1.1. МНОЖЕСТВА. ЗАДАНИЕ МНОЖЕСТВ. ПОДМНОЖЕСТВА

Множество – одно из основных понятий современной математики, используемое почти во всех ее разделах. Любое понятие дискретной математики можно определить с помощью понятия множества. Во многих вопросах приходится рассматривать некоторую совокупность элементов как единое целое. Для математического описания таких совокупностей было введено понятие множества. Один из создателей теорий множеств, немецкий математик Г. Кант (1845 – 1918) говорил, что «Множество есть многое, мыслимое нами как единое». Строгого определения множества не существует (так же, как не существует определения точки в геометрии). Будем говорить, что

множество – это любая определенная совокупность объектов, которые мы рассматриваем как единое целое. Объекты, составляющие множество, различны и отделены друг от друга.

Пояснения к описанию множества:

- совокупность объектов. Как предметы рассматриваются уже не отдельные объекты, а их совокупности. Свойства отдельного объекта не важны. Сравнение: множество – это «мешок с элементами».
- объекты различны и отделены друг от друга. Нельзя, например, говорить о множестве капель в стакане воды, так как невозможно четко и ясно указать каждую отдельную каплю. В множестве не должно быть одинаковых (неразличимых) элементов. Если в процессе отыскания элементов множества получается несколько одинаковых (равных между собой) элементов, то из них оставляем только один.

Синонимы слова «множество»: «класс», «область», «совокупность».

Объекты, составляющие множество, могут быть самой различной природы.

Пример 1.

Множество может состоять из всех:

а) поверхностей некоторой детали;

б) натуральных чисел 1, 2, 3, …;

в) видов оборудования;

г) состояний определенной системы;

д) студентов некоторой группы;

е) студенческих групп 2-го курса машиностроительного факультета.

Объекты, составляющие множество, называются его **элементами**.

Пример 2.

Число 3 – элемент множества натуральных чисел; буква б – элемент множества букв русского алфавита.

Множества как объекты могут быть элементами других множеств (см. пример 1, е).

Множество, элементами которого в свою очередь являются множества, называется **системой множеств**.

Обозначения.

Общее обозначение множества – эта пара фигурных скобок {}, внутри которых перечисляются или описываются элементы множества. Элементы множества обозначают строчными буквами без индексов (x, y, …) или с индексами (a_1, a_2, …).

Пример 3. Если множество состоит из элементов a, b, c, то пишут: {a, b, c}.

Чтобы ссылаться на множество, не перечисляя их элементы, сами множества обозначаются прописными буквами A, S, X, … или X_1, X_2, …

Пример 4. Если из элементов a, b, c состоит множество A, то пишут: A = {a, b, c}.

Принадлежность элемента множеству обозначают символом $\in$.

Пример 5.

$a \in S$ – элемент a принадлежит множеству S (является элементом этого множества).

$x \notin S$ – элемент x не принадлежит множеству S (не является его элементом).

Конечные, бесконечные и пустые множества

Множества делятся на конечные и бесконечные.

Множество называется **конечным**, если оно состоит из конечного числа элементов, т.е. если существует натуральное число n, являющиеся числом элементов множества.

Бесконечное множество содержит бесконечное число элементов.

Пустое множество – это множество, не содержащее ни одного элемента.

Пустое множество обозначается символом $\varnothing$. Пустое множество часто относят к конечным множествам. Это единственное множество, при обозначении которого не используются фигурные скобки. Заметим, что $\varnothing \neq \{\varnothing\}$.

Пример 6.

Примеры конечных, бесконечных и пустых множеств:

1) все вышеперечисленные множества, кроме б) - конечные.

2) множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ (напомним, что ноль не является натуральным числом), множество целых чисел $\mathbb{Z}$, множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$, множество действительных чисел $\mathbb{R}$ (множество всех точек числовой прямой) - бесконечные.

3) множество нечетных чисел, нацело делящихся на 2 - пустое.

Пустое множество введено в математике для удобства. Так, без понятия пустого множества мы не могли бы говорить о множестве отличников в группе или о множестве вещественных корней уравнения, не убедившись предварительно, есть ли в данной группе отличники и имеет ли данное уравнение вещественные корни. Введение пустого множества позволяет спокойно оперировать, например, с множеством отличников группы, не заботясь о том, есть ли в данной группе отличники.

Одна из важных характеристик конечного множества – количество его элементов.

Количество всех элементов в конечном множестве M называется **мощностью** множества M и обозначается $|M|$.

Пример 7.

Множество M = {1, 4, 2, 10, 3} имеет мощность 5 (записывается: $|M|=5$), мощность пустого множества равна нулю ($|\varnothing|=0$), но $|\{\varnothing\}|=1$ ($\{\varnothing\}$ – одноэлементное множество).

Способы задания множеств.

Чтобы оперировать с конкретными множествами, надо уметь задавать эти множества. Чтобы задать множество, нужно указать, какие элементы ему принадлежат. Это можно сделать следующими способами:

- перечислением элементов: $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$;
- описанием: $M = \{x \in U \mid P(x)\}$.

Перечисление – это задание списка элементов множества или списка их обозначений, разделенных запятыми.

Список обычно заключается в фигурные скобки. Перечислением можно задавать только конечные множества. Для сокращения записи X = $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ иногда вводят множество индексов I = {1, 2, …, n}: $X=\{x_i\}$, $i \in I$.

Описание состоит в том, что указывается свойство (или проверяется некоторое условие). Если данный элемент обладает этим свойством (или для него выполняется данное условие), то он принадлежит определяемому множеству, иначе – не принадлежит.

Описанием можно задавать и бесконечные, и конечные множества.

Пусть P(x) – сокращенное обозначение предложения «элемент x обладает свойством P» или «для элемента x выполняется условие P». Тогда множество всех элементов, имеющих свойство P, обозначают так: {x | P(x)} («множество всех x таких, что P(x) истинно»). Если x выбирается из множества U, и это нужно отразить в описании, то пишут: $\{x \in U \mid P(x)\}$.

Описание свойств должно быть точным и недвусмысленным. Например, множество всех хороших фильмов 2015 года разные люди зададут разными списками, быть может, пустыми. Сами критерии отбора при этом будут различны. Такое множество нельзя считать строго заданным.

Пример 8.

1) Множество отличников группы можно задать:
– перечислением: {Иванов, Петров, Сидоров};
– описанием: $\{x \in M$ | x – отличник группы$\}$, где M – множество студентов определенной группы.
2) {x | x – четное} – множество всех четных чисел (задано описанием).
3) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 = 0\}$, {+1, -1} – одно и то же множество, заданное описанием и перечислением.
4) $\{x \in \mathbb{N} \mid 2 \le x \le 2^{10}\}$ – множество всех натуральных чисел от 2 до 2^{10}.
5) $\{x \mid x^2 + 1 = 0\}$ – множество, состоящее из элементов $\pm i$, где i – мнимая единица.
6) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0\}$ – такое множество является пустым, т.е. $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0\} = \varnothing$.

Отношения между множествами.

1. Отношение равенства.

Два конечных множества M и N называются **равными**, если они состоят из одних и тех же элементов (M=N).

$M \neq N$, если в M есть элементы, не принадлежащие N, либо наоборот.

Следствия:
1) Порядок элементов в множестве не важен.
2) Все пустые множества равны (существует только одно пустое множество).

Пример 9.

1) {2, 4, 5, 6} = {4, 5, 6, 2}.
2) Множества {0, 1} и {{0, 1}} не равны, так как первое – двухэлементное, а второе – одноэлементное.

2. Отношение включения.

Множества A **включено** в множество B (или содержится в множестве B), если любой элемент множества A принадлежит множеству B. В этом случае говорят, что множество A является **подмножеством** множества B. Обозначается: $A \subseteq B$, $\subseteq$ - знак включения.

Запись $A \subset B$ равносильна тому, что $A \subset B$ и $A \neq B$. Используется, если нужно подчеркнуть, что B содержит и другие элементы, кроме элементов из A (разница между $\subset$ и $\subseteq$ равносильна разнице между $<$ и $\leq$).

Если $A \subset B$, то A называется **собственным** подмножеством множества B.

Пример 10.

1) Множество четных чисел есть подмножество множества $\mathbb{Z}$ целых чисел.
2) Мн-во рациональных чисел $\mathbb{Q}$ есть подмножество мн-ва $\mathbb{R}$ действительных чисел.
3) $\{1, 3\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$.

Свойства отношения включения (здесь A, B, C – произвольные множества):

1) $\forall$ A: $A \subseteq A$ (рефлексивность).
2) $\forall$ A, B, C: если $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$ (транзитивность).
3) $\forall$ A, B: если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, то $A=B$ (два множества равны, если они являются подмножествами друг друга).
4) $\forall$ A: $\varnothing \subset A$ (пустое множество есть подмножество любого множества).

Подмножества A и $\varnothing$ являются несобственными подмножествами множества A.

Если множество содержит, по крайней мере, два элемента, то оно обладает и собственными подмножествами.

Пример 11.

Всевозможные подмножества множества {a, b} (их всего 4):

$\varnothing$, {a}, {b}, {a, b}, из которых {a} и {b} - собственные.

Множество всех подмножеств множества A называется **множеством-степенью** (обозначается 2^A) или **булеаном**.

Такое множество существует для любого множества A.

Пример 12.

1) Если $A = \{a, b\}$, то $2^A = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.
2) Если $B = \{1, 2, 3\}$, то $2^B = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

<u>Теорема.</u> Если конечное множество A состоит из n элементов, то число всех подмножеств множества A равно 2^n.

В примере 12 $|B|=3$, значит, $|\ 2^B\ |= 2^3 = 8$, т.е. множество B имеет всего 8 подмножеств.

<u>Замечание.</u> Следует четко различать отношения принадлежности ($\in$) и включения ($\subseteq$). Например: хотя $1 \in \{1, 2\}$, но $\{1\} \notin \{1, 2\}$, зато $\{1\} \subset \{1, 2\}$.

Пример 13. Попробуйте самостоятельно определить, какие из этих отношений истинны:

1) $0 \in \{0,1\}$; 2) $\{0\} \subseteq \varnothing$; 3) $\{0,1\} \subseteq \{\{0,1\}, 2\}$; 4) $\varnothing \subseteq \varnothing$; 5) $\{2\} \subseteq \{\{0,1\}, 2\}$;

6) $\{0,1\} \in \{\{0,1\}, 2\}$; 7) $0 \in \varnothing$; 8) $\{0,1\} \in \{0,1\}$; 9) $0 \in \{\{\{0, 1\}, 2\}, \varnothing\}$;

10) $2\text{-}1^0 \in \{0,1\}$; 11) $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$; 12) $\{2,0\} \subseteq \{0,1,2\}$; 13) $\{0,1\} \in \{\{\{0,1\}, 2\}, \varnothing\}$;

14) $\{2\} \subseteq \{\{0,1\}, 2^0\}$; 15) $\varnothing \in \varnothing$; 16) $\{0,1\} \subseteq \{0,1\}$; 17) $\varnothing \in \{\varnothing\}$; 18) $\varnothing \subseteq \{\{0,1\}, 2\}$.

Ниже приводятся правильные ответы с подробным объяснением.

Отметим, что отношение принадлежности связывает объекты двух разных типов:

элемент $\in$ множество,

а отношение включения связывает объекты одного и того же типа:

множество $\subseteq$ множество.

Отношение принадлежности справедливо в том и только том случае, если в множестве, стоящем справа от знака $\in$, имеется элемент, совпадающий с объектом, стоящим слева от знака $\in$. «Совпадающий с объектом» означает «в точности такой же или равный ему». Отметим, что объект, рассматриваемый здесь как элемент, сам при этом может быть множеством.

Отношение включения справедливо в том и только том случае, если все элементы, принадлежащие множеству, стоящему слева от знака $\subseteq$, принадлежат также и множеству, стоящему справа от знака $\subseteq$.

Исходя из сказанного, поясним справедливость отношений, приведенных выше.

1) $0\in\{0,1\}$ – элемент 0 есть среди элементов множества $\{0,1\}$;

2) $\{0\}\not\subset\varnothing$ - пустое множество не имеет никаких элементов, в том числе и элемента 0;

3) $\{2,0\}\not\subset\{\{0,1\}, 2\}$ – элемента 0 из $\{2,0\}$ нет в двухэлементном множестве $\{\{0,1\}, 2\}$;

4) $\varnothing\subseteq\varnothing$ – пустое множество является подмножеством любого множества;

5) $\{2\}\subseteq\{\{0,1\}, 2\}$ – единственный элемент 2 из множества $\{2\}$ есть в множестве $\{\{0,1\}, 2\}$;

6) $\{0,1\}\in\{\{0,1\}, 2\}$ – элемент $\{0,1\}$ есть в множестве $\{\{0,1\}, 2\}$;

7) $0\notin\varnothing$ – пустое множество не содержит никаких элементов, в том числе и 0;

8) $\{0,1\}\notin\{0,1\}$ – в множестве $\{0,1\}$ (справа) нет элемента 0 из множества $\{0,1\}$ (слева);

9) $0\notin\{\{\{0, 1\}, 2\}, \varnothing\}$ – в двухэлементном множестве $\{\{\{0, 1\}, 2\}, \varnothing\}$ нет элемента 0;

Если элемент, для которого проверяется принадлежность множеству, представляет собой выражение, то вначале вычисляется значение этого выражения, а затем проверяется справедливость отношения.

10) $2\text{-}1^0\in\{0,1\}$ – в множестве $\{0,1\}$ есть элемент 1, равный элементу $2\text{-}1^0$;

11) $\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$ – пустое множество является подмножеством любого множества;

12) $\{2,0\}\subseteq\{0,1,2\}$ – все элементы из множества $\{2,0\}$ (и 2, и 0) есть в множестве $\{0,1,2\}$;

13) $\{0,1\}\notin\{\{\{0,1\}, 2\}, \varnothing\}$ – в двухэлементном множестве $\{\{\{0, 1\}, 2\}, \varnothing\}$ нет элемента $\{0,1\}$;

14) $\{2\}\not\subset\{\{0,1\}, 2^0\}$ – в множестве $\{\{0,1\}, 2^0\}$ нет элемента 2 (или равного ему) из мн-ва $\{2\}$;

15) $\varnothing\notin\varnothing$ – в пустом множестве нет никаких элементов, в том числе и элемента $\varnothing$;

16) $\{0,1\}\subseteq\{0,1\}$ – любое множество всегда является своим собственным подмножеством;

17) $\varnothing\in\{\varnothing\}$ – элемент $\varnothing$ есть в одноэлементном множестве $\{\varnothing\}$;

18) $\varnothing\subseteq\{\{0,1\}, 2\}$ – пустое множество является подмножеством любого множества;

19) $\{0,1\}\in\{\{0,1\}\}$ – в одноэлементном множестве $\{\{0,1\}\}$ есть элемент $\{0,1\}$;

20) $\{\{0,1\}\}\subseteq\{\{0,1\}, 2\}$ – элемент $\{0,1\}$ из $\{\{0,1\}\}$ есть среди элементов множества $\{\{0,1\}, 2\}$.

1.2. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

Теперь рассмотрим способы конструирования новых множеств из уже существующих, т.е. определим операции над множествами.

Если все множества, рассматриваемые при решении определенной задачи, являются подмножествами некоторого множества U, то множество U называется универсальным для данной задачи, или **универсумом**.

Для каждого множества M существует множество всех его подмножеств 2^M. По отношению к системе всех своих подмножеств любое множество является универсумом.

Пусть U – универсум, $M \subseteq U$, $N \subseteq U$.

<u>Операции над множествами</u>

1. **Объединение** множеств M и N – это множество, каждый элемент которого принадлежит либо M, либо N, либо M и N одновременно: $M \cup N = \{a \in U \mid a \in M \text{ или } a \in N\}$.

2. **Пересечение** множеств M и N – это множество, каждый элемент которого принадлежит и множеству M, и множеству N: $M \cap N = \{a \in U \mid a \in M \text{ и } a \in N\}$. Множества называются непересекающимися, если они не имеют общих элементов: $M \cap N = \varnothing$.

3. **Разность** множеств M и N – это множество, все элементы которого принадлежат M и не принадлежат N: $M \setminus N = \{a \in U \mid a \in M \text{ и } a \notin N \}$.

Через другие операции разность выражается так: $\boxed{M \setminus N = M \cap \overline{N}}$.

4. **Симметрическая разность** множеств M и N – это множество, все элементы которого принадлежат объединению множеств M и N и не принадлежит пересечению этих множеств:

$$\boxed{M \Delta N = (M \cup N) \setminus (M \cap N)} = \{ a \in U \mid a \in M \cup N \text{ и } a \notin M \cap N \} \text{ или}$$
$$\boxed{M \Delta N = (M \setminus N) \cup (N \setminus M)} = \{ a \in U \mid (a \in M \text{ и } a \notin N) \text{ или } (a \in N \text{ и } a \notin M)\}.$$

5. **Дополнение** множества M до универсума – это множество $\overline{M}$, состоящее из всех тех элементов универсума U, которые не принадлежат M: $\boxed{\overline{M} = U \setminus M} = \{a \in U \mid a \notin M\}$.

Дополнение является одноместной (унарной) операций, все остальные операции – двухместные (бинарные). Знаки операций: $\cup$ - объединение, $\cap$ - пересечение, $\setminus$ - разность, Δ - симметрическая разность, черта над выражением – дополнение.

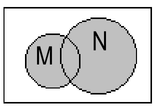
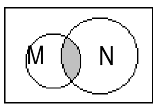
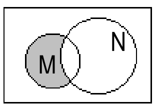
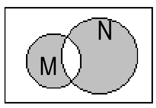
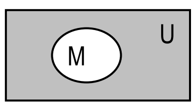
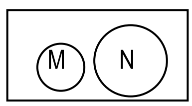
Пример 1. Пусть задан универсум U и его подмножества X и Y.

$U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $X=\{1, 2, 4, 5\}$, $Y=\{2, 4, 5, 6, 7\}$.

Объединение:	$X \cup Y= \{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$ – все элементы из X и Y.
Пересечение:	$X \cap Y= \{2, 4, 5\}$ – элементы, общие для X и Y.
Разность:	$X \setminus Y= \{1\}$ – элементы из X, но лишь те, которых нет в Y.
Симметрическая разность:	$X \Delta Y= \{1, 6, 7\}$ – объединение X и Y без их пересечения.
Дополнение:	$\overline{X} = \{3, 6, 7, 8, 9\}$ – все элементы универсума без X.

Операции над множествами можно изображать графически **диаграммами Эйлера**. Прямоугольная область диаграммы соответствует универсуму, а круги - множествам.

Диаграммы Эйлера, чьи закрашенные области соответствуют указанным операциям:

					
объединение мн-в M и N	пересечение мн-в M и N	разность мн-в M и N	симметрическая разность M и N	дополнение мн-ва M	мн-ва M и N не пересекаются

Используя рассмотренные операции, можно выражать одни множества через другие. При этом сначала выполняется операция дополнения, затем пересечения, разности, симметрической разности, и последней – объединения; операции с одинаковым приоритетом выполняются слева направо. Для изменения этого порядка используют скобки.

Пусть U – универсум, и F_1, F_2, F_3 - любые его подмножества, заданные сколь угодно сложными выражениями. Тогда для операций дополнения, пересечения и объединения справедливы следующие

Свойства операций над множествами

1. Ассоциативность:	1)$F_1 \cup (F_2 \cup F_3)=$ $=(F_1 \cup F_2) \cup F_3= F_1 \cup F_2 \cup F_3$;	2)$F_1 \cap (F_2 \cap F_3)=$ $(F_1 \cap F_2) \cap F_3= F_1 \cap F_2 \cap F_3$.
2. Коммутативность:	1)$F_1 \cup F_2 = F_2 \cup F_1$;	2)$F_1 \cap F_2 = F_2 \cap F_1$.
3. Идемпотентность:	1)$F_1 \cup F_1 = F_1$;	2)$F_1 \cap F_1 = F_1$.
4. Дистрибутивность:	1)$F_1 \cap (F_2 \cup F_3)=(F_1 \cap F_2) \cup (F_1 \cap F_3)$;	2)$F_1 \cup (F_2 \cap F_3)=(F_1 \cup F_2) \cap (F_1 \cup F_3)$.
5. Свойства нуля:	1)$F_1 \cup \varnothing = F_1$;	2)$F_1 \cap \varnothing = \varnothing$.
6. Свойства единицы:	1)$F_1 \cup U = U$;	2)$F_1 \cap U = F_1$.
7. Свойства дополнения:	1)$F_1 \cup \overline{F}_1 = U$;	2)$F_1 \cap \overline{F}_1 = \varnothing$.
8. Инволютивность:	$\overline{\overline{F_1}} = F_1$.	
9. Законы де Моргана:	1) $\overline{F_1 \cup F_2} = \overline{F}_1 \cap \overline{F}_2$;	2) $\overline{F_1 \cap F_2} = \overline{F}_1 \cup \overline{F}_2$.
10. Поглощение:	1)$F_1 \cup (F_1 \cap F_2) = F_1$;	2)$F_1 \cap (F_1 \cup F_2) = F_1$.

Замечание. Свойства 1-10 справедливы **только** для операций дополнения, пересечения и объединения.

Приоритет операций в порядке убывания: дополнение, пересечение, объединение.

Рассмотрим подробнее приведенные свойства. Чаще всего они применяются при символьных преобразованиях выражений. Каждое из свойств является тождеством, и может использоваться при преобразованиях как слева направо, так и справа налево.

Операции объединения и пересечения множеств можно в некотором смысле рассматривать соответственно как операции сложения и умножения обычных чисел. Пустое множество можно рассматривать как ноль.

Ассоциативность (1.1 и 1.2). Объединение трех и более множеств можно выполнять в любом порядке – результат от этого не изменится. То же для пересечения.

Пример 2.

Дано: универсум U={1,2,3,4,5}, A = {1,3}, B={3,4}. Найти значение выражения $A \cup B \cup \overline{B}$.

Решение: $A \cup B \cup \overline{B}$ =[ассоциативность 1.1]=$A \cup (B \cup \overline{B})$=[7.1]= $A \cup U$=[6.1]= U = {1,2,3,4,5}.

Пример 3.

Упростить выражение: $A \cap B \cap (B \cup C) \cap C$.

Решение: $A \cap B \cap (B \cup C) \cap C$ =[1.2]= $A \cap (B \cap (B \cup C)) \cap C$ =[10.2]= $A \cap B \cap C$.

Коммутативность (2.1 и 2.2). Операция объединения является симметричной («от перестановки мест слагаемых сумма не меняется»). То же для пересечения.

Пример 4.

Упростить выражение: $B \cap A \cup A$.

Решение: $B \cap A \cup A$ =[расставляем скобки в соответствии с приоритетом операций]=
= $(B \cap A) \cup A$ =[2.1]= $A \cup (B \cap A)$ =[2.2]= $A \cup (A \cap B)$ =[10.1]= A.

Идемпотентность (3.1 и 3.2). Объединения множества с самим собой дает это же множество. То же для пересечения. В этом случае нет аналогии с операциями сложения и умножения чисел.

Пример 5.

Упростить выражение: $A \cup B \cup (A \cup B \cup A)$.

Решение: $A\cup B\cup(A\cup B\cup A)$ =[1.1]= $A\cup B\cup(A\cup(B\cup A))$ =[2.1]= $A\cup B\cup(A\cup(A\cup B))$ =[1.1]= = $A\cup B\cup((A\cup A)\cup B)$ = [3.1]= $A\cup B\cup(A\cup B)$ =[1.1]= $(A\cup B)\cup(A\cup B)$ =[1.1]= $A\cup B$.

В большинстве случаев применение свойств ассоциативности, коммутативности, идемпотентности очевидно, поэтому в преобразованиях оно часто просто подразумевается и не записывается подробно.

Дистрибутивность (4.1 и 4.2). Это правило, по которому в выражении раскрываются скобки, либо выносится за скобки общее подвыражение. При этом знаки операций вне и внутри скобок должны быть противоположны. Пересечение дистрибутивно относительно объединения: $F_1\cap(F_2\cup F_3)=(F_1\cap F_2)\cup(F_1\cap F_3)$ (здесь полная аналогия с умножением и сложением). Но и объединение также дистрибутивно относительно пересечения.

Пример 6.

Упростить выражение: $B \cup A \cap (B \cup \overline{A})$.

Решение: $B\cup A\cap(B\cup\overline{A})$ =[расставляем скобки в соответствии с приоритетом операций]= $=B\cup(A\cap(B\cup\overline{A}))$=[4.1]=$B\cup((A\cap B)\cup(A\cap\overline{A}))$=[7.2]=$B\cup((A\cap B)\cup\varnothing)$=[5.1]=$B\cup(A\cap B)$=[10.1]=$B$.

Пример 7.

Упростить выражение: $(\overline{B} \cup C) \cap A \cup A \cap B$.

Решение: $(\overline{B}\cup C)\cap A\cup A\cap B$ =[расставим скобки в соответствии с приоритетом операций]= $=((\overline{B}\cup C)\cap A)\cup(A\cap B)$ =[2.1]= $(A\cap B)\cup((\overline{B}\cup C)\cap A)$ =[4.2]= $((A\cap B)\cup(\overline{B}\cup C))\cap((A\cap B)\cup A)$= =[1.1]= $((A\cap B)\cup\overline{B}\cup C)\cap((A\cap B)\cup A)$ =[2.1]= $((A\cap B)\cup\overline{B}\cup C)\cap(A\cup(A\cap B))$ =[10.1]= $=((A\cap B)\cup\overline{B}\cup C)\cap A$ =[1.1]= $(((A\cap B)\cup\overline{B})\cup C)\cap A$ =[2.1, 4.2]= $(((\overline{B}\cup A)\cap(\overline{B}\cup B))\cup C)\cap A$= =[7.1]= $(((\overline{B}\cup A)\cap U)\cup C)\cap A$ =[6.2]= $((\overline{B}\cup A)\cup C)\cap A$ =[1.1, 2.1, 2.2]= $A\cap(A\cup\overline{B}\cup C)$ =[10.2]=A.

Этот же результат можно получить и по-другому:

$(\overline{B}\cup C)\cap A\cup A\cap B$ = $((\overline{B}\cup C)\cap A)\cup(A\cap B)$ =[2.2]= $(A\cap(\overline{B}\cup C))\cup(A\cap B)$ =[4.1]= $A\cap(\overline{B}\cup C\cup B)$= =[2.1]= $A\cap(\overline{B}\cup B\cup C)$ =[1.1]= $A\cap((\overline{B}\cup B)\cup C)$ =[7.1]= $A\cap(U\cup C)$ =[6.1]= $A\cap U$ =[6.2]= A.

Свойства нуля (5.1 и 5.2). Объединение некоторого множества с пустым не меняет исходное множество, пересечение пустого множества с любым другим множеством пусто. Здесь полная аналогия с операциями сложения с нулем и умножением на ноль.

Свойства единицы (6.1 и 6.2). Роль единицы в теории множеств играет универсум. Объединение любого множества из универсума с самим универсумом дает универсум. Пересечение любого множества из универсума с этим универсумом дает это же множество. Здесь нет аналогии со сложением и умножением. Справедливость этих свойств легко показать с помощью диаграмм Эйлера.

Свойства дополнения (7.1 и 7.2). Объединение множества и его дополнения дает универсум. Множество и его дополнение не имеют общих элементов – их пересечение пусто. Примеры использования этих свойств встречались выше.

Инволютивность (8). Четное количество знаков дополнения над выражением взаимно уничтожается.

Законы де Моргана (9.1 и 9.2). Дополнение объединения произвольного числа множеств равно пересечению их дополнений. И наоборот. Законы де Моргана используются, чтобы переместить область действия операции дополнения в выражении на более низкий уровень.

Пример 8.

Упростить выражение: $\overline{A\cup B\cap\overline{A}\cup\overline{B}}$.

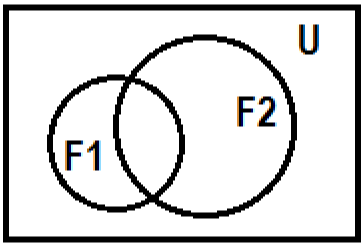
Решение: $\overline{A\cup B\cap\overline{A}\cup\overline{B}}$ =[расставляем скобки в соответствии с приоритетом операций]= $=\overline{A\cup(B\cap\overline{A})\cup\overline{B}}$ =[9.2]= $\overline{A}\cap\overline{B\cap\overline{A}}\cap\overline{\overline{B}}$ =[8]= $\overline{A}\cap\overline{B\cap\overline{A}}\cap B$ =[2.2, 1.2]= $(B\cap\overline{A})\cap\overline{B\cap\overline{A}}$ =[7.2]= $\varnothing$.

Поглощение (10.1 и 10.2). Если одно и то же выражение F_1 стоит вне скобок и внутри скобок, и при этом знаки операций, которыми F_1 присоединяется к скобкам и к выражению внутри скобок, противоположны, то можно применять свойство поглощения. В результате применения этого свойства меньшее выражение F_1 целиком поглощает большее выражение, $(F_1 \cap F_2)$ либо $(F_1 \cup F_2)$, в которое F_1 входит целиком.

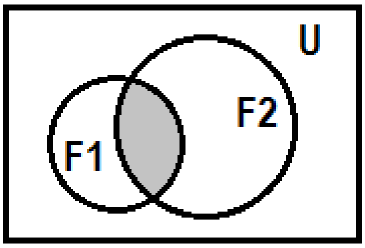
Справедливость каждого из этих свойств можно проверить с помощью кругов Эйлера.

Покажем, например, что справедливо свойство поглощения $F_1 \cup (F_1 \cap F_2) = F_1$. Для этого проверим, что результат построения диаграммы Эйлера для левой части тождества будет таким же, как и для правой его части.

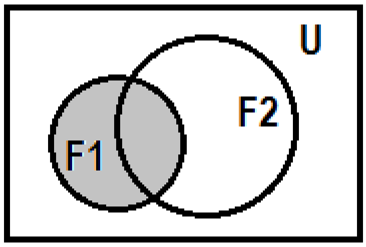
Строим диаграмму Эйлера:



Результат операции $F_1\cap F_2$:



Результат $F_1 \cup (F_1\cap F_2)$:



Видим, что результат, полученный для выражения в левой части тождества, полностью совпадает с F_1, т.е. с правой частью рассматриваемого тождества.

Подходы к преобразованию выражений с помощью свойств операций над множествами.

Обычно в первую очередь необходимо избавиться от операций разности и симметрической разности, если они есть в выражении, т.к. для них не определены правила преобразований (свойства). Преобразования выполняются по правилам:

$$F_1 \setminus F_2 = F_1 \cap \overline{F_2}\ ,$$

$$F_1\ \Delta\ F_2 = (F_1 \setminus F_2) \cup (F_2 \setminus F_1) \text{ или } F_1\ \Delta\ F_2 = (F_1 \cup F_2) \setminus (F_1 \cap F_2).$$

Выражения, являющиеся аргументами операций \ и Δ, часто берутся в скобки, иначе такими аргументами считаются ближайшие к этим знакам минимальные подвыражения.

Далее выражение разбивается на «слагаемые», соединенные знаком $\cup$, и «сомножители», соединенные знаком $\cap$, чтобы можно было упрощать их независимо. Разбиение делается с учетом приоритета операций и скобок.

Если операция дополнения относится не к элементарному множеству, а к подвыражению, составленному из элементарных множеств, то в первую очередь преобразуется это подвыражение (или вычисляется его значение), а уже затем к результату применяется операция дополнения (можно считать, что в этом случае подвыражение заключено в скобки, которые регулируют порядок выполнения операций).

Пример 9. Используя свойства операций над множествами, упростить выражение:

$$(\bar{R} \setminus \bar{P})\,\Delta\,(P\cap Q) \cup \overline{Q\cap R}.$$

Далее очень подробно рассмотрен один из возможных вариантов упрощения.

$(\bar{R} \setminus \bar{P})\,\Delta\,(P\cap Q) \cup \overline{Q\cap R} =$

[избавляемся от операции разности: $F_1 \setminus F_2 = F_1 \cap \overline{F_2}$]

$$(\underbrace{\bar{R}}_{F_1} \setminus \underbrace{\bar{P}}_{F_2})\,\Delta\,(P\cap Q) \cup \overline{Q\cap R}$$

$= (\bar{R}\cap\bar{\bar{P}})\,\Delta\,(P\cap Q) \cup \overline{Q\cap R} =$

[применяем свойство инволютивности: $\overline{\overline{F_1}} = F_1$]

$$(\bar{R}\cap\underbrace{\bar{\bar{P}}}_{F_1})\,\Delta\,(P\cap Q) \cup \overline{Q\cap R}$$

$= (\bar{R}\cap P)\,\Delta\,(P\cap Q) \cup \overline{Q\cap R} =$

[избавляемся от операции симметрической разности:

$F_1\,\Delta\,F_2 = (F_1 \setminus F_2) \cup (F_2 \setminus F_1) = (F_1 \cap \overline{F_2}) \cup (F_2 \cap \overline{F_1})$]

$$\underbrace{(\bar{R}\cap P)}_{F_1}\,\Delta\,\underbrace{(P\cap Q)}_{F_2} \cup \overline{Q\cap R}$$

$=((\bar{R}\cap P)\cap\overline{P\cap Q}) \cup ((P\cap Q)\cap\overline{\bar{R}\cap P}) \cup \overline{Q\cap R} =$

[применяем свойство ассоциативности: $(F_1\cap F_2)\cap F_3 = F_1\cap F_2\cap F_3$]

$$((\underbrace{\bar{R}}_{F_1}\cap\underbrace{P}_{F_2})\cap\underbrace{\overline{P\cap Q}}_{F_3}) \cup ((\underbrace{P}_{F_1}\cap\underbrace{Q}_{F_2})\cap\underbrace{\overline{\bar{R}\cap P}}_{F_3}) \cup \overline{Q\cap R}$$

$= (\bar{R}\cap P\cap\overline{P\cap Q}) \cup (P\cap Q\cap\overline{\bar{R}\cap P}) \cup \overline{Q\cap R} =$

[применяем закон де Моргана: $\overline{F_1\cap F_2} = \overline{F_1} \cup \overline{F_2}$]

$$(\bar{R}\cap P\cap\overline{\underbrace{P}_{F_1}\cap\underbrace{Q}_{F_2}}) \cup (P\cap Q\cap\overline{\underbrace{\bar{R}}_{F_1}\cap\underbrace{P}_{F_2}}) \cup \overline{\underbrace{Q}_{F_1}\cap\underbrace{R}_{F_2}}$$

$= (\bar{R}\cap P\cap(\bar{P}\cup\bar{Q})) \cup (P\cap Q\cap(\bar{\bar{R}}\cup\bar{P})) \cup (\bar{Q}\cup\bar{R}) =$

[применяем свойство инволютивности: $\bar{\bar{F}} = F$

и свойство ассоциативности: $F_1 \cup (F_2\cup F_3) = F_1 \cup F_2 \cup F_3$]

$$\underbrace{(\bar{R}\cap P\cap(\bar{P}\cup\bar{Q})) \cup (P\cap Q\cap(\underbrace{\bar{\bar{R}}}_{F}\cup\bar{P}))}_{F_1} \cup (\underbrace{\bar{Q}}_{F_2}\cup\underbrace{\bar{R}}_{F_3})$$

$= (\bar{R}\cap P\cap(\bar{P}\cup\bar{Q})) \cup (P\cap Q\cap(R\cup\bar{P})) \cup \bar{Q}\cup\bar{R} =$

Примечание. Далее во многих случаях перед применением указанных свойств также применяется свойство ассоциативности – без явного упоминания о нем. Оно используется, если перед применением какого-либо свойства нужно сгруппировать несколько подвыражений в одно. Так можно делать только в том случае, когда все группируемые подвыражения соединены одним и тем же знаком – либо только $\cup$, либо только $\cap$. Если группируемые подвыражения соединены знаком $\cup$, то результат группировки должен присоединяться к оставшейся части исходного выражения также знаком $\cup$. Например, ниже в качестве F_2 выбрано объединение трех подвыражений:

$$(P \cap Q \cap (R \cup \bar{P})), \bar{Q} \text{ и } \bar{R}.$$

Все они соединены между собой знаком $\cup$, и этим же знаком полученное F_2 присоединяется к оставшейся части исходного выражения. Подразумевается, что для дальнейших действий выбранное подвыражение $(P \cap Q \cap (R \cup \bar{P})) \cup \bar{Q} \cup \bar{R}$ взято в скобки.

[применяем свойство коммутативности: $F_1 \cup F_2 = F_2 \cup F_1$]

$$\underbrace{(\bar{R} \cap P \cap (\bar{P} \cup \bar{Q}))}_{F_1} \cup \underbrace{(P \cap Q \cap (R \cup \bar{P})) \cup \bar{Q} \cup \bar{R}}_{F_2}$$

$= (P \cap Q \cap (R \cup \bar{P})) \cup \bar{Q} \cup \bar{R} \cup (\bar{R} \cap P \cap (\bar{P} \cup \bar{Q})) =$

[применяем свойство поглощения: $F_1 \cup (F_1 \cap F_2) = F_1$]

$$(P \cap Q \cap (R \cup \bar{P})) \cup \bar{Q} \cup \underbrace{\bar{R}}_{F_1} \cup (\underbrace{\bar{R}}_{F_1} \cap \underbrace{P \cap (\bar{P} \cup \bar{Q})}_{F_2})$$

$= (P \cap Q \cap (R \cup \bar{P})) \cup \bar{Q} \cup \bar{R} =$

[применяем свойство дистрибутивности: $F_1 \cap (F_2 \cup F_3) = (F_1 \cap F_2) \cup (F_1 \cap F_3)$]

$$(\underbrace{P \cap Q}_{F_1} \cap (\underbrace{R}_{F_2} \cup \underbrace{\bar{P}}_{F_3})) \cup \bar{Q} \cup \bar{R}$$

$= (P \cap Q \cap R) \cup (P \cap Q \cap \bar{P}) \cup \bar{Q} \cup \bar{R} =$

[применяем свойство коммутативности: $F_1 \cap F_2 = F_2 \cap F_1$]

$$(P \cap Q \cap R) \cup (\underbrace{P \cap Q}_{F_1} \cap \underbrace{\bar{P}}_{F_2}) \cup \bar{Q} \cup \bar{R}$$

$= (P \cap Q \cap R) \cup (\bar{P} \cap P \cap Q) \cup \bar{Q} \cup \bar{R} =$

[применяем свойство дополнения: $\overline{F_1} \cap F_1 = \varnothing$]

$$(P \cap Q \cap R) \cup (\underbrace{\bar{P}}_{F_1} \cap \underbrace{P}_{F_1} \cap Q) \cup \bar{Q} \cup \bar{R}$$

$= (P \cap Q \cap R) \cup (\varnothing \cap Q) \cup Q \cup R =$

[применяем свойство нуля: $\varnothing \cap F_1 = \varnothing$]

$$(P \cap Q \cap R) \cup (\varnothing \cap \underbrace{Q}_{F_1}) \cup \bar{Q} \cup \bar{R}$$

$= (P \cap Q \cap R) \cup \varnothing \cup \bar{Q} \cup \bar{R} =$

[применяем свойство коммутативности: $F_1 \cup F_2 = F_2 \cup F_1$]

$$\underbrace{(P \cap Q \cap R)}_{F_1} \cup \underbrace{\varnothing}_{F_2} \cup \bar{Q} \cup \bar{R}$$

$= \varnothing \cup (P \cap Q \cap R) \cup \bar{Q} \cup \bar{R} =$

[применяем свойство нуля: $\varnothing \cup F_1 = F_1$]

$$\varnothing \cup \underbrace{(P \cap Q \cap R) \cup \bar{Q} \cup \bar{R}}_{F_1}$$

$= (P \cap Q \cap R) \cup \bar{Q} \cup \bar{R} =$

[применяем закон де Моргана: $\overline{F_1} \cup \overline{F_2} = \overline{F_1 \cap F_2}$]

$$(P \cap Q \cap R) \cup \underbrace{\overline{Q}}_{F_1} \cup \underbrace{\overline{R}}_{F_2}$$

$= (P \cap Q \cap R) \cup \overline{Q \cap R} =$

[применяем свойство коммутативности: $F_1 \cup F_2 = F_2 \cup F_1$]

$$\underbrace{(P \cap Q \cap R)}_{F_1} \cup \underbrace{\overline{Q \cap R}}_{F_2}$$

$= \overline{Q \cap R} \cup (P \cap Q \cap R) =$

[применяем свойство дистрибутивности: $F_1 \cup (F_2 \cap F_3) = (F_1 \cup F_2) \cap (F_1 \cup F_3)$]

$$\underbrace{\overline{Q \cap R}}_{F_1} \cup (\underbrace{P}_{F_2} \cap \underbrace{Q \cap R}_{F_3})$$

$= (\overline{Q \cap R} \cup P) \cap (\overline{Q \cap R} \cup Q \cap R) =$

[применяем свойство дополнения: $\overline{F_1} \cup F_1 = U$]

$$(\overline{Q \cap R} \cup P) \cap (\underbrace{\overline{Q \cap R}}_{F_1} \cup \underbrace{Q \cap R}_{F_1})$$

$= (P \cup \overline{Q \cap R}) \cap U =$

[применяем свойство единицы: $F_1 \cap U = F_1$]

$$\underbrace{(P \cup \overline{Q \cap R})}_{F_1} \cap U$$

$= P \cup \overline{Q \cap R}$ – искомый результат. Полученное выражение больше не может быть упрощено (правда, используя закон де Моргана, его можно привести к виду $P \cup \overline{Q} \cup \overline{R}$, но при этом в нем также останется в точности три обозначения элементарных множеств, от которых зависит исходное выражение – P, Q и R, а операций станет 4).

Пример 10.

Рассмотрим пример, где при упрощении в основном, используется свойство поглощения. В примере также показано, как правильно разбивать выражение на «слагаемые», соединенные знаком $\cup$, и «сомножители», соединенные знаком $\cap$, чтобы можно было упрощать их независимо. Разбиение делается с учетом приоритета операций.

$$(\overline{C \Delta B} \setminus A \cup (A \cup B) \cap (\overline{C} \cup A \cup C \cap (\overline{B \cup C} \cap \overline{A}) \cup B)) \cap (B \cup (A \cap \overline{C} \cap B)) =$$

[на самом внешнем уровне выражение состоит из двух «сомножителей»:]

$$=\underline{(\overline{C \Delta B} \setminus A \cup (A \cup B) \cap (\overline{C} \cup A \cup C \cap (\overline{B \cup C} \cap \overline{A}) \cup B))} \cap \underline{(B \cup (A \cap \overline{C} \cap B))} =$$

[на следующем уровне каждый сомножитель состоит из 2-х «слагаемых», и т.д.:]

$$=(\underline{\overline{C \Delta B} \setminus A} \cup \underline{(A \cup B) \cap (\overline{C} \cup A \cup C \cap (\overline{B \cup C} \cap \overline{A}) \cup B)}) \cap (\underline{B} \cup (\underline{A \cap \overline{C} \cap B})) =$$

[дважды применяем свойство поглощения:]

$$=(\underline{\overline{C \Delta B} \setminus A} \cup \underbrace{(A \cup B) \cap (\overline{C} \cup A \cup C \cap (\overline{B \cup C} \cap \overline{A}) \cup B))}_{A \cup B} \cap \underbrace{(B \cup (A \cap \overline{C} \cap B))}_{B} =$$

здесь $F_1 = A \cup B$, $F_2 = \overline{C} \cup C \cap (\overline{B \cup C} \cap \overline{A})$ здесь $F_1 = B$, $F_2 = A \cap \overline{C}$

$=(\overline{C \Delta B} \setminus A \cup A \cup B) \cap B =$ [применяем свойство поглощения, $F_1 = B$, $F_2 = \overline{C \Delta B} \setminus A \cup A$]$=B$.

Пример 11. Используя диаграммы Эйлера, проверить результат упрощения выражения, полученный в примере 9: $(\bar{R} \setminus \bar{P})\,\Delta\,(P \cap Q) \cup \overline{Q \cap R}$.

1. Определим порядок выполнения операций в соответствии с их приоритетом.

① ② ⑦

$$(\bar{R} \setminus \bar{P})\,\Delta\,(P \cap Q) \cup \overline{Q \cap R}.$$

③ ⑤ ④ ⑧ ⑥

Пояснение. Выражение зависит от трех переменных – P, Q, R. Соответствующие им множества являются в данном случае элементарными. В первую очередь выполняется операция дополнения, примененная к элементарному множеству. Поэтому, рассматривая выражение слева направо, определяем порядок двух первых операций – ① (дополнение множества R) и ② (дополнение множества P).

Скобки определяют порядок выполнения следующей операции: ③ (разность $\bar{R}$ и $\bar{P}$).

Далее опять будет выполняться операция в подвыражении, заключенном в скобки: ④ (пересечение множеств P и Q).

После выполнения операций ③ и ④ готовы оба аргумента для выполнения операции симметрической разности – это операция ⑤.

Далее выполняем операцию, находящуюся под знаком дополнения – это операция ⑥ (пересечение множеств Q и R).

Далее выполняется операция дополнения – ⑦ (дополнение подвыражения $Q \cap R$).

В последнюю очередь выполняется операция объединения, имеющая самый низкий приоритет. Это операция ⑧ – объединение подвыражений $(\bar{R} \setminus \bar{P})\,\Delta\,(P \cap Q)$ и $\overline{Q \cap R}$.

2. Построим диаграмму Эйлера, на которой изобразим круги, соответствующие множествам P, Q, R, и пронумеруем непересекающиеся области, на которые при этом разобьется часть плоскости, соответствующая универсуму U (рис. 1). Получим восемь областей с номерами *0 – 7.* Например, область с номером 0 (на рис.2 она закрашена) соответствует той части плоскости, где нет элементов ни одного из множеств P, Q, R.

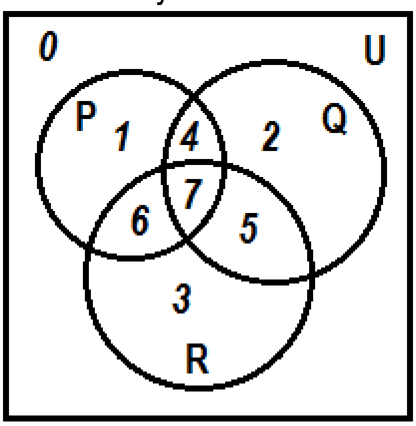


Рисунок 1.

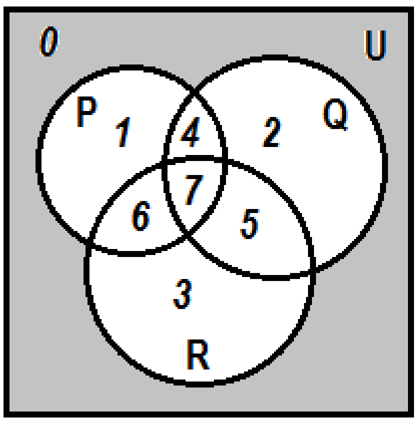


Рисунок 2.

Теперь универсум может быть задан множеством, состоящим из 8-ми областей: U = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}.

При этом

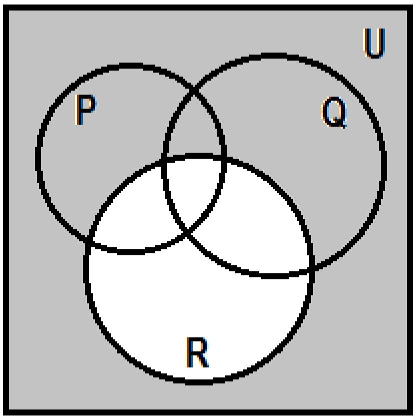
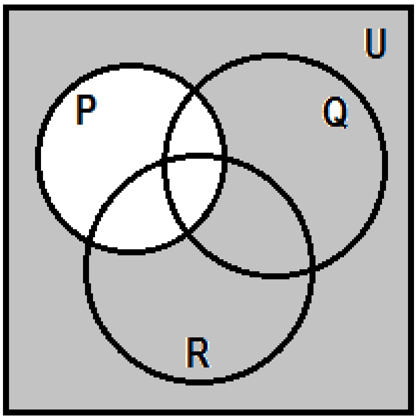
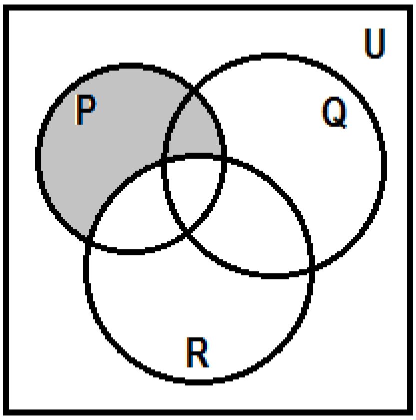
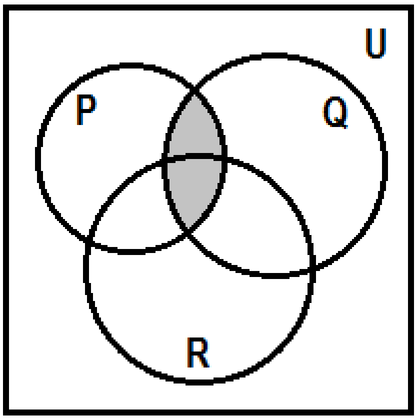
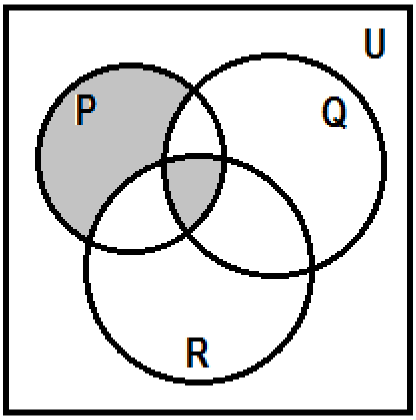
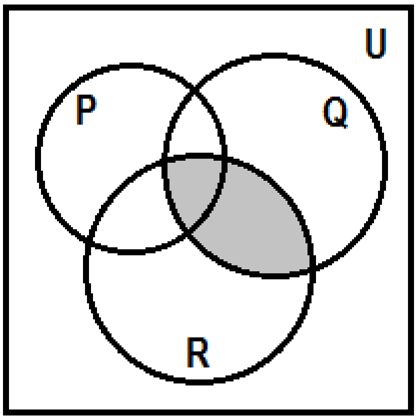
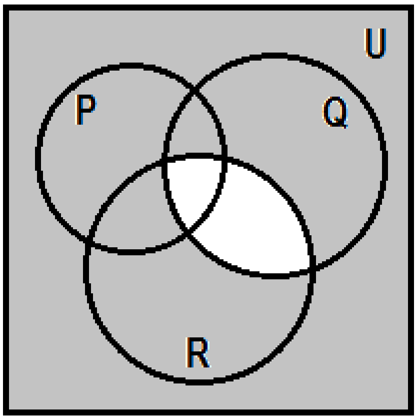
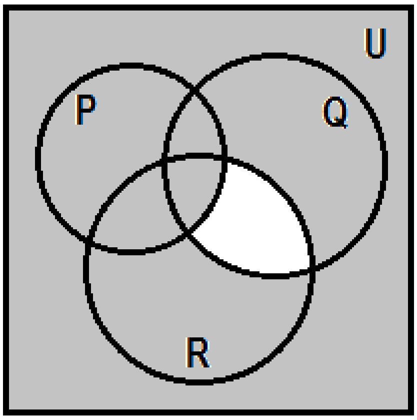
P = {1, 4, 6, 7},

Q = {2, 4, 5, 7},

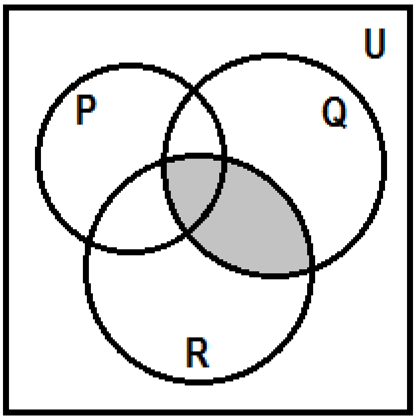
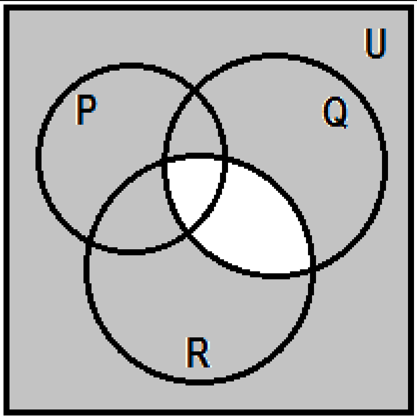
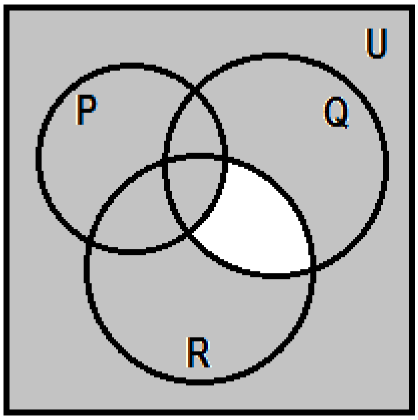
R = {3, 5, 6, 7}.

Такое представление множеств мы вводим для облегчения построения диаграмм.

3. Для результата каждой операции, содержащейся в исходном выражении, построим соответствующую диаграмму Эйлера (на каждой диаграмме закрашенная область соответствует результату выполнения операции). Построения будем выполнять в соответствии с найденным порядком выполнения операций (всего 8 диаграмм, по числу операций). Проверка показывает, какие области должны быть закрашены.

Результат операции ①:	Проверка:	Результат операции ②:	Проверка:
	$\overline{R} = U\setminus R =$ $=U\setminus\{3,5,6,7\}=$ $= \{0,1,2,4\}$.		$\overline{P} = U\setminus P =$ $=U\setminus\{1,4,6,7\}=$ $= \{0,2,3,5\}$.
Результат операции ③:	**Проверка:**	**Результат операции ④:**	**Проверка:**
	$\overline{R}\setminus\overline{P} =$ $=$ ① \ ② $=$ $= \{0,1,2,4\} \setminus$ $\{0,2,3,5\} =$ $= \{1,4\}$.		$P\cap Q =$ $= \{1,4,6,7\}\cap$ $\{2,4,5,7\} =$ $= \{4,7\}$.
Результат операции ⑤:	**Проверка:**	**Результат операции ⑥:**	**Проверка:**
	$(\overline{R}\setminus\overline{P})\Delta$ $(P\cap Q) =$ $=$ ③Δ④ $=$ $=\{1,4\}\Delta\{4,7\}=$ $= \{1,7\}$.		$Q\cap R =$ $= \{2,4,5,7\}\cap$ $\{3,5,6,7\} =$ $= \{5,7\}$.
Результат операции ⑦:	**Проверка:**	**Результат операции ⑧:**	**Проверка:**
	$\overline{Q\cap R} = \overline{\{5,7\}} =$ $= U\setminus\{5,7\} =$ $=\{0,1,2,3,4,6\}$		⑤$\cup$⑦ $=$ $=\{0,1,2,3,4,6,7\}$

Построим теперь диаграмму Эйлера, соответствующую результату $P\cup\overline{Q\cap R}$ упрощения выражения, полученному применением свойств операций над множествами.

$Q\cap R$	$\overline{Q\cap R}$	$P\cup\overline{Q\cap R}$
		

Видим, что окончательные результаты, полученные на диаграммах Эйлера, совпали.

Пример 12.

Выяснить, из каких элементов состоят множества U, B, D, M, и записать их перечислением.

Дано: $U = \{x \mid x$ – целое, $0 \le x \le 9\}$, $A = \{0, 3, 5, 6, 7, 9\}$, $B = \{x\in U \mid x$ – нечетное$\}$,

$C = \{3, 6, 8, 9\}$, $D = \{x\in\mathbb{N} \mid 4 \le x \le 9\}$; $M\subseteq C$, $|M|=3$, $6\in M$, $(D\setminus B)\cap C\subseteq M$, $\{2,3,4\}\cap M=\varnothing$.

Решение. Укажем, из каких элементов состоят множества U, B, D, заданные описанием:

$U = \{x \mid x$ – целое, $0 \le x \le 9\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,

$B = \{x\in U \mid x$ – нечетное$\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ (все нечетные числа из универсума),

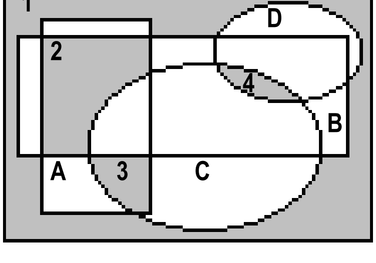
$D = \{x\in\mathbb{N} \mid 4 \le x \le 9\} = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ (все натуральные числа, удовлетворяющие заданному неравенству).

Элементы множества M определим в соответствии с заданными условиями:

– $M\subseteq C$, значит, в M могут быть только элементы из множества $\{3, 6, 8, 9\}$.
– $|M|=3$, значит, в M в точности 3 элемента.
– $6\in M$, значит, в M есть элемент 6: $\{3, 6, 8, 9\}$.
– $(D\setminus B)\cap C\subseteq M$, $(D\setminus B)\cap C=(\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}\setminus\{1, 3, 5, 7, 9\})\cap\{3, 6, 8, 9\} = \{4,6,8\}\cap\{3,6,8,9\} = \{6, 8\}$, $\{6, 8\}\subseteq M$, значит, в M есть также элемент 8: $\{3, 6, 8, 9\}$.
– $\{2,3,4\}\cap M=\varnothing$, значит, в M нет элементов 2, 3, 4: $\{\cancel{3}, 6, 8, 9\}$.

Т.к. множество M состоит из трех элементов, окончательно получаем: $M = \{6, 8, 9\}$.

Пример 13. Ввести обозначения для множеств и составить выражение, которое описывает множество, соответствующее закрашенной части диаграммы Эйлера.



Введем обозначения для множеств, представленных на диаграмме (A, B, C, D), и для заштрихованных областей (1, 2, 3, 4). Представим отдельно каждую из областей соответствующим выражением.

1: $\overline{A\cup B\cup C\cup D}$; 2: $(A\cap B)\setminus C$; 3: $(A\cap C)\setminus B$; 4: $D\cap C$.

Выражение, соответствующее всей заштрихованной области на диаграмме, есть объединение полученных выражений: $\overline{A\cup B\cup C\cup D}\cup(A\cap B)\setminus C\cup(A\cap C)\setminus B\cup D\cap C$.

1.3. ВЕКТОРЫ И ПРЯМЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Вектор – это упорядоченный набор элементов. Место каждого элемента в векторе является вполне определенным и не может быть произвольно изменено.

Элементы, образующие вектор, называются **координатами** или **компонентами** вектора. Координаты нумеруются слева направо. Число координат вектора называется его **размерностью**.

В отличие от элементов множества, координаты вектора могут иметь одинаковые значения. Для обозначения вектора используются круглые скобки.

Запись $a=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ означает вектор a размерности n с компонентами $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Векторы размерности 2 часто называются **парами** (или упорядоченными парами), векторы размерности 3 – тройками и т.п.

Два вектора **равны**, если они имеют одинаковую размерность и соответствующие координаты их равны, т.е. векторы $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ и $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ равны, если $m=n$ и $a_1=b_1, a_2=b_2, \ldots, a_m=b_n$.

Прямым (**декартовым**) **произведением** множеств A и B ($A\times B$) называется множество всех пар, 1-я компонента которых принадлежит множеству A, а 2-я – множеству B.

Таким образом, элементами прямого произведения $A\times B$ являются пары вида (a, b):

$$A\times B=\{(a, b) \mid a\in A, b\in B\}.$$

Результат прямого произведения зависит от порядка сомножителей: в общем случае

$$X\times Y\neq Y\times X.$$

Если A = B, то обе координаты прямого произведения $A\times B$ принадлежат A. Такое произведение обозначается A^2.

Операция прямого произведения распространяется и на большее число множеств.

Прямым произведение множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется множество, обозначаемое $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$ и состоящие из векторов размерности n, 1-я компонента которых принадлежит A_1, 2-я – A_2, …, n-я – A_n: $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_1\in A_1, a_2\in A_2, \ldots, a_n\in A_n\}$

Пусть A – произвольное множество. Прямое произведение n одинаковых множеств, равных A, обозначаем A^n: $\underbrace{A\times A\times A\times\ldots\times A}_{n} = A^n$.

<u>Вывод</u>: Любой вектор размерности n является элементом прямого произведения $X_1\times X_2\times\ldots\times X_n$ некоторых множеств $X_1, \ldots, X_n$. И наоборот, прямое произведение n множеств состоит только из векторов размерности n.

Пример 1.

Пусть X={1,2,4}, Y={3,5}, Z={1}. Тогда:

$X\times Y=\{(1,3),(1,5),(2,3),(2,5),(4,3),(4,5)\}$,

$Z\times X=\{(1,1),(1,2),(1,4)\}$,

$Y\times Z=\{(3,1),(5,1)\}$,

$X\times Z\times Y=\{(1,1,3),(1,1,5),(2,1,3),(2,1,5),(4,1,3),(4,1,5)\}$.

Теорема (о мощности прямого произведения множеств).

Пусть A и B – конечные множества. Тогда $|A\times B|=|A|\cdot|B|$, т.е. мощность прямого произведения этих множеств равна произведению мощностей множеств A и B.

<u>Следствие</u>. $|A^n|=|A|^n$.

Проекции векторов

Проекцией вектора v = (v_1, …, v_n) на *i*-ю ось (*i* =1,2…n) называется его *i*-я компонента.

$$Пр_i\, v = v_i.$$

Проекцией вектора v=(v_1,…,v_n) на оси с номерами i_1,…,i_k называется вектор $(v_{i_1},\dots,v_{i_k})$ размерности k: $Пр_{i_1,\dots,i_k} v = (v_{i_1},\dots,v_{i_k})$.

Пример 2.

$Пр_3$(3,4,6,7,9) = 6, $Пр_{2,5}$(3,4,6,7,9) = (4,9).

Проекции множеств

Операция проецирования множества тесно связана с операцией проецирования вектора и может применяться лишь к таким множествам, элементами которых являются векторы одинаковой размерности.

Пусть V – множество векторов одинаковой размерности, равной *n*. Тогда **проекцией множества** V на *i*-ю ось (*i* =1,…,*n*) называется множество проекций всех векторов этого множества на *i*-ю ось: $Пр_i V = \{Пр_i v \mid v \in V\}$.

Аналогично определяется проекция множества V на несколько осей:

$$Пр_{i_1,\dots,i_k} V = \{ Пр_{i_1,\dots,i_k} v \mid v \in V\} .$$

Если множество состоит из векторов одинаковой размерности, то проекции позволяют рассматривать множество только первых компонент этих векторов, или множество только 1-х и 2-х компонент и т.д.

Пример 3.

$Пр_3$ {(1,1,3),(1,1,5),(4,1,5)} = {3, 5, 5} = {3, 5}.

$Пр_{1,2}$ {(1,1,3),(1,1,5),(2,1,3)} = {(1,1),(1,1),(2,1)} ={(1,1),(2,1)}.

Проекции прямых произведений

Пусть требуется найти проекцию множества X, которое представлено как прямое произведение некоторых множеств $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$. Проекция множества X на i–ю ось есть множество i–х компонент всех векторов, образующих множество X. i-я компонента каждого вектора – это элемент из множества X_i. При этом среди i–х компонент встретятся все элементы множества X_i (по определению прямого произведения). Поэтому

$$Пр_i X = Пр_i X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n = X_i.$$

Аналогично,

$$Пр_{i_1,i_2,\dots,i_k} X = X_{i_1} \times X_{i_2} \times \ldots \times X_{i_k} .$$

Пример 4.

Для множеств X, Y, Z, заданных выше, имеем:

$Пр_2$ X×Z×Y = Z = {1}, $Пр_{1,3}$ X×Z×Y = X×Y = {(1,3),(1,5),(2,3),(2,5),(4,3),(4,5)}.

Пример 5.

Найти значение выражения: $Пр_{2,3}M^3 \setminus Пр_{1,3}(M_1 \times M_2 \times M)$, где M={1,2}, M_1={1,0}, M_2={1,2,0}.

Решение. $Пр_{2,3}M^3 \setminus Пр_{1,3}(M_1 \times M_2 \times M) = Пр_{2,3}(M \times M \times M) \setminus Пр_{1,3}(M_1 \times M_2 \times M) = (M \times M) \setminus (M_1 \times M) =$
$= (\{1,2\} \times \{1,2\}) \setminus (\{1,0\} \times \{1,2\})$ = {(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)} \ {(1,1), (1,2), (0,1), (0,2)} = {(2,1),(2,2)}.

1.4. СООТВЕТСТВИЯ

Рассмотрим 2 множества X и Y. Элементы этих двух множеств могут каким-либо образом сопоставляться друг с другом, образуя пары (x, y).

Если способ такого сопоставления определен, то есть для элемента $x \in X$ указан элемент $y \in Y$, с которым сопоставляется элемент x, то говорят, что между множествами X и Y установлено **соответствие**.

Чтобы задать соответствие, необходимо указать:

1) множество X, чьи элементы сопоставляются с элементами другого множества;
2) множество Y, с чьими элементами сопоставляются элементы первого множества;
3) множество $Q \subseteq X \times Y$, определяющее закон, по которому осуществляется сопоставление, т.е. перечисляющее все пары (x; y), участвующие в соответствии.

Итак, соответствием между множествами X и Y называется подмножество $Q \subseteq X \times Y$.

Кроме трех рассмотренных множеств X, Y и Q, с каждым соответствием неразрывно связаны еще 2 множества:

1) множество $Пр_1Q$, называемое **областью определения** соответствия, в которые входят элементы множества X, участвующие в сопоставлении;
2) множество $Пр_2Q$ называемое **областью значений** соответствия, в которое входят элементы множества Y, участвующие в сопоставлении.

Если $(x,y) \in Q$, это означает, что элемент y соответствует элементу x при соответствии Q.

Пример 1.

Пусть X={1,2}, Y={3, 5}, так что $X \times Y$={(1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5)}.

Это множество дает возможность получить 16 различных соответствий. Некоторые из них: Q_1={(1, 3)}; $Пр_1Q_1$={1}, $Пр_2Q_1$={3}. Q_2={(1, 3), (1, 5)}; $Пр_1Q_1$={1}, $Пр_2Q_2$={3, 5}=Y.

Соответствие может обладать следующими **свойствами**:

1) всюду определенность;
2) сюръективность;
3) инъективность;
4) функциональность;
5) взаимная однозначность.

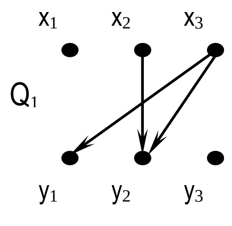
Пусть $Q \subseteq X \times Y$ – некоторое соответствие.

1) Если $Пр_1Q=X$, то соответствие называется **всюду определенным** или полностью определенным (иначе соответствие называется **частичным**).
2) Если $Пр_2Q=Y$, соответствие называется **сюръективным**.

Другими словами, если соответствие $Q \subseteq X \times Y$ всюду определено – это значит, что при соответствии задействованы все элементы из X, если соответствие сюръективно, то это значит, что при сопоставлении задействованы все элементы из Y.

Пример 2.

Между множествами $X=\{x_1, x_2, x_3\}$,$Y=\{y_1, y_2,y_3\}$ установим соответствие $Q_1 \subseteq X \times Y$, $Q_1=\{(x_2, y_2), (x_3, y_1), (x_3, y_2)\}$ и рассмотрим его свойства.



$Пр_1Q_1=\{x_2, x_3\} \neq X \Rightarrow Q_1$ – не всюду определено.

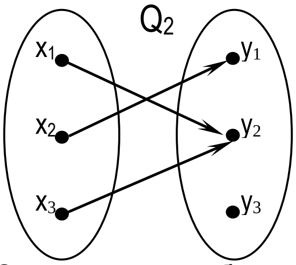
$Пр_2Q_1=\{y_2, y_1\} \neq Y \Rightarrow Q_1$ – не сюръективно.

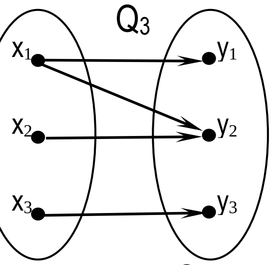
Множество всех $y \in Y$, соответствующих элементу $x \in X$, называется **образом** x в Y при соответствии Q.

Множество всех $x \in X$, соответствующих элементу $y \in Y$, называется **прообразом** y в X при соответствии Q.

$Q \subseteq X \times Y$

здесь находятся прообразы элементов из $Пр_2Q$ — здесь находятся образы элементов из $Пр_1Q$





$\{x_1, x_3\}$ – прообраз y_2 при соответствии Q_2, $\{y_1, y_2\}$ – образ x_1 при соответствии Q_3.

3) Соответствие Q называется **функциональным** (или однозначным), если образом любого элемента из $Пр_1Q$ является единственный элемент из $Пр_2Q$ (каждому элементу из $Пр_1Q$ соответствует только один элемент из $Пр_2Q$).

4) Соответствие Q называется **инъективным**, если прообразом любого элемента из $Пр_2Q$ является единственный элемент из $Пр_1Q$ (каждому элементу из $Пр_2Q$ соответствует только один элемент из $Пр_1Q$).

5) Соответствие Q между X и Y называется **взаимно однозначным (биективным)**, если оно всюду определено, сюръективно, функционально и инъективно.

Пример 3.

Рассмотрим $Q_4 \subseteq X \times Y$, где $X=\{x_1, x_2, x_3\}$,$Y=\{y_1, y_2,y_3\}$, $Q_4=\{(x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_2)\}$ – это соответствие всюду определено, функционально, но не сюръективно, значит, не биективно.

Установим соответствие $Q_5 \subseteq X \times Y$, где $X=\{x_1, x_2, x_3\}$,$Y=\{y_1, y_2,y_3\}$, $Q_5=\{(x_1,y_2), (x_2,y_3), (x_3,y_1)\}$ – всюду определено, сюръективно, функционально, значит, биективно.

Функцией называется функциональное соответствие.

Запись $f: X \to Y$ означает, что функция f устанавливает соответствие между мн-вами X и Y. Каждому элементу x из своей области определения функция f ставит в соответствие <u>единственный</u> элемент y из области значений. Это обозначается так: $f(x) = y$.

Пример 4.

Рассмотрим соответствие $f_1:X \to Y$, $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$, $Y=\{y_1,y_2,y_3,y_4\}$,
$f_1 = \{(x_1,y_2),(x_3,y_3),(x_4,y_2)\}$.$f_1$ – функциональное соответствие, следовательно, это функция.

Пусть $f : X \to Y$. Всюду определенная функция называется **отображением** X **в** Y.

Если отображение сюръективно, т.е. каждый элемент из Y имеет прообраз в X, то имеет место **отображение** X **на** Y.

Отображение $f : A \to A$ называется **преобразованием** множества A.

Пусть A – конечное множество. Преобразования этого множества, являющиеся биективными, называются **перестановками** (иногда – подстановками).

Пример 5.

Пусть A={1,2,3}. Перестановку обычно записывают в виде матрицы, 1-ая строка которой содержит все элементы множества A, а под каждым элементом 1-ой строки (во 2-ой строке) записывается значение перестановки – тоже элементы множества A.

$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ означает, что $\alpha(1)=3$, $\alpha(2)=1$, $\alpha(3)=2$. Любая перестановка может быть разложена в произведение независимых циклов, например: $\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6 \\ 3&2&6&5&4&1 \end{pmatrix} = (136)(2)(45)$.

2.1. ОТНОШЕНИЯ

Бинарным отношением R в множестве M называется подмножество его квадрата: $R \subset M^2$. Т.к. элементами M^2 являются упорядоченные пары, то бинарное отношение есть множество упорядоченных пар.

Элементы a и b находятся в отношении R, если $(a,b) \in R$ (другая запись: aRb).

Аналогично задаются отношения на прямом произведении отличных друг от друга множеств: $R \subseteq A \times B$, если $A \neq B$.

Пусть a, b, c – любые элементы из множества M, $R \subset M^2$ – бинарное отношение.

Свойства бинарных отношений.

- Рефлексивность: $\forall a \in M$ aRa – истинно.
- Антирефлексивность: $\forall a \in M$ aRa – ложно.

Все элементы главной диагонали матрицы рефлексивного отношения равны 1.

- Симметричность: $\forall a, b \in M$: если aRb – истинно, то bRa – истинно.
- Антисимметричность: $\forall a, b \in M$: если aRb – истинно и bRa – истинно, то a=b.

Матрица симметричного отношения симметрична относительно главной диагонали.

- Транзитивность: $\forall a, b, c \in M$: если aRb и bRc – истинно, то aRc – истинно.

Отношения делятся на различные виды в зависимости от того, обладают или не обладают они некоторыми свойствами. Рассмотрим два основных вида отношений.

1. Отношение эквивалентности.

Некоторые элементы множества можно рассматривать как эквивалентные в том случае, когда любой из этих элементов при некотором рассмотрении может быть заменён другим. В этом случае говорят, что данные элементы находятся в отношении эквивалентности (для обозначения используется символ ~).

Отношение называется **отношением эквивалентности**, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Разбиение множества по заданному отношению эквивалентности.

Представление множества M в виде объединения попарно непересекающихся подмножеств M_i называется **разбиением** множества M: $\bigcup_i M_i = M$, $M_k \cap M_l = \varnothing$, если $k \neq l$.

Пусть на множестве M задано отношение эквивалентности R. Выполним следующее построение. Выберем элемент $a_1 \in M$ и образуем класс M_1 (подмножество множества M), состоящее из a_1 и всех элементов, эквивалентных a_1. Затем выберем элемент $a_2 \notin M_1$ и образуем класс M_2, состоящий из a_2 и всех элементов эквивалентных a_2, и т.д. Получится система классов $M_1, M_2, \ldots$(возможно, бесконечная) такая, что любой элемент из M входит в один из классов, т.е. $\bigcup_i M_i = M$.

Каждому отношению эквивалентности на множестве M соответствует некоторое разбиение множества M на классы.

2. Отношение порядка.

Часто возникают отношения, которые определяют некоторый порядок расположения элементов множества. Если можно расположить элементы множества M в некотором порядке, то говорят, что на множестве M можно ввести **отношение порядка**.

Отношение называется отношением **нестрогого порядка**, если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно (для обозначения используется символ $\leq$).

Отношение называется отношением **строгого порядка**, если оно антирефлексивно, антисимметрично и транзитивно (обозначается символом <).

Элементы a и b **сравнимы по отношению порядка** R, если выполняется aRb или bRa.

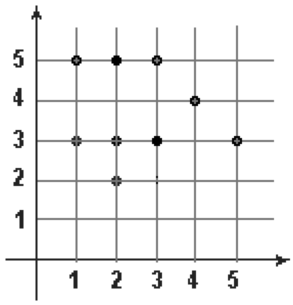
Множество M, на котором задано отношение порядка, называется **полностью упорядоченным**, если любые два элемента из этого множества M сравнимы, и **частично упорядоченным** в противном случае.

Пример отношения порядка, по которому сравниваются векторы одинаковой размерности: «если $\alpha=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ и $\beta=(b_1,b_2,\dots,b_n)$, то $\alpha<\beta$ тогда и только тогда, когда $a_i \le b_i$, $i=1,\dots,n$, и хотя бы для одного i выполняется строгое неравенство»

Для множества, на котором задан частичный порядок элементов, можно ввести понятие нижней и верхней грани. **Нижнюю грань** образуют все несравнимые между собой минимальные элементы, а **верхнюю грань** - все несравнимые между собой максимальные элементы множества.

Пример 1.

Пусть на множестве {(1,3),(1,5),(2,2), (2,3),(2,5),(4,3),(4,4), (4,5),(5,3)} задан частичный порядок, по которому сравниваются векторы одинаковой размерности. Нижняя грань этого множества - {(2,2), (1,3)}. Ее элементы не сравнимы между собой, т.к. при сравнении их первых компонент получаем, что 2>1, но при сравнении вторых - 2<3. Остальные элементы множества больше, чем элементы нижней грани. Верхняя грань – {(3,5),(4,4),(5,3)}.



Пример 2.

Даны множества X = Y = {1,2,3,4,5} и соответствия $Q_i \subseteq X\times Y$, i=1,2,3,4.

Q_1={(2,2),(1,2),(3,2),(4,5),(5,4)}, Q_2={(2,2),(3,2),(4,2),(1,3),(2,3)},

Q_3={(2,3),(3,2),(1,4),(3,1),(4,5)}, Q_4={(5,2),(1,3),(2,5),(4,1),(3,4).

Определить, какими свойствами обладает каждое из соответствий Q_i (i=1,…,4) (всюду определенное, сюръективное, функциональное, инъективное, биективное).

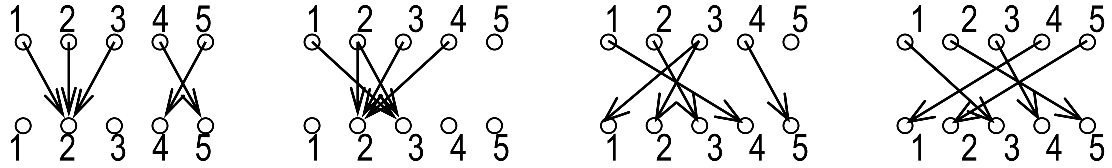
В зависимости от этого выполнить следующее:

1. Если соответствие Q_i всюду определено, функционально, но не инъективно, то построить разбиение области определения соответствия на классы эквивалентности по отношению: «два элемента эквивалентны между собой тогда и только тогда, когда они принадлежат прообразу одного и того же элемента».
2. Если соответствие Q_i сюръективно, инъективно, но не функционально, то построить разбиение области значений соответствия на классы эквивалентности по отношению: «два элемента эквивалентны между собой тогда и только тогда, когда они принадлежат образу одного и того же элемента».
3. Если соответствие Q_i не инъективно и не функционально, то найти нижнюю и верхнюю грани множества Q_i, введя на этом множестве отношению порядка, по которому сравниваются векторы одинаковой размерности (если $a=(a_1,a_2)$ и $b=(b_1,b_2)$, то $a \le b$ тогда и только тогда, когда $a_i \le b_i$, i=1,2).
4. Если соответствие Q_i является биекцией, то построить соответствующую ему перестановку на множестве X и разложить ее на циклы.

Решение.

Определим, обладают ли соответствия Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 свойствами всюду определенности, сюръективности, функциональности, инъективности, биективности.

Сначала изобразим каждое из соответствий графически:



Свойства соответствия Q_1:

а) *всюду определено*, т.к. область определения Q_1 совпадает с X: $Пр_1Q_1=\{1,2,3,4,5\}=X$.

б) *не сюръективно*, т.к. область значений Q_1 не равна множеству Y: $Пр_2Q_1=\{2,4,5\}\neq Y$.

в) *функционально*, поскольку образ любого элемента из области определения соответствия содержит только один элемент из области значений соответствия.

г) *не инъективно*, т.к. для элемента 2 из области значений соответствия Q_1 его прообраз {1, 2, 3} состоит более чем из одного элемента.

д) *не биективно*, поскольку соответствие не является сюръективным.

Т.к. соответствие Q_1 всюду определено и функционально, но не инъективно, выполним для него задание 1, то есть построим разбиение области определения соответствия на классы эквивалентности по отношению «два элемента эквивалентны между собой тогда и только тогда, когда они принадлежат прообразу одного и того же элемента».

Область определения $Пр_1Q_1 = \{1,2,3,4,5\}$ разбиваем на такие классы эквивалентности:

1 –й класс: прообраз элемента 2 из области значений соответствия – {1, 2, 3},

2 –й класс: прообраз элемента 4 из области значений соответствия – {5},

3 –й класс: прообраз элемента 5 из области значений соответствия – {4}.

Свойства соответствия Q_2:

а) *не является всюду определенным*, поскольку область определения соответствия Q_2 не равна множеству X: $Пр_1Q_2 = \{1, 2, 3, 4\} \neq X$.

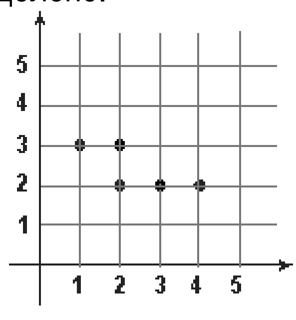
б) *не сюръективно*, т.к. область значений Q_2 не совпадает с Y: $Пр_2Q_2=\{2, 3\}\neq Y$.

в) *не функционально*, поскольку образ элемента 2 из области определения соответствия состоит более чем из одного элемента: $\{2, 3\} \subseteq Пр_2Q_2$.

г) *не инъективно*, поскольку, например, для элемента 2 из области значений соответствия прообраз состоит более чем из одного элемента: {2, 3, 4}.

д) *не биективно*, т.к. соответствие Q_2, например, не всюду определено.

Поскольку соответствие Q_2 не инъективно и не функционально, то выполним для него задание 3, то есть найдем нижнюю и верхнюю грани множества Q_2.



Нижняя грань множества Q_2: {(1, 3), (2, 2)}; все остальные элементы Q_2 больше, чем элементы его нижней грани.

Верхняя грань множества Q_2: {(2, 3), (4, 2)}; все остальные элементы Q_2 меньше, чем элементы его верхней грани.

Свойства соответствия Q_3:

а) *не всюду определенно*, т.к. область определения соответствия не равна множеству X: $Пр_1Q_3 = \{1, 2, 3, 4\} \neq X$.

б) *сюръективно*, т.к. область значений Q_3 совпадает с Y: $Пр_2Q_3 = \{1, 2, 3, 4, 5\} = Y$.

в) *не функционально*, поскольку для элемента 3 из области определения соответствия Q_3 образ состоит более чем из одного элемента: $\{1, 2\} \subseteq Пр_2Q_3$.

г) *инъективно*, поскольку прообраз каждого элемента из области значений соответствия состоит в точности из одного элемента.

д) *не биективно*, т.к. соответствие не всюду определено и не функционально.

Т.к. соответствие Q_3 сюръективно и инъективно, но не функционально, то выполним для него задание 2, то есть построим разбиение области значений соответствия на классы эквивалентности по отношению «два элемента эквивалентны между собой тогда и только тогда, когда они принадлежат образу одного и того же элемента».

Построим разбиение области значений $Пр_2Q_3 = \{1,2,3,4,5\}$ на классы эквивалентности:

1 –й класс: образ элемента 1 из области определения соответствия – $\{4\}$,
2 –й класс: образ элемента 2 из области определения соответствия – $\{3\}$,
3 –й класс: образы элемента 3 из области определения соответствия – $\{1, 2\}$,
4 –й класс: образ элемента 4 из области определения соответствия – $\{5\}$.

Свойства соответствия Q_4:

а) *всюду определено*, т.к. область определения Q_4 совпадает с X: $Пр_1Q_4=\{1,2,3,4,5\}=X$.

б) *сюръективно*, поскольку область значений Q_4 совпадает с Y: $Пр_2Q_4=\{1,2,3,4,5\}=Y$.

в) *функционально*, поскольку образом любого элемента из области определения соответствия является единственный элемент из области значений соответствия.

г) *инъективно*, поскольку прообразом любого элемента из области значений соответствия является единственный элемент из области определения соответствия.

д) *биективно*, т.к. соответствие Q_4 всюду определено, сюръективно и функционально.

Поскольку соответствие Q_4 является биекцией, то выполним для него задание 4, то построим соответствующую ему перестановку на множестве X и разложим ее на циклы:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Окончательно, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1,3,4)(2,5)$.