AULA 2

Vetores no plano e no espaço

OBJETIVO
Ao terminar esta aula você deverá ser capaz de:
1. Representar pontos no plano e no espaço tridimensional.
2. Saber o que é um vetor no plano e no espaço e somar 2 vetores no plano e 2 vetores no espaço.
3. Conhecer o produto escalar de 2 vetores e suas propriedades.

2.1 - PONTOS NO PLANO E NO ESPAÇO

Já vimos, na seção 1.2, que os pontos de uma reta podem ser representados por um número real, uma vez escolhido um ponto para ser a origem e um segmento orientado para ser a unidade de medida.

Vimos também como representar um ponto do plano por um par ordenado (x, y) de números reais.

Vamos ver agora como podemos utilizar um terno (x, y, z) de números reais para representar um ponto no espaço ordinário, que chamaremos aqui de espaço tridimensional. Acrescentamos ao plano xy já conhecido um outro eixo perpendicular ao plano xy, e passando pela origem do plano xy, o chamado eixo dos $z's$. Dado um ponto P no espaço, traçamos por P uma perpendicular ao plano xy obtendo assim sua projeção P' e uma perpendicular ao eixo dos $z's$, obtendo o número z_0, chamado altura do ponto P. Como anteriormente o ponto P' no plano xy possui abcissa x_0 e ordenada y_0. Obtemos assim coordenadas (x_0, y_0, z_0) para o ponto P no espaço. Reciprocamente todo terno de números reais (a, b, c) representa um único ponto Q no espaço: as coordenadas (a, b) representam um ponto P' no plano xy. Levantando por P' uma perpendicular ao plano xy e marcando a altura c obtemos o ponto Q de coordenadas (a, b, c) (ver Figura 2.1).

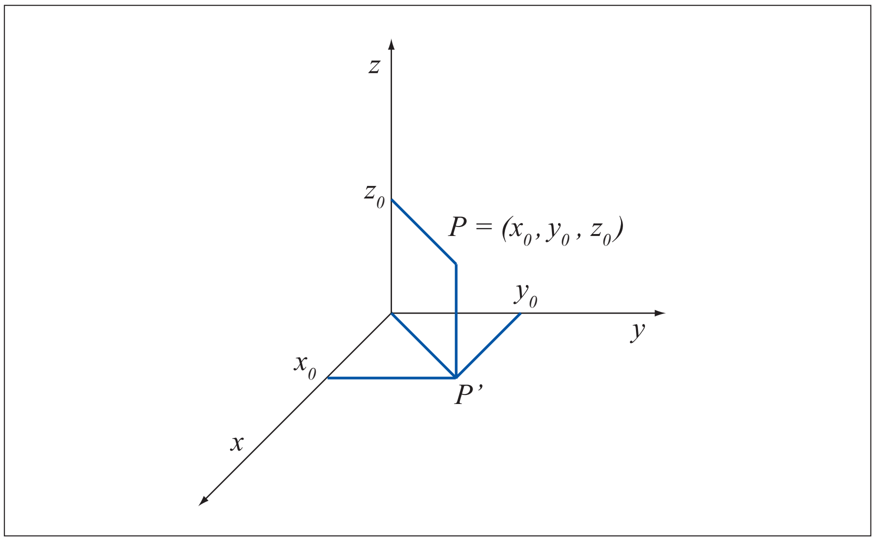

Figura 2.1 : O espaço ordinário dotado de eixos coordenados *x, y, z*

Podemos adicionar pontos no plano ou no espaço da seguinte maneira:

Se $A_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $A_2 = (a_2, b_2, c_2)$ são dois pontos no espaço, definimos o ponto $A_1 + A_2$ como sendo o ponto no espaço dado por $A_1 + A_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2)$. Analogamente, definimos a adição de dois pontos no plano. Vamos expor toda a teoria para pontos e vetores (que veremos em seguida) no plano ou no espaço e deixamos a cargo do aluno fazer as modificações necessárias para obter as propriedades de pontos e vetores no outro caso.

Exercício 2.1 Defina a adição de dois pontos do plano.

Exemplo 2.2

- *Se* $A_1 = (1, 2, -11)$ *e* $B_1 = (2, -3, 5)$, $A_1 + B_1 = (3, -1, -6)$.
- *Se* $A_2 = (2, -1)$ *e* $B_2 = (-2, 1)$, $A_2 + B_2 = (0, 0) = 0$.

◁

Denotaremos, como no último exemplo, o ponto $(0, 0)$, no plano, e o ponto $(0, 0, 0)$, no espaço, por 0 quando isto não causar confusão.

Podemos também multiplicar um ponto no plano ou no espaço por um número k. Se A=(a,b,c), então $kA = (ka, kb, kc)$.

As seguintes propriedades são satisfeitas pelas operações definidas acima:

1. $(A+B)+C = A+(B+C)$.
2. $A+B = B+A$.
3. $k(A+B) = kA+kB$.
4. Se k_1 e k_2 são números, então $(k_1+k_2)A = k_1A+k_2A$.
5. $(k_1k_2)A = k_1(k_2A)$.
6. $0+A = A$
7. $1 \cdot A = A$
8. Se denotarmos por $-A$ o ponto $(-1)A$, então $A - A = 0$.

Vamos, agora, interpretar geometricamente a adição de pontos e a multiplicação de pontos por um escalar. Faremos isto no plano, o aluno não terá dificuldades de fazer o mesmo no espaço. Consideremos um exemplo.

Exemplo 2.3 Vamos esclarecer, no caso do plano, o significado geométrico da adição de dois pontos e da multiplicação de um ponto por um escalar. Sejam $A = (-2, 2)$ e $B = (5, 4)$. Então temos $A + B = (3, 6)$. Os pontos A e B são lados de um paralelogramo e a soma $A + B$ é a diagonal. Da mesma forma, considere $3C = (3, 3)$, em que $C = (1, 1)$. O resultado significa esticar C por um fator de 3. Multiplicar um ponto por um número negativo inverte a direção. O caso geral não é diferente deste exemplo. Observe a Figura 2.2. $\triangleleft$

2.2 - VETORES NO PLANO E NO ESPAÇO: OPERAÇÕES

A força ou a velocidade, para serem caracterizadas, precisam, além de um valor, de uma direção e um sentido. É intuitivo por exemplo que, se um sólido se desloca com uma certa velocidade (numa certa direção), cada um de seus pontos possui esta velocidade. Para formalizarmos essa idéia definiremos:

Definição 2.4 Um vetor é um par ordenado de pontos, no plano ou no espaço, que denotamos por $\overrightarrow{AB}$. Visualizamos o vetor como uma seta cujo ponto inicial é A e o ponto final é B.

Definição 2.5 Dados dois vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$, dizemos que $\overrightarrow{AB}$ é equivalente a $\overrightarrow{CD}$ se $B - A = D - C$.

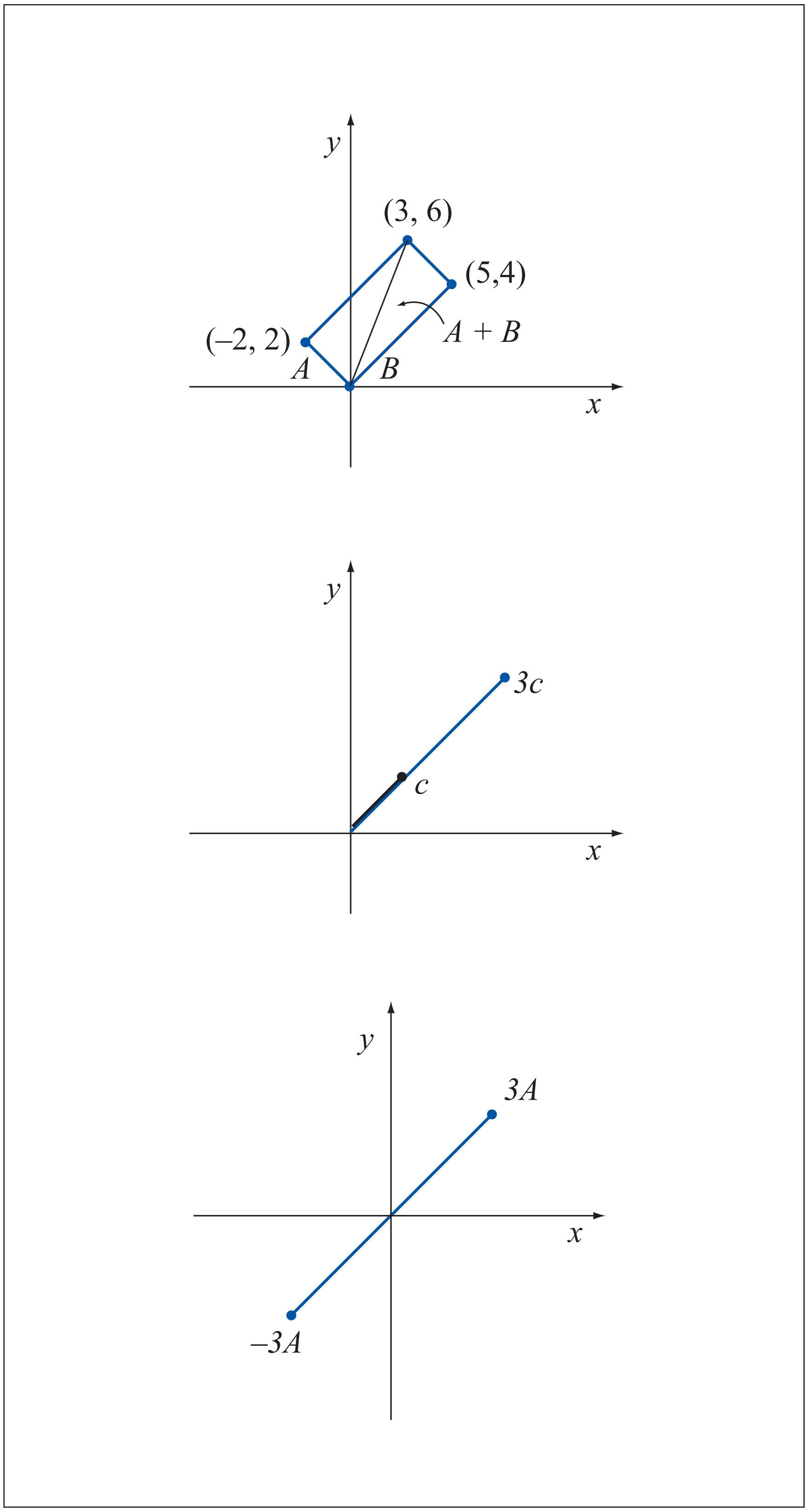

Figura 2.2: Adição de pontos, multiplicação por escalar e multiplicação por um número negativo

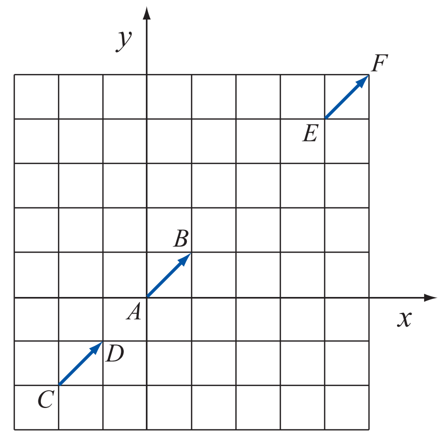

Figura 2.3 : Alguns vetores equivalentes

Exemplo 2.6 Considere os seguintes pontos do plano (veja a Figura 2.2):

$$A = (0,0), \quad B = (1,1), \quad C = (-2,-2),$$

$$D = (-1,-1), \quad E = (4,4) \text{ e } \quad F = (5,5)$$

Então $\overrightarrow{AB}$ é equivalente a $\overrightarrow{CD}$ que é equivalente a $\overrightarrow{EF}$, pois

$$B-A = (1,1)-(0,0) = (1,1) \quad \text{e} \quad D-C = (-1,-1)-(-2,-2) = (1,1).$$

Por outro lado $\overrightarrow{BA}$ não é equivalente a $\overrightarrow{CD}$, já que $A - B = (0,0) - (1,1) = (-1,-1)$ e já vimos que $D - C = (1,1)$. $\triangleleft$

Exercício 2.7 Verifique que $\overrightarrow{CD}$ não é equivalente a $\overrightarrow{FE}$. Verifique se $\overrightarrow{AF}$ é equivalente a $\overrightarrow{DE}$.

Observação 2.8 O que fizemos com as duas definições acima foi estabelecer uma relação de equivalência no conjunto de pares ordenados de pontos onde identificamos dois pares $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ se $B - A = D - C$. Não vamos formalizar aqui o que significa uma relação de equivalência, mas você já teve contato com algumas outras relações de equivalência. A primeira que todos encontramos é a relação que definimos no conjunto das frações, quando dizemos que duas frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são equivalentes se $ad = bc$. É ela que permite afirmar que as frações $\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}$, o que nos possibilita comparar frações e operar com frações. Para todos os efeitos práticos, consideramos duas frações equivalentes como iguais. O mesmo se dá com vetores. A equivalência que definimos corresponde à observação prática de que dois vetores equivalentes possuem o mesmo "efeito físico" e portanto indentificamo-los. Na prática, operamos quase que exclusivamente com um único representante da classe de equivalência, a saber, o vetor cujo ponto inicial é $0 = (0, 0)$. Veja também a próxima observação.

Observação 2.9 Considere novamente os vetores $\overrightarrow{CD}$ e $\overrightarrow{FE}$. Vimos que eles são equivalentes ao vetor $\overrightarrow{AB}$ cujo ponto inicial é a origem. De maneira completamente geral, é dado um vetor qualquer $\overrightarrow{A_1B_1}$ cujo ponto inicial é (a_1, b_1) e o ponto final é (a_2, b_2). Temos $B_1 - A_1 = (a_2 - a_1, b_2 - b_1)$. Portanto, o vetor $\overrightarrow{A_1B_1}$ é equivalente ao vetor $\overrightarrow{0(B_1 - A_1)}$, ou seja, o vetor cujo ponto inicial é $(0, 0)$ e o ponto final é $(a_2 - a_1, b_2 - b_1)$. Desta maneira, podemos pensar qualquer vetor como tendo o ponto inicial na origem, bastando, para isto, olhar para seu equivalente que tem esta propriedade. A observação é muito útil quando operamos com vetores. Definimos a soma de dois vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ como sendo a soma dos dois pontos que são equivalentes respectivamente a $\overrightarrow{AB}$ e a $\overrightarrow{CD}$. Procedemos analogamente para multiplicar um vetor por um escalar e recorreremos ao mesmo expediente para definir o chamado produto escalar de dois vetores, na próxima seção. Exatamente o mesmo raciocínio vale para vetores no espaço.

Exercício 2.10 Dados os vetores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ abaixo encontre dois outros equivalentes a eles cujo ponto inicial é a origem:

$$A = (2, 3), B = (5, -1), C = (-5, 3), D = (9, -2).$$

Exercício 2.11 Encontre a soma dos dois vetores acima.

Observação 2.12 Observe no Exemplo 2.6 que o vetor $\overrightarrow{AB}$ é equivalente ao ponto $B - A = (1, 1)$ enquanto o vetor $\overrightarrow{BA}$ é equivalente a $A - B = (-1, -1)$. Ou seja $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$. Geometricamente o vetor $\overrightarrow{BA}$ tem mesma direção que $\overrightarrow{AB}$, mas sentido contrário. Este fato é completamente geral: dados quaisquer dois pontos A, B temos $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ e os vetores possuem mesma direção e sentidos opostos.

2.3 - PRODUTO ESCALAR

De acordo com a Observação 2.9, todo vetor pode ser pensado com o ponto inicial na origem. Conseqüentemente, todos os pontos podem ser identificados com vetores. Na definição a seguir e em várias outras oportunidades, faremos esta identificação que não causa confusão, pois o contexto esclarece o que queremos dizer. Ficamos assim dispensados de usar a seta na notação de um vetor, pois há pouca diferença entre os conceitos.

Definição 2.13 Dados dois vetores no espaço $\overrightarrow{A_1} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\overrightarrow{A_2} = (a_2, b_2, c_2)$, o produto escalar de A_1 e A_2, denotado por $A_1 \cdot A_2$, é definido por:

$$A_1 \cdot A_2 = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$$

O produto escalar é sempre um número.Veja o exemplo.

Exemplo 2.14 Seja $A = (1, 2, -3)$ e $B = (1, 5, 7)$.

$$A \cdot B = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 5 + (-3)(7) = -10$$

Se os vetores estão no plano teremos: $A = (1, 2)$ $B = (4, -6)$, $A \cdot B = 4 - 12 = -8$. $\triangleleft$

O produto escalar possui 4 propriedades importantes:

1. $A \cdot B = B \cdot A$
2. Se A, B, C são 3 vetores temos: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C = (B + C) \cdot A$.
3. Se x é um número, então $(xA) \cdot B = x(A \cdot B)$
4. Se $A = 0$, então $A \cdot A = 0$ e, caso contrário, $A \cdot A > 0$.

As propriedades acima são fáceis de demonstrar e decorrem de propriedades dos números reais. Vejamos como:

Propriedade 1 $A \cdot B = B \cdot A$, pois se $A = (a_1, a_2, a_3)$ e $B = (b_1, b_2, b_3)$, temos:

$$A.B = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3 = B.A$$

Propriedade 3 $(xA) \cdot B = x(A \cdot B)$. Sejam $A = (a_1, a_2, a_3)$ e $B = (b_1, b_2, b_3)$. Então $x(A) = (xa_1, xa_2, xa_3)$ e portanto $(xA) \cdot B = xa_1a_2 + xa_2b_2 + xa_3b_3 = x(A \cdot B)$.

Exercício 2.15 Demonstre as propriedades 2 e 4.

Definição 2.16 Dois vetores A e B, $A \neq 0$ e $B \neq 0$ são ditos perpendiculares (ou ortogonais) se $A \cdot B = 0$

O conceito de perpendicularidade é um conceito conhecido, que vem da geometria elementar e não é claro, no momento, que os dois coincidam. Veremos nos próximos parágrafos que isto é verdade. Por ora, um exemplo.

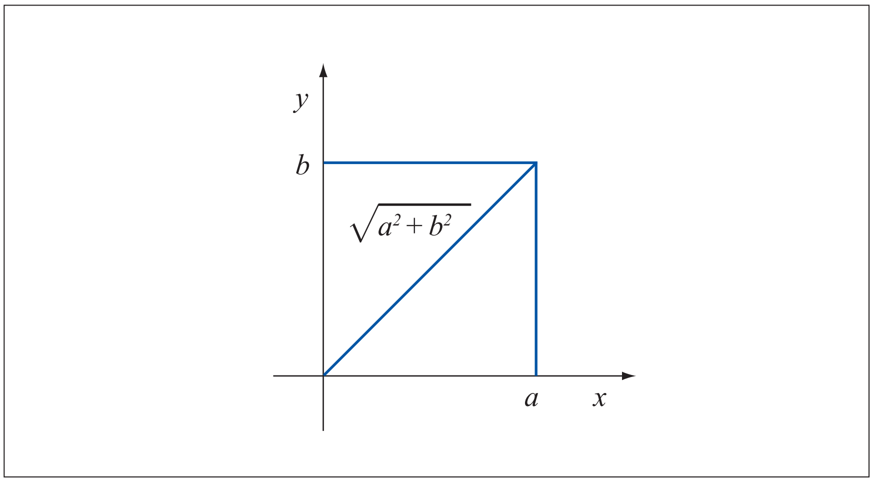

Figura 2.4 : O comprimento de um vetor no plano

Exemplo 2.17 Os vetores $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, e $e_3 = (0, 0, 1)$ são conhecidos como a base canônica do espaço ou como os vetores unitários na direção dos eixos, denominações cuja razão também será esclarecida posteriormente. Vejamos que eles são 2 a 2 perpendiculares pela definição acima:

$$e_1 \cdot e_2 = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0, \text{ e da mesma forma } e_1 \cdot e_3 = 0, e_2 \cdot e_3 = 0$$

$\triangleleft$

2.4 - NORMA DE UM VETOR

Definição 2.18 Dado um vetor no plano ou no espaço, definimos a norma de A, $\|A\|$ como sendo $\sqrt{A.A}$.

Em coordenadas, temos: se $A = (a, b)$ é um vetor do plano, então $\|A\| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Se $A = (a, b, c)$, então $\|A\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Isto mostra que a norma de um vetor coincide com a nossa noção intuitiva de comprimento. No caso do plano é simplesmente o Teorema de Pitágoras (ver Figura 2.4). No caso do espaço observe a Figura 2.5.

Exemplo 2.19 Dado $A = (1, 7)$, $\|A\| = \sqrt{1^2 + 7^2} = \sqrt{50}$. Dado $B = (1, 0, 2)$, $\|B\| = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$. $\triangleleft$

Diremos que um vetor U é unitário se $\|U\| = 1$. Dado qualquer vetor A com norma $a = \|A\|$, observe que $\frac{1}{a}A$ é um vetor e $||\frac{1}{a}A|| = \frac{1}{a}\|A\| = \frac{a}{a} = 1$. Diremos que dois vetores não nulos A, B possuem a mesma direção se existe uma constante c tal que $B = cA$. O vetor $\frac{1}{a}A$ é chamado o vetor unitário na direção de A.

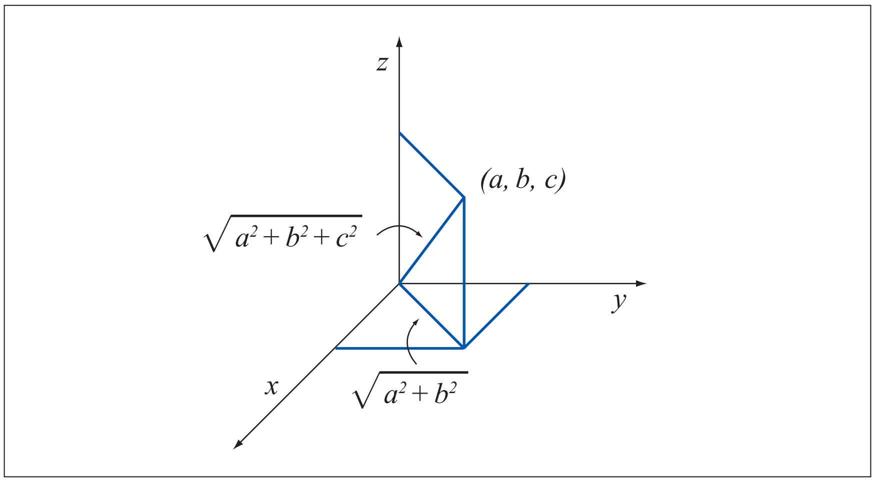

Figura 2.5 : O comprimento de um vetor no espaço

Exemplo 2.20 Se $A = (1, -1, 2)$, então $\|A\| = \sqrt{6}$. O vetor unitário na direção de A é o vetor $\frac{1}{\sqrt{6}}A = (\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}})$. $\triangleleft$

2.4.1 Distância entre dois pontos

Definição 2.21 Sejam A e B pontos no plano ou no espaço. Definimos a distância entre A e B como sendo:

$$\|A - B\| = \sqrt{(A - B) \cdot (A - B)}$$

Observação 2.22 A distância entre A e B é portanto a norma do vetor $\overrightarrow{AB}$. Dessa forma a definição coincide com a nossa intuição geométrica que decorre do Teorema de Pitágoras. Veja também o exemplo.

Exemplo 2.23 Sejam $A = (-1, 1)$ e $B = (2, 2)$.

$$A - B = (-1, 1) - (2, 2) = (-3, -1) \text{ e } \|A - B\| = \sqrt{10}.$$

O principal resultado sobre a relação entre o produto escalar de dois vetores e suas normas é a seguinte proposição, cuja demonstração será vista na próxima seção:

Proposição 2.24 *Dados dois vetores A e B temos*

$$A \cdot B = \|A\| \, \|B\| \, cos(\theta),$$

onde θ é ângulo entre os vetores A e B. Veja a Figura 2.6.

Observação 2.25 Note que se o ângulo entre dois vetores A e B é $\frac{\pi}{2}$ então, pela fórmula acima, $A \cdot B = 0$, o que coincide com o conceito expresso na Definição 2.16.

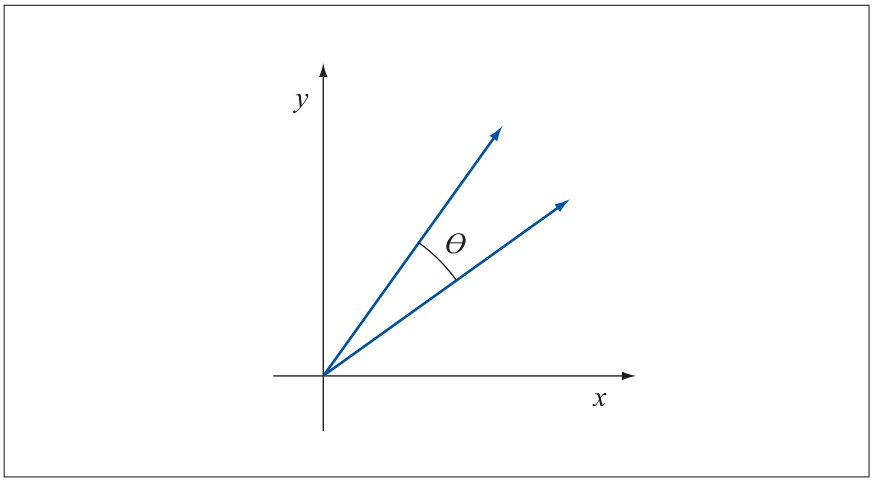

Figura 2.6: O ângulo entre os vetores A e B

2.5 - PROJEÇÃO DE UM VETOR SOBRE UM OUTRO

Sejam A e B dois vetores, $B \neq 0$. Vamos definir a projeção de A sobre B que será o vetor P da Figura 2.7.

Queremos, portanto, encontrar um vetor P tal que $A - P$ seja ortogonal a B e tal que $P = cB$, para alguma constante c que queremos determinar. Suponha que encontramos tal constante c. Então teremos:

$$(A - P) \cdot B = (A - cB) \cdot B = 0, \text{ ou seja, } A \cdot B = cB \cdot B$$

$$\text{donde temos que: } c = \frac{A \cdot B}{B \cdot B}.$$

Reciprocamente, se $c = \frac{A \cdot B}{B \cdot B}$, temos $(A - cB) \cdot B = A \cdot B - cB \cdot B = 0$.

Definição 2.26 A projeção de um vetor A sobre um vetor não nulo B é o vetor $P = cB$, onde $c = \frac{A \cdot B}{B \cdot B}$, que denotaremos por $P = Proj_B A$.

Exemplo 2.27 Sejam $A = (1, 2, -3)$ e $B = (1, 1, 2)$ vetores do espaço. Vamos calcular a projeção P de A sobre B. Temos:

$$c = \frac{A \cdot B}{B \cdot B} = \frac{1 + 2 - 6}{6} = -\frac{1}{2}.$$

Portanto $P = Proj_B A = cB = -\frac{1}{2}(1, 1, 2) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1)$. ◁

Exercício 2.28 Verifique que $Proj_B A = Proj_{\lambda B} A$, para λ constante não nula. Faça um esboço para $\lambda = 1, \frac{1}{2}, -1$.

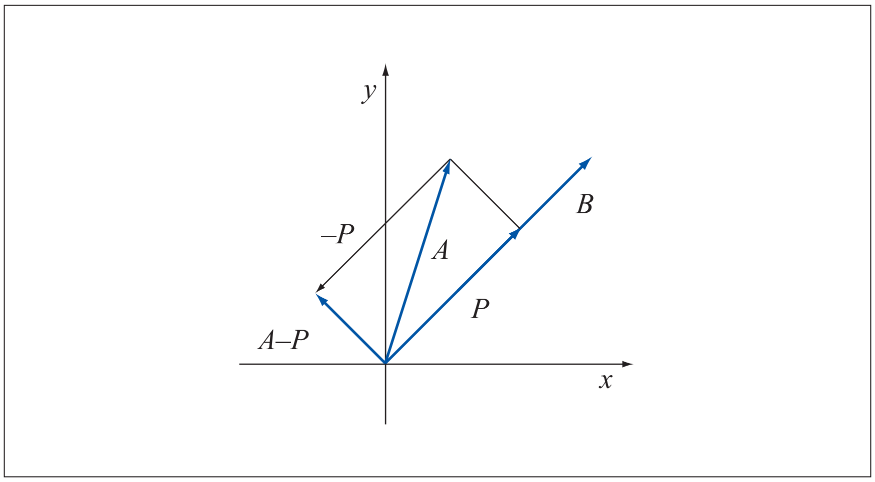

Figura 2.7: A projeção de um vetor A sobre um vetor B

Podemos agora demonstrar a Proposição 2.24:
Dados dois vetores A e B temos

$$A \cdot B = \|A\| \, \|B\| \, cos(\theta),$$

onde θ é ângulo entre os vetores A e B.

Demonstração 2.29 Da geometria elementar, temos a seguinte relação:

$$cos(\theta) = \frac{c\|B\|}{\|A\|}.$$

Substituindo o valor de c obtido acima temos:

$$\|A\| \, cos(\theta) = \frac{A \cdot B}{B \cdot B}\|B\| = \frac{A \cdot B}{\|B\|^2} \, \|B\|, \text{ donde:}$$

$$A \cdot B = \|A\| \, \|B\| \, cos(\theta).$$

Observação 2.30 Alguns autores tomam a relação

$$A \cdot B = \|A\| \, \|B\| \, cos(\theta)$$

como sendo a definição do produto escalar. Optamos por adotar a definição acima, seguindo o tratamento dado por Serge Lang em seu livro [3]. Um dos mais prolíficos e respeitados autores de livros de matemática do século passado, Lang observa que tomar a relação acima como definição dificulta a demonstração das propriedades do produto escalar, além desta relação não possuir uma generalização natural no contexto da análise funcional, vantagens do tratamento mais algébrico que adotamos aqui.

O conceito de perpendicularidade visto aqui é distinto do corrente nos cursos de geometria elementar. Vamos mostrar agora que eles são coincidentes. Para isto vamos relembrar um fato da geometria elementar. Dado um segmento $\overline{CD}$ no plano, o lugar geométrico dos pontos eqüidistantes de C e D é a perpendicular a $\overline{CD}$, passando pelo seu ponto médio.

Considere um vetor A e um vetor B e vamos supor que eles possuem o mesmo ponto inicial. Consideremos o vetor $-B$. A distância de A a B é $\|A - B\|$. A distância de A a $-B$ é $\|A + B\|$. Pelo resultado acima estas distâncias serão iguais se e somente se os vetores A e B são perpendiculares. Para mostrar que o conceito de perpendicularismo da geometria elementar coincide com o nosso vamos mostrar o seguinte:

Proposição 2.31 *Dados dois vetores A e B, $\|A-B\| = \|A+B\|$ se e somente se $A \cdot B = 0$.*

Demonstração: Suponhamos que $\|A - B\| = \|A + B\|$. Temos que

$$\sqrt{(A-B)\cdot(A-B)} = \sqrt{(A+B)\cdot(A+B)}.$$

Elevando ambos os membros ao quadrado temos:

$$A \cdot A + 2A \cdot B + B \cdot B = A \cdot A - 2A \cdot B + B \cdot B,$$

ou seja, $A \cdot B = 0$. Isto mostra que $\|A - B\| = \|A + B\|$ se e somente se $A \cdot B = 0$. □

2.6 - EXERCÍCIOS

1. Considere os pontos A e B abaixo, no plano, ou no espaço, e calcule $A+B$, $A-B$, $3A$.
   (a) $A=(2,-1)$ e $B=(-1,1)$.
   (b) $A=(-1,3)$ e $B=(0,4)$.
   (c) $A=(2,-1,5)$ e $B=(-1,1,1)$.
   (d) $A=(\pi,3,-1)$ e $B=(2\pi,-3,7)$.
2. Desenhe os pontos do exercício anterior.
3. Calcule e desenhe $A+2B$, $A+3B$, $A+\frac{1}{2}B$ para A e B como no exercício 1.
4. Em cada caso, determine se os vetores $\overrightarrow{CD}$ e $\overrightarrow{AB}$ são equivalentes:
   (a) $C=(1,-1)$, $D=(1,3)$, $A=(-1,5)$, $B=(2,2)$.
   (b) $C=(1,4)$, $D=(-3,5)$, $A=(5,7)$, $B=(1,8)$.
   (c) $C=(1,-1,5)$, $D=(-2,3,4)$, $A=(3,1,1)$, $B=(0,5,0)$.
   (d) $C=(2,3,-4)$, $D=(-1,3,5)$, $A=(-2,-1,5)$, $B=(2,2,7)$.
5. Encontre o comprimento dos vetores A, B, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ no item anterior.
6. Encontre o produto escalar $A.A$ e $A.B$ para todos os valores de A e B no exercício 1.
7. Quais dos seguintes pares de vetores são perpendiculares?
   (a) $(1,-1,2)$ e $(2,1,7)$.
   (b) $(1,-1,1)$ e $(2,3,1)$.
   (c) $(\pi,2,1)$ e $(2,-\pi,0)$.
   (d) $(-1,1)$ e $(1,-1)$.
   (e) $(-5,2)$ e $(2,3)$.
8. Faça um esboço dos dois últimos itens do exercício acima.
9. Determine o cosseno dos ângulos do triângulo cujos vértices são:
   (a) $(2,-1,1)$, $(1,-3,-5)$ e $(3,-4,-4)$.
   (b) $(3,1,1)$, $(-1,2,1)$ e $(2,-2,5)$.
10. Sejam A,B,C três vetores não nulos. Mostre, por meio de um exemplo, que podemos ter $A.C=B.C$ com A e B distintos.