Примеры выполнения заданий 1 и 2 ИПР№1 (с пояснениями)

<u>Задание 1.</u> Сколькими способами из колоды в 36 карт можно выбрать неупорядоченный набор из 4-х карт так, чтобы в этом наборе было бы в точности 2 туза, 1 дама, 1 бубновая карта?

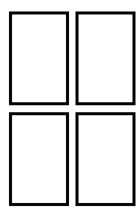
<u>Решение.</u>

Постановку задачи следует понимать следующим образом: вычислить, сколько различных неупорядоченных наборов (выборок), состоящих из 4-х карт, можно получить, пользуясь одной колодой из 36 карт так, чтобы в каждой выборке было бы в точности 2 туза, 1 дама, 1 бубновая карта. Каждая выборка получается из полной колоды карт.

Имеем множество из 36 карт (все элементы в множестве различны):

6♦	7♦	8♦	9♦	10♦	J♦	Q♦	K♦	A♦
6♥	7♥	8♥	9♥	10♥	J♥	Q♥	K♥	A♥
6♠	7♠	8♠	9♠	10♠	J♠	Q♠	K♠	A♠
6♣	7♣	8♣	9♣	10♣	J♣	Q♣	K♣	A♣

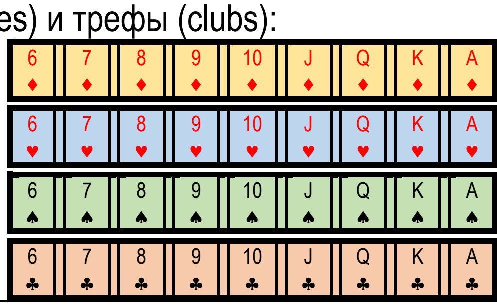
Из имеющихся элементов множества формируются неупорядоченные выборки по 4 карты:



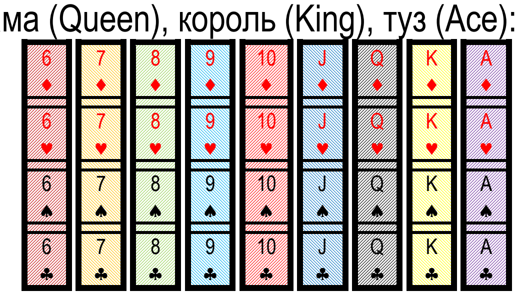
Требуется подсчитать количество всех таких выборок, удовлетворяющих заданному условию.

В данной задаче множество из 36 карт можно рассматривать как универсум. В этом универсуме выделим следующие его подмножества.

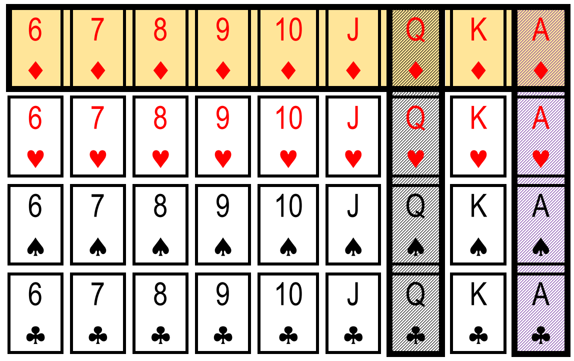
4 непересекающихся между собой подмножества, соответствующие мастям – бубны (diamonds), червы (hearts), пики (spades) и трефы (clubs):



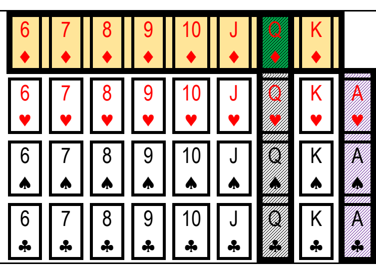
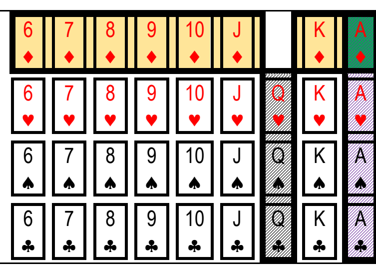
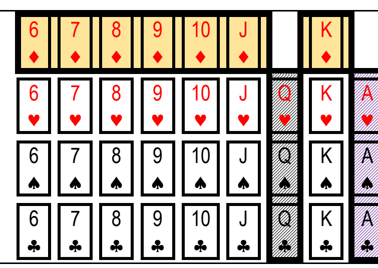
9 непересекающихся между собой подмножеств, определяющих достоинство карты – 6, 7, 8, 9, 10, валет (Jack), дама (Queen), король (King), туз (Ace):



Из постановки нашей задачи следует, что для построения каждой выборки мы обязательно будем вести отбор из трех подмножеств – бубны, дамы и тузы (в выборке в точности должна быть 1 дама, 1 бубновая карта и 2 туза), и только если после такого отбора в выборке останутся незаполненные места, будем обращаться к другим подмножествам универсума.



Видим, что в двух случаях основные множества, из которых будем отбирать карты, пересекаются (бубны и дамы; бубны и тузы). Поскольку в случаях пересечения отбор карт в выборку нельзя произвести независимо (выбор карты из каждого пересечения обеспечивает выполнение не одного, а сразу нескольких условий задачи), необходимо случай каждой карты, стоящей на пересечении, рассмотреть по отдельности. В нашем примере на пересечениях находятся 2 карты: бубновая дама и бубновый туз. Поэтому возникают следующие 4 ситуации: 1) в выборке есть бубновая дама и нет бубнового туза; 2) в выборке есть бубновый туз и нет бубновой дамы; 3) в выборке нет ни бубновой дамы, ни бубнового туза; 4) в выборке есть и бубновая дама, и бубновый туз. Четвертая ситуация, в которой в выборке присутствуют одновременно и бубновая дама, и бубновый туз, невозможна по условию (бубновая карта должна быть только одна). Остальные 3 ситуации описаны ниже:

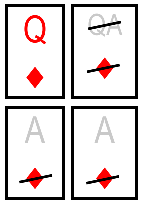
1. Бубновую даму обязательно берем, бубновый туз не берем.	2. Бубновый туз обязательно берем, бубновую даму не берем.	3. Не берем ни бубновую даму, ни бубновый туз.
		

Таким образом, для каждого случая мы уточнили множества, из которых будет вестись отбор карт в выборку.

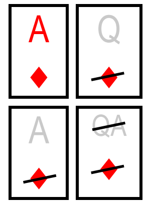
С учетом сказанного, разобьем множество всех возможных выборок, удовлетворяющих заданному условию, на три непересекающихся подмножества. Затем рассмотрим отдельно каждый допустимый вид выборки, образующий одно из подмножеств, подсчитаем для него количество возможных вариантов, а затем (по правилу суммы) сложим эти найденные количества и получим окончательный ответ.

Все множество возможных выборок разбивается на непересекающиеся подмножества так, как показано ниже.

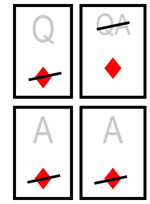
Для каждого такого подмножества можно уточнить, какими должны быть остальные карты, входящие в выборку:



1-е подмножество: бубновая дама + 2 туза (исключая бубновый) + любая карта из оставшихся (но не бубновая, не дама и не туз).



2-е подмножество: бубновый туз + 1 дама (не бубновая) + еще 1 туз + любая карта из оставшихся (но не бубновая, не дама и не туз).



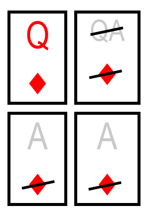
3-е подмножество: 1 дама (не бубновая) + 2 туза (ни один из них не бубновый) + любая из бубновых карт (но не дама и не туз).

Объединение этих трех подмножеств даст множество <u>всех</u> возможных выборок, удовлетворяющих заданному условию. Количество всех таких выборок нам нужно найти.

Теперь отдельно рассмотрим каждый из этих трех случаев и подсчитаем количество всех выборок, входящих в соответствующее подмножество.

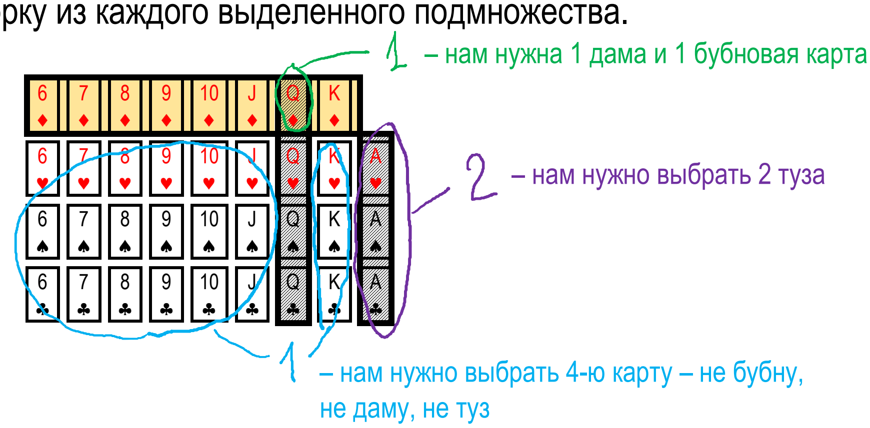
<u>1-е подмножество. Среди четырех выбранных карт есть бубновая дама.</u>

Общая структура каждой выборки, входящей в 1-е подмножество:



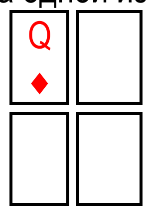
Подсчитаем, сколько имеется вариантов выбрать подходящие по условию карты, чтобы заполнить каждое из четырех мест в выборке такого вида. Затем по правилу произведения все найденные количества перемножим и таким образом найдем число всех выборок в первом подмножестве.

Обратимся к диаграмме, полученной ранее для этого случая, и покажем, какое <u>количество карт</u> мы будем отбирать в выборку из каждого выделенного подмножества.



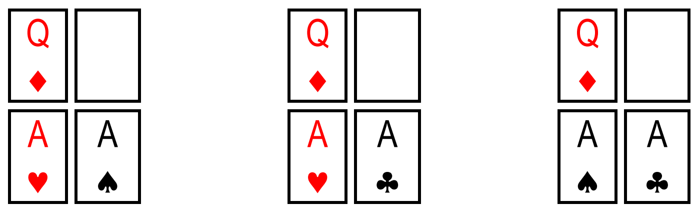
Теперь подсчитаем, <u>сколькими способами</u> можно выбрать нужное количество карт из соответствующего множества.

- Бубновую даму можно выбрать единственным способом (такая карта только одна). Т.е., количество вариантов выбора одной из 4-х карт, входящих в выборку, равно 1.



- Два туза будут выбираться из трёх, т.к. бубновый туз уже не может быть выбран. Число способов выбора двух тузов из трех имеющихся равно C_3^2 = 3.

Структура выборок, у которых три из 4-х мест заполнены (с учетом выбранных тузов):



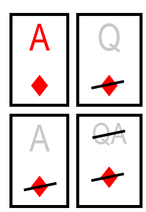
- К трем выбранным картам нужно добавить четвертую, которая теперь выбирается из множества, состоящего из 21-й карты (21 способ).

Итак, для 1-го подмножества, согласно правилу произведения, число способов выбора 4-х карт, среди которых есть бубновая дама (или количество всех возможных выборок), равно:

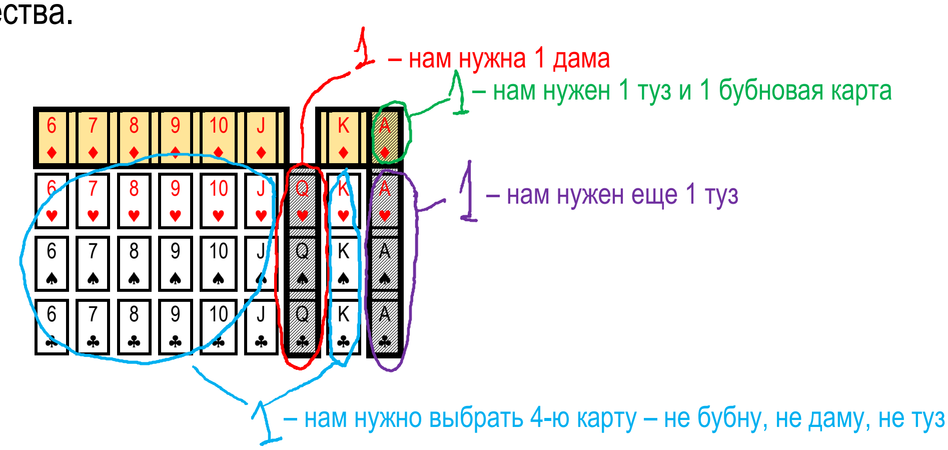
$$1 \cdot C_3^2 \cdot 21 = 1 \cdot 3 \cdot 21 = 63.$$

<u>2-е подмножество. Среди четырех выбранных карт есть бубновый туз.</u>

Общая структура каждой выборки, входящей во 2-е подмножество:



Опять обратимся к соответствующей диаграмме, на которой укажем количество карт, выбираемых из каждого множества.



- Бубнового туза можно выбрать единственным способом.
- Второго туза к нему можно добавить тремя способами.
- Выбор одной дамы также можно сделать только тремя способами, т.к. выбирать бубновую даму уже не имеем права.
- К выбранным трем картам нужно добавить еще одну, четвертую, так, чтобы она была не бубновой, не тузом и не дамой. Таких карт остается 21.

По правилу произведения, число выборок, удовлетворяющих заданному условию, и таких, что в каждой выборке имеется бубновый туз, равно:

$$1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 21 = 189.$$

<u>3-е подмножество. Среди четырех выбранных карт нет бубнового туза и бубновой дамы.</u>

Общая структура каждой выборки, входящей в 3-е подмножество:

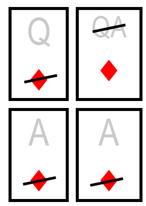
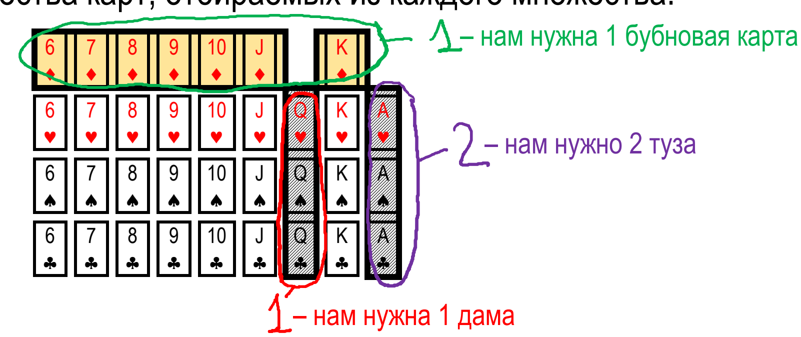


Диаграмма для указания количества карт, отбираемых из каждого множества:



- Выбираем одну даму из трех (3 способа).
- Выбираем два туза из трех (C_3^2 = 3 способа).
- Выбираем одну бубновую карту, не являющуюся тузом или дамой (таких карт 7).

По правилу произведения, число выборок заданной структуры равно:

$$3 \cdot 3 \cdot 7 = 63.$$

Мы нашли количество способов выбрать неупорядоченные наборы из 4-х карт для каждого из трех непересекающихся подмножеств. Воспользуемся этими результатами, чтобы записать окончательный ответ.

Общее число способов выбора 4-х карт, удовлетворяющих условию задачи, по правилу суммы составляет:

$$63 + 189 + 63 = 315.$$

<u>Количество выборок</u>, удовлетворяющее заданному условию, найдено, и равно 315.

Задание 2. Дано множество A = {0, 1, 2, 5}.

Для каждого пункта, указанного ниже, нужно найти количество объектов, а также получить сами соответствующие объекты.

1) Сколькими способами из множества A можно выбрать 2 различные цифры?
2) Сколько различных трехзначных чисел можно записать из цифр, входящих в множество A (цифры в записи числа могут повторяться)?
3) Сколько различных трехзначных чётных (нечётных) чисел можно записать из цифр, входящих в множество A (цифры в записи числа могут повторяться)?
4) Сколько различных трехзначных чисел можно записать из цифр, входящих в множество A (все цифры в записи числа различны)?
5) Сколько различных трехзначных чётных (нечётных) чисел можно записать из цифр, входящих в множество A (все цифры в записи числа различны)?

Решение.

Дано множество A = {0, 1, 2, 5}.

1) Сколькими способами из множества A можно выбрать 2 различных цифры?

Поскольку порядок, в котором выбираются элементы множества (цифры), не важен, а выбираемые цифры различны, то имеем дело с сочетаниями без повторений элементов. Их количество подсчитывается по соответствующей комбинаторной формуле:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!};$$

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = 6.$$

Получим сами сочетания. Поскольку порядок элементов в сочетании не имеет значения, сочетания можно рассматривать как соответствующие (в данном случае – двухэлементные) подмножества множества A (видим, что их действительно 6):

{{0,1}, {0,2}, {0,5}, {1,2}, {1,5}, {2,5}}.

Таким образом, две различные цифры из множества A можно выбрать 6-ю способами.

2) Сколько различных трехзначных чисел можно записать из цифр, входящих в множество A (цифры в записи числа могут повторяться)?

Порядок цифр в записи числа имеет значение, поэтому здесь речь идет о размещениях с повторениями элементов, т.к. цифры в записи числа могут повторяться.

Первая значащая цифра в записи числа не может быть нулем, поэтому первую цифру выбираем из множества A\{0} (выбор ведется из трёх элементов). Вторую и третью цифры выбираем из множества A (в каждом случае выбор ведется из четырех элементов). Тогда искомое количество чисел по правилу произведения равно:

$$3 \cdot 4 \cdot 4 = 48.$$

Получим эти числа в виде векторов (кортежей). Поскольку порядок цифр важен, мы имеем дело с кортежами, которые получаем как элементы прямого произведения:

$(A\setminus\{0\})\times A\times A = \{1, 2, 5\}\times\{0, 1, 2, 5\}\times\{0, 1, 2, 5\} =$

={ (1,0,0), (1,0,1), (1,0,2), (1,0,5), (1,1,0), (1,1,1), (1,1,2), (1,1,5), (1,2,0), (1,2,1), (1,2,2), (1,2,5), (1,5,0), (1,5,1), (1,5,2), (1,5,5), (2,0,0), (2,0,1), (2,0,2), (2,0,5), (2,1,0), (2,1,1), (2,1,2), (2,1,5), (2,2,0), (2,2,1), (2,2,2), (2,2,5), (2,5,0), (2,5,1), (2,5,2), (2,5,5), (5,0,0), (5,0,1), (5,0,2), (5,0,5), (5,1,0), (5,1,1), (5,1,2), (5,1,5), (5,5,0), (5,2,1), (5,2,2), (5,2,5), (5,5,0), (5,5,1), (5,5,2), (5,5,5)}.

Полученных кортежей, соответствующих заданным трехзначным числам, действительно 48.

3) Сколько различных трехзначных нечетных чисел можно записать из цифр, входящих в множество A (цифры в записи числа могут повторяться)?
Здесь последняя цифра выбирается из подмножества {1,5} множества A. Имеем:

$$3 \cdot 4 \cdot 2 = 24.$$

Получим соответствующие числа.
$(A\setminus\{0\})\times A\times\{1, 5\} = \{1, 2, 5\}\times\{0, 1, 2, 5\}\times\{1, 5\} =$

={(1,0,1), (1,0,5), (1,1,1), (1,1,5), (1,2,1), (1,2,5), (1,5,1), (1,5,5), (2,0,1), (2,0,5), (2,1,1), (2,1,5), (2,2,1), (2,2,5), (2,5,1), (2,5,5), (5,0,1), (5,0,5), (5,1,1), (5,1,5), (5,2,1), (5,2,5), (5,5,1), (5,5,5)}.

Видим, что существует 24 числа, отвечающих заданному условию.

Сколько различных трехзначных четных чисел можно записать из цифр, входящих в множество A (цифры в записи числа могут повторяться)?
Здесь последняя цифра выбирается из подмножества {0, 2} множества A. Имеем:

$$3 \cdot 4 \cdot 2 = 24.$$

Получим соответствующие числа.
$(A\setminus\{0\})\times A\times\{0, 2\} = \{1, 2, 5\}\times\{0, 1, 2, 5\}\times\{0, 2\} =$

={(1,0,0), (1,0,2), (1,1,0), (1,1,2), (1,2,0), (1,2,2), (1,5,0), (1,5,2), (2,0,0), (2,0,2), (2,1,0), (2,1,2), (2,2,0), (2,2,2), (2,5,0), (2,5,2), (5,0,0), (5,0,2), (5,1,0), (5,1,2), (5,2,0), (5,2,2), (5,5,0), (5,5,2)}.

Видим, что существует 24 числа, отвечающих заданному условию.

4) Сколько различных трехзначных чисел можно записать из цифр, входящих в множество A (все цифры в числе различны)?
Поскольку цифры в числе не должны повторяться, имеем дело с размещениями без повторений.
Первая цифра числа выбирается из множества A\{0} (3 варианта). После выбора первой цифры один из элементов множества A\{0} уже использован и не может быть повторно выбран, но зато элемент 0 возвращается в рассмотрение – его можно использовать в качестве второй цифры. Таким образом, для выбора второй цифры также есть 3 возможности. К моменту выбора третьей цифры, две цифры из имеющихся четырёх уже выбраны. Поэтому остается 2 возможности выбрать третью цифру. Имеем:

$$3 \cdot 3 \cdot 2 = 18.$$

Получим эти 18 чисел в виде кортежей.
Для этого сформируем рассуждение, с помощью которого такие числа могут быть получены.
Рассуждение, описывающее трёхзначное число, удовлетворяющее заданным условиям:

первая цифра 1, тогда

вторая цифра 0, при этом

третья цифра – 2 или 5,

или

вторая цифра 2, при этом

третья цифра – 0 или 5,

или

вторая цифра 5, при этом

третья цифра – 0 или 2,

или

первая цифра 2, тогда

вторая цифра 0, при этом

третья цифра – 1 или 5,

или

вторая цифра 1, при этом

третья цифра – 0 или 5,

или

вторая цифра 5, при этом

третья цифра – 0 или 1,

или

первая цифра 5, тогда

вторая цифра 0, при этом

третья цифра – 1 или 2,

или

вторая цифра 1, при этом

третья цифра – 0 или 2,

или

вторая цифра 2, при этом

третья цифра – 0 или 1.

Формализуем это рассуждение, используя прямое произведение множеств и операцию объединения:

$\{1\} \times (\{0\}\times\{2, 5\} \cup \{2\}\times\{0, 5\} \cup \{5\}\times\{0, 2\}) \cup$

$\cup \{2\} \times (\{0\}\times\{1, 5\} \cup \{1\}\times\{0, 5\} \cup \{5\}\times\{0, 1\}) \cup$

$\cup \{5\} \times (\{0\}\times\{1, 2\} \cup \{1\}\times\{0, 2\} \cup \{2\}\times\{0, 1\}) =$

=[раскрываем скобки, находим прямое произведение множеств, выполняем объединение]=

$= \{1\}\times\{0\}\times\{2, 5\} \cup \{1\}\times\{2\}\times\{0, 5\} \cup \{1\}\times\{5\}\times\{0, 2\} \cup$

$\cup \{2\}\times\{0\}\times\{1, 5\} \cup \{2\}\times\{1\}\times\{0, 5\} \cup \{2\}\times\{5\}\times\{0, 1\} \cup$

$\cup \{5\}\times\{0\}\times\{1, 2\} \cup \{5\}\times\{1\}\times\{0, 2\} \cup \{5\}\times\{2\}\times\{0, 1\} =$

$= \{(1,0,2), (1,0,5), (1,2,0), (1,2,5), (1,5,0), (1,5,2)\} \cup$

$\cup \{(2,0,1), (2,0,5), (2,1,0), (2,1,5), (2,5,0), (2,5,1)\} \cup$

$\cup \{(5,0,1), (5,0,2), (5,1,0), (5,1,2), (5,2,0), (5,2,1)\} =$

= {(1,0,2), (1,0,5), (1,2,0), (1,2,5), (1,5,0), (1,5,2), (2,0,1), (2,0,5), (2,1,0), (2,1,5), (2,5,0), (2,5,1), (5,0,1), (5,0,2), (5,1,0), (5,1,2), (5,2,0), (5,2,1)}.
Получены кортежи, соответствующие искомым числам. Их ровно 18, как и было подсчитано ранее.

5) Сколько различных трехзначных нечётных чисел можно записать из цифр, входящих в множество А (все цифры в числе различны)?

Начнем с последней цифры. Ее можно выбрать двумя способами из множества {1, 5}. Затем переходим к выбору первой цифры. Для ее выбора остается множество {2} и один (не выбранный) элемент множества {1, 5} (т.е. всего две возможности). К моменту выбора третьей цифры остается два невыбранных элемента множества А, т.е. тоже две возможности. Имеем:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8.$$

Аналогичным образом формируется выражение, позволяющее получить искомые числа, в виде кортежей:

$$\underbrace{\{1\} \times \{0, 2\} \times \{5\}}_{\text{числа вида 1\_5}} \cup \underbrace{\{2\} \times (\{0\} \times \{1, 5\} \cup \{1\} \times \{5\} \cup \{5\} \times \{1\})}_{\text{числа вида 2\_1 и 2\_5}} \cup \underbrace{\{5\} \times \{0, 2\} \times \{1\}}_{\text{числа вида 5\_1}} =$$

= {(1, 0, 5), (1, 2, 5), (2, 0, 1), (2, 0, 5), (2, 1, 5), (2, 5, 1), (5, 0, 1), (5, 2, 1)}.

Получено в точности 8 кортежей, соответствующих заданным числам.

Сколько различных трехзначных чётных чисел можно записать из цифр, входящих в множество А (все цифры в числе различны)?

Последнюю цифру можно выбрать двумя способами – из множества {0, 2}. Разобьем множество всех чисел, удовлетворяющих заданным условиям, на два непересекающихся подмножества, для каждого из них отдельно подсчитаем количество входящих в них чисел, а затем по правилу суммы сложим полученные результаты. Пусть в первое подмножество входят все числа, заканчивающиеся на 2 (вида _ _ 2), а во второе – все числа, заканчивающиеся на 0 (вида _ _ 0).

Для чисел из первого подмножества первую цифру можно выбрать двумя способами (из множества {1, 5}), тогда вторую – тоже двумя способами (0 и одна из оставшихся цифр: 1 или 5). Таким образом, количество чисел в первом подмножестве равно $2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$.

Для чисел из второго подмножества первую цифру можно выбрать тремя способами (из множества {1, 2, 5}), а вторую – двумя способами (из двух элементов 1, 2 или 5, которые остались после выбора первой цифры). Таким образом, количество чисел во втором подмножестве равно $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

По правилу суммы получаем общее количество возможных чисел: 4 + 6 = 10, и сами числа:

$(\{1\} \times \{0, 5\} \cup \{5\} \times \{0, 1\}) \times \{2\} \cup (\{1\} \times \{2, 5\} \cup \{2\} \times \{1, 5\} \cup \{5\} \times \{1, 2\}) \times \{0\} =$

= {(1, 0, 2), (1, 5, 2), (5, 0, 2), (5, 1, 2), (1, 2, 0), (1, 5, 0), (2, 1, 0), (2, 5, 0), (5, 1, 0), (5, 2, 0)}.