Примеры оформления решенных заданий КР№1

Задание 1. Дан универсум U={x | x – целое, $0 \le x \le 9$} и множества A, B, C, D из U, заданные описанием или перечислением своих элементов. Выяснить, из каких элементов состоят множества B и D, а также множество $M \subseteq U$, заданное так, как указано ниже в таблице.

№	A	B	C	D
0	{1, 2, 3, 5, 7, 9}	$\{x \in U \mid x$ - нечётное$\}$	{3, 6, 8, 9}	$\{x \in \mathbb{N} \mid 4 \le x \le 9\}$

№	Условия, определяющие множество M
0	$M \subseteq C$, $\lvert M \rvert = 3$, $6 \in M$, $(D \backslash B) \cap C \subseteq M$, $\{2,3,4\} \cap M = \varnothing$

Решение. $B = \{x \in U \mid x$ - нечётное$\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. $D = \{x \in \mathbb{N} \mid 4 \le x \le 9\} = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

– $M \subseteq C$, значит, в M могут присутствовать только элементы 3, 6, 8, 9 из множества C.

– $\lvert M \rvert = 3$, значит, в M в точности 3 элемента.

– $6 \in M$, значит, в M есть элемент 6: {3, 6, 8 , 9}.

– $(D \backslash B) \cap C \subseteq M$. $(D \backslash B) \cap C = (\{4, 5, 6, 7, 8, 9\} \backslash \{1, 3, 5, 7, 9\}) \cap \{3, 6, 8, 9\} = \{4,6,8\} \cap \{3,6,8,9\} = \{6, 8\}$.
$\{6, 8\} \subseteq M$, значит, в M есть также элемент 8: {3, 6, 8, 9}.

– $\{2,3,4\} \cap M = \varnothing$, значит, в M нет элементов 2, 3, 4: {~~3~~, 6, 8, 9}.

M = {6, 8, 9}.

Задание 2. Упростить выражение, заданное в таблице, символьными преобразованиями (с помощью свойств операций над множествами) и проверить правильность полученного результата с помощью диаграмм Эйлера.

0	$(B\backslash A \cup \overline{B \cup C} \cup \overline{B \,\Delta\, A} \cup (A \cap C)\backslash B) \cap ((B \cup \overline{A}) \cap \overline{C} \cup \overline{A} \cap \overline{B})$

Решение.

$(B\backslash A \cup \overline{B \cup C} \cup \overline{B \,\Delta\, A} \cup (A \cap C)\backslash B) \cap ((B \cup \overline{A}) \cap \overline{C} \cup \overline{A} \cap \overline{B}) =$

$= (B\backslash A \cup \overline{B} \cap \overline{C} \cup \overline{B \,\Delta\, A} \cup (A \cap C)\backslash B) \cap ((B \cup \overline{A}) \cap \overline{C} \cup \overline{A} \cap \overline{B}) =$

$= (B\backslash A \cup \overline{B} \cap \overline{C} \cup \overline{B \,\Delta\, A} \cup (A \cap C) \cap \overline{B}) \cap ((B \cup \overline{A}) \cap \overline{C} \cup \overline{A} \cap \overline{B}) =$

$= (B\backslash A \cup \overline{B} \cap (\overline{C} \cup (A \cap C)) \cup \overline{B \,\Delta\, A}) \cap ((B \cup \overline{A}) \cap \overline{C} \cup \overline{A} \cap \overline{B}) =$

$= (B\backslash A \cup \overline{B} \cap ((\overline{C} \cup A) \cap (\overline{C} \cup C)) \cup \overline{B \,\Delta\, A}) \cap ((B \cup \overline{A}) \cap \overline{C} \cup \overline{A} \cap \overline{B}) =$

$= (B\backslash A \cup \overline{B} \cap ((\overline{C} \cup A) \cap U) \cup \overline{B \,\Delta\, A}) \cap ((B \cup \overline{A}) \cap \overline{C} \cup \overline{A} \cap \overline{B}) =$

$= (B\backslash A \cup \overline{B} \cap (\overline{C} \cup A) \cup \overline{B \,\Delta\, A}) \cap ((B \cup \overline{A}) \cap \overline{C} \cup \overline{A} \cap \overline{B}) =$

$= (B\backslash A \cup \overline{B} \cap \overline{C} \cup \overline{B} \cap A \cup \overline{B \,\Delta\, A}) \cap ((B \cup \overline{A}) \cap \overline{C} \cup \overline{A} \cap \overline{B}) =$

$= (B\backslash A \cup \overline{B} \cap \overline{C} \cup A\backslash B \cup \overline{B \,\Delta\, A}) \cap ((B \cup \overline{A}) \cap \overline{C} \cup \overline{A} \cap \overline{B}) =$

$= (B \,\Delta\, A \cup \overline{B} \cap \overline{C} \cup \overline{B \,\Delta\, A}) \cap ((B \cup \overline{A}) \cap \overline{C} \cup \overline{A} \cap \overline{B}) =$

$= (U \cup \overline{B} \cap \overline{C}) \cap ((B \cup \overline{A}) \cap \overline{C} \cup \overline{A} \cap \overline{B}) = U \cap ((B \cup \overline{A}) \cap \overline{C} \cup \overline{A} \cap \overline{B}) =$

$= ((B \cup \overline{A}) \cap \overline{C} \cup \overline{A} \cap \overline{B}) = ((\overline{A} \cup B) \cap \overline{C} \cup \overline{A} \cap \overline{B}) = (\overline{C} \cap (\overline{A} \cup B)) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) =$

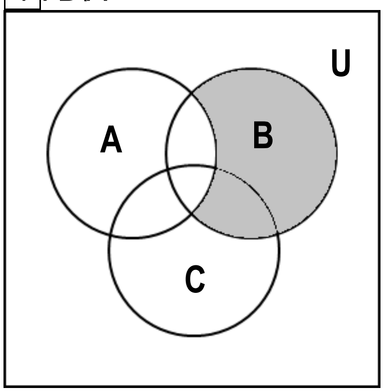
$= (\overline{C} \cap \overline{A}) \cup (\overline{C} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) = (\overline{C} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$.

Проверим правильность полученного результата с помощью диаграмм Эйлера.
Порядок выполнения действий:

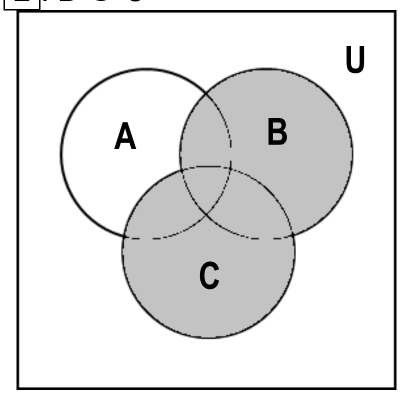
$$\left(B\underset{\boxed{1}}{\setminus}A \underset{\boxed{8}}{\cup} \overset{\boxed{3}}{\overline{B \underset{\boxed{2}}{\cup} C}} \underset{\boxed{9}}{\cup} \overset{\boxed{5}}{\overline{B \underset{\boxed{4}}{\Delta} A}} \underset{\boxed{10}}{\cup} (A \underset{\boxed{6}}{\cap} C)\underset{\boxed{7}}{\setminus}B\right) \underset{\boxed{19}}{\cap} \left((B \underset{\boxed{12}}{\cup} \overset{\boxed{11}}{\overline{A}}) \underset{\boxed{14}}{\cap} \overset{\boxed{13}}{\overline{C}} \underset{\boxed{18}}{\cup} \overset{\boxed{15}}{\overline{A}} \underset{\boxed{17}}{\cap} \overset{\boxed{16}}{\overline{B}}\right)$$

Для каждого действия построим диаграмму Эйлера, на которой закрасим область, соответствующую результату операции.

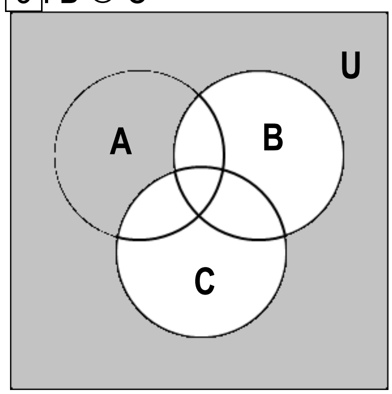
$\boxed{1}$: $B \setminus A$



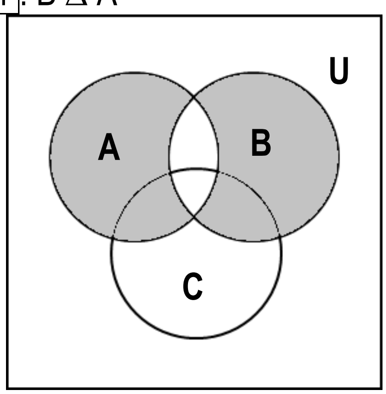
$\boxed{2}$: $B \cup C$



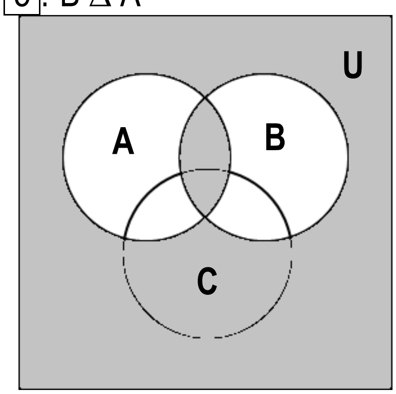
$\boxed{3}$: $\overline{B \cup C}$



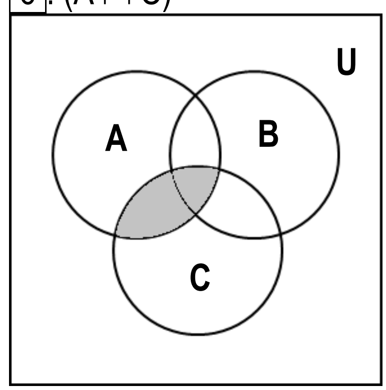
$\boxed{4}$: $B \,\Delta\, A$



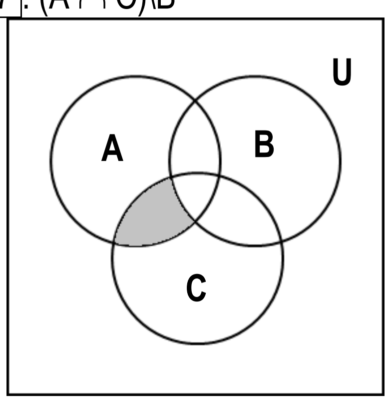
$\boxed{5}$: $\overline{B \,\Delta\, A}$



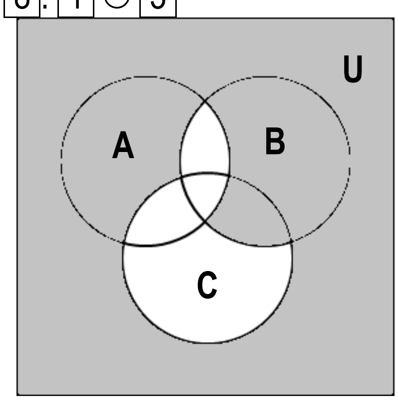
$\boxed{6}$: $(A \cap C)$



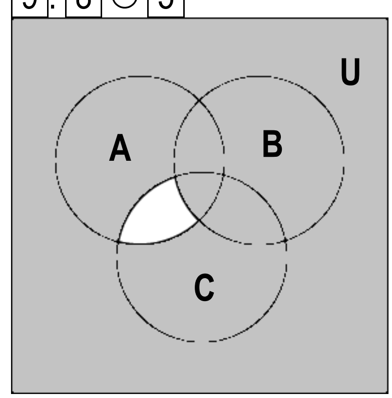
$\boxed{7}$: $(A \cap C) \setminus B$



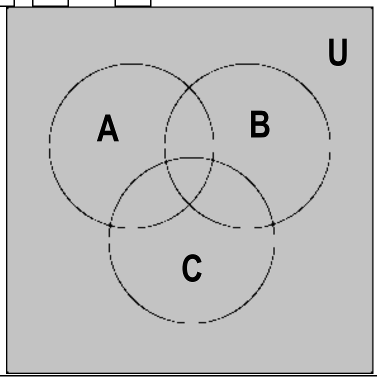
$\boxed{8}$: $\boxed{1} \cup \boxed{3}$



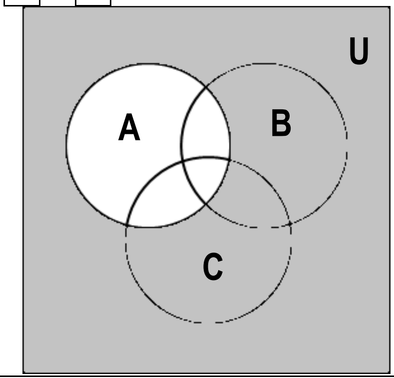
$\boxed{9}$: $\boxed{8} \cup \boxed{5}$



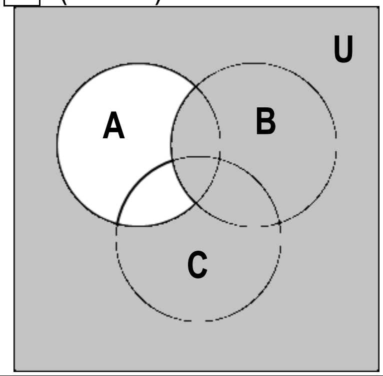
$\boxed{10}$: $\boxed{9} \cup \boxed{7}$



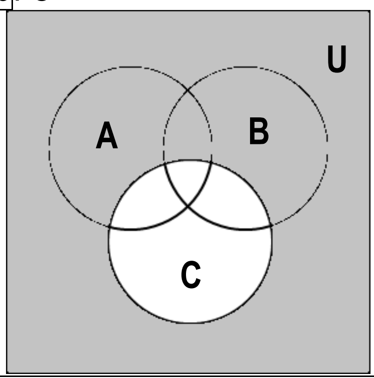
$\boxed{11}$ и $\boxed{15}$: $\overline{A}$



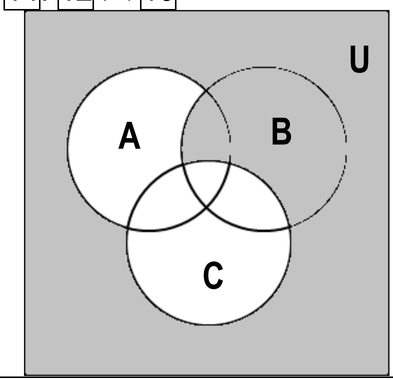
$\boxed{12}$: $(B \cup \overline{A})$



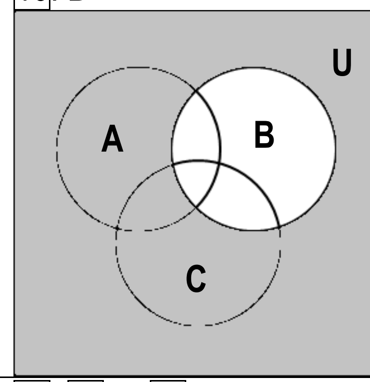
$\boxed{13}$: $\overline{C}$



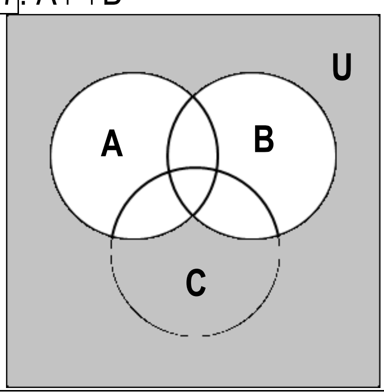
$\boxed{14}$: $\boxed{12} \cap \boxed{13}$



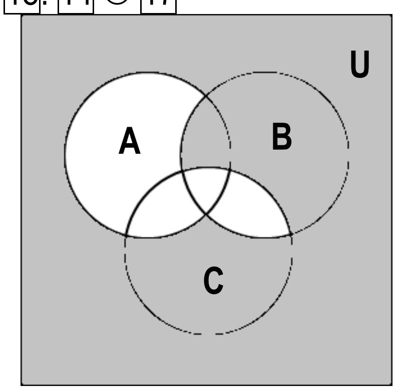
$\boxed{16}$: $\overline{B}$



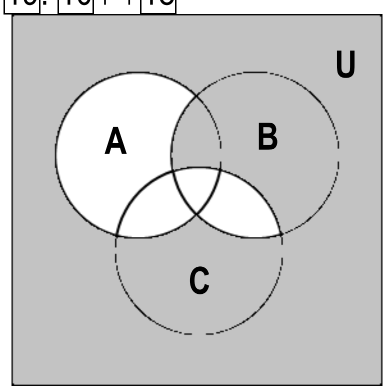
$\boxed{17}$: $\overline{A} \cap \overline{B}$



$\boxed{18}$: $\boxed{14} \cup \boxed{17}$

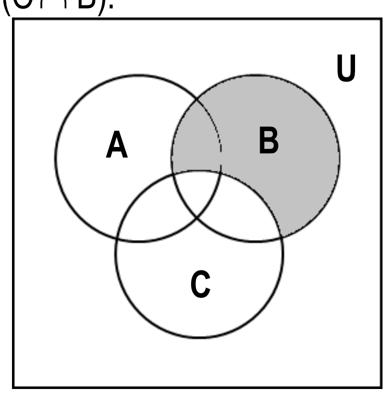


$\boxed{19}$: $\boxed{10} \cap \boxed{18}$

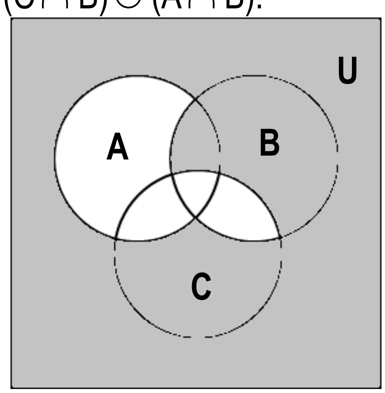


Далее построим диаграмму, соответствующую результату упрощения: $(\overline{C} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$. Построив $\overline{C} \cap B$ и объединив его с $\overline{A} \cap \overline{B}$ (построено выше), получим диаграмму, которая в точности совпадает с диаграммой, полученной при выполнении действия $\boxed{19}$.

$(\overline{C} \cap B)$:



$(\overline{C} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$:



Итоговая диаграмма, полученная при поэтапном упрощении исходного выражения, совпала с диаграммой для полученного ранее упрощенного выражения. Выражение упрощено верно.

Задание 3.

Даны множества X = Y = {1, 2, 3, 4, 5} и соответствия $Q_i \subseteq X \times Y$, i = 1, …, 4.

Q_1={(2,2),(1,2),(3,2),(4,5),(5,4)}, Q_2={(2,2),(3,2),(4,2),(1,3),(2,3)},

Q_3={(2,3),(3,2),(1,4),(3,1),(4,5)}, Q_4={(5,2),(1,3),(2,5),(4,1),(3,4)}.

Определить, каким является каждое из соответствий Q_i (i=1,…,4) (всюду определенное, сюръективное, функциональное, инъективное, биективное). Затем для каждого из соответствий Q_i (i=1,…,4), с учетом его свойств, выполнить следующее:

3.1. Если соответствие Q_i всюду определено, функционально, но не инъективно, то построить разбиение области определения соответствия на классы эквивалентности по отношению P: «два элемента эквивалентны между собой тогда и только тогда, когда они принадлежат прообразу одного и того же элемента».

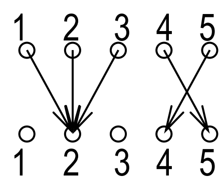
3.2. Если соответствие Q_i сюръективно, инъективно, но не функционально, то построить разбиение области значений соответствия на классы эквивалентности по отношению R: «два элемента эквивалентны между собой тогда и только тогда, когда они принадлежат образу одного и того же элемента».

3.3. Если соответствие Q_i не инъективно и не функционально, то найти нижнюю и верхнюю грани множества Q_i, введя на этом множестве отношение порядка, по которому сравниваются векторы одинаковой размерности (если $a=(a_1,a_2)$ и $b=(b_1,b_2)$, то $a < b$ тогда и только тогда, когда $a_i \le b_i$, i=1,2, и хотя бы одно из этих неравенств строгое).

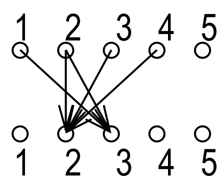
3.4. Если соответствие Q_i является биекцией, то построить соответствующую ему перестановку на множестве X и разложить ее на циклы.

Решение.

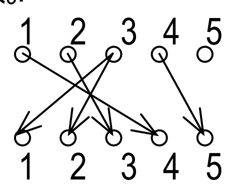
Q_1:



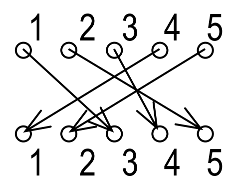
Q_2:



Q_3:



Q_4:



Свойства соответствий:

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
всюду определено	**Да**	**Нет** {1, 2, 3, 4} $\neq$ X	**Нет** {1, 2, 3, 4} $\neq$ X	**Да**
сюръективно	**Нет** {2, 5, 4}$\neq$Y	**Нет** {2, 3}$\neq$Y	**Да**	**Да**
функционально	**Да**	**Нет** {2, 3} – образ 2	**Нет** {1, 2} – образ 3	**Да**
инъективно	**Нет** {1,2,3} – прообраз 2	**Нет** {2, 3, 4} – прообраз 2	**Да**	**Да**
биективно	**Нет**	**Нет**	**Нет**	**Да**

Выполним пункты 3.1 – 3.4 с учетом свойств соответствий.

Соответствие Q_1.

Так как соответствие Q_1 всюду определено, функционально, но не инъективно, построим разбиение области определения соответствия Q_1 на классы эквивалентности по отношению P: «два элемента эквивалентны между собой тогда и только тогда, когда они принадлежат прообразу одного и того же элемента».

Разбиение области значений $Пр_1Q_1 = \{1,2,3,4,5\}$ на классы эквивалентности:

$$Пр_1Q_1 = \{1,2,3,4,5\} = \{1,2,3\} \cup \{4\} \cup \{5\}.$$

1 –й класс: прообраз элемента $2 \in Пр_2Q_1$: $\{1, 2, 3\}$,

2 –й класс: прообраз элемента $5 \in Пр_2Q_1$: $\{4\}$,

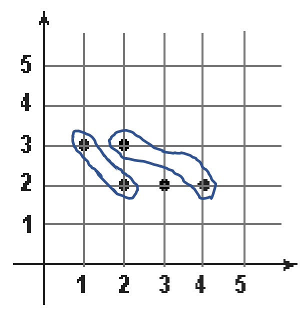
3 –й класс: прообраз элемента $4 \in Пр_2Q_1$: $\{5\}$.

Соответствие Q_2.

Поскольку соответствие Q_2 не инъективно и не функционально, найдем нижнюю и верхнюю грани множества Q_2.

Нижняя грань множества Q_2: $\{(1, 3), (2, 2)\}$.

Верхняя грань множества Q_2: $\{(2, 3), (4, 2)\}$.



Соответствие Q_3.

Т.к. соответствие Q_3 сюръективно и инъективно, но не функционально, то построим разбиение области значений соответствия на классы эквивалентности по отношению R: «два элемента эквивалентны между собой тогда и только тогда, когда они принадлежат образу одного и того же элемента».

Разбиение области значений $Пр_2Q_3 = \{1,2,3,4,5\}$ на классы эквивалентности:

$$Пр_2Q_3 = \{1,2,3,4,5\} = \{4\} \cup \{3\} \cup \{1, 2\} \cup \{5\}.$$

1 –й класс: образ элемента 1 из области определения соответствия – $\{4\}$,

2 –й класс: образ элемента 2 из области определения соответствия – $\{3\}$,

3 –й класс: образы элемента 3 из области определения соответствия – $\{1, 2\}$,

4 –й класс: образ элемента 4 из области определения соответствия – $\{5\}$.

Соответствие Q_4.

Поскольку соответствие $Q_4=\{(5,2),(1,3),(2,5),(4,1),(3,4)\}$ является биекцией, построим соответствующую ему перестановку на множестве X и разложим ее на циклы.

Перестановка на множестве X и ее разложение на циклы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1,3,4)(2,5)$$