Uso de ondas P y S para determinar el tensor de rigidez y su compilancia para rocas de simetria Ortotropica

Nataly Castillo Ruiz

April 12, 2014

Abstract

1 Introdución

Propiedades físicas como la rigidez de las rocas son herramienta utiles que permite hacer análisis mas detallados del comportamineto y estructuras presentes en estas. Cada propiedad esta relacionada con factores como la simetria de las caras del objeto, y su simetria interna, en el caso de las rocas, la horientación de sus cristales. El estudio y análisi de la variacion de ondas sísmicas permite relacionar la velocidad de las ondas, tanto primarias como secundarias, con los tensores de esfuerzo σ_{ij} y tencin ε_{ij} los cuales a su vez estan relacionados atravz de la rigidez C_{ijkl}.

$$\sigma_{ij} = \varepsilon_{ij} * C_{ijkl} \tag{1}$$

$$\varepsilon_{ij} = \sigma_{ij} * S_{ijkl} \tag{2}$$

La rigidez C_{ijkl} es la relación entre la fuerza aplicada y deformación. Dependiendo de los grados de libertar es expresada en forma de tensor. La inversa de la rigidez es llamada compilancia la cual esta definida como $S_{ijkl} = \dfrac{1}{C_{ijkl}}$.

Las relaciones anteriores se utiliza en el momento de analizar el movimiento y la deformacin de un material continuo y elstico. Para lo cual se recurre a las ecuaciones de Naviers las cuales permitiran relacionar la rigidez con las ondas sísmicas. Para ello se calcula la sumatoria de fuerzas en terminos de desplazamiento. Por ejemplo en una direccin j particular esto se vera:

$$\rho\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} = \rho X_j + (\mu - \lambda)\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_k} + \mu\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k^2} \tag{3}$$

Donde:
$\rho\dfrac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}$ Densidad * aceleracioń
ρX_j Fuerzas de cuerpo
$(\mu - \lambda)\dfrac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_k} + \mu\dfrac{\partial^2 u_j}{\partial x_k^2}$ Fuerzas de superficie

Debido a que se está trabajando en medio continuo, las fuerzas de cuerpo como gravedad son despreciadas. Y gracias a las propiedades de las ondas p (las cuales se propagan en una sola direccin) se puede decir que en la ecuacin anterior j = k simplificando la ecuación anterior dándonos:

$$\rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = (2\mu - \lambda)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \tag{4}$$

Donde $j, k = 1$ y comparandolo con la ecuacion de onda nos deja que $V_p^2 = \dfrac{(2\mu - \lambda)}{\rho}$.

Por otro lado el movimiento de las ondas secundarias(s) es diferente ya que la onda se propaga en dos direcciones. Asi que para medirlas, solo se tiene en cuenta la direccin, y nuevamente se eliminan las fuerzas de cuerpo debido a que se trabaja en medio continuo. Ya con los paremetros anteriores tenemos que por lo que la ecuacin de movimiento es :

$$\rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} \tag{5}$$

Donde $j, k = 1$
$V_s^2 = \frac{\mu}{\rho}$

2 Tipos de simetrias en rocas

La simetria de las muestras de estudio hace que el numero de variables en el tensor de rigidez disminuya. El caso mas general y sencillo es para materiales isotropicos.

$$C_{ijkl} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_6 \end{bmatrix} \tag{6}$$

En este trabajo las muestras analizadas (numero de muestras, zona) se consideraron ortotrópicas. Un material ortotropico es aquel que tiene la particularidad de (tenes isotropia en dos ejes y anisotropia entre el plano descrito por los ejes mencionados y el tercer eje) (por qué se discutira en la proxima entrega). El tensor de rigidez y su compilancia tambien pueden ser expresados en terminos de el coeficiente de Poissons̀ y y el modulo de Young de la forma: (imag.2)

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & \text{-}\frac{\nu_{yx}}{Ey} & \text{-}\frac{\nu_{zx}}{Ez} & 0 & 0 & 0 \\ \text{-}\frac{\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & \text{-}\frac{\nu_{zy}}{Ez} & 0 & 0 & 0 \\ \text{-}\frac{\nu_{xz}}{E_x} & \text{-} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} \tag{7}$$

Para este tipo de simetria se toma encuenta que $-\frac{\nu_{yx}}{Ey} = -\frac{\nu_{xy}}{Ex}$, $-\frac{\nu_{zx}}{Ez} = -\frac{\nu_{xz}}{E_x}$ y $-\frac{\nu_{yz}}{E_y} = -\frac{\nu_{zy}}{Ez}$ dejando solo 9 terminos.

Para obtener los ν y E se tienen las siguientes relaciones: retomando las ecuaciones de $\mu_r = V_{pr}^2 * \rho$ Y sabiendo que el módulo de rigidez tambien es expresado de la forma:

$$\tau = G_\gamma \tag{7}$$

El significado de la la constante de Lamé's μ es igual al modulo de rigidez G

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \mu \tag{7}$$

Con lo valores de μ conocidoa y los coeficientes de Poissons̀ para x, y y z se puede obtener el modulo de Youngs̀

$$E = \mu * 2(1+\nu) \tag{7}$$

Y ya con estos se puede conocer El tensor de rigidez reemplazando.

3 Modelacion de las constantes de Lamé s̀

En las secciones anteriores se pudo observar los casos generales para obtener la compilancia de las muestras Pero los valores que se tienen de V_s y V_s van cambiando a medida que se aumenta la preción para el caso numero uno. (Tablas de resultados) con los valores de las velocidades y expreciones de los tensores.

(Aqui va la explicacion del metodo numerico que se desarrollara)

4 Graficas de temperaturas y calculo de los modulos de estres

Apartir de los 500MP se empieza a considerar que los cambios de precion no arrojaban datos considerables para los modulos por lo que se empezo a medir a presion constante y con cambio de Temperaturas. Debidoa que ahora consideramos propiedades que cambian bajo la influencia de la tempeatura las ecuaciones quedad:

$$\sigma_{ij} = \varepsilon_{ij} * C_{ijkl} - \beta * (\theta - \theta_0) \tag{7}$$

Donde: β es el tensor de propiedades termicas. θ campo de temperatura θ_0 temperatura en el $t = o$

Para efectos del presente trabajo no se considerara la variacion de la velocodad con el aumento de la temperatura sino solo dos puntos representativos.

(graficas y calculos)

5 Otra forma de calcular los coeficientes de la rigidz y complilancia

Si se tiene que:

$$\sigma_{ij} = \mu(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \partial u_j \partial x_i) + \lambda \delta_{ij} \theta \tag{7}$$

Donde:

σ_{ij} = Al esfuerxo en las direcciones ij

$$\delta_{ij} = \Bigg/ \begin{array}{ll} 1 & \text{Si i !=j} \\ 0 & \text{Si i=j} \end{array}$$

θ = es el invariante.

Y sabiendo que $\varepsilon_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \partial u_j \partial x_i$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} \tag{7}$$

Una forma de hacerlo para i=j, es:

$$\sigma_{11} = \mu_1(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}) + \lambda \delta_{11} \theta \tag{7}$$

entonces:

$$\sigma_{11} = \sigma_1 = \mu_1(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}) = 2\mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \tag{7}$$

por lo que para σ_{22} y σ_{33} queda

$$\sigma_{22} = \sigma_2 = \mu_2(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}) = 2\mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \tag{7}$$

$$\sigma_{33} = \sigma_3 = \mu_3(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}) = 2\mu_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \tag{7}$$

Mientras que para σ_{12} y σ_{23}

$$\sigma_{12} = \sigma_4 = \mu_4(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}) + \lambda \delta_{12} \theta \tag{7}$$

$$\sigma_{23} = \sigma_5 = \mu_5(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}) + \lambda \delta_{23} \theta \tag{7}$$

$$\sigma_{31} = \sigma_6 = \mu_6(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}) + \lambda \delta_{31} \theta \tag{7}$$

hasta aqui tenemos las primera 6 componentes de nuestro tensor

$$\sigma_{31} = \sigma_6 = \mu_6(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}) + \lambda\delta_{31}\theta \tag{7}$$

6 Resultados

7 Discución

8 Conclucione

References

[1] Y.Guéguen, A.Schubnel.(2003). Elastic wave velocities and permability of cracked rocks.Paris: Department of terre Atmosphere ocean, Ecole Normale Superieure, 24 Rue Lhommmond. http://serc.carleton.edu/NAGTWorkshops/mineralogy/mineral_physics/tensors.html

[2]