Примеры выполнения заданий (с пояснениями)

<u>Задание 1.</u> Булева функция $\phi(a, b, c)$ задана как суперпозиция некоторых функций $\phi_i(x, y)$ (список функций ϕ_i см. в Таблице 1).

$$\phi(a, b, c) = \phi_6(\phi_1(a, \phi_2(c, b)), \phi_{14}(\phi_9(b, c), \phi_{10}(b, a))).$$

1) По заданной суперпозиции получить соответствующее логическое выражение;
2) Получить таблицу значений заданной функции;
3) Получить СДНФ, СКНФ, СПНФ заданной функции;
4) Получить представление заданной функции в виде минимальных ДНФ и КНФ;
5) Получить представление заданной функции в виде сокращенной БДР.
   По сокращенной БДР записать представление функции:
   – с помощью оператора IF-THEN-ELSE (ITE-представление);
   – в виде ДНФ (максимально упростить найденную ДНФ, если это возможно);
   – в виде КНФ (максимально упростить найденную КНФ, если это возможно).

Таблица 1.

x	y	ϕ_0	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4	ϕ_5	ϕ_6	ϕ_7	ϕ_8	ϕ_9	ϕ_{10}	ϕ_{11}	ϕ_{12}	ϕ_{13}	ϕ_{14}	ϕ_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
связки		0	$\wedge$	$\not\rightarrow$	x	$\not\leftarrow$	y	$\oplus$	$\vee$	$\downarrow$	~	$\bar{y}$	$\leftarrow$	$\bar{x}$	$\rightarrow$	|	1
			И						ИЛИ	НЕ-ИЛИ		НЕ		НЕ		НЕ-И	

В нижней строке этой таблицы представлены обозначения соответствующих функций (или связки, которые помещаются между обозначениями переменных).

функция	**название**
$\phi_0(x, y) \equiv 0$	константа нуля
$\phi_{15}(x, y) \equiv 1$	константа единицы
$\phi_{12}(x, y) = \bar{x}$	отрицание 1го аргумента
$\phi_{10}(x, y) = \bar{y}$	отрицание 2го аргумента
$\phi_1(x, y) = x \wedge y$	конъюнкция
$\phi_7(x, y) = x \vee y$	дизъюнкция
$\phi_6(x, y) = x \oplus y$	сложение по модулю 2
$\phi_9(x, y) = x \sim y$	эквиваленция

функция	**название**
$\phi_{13}(x, y) = x \rightarrow y$	левая импликация
$\phi_2(x, y) = x \not\rightarrow y$	левая коимпликация
$\phi_{11}(x, y) = x \leftarrow y$	правая импликация
$\phi_4(x, y) = x \not\leftarrow y$	правая коимпликация
$\phi_8(x, y) = x \downarrow y$	стрелка Пирса
$\phi_{14}(x, y) = x \mid y$	штрих Шеффера

<u>Решение.</u>

1) По заданной суперпозиции получить соответствующее логическое выражение.

$$\phi(a, b, c) = \phi_6(\phi_1(a, \phi_2(c, b)), \phi_{14}(\phi_9(b, c), \phi_{10}(b, a))).$$

Видим, что каждая из функций $\phi_i(x, y)$ зависит от двух переменных. Выделим аргументы, от которых зависит каждая из функций, образующих суперпозицию.

Аргументы внешней функции ϕ_6:

$$\phi_6(\boxed{\phi_1(a, \phi_2(c, b))}, \boxed{\phi_{14}(\phi_9(b, c), \phi_{10}(b, a))})$$

Аргументы вложенных функций первого уровня:

$$\phi_1(\boxed{a}, \boxed{\phi_2(c, b)})$$

$$\phi_{14}(\boxed{\phi_9(b, c)}, \boxed{\phi_{10}(b, a)})$$

Аргументами вложенных функций второго уровня (ϕ_2, ϕ_9, ϕ_{10}) являются независимые переменные.

Для каждой из функций, входящих в суперпозицию, запишем соответствующее выражение:

$\phi_2(c, b) = c \not\rightarrow b$

$\phi_9(b, c) = b \sim c$

$\phi_{10}(b, a) = \overline{a}$

$\phi_1(a, \phi_2(c, b)) = a \wedge (c \not\rightarrow b)$

$\phi_{14}(\phi_9(b, c), \phi_{10}(b, a)) = (b \sim c) \mid \overline{a}$

Окончательно,

$\phi_6(\phi_1(a, \phi_2(c, b)), \phi_{14}(\phi_9(b, c), \phi_{10}(b, a))) = (a \wedge (c \not\rightarrow b)) \oplus ((b \sim c) \mid \overline{a})$.

Таким образом,

$$\phi(a, b, c) = (a \wedge (c \not\rightarrow b)) \oplus ((b \sim c) \mid \overline{a}).$$

2) Получим таблицу значений заданной функции. Определим порядок выполнения операций (один из возможных):

2 1 6 3 5 4

$$\phi(a, b, c) = (a \wedge (c \not\rightarrow b)) \oplus ((b \sim c) \mid \overline{a}).$$

Заполним таблицу значений функции, последовательно подставляя каждый набор значений аргументов a, b, c в выражение $(a \,\&\, (c \not\rightarrow b)) \oplus ((b \sim c) \mid \overline{a})$ и вычисляя соответствующее значение функции (с использованием Таблицы 1), например,

$$\phi(0, 0, 1) = (0 \wedge (1 \not\rightarrow 0)) \oplus ((0 \sim 1) \mid \overline{0}) = (0 \wedge 1) \oplus (0 \mid 1) = 0 \oplus 1 = 1.$$

Результаты представлены в Таблице 2. Каждый столбец заполняется значениями соответствующей операции; столбцы с аргументами операции выделены заливкой.

Таблица 2.

Операция 1

a	b	c	$(a \wedge (c \nrightarrow b)) \oplus ((b \sim c) \mid \bar{a})$
0	0	0	**0**
0	0	1	**1**
0	1	0	**0**
0	1	1	**0**
1	0	0	**0**
1	0	1	**1**
1	1	0	**0**
1	1	1	**0**

Операция 2

a	b	c	$(a \wedge (c \nrightarrow b)) \oplus ((b \sim c) \mid \bar{a})$	
0	0	0	**0**	0
0	0	1	**0**	1
0	1	0	**0**	0
0	1	1	**0**	0
1	0	0	**0**	0
1	0	1	**1**	1
1	1	0	**0**	0
1	1	1	**0**	0

Операция 3

a	b	c	$(a \wedge (c \nrightarrow b)) \oplus ((b \sim c) \mid \bar{a})$		
0	0	0	0	0	**1**
0	0	1	0	1	**0**
0	1	0	0	0	**0**
0	1	1	0	0	**1**
1	0	0	0	0	**1**
1	0	1	1	1	**0**
1	1	0	0	0	**0**
1	1	1	0	0	**1**

Операция 4

a	b	c	$(a \wedge (c \nrightarrow b)) \oplus ((b \sim c) \mid \bar{a})$			
0	0	0	0	0	1	**1**
0	0	1	0	1	0	**1**
0	1	0	0	0	0	**1**
0	1	1	0	0	1	**1**
1	0	0	0	0	1	**0**
1	0	1	1	1	0	**0**
1	1	0	0	0	0	**0**
1	1	1	0	0	1	**0**

Операция 5

a	b	c	$(a \wedge (c \nrightarrow b)) \oplus ((b \sim c) \mid \bar{a})$				
0	0	0	0	0	1	**0**	1
0	0	1	0	1	0	**1**	1
0	1	0	0	0	0	**1**	1
0	1	1	0	0	1	**0**	1
1	0	0	0	0	1	**1**	0
1	0	1	1	1	0	**1**	0
1	1	0	0	0	0	**1**	0
1	1	1	0	0	1	**1**	0

Операция 6

a	b	c	$(a \wedge (c \nrightarrow b)) \oplus ((b \sim c) \mid \bar{a})$					
0	0	0	0	0	**0**	1	0	1
0	0	1	0	1	**1**	0	1	1
0	1	0	0	0	**1**	0	1	1
0	1	1	0	0	**0**	1	0	1
1	0	0	0	0	**1**	1	1	0
1	0	1	1	1	**0**	0	1	0
1	1	0	0	0	**1**	0	1	0
1	1	1	0	0	**1**	1	1	0

Таким образом, в обведённом столбце получены значения заданной булевой функции. Запишем их в виде вектор-строки, транспонировав соответствующий столбец таблицы:

$$\phi(a, b, c) = (0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1).$$

При заполнении таблицы можно учитывать свойства выполняемых операций. В этом случае вычислять все значения каждой из операций не обязательно. Например, если хотя бы один из аргументов конъюнкции равен 0, то и значение конъюнкции в этом случае равно 0. Поэтому в выражении $a \wedge (c \nrightarrow b)$ при a=0 значение аргумента $(c \nrightarrow b)$ можно не вычислять. Аналогичным образом можно использовать свойства остальных операций.

3) Получим СДНФ, СКНФ и СПНФ заданной функции. Далее, обозначая конъюнкцию, вместо знака $\wedge$ будем использовать знак $\cdot$.

Для получения СДНФ рассмотрим все наборы, на которых функция принимает значение, равное 1. Это наборы (0,0,1), (0,1,0), (1,0,0), (1,1,0), (1,1,1).

Определяем элементарные конъюнкции, соответствующие этим наборам (нулевому значению переменной соответствует отрицание этой переменной, а единичному – переменная без отрицания):

$$\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot c,\ \overline{a}\cdot b\cdot\overline{c},\ a\cdot\overline{b}\cdot\overline{c},\ a\cdot b\cdot\overline{c},\ a\cdot b\cdot c.$$

Соединяем эти конъюнкции знаком дизъюнкции и получаем СДНФ заданной функции:

$$\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot c\vee\overline{a}\cdot b\cdot\overline{c}\vee a\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}\vee a\cdot b\cdot\overline{c}\vee a\cdot b\cdot c.$$

Для получения СКНФ рассмотрим все наборы, на которых функция принимает значение, равное 0. Это наборы (0,0,0), (0,1,1), (1,0,1).

Определяем элементарные дизъюнкции, соответствующие этим наборам (единичному значению переменной соответствует отрицание этой переменной, а нулевому – переменная без отрицания):

$$a\vee b\vee c,\ a\vee\overline{b}\vee\overline{c},\ \overline{a}\vee b\vee\overline{c}.$$

Соединяем эти дизъюнкции знаком конъюнкции и получаем СКНФ заданной функции:

$$(a\vee b\vee c)\cdot(a\vee\overline{b}\vee\overline{c})\cdot(\overline{a}\vee b\vee\overline{c}).$$

Для получения СПНФ воспользуемся найденной СДНФ функции (никакое другое представление функции при данном подходе нельзя брать в качестве исходного). Заменим все операции дизъюнкции на операцию «сложение по модулю 2», а для всех операций отрицания сделаем замену по правилу: $\overline{x} = x\oplus 1$. В получившемся выражении раскроем скобки по правилу $x\cdot(y\oplus z) = x\cdot y\oplus x\cdot z$ и удалим пары одинаковых слагаемых (поскольку $x\oplus x = 0$, $x\oplus 0 = x$).

$$\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot c\vee\overline{a}\cdot b\cdot\overline{c}\vee a\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}\vee a\cdot b\cdot\overline{c}\vee a\cdot b\cdot c =$$

=(делаем замену для операций дизъюнкции и отрицания)=

$(a\oplus1)\cdot(b\oplus1)\cdot c\oplus(a\oplus1)\cdot b\cdot(c\oplus1)\oplus a\cdot(b\oplus1)\cdot(c\oplus1)\oplus a\cdot b\cdot(c\oplus1)\oplus a\cdot b\cdot c =$

=(раскрываем скобки)=

$= a\cdot b\cdot c\oplus a\cdot c\oplus b\cdot c\oplus c\oplus a\cdot b\cdot c\oplus a\cdot b\oplus b\cdot c\oplus b\oplus a\cdot b\cdot c\oplus a\cdot c\oplus a\cdot b\oplus a\oplus a\cdot b\cdot c\oplus a\cdot b\oplus a\cdot b\cdot c =$

=(вычеркиваем пары одинаковых слагаемых) =

$= \cancel{a\cdot b\cdot c}\oplus\cancel{a\cdot c}\oplus\cancel{b\cdot c}\oplus c\oplus\cancel{a\cdot b\cdot c}\oplus\cancel{a\cdot b}\oplus\cancel{b\cdot c}\oplus b\oplus\cancel{a\cdot b\cdot c}\oplus\cancel{a\cdot c}\oplus\cancel{a\cdot b}\oplus a\oplus\cancel{a\cdot b\cdot c}\oplus a\cdot b\oplus a\cdot b\cdot c =$

$= a\cdot b\cdot c\oplus a\cdot b\oplus a\oplus b\oplus c.$

Заметим, что СПНФ (полином Жегалкина) можно получить и другими способами. Но так как представление функции с помощью полинома Жегалкина является единственным, то при любом способе будет получаться один и тот же результат (с точностью до порядка слагаемых в полиноме).

Проверим, что полином найден правильно. Для этого построим таблицу значений по найденному полиному и сравним ее с таблицей значений заданной функции.

a	b	c	$\phi(x,y,z)$	$a \cdot b \cdot c \oplus a \cdot b \oplus a \oplus b \oplus c$		
0	**0**	**0**	**0**	$0 \cdot b \cdot c \oplus 0 \cdot b \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0$	=	**0**
0	**0**	**1**	**1**	$0 \cdot b \cdot c \oplus 0 \cdot b \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1$	=	**1**
0	**1**	**0**	**1**	$0 \cdot b \cdot c \oplus 0 \cdot b \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0$	=	**1**
0	**1**	**1**	**0**	$0 \cdot b \cdot c \oplus 0 \cdot b \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1$	=	**0**
1	**0**	**0**	**1**	$a \cdot 0 \cdot c \oplus a \cdot 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0$	=	**1**
1	**0**	**1**	**0**	$a \cdot 0 \cdot c \oplus a \cdot 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1$	=	**0**
1	**1**	**0**	**1**	$a \cdot b \cdot 0 \oplus 1 \cdot 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0$	=	**1**
1	**1**	**1**	**1**	$1 \cdot 1 \cdot 1 \oplus 1 \cdot 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1$	=	**1**

При вычислениях учитывались свойства конъюнкции ($0 \cdot x = 0$) и свойства сложения по модулю 2 ($0 \oplus 0 = 1 \oplus 1 = 0$ и $0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1$).

Видим, что табличные значения функции $\phi(x,y,z)$ и полинома Жегалкина совпали, значит, полином Жегалкина этой функции найден правильно.

4) Получить представление заданной функции в виде минимальных ДНФ и КНФ.

Воспользуемся картами Карно.

Для получения минимальной ДНФ построим покрытия единиц функции и запишем элементарные конъюнкции, соответствующие этим покрытиям. (Очередное получаемое покрытие выделено заливкой; соответствующая ему элементарная конъюнкция записана под картой Карно; в элементарную конъюнкцию попадают только переменные, которые принимают постоянные значения вдоль стороны покрытия).

Первое покрытие:

ab \ c	0	1
00		**1**
01	**1**	
11	**1**	**1**
10	**1**	

$b \cdot \overline{c}$

Второе покрытие:

ab \ c	0	1
00		**1**
01	**1**	
11	**1**	**1**
10	**1**	

$a \cdot \overline{c}$

Третье покрытие:

ab \ c	0	1
00		**1**
01	**1**	
11	**1**	**1**
10	**1**	

$a \cdot b$

Четвертое покрытие:

ab \ c	0	1
00		**1**
01	**1**	
11	**1**	**1**
10	**1**	

$\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot c$

Минимальная ДНФ: $b \cdot \overline{c} \vee a \cdot \overline{c} \vee a \cdot b \vee \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot c$.

Для получения минимальной КНФ построим покрытия нулей функции и запишем элементарные дизъюнкции, соответствующие этим покрытиям.

Первое покрытие:

ab \ c	0	1
00	**0**	
01		**0**
11		
10		**0**

$a \vee b \vee c$

Второе покрытие:

ab \ c	0	1
00	**0**	
01		**0**
11		
10		**0**

$a \vee \overline{b} \vee \overline{c}$

Третье покрытие:

ab \ c	0	1
00	**0**	
01		**0**
11		
10		**0**

$\overline{a} \vee b \vee \overline{c}$

Минимальная КНФ: $(a \vee b \vee c) \cdot (a \vee \overline{b} \vee \overline{c}) \cdot (\overline{a} \vee b \vee \overline{c})$.

Заметим, что в элементарной конъюнкции нулевому значению аргумента соответствует переменная без отрицания, а единичному – переменная с отрицанием.

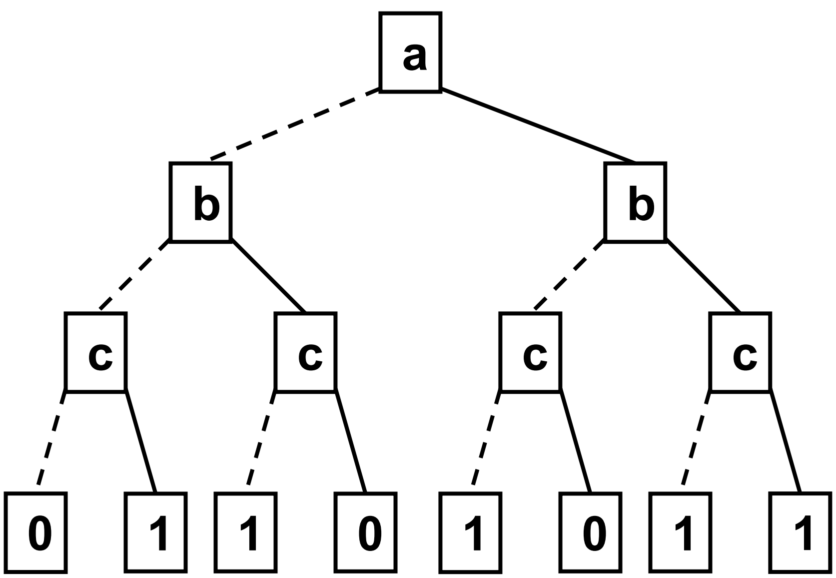
5) Получить представление заданной функции в виде сокращенной БДР.

По сокращенной БДР записать представление функции:

– с помощью оператора IF-THEN-ELSE (ITE-представление);
– в виде ДНФ (максимально упростить найденную ДНФ, если это возможно);
– в виде КНФ (максимально упростить найденную КНФ, если это возможно).

Выберем порядок расположения переменных по уровням: **a, b, c**.

Построим полную БДР, соответствующую выбранному порядку:

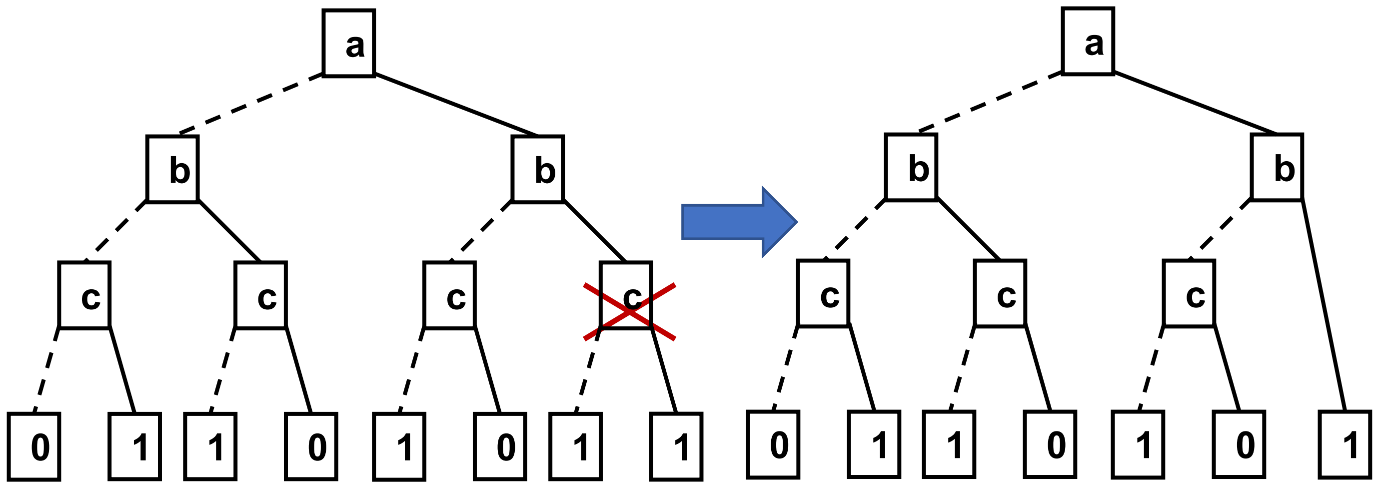


a	b	c	ϕ(x,y,z)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

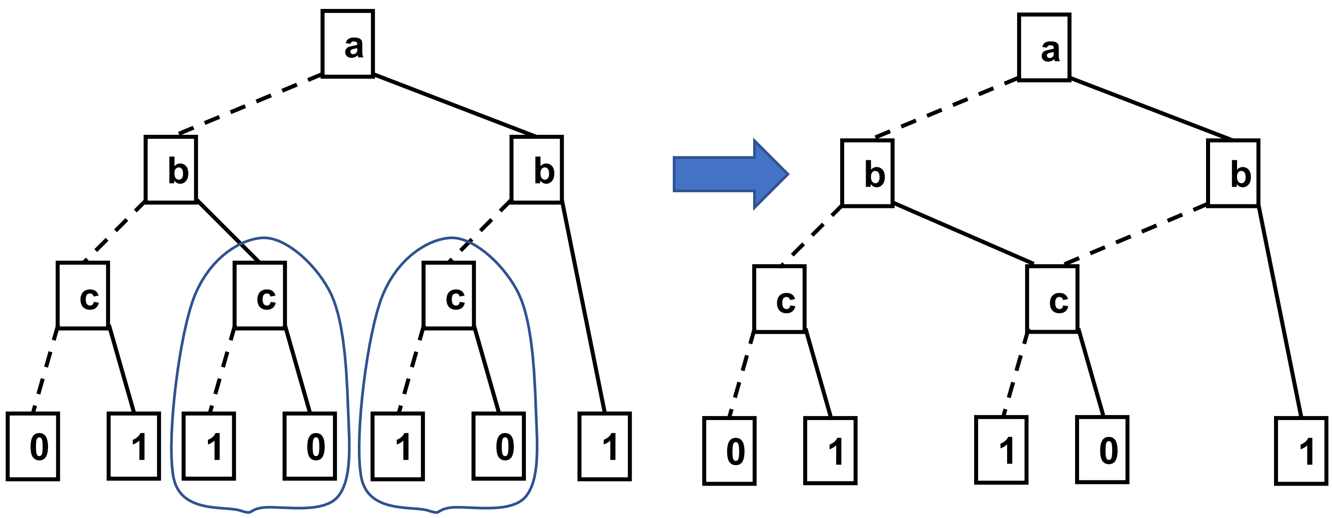
Получим сокращенную БДР для выбранного порядка переменных.

Для этого выполняем, пока это возможно, две операции – удаление избыточных узлов и склеивание одинаковых подграфов.

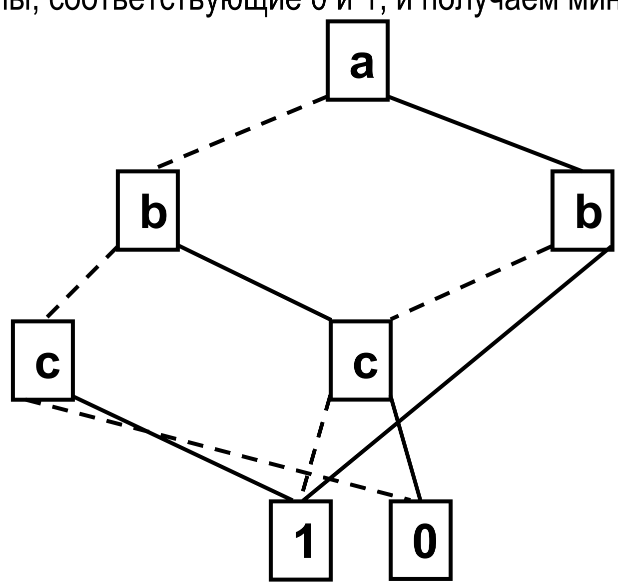
Удаляем избыточные узлы (в данном случае такой узел один):



Из нескольких одинаковых подграфов оставляем только один:



Убираем избыточные узлы, соответствующие 0 и 1, и получаем минимальную БДР:

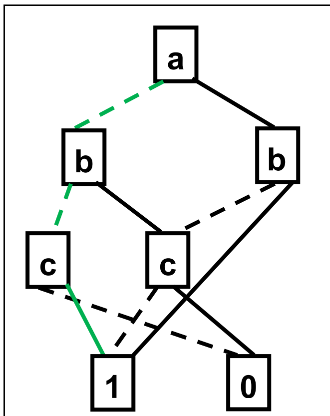
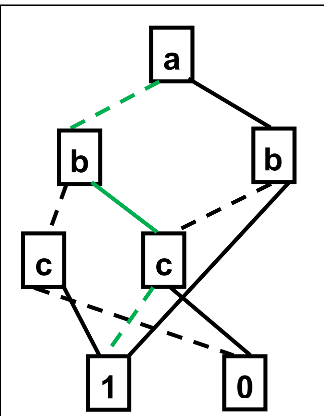
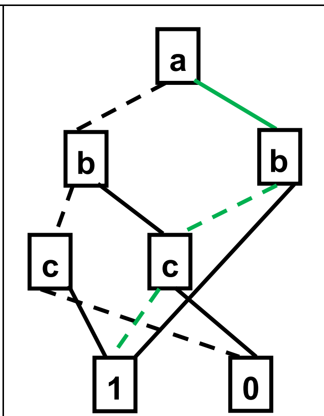
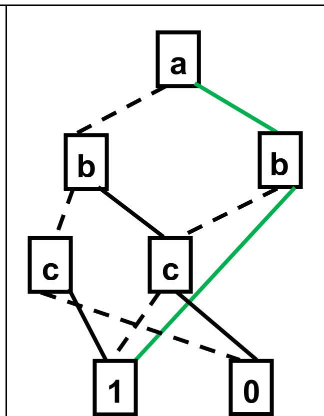


В полученной минимальной БДР – 4 промежуточных узла. Если перебрать все возможные порядки расположения переменных по уровням (еще пять вариантов – a, c, b; b, a, c; b, c, a; c, a, b; c, b, a), то в каждом случае соответствующая минимальная БДР будет также содержать 4 промежуточных узла, т.е. количество промежуточных узлов нельзя уменьшить.

По найденной сокращенной БДР получим ITE- представление для заданной функции:

```
IF a THEN
        IF b THEN
                f := TRUE
        ELSE
                IF c THEN
                        f := FALSE
                ELSE
                        f := TRUE
ELSE
        IF b THEN
                IF c THEN
                        f := FALSE
                ELSE
                        f := TRUE
        ELSE
                IF c THEN
                        f := TRUE
                ELSE
                        f := FALSE
```

По сокращенной БДР получим представление заданной функции в виде ДНФ. Для этого нужно найти все пути из вершины первого уровня в вершину 1 и по каждому из них записать элементарную конъюнкцию. В нашем случае таких путей четыре (каждый путь выделен цветом на сокращенной БДР; ниже записана соответствующая элементарная конъюнкция).

			
$\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c$	$\bar{a} \cdot b \cdot \bar{c}$	$a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}$	$a \cdot b$

ДНФ: $\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c \vee \bar{a} \cdot b \cdot \bar{c} \vee a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} \vee a \cdot b.$

Упростим найденную ДНФ, используя законы булевой алгебры. Законы булевой алгебры аналогичны свойствам операций над множествами (отрицание соответствует дополнению, конъюнкция – пересечению, дизъюнкция – объединению). Они представлены в таблице:

1.	$(f_1 \vee f_2) \vee f_3 = f_1 \vee (f_2 \vee f_3) = f_1 \vee f_2 \vee f_3$	5.	$f_1 \vee (f_1 \wedge f_2) = f_1$	9.	$f_1 \vee 1 = 1$
	$(f_1 \wedge f_2) \wedge f_3 = f_1 \wedge (f_2 \wedge f_3) = f_1 \wedge f_2 \wedge f_3$		$f_1 \wedge (f_1 \vee f_2) = f_1$		$f_1 \wedge 0 = 0$
2.	$f_1 \vee f_2 = f_2 \vee f_1$	6.	$\neg\neg f_1 = f_1$	10.	$\neg(f_1 \vee f_2) = \neg f_1 \wedge \neg f_2$
	$f_1 \wedge f_2 = f_2 \wedge f_1$				$\neg(f_1 \wedge f_2) = \neg f_1 \vee \neg f_2$
3.	$f_1 \wedge (f_2 \vee f_3) = (f_1 \wedge f_2) \vee (f_1 \wedge f_3)$	7.	$\neg f_1 \vee f_1 = 1$	11.	$f_1 \vee (\neg f_1 \wedge f_2) = f_1 \vee f_2$
	$f_1 \vee (f_2 \wedge f_3) = (f_1 \vee f_2) \wedge (f_1 \vee f_3)$		$\neg f_1 \wedge f_1 = 0$		$f_1 \wedge (\neg f_1 \vee f_2) = f_1 \wedge f_2$
4.	$f_1 \vee f_1 = f_1$	8.	$f_1 \vee 0 = f_1$	12.	$(f_1 \wedge f_2) \vee (f_1 \wedge f_3) \vee (f_2 \wedge \neg f_3) =$ $= (f_1 \wedge f_3) \vee (f_2 \wedge \neg f_3)$
	$f_1 \wedge f_1 = f_1$		$f_1 \wedge 1 = f_1$		$(f_1 \vee f_2) \wedge (f_1 \vee f_3) \wedge (f_2 \vee \neg f_3) =$ $= (f_1 \vee f_3) \wedge (f_2 \vee \neg f_3)$

$\bar a \cdot \bar b \cdot c \vee \bar a \cdot b \cdot \bar c \vee a \cdot \bar b \cdot \bar c \vee a \cdot b$ = [применим закон 3 к выделенной части] =

$= \bar a \cdot \bar b \cdot c \vee \bar a \cdot b \cdot \bar c \vee a \cdot (\bar b \cdot \bar c \vee b)$ = [11] =

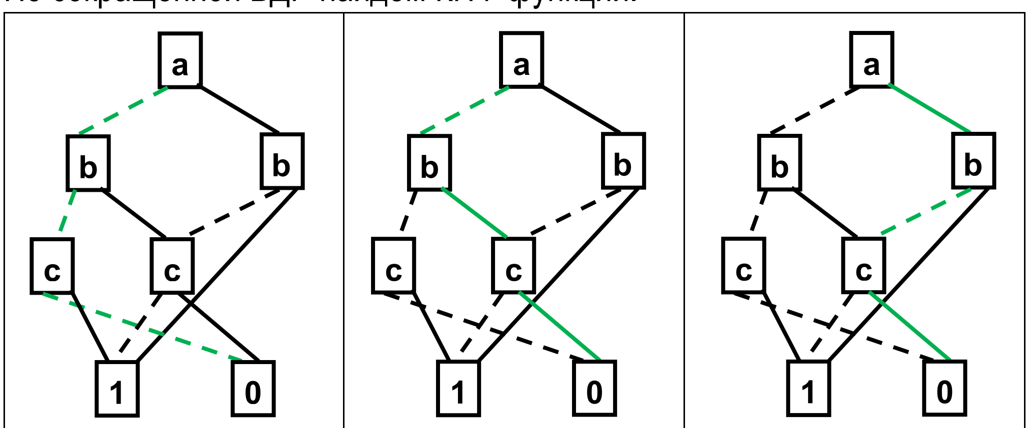
$= \bar a \cdot \bar b \cdot c \vee \bar a \cdot b \cdot \bar c \vee a \cdot (\bar c \vee b)$ = [3] =

$= \bar a \cdot \bar b \cdot c \vee \bar a \cdot b \cdot \bar c \vee a \cdot \bar c \vee a \cdot b$ = [3] =

$= \bar a \cdot \bar b \cdot c \vee (\bar a \cdot b \vee a) \cdot \bar c \vee a \cdot b$ = [11] =

$= \bar a \cdot \bar b \cdot c \vee (b \vee a) \cdot \bar c \vee a \cdot b$ = [3] = $\underline{\bar a \cdot \bar b \cdot c \vee b \cdot \bar c \vee a \cdot \bar c \vee a \cdot b}$ – результат.

По сокращенной БДР найдем КНФ функции.



$a \vee b \vee c$	$a \vee \bar b \vee \bar c$	$\bar a \vee b \vee \bar c$

КНФ: $(a \vee b \vee c) \cdot (a \vee \bar b \vee \bar c) \cdot (\bar a \vee b \vee \bar c)$.

Это полученное в виде КНФ выражение уже невозможно упростить.

Задание 2. Булева функция f(a, b, c, d) задана своими значениями. Используя метод Куайна-Мак-Класки, найти минимальную ДНФ этой функции.

$$f(a, b, c, d) = (1000\ 1111\ 1001\ 0000)$$

Решение. Занесем значения функции в таблицу.

a	b	c	d	f(a,b,c,d)
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

1. Выписываем все наборы, на которых функция принимает значение 1, и нумеруем их (Таблица I).

2. Группируем наборы по количеству единиц в них (Таблица II).

3. Если два набора из соседних групп различаются в точности в одном разряде, то склеиваем эту пару наборов в один. Разряд, в котором есть различие, заменяем прочерком. Если набор не удалось склеить ни с одним из имеющихся наборов, то переписываем его без изменений (Таблица III).

4. Группируем наборы по позиции прочерка в них и применяем склеивание там, где это возможно. Данную операцию выполняем до тех пор, пока это возможно (Таблица IV а, б). Если в процессе получаются одинаковые наборы, то из нескольких одинаковых оставляем только один.

5. Выделяем существенные наборы и удаляем избыточные наборы (Таблица V). Существенному набору (который нельзя удалить) соответствует минимум один уникальный номер в последовательности соответствующих ему номеров (этот номер отсутствует в остальных наборах). Все номера, соответствующие избыточному набору, содержатся в номерах наборов, которые не удаляем.

В нашем случае набору -000 соответствует уникальный номер 5. Поэтому этот набор существенный и не может быть удален. Существенными также являются набор 01- - (номер 3 уникален) и набор 1011. Набор 0-00 избыточный, т.к. соответствующие ему номера 0 и 1 содержатся в номерах, соответствующих оставляемым наборам (0,5 и 1,3,2,4).

Таблица I	
0	0000
1	0100
2	0101
3	0110
4	0111
5	1000
6	1011

Таблица II	
0	0000
1	0100
5	1000
2	0101
3	0110
4	0111
6	1011

Таблица III	
0,1	0-00
0,5	-000
1,2	010-
1,3	01-0
2,4	01-1
3,4	011-
6	1011

Таблица IVa	
0,5	-000
0,1	0-00
1,3	01-0
2,4	01-1
1,2	010-
3,4	011-
6	1011

Таблица IVб	
0,5	-000
0,1	0-00
1,3,2,4	01--
~~1,2,3,4~~	~~01--~~
6	1011

Таблица V		
0,5	-000	✓
0,1	0-00	✗
1,3,2,4	01- -	✓
6	1011	✓

6. Запишем элементарные конъюнкции, соответствующие существенным наборам:

-000 : $\neg b \cdot \neg c \cdot \neg d$

01- - : $\neg a \cdot b$

1011 : $a \cdot \neg b \cdot c \cdot d$

Минимальная ДНФ: $\neg b \cdot \neg c \cdot \neg d \vee \neg a \cdot b \vee a \cdot \neg b \cdot c \cdot d$.

<u>Задание 3.</u> Дан трехместный предикат $P(x,y,z) = y \geq x + z$. Предметные переменные x, y, z принимают значения соответственно из предметных областей Mx, My, Mz.

а) Подобрать предметные области Mx, My, Mz, каждую мощности не меньше двух, таким образом, чтобы приблизительно в половине случаев предикат P(x,y,z) был выполним. Во всех дальнейших пунктах использовать эти предметные области.

б) Путем фиксации значения одной из предметных переменных получить из P(x,y,z) сначала выполнимый, а затем тождественно ложный двухместный предикат (если это невозможно сделать в заданных предметных областях, то объяснить, почему).

в) Путем фиксации значений двух предметных переменных получить из P(x,y,z) сначала тождественно истинный, а затем тождественно ложный одноместный предикат (если это невозможно сделать в заданных предметных областях, то объяснить, почему).

г) Путем фиксации значений всех предметных переменных получить из P(x,y,z) сначала ложное, а затем истинное высказывание (нульместный предикат).

д) Проверить истинность заданных высказываний, полученных из P(x,y,z) путем связывания всех предметных переменных кванторами. Пояснить полученные результаты.

<u>Решение.</u>

а) Задан трехместный предикат $P(x,y,z) = y \geq x + z$. Подберем предметные области в соответствии с заданием. Пусть Mx = {2,3,4}, My = {3,4,5}, Mz = {1,2}.

Проверим, что на выбранных предметных областях предикат выполним хотя бы в половине случаев. Для этого вычислим все возможные (в заданных предметных областях) значения заданного предиката. Будем использовать буквы И (ИСТИНА) и Л (ЛОЖЬ) для краткости.

Все возможные наборы, на которых нужно вычислить значения предиката, получаются как элементы прямого произведения $Mx \times My \times Mz$.

$Mx \times My \times Mz$ = {(2,3,1), (2,3,2), (2,4,1), (2,4,2), (2,5,1), (2,5,2), (3,3,1), (3,3,2), (3,4,1), (3,4,2), (3,5,1), (3,5,2), (4,3,1), (4,3,2), (4,4,1), (4,4,2), (4,5,1), (4,5,2)}

Вычислим первое значения предиката: P(2,3,1) = И, т.к. $3 \geq 2 + 1$ – истинное утверждение.

Аналогичным образом получаем:

P(2,3,2) = Л, P(2,4,1) = И, P(2,4,2) = И, P(2,5,1) = И, P(2,5,2) = И, P(3,3,1) = Л, P(3,3,2) = Л, P(3,4,1) = И, P(3,4,2) = Л, P(3,5,1) = И, P(3,5,2) = И, P(4,3,1) = Л, P(4,3,2) = Л, P(4,4,1) = Л, P(4,4,2) = Л, P(4,5,1) = И, P(4,5,2) = Л.

Требование о том, чтобы на выбранных предметных областях предикат был выполним хотя бы в половине случаев, соблюдается, значит, предметные области подобраны правильно.

б) Путем фиксации значения одной из предметных переменных получим из P(x,y,z) выполнимый двухместный предикат. Зафиксируем, например, предметную переменную z и присвоим ей значение 1. Получим двухместный предикат P(x,y,1). Проверим, что он выполним. Например, P(2,3,1) = И. Значит, двухместный предикат P(x,y,1) выполним.

Получить из $P(x,y,z)$ тождественно ложный двухместный предикат на заданных предметных областях невозможно, т.к. не получится зафиксировать одну из переменных таким образом, чтобы полученный двухместный предикат принимал только значение ЛОЖЬ.

Рассмотрим крайние случаи, исходя из вида предиката:

при фиксации переменной y наименьшим значением (3) предикат $P(x,3,z)$ примет значение ИСТИНА при $x=2$, $z=1$;

при фиксации переменной x наибольшим значением (4) предикат $P(4,y,z)$ примет значение ИСТИНА при $y=5$, $z=1$;

при фиксации переменной z наибольшим значением (2) предикат $P(x,y,2)$ примет значение ИСТИНА, например, при $y=5$, $x=2$.

в) Путем фиксации значений двух предметных переменных получим из $P(x,y,z)$ тождественно истинный, а затем тождественно ложный одноместный предикат.

Пусть $y = 5$, $z = 1$. Тогда $P(x,5,1)$ – тождественно истинный одноместный предикат, т.к. при всех возможных значениях переменной x он принимает значение ИСТИНА:

$$P(2,5,1) = И,\ \ P(3,5,1) = И,\ \ P(4,5,1) = И.$$

Пусть $y = 3$, $z = 2$. Тогда $P(x,3,2)$ – тождественно ложный одноместный предикат, т.к. при всех возможных значениях переменной x он принимает значение ЛОЖЬ:

$$P(2,3,2) = Л,\ \ P(3,3,2) = Л,\ \ P(4,3,2) = Л.$$

г) Путем фиксации значений всех предметных переменных получим из $P(x,y,z)$ сначала ложное, а затем истинное высказывание (нульместные предикаты):

$$P(2,3,2) = Л,\ \ P(2,5,1) = И.$$

д) Проверим истинность высказываний $\exists y \forall x \exists z\ P(x,y,z)$ и $\forall x \forall y \exists z\ P(x,y,z)$, полученных из $P(x,y,z)$ путем связывания всех предметных переменных кванторами. Здесь все предметные переменные принимают значения из своих предметных областей.

Найдем значение выражения (а это нульместный предикат, т.к. все предметные переменные в нем связаны кванторами) методом конкретизации.

$\exists y \forall x \exists z\ P(x,y,z) =$

$= \exists y(\forall x(\exists z\ P(x,y,z))) =$ [избавляемся от квантора существования] $=$

$= \exists y(\forall x(P(x,y,1) \vee P(x,y,2))) =$ [избавляемся от квантора общности] $=$

$= \exists y((P(2,y,1) \vee P(2,y,2)) \wedge (P(3,y,1) \vee P(3,y,2)) \wedge (P(4,y,1) \vee P(4,y,2))) =$

$=$ [избавляемся от квантора существования] $=$

$= \quad ((P(2,3,1) \vee P(2,3,2)) \wedge (P(3,3,1) \vee P(3,3,2)) \wedge (P(4,3,1) \vee P(4,3,2))) \vee$

$\vee ((P(2,4,1) \vee P(2,4,2)) \wedge (P(3,4,1) \vee P(3,4,2)) \wedge (P(4,4,1) \vee P(4,4,2))) \vee$

$\vee ((P(2,5,1) \vee P(2,5,2)) \wedge (P(3,5,1) \vee P(3,5,2)) \wedge (P(4,5,1) \vee P(4,5,2))) =$

$= ((И \vee Л) \wedge (Л \vee Л) \wedge (Л \vee Л)) \vee ((И \vee И) \wedge (И \vee Л) \wedge (Л \vee Л)) \vee ((И \vee И) \wedge (И \vee И) \wedge (И \vee Л))=$

$$= ИСТИНА.$$

Этот же результат можно получить путем следующих рассуждений.

Высказывание $\exists y \forall x \exists z\ P(x,y,z)$ принимает значение ИСТИНА в тот и только том случае, если «найдется некоторое значение переменной y из My такое, что для каждого значения переменной x из Mx найдется некоторое значение z из Mz такое, что P(x,y,z) = ИСТИНА».

Поскольку данное высказывание приняло значение ИСТИНА, значит, существует значение y, удовлетворяющее указанным условиям. Найдем такое значение y.

Предположим, y=3, в этом случае:

для x=2 найдется значение z=1, при котором P(2,3,1)=ИСТИНА;

для x=3 не существует значения z, при котором P(3,3,z)=ИСТИНА.

Значит, 3 не является подходящим значением переменной y.

Предположим, y=4, в этом случае:

для x=2 найдется значение z=1, при котором P(2,4,1)=ИСТИНА;

для x=3 найдется значение z=1, при котором P(3,4,1)=ИСТИНА;

для x=4 не существует значения z, при котором P(3,4,z)=ИСТИНА.

Значит, 4 не является подходящим значением переменной y.

Предположим, y=5, в этом случае:

для x=2 найдется значение z=1, при котором P(2,5,1)=ИСТИНА;

для x=3 найдется значение z=2, при котором P(3,5,2)=ИСТИНА;

для x=4 найдется значение z=1, при котором P(4,5,1)=ИСТИНА.

Видим, что действительно существует значение y, равное 5, при котором выполняются заданные условия.

Аналогичным образом можно провести рассуждение, подтверждающее, что высказывание $\forall x \forall y \exists z\ P(x,y,z)$ ложно в заданной предметной области.

Найдем значение этого выражения методом конкретизации.

$\forall x \forall y \exists z\ P(x,y,z) =$

$= \forall x(\forall y(\exists z\ P(x,y,z)))$ = [избавляемся от квантора существования] =

$= \forall x(\forall y(P(x,y,\mathbf{1}) \vee P(x,y,\mathbf{2})))$ = [избавляемся от квантора общности] =

$= \forall x((P(x,\mathbf{3},1) \vee P(x,\mathbf{3},2)) \wedge (P(x,\mathbf{4},1) \vee P(x,\mathbf{4},2)) \wedge (P(x,\mathbf{5},1) \vee P(x,\mathbf{5},2))) =$

= [избавляемся от квантора общности] =

$= ((P(\mathbf{2},3,1) \vee P(\mathbf{2},3,2)) \wedge (P(\mathbf{2},4,1) \vee P(\mathbf{2},4,2)) \wedge (P(\mathbf{2},5,1) \vee P(\mathbf{2},5,2))) \wedge$

$\wedge ((P(\mathbf{3},3,1) \vee P(\mathbf{3},3,2)) \wedge (P(\mathbf{3},4,1) \vee P(\mathbf{3},4,2)) \wedge (P(\mathbf{3},5,1) \vee P(\mathbf{3},5,2))) \wedge$

$\wedge ((P(\mathbf{4},3,1) \vee P(\mathbf{4},3,2)) \wedge (P(\mathbf{4},4,1) \vee P(\mathbf{4},4,2)) \wedge (P(\mathbf{4},5,1) \vee P(\mathbf{4},5,2))) =$

$= ((И \vee Л) \wedge (И \vee И) \wedge (И \vee И)) \wedge ((Л \vee Л) \wedge (И \vee Л) \wedge (И \vee И)) \wedge ((Л \vee Л) \wedge (Л \vee Л) \wedge (И \vee Л))=$

= ЛОЖЬ.