Примеры выполнения заданий КР№1 (с пояснениями)

Задание 1. Дан универсум $U=\{x \mid x$ – целое, $0 \le x \le 9\}$ и множества A, B, C, D из U, заданные описанием или перечислением своих элементов. Выяснить, из каких элементов состоят множества B и D, а также множество $M \subseteq U$, заданное так, как указано ниже в таблице.

№	A	B	C	D
0	$\{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$	$\{x\in U \mid x$ - нечётное$\}$	$\{3, 6, 8, 9\}$	$\{x\in \mathbb{N} \mid 4 \le x \le 9\}$

№	Условия, определяющие множество M
0	$M\subseteq C$, $\lvert M\rvert=3$, $6\in M$, $(D\setminus B)\cap C\subseteq M$, $\{2,3,4\}\cap M=\varnothing$

Решение. Выясним, из каких элементов состоят множества B и D.

$B = \{x\in U \mid x$ - нечётное$\}$, значит, в множество B входят только все те элементы множества U, которые являются нечётными числами. Поэтому $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

$D = \{x\in \mathbb{N} \mid 4 \le x \le 9\}$, значит, в множество D входят только натуральные числа, удовлетворяющие неравенству $4 \le x \le 9$. Поэтому $D = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Элементы множества M определим в соответствии с заданными условиями:

– $M\subseteq C$, значит, в M могут присутствовать только элементы 3, 6, 8, 9 из множества C.

– $\lvert M\rvert=3$, значит, в M в точности 3 элемента.

– $6\in M$, значит, в M есть элемент 6: {3, 6, 8 , 9}.

– $(D\setminus B)\cap C\subseteq M$. В соответствии с этим условием, все элементы, принадлежащие множеству $(D\setminus B)\cap C$, принадлежат множеству M. Вычислим значение выражения $(D\setminus B)\cap C$. $(D\setminus B)\cap C=(\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}\setminus\{1, 3, 5, 7, 9\})\cap\{3, 6, 8, 9\} = \{4,6,8\}\cap\{3,6,8,9\} = \{6, 8\}$.

  $\{6, 8\}\subseteq M$, значит, в M есть также элемент 8: {3, 6, 8, 9}.

– $\{2,3,4\}\cap M=\varnothing$, значит, в M нет элементов 2, 3, 4: {~~3~~, 6, 8, 9}.

Т.к. множество M состоит из трех элементов, окончательно получаем: $M = \{6, 8, 9\}$.

Задание 2. Упростить выражение, заданное в таблице, символьными преобразованиями (с помощью свойств операций над множествами) и проверить правильность полученного результата с помощью диаграмм Эйлера.

0	$(B\setminus A \cup \overline{B \cup C} \cup \overline{B \,\Delta\, A} \cup (A \cap C)\setminus B) \cap ((B \cup \overline{A}) \cap \overline{C} \cup \overline{A} \cap \overline{B})$

Перед выполнением задания рассмотрим свойства операций над множествами.

Пусть U – универсум, и F_1, F_2, F_3 - любые его подмножества, заданные сколь угодно сложными выражениями. Тогда для операций дополнения, пересечения и объединения справедливы следующие тождества – свойства операций над множествами.

Свойства операций над множествами

1. Ассоциативность:	1) $F_1 \cup (F_2 \cup F_3) = (F_1 \cup F_2) \cup F_3 = F_1 \cup F_2 \cup F_3$;	2) $F_1 \cap (F_2 \cap F_3) = (F_1 \cap F_2) \cap F_3 = F_1 \cap F_2 \cap F_3$.
2. Коммутативность:	1) $F_1 \cup F_2 = F_2 \cup F_1$;	2) $F_1 \cap F_2 = F_2 \cap F_1$.
3. Идемпотентность:	1) $F_1 \cup F_1 = F_1$;	2) $F_1 \cap F_1 = F_1$.
4. Дистрибутивность:	1) $F_1 \cap (F_2 \cup F_3) = (F_1 \cap F_2) \cup (F_1 \cap F_3)$;	2) $F_1 \cup (F_2 \cap F_3) = (F_1 \cup F_2) \cap (F_1 \cup F_3)$
5. Свойства нуля:	1) $F_1 \cup \varnothing = F_1$;	2) $F_1 \cap \varnothing = \varnothing$.
6. Свойства единицы:	1) $F_1 \cup U = U$;	2) $F_1 \cap U = F_1$.
7. Свойства дополнения:	1) $F_1 \cup \overline{F}_1 = U$;	2) $F_1 \cap \overline{F}_1 = \varnothing$.
8. Инволютивность:	$\overline{\overline{F_1}} = F_1$.	
9. Законы де Моргана:	1) $\overline{F_1 \cup F_2} = \overline{F}_1 \cap \overline{F}_2$;	2) $\overline{F_1 \cap F_2} = \overline{F}_1 \cup \overline{F}_2$.
10. Поглощение:	1) $F_1 \cup (F_1 \cap F_2) = F_1$;	2) $F_1 \cap (F_1 \cup F_2) = F_1$.
11. Склеивание:	$(F_1 \cap F_2) \cup (F_1 \cap F_3) \cup (F_2 \cap \overline{F_3}) = (F_1 \cap F_3) \cup (F_2 \cap \overline{F_3})$	

Замечание. Свойства 1-11 справедливы **только** для операций дополнения, пересечения и объединения.

Приоритет операций в порядке убывания (если скобками не указан иной порядок действий): дополнение, пересечение, объединение.

Если в выражении присутствуют операции разности и симметрической разности, то для них устанавливается такой же приоритет, как и у операции пересечения.

Если в выражении есть операции разности и симметрической разности, то часто бывает необходимо представить эти операции с помощью операций дополнения, пересечения, объединения (поскольку только для операций дополнения, пересечения и объединения известны свойства, с помощью которых можно выполнять тождественные преобразования). Для избавления от разности и симметрической разности используют правила:

$$F_1 \setminus F_2 = F_1 \cap \overline{F_2} \text{ (разность представима через пересечение и дополнение),}$$

$$F_1 \Delta F_2 = (F_1 \setminus F_2) \cup (F_2 \setminus F_1) \text{ или } F_1 \Delta F_2 = (F_1 \cup F_2) \setminus (F_1 \cap F_2).$$

Решение. Упростим исходное выражение, используя свойства операций над множествами. Заметим, что исходное выражение на самом внешнем уровне состоит из двух независимых «сомножителей», соединенных знаком пересечения:

$$(B \setminus A \cup \overline{B \cup C} \cup \overline{B \Delta A} \cup (A \cap C) \setminus B) \cap ((B \cup \overline{A}) \cap \overline{C} \cup \overline{A} \cap \overline{B})$$

Каждый из «сомножителей» состоит, в свою очередь, из независимых «слагаемых»:

$$(B \setminus A \cup \overline{B \cup C} \cup \overline{B \Delta A} \cup (A \cap C) \setminus B) \cap ((B \cup \overline{A}) \cap \overline{C} \cup \overline{A} \cap \overline{B})$$

Будем упрощать исходное выражение, последовательно применяя тождественные преобразования к «слагаемым» («сомножителям»), учитывая, что независимые «слагаемые» («сомножители») можно группировать по свойству ассоциативности в нужном нам порядке.

Применим закон де Моргана к $\overline{B \cup C}$, получим:

$$(B \backslash A \cup \mathbf{\overline{B} \cap \overline{C}} \cup \overline{B \,\Delta\, A} \cup (A \cap C) \backslash B) \cap ((B \cup \overline{A}) \cap \overline{C} \cup \overline{A} \cap \overline{B})$$

Избавимся от разности в $(A \cap C) \backslash B$ по правилу $F_2 \backslash F_3 = F_2 \cap \overline{F_3}$, получим:

$$(B \backslash A \cup \overline{B} \cap \overline{C} \cup \overline{B \,\Delta\, A} \cup \mathbf{(A \cap C) \cap \overline{B}}) \cap ((B \cup \overline{A}) \cap \overline{C} \cup \overline{A} \cap \overline{B})$$

Применим коммутативность объединения к $\overline{B \,\Delta\, A} \cup (A \cap C) \cap \overline{B}$, получим:

$$(B \backslash A \cup \overline{B} \cap \overline{C} \cup \mathbf{(A \cap C) \cap \overline{B} \cup \overline{B \,\Delta\, A}}) \cap ((B \cup \overline{A}) \cap \overline{C} \cup \overline{A} \cap \overline{B})$$

Применим коммутативность пересечения к $(A \cap C) \cap \overline{B}$, получим:

$$(B \backslash A \cup \overline{B} \cap \overline{C} \cup \mathbf{\overline{B} \cap (A \cap C)} \cup \overline{B \,\Delta\, A}) \cap ((B \cup \overline{A}) \cap \overline{C} \cup \overline{A} \cap \overline{B})$$

Применим дистрибутивность к $\overline{B} \cap \overline{C} \cup \overline{B} \cap (A \cap C)$ – выносим $\overline{B}$ за скобки:

$$(B \backslash A \cup \mathbf{\overline{B} \cap (\overline{C} \cup (A \cap C))} \cup \overline{B \,\Delta\, A}) \cap ((B \cup \overline{A}) \cap \overline{C} \cup \overline{A} \cap \overline{B})$$

Применим дистрибутивность к $(\overline{C} \cup (A \cap C))$ – раскрываем скобки:

$$(B \backslash A \cup \overline{B} \cap \mathbf{((\overline{C} \cup A) \cap (\overline{C} \cup C))} \cup \overline{B \,\Delta\, A}) \cap ((B \cup \overline{A}) \cap \overline{C} \cup \overline{A} \cap \overline{B})$$

Применим свойство дополнения к $(\overline{C} \cup C)$ – получим универсум:

$$(B \backslash A \cup \overline{B} \cap ((\overline{C} \cup A) \cap \mathbf{U}) \cup \overline{B \,\Delta\, A}) \cap ((B \cup \overline{A}) \cap \overline{C} \cup \overline{A} \cap \overline{B})$$

Применим свойство единицы к $((\overline{C} \cup A) \cap U)$, получим:

$$(B \backslash A \cup \overline{B} \cap \mathbf{(\overline{C} \cup A)} \cup \overline{B \,\Delta\, A}) \cap ((B \cup \overline{A}) \cap \overline{C} \cup \overline{A} \cap \overline{B})$$

Применим дистрибутивность к $\overline{B} \cap (\overline{C} \cup A)$:

$$(B \backslash A \cup \mathbf{\overline{B} \cap \overline{C} \cup \overline{B} \cap A} \cup \overline{B \,\Delta\, A}) \cap ((B \cup \overline{A}) \cap \overline{C} \cup \overline{A} \cap \overline{B})$$

Применим к $\overline{B} \cap A$ коммутативность пересечения и правило $F_2 \cap \overline{F_3} = F_2 \backslash F_3$, получим:

$$(B \backslash A \cup \overline{B} \cap \overline{C} \cup \mathbf{A \backslash B} \cup \overline{B \,\Delta\, A}) \cap ((B \cup \overline{A}) \cap \overline{C} \cup \overline{A} \cap \overline{B})$$

Применим к $B \backslash A \cup A \backslash B$ правило $(F_1 \backslash F_2) \cup (F_2 \backslash F_1) = F_1 \,\Delta\, F_2$:

$$(\mathbf{B \,\Delta\, A} \cup \overline{B} \cap \overline{C} \cup \overline{B \,\Delta\, A}) \cap ((B \cup \overline{A}) \cap \overline{C} \cup \overline{A} \cap \overline{B})$$

Применим к $B \,\Delta\, A \cup \overline{B \,\Delta\, A}$ свойство дополнения, получим универсум:

$$(\mathbf{U} \cup \overline{B} \cap \overline{C}) \cap ((B \cup \overline{A}) \cap \overline{C} \cup \overline{A} \cap \overline{B})$$

Применим свойство единицы к $(U \cup \overline{B} \cap \overline{C})$, получим:

$$\mathbf{U} \cap ((B \cup \overline{A}) \cap \overline{C} \cup \overline{A} \cap \overline{B}) = ((B \cup \overline{A}) \cap \overline{C} \cup \overline{A} \cap \overline{B})$$

Аналогично, применяя коммутативность и дистрибутивность, получим:

$$((\overline{A} \cup B) \cap \overline{C} \cup \overline{A} \cap \overline{B}) = (\overline{C} \cap (\overline{A} \cup B)) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) = (\overline{C} \cap \overline{A}) \cup (\overline{C} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$$

Применим свойство склеивания $(F_1 \cap F_2) \cup (F_1 \cap F_3) \cup (F_2 \cap \overline{F_3}) = (F_1 \cap F_3) \cup (F_2 \cap \overline{F_3})$, получим:

$$(\overline{C} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}).$$

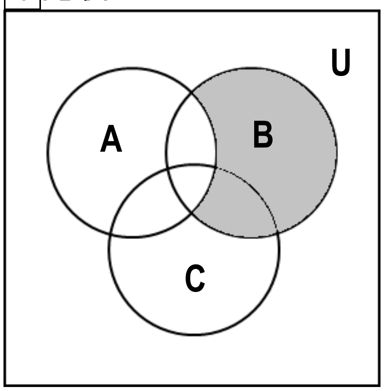
Получено выражение, в котором имеется 4 буквы (обозначения множеств) и 6 операций. Это выражение более не может быть упрощено.

Проверим правильность полученного результата с помощью диаграмм Эйлера. Сперва в исходном выражении определим порядок выполнения действий с учётом приоритета операций и расставленных скобок:

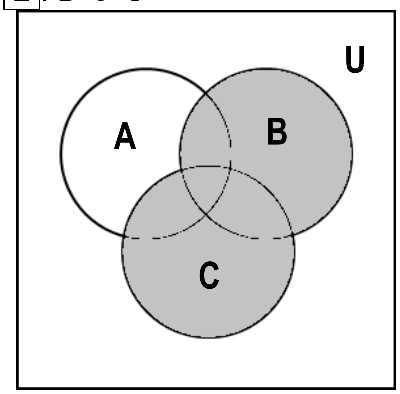
$$(B\setminus A \cup \overline{B \cup C} \cup \overline{B \,\Delta\, A} \cup (A \cap C)\setminus B\,) \cap ((B \cup \overline{A}) \cap \overline{C} \cup \overline{A} \cap \overline{B})$$

Для каждого действия построим диаграмму Эйлера, на которой закрасим область, соответствующую результату операции.

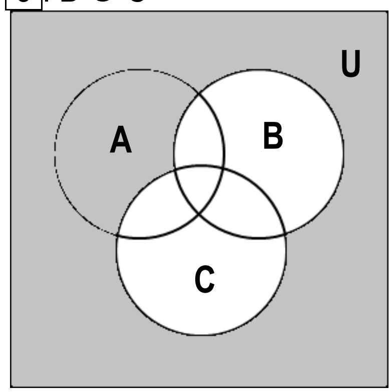
1: $B\setminus A$



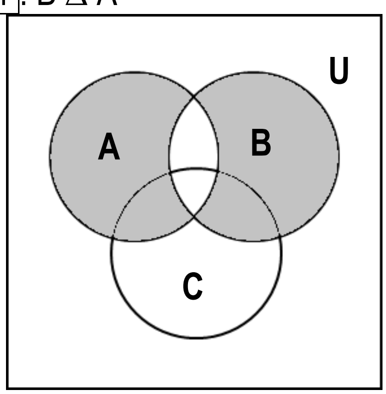
2: $B \cup C$



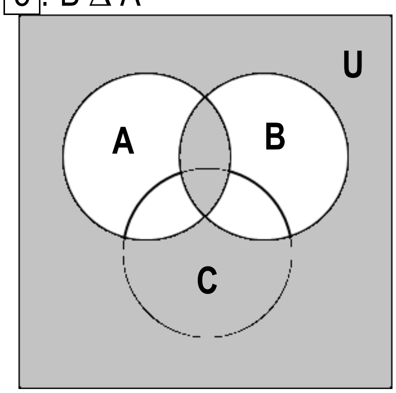
3: $\overline{B \cup C}$



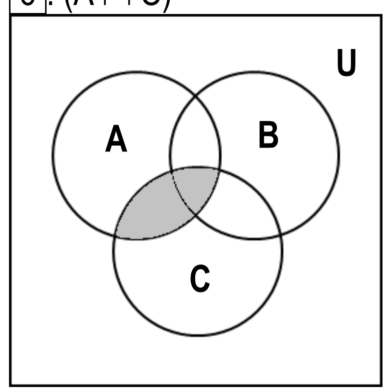
4: $B \,\Delta\, A$



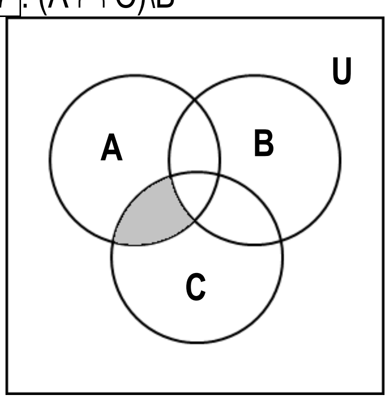
5: $\overline{B \,\Delta\, A}$



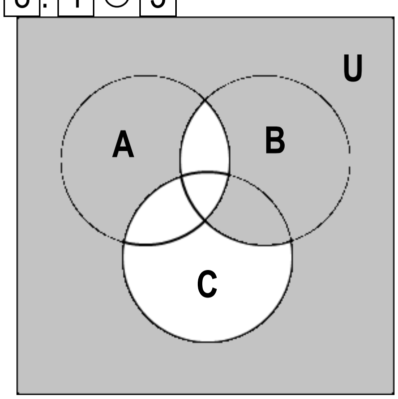
6: $(A \cap C)$



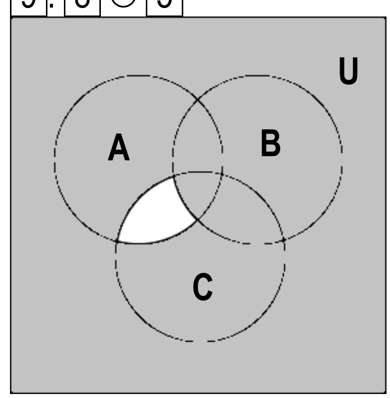
7: $(A \cap C)\setminus B$



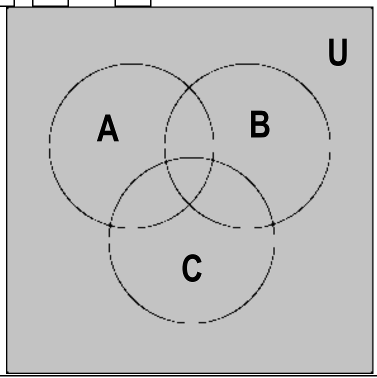
8: $1 \cup 3$



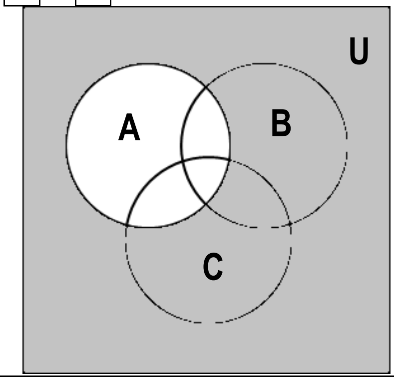
9: $8 \cup 5$



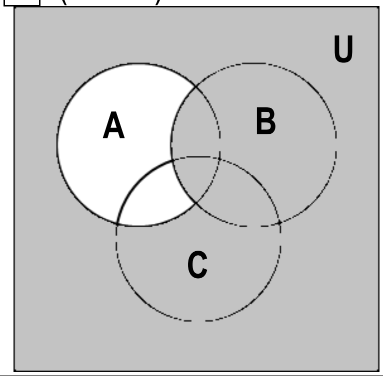
$\boxed{10}$: $\boxed{9} \cup \boxed{7}$



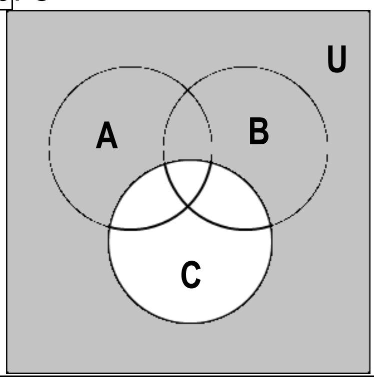
$\boxed{11}$ и $\boxed{15}$: $\overline{A}$



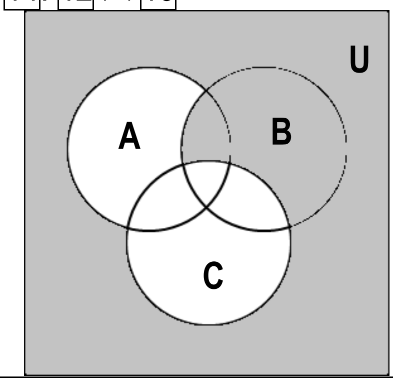
$\boxed{12}$: $(B \cup \overline{A})$



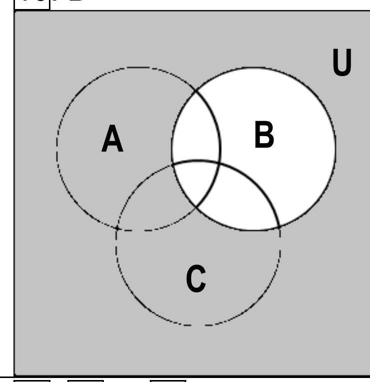
$\boxed{13}$: $\overline{C}$



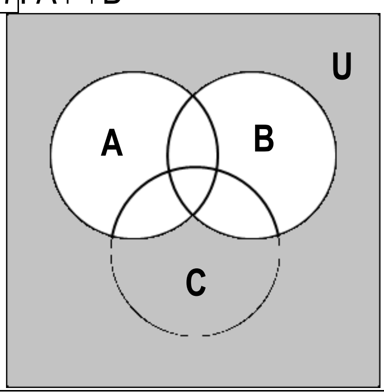
$\boxed{14}$: $\boxed{12} \cap \boxed{13}$



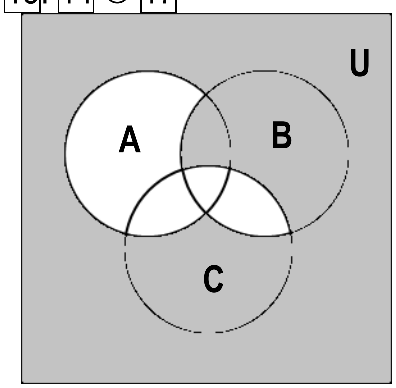
$\boxed{16}$: $\overline{B}$



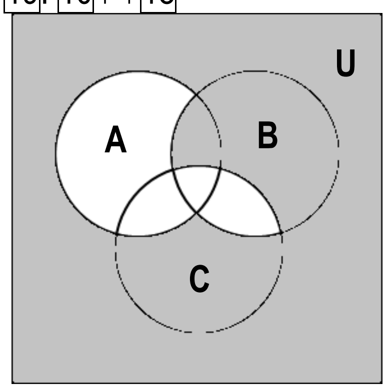
$\boxed{17}$: $\overline{A} \cap \overline{B}$



$\boxed{18}$: $\boxed{14} \cup \boxed{17}$

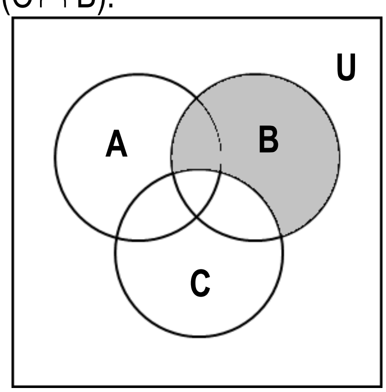


$\boxed{19}$: $\boxed{10} \cap \boxed{18}$

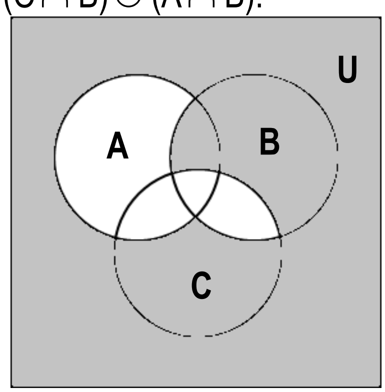


Далее построим диаграмму, соответствующую результату упрощения: $(\overline{C} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$. Построив $\overline{C} \cap B$ и объединив его с $\overline{A} \cap \overline{B}$ (построено выше), получим диаграмму, которая в точности совпадает с диаграммой, полученной при выполнении действия $\boxed{19}$.

$(\overline{C} \cap B)$:



$(\overline{C} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$:



Итоговая диаграмма, полученная при поэтапном упрощении исходного выражения, совпала с диаграммой для полученного ранее упрощенного выражения. Выражение упрощено верно.

Задание 3.

Даны множества $X = Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ и соответствия $Q_i \subseteq X \times Y$, $i = 1, \ldots, 4$.

$Q_1=\{(2,2),(1,2),(3,2),(4,5),(5,4)\}$, $Q_2=\{(2,2),(3,2),(4,2),(1,3),(2,3)\}$,

$Q_3=\{(2,3),(3,2),(1,4),(3,1),(4,5)\}$, $Q_4=\{(5,2),(1,3),(2,5),(4,1),(3,4)\}$.

Определить, каким является каждое из соответствий Q_i ($i=1,\ldots,4$) (всюду определенное, сюръективное, функциональное, инъективное, биективное). Затем для каждого из соответствий Q_i ($i=1,\ldots,4$), с учетом его свойств, выполнить следующее:

3.1. Если соответствие Q_i всюду определено, функционально, но не инъективно, то построить разбиение области определения соответствия на классы эквивалентности по отношению P: «два элемента эквивалентны между собой тогда и только тогда, когда они принадлежат прообразу одного и того же элемента».

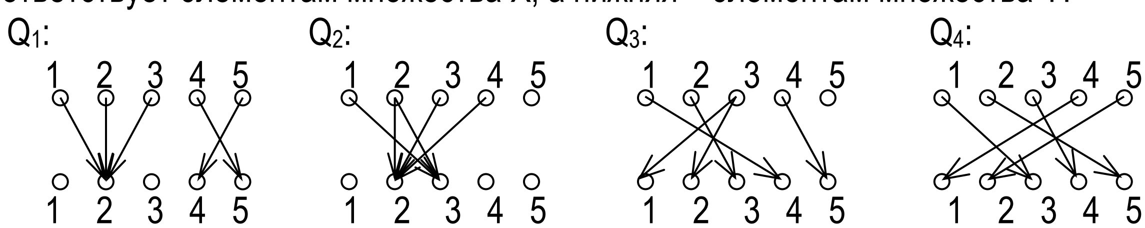
3.2. Если соответствие Q_i сюръективно, инъективно, но не функционально, то построить разбиение области значений соответствия на классы эквивалентности по отношению R: «два элемента эквивалентны между собой тогда и только тогда, когда они принадлежат образу одного и того же элемента».

3.3. Если соответствие Q_i не инъективно и не функционально, то найти нижнюю и верхнюю грани множества Q_i, введя на этом множестве отношение порядка, по которому сравниваются векторы одинаковой размерности (если $a=(a_1,a_2)$ и $b=(b_1,b_2)$, то $a < b$ тогда и только тогда, когда $a_i \leq b_i$, $i=1,2$, и хотя бы одно из этих неравенств строгое).

3.4. Если соответствие Q_i является биекцией, то построить соответствующую ему перестановку на множестве X и разложить ее на циклы.

Решение. Определим, обладают ли соответствия Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 свойствами всюду определенности, сюръективности, функциональности, инъективности, биективности. В зависимости от свойств соответствия выполним для него один из пунктов 3.1, 3.2, 3.3, 3.4.

Сначала изобразим каждое из соответствий графически. Здесь верхняя строка соответствует элементам множества X, а нижняя – элементам множества Y:



Свойства соответствия Q_1:

а) *всюду определено*, т.к. область определения соответствия Q_1 (проекция множества $Q_1=\{(2,2),(1,2),(3,2),(4,5),(5,4)\}$ на первую ось) совпадает с X: $Пр_1Q_1=\{2,1,3,4,5\}=X$.

б) *не сюръективно*, т.к. область значений соответствия Q_1 (проекция множества $Q_1=\{(2,2),(1,2),(3,2),(4,5),(5,4)\}$ на вторую ось) не равна множеству Y: $Пр_2Q_1=\{2,5,4\}\neq Y$.

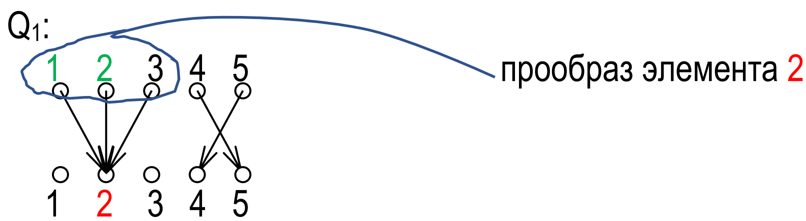
в) *функционально*, поскольку образ любого элемента из области определения соответствия содержит только один элемент из области значений соответствия (образ элементов 1, 2, и 3 – это множество {2} с единственным элементом, образом элемента 4 является множество {5}, образом элемента 5 является множество {4}).

г) *не инъективно*, т.к. для элемента 2 из области значений соответствия Q_1 его прообраз {1, 2, 3} состоит более чем из одного элемента.

д) *не биективно*, поскольку соответствие Q_1 не является, например, сюръективным.

Т.к. соответствие Q_1 всюду определено и функционально, но не инъективно, выполним для него задание 3.1, то есть построим разбиение области определения соответствия Q_1 на классы эквивалентности по отношению P: «два элемента эквивалентны между собой тогда и только тогда, когда они принадлежат прообразу одного и того же элемента».

Имеем множество – область определения соответствия Q_1: $Пр_1Q_1$ = {1,2,3,4,5}, и заданное на этом множестве отношение эквивалентности P: «два элемента эквивалентны между собой тогда и только тогда, когда они принадлежат прообразу одного и того же элемента». Построим разбиение множества {1,2,3,4,5} на классы по заданному отношению эквивалентности P. Для этого в первый класс эквивалентности C_1 поместим любой элемент из заданного множества {1,2,3,4,5}, например, элемент 1. Далее выберем любой из оставшихся элементов, например, 2, и проверим, находится ли он в заданном отношении P с уже выбранным элементом 1. Элемент 1 и элемент 2 принадлежит прообразу одного и того же элемента 2:



Значит, элементы 1 и 2 из области определения находятся в отношении P (1P2 = *истина*), и, следовательно, принадлежат одному классу эквивалентности. Таким образом, элемент 2 также добавляем в первый класс эквивалентности C_1.

Выбираем следующий из оставшихся элементов, например, 3. Проверим, находится ли он в отношении P с уже рассмотренными элементами 1 и 2. Видим, что элемент 3 также принадлежит прообразу элемента 2 из области значений (1P3 = *истина*, 2P3 = *истина*). Поэтому элемент 3 также добавляем в первый класс эквивалентности C_1.

Выбираем следующий из оставшихся элементов, например, 4. Проверим, находится ли он в отношении P с уже рассмотренными элементами 1, 2 и 3. Видим, что элемент 4 не принадлежит прообразу элемента 2, которому принадлежат помещенные в один класс элементы 1, 2 и 3 (элемент 4 принадлежит прообразу элемента 5). Элементы 1, 2, 3 и элемент 4 принадлежат прообразам разных элементов ($2\neq5$), значит, элемент 4 не находится в отношении P ни с каким из элементов 1, 2, 3. Поэтому элемент 4 мы относим в новый класс эквивалентности C_2.

Рассмотрим оставшийся элемент 5. Он принадлежит прообразу элемента 4. $4\neq2$, $4\neq5$, т.е. элемент 4, прообразу которого принадлежит элемент 5, отличен от элементов, прообразам которых принадлежат элементы 1, 2, 3, 4. А значит, элемент 5 не находится в отношении P ни с 1, 2, 3, ни с 4. Поэтому для элемента 5 заводим отдельный класс эквивалентности C_3.

Больше не осталось нерассмотренных элементов из множества {1,2,3,4,5}, все они распределены по следующим непересекающимся классам эквивалентности:

$C_1 = \{1,2,3\}$, $C_2 = \{4\}$, $C_3 = \{5\}$.

Таким образом, получено разбиение области определения соответствия Q_1 на классы эквивалентности по заданному отношению P:

$$\{1,2,3,4,5\} = \{1,2,3\} \cup \{4\} \cup \{5\}.$$

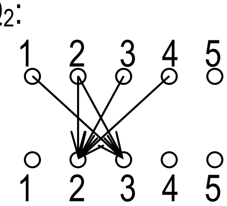
1 –й класс: прообраз элемента 2 из области значений соответствия – {1, 2, 3},
2 –й класс: прообраз элемента 5 из области значений соответствия – {4},
3 –й класс: прообраз элемента 4 из области значений соответствия – {5}.

Отметим, что отношение эквивалентности P, заданное на Q_1, состоит из следующих пар:

$$P = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (2,3), (3,2)\}.$$

Рассмотрим соответствие Q_2.

Q_2:



Свойства соответствия Q_2:

а) *не является всюду определенным*, поскольку область определения соответствия Q_2 не равна множеству X: $Пр_1Q_2 = \{1, 2, 3, 4\} \neq X$.

б) *не сюръективно*, т.к. область значений Q_2 не совпадает с Y: $Пр_2Q_2=\{2, 3\}\neq Y$.

в) *не функционально*, поскольку образ элемента 2 из области определения соответствия состоит более чем из одного элемента: $\{2, 3\} \subseteq Пр_2Q_2$.

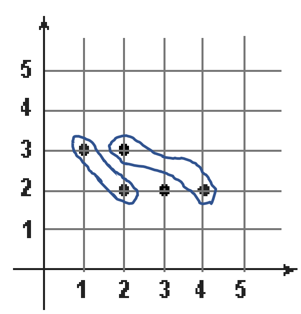
г) *не инъективно*, поскольку, например, для элемента 2 из области значений соответствия прообраз состоит более чем из одного элемента: {2, 3, 4}.

д) *не биективно*, т.к. соответствие Q_2, например, не всюду определено.

Поскольку соответствие Q_2 не инъективно и не функционально, то выполним для него задание 3.3, то есть найдем нижнюю и верхнюю грани множества Q_2.

Нижняя грань множества Q_2: {(1, 3), (2, 2)}; все остальные элементы Q_2 больше, чем элементы его нижней грани.

Верхняя грань множества Q_2: {(2, 3), (4, 2)}; все остальные элементы Q_2 меньше, чем элементы его верхней грани.



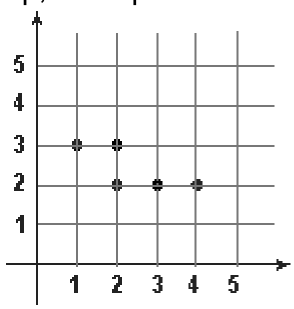
Поясним полученный результат.

На множестве Q_2={(2,2),(3,2),(4,2),(1,3),(2,3)} введем отношение порядка, по которому сравниваются векторы одинаковой размерности (если $a=(a_1,a_2)$ и $b=(b_1,b_2)$, то $a < b$ тогда и только тогда, когда $a_i \le b_i$, $i=1,2$, и хотя бы одно из этих неравенств строгое). Т.е. нам требуется упорядочить пары, из которых состоит множество Q_2, по заданному отношению порядка, а затем отобрать минимальные и максимальные элементы этого множества. Минимальный (максимальный) элемент множества меньше (больше) всех элементов этого множества, сравнимых с ним. Все минимальные элементы множества образуют его нижнюю грань, а максимальные – верхнюю.

Отметим, что данное отношение вводит частичный порядок на множестве, т.е., возможно, не все элементы множества получится сравнить между собой.

Например, (2,2) < (4,2), т.к. 2 < 4 и 2 ≤ 2. Но (1,3) и (3,2) не сравнимы, т.к. 1 < 3, но 3 > 2.

Для удобства изобразим все элементы множества Q_2={(2,2),(3,2),(4,2),(1,3),(2,3)} в виде точек в декартовой системе координат (по горизонтальной оси отложены первые компоненты пар, по вертикальной – вторые).



Найдем сначала все минимальные элементы множества. Для этого выбираем точку (элемент), которая находится левее и ниже всех остальных. Если такая точка есть, то она является наименьшим элементом множества и образует нижнюю грань этого множества. Если такой точки нет, то у множества нет наименьшего элемента, а есть два или более не сравнимых между собой минимальных элемента, которые и образуют нижнюю грань.

В нашем случае наименьшего элемента у множества нет. Поэтому выбираем точку (элемент), которая находится левее всех остальных (рис. 1). Из нее проводим лучи вверх и вправо. Те точки, которые окажутся в области, ограниченной этими лучами, соответствуют элементам, которые сравнимы с выбранным элементом и больше его (рис. 2). Поскольку не все точки попали в выделенную область (не все элементы сравнимы с выбранным), выбираем из оставшихся точек ту, которая находится левее и ниже остальных (рис. 3). И опять строим область, ограниченную лучами, выходящими из выбранной точки (рис. 4).

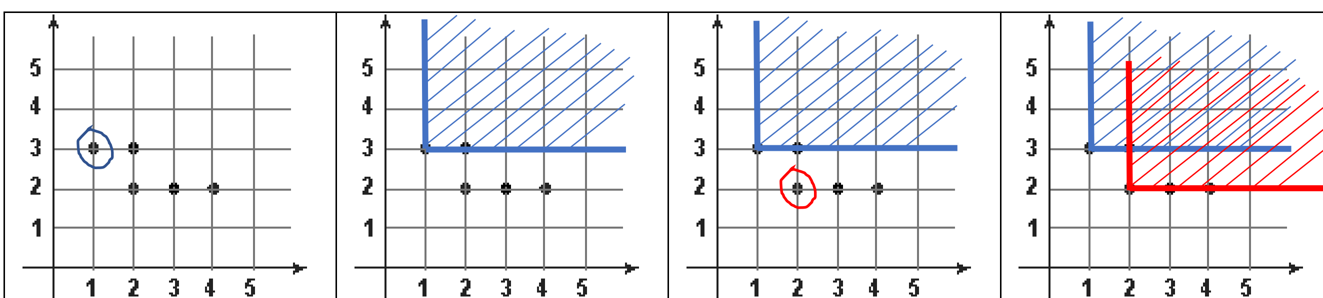
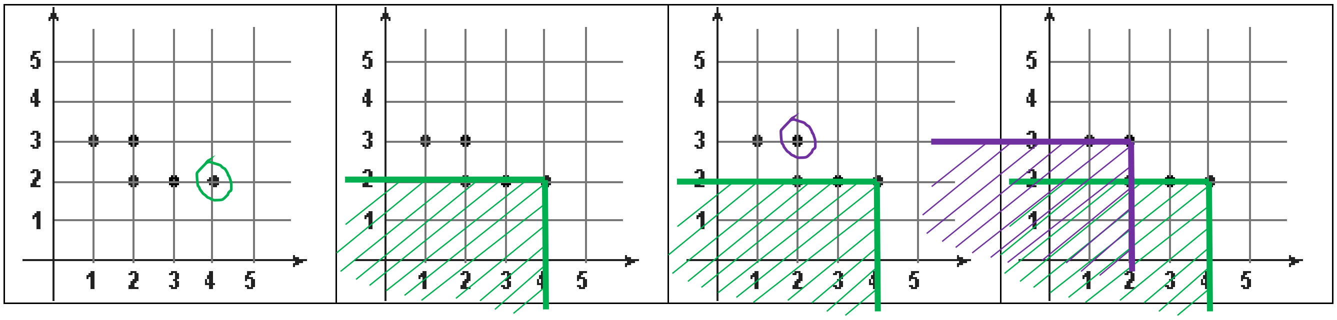


Рисунок 1	Рисунок 2	Рисунок 3	Рисунок 4

Видим, что теперь все точки, изображающие элементы множества, лежат в закрашенных областях. Значит, найдены все минимальные элементы множества – (1,3) и (2,2). Они не сравнимы между собой и образуют для множества Q_2 нижнюю грань: {(1,3), (2,2)}.

Рассуждая аналогичным образом, получим верхнюю грань множества – т.е. все максимальные несравнимые между собой элементы: {(4,3), (2,2)}. Здесь для определения элементов верхней грани выбираются точки, которые находятся выше и правее остальных.

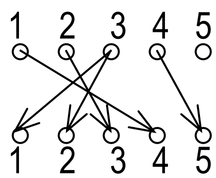


Отметим, что заданное отношение порядка на множестве Q_2 состоит из следующих пар:

{((1,3), (2,3)), ((2,2), (2,3)), ((2,2), (3,2)), ((2,2), (4,2))}.

Рассмотрим соответствие Q_3.

Q_3:



Свойства соответствия Q_3:

а) *не всюду определенно*, т.к. область определения соответствия не равна множеству X: $Пр_1Q_3 = \{1, 2, 3, 4\} \neq X$.

б) *сюръективно*, т.к. область значений Q_3 совпадает с Y: $Пр_2Q_3 = \{1, 2, 3, 4, 5\} = Y$.

в) *не функционально*, поскольку образ элемента 3 из области определения соответствия Q_3 состоит более чем из одного элемента: $\{1, 2\} \subseteq Пр_2Q_3$.

г) *инъективно*, поскольку прообраз каждого элемента из области значений соответствия Q_3 состоит в точности из одного элемента.

д) *не биективно*, т.к. соответствие не всюду определено и не функционально.

Т.к. соответствие Q_3 сюръективно и инъективно, но не функционально, то выполним для него задание 3.2, то есть построим разбиение области значений соответствия на классы эквивалентности по отношению R: «два элемента эквивалентны между собой тогда и только тогда, когда они принадлежат образу одного и того же элемента».

Построим разбиение области значений $Пр_2Q_3 = \{1,2,3,4,5\}$ на классы эквивалентности:

1 –й класс: образ элемента 1 из области определения соответствия – {4},

2 –й класс: образ элемента 2 из области определения соответствия – {3},

3 –й класс: образы элемента 3 из области определения соответствия – {1, 2},

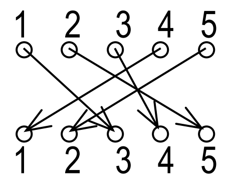
4 –й класс: образ элемента 4 из области определения соответствия – {5}.

Отметим, что отношение эквивалентности R, заданное на Q_3, состоит из следующих пар:

P = {(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (1,2), (2,1)}.

Рассмотрим соответствие Q_4.

Q_4:



Свойства соответствия Q_4:

а) *всюду определено*, т.к. область определения Q_4 совпадает с X: $Пр_1Q_4=\{1,2,3,4,5\}=X$.

б) *сюръективно*, поскольку область значений Q_4 совпадает с Y: $Пр_2Q_4=\{1,2,3,4,5\}=Y$.

в) *функционально*, поскольку образом любого элемента из области определения соответствия является единственный элемент из области значений соответствия.

г) *инъективно*, поскольку прообразом любого элемента из области значений соответствия является единственный элемент из области определения соответствия.

д) *биективно*, т.к. соответствие Q_4 всюду определено, сюръективно и функционально.

Поскольку соответствие $Q_4=\{(5,2),(1,3),(2,5),(4,1),(3,4)\}$ является биекцией, то выполним для него задание 3.4 – построим соответствующую ему перестановку на множестве X и разложим ее на циклы.

Перестановка на множестве представляет собой двухстрочную матрицу.

В первой строке этой матрицы перечисляются элементы заданного множества (в нашем случае – множества $X=\{1,2,3,4,5\}$). Эти элементы представляют собой первые компоненты пар, входящих в Q_4: $\{(5,2),(1,3),(2,5),(4,1),(3,4)\}$. Элементы первой строки перестановки должны быть упорядочены по возрастанию.

Вторая строка матрицы представляет собой собственно перестановку на множестве X, т.е. все элементы из X, записанные в определенном порядке. Этот порядок в нашем случае определяется вторыми компонентами пар из Q_4: $\{(5,2),(1,3),(2,5),(4,1),(3,4)\}$. Например, по паре (1,3) определяем, что в перестановке в нижней строке под элементом 1 должен быть записан элемент 3 (единица переходит в тройку), по паре (2,5) определяем, что под элементом 2 должен быть записан элемент 5 (двойка переходит в пятёрку), и так далее.

Таким образом, получаем следующую перестановку на множестве X:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Разложим перестановку на циклы. Начинаем построение цикла с элемента из верхней строки, например с 1. Видим, что 1 переходит в 3, затем 3 переходит в 4, 4 переходит в 1 – цикл замкнулся. Значит, первый цикл получен и имеет вид (1, 3, 4) – это цикл длины три. Если бы мы начинали его построение, например, с элемента 3, то получили бы цикл вида (3, 4, 1) – из тех же элементов, совпадающий с (1, 3, 4) с точностью до начала обхода цикла.

В нашем случае имеем 2 цикла – один цикл длины 3 и один цикл длины 2:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Окончательно, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1,3,4)(2,5)$.