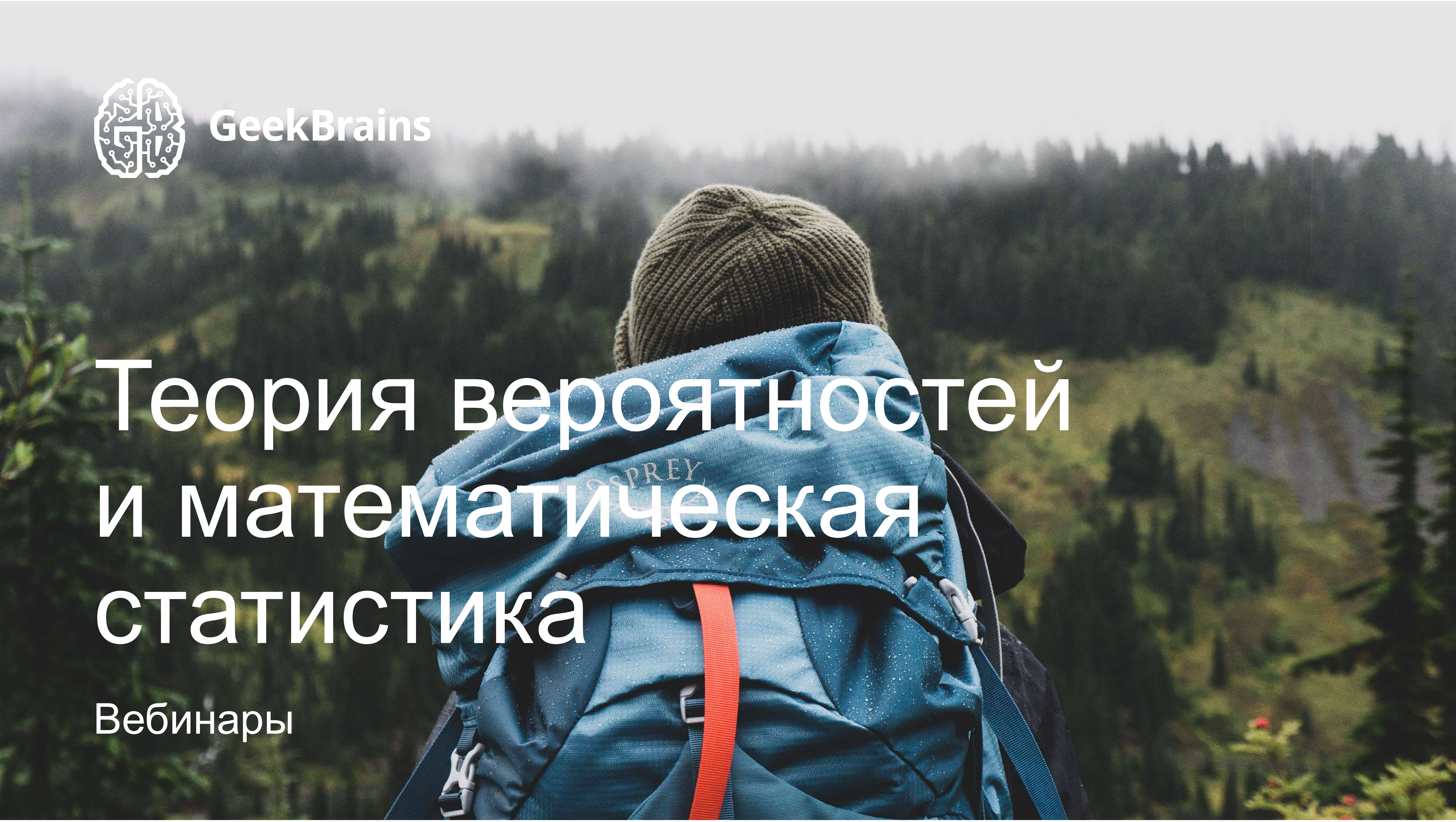


GeekBrains

Теория вероятностей и математическая статистика

Вебинары

GeekBrains

Урок 2

Теория вероятности и математическая статистика

Дискретные случайные величины. Закон распределения вероятностей. Биномиальный закон распределения. Распределение Пуассона

На этом уроке мы изучим:

1. Что такое дискретная случайная величина
2. Закон распределения вероятностей
3. Биномиальное распределение
4. Распределение Пуассона

Случайная величина - это величина, которая в результате испытания принимает только одно возможное значение.

GeekBrains

X – случайная величина (рост человека)

$x_1 \ldots\ x_n$ – значения СВ при n испытаниях

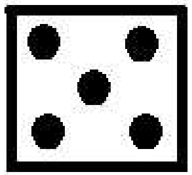
Наименование случайной величины X	x1	x2	x3	x4	x5	x6
Рост	167	173	162	168	181	158

Стоимость квартиры, руб.	Количество комнат	Площадь, кв. м
3500 000	2	58
4100 000	3	70
2200 000	1	42
6000 000	3	120
1800 000	1	38

СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА

ДИСКРЕТНАЯ

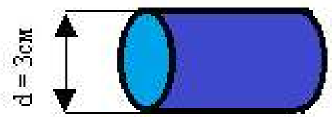
значения счетны



$x_1 = 6,$
$x_2 = 1$
$x_3 = 5$

НЕПРЕРЫВНАЯ

лежит в неком интервале



$x_1 =$ 3,02 см
$x_2 =$ 3,01 см
$x_3 =$ 3,00 см

Мы можем быть точными, на сколько нам позволяет точность прибора

Дискретная случайная величина

принимает отделенные друг от друга значения.

Например, в результате 100-кратного подбрасывания монетки орел может выпасть 50 или 51 раз (целое число в диапазоне от 0 до 100 включительно), но он не может выпасть 50 с половиной раз.

X - число выпавших орлов при подбрасывании 100 раз

X_1	X_2	………………	X_n
50	51	………………	78

Примеры дискретной случайной величины

1. Число выпадений орла при 100-кратном подбрасывании монетки.

X_1	X_2	....	X_n
50	51	....	78

Примеры дискретной случайной величины

X_1	X_2	……………	X_n
50	51	………………	78

1. Число выпадений орла при 100-кратном подбрасывании монетки.

2. Число пасмурных дней летом

Примеры дискретной случайной величины

3. Число метеоритов, упавших на Землю за определенный год.

1985 год	1986 год	1987год	………….	n -й год
0	1	0	………….	1

Закон распределения вероятностей случайной величины - это соответствие между возможными значениями этой величины и вероятностями, которые этим значениям соответствуют.

Иными словами **закон распределения вероятностей случайной величины** - это **модель**, которая описывает поведение этой случайной величины

5	5	4	5	3	4	5	4	5	4

5	5 раз	50%
4	4 раза	40%
3	1 раз	10%

Биномиальное распределение

Биномиальное распределение - один из примеров дискретного распределения.

k ,число наступления события, - это дискретная величина из отрезка [0, ***n***].

Случайная дискретная величина X имеет биномиальное распределение с переменными k,n и p,
если вероятность ее распределения задается следующим уравнением:

$$P_n(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

где ***p*** - это вероятность наступления события ***A*** в независимых испытаниях, а ***q = 1 – p***.

Эксперимент: 3 раза подбрасываем монетку (n=3)

X –число выпадания орла

1-ое подбрасывание - x_1,

2-е подбрасывание - x_2,

3-е подбрасывание - x_3

k дискретная величина из отрезка [0, ***n***].

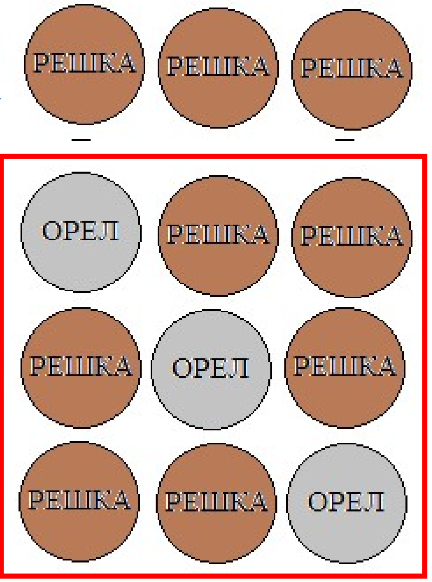
Варианты исхода такого эксперимента:

1) 0 - ни одного орла (X=k=0) $C_3^0 = \frac{3!}{0!(3-0)!} = 1$

2) 1 орел (X=k=1) $C_3^1 = \frac{3!}{1!(3-1)!} = 3$

3) 2 орла (X=k=2) $C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$

4) 3 орла (X=k=3) $C_3^3 = \frac{3!}{3!(3-3)!} = 1$



k=0 $C_3^0 = \frac{3!}{0!(3-0)!} = 1$ P(0) = 1/8= 0,125

k=1 $C_3^1 = \frac{3!}{1!(3-1)!} = 3$ P(1)=3 /8 =0,375

k=2 $C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$ P(2) =3/8= 0,375

k=3 $C_3^3 = \frac{3!}{3!(3-3)!} = 1$ P(3) =1/8= 0,125

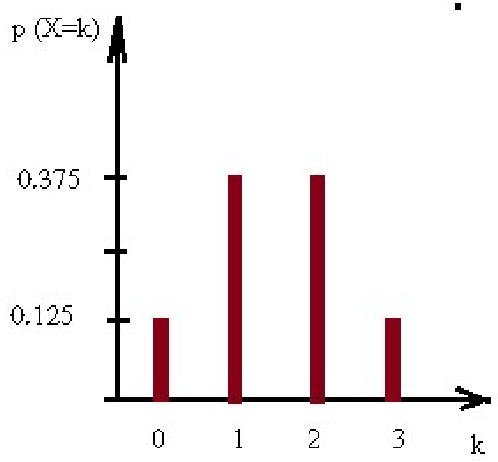
$C_{общ}$ = 1+3+3+1 =8

0,125+0,375+0,375+0,125=1

P(0)+P(1)+P(2)+P(3) = 1

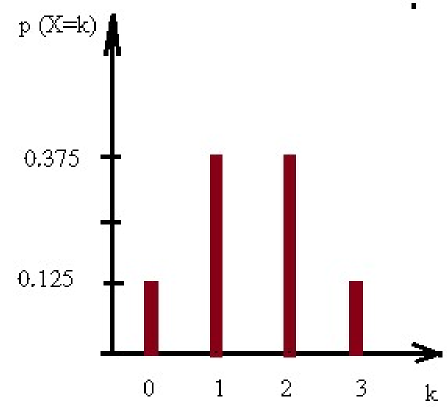
P(X) > 0

X(кол-во орлов)	0 орлов	1 орел	2 орла	3 орла
P(x)	0,125	0,375	0,375	0,125



Графическая модель нашей дискретной величины X

Биномиальное распределение



Формула Бернулли:

$$P_n(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

X	0	1	2	3
p	0.125	0.375	0.375	0.125

$$p(k=0) = C_n^k p^k q^{n-k} = C_3^0 p^0 q^3 = \frac{3!}{0!(3-0)!} \cdot 0.5^0 \cdot 0.5^3 = 1 \cdot 1 \cdot 0.125 = 0.125$$

$$p(k=1) = C_n^k p^k q^{n-k} = C_3^1 p^1 q^2 = \frac{3!}{1!(3-1)!} \cdot 0.5^1 \cdot 0.5^2 = 3 \cdot 0.5 \cdot 0.25 = 0.375$$

$$p(k=2) = C_n^k p^k q^{n-k} = C_3^2 p^2 q^1 = \frac{3!}{2!(3-2)!} \cdot 0.5^2 \cdot 0.5^1 = 3 \cdot 0.25 \cdot 0.5 = 0.375$$

$$p(k=3) = C_n^k p^k q^{n-k} = C_3^3 p^3 q^0 = \frac{3!}{3!(3-3)!} \cdot 0.5^3 \cdot 0.5^0 = 1 \cdot 0.125 \cdot 1 = 0.125$$

Распределение Пуассона

В том случае, если проводится большое количество испытаний ***n*** и при этом вероятность ***p*** появления события ***A*** в отдельном испытании мала, применяют формулу Пуассона для вычисления вероятности того, что событие произойдет ***m*** раз в ***n*** испытаний:

$$P_m \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$$

λ - среднее количество наступления события за определенную единицу измерений, например, потребителей /час, вкраплений / м^2

Распределение Пуассона показывает вероятность числа наступления события А за фиксированную единицу измерения

Задача: вероятность того, что среди писем, поступающих на определенный почтовый ящик, встретится письмо со спамом, составляет 0.01.
Найдите вероятность того, что среди 1000 писем, поступивших на него за месяц, будет 11 со спамом

Решение: $$P_m \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$$

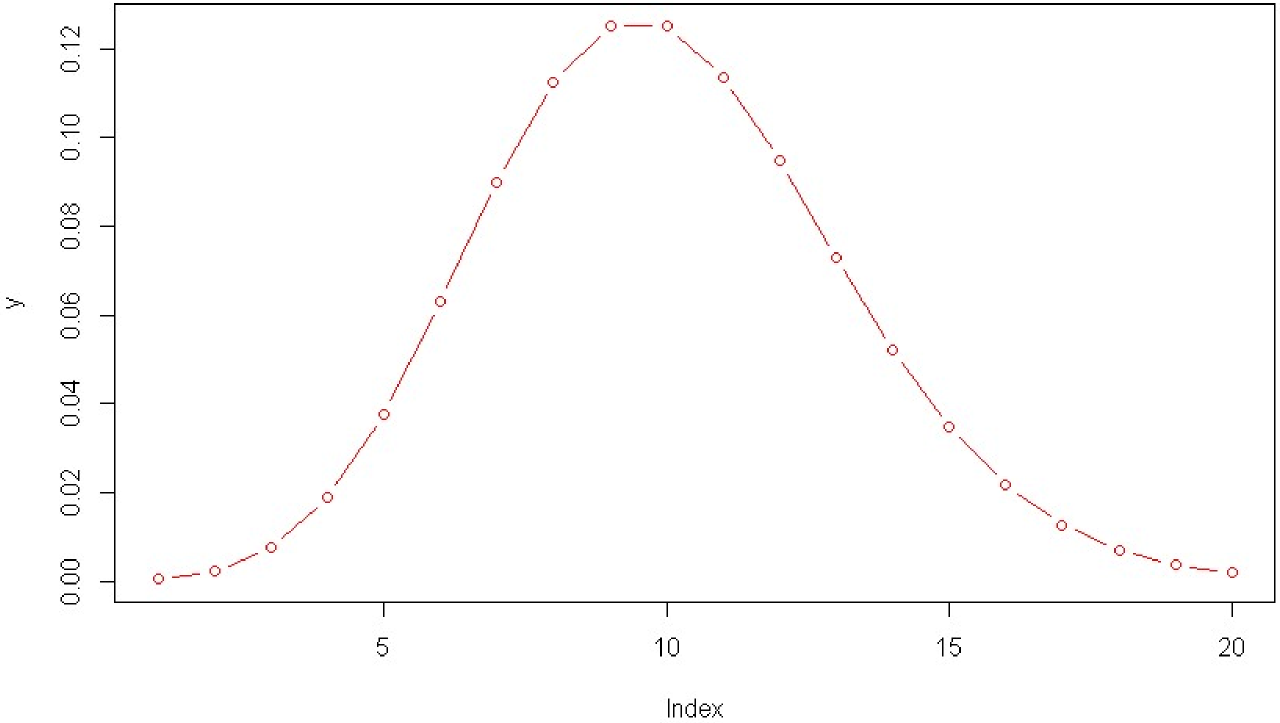
m=11, n=1000

λ = p*n = 0,01 *1000 =10 писем

$$e \approx 2,72$$

$$P(11) \approx \frac{10^{11}}{11!} e^{-10}$$

Ответ: P (11) $\approx$ 0.113



GeekBrains

Математическое ожидание и дисперсия для биномиального распределения

$$M(X) = np$$

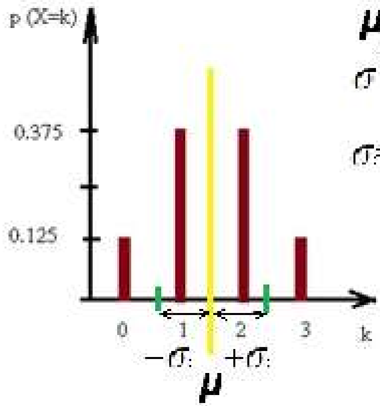
Математическое ожидание –это среднее значение случайной величины, при числе испытаний стремящихся к бесконечности

$$D(X) = npq$$

Дисперсия характеризует степень рассеянности значений случайной величины относительно ее математического ожидания

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

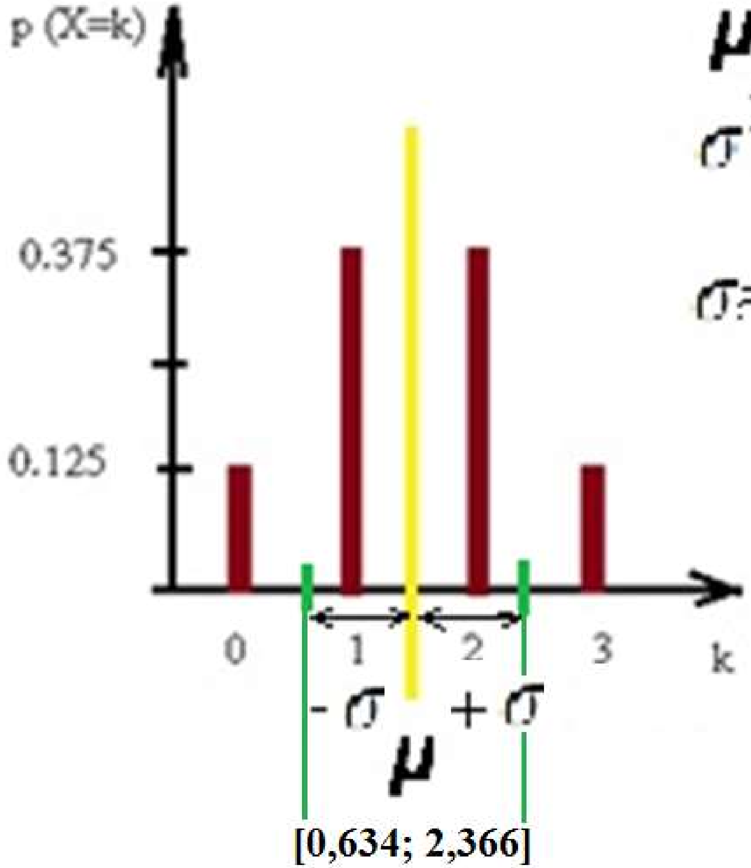
- **среднее квадратичное отклонение** показывает, насколько далеко наблюдения могут быть "разбросаны" относительно их среднего значения μ



$$\mu = M(X) = 3 * 1/2 = 1,5$$

$$\sigma^2 = D(X) = 3*1/2*1/2 = 0,75$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{0,75} = 0,866$$



$$\mu = M(X) = 3 * 1/2 = 1{,}5$$

$$\sigma^2 = D(X) = 3 * 1/2 * 1/2 = 0{,}75$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{0{,}75} = 0{,}866$$

1,5+0,866=2,366

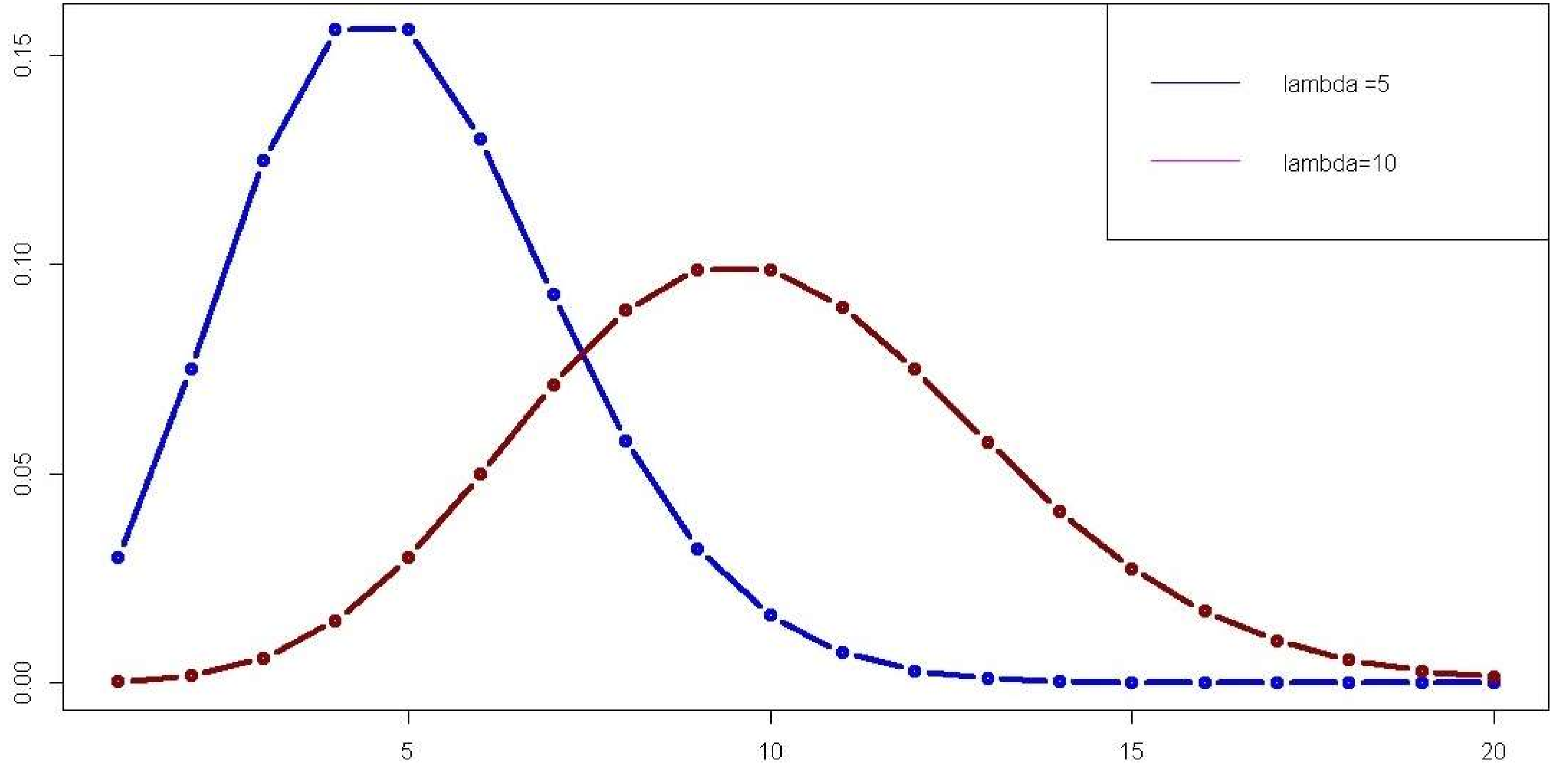
1,5-0,866=0,634

[0,634; 2,366]

Математическое ожидание и дисперсия для распределения Пуассона

$M(X) = n*p = \lambda$

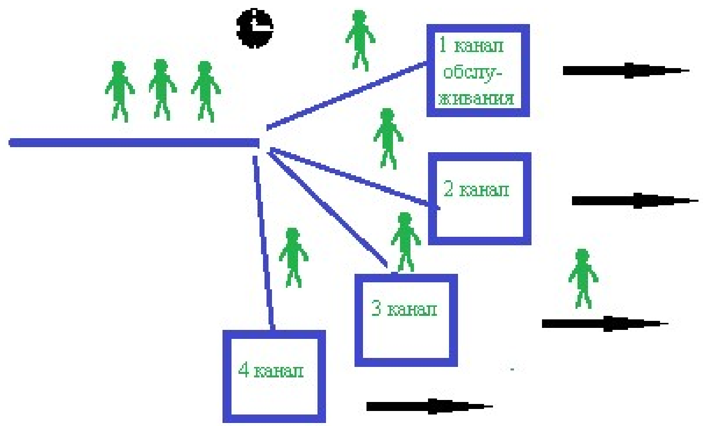
$D(X) = \lambda$



GeekBrains

Распределение Пуассона часто применяется в теории массового обслуживания (ТМО).

ТМО - это раздел теории вероятностей, в котором исследуется рациональный выбор структуры системы обслуживания и процесса обслуживания на основе изучения потоков требований на обслуживание, поступающих в систему и выходящих из неё, длительности ожидания и длины очередей.



Система массового обслуживания

λ - число клиентов / час

Как распознать биномиальное распределение и распределение Пуассона?

УСЛОВИЕ: ИСПЫТАНИЯ НЕЗАВИСИМЫЕ

Биномиальное	Пуассона
ДАНО	
"точная" вероятность P1+...+Pn =1	- "средняя" вероятность или среднее значение **на единицу измерения** человек/час, царапин/м2, самолетов/сутки, спам / 1000 писем и т.п. - число испытаний стремится к бесконечности - очень низкая вероятность наступления события А - математическое ожидание и дисперсия очень близки по своему значению
НАЙТИ	
вероятность наступления некого события А k раз из n (например,что орел выпадет 10 раз из 20 или,что биатлонист попадет 3 раза из 10 выстрелов, зная что его вероятность попадания 0,7)	вероятность наступления некого события А k раз на единицу измерения (В нашем примере единица измерения -1000 писем и на 1000 писем -10 спама. Мы искали вероятность, что на эту 1000 придет 11спама

Итоги

1. Дискретная случайная величина
2. Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины
3. Биномиальное распределение, формула Бернулли
4. Распределение Пуассона