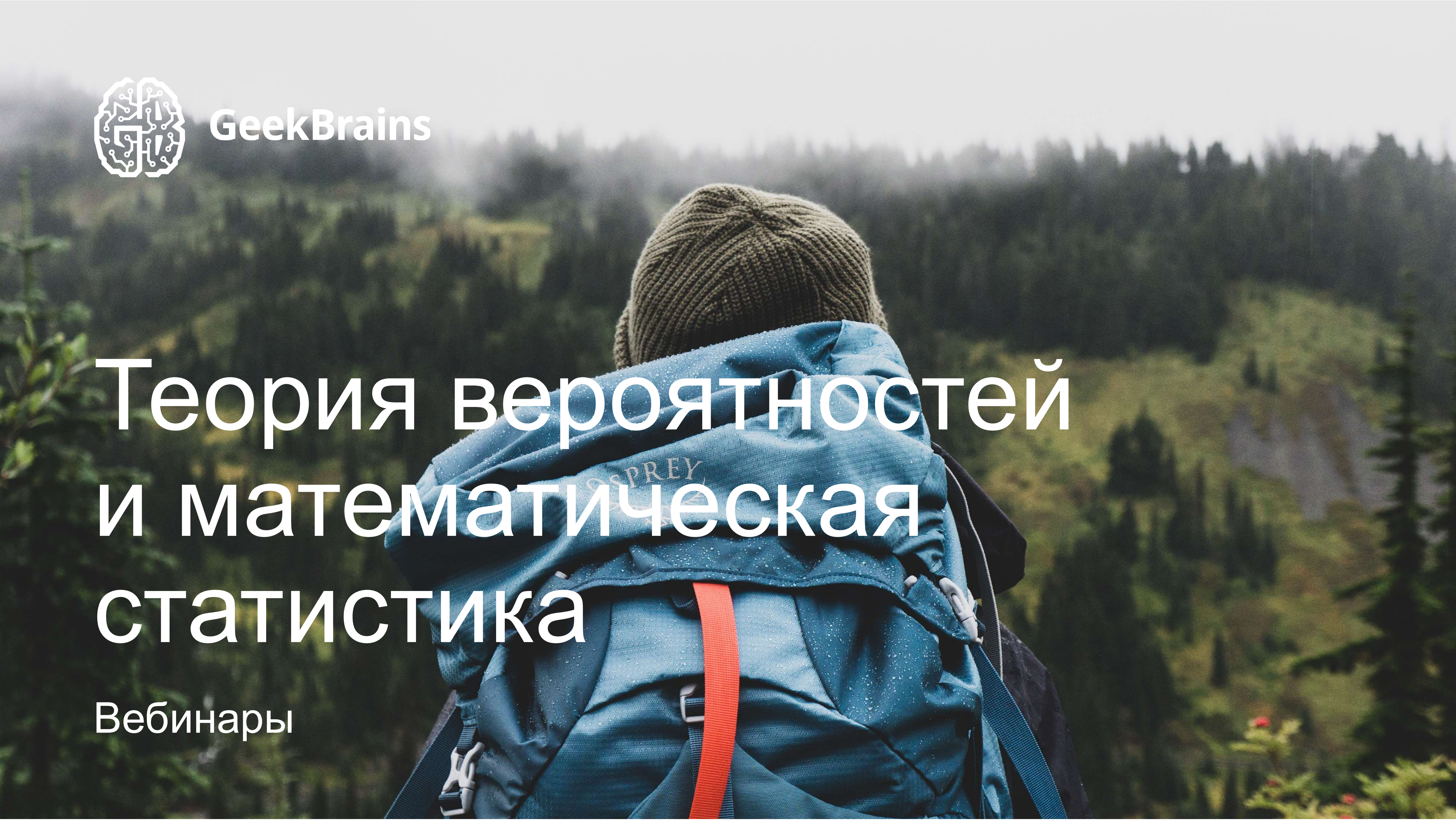
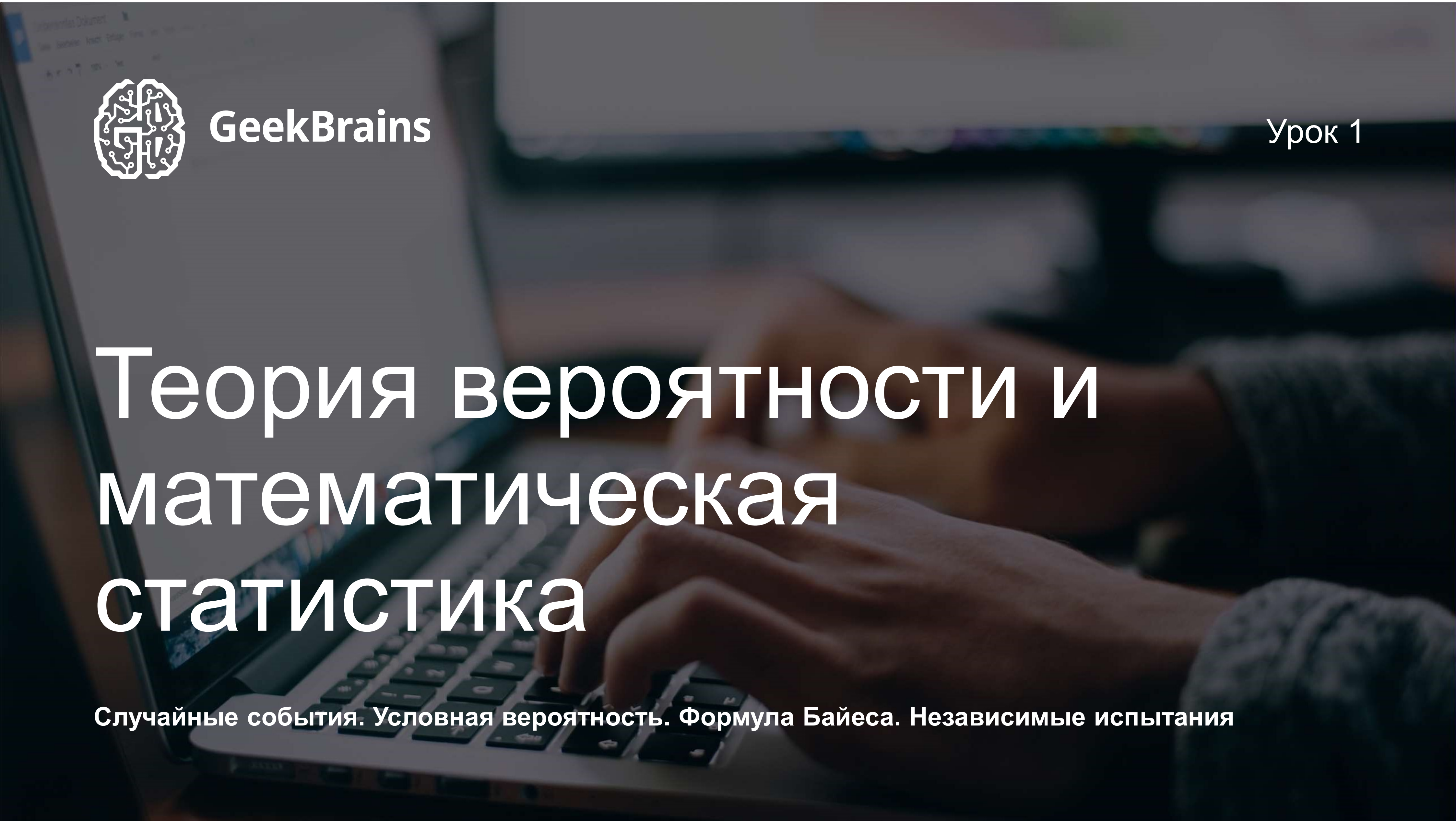


GeekBrains

Теория вероятностей и математическая статистика

Вебинары



GeekBrains

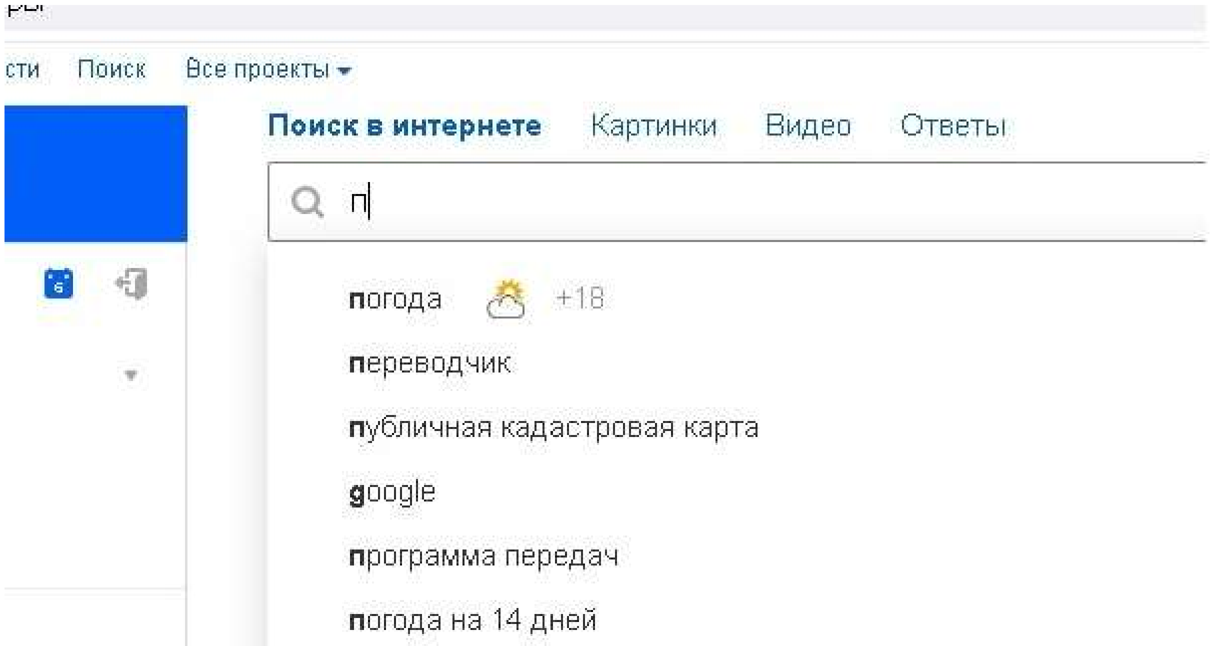
Урок 1

Теория вероятности и математическая статистика

Случайные события. Условная вероятность. Формула Байеса. Независимые испытания

На этом уроке мы изучим:

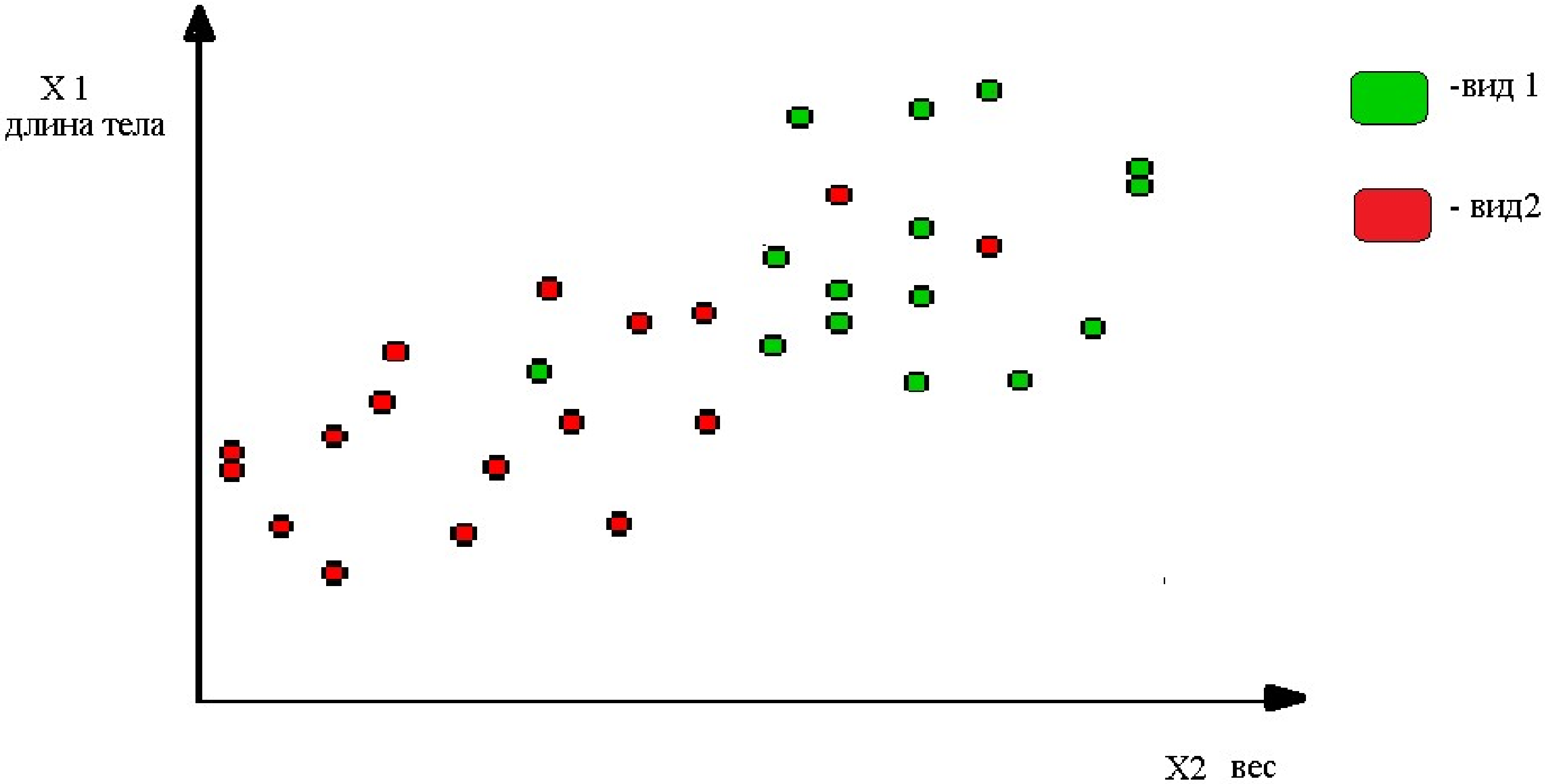
1. Что такое случайное событие
2. Статистическая вероятность
3. Классическое определение вероятности
4. Формулы комбинаторики
5. Виды случайных событий
6. Условная вероятность
7. Формула полной вероятности


сти
Поиск
Все проекты
Поиск в интернете
Картинки
Видео
Ответы
п
погода
+18
переводчик
публичная кадастровая карта
google
программа передач
погода на 14 дней

<u>Точность</u> экспресс теста на **ВИЧ :**

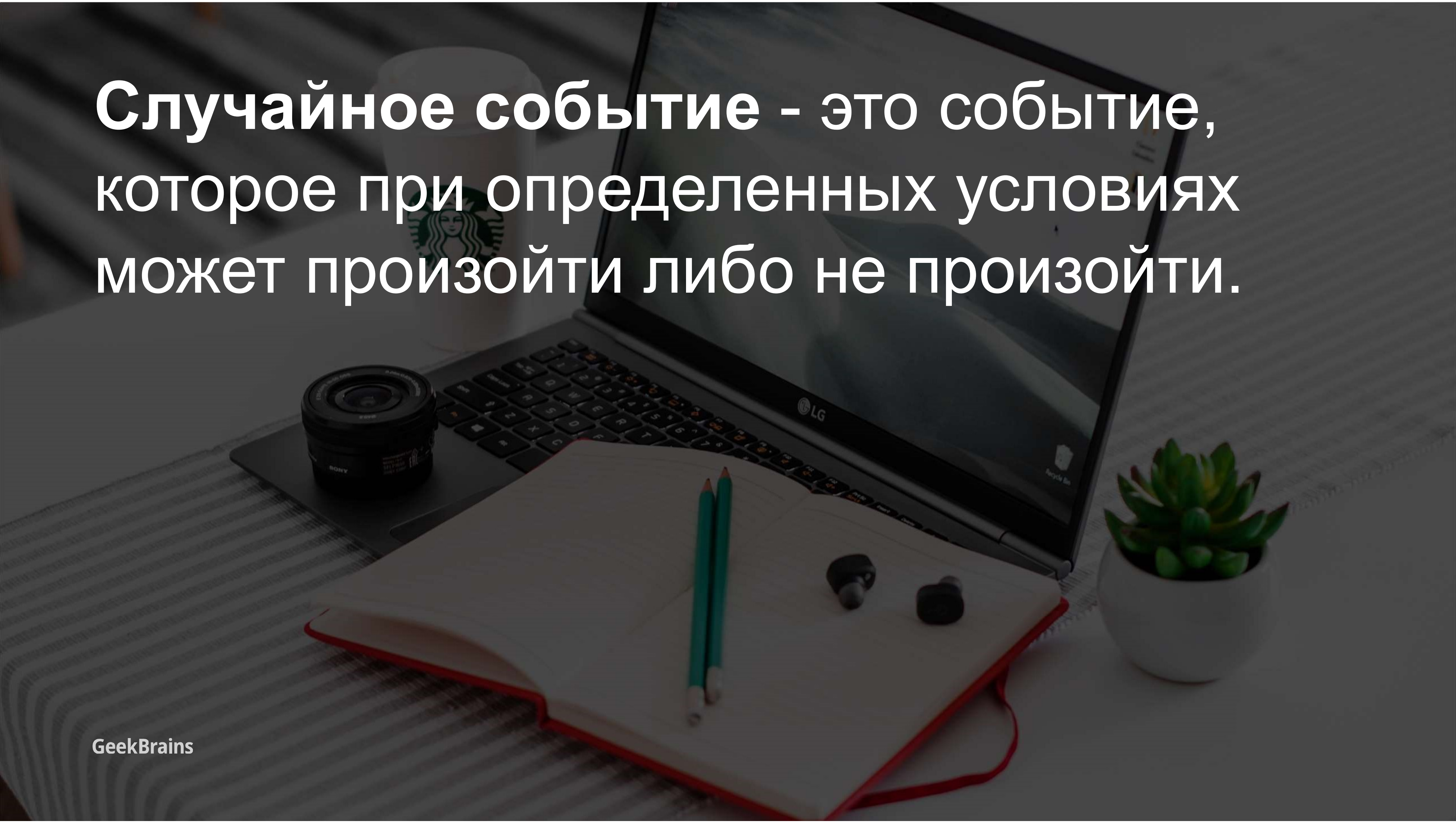
1) **Чувствительность > 99% P(+| болен)**

2) **Специфичность > 99%   P(- |здоров)**


X 1
длина тела
-вид 1
- вид2
X2 вес

Случайное событие

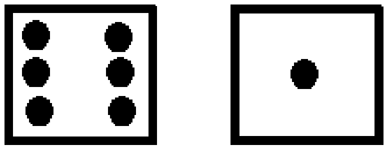
Случайное событие - это событие, которое при определенных условиях может произойти либо не произойти.



GeekBrains

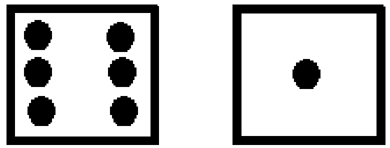
Примеры случайного события

1. При броске двух игральных костей на одной выпало число 1, а на другой – число 6.



Примеры случайного события

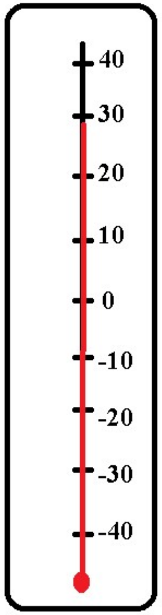
1. При броске двух игральных костей на одной выпало число 1, а на другой - число 6.



2. Клиент банка не вернул кредит.

Примеры случайного события

3. Температура воздуха в Москве за последние 10 дней не превышала 29 градусов по Цельсию.



Примеры случайного события

3. Температура воздуха в Москве за последние 10 дней не превышала 29 градусов по Цельсию.

4. При стократном подбрасывании монеты орел выпал 55 раз

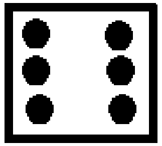
45 / 55

Достоверное событие

Событие можно называть достоверным, если в результате испытания оно обязательно произойдет.

Достоверное событие

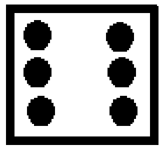
1. При броске игральной кости выпало число, не превышающее 6.



6 < = 6
[1] TRUE

Достоверное событие

1. При броске игральной кости выпало число, не превышающее 6.



6 < = 6
[1] TRUE

2. При подбрасывании монеты выпал либо орел, либо решка.

Достоверное событие

3. При стократном подбрасывании монеты решка выпала не более 100 раз.

100 < = 100

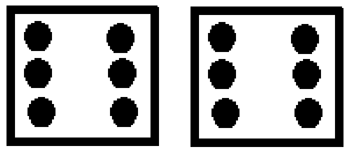
[1] TRUE

Невозможное событие

Невозможное событие - это событие, которое никогда не произойдет.

Невозможное событие

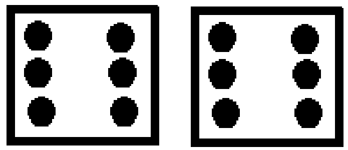
1. При однократном подбрасывании двух игральных костей сумма выпавших чисел составила 15.



```
15<=12
[1] FALSE
```

Невозможное событие

1. При однократном подбрасывании двух игральных костей сумма выпавших чисел составила 15.
2. При стократном подбрасывании монеты решка выпала 55 раз, а орел – 56.

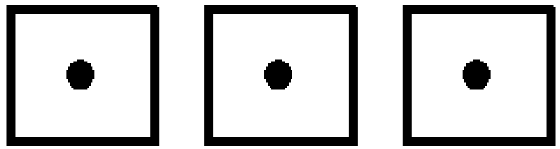


```
12 == 15
[1] FALSE
```

```
55+56<=100
[1] FALSE
```

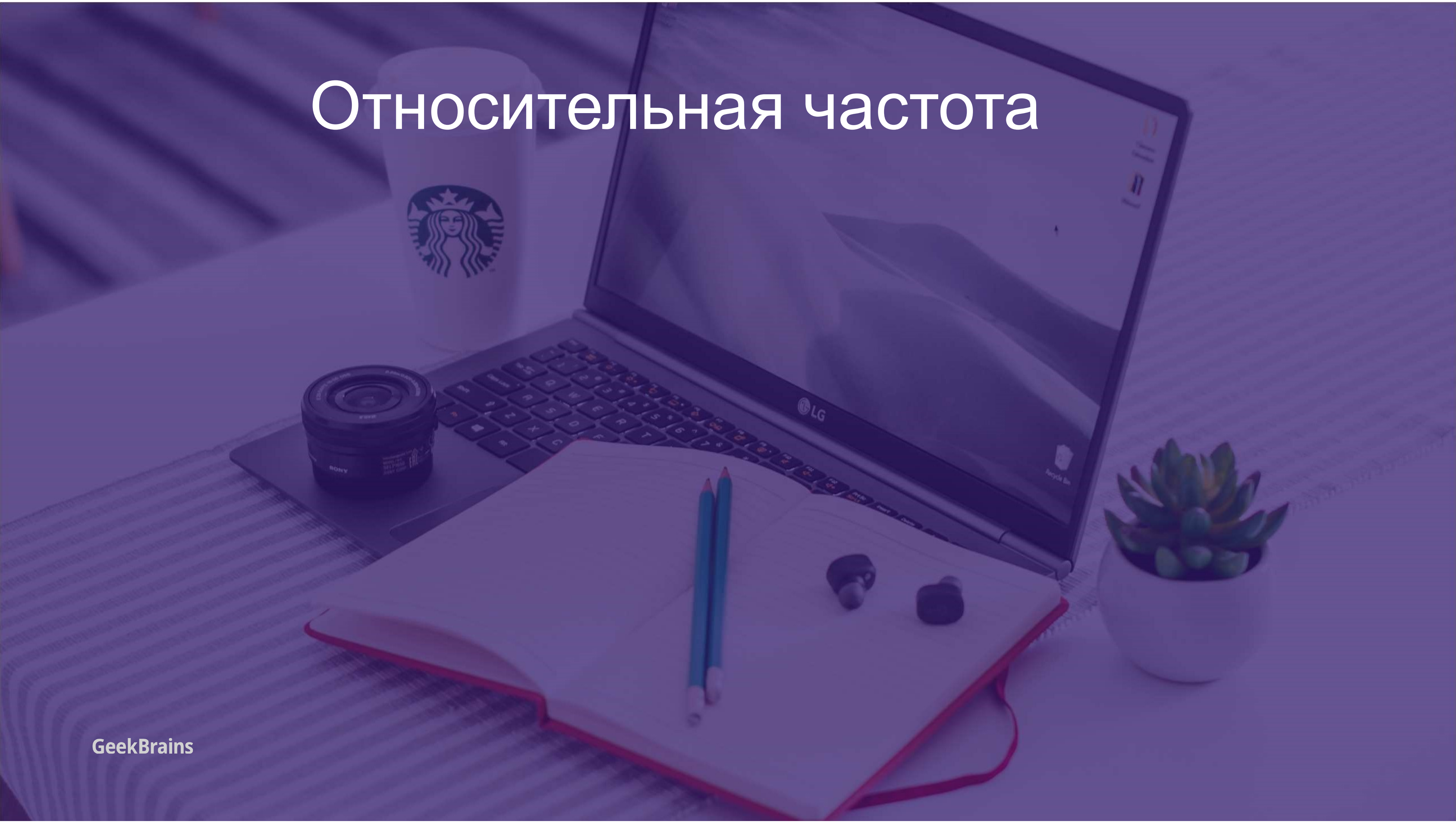
Невозможное событие

3. При однократном подбрасывании трех игральных костей сумма выпавших чисел составила 2.



```
3<=2
[1] FALSE
```

Относительная частота



GeekBrains

Относительная частота

Для случайного события существует понятие **относительной частоты** - это отношение числа появления события к общему числу испытаний.

Относительная частота

$$W(A) = \frac{m}{n}$$

где W(A) - относительная частота события A,

m - число появления события A,

n - общее число испытаний.

Смотри пример 1,2

Смоделируем 60-кратное подбрасывание игральной кости с помощью функции random.randint пакета **numpy**, то есть $n = 60$.

Событием A будем считать выпадение числа 3 и найдем его относительную частоту.

In [1]:
```
import numpy as np
np.random.seed(1)
n = 60


b = np.random.randint(1, 7, n)
b
```

Out[1]:
```
array([6, 4, 5, 1, 2, 4, 6, 1, 1, 2, 5, 6, 5, 2, 3, 5, 6, 3, 5, 4, 5, 3,
       5, 6, 3, 5, 2, 2, 1, 6, 2, 2, 6, 2, 2, 1, 5, 2, 1, 1, 6, 4, 3, 2,
       1, 4, 6, 2, 2, 4, 5, 1, 2, 4, 5, 3, 5, 1, 6, 4])
```

Вычислим мощность подмножества, где в результате испытания выпадало число 3, то есть наблюдалось событие A:

In [2]:
```
a=b[b==3]
a
```

Out[2]:
```
array([3, 3, 3, 3, 3, 3])
```

In [3]:
```
m = len(a)
m
```

Out[3]:
```
6
```

Теперь можем вычислить относительную частоту события A:

In [4]:
```
W = m / n
W
```

Out[4]:
```
0.1
```

Разберем более сложный пример. Смоделируем ситуацию, когда бросают две игральные кости одновременно.

При этом будем находить частоту случайного события B, при котором на одной кости выпало 1, а на другой — 2.

Проведем для этого 360 испытаний. Сразу зададим число n:

In [5]:
```
n = 360
```

In [7]:
```
c = np.random.randint(1, 7, size=n)
d = np.random.randint(1, 7, size=n)
```

In [8]:
```
c
```

Out[8]:
```
array([2, 3, 1, 5, 2, 3, 3, 2, 1, 2, 4, 6, 5, 4, 6, 2, 4, 1, 1, 3, 3, 2,
       4, 5, 3, 1, 1, 2, 2, 6, 4, 1, 1, 6, 6, 5, 6, 3, 5, 4, 6, 4, 6, 1,
       4, 5, 4, 5, 5, 6, 5, 2, 1, 5, 3, 1, 6, 3, 5, 2, 2, 1, 3, 5, 5, 1,
       5, 2, 5, 2, 1, 3, 4, 2, 3, 5, 5, 3, 3, 1, 2, 3, 3, 1, 6, 2, 3, 5,
       1, 6, 6, 2, 3, 2, 6, 5, 3, 1, 6, 1, 2, 6, 1, 2, 4, 2, 2, 6, 5, 5,
       4, 6, 1, 4, 1, 4, 2, 3, 6, 6, 5, 6, 1, 6, 1, 6, 4, 2, 2, 6, 1, 6,
       1, 5, 3, 6, 4, 5, 3, 1, 6, 4, 4, 6, 6, 2, 3, 5, 4, 1, 1, 6, 5, 3,
       5, 3, 1, 6, 4, 1, 1, 5, 6, 3, 2, 1, 5, 4, 1, 2, 3, 5, 5, 4, 4, 4,
       4, 3, 4, 4, 6, 5, 4, 3, 5, 5, 1, 4, 4, 1, 4, 6, 6, 2, 1, 3, 3, 3,
       1, 3, 2, 5, 1, 5, 5, 2, 4, 2, 5, 2, 3, 6, 2, 1, 1, 3, 5, 2, 1, 1,
       4, 2, 1, 5, 4, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 1, 1, 1, 5, 6, 2, 6, 5, 2, 3, 6,
       3, 6, 5, 6, 4, 5, 5, 1, 4, 3, 5, 6, 4, 5, 3, 4, 1, 6, 6, 3, 2, 4,
       3, 1, 6, 2, 5, 2, 4, 4, 2, 3, 1, 3, 5, 1, 3, 5, 4, 5, 4, 1, 6, 6,
       5, 3, 3, 5, 2, 3, 6, 2, 2, 2, 1, 6, 6, 5, 5, 3, 3, 4, 2, 5, 1, 1,
       4, 3, 5, 2, 4, 2, 2, 3, 6, 6, 5, 6, 1, 4, 1, 5, 3, 4, 6, 2, 2, 5,
       5, 1, 3, 2, 4, 1, 2, 1, 6, 3, 3, 5, 4, 3, 3, 3, 1, 6, 3, 1, 5, 6,
       2, 6, 1, 3, 4, 1, 5, 4])
```

```
In [9]: d

Out[9]: array([4, 4, 1, 4, 2, 3, 1, 2, 5, 3, 4, 5, 6, 5, 3, 2, 3, 6, 1, 6, 4, 6,
               4, 3, 1, 1, 1, 1, 3, 5, 1, 5, 2, 3, 2, 3, 5, 2, 4, 6, 2, 6, 2, 3,
               5, 2, 1, 3, 6, 2, 3, 1, 1, 6, 4, 5, 2, 6, 1, 5, 1, 4, 3, 5, 4, 3,
               5, 3, 5, 1, 1, 6, 5, 3, 3, 5, 3, 4, 6, 1, 1, 5, 4, 5, 4, 4, 5, 1,
               6, 4, 6, 2, 5, 5, 4, 3, 3, 3, 3, 3, 1, 3, 2, 6, 3, 4, 6, 1, 1, 6,
               6, 6, 2, 2, 4, 4, 6, 4, 2, 4, 4, 4, 2, 4, 1, 5, 6, 1, 6, 6, 3, 5,
               5, 3, 1, 4, 6, 3, 5, 6, 1, 5, 6, 3, 4, 5, 3, 5, 2, 4, 5, 4, 1, 4,
               1, 5, 4, 1, 6, 4, 2, 5, 5, 6, 3, 6, 6, 3, 5, 3, 2, 3, 4, 2, 6, 6,
               4, 4, 1, 5, 4, 4, 6, 4, 4, 1, 3, 4, 6, 2, 6, 4, 3, 6, 4, 3, 6, 3,
               1, 5, 1, 2, 4, 1, 1, 1, 2, 3, 5, 5, 3, 1, 2, 1, 1, 6, 3, 6, 5, 4,
               1, 3, 2, 4, 4, 2, 5, 5, 5, 6, 1, 2, 1, 2, 3, 3, 5, 6, 6, 3, 5, 6,
               1, 6, 3, 6, 5, 5, 2, 2, 2, 2, 6, 5, 6, 4, 5, 2, 2, 6, 2, 3, 5, 4,
               3, 4, 4, 3, 4, 1, 3, 1, 2, 6, 1, 6, 1, 4, 5, 1, 1, 6, 1, 1, 2, 1,
               6, 2, 4, 4, 5, 6, 1, 2, 6, 1, 4, 3, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 4, 4, 6, 4,
               5, 6, 3, 6, 4, 1, 3, 3, 1, 3, 3, 2, 1, 2, 5, 4, 2, 5, 1, 1, 1, 3,
               1, 5, 2, 5, 1, 3, 6, 4, 3, 6, 2, 6, 4, 2, 2, 6, 3, 6, 1, 5, 5, 3,
               3, 5, 1, 1, 4, 5, 5, 4])
```

In [10]:
```python
c[0]
```
Out[10]:
```
2
```

In [11]:
```python
d[0]
```
Out[11]:
```
4
```

Посчитаем число случав, когда в одном испытании на первой игральной кости выпало число 1, а на второй — 2.

In [12]:
```python
a = c[(c==1) & (d==2)]
m = len(a)

a
```
Out[12]:
```
array([1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1])
```

In [13]:
```python
m
```
Out[13]:
```
11
```

Вычислим относительную частоту события B:

In [14]:
```python
W = m / n
W
```
Out[14]:
```
0.030555555555555555
```

Статистическая вероятность

- При **достаточно большом** числе испытаний за **статистическую вероятность** принимают относительную частоту

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

n – достаточное большое число испытаний

- **Относительная частота** и **статистическая вероятность** относятся к **экспериментальным** величинам

Классическая вероятность

- Если заранее известны все вероятные исходы и они равновозможные (например, при подбрасывании монеты или игральной кости), можно воспользоваться **классическим определением вероятности**:
- Вероятность события — это отношение числа элементарных исходов, благоприятствующих данному событию, к числу всех **равновозможных** исходов опыта, в котором оно может появиться.
- Формула для этого определения такая же, как и для статистической вероятности:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Смотри пример 3,4

Комбинаторика

Комбинаторика — раздел математики, изучающий дискретные объекты, множества (сочетания, перестановки, размещения и перечисления элементов) и отношения на них.

Комбинаторика

Сочетания

Перестановки

Размещения

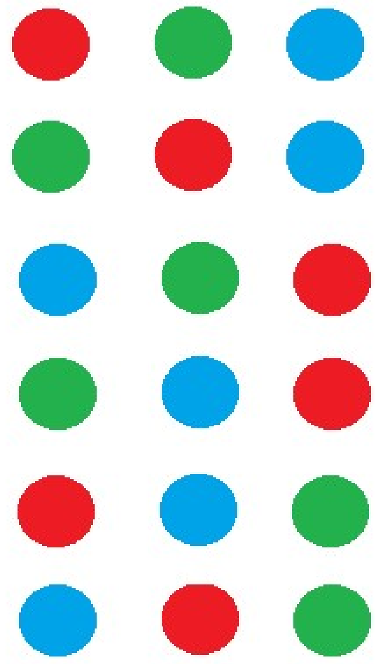
Сочетания

Сочетание - набор, состоящий из **k** элементов, выбранных из множества, содержащего **n** различных элементов.

Перестановки

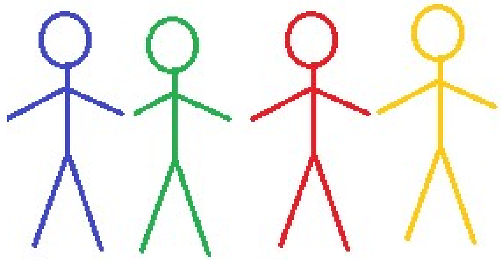
Перестановки - комбинации из **n** элементов,

отличающиеся их порядком.



GeekBrains

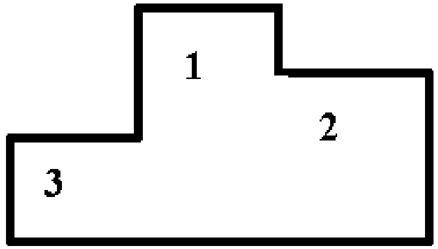
Размещения



Размещения из **k** элементов,

выбранных из множества **n** –

это такие комбинации, которые отличаются либо самими элементами, либо порядком их расположения.



Формулы комбинаторики

Сочетание

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

порядок

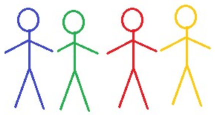
неважен

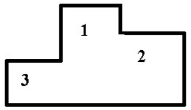
Размещение

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

порядок

важен



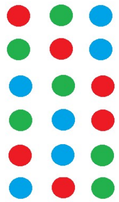


Перестановка

$$P_n = n!$$

порядок

важен



0! = 1

3! = 1* 2 *3 = 6

Смотри пример 5-8

Сколькими способами можно выбрать из колоды, состоящей из 36 карт, 4 карты?

А) сочетание

Б) размещение

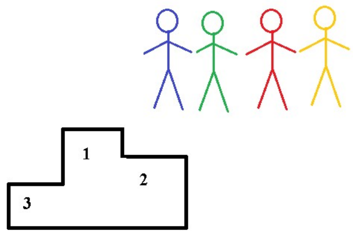
В) перестановка

Сочетание

порядок

неважен

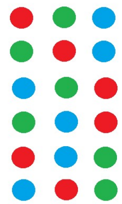
Размещение



порядок

важен

Перестановка



порядок

важен

```python
from math import factorial
```

```python
def combinations(n, k):
    return int(factorial(n) / (factorial(k) * factorial(n - k)))
```

```python
combinations(36,4)
```

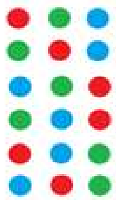
```
58905
```

$$C_{36}^{4} = \frac{36!}{4!(36-4)!} = \frac{36!}{4! \cdot 32!} = \frac{33 \cdot 34 \cdot 35 \cdot 36}{4!} = \frac{33 \cdot 34 \cdot 35 \cdot 36}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 58905$$

В магазине 20 покупателей. Сколькими способами они могут образовать очередь из 5 человек?

А) сочетание
Б) размещение
В) перестановка

Перестановка



порядок

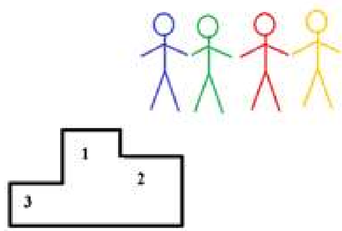
важен

Сочетание

порядок

неважен

Размещение



порядок

важен

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

In [10]:
```
def arrangements(n, k):
    return int(factorial(n) / factorial(n - k))
```

In [ ]:
```
20!/(20-5)!
```

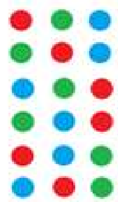
In [0]:
```
arrangements(20, 5)
```

Out[24]: 1860480

Сколькими способами 5 покупателей могут образовать очередь?

А) сочетание
Б) размещение
В) перестановка

Перестановка



порядок

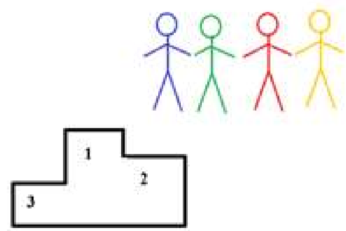
важен

Сочетание

порядок

неважен

Размещение



порядок

важен

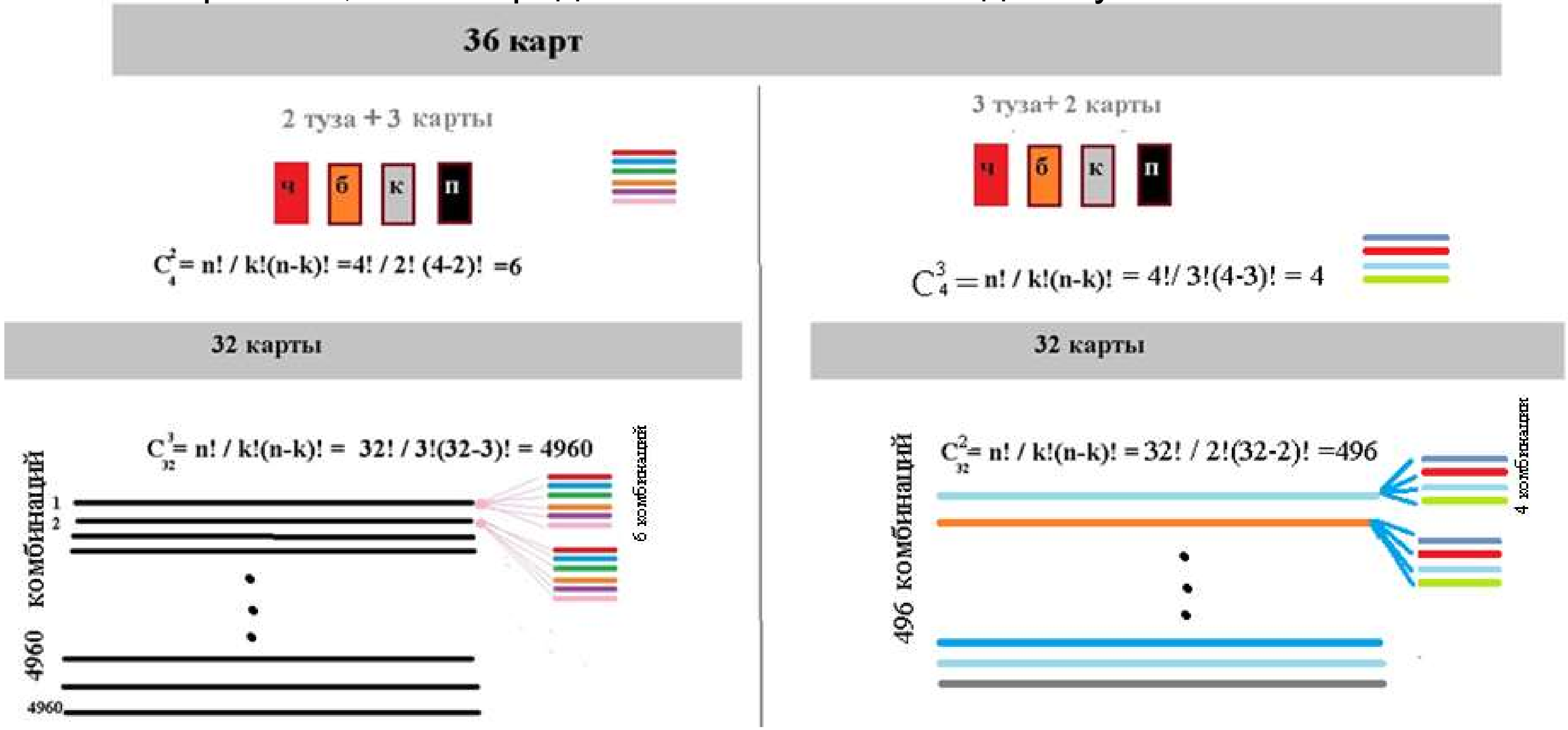
$$P_n = n!$$

In [12]:
```
def permutations(n):
    return int(factorial(n))
```

In [13]:
```
permutations(5)
```

Out[13]:
```
120
```

Из колоды, состоящей из 36 карт, случайным образом выбраны 5. Сколькими способами можно выбрать эти карты так, чтобы среди них оказалось от 2 до 3 тузов?



C 1 = 6* 4960 =29 760

C2 = 4* 496 = 1984

C = C1+ C2 = 29 760 +1984 = 31744

Ответ : возможно 31 744 комбинации с 2 или 3 тузами

**Из колоды 36 карт случайным образом берут 5 карт.
Найти вероятность того, среди 5 карт будет 2 туза**

P = **число исходов, благоприятствующих нашему событию** / **общее число исходов**

число исходов благоприятствующих нашему событию – это количество сочетаний 5 карт из 36 с 2 тузами – это

C1 =29760 (первая часть задачи)

Общее число исходов – это все возможные сочетания 5 карт из 36

$$C_5^{36} = \frac{36!}{5! * 31!} = \frac{\cancel{31!} * 32 * 33 * 34 * 35 * 36}{120 * \cancel{31!}} = 376\ 992$$

P= 29760 / 376992 = 0,0789

Ответ: вероятность взять 5 карт с 2 тузами 0,0789 или около 8%

Зависимые и независимые события

- **Независимыми события** называют, когда появление одного из них не влияет на появление другого.

Вероятность одновременного появления двух **независимых** событий вычисляется по формуле:

P(AB) = P(A) * P(B)

- **Зависимыми событиями** называются, когда появление одного влияет на появление другого

Вероятность появления двух зависимых событий

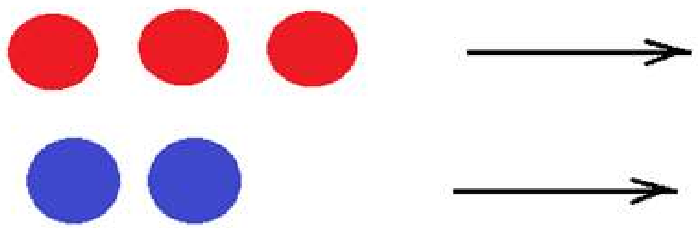
P(A*B) = P(A)* P(B|A)

Выражение $P(B \mid A)$ означает вероятность наступления события B при условии, что событие A произошло.

Смотри пример 9

Зависимые события

1)

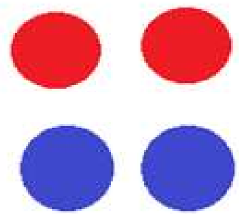


A = первым вытаскиваем красный шар
B = вторым вытаскиваем синий шар

Найти вероятность того,что подряд будут взяты один красный шар и один синий шар

2) $P(A) = 3/5$

Событие B зависит от события A
$P(B|A)$



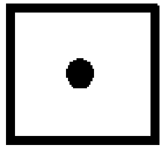
После того,как взяли 1 красный шар

$P(B|A) = 2/4 = 1/2$

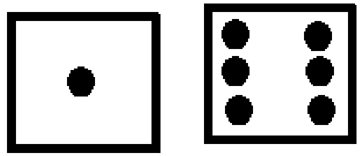
3) $P(A*B) = P(A) * P(B|A) = 3/5 * 1/2 = 3/10$

Совместные и несовместные события

События называются **несовместными** ,
если появление одного из них **исключает** появление другого

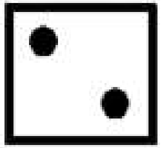


События называются **совместными**,
если появление одного из них **не исключает** появления другого



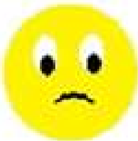
Совместные и несовместные события

Несовместные события



событие А

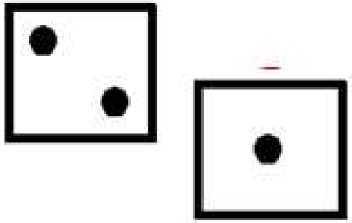
выпадает 2



~~событие В~~

выпадает 1

Совместные события



событие А

выпадает 2

событие В

выпадает 1

ПРОИЗВЕДЕНИЕ СОБЫТИЙ

$\boxed{\text{А и В одновременно}}$

$C = A * B \Rightarrow P(C) = P(A) * P(B)$

$P(AB) = P(C) = 0$

$C = A * B \Rightarrow P(C) = P(A) * P(B)$

$P(AB) = P(C) = 1/6 * 1/6 = 1/36$

СУММА СОБЫТИЙ

$\boxed{\text{или А или В}}$

$C = A + B \Rightarrow P(C) = P(A) + P(B)$

$P(C) = 1/6 + 1/6 = 2/6 = 1/3$

$C = A + B \Rightarrow P(C) = P(A) + P(B) - P(AB)$

$P(C) = 1/6 + 1/6 - 1/6 * 1/6 = 1/3 - 1/36 = (12-1)/36 = 11/36$

Формула полной вероятности

Если событие A может наступить только при появлении событий $B_1, B_2, \dots, B_n$,

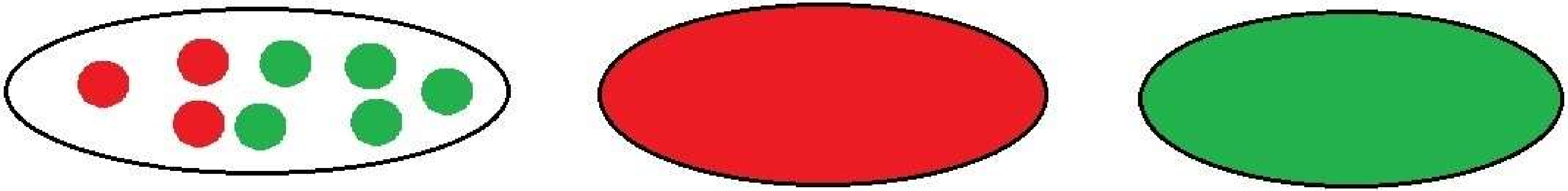
образующих полную группу несовместных событий*, то вероятность A вычисляется по формуле:

***полная группа событий** означает, что при отдельном испытании обязательно возникнет одно из них.

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A \mid B_1) + P(B_2) \cdot P(A \mid B_2) + \ldots + P(B_n) \cdot P(A \mid B_n)$$

Смотри пример 10

1корзина **2 корзина** **3 корзина**



Случайным образом выбирается корзина
и случайным образом из нее берут мяч.
Какова вероятность того,что мяч окажется зеленым?

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A \mid B_1) + P(B_2) \cdot P(A \mid B_2) + \ldots + P(B_n) \cdot P(A \mid B_n)$$

A = вытащить зеленый мяч

берем корзину *вытаскиваем зеленый мяч*

B1 - взяли 1-ю корзину **P(B1)= 1/3**
B2 -взяли 2-ю корзину **P(B2)= 1/3**
B3- взяли 3-ю корзину **P(B3)= 1/3**

P(A|B1)= 5/8
P(A|B2)= 0
P(A|B3)= 1

P(A)=1/3 * 5/8 + 1/3*0 +1/3*1= 5/24 +1/3= (5+8)/24 = 13/24

Формула Байеса

Чтобы определить вероятность события B при условии, что событие A уже произошло, используют формулу Байеса:

$$P(B \mid A) = \frac{P(B) \cdot P(A \mid B)}{P(A)}$$

В данной формуле вероятность $P(B \mid A)$ называется апостериорной, то есть определенной после того, как произошло событие A.

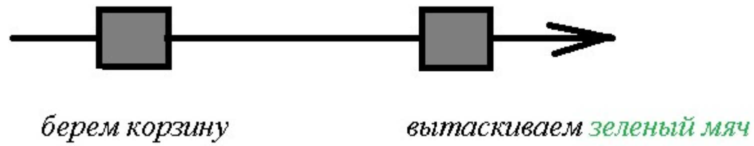
А вероятность $P(B)$ — априорной, определенной до испытания.

Смотри пример 11

Формула Байеса

Случайным образом выбирается корзина
и случайным образом из нее берут зеленый мяч
Какова вероятность того,что мяч окажется из 3 корзины?

A = вытащить зеленый мяч



B1 - взяли 1-ю корзину $P(B1) = 1/3$
B2 -взяли 2-ю корзину $P(B2) = 1/3$
B3- взяли 3-ю корзину $P(B3) = 1/3$

$P(A|B1) = 5/8$
$P(A|B2) = 0$
$P(A|B3) = 1$

$$P(B \mid A) = \frac{P(B) \cdot P(A \mid B)}{P(A)}$$

$$P(B_3|A) = P(B_3) * P(A|B_3) / P(A)$$

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A \mid B_1) + P(B_2) \cdot P(A \mid B_2) + \ldots + P(B_n) \cdot P(A \mid B_n)$$

$$P(A) = 1/3 * 5/8 + 1/3 * 0 + 1/3 * 1 = 5/24 + 1/3 = (5+8)/24 = 13/24$$

$$P(B_3|A) = P(B_3) * P(A|B_3) / P(A) = 1/3 * 1/ 13/24 = 1/3 / 13/24 = 24/39$$

Формула Байеса

Один из трех спортсменов стреляет и попадает в мишень

Вероятность попадания в мишень каждым спортсменом

P(A|B1)= 0.2 **P(A|B2)= 0.4** **P(A|B3)= 0.7**

событие А- попадание в мишень

B1- выстрел 1 спортсменом **P(B1)= 1/3**
B2 выстрел 2 спортсменом **P(B2) = 1/3**
B3- выстрел 3 спортсменом **P(B3) = 1/3**

$$P(B_3 | A) = \frac{P(B_3) \cdot P(A | B_3)}{P(A)}$$

Вероятность попадания в мишень находим по формуле полной вероятности

P(A) = (1/3*0.2 +1/3*0.4 + 1/3*0.7) =1/3 * (0.2+0.4+0.7)= 1/3*13/10 =13/30

Найти вероятность того,что выстрелы были произведены третьим спортсменом

P(B3|A)= 1/3 *0.7 / 13/30= 7/30 / 13/30 = 7/13

Итоги

1. Случайные события: достоверные и невозможные, совместные и несовместные
2. Зависимые и независимые события
3. Формулы комбинаторики
4. Формула Байеса
5. Формула полной вероятности