Пример оформления решенных заданий ИПР№1

Задание 1. Сколькими способами из колоды в 36 карт можно выбрать неупорядоченный набор из 4-х карт, чтобы в этом наборе было бы в точности 2 туза, 1 дама, 1 бубновая карта?

Решение.

Разобьем множество всех возможных выборок, удовлетворяющих заданному условию, на три непересекающихся подмножества.

<table>
<tr><td colspan="3">Среди четырех выбранных карт</td></tr>
<tr><td>есть бубновая дама</td><td>есть бубновый туз</td><td>нет бубнового туза и бубновой дамы</td></tr>
<tr><td colspan="3">Количество способов выбрать:</td></tr>
<tr><td>• бубновую даму – 1;
• два туза – C_3^2 = 3.
• четвертую карту – 21.</td><td>• бубнового туза – 1;
• второго туза – 3;
• одну даму – 3;
• четвертую карту – 21.</td><td>• одну даму – 3;
• два туза – C_3^2 = 3;
• одну бубновую карту (не туза и не даму) – 7.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Число выборок заданной структуры равно:</td></tr>
<tr><td>1· C_3^2 · 21 = 1· 3 · 21 = 63.</td><td>1· 3 · 3 · 21 = 189.</td><td>3 · 3 · 7 = 63.</td></tr>
</table>

Общее число способов выбора 4-х карт, удовлетворяющих условию задачи, составляет:

63 + 189 + 63 = 315.

Задание 2. Дано множество A = {0, 1, 2, 5}.

Для каждого пункта, указанного ниже, нужно найти количество объектов, а также получить сами соответствующие объекты.

1) Сколькими способами из множества A можно выбрать 2 различные цифры?
2) Сколько различных трехзначных чисел можно записать из цифр, входящих в множество A (цифры в записи числа могут повторяться)?
3) Сколько различных трехзначных чётных (нечётных) чисел можно записать из цифр, входящих в множество A (цифры в записи числа могут повторяться)?
4) Сколько различных трехзначных чисел можно записать из цифр, входящих в множество A (все цифры в записи числа различны)?
5) Сколько различных трехзначных чётных (нечётных) чисел можно записать из цифр, входящих в множество A (все цифры в записи числа различны)?

Решение.

Дано множество A = {0, 1, 2, 5}.

1) Сколькими способами из множества A можно выбрать 2 различных цифры?

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = 6.$$

Получим сами сочетания:

{{0,1}, {0,2}, {0,5}, {1,2}, {1,5}, {2,5}}.

2) Сколько различных трехзначных чисел можно записать из цифр, входящих в множество А (цифры в записи числа могут повторяться)?

$$3 \cdot 4 \cdot 4 = 48.$$

Получим эти числа в виде векторов (кортежей):

$(A\backslash\{0\})\times A\times A = \{1, 2, 5\}\times\{0, 1, 2, 5\}\times\{0, 1, 2, 5\} =$

$= \{(1,0,0), (1,0,1), (1,0,2), (1,0,5), (1,1,0), (1,1,1), (1,1,2), (1,1,5), (1,2,0), (1,2,1), (1,2,2), (1,2,5),$
$(1,5,0), (1,5,1), (1,5,2), (1,5,5), (2,0,0), (2,0,1), (2,0,2), (2,0,5), (2,1,0), (2,1,1), (2,1,2), (2,1,5),$
$(2,2,0), (2,2,1), (2,2,2), (2,2,5), (2,5,0), (2,5,1), (2,5,2), (2,5,5), (5,0,0), (5,0,1), (5,0,2), (5,0,5),$
$(5,1,0), (5,1,1), (5,1,2), (5,1,5), (5,5,0), (5,2,1), (5,2,2), (5,2,5), (5,5,0), (5,5,1), (5,5,2), (5,5,5)\}.$

3) Сколько различных трехзначных <u>нечетных</u> чисел можно записать из цифр, входящих в множество А (цифры в записи числа могут повторяться)?

Здесь последняя цифра выбирается из подмножества {1,5} множества А. Имеем:

$$3 \cdot 4 \cdot 2 = 24.$$

Получим соответствующие числа.

$(A\backslash\{0\})\times A\times\{1, 5\} = \{1, 2, 5\}\times\{0, 1, 2, 5\}\times\{1, 5\} =$

$=\{(1,0,1), (1,0,5), (1,1,1), (1,1,5), (1,2,1), (1,2,5), (1,5,1), (1,5,5), (2,0,1), (2,0,5), (2,1,1), (2,1,5),$
$(2,2,1), (2,2,5), (2,5,1), (2,5,5), (5,0,1), (5,0,5), (5,1,1), (5,1,5), (5,2,1), (5,2,5), (5,5,1), (5,5,5)\}.$

Сколько различных трехзначных <u>четных</u> чисел можно записать из цифр, входящих в множество А (цифры в записи числа могут повторяться)?

Здесь последняя цифра выбирается из подмножества {0, 2} множества А. Имеем:

$$3 \cdot 4 \cdot 2 = 24.$$

Получим соответствующие числа.

$(A\backslash\{0\})\times A\times\{0, 2\} = \{1, 2, 5\}\times\{0, 1, 2, 5\}\times\{0, 2\} =$

$=\{(1,0,0), (1,0,2), (1,1,0), (1,1,2), (1,2,0), (1,2,2), (1,5,0), (1,5,2), (2,0,0), (2,0,2), (2,1,0), (2,1,2),$
$(2,2,0), (2,2,2), (2,5,0), (2,5,2), (5,0,0), (5,0,2), (5,1,0), (5,1,2), (5,2,0), (5,2,2), (5,5,0), (5,5,2)\}.$

4) Сколько различных трехзначных чисел можно записать из цифр, входящих в множество А (все цифры в числе различны)?

Первая цифра числа выбирается из множества $A\backslash\{0\}$ (3 варианта). После выбора первой цифры один из элементов множества $A\backslash\{0\}$ уже использован и не может быть повторно выбран, но зато элемент 0 возвращается в рассмотрение – его можно использовать в качестве второй цифры. Таким образом, для выбора второй цифры также есть 3 возможности. К моменту выбора третьей цифры, две цифры из имеющихся четырёх уже выбраны. Поэтому остается 2 возможности выбрать третью цифру. Имеем:

$$3 \cdot 3 \cdot 2 = 18.$$

Получим эти 18 чисел в виде кортежей.

$\{1\} \times (\{0\}\times\{2, 5\} \cup \{2\}\times\{0, 5\} \cup \{5\}\times\{0, 2\}) \cup$
$\cup \{2\} \times (\{0\}\times\{1, 5\} \cup \{1\}\times\{0, 5\} \cup \{5\}\times\{0, 1\}) \cup$
$\cup \{5\} \times (\{0\}\times\{1, 2\} \cup \{1\}\times\{0, 2\} \cup \{2\}\times\{0, 1\}) =$

$$= \{1\}\times\{0\}\times\{2, 5\} \cup \{1\}\times\{2\}\times\{0, 5\} \cup \{1\}\times\{5\}\times\{0, 2\} \cup$$

$$\cup \{2\}\times\{0\}\times\{1, 5\} \cup \{2\}\times\{1\}\times\{0, 5\} \cup \{2\}\times\{5\}\times\{0, 1\} \cup$$

$$\cup \{5\}\times\{0\}\times\{1, 2\} \cup \{5\}\times\{1\}\times\{0, 2\} \cup \{5\}\times\{2\}\times\{0, 1\} =$$

$$= \{(1,0,2), (1,0,5), (1,2,0), (1,2,5), (1,5,0), (1,5,2)\} \cup$$

$$\cup \{(2,0,1), (2,0,5), (2,1,0), (2,1,5), (2,5,0), (2,5,1)\} \cup$$

$$\cup \{(5,0,1), (5,0,2), (5,1,0), (5,1,2), (5,2,0), (5,2,1)\} =$$

$$= \{(1,0,2), (1,0,5), (1,2,0), (1,2,5), (1,5,0), (1,5,2), (2,0,1), (2,0,5), (2,1,0), (2,1,5), (2,5,0), (2,5,1), (5,0,1), (5,0,2), (5,1,0), (5,1,2), (5,2,0), (5,2,1)\}.$$

5) Сколько различных трехзначных нечётных чисел можно записать из цифр, входящих в множество A (все цифры в числе различны)?

Последнюю цифру можно выбрать двумя способами из множества {1, 5}. Для выбора первой цифры остается множество {2} и один (не выбранный) элемент множества {1, 5} (т.е. всего две возможности). К моменту выбора третьей цифры остается два невыбранных элемента множества A, т.е. тоже две возможности. Имеем:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8.$$

Формируем выражение, позволяющее получить искомые числа, в виде кортежей:

$$\underbrace{\{1\} \times \{0, 2\} \times \{5\}}_{\text{числа вида 1\_5}} \cup \underbrace{\{2\} \times (\{0\} \times \{1, 5\} \cup \{1\} \times \{5\} \cup \{5\} \times \{1\})}_{\text{числа вида 2\_1 и 2\_5}} \cup \underbrace{\{5\} \times \{0, 2\} \times \{1\}}_{\text{числа вида 5\_1}} =$$

$$= \{(1, 0, 5), (1, 2, 5), \quad (2, 0, 1), (2, 0, 5), (2, 1, 5), (2, 5, 1), \quad (5, 0, 1), (5, 2, 1)\}.$$

Сколько различных трехзначных чётных чисел можно записать из цифр, входящих в множество A (все цифры в числе различны)?

Последнюю цифру можно выбрать двумя способами – из множества {0, 2}. Разобьем множество всех чисел, удовлетворяющих заданным условиям, на два непересекающихся подмножества: в первое подмножество входят все числа, заканчивающиеся на 2 (вида __2), а во второе – все числа, заканчивающиеся на 0 (вида __0).

Для чисел из первого подмножества первую цифру можно выбрать двумя способами (из множества {1, 5}), тогда вторую – тоже двумя способами (0 и одна из оставшихся цифр: 1 или 5). Таким образом, количество чисел в первом подмножестве равно $2\cdot2\cdot1 = 4$.

Для чисел из второго подмножества первую цифру можно выбрать тремя способами (из множества {1, 2, 5}), а вторую – двумя способами (из двух элементов множества {1, 2, 5}, которые остались после выбора первой цифры). Таким образом, количество чисел во втором подмножестве равно $3\cdot2\cdot1 = 6$.

По правилу суммы получаем общее количество возможных чисел: 4 + 6 = 10, и сами числа:

$$(\{1\} \times \{0, 5\} \cup \{5\} \times \{0, 1\}) \times \{2\} \cup (\{1\} \times \{2, 5\} \cup \{2\} \times \{1, 5\} \cup \{5\} \times \{1, 2\}) \times \{0\} =$$

$$= \{(1, 0, 2), (1, 5, 2), (5, 0, 2), (5, 1, 2), (1, 2, 0), (1, 5, 0), (2, 1, 0), (2, 5, 0), (5, 1, 0), (5, 2, 0)\}.$$