан трехместный предикат P(x,y,z) = y $\geq$ x + z. Предметные переменные x, y, z принимают значения соответственно из предметных областей Mx, My, Mz.

а) Подобрать предметные области Mx, My, Mz, каждую мощности не меньше двух, таким образом, чтобы приблизительно в половине случаев предикат P(x,y,z) был выполним. Во всех дальнейших пунктах использовать эти предметные области.

б) Путем фиксации значения одной из предметных переменных получить из P(x,y,z) сначала выполнимый, а затем тождественно ложный двухместный предикат (если это невозможно сделать в заданных предметных областях, то объяснить, почему).

в) Путем фиксации значений двух предметных переменных получить из P(x,y,z) сначала тождественно истинный, а затем тождественно ложный одноместный предикат (если это невозможно сделать в заданных предметных областях, то объяснить, почему).

г) Путем фиксации значений всех предметных переменных получить из P(x,y,z) сначала ложное, а затем истинное высказывание (нульместный предикат).

д) Проверить истинность заданных высказываний, полученных из P(x,y,z) путем связывания всех предметных переменных кванторами. Пояснить полученные результаты.

Решение.

а) Пусть $M_x = \{2,3,4\}$, $M_y = \{3,4,5\}$, $M_z = \{1,2\}$.

P(2,3,1) = И, P(2,3,2) = Л, P(2,4,1) = И, P(2,4,2) = И, P(2,5,1) = И, P(2,5,2) = И, P(3,3,1) = Л, P(3,3,2) = Л, P(3,4,1) = И, P(3,4,2) = Л, P(3,5,1) = И, P(3,5,2) = И, P(4,3,1) = Л, P(4,3,2) = Л, P(4,4,1) = Л, P(4,4,2) = Л, P(4,5,1) = И, P(4,5,2) = Л.

Требование о том, чтобы на выбранных предметных областях предикат был выполним хотя бы в половине случаев, соблюдается, значит, предметные области подобраны правильно.

б) Двухместный предикат P(x,y,1) выполним, так как, например, P(2,3,1) = И.

Получить из P(x,y,z) тождественно ложный двухместный предикат на заданных предметных областях невозможно.

Рассмотрим крайние случаи, исходя из вида предиката:

при фиксации переменной y наименьшим значением (3) предикат P(x,3,z) примет значение ИСТИНА при x=2, z=1;

при фиксации переменной x наибольшим значением (4) предикат P(4,y,z) примет значение ИСТИНА при y=5, z=1;

при фиксации переменной z наибольшим значением (2) предикат P(x,y,2) примет значение ИСТИНА, например, при y=5, x=2.

в) P(x,5,1) – тождественно истинный одноместный предикат, т.к. P(2,5,1)=P(3,5,1)=P(4,5,1)=И.

P(x,3,2) – тождественно ложный одноместный предикат, т.к. P(2,3,2)=P(3,3,2)=P(4,3,2) = Л.

г) Ложное и истинное высказывания:

$$P(2,3,2) = Л,\ \ P(2,5,1) = И.$$

д) $\exists y \forall x \exists z\, P(x,y,z) = \exists y(\forall x(\exists z\, P(x,y,z))) = \exists y(\forall x(P(x,y,1) \vee P(x,y,2))) =$

$= \exists y((P(2,y,1) \vee P(2,y,2)) \wedge (P(3,y,1) \vee P(3,y,2)) \wedge (P(4,y,1) \vee P(4,y,2))) =$

$= \quad ((P(2,3,1) \vee P(2,3,2)) \wedge (P(3,3,1) \vee P(3,3,2)) \wedge (P(4,3,1) \vee P(4,3,2))) \vee$

$\vee ((P(2,4,1) \vee P(2,4,2)) \wedge (P(3,4,1) \vee P(3,4,2)) \wedge (P(4,4,1) \vee P(4,4,2))) \vee$

$\vee ((P(2,5,1) \vee P(2,5,2)) \wedge (P(3,5,1) \vee P(3,5,2)) \wedge (P(4,5,1) \vee P(4,5,2))) =$

$= ((И \vee Л) \wedge (Л \vee Л) \wedge (Л \vee Л)) \vee ((И \vee И) \wedge (И \vee Л) \wedge (Л \vee Л)) \vee ((И \vee И) \wedge (И \vee И) \wedge (И \vee Л))=$

= ИСТИНА.

$\forall x \forall y \exists z\, P(x,y,z) = \forall x(\forall y(\exists z\, P(x,y,z))) = \forall x(\forall y(P(x,y,1) \vee P(x,y,2))) =$

$= \forall x((P(x,3,1) \vee P(x,3,2)) \wedge (P(x,4,1) \vee P(x,4,2)) \wedge (P(x,5,1) \vee P(x,5,2))) =$

$= \quad ((P(2,3,1) \vee P(2,3,2)) \wedge (P(2,4,1) \vee P(2,4,2)) \wedge (P(2,5,1) \vee P(2,5,2))) \wedge$

$\wedge ((P(3,3,1) \vee P(3,3,2)) \wedge (P(3,4,1) \vee P(3,4,2)) \wedge (P(3,5,1) \vee P(3,5,2))) \wedge$

$\wedge ((P(4,3,1) \vee P(4,3,2)) \wedge (P(4,4,1) \vee P(4,4,2)) \wedge (P(4,5,1) \vee P(4,5,2))) =$

$= ((И \vee Л) \wedge (И \vee И) \wedge (И \vee И)) \wedge ((Л \vee Л) \wedge (И \vee Л) \wedge (И \vee И)) \wedge ((Л \vee Л) \wedge (Л \vee Л) \wedge (И \vee Л))=$

= ЛОЖЬ.