**ЛЕКЦИЯ. Восстановление информации**

Восстановление информации связано с обработкой ошибок, возникающих при передаче данных. Мы рассматриваем эту проблему как одну из задач, решаемых сетевой операционной системой. Ниже мы рассмотрим использование циклических кодов для решения этой задачи.

Пусть подлежит отправке информационное сообщение

.

Данному сообщению можно сопоставить полином, как показано ниже на рис :

|  |  |
| --- | --- |
| 1 0 1 0 |  |
|  | |

Рис.

Коэффициенты у полинома, полученного таким способом, равны 0 или 1 (члены полинома с нулевыми коэффициентами просто не выписываем). Далее такой полином будем называть циклическим. Особенностью циклических полиномов является то, что операции вычитания на поле таких полиномов нет – операция вычитания заменяется операцией сложения полиномов. Более того, операция сложения выполняется также специфически. Никаких переносов не существует. Если число слагаемых  с одной и той же степенью *k* при *x* четное, то результатом будет 0; если нечетное – то результатом будет .

Пример.

,

,

.

Умножение выполняется обычным образом, но сохраняется введенное правило сложения.

Пример.

1. ,

,

.

1. ,

,



**Определение**. Циклический полином *P* называется первичным, если его нельзя представить как произведение , где  и  отличны от 1 и самого *P*.

Первичными полиномами, например, являются , , ,  и т.д.

Итак, прежде всего, определяются дополнительные разряды, присоединяемые к передаваемому информационному сообщению. Для выбора числа дополнительных разрядов будем использовать результат Боуза и Чоудхури, который состоит в следующем. Пусть *n* – число информационных разрядов. Пусть *k* – число дополнительных разрядов. Требуется выполнение следующих условий:

a)  для некоторого целого *m* (любого подходящего);

b) , где  – число обнаруживаемых ошибок.

Для  получим:

,

.

Сложив эти неравенства и, полагая , получим:



Это соотношение в точности копирует (4.12) для кодов Хэмминга. Итак, в нашем случае возьмем . Значения дополнительных разрядов получают так. Умножают исходный полином на полином . В нашем случае  и делят на первичный полином степени k (например, возьмем ). Остаток от деления и даст нам дополнительные разряды.

Итак, имеем:

1) 

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 2) |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  | – остаток |

Еще раз напомним, что операция вычитания над полем циклических полиномов нет. Вычитание заменяется сложением, которое выполняется по сформулированным выше правилам.

Остаток  можно записать так



(так как у нас число дополнительных разрядов ).

Этому полиному соответствует двоичный код 001.

Итак, мы должны передать число *I* = 1010. Для него мы определили дополнительные контрольные разряды 011. При этом нами использован первичный полином степени  – . Отправляемое сообщение имеет такой вид:

1010’011

Теперь рассмотрим, как обнаруживаются и исправляются одиночные ошибки.

Допустим, был искажен второй разряд, и, следовательно, принято число

** = 1110011.

Переведем его в полиномиальную форму:

.

Теперь надо разделить  на первичный полином . Если деление произойдет нацело без остатка, то ошибки нет. В противном случае сразу фиксируется факт ошибки и дальнейшие действия направлены на исправление ошибки. В нашем случае деление дает

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  | – остаток |

Остаток указывает на ошибку. Поступают так: циклически сдвигают принятую комбинацию на один разряд влево:

1110011

** = 1100111.

Полученное таким образом число снова делят на первичный полином. Если в остатке получается число, отличное от 1, то производят очередной циклический сдвиг влево и снова делят и т.д. до тех пор, пока, наконец, в остатке не получится ровно 1. В нашем случае второе деление дает:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  | – остаток |

Остаток не равен 1. Производим циклический сдвиг:

1100111

** = 1001111.

Выполняем очередное деление

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
| 1 | – остаток |

Мы получили в остатке 1. Это означает, что процесс делений и сдвигов прекращается. Для исправления ошибки нужно к последнему делимому добавить 1:

|  |
| --- |
|  |
| +1 |
|  |

Сложение выполняется по правилам циклических полиномов (без переносов). Теперь нужно получить двоичное представление этого полинома:

1001110.

Наконец, нужно выполнить обратный циклический сдвиг вправо столько раз, сколь раз до этого сдвигали число влево:

1001110

0100111

1010011

Мы получили восстановленное число. Циклические коды позволяют обнаруживать и исправлять многократные ошибки. Этот вопрос здесь не рассматривается.