Алгебра матриц

Операции над матрицами

- Сложение матриц
- Разность матриц
- Умножение матрицы на число
- Умножение матриц
- Транспонирование матрицы
- Обратная матрица
- Степень матрицы

Сложение и разность матриц

Суммой двух матриц $A=[a_{ij}]$ и $B=[b_{ij}]$ одинакового типа называется матрица $C=[c_{ij}]$ того же типа, элементы которой c_{ij} равны суммам соответствующих элементов a_{ij} и b_{ij} матриц A и B, т. е. $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$. Таким образом,

$$A+B=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Из определения суммы матриц непосредственно вытекают следующие ее свойства:

1) $A+(B+C)=(A+B)+C$;
2) $A+B=B+A$;
3) $A+0=A$.

Аналогично определяется *разность матриц*

$$A-B=\begin{bmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \dots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \dots & a_{2n}-b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \dots & a_{mn}-b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Умножение матрицы на число

Произведением матрицы $A=[a_{ij}]$ на число α (или произведением числа α на матрицу A) называется *матрица*, элементы которой получены умножением всех элементов матрицы A на число α, т. е.

$$A\alpha=\alpha A=\begin{bmatrix}\alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n}\\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn}\end{bmatrix}.$$

Из определения произведения числа на матрицу непосредственно вытекают следующие его свойства:

1) $1A=A$;
2) $0A=0$;
3) $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$;
4) $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$;
5) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

(здесь A и B — матрицы; α и β — числа).

Умножение матрицы на число

- Заметим, что если матрица – квадратная порядка n, то

$$\det \alpha A = \alpha^n \det A.$$

- Матрица

$$-A = (-1)\, A$$

называется *противоположной*. Нетрудно видеть, что если матрицы A и B одинаковых типов, то

$$A - B = A + (-B).$$

Умножение матриц

- Пусть

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2q} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{p1} & b_{p2} & \dots & b_{pq} \end{bmatrix}$$

- матрицы типов соответственно $m \times n$ и $p \times q$.

Если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B, то для этих матриц определена матрица C типа $m \times q$ – произведение

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1q} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2q} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mq} \end{bmatrix}, \quad c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} \quad (i = 1,\ 2,\ \dots,\ m;\ j = 1,\ 2,\ \dots,\ q).$$

Умножение матриц

Пример 1.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 8 & 1 \\ 1 & -4 & 0 & 3 \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$AB = \begin{bmatrix} 3\cdot 2+2\cdot 1+8\cdot 0+1\cdot 3 & 3\cdot(-1)+2\cdot(-3)+8\cdot 1+1\cdot 1 \\ 1\cdot 2+(-4)\cdot 1+0\cdot 0+3\cdot 3 & 1\cdot(-1)+(-4)\cdot(-3)+0\cdot 1+3\cdot 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 7 & 14 \end{bmatrix}.$$

Умножение матриц

Пример 2.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot1+2\cdot2+3\cdot3 \\ 4\cdot1+5\cdot2+6\cdot3 \\ 7\cdot1+8\cdot2+9\cdot3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 32 \\ 50 \end{bmatrix}.$$

Матричное произведение обладает следующими свойствами:

1) $A(BC)=(AB)C$; 3) $(A+B)C=AC+BC$;
2) $\alpha(AB)=(\alpha A)B$; 4) $C(A+B)=CA+CB$

(A, B и C — матрицы; α — число).

Равенства 1) — 4) понимаются в том смысле, что если одна из их частей существует, то другая часть также существует и они равны между собой.

Умножение матриц

Произведение двух матриц не обладает переместительным свойством, т. е., вообще говоря, $AB \neq BA$, в чем можно убедиться на примерах.

Пример 3.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$AB = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{bmatrix},$$

т. е. здесь $AB \neq BA$.

Транспонирование матрицы

Заменив в матрице A типа $m \times n$ строки соответственно столбцами, получим так называемую транспонированную матрицу

$$A' = A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

В частности, для вектора-строки $\boldsymbol{a} = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]$ транспонированной матрицей является вектор-столбец

$$\boldsymbol{a}' = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{bmatrix}$$

Свойства транспонированной матрицы

Транспонированная матрица обладает следующими свойствами:

1) дважды транспонированная матрица совпадает с исходной:

$$A'' = (A')' = A;$$

2) транспонированная матрица суммы равна сумме транспонированных матриц слагаемых, т. е.

$$(A+B)' = A' + B';$$

3) транспонированная матрица произведения равна произведению транспонированных матриц сомножителей, взятому в обратном порядке, т. е.

$$(AB)' = B'A'.$$

Обратная матрица

Определение 1. *Обратной матрицей* по отношению к данной называется матрица, которая, будучи умноженной как справа, так и слева на данную матрицу, дает единичную матрицу.

Для матрицы A обозначим обратную ей матрицу через A^{-1}. Тогда по определению имеем:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E, \tag{1}$$

где E — единичная матрица.

Нахождение обратной матрицы для данной называется *обращением* данной матрицы.

Определение 2. Квадратная матрица называется *неособенной*, если определитель ее отличен от нуля.

В противном случае матрица называется *особенной*, или *сингулярной*.

Теорема. *Всякая неособенная матрица имеет обратную матрицу*.

Нахождение обратной матрицы

Составим для матрицы A так называемую *присоединенную* (или *союзную*) матрицу

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}, \qquad (2)$$

где A_{ij}—алгебраические дополнения (миноры со знаками) соответствующих элементов a_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$).

Заметим, что алгебраические дополнения элементов строк помещаются в соответствующих столбцах, т. е. произведена операция транспонирования.

Разделим все элементы последней матрицы на величину определителя матрицы A, т. е. на Δ:

$$A^* = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{bmatrix}. \qquad (3)$$

Единственность обратной матрицы

Замечание 1. Для данной матрицы A ее обратная матрица A^{-1} единственна. Более того, всякая правая обратная (левая обратная) матрица матрицы A совпадает с ее обратной матрицей A^{-1} (если последняя существует).

Действительно, если

$$AB = E,$$

то, умножая это равенство слева на A^{-1}, получим:

$$A^{-1}AB = A^{-1}E$$

или

$$B = A^{-1}.$$

Аналогично доказывается, что если

$$CA = E,$$

то, $C = A^{-1}$.

Пример нахождения обратной матрицы

Пример. Для матрицы

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

найти обратную матрицу.

Решение. Так как определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -5 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix}=1\neq 0.$$

то матрица A неособенная.

Составим присоединенную матрицу

$$\tilde{A}=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Разделим все элементы матрицы A на $\Delta=1$ и получим:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Свойства обратной матрицы

1. *Определитель обратной матрицы равен обратной величине определителя исходной матрицы.* Действительно, пусть

$$A^{-1}A = E.$$

Учитывая, что определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению определителей этих матриц, получим:

$$\det A^{-1} \det A = \det E = 1.$$

Следовательно,

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

Свойства обратной матрицы

2. *Обратная матрица произведения квадратных матриц равна произведению обратных матриц сомножителей, взятому в обратном порядке, т. е.*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

В самом деле,

$$AB\,(B^{-1}A^{-1}) = A\,(BB^{-1})\,A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E$$

и

$$(B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}\,(A^{-1}A)\,B = B^{-1}EB = B^{-1}B = E.$$

Значит, $B^{-1}A^{-1}$ есть обратная матрица для AB.

В более общем случае

$$(A_1A_2\ldots A_p)^{-1} = A_p^{-1}A_{p-1}^{-1}\ldots A_1^{-1}.$$

Свойства обратной матрицы

3. *Транспонированная обратная матрица равна обратной* **от** *транспонированной данной матрицы:*

$$(A^{-1})' = (A')^{-1}.$$

Действительно, транспонируя основное соотношение $A^{-1}A = E$, получим:

$$(A^{-1}A)' = A'\,(A^{-1})' = E' = E.$$

Отсюда, умножая последнее равенство слева на матрицу $(A')^{-1}$, будем иметь:

$$(A')^{-1}\,A'\,(A^{-1})' = (A')^{-1}\,E$$

или

$$(A^{-1})' = (A')^{-1},$$

что и требовалось доказать.

Степень матрицы

Пусть A — квадратная матрица. Если p — натуральное число, то полагают:

$$\underbrace{AA\ldots A}_{p\text{ раз}} = A^p.$$

Дополнительно уславливаются, что $A^0 = E$, где E — единичная матрица. Если матрица A неособенная, то можно ввести отрицательную степень, определив ее соотношением

$$A^{-p} = (A^{-1})^p.$$

Для степеней матрицы с целыми показателями справедливы обычные правила:

1) $A^p A^q = A^{p+q}$;
2) $(A^p)^q = A^{pq}$.

Неквадратную матрицу, очевидно, в степень возводить нельзя.

Степень диагональной матрицы

Пример 1. Пусть

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$A^p = \begin{bmatrix} \alpha_1^p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2^p & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n^p \end{bmatrix}.$$

Рациональные функции матрицы

Пусть

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix}$$

— произвольная квадратная матрица порядка n. По аналогии с формулами элементарной алгебры определяются целые рациональные функции матрицы X:

$$P(X) = A_0X^m + A_1X^{m-1} + \dots + A_mE \quad (\textit{правый полином});$$

$$\tilde{P}(X) = X^mA_0 + X^{m-1}A_1 + \dots + EA_m \quad (\textit{левый полином}),$$

где A_ν ($\nu = 0, 1, \dots, m$) — матрицы типа $m \times n$ или соответственно типа $n \times m$ и E — единичная матрица порядка n.

Дробные рациональные функции

Можно ввести также *дробные рациональные функции* матрицы X, определив их формулами

$$R_1(X) = P(X)\,[Q(X)]^{-1}$$

и

$$R_2(X) = [Q(X)]^{-1}\,P(X),$$

где $P(X)$ и $Q(X)$ — матричные полиномы и $\det[Q(X)] \neq 0$.

Пример рациональной матричной функции

Пример. Пусть

$$P(X) = X^2 + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} X - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

где X — переменная матрица второго порядка. Найти $P\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)$.

Решение. Имеем:

$$P\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Клеточные (блочные) матрицы

- Сложение матриц
- Разность матриц
- Умножение матрицы на число
- Умножение матриц
- Обратная матрица

Определение клеточной матрицы

Пусть дана некоторая матрица A. Разобьем ее на матрицы низших порядков (*клетки* или *блоки*) с помощью горизонтальных и вертикальных перегородок, идущих вдоль всей матрицы. Например,

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right],$$

где клетками являются матрицы

$$P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}; \quad Q = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix}; \quad R = [a_{31} \;\; a_{32}]; \; S = [a_{33}].$$

Тогда матрицу A можно рассматривать как сложную матрицу, элементами которой служат клетки:

$$A = \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix}.$$

Определение квазидиагональной матрицы

Матрица, разбитая на клетки, называется *клеточной* или *блочной*. Понятно, что разбиение матрицы на клетки может быть осуществлено различными способами. Частным случаем клеточных матриц являются *квазидиагональные* матрицы

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{A_1} & & \\ & \boxed{\ddots} & \\ & & \boxed{A_s} \end{bmatrix},$$

где клетки A_i $(i = 1, \ldots, s)$ есть квадратные матрицы, вообще говоря, различных порядков, а вне клеток стоят нули. Отметим, что

$$\det A = \det A_1 \ldots \det A_s.$$

Определение окаймлённой матрицы

Другой важный частный случай клеточных матриц представляют *окаймленные матрицы*

$$A_n = \left[\begin{array}{c|c} A_{n-1} & U_n \\ \hline V_n & a_{nn} \end{array}\right],$$

где

$$A_{n-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,\,n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,\,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1,\,1} & a_{n-1,\,2} & \dots & a_{n-1,\,n-1} \end{bmatrix}$$

— матрица порядка $n-1$;

$$U_n = \begin{bmatrix} a_{1,\,n} \\ a_{2,\,n} \\ \cdots \\ a_{n-1,\,n} \end{bmatrix}$$ — матрица-столбец;

$V_n = [a_{n,1}\ \ a_{n,2} \dots a_{n,\,n-1}]$ — матрица-строка и a_{nn} — число.

Определение конформной клеточной матрицы

Клеточные матрицы одинакового типа и с одинаковым разбиением условимся называть *конформными*. Удобство клеточных матриц состоит в том, что действия над ними совершаются формально по тем же правилам, что и над обыкновенными матрицами.

Сложение и вычитание клеточных матриц

Если клеточные матрицы

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \dots & A_{1q} \\ . & . \, . \, . \, . & . \\ A_{p1} & A_{p2} \dots & A_{pq} \end{bmatrix} \tag{1}$$

и

$$B=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \dots & B_{1s} \\ . & . \, . \, . \, . & . \\ B_{r1} & B_{r2} \dots & B_{rs} \end{bmatrix} \tag{2}$$

конформны, т. е. $p=r$; $q=s$ и клетки A_{ij} и B_{ij} имеют одинаковый тип, то

$$A+B=\begin{bmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} \dots & A_{1q}+B_{1q} \\ . & . \, . \, . \, . \, . \, . & . \\ A_{p1}+B_{p1} & A_{p2}+B_{p2} \dots & A_{pq}+B_{pq} \end{bmatrix}.$$

Умножение клеточной матрицы на число

Если A — клеточная матрица (1) и α — число, то имеем:

$$\alpha A = \begin{bmatrix} \alpha A_{11} & \alpha A_{12} \ldots \alpha A_{1q} \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ \alpha A_{p1} & \alpha A_{p2} \ldots \alpha A_{pq} \end{bmatrix}.$$

Умножение матриц

Пусть клеточные матрицы A и B имеют структуру соответственно (1) и (2), причем $q=r$.

Предположим, что все клетки A_{ij} и B_{jk} ($i=1, 2, \ldots, p$; $j=1, 2, \ldots, q$; $k=1, 2, \ldots, s$) таковы, что число столбцов клетки A_{ij} равняется числу строк клетки B_{jk}. В частном случае, если все клетки A_{ij} и B_{ij} — квадратные и имеют один и тот же порядок, то это предположение заведомо выполняется. Тогда можно доказать, что произведение матриц A и B есть клеточная матрица

$$C=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \ldots C_{1s} \\ C_{21} & C_{22} \ldots C_{2s} \\ \ldots & \ldots \\ C_{p1} & C_{p2} \ldots C_{ps} \end{bmatrix},$$

где $C_{ik}=A_{i1}B_{1k}+A_{i2}B_{2k}+\ldots+A_{iq}B_{qk}$ ($i=1, 2, \ldots, p$; $k=1, 2, \ldots, s$), т. е. матрицы A и B перемножаются так, как будто на месте клеток находятся числа

Пример умножения матриц

Пример. Перемножая клеточные матрицы

$$A=\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \leftarrow 2 \rightarrow & \leftarrow 1 \rightarrow \end{array} \\ \updownarrow 2 & \left[\begin{array}{c|c} P & Q \end{array}\right] \end{array}$$

и

$$B=\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \leftarrow 1 \rightarrow & \leftarrow 2 \rightarrow \end{array} \\ \begin{array}{c} \updownarrow 2 \\ \updownarrow 1 \end{array} & \left[\begin{array}{c|c} R & S \\ \hline T & U \end{array}\right] \end{array},$$

получим матрицу вида

$$AB=\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \leftarrow 1 \rightarrow & \leftarrow 2 \rightarrow \end{array} \\ \updownarrow 2 & \left[\begin{array}{c|c} PR+QT & PS+QU \end{array}\right] \end{array}.$$

Умножение и сложение квазидиагональных матриц

Особенно просто производится сложение и умножение квазидиагональных матриц. Если

$$A=\begin{bmatrix} \boxed{A_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{A_s} \end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix} \boxed{B_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{B_s} \end{bmatrix}$$

и порядки матриц A_i, B_i $(i=1, 2, \ldots, s)$ одинаковы, то, очевидно, имеем:

$$A+B=\begin{bmatrix} \boxed{A_1+B_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{A_s+B_s} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad AB=\begin{bmatrix} \boxed{A_1B_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{A_sB_s} \end{bmatrix}.$$

Обращение матриц с помощью разбивания на клетки

Пусть для данной неособенной числовой матрицы A требуется найти обратную матрицу A^{-1}. Разобьем матрицу A на четыре клетки:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11}(r, r) & \alpha_{12}(r, s) \\ \alpha_{21}(s, r) & \alpha_{22}(s, s) \end{bmatrix}.$$

Здесь в скобках указаны порядки соответствующих клеток, причем $r + s = n$, где n — порядок матрицы A. Будем искать обратную матрицу A^{-1} также в виде четырехклеточной матрицы

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \beta_{11}(r, r) & \beta_{12}(r, s) \\ \beta_{21}(s, r) & \beta_{22}(s, s) \end{bmatrix}.$$

Обращение матриц с помощью разбивания на клетки

Тогда, так как $A^{-1}A = E$, то, перемножая эти матрицы, получим четыре матричных уравнения

$$\left.\begin{aligned} \beta_{11}\alpha_{11} + \beta_{12}\alpha_{21} &= E_r, \\ \beta_{11}\alpha_{12} + \beta_{12}\alpha_{22} &= 0, \\ \beta_{21}\alpha_{11} + \beta_{22}\alpha_{21} &= 0, \\ \beta_{21}\alpha_{12} + \beta_{22}\alpha_{22} &= E_s, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где E_r и E_s — единичные матрицы соответствующих порядков. Решив эту систему, определим клетки матрицы A^{-1}. Для решения системы (1) используем способ исключения неизвестных. Умножая справа первое уравнение системы (1) на $\alpha_{11}^{-1}\alpha_{12}$ и вычитая из результата умножения второе уравнение этой системы, получим:

$$\beta_{12}(\alpha_{21}\alpha_{11}^{-1}\alpha_{12} - \alpha_{22}) = \alpha_{11}^{-1}\alpha_{12}.$$

Обращение матриц
с помощью разбивания на клетки

Отсюда находим:

$$\beta_{12} = -\alpha_{11}^{-1}\alpha_{12}\left(\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{11}^{-1}\alpha_{12}\right)^{-1}$$

и

$$\beta_{11} = \alpha_{11}^{-1} - \beta_{12}\alpha_{21}\alpha_{11}^{-1}.$$

Аналогично из третьего и четвертого уравнений системы (1) будем иметь:

$$\beta_{22} = \left(\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{11}^{-1}\alpha_{12}\right)^{-1}$$

и

$$\beta_{21} = -\beta_{22}\alpha_{21}\alpha_{11}^{-1}.$$

Обращение матриц с помощью разбивания на клетки

Здесь, конечно, предполагается, что соответствующие операции имеют смысл. Введем в рассмотрение матрицы

$$\left.\begin{aligned} &X=\alpha_{11}^{-1}\alpha_{12}, \quad Y=\alpha_{21}\alpha_{11}^{-1}, \\ &\theta=\alpha_{22}-\alpha_{21}X=\alpha_{22}-Y\alpha_{12}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Тогда формулы для клеток β_{ij} $(i,\ j=1,\ 2)$ можно записать проще:

$$\beta_{11}=\alpha_{11}^{-1}+X\theta^{-1}Y,$$

$$\beta_{12}=-X\theta^{-1},$$

$$\beta_{21}=-\theta^{-1}Y,\ \ \beta_{22}=\theta^{-1}.$$

Обращение матриц с помощью разбивания на клетки

Формулы (1) определяют клетки матрицы A^{-1} при условии, что α_{11}^{-1} и θ^{-1} существуют. Вычисления удобно расположить в виде следующей схемы

	α_{21}	α_{22}
$X=\alpha_{11}^{-1}\alpha_{12}$	α_{11}^{-1}	α_{12}
θ^{-1}	$Y=\alpha_{21}\alpha_{11}^{-1}$	$\theta=\alpha_{22}-Y\alpha_{12}$

и

$$A^{-1}=\left[\begin{array}{c|c} \alpha_{11}^{-1}+X\theta^{-1}Y & -X\theta^{-1} \\ \hline -\theta^{-1}Y & \theta^{-1} \end{array}\right].$$

Этот метод полезно применять, если матрица α_{11} легко обратима.

Пример нахождения обратной матрицы

Пример 1. Обратить матрицу

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ -3 & 4 & 0 & 2 \\ -5 & -6 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Решение. Положим

$$\alpha_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \alpha_{12} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix};$$

$$\alpha_{21} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}; \quad \alpha_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Пример нахождения обратной матрицы

Применяя приведенную выше схему, будем иметь:

			-3	4	0	2
			-5	-6	2	0
X	3	-4	1	0	3	-4
	5	6	0	1	5	6
$\theta^{-1}\ \frac{1}{1422}$	16	34	-3	4	-11	-34
	-47	-11	-5	-6	47	16
			Y		θ	

Пример нахождения обратной матрицы

Отсюда

$$X\theta^{-1} = \frac{1}{1422}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 16 & 34 \\ -47 & -11 \end{bmatrix} = \frac{1}{1422}\begin{bmatrix} 236 & 146 \\ -202 & 104 \end{bmatrix},$$

$$\theta^{-1}Y = \frac{1}{1422}\begin{bmatrix} 16 & 34 \\ -47 & -11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -5 & -6 \end{bmatrix} = \frac{1}{1422}\begin{bmatrix} -218 & -140 \\ 196 & -122 \end{bmatrix},$$

$$X\theta^{-1}Y = \frac{1}{1422}\begin{bmatrix} 236 & 146 \\ -202 & 104 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -5 & -6 \end{bmatrix} = \frac{1}{1422}\begin{bmatrix} -1438 & 68 \\ 86 & -1432 \end{bmatrix}.$$

Для контроля произведение $X\theta^{-1}Y$ вычисляем двумя способами:

$$X\theta^{-1}Y = (X\theta^{-1})Y \quad \text{и} \quad Y\theta^{-1}Y = X(\theta^{-1}Y).$$

По общей схеме имеем:

$$A^{-1} = \frac{1}{1422}\left[\begin{array}{cc|cc} -16 & 68 & -236 & -146 \\ 86 & -10 & 202 & -104 \\ \hline 218 & 140 & 16 & 34 \\ -196 & 122 & -47 & -11 \end{array}\right].$$

Метод окаймления

- Частным случаем изложенного метода является так называемый метод окаймления.
- Пусть да матрица $A = \begin{bmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \dots\dots \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{bmatrix}$. Образуем последовательность

$$S_1 = [a_{11}];$$

$$S_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix};$$

$$S_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{S_2}} & a_{13} \\ & & a_{23} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right];$$

$$S_4 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} & & & a_{14} \\ & S_3 & & a_{24} \\ & & & a_{34} \\ \hline a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array}\right]$$

Каждая следующая матрица получена из предыдущей при помощи окаймления

Метод окаймления

Обратная ко второй из этих матриц находится непосредственно:

$$S_2^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{a_{22}}{\Delta} & -\frac{a_{12}}{\Delta} \\ -\frac{a_{21}}{\Delta} & \frac{a_{11}}{\Delta} \end{bmatrix},$$

где

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

При помощи матрицы S_2^{-1}, применив к S_3 приведенную выше схему вычисления, можно получить S_3^{-1}, а затем при помощи S_3^{-1} аналогично получить S_4^{-1} и, наконец, $S_n^{-1} = A^{-1}$.

Пример нахождения обратной матрицы

Пример 2. Найти обратную матрицу для матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Решение. Здесь

$$S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = S_2^{-1}.$$

Пример нахождения обратной матрицы

Схема вычисления S_3^{-1} имеет следующий вид:

$$
\begin{array}{r|r|cc|r|}
\cline{3-5}
\multicolumn{2}{c|}{} & 3 & 1 & 0 \\
\cline{2-5}
X & 13 & 1 & 4 & 1 \\
 & -3 & 0 & -1 & 3 \\
\cline{2-5}
\theta^{-1} & -\frac{1}{36} & 3 & 11 & -36 \\
\cline{2-5}
\multicolumn{2}{c}{} & \multicolumn{2}{c}{Y} & \multicolumn{1}{c}{0}
\end{array}
$$

$$
X\theta^{-1}Y = \begin{bmatrix} -\frac{13}{12} & -\frac{143}{36} \\ \frac{1}{4} & \frac{11}{12} \end{bmatrix}
\qquad
S_3^{-1} = \left[\begin{array}{cc|c} -\frac{1}{12} & \frac{1}{36} & \frac{13}{36} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} \\ \hline \frac{1}{12} & \frac{11}{36} & -\frac{1}{36} \end{array}\right].
$$

Пример нахождения обратной матрицы

Для вычисления S_4^{-1} служит следующая схема:

		1	-2	5	1
	$\frac{4}{9}$	$-\frac{1}{12}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{13}{36}$	3
X	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{12}$	-1
	$-\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{1}{36}$	2
θ^{-1}	$\frac{9}{22}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{31}{18}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{22}{9}$
			Y		θ

$$X\theta^{-1}Y = \begin{bmatrix} -\frac{1}{33} & \frac{31}{99} & \frac{7}{99} \\ -\frac{1}{22} & \frac{31}{66} & \frac{7}{66} \\ \frac{1}{132} & -\frac{31}{396} & -\frac{7}{396} \end{bmatrix}.$$

Пример нахождения обратной матрицы

Следовательно,

$$S_4^{-1} = A^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|c} -\frac{5}{44} & \frac{15}{44} & \frac{19}{44} & -\frac{2}{11} \\ \frac{9}{44} & \frac{17}{44} & \frac{1}{44} & -\frac{3}{11} \\ \frac{4}{44} & \frac{10}{44} & -\frac{2}{44} & \frac{1}{22} \\ \hline \frac{3}{44} & -\frac{31}{44} & -\frac{7}{44} & \frac{9}{22} \end{array}\right] = \frac{1}{44}\begin{bmatrix} -5 & 15 & 19 & -8 \\ 9 & 17 & 1 & -12 \\ 4 & 10 & -2 & 2 \\ 3 & -31 & -7 & 18 \end{bmatrix}.$$

Треугольные матрицы

- Произведение треугольных матриц
- Нахождение обратной матрицы через произведение треугольных матриц

Треугольные матрицы

Определение. Квадратная матрица называется *треугольной*, если элементы, стоящие выше (ниже) главной диагонали, равны нулю. Например,

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & t_{nn} \end{bmatrix},$$

где $t_{ij} = 0$ при $i > j$, есть верхняя треугольная матрица. Аналогично

$$T_1 = \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & \dots & 0 \\ t_{21} & t_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{bmatrix},$$

где $t_{ij} = 0$ для $j > i$, есть нижняя треугольная матрица.

Треугольные матрицы

Диагональная матрица является частным случаем как верхней, так и нижней треугольной матрицы. Определитель треугольной матрицы равен произведению ее диагональных элементов, а именно: если $T=[t_{ij}]$ — треугольная матрица, то очевидно, что $\det T = t_{11}t_{22}\ldots t_{nn}$. Поэтому треугольная матрица является неособенной только тогда, когда все ее диагональные элементы отличны от нуля.

Можно доказать, что: 1) сумма и произведение треугольных матриц одинакового типа и одной и той же структуры, т. е. одновременно только верхних или только нижних, есть также треугольные матрицы того же типа и общей структуры; 2) обратная матрица неособенной треугольной матрицы есть также треугольная матрица того же типа и структуры. Пользуясь последним обстоятельством мы легко можем обращать треугольную матрицу.

Пример обращение треугольной матрицы

Пример 1. Обратить матрицу

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}.$$

Решение. Положим

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}t_{11} & 0 & 0\\ t_{21} & t_{22} & 0\\ t_{31} & t_{32} & t_{33}\end{bmatrix}.$$

Перемножая матрицы A и A^{-1}, будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} t_{11}&=1, & t_{11}+2t_{21}+3t_{31}&=0,\\ t_{11}+2t_{21}&=0, & 2t_{22}+3t_{32}&=0,\\ 2t_{22}&=1, & 3t_{33}&=1. \end{aligned}\right\}$$

Пример обращение треугольной матрицы

Отсюда последовательно находим:

$$t_{11}=1; \qquad t_{21}=-\frac{1}{2}; \qquad t_{22}=\frac{1}{2};$$
$$t_{31}=0; \qquad t_{32}=-\frac{1}{3}; \qquad t_{33}=\frac{1}{3}.$$

Следовательно,

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Теорема о произведении треугольных матриц

Теорема. *Всякую квадратную матрицу*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

имеющую отличные от нуля главные диагональные миноры

$$\Delta_1 = a_{11} \neq 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0; \quad \dots; \quad \Delta_n = |A| \neq 0,$$

можно представить в виде произведения двух треугольных матриц различных структур (нижней и верхней), причем это разложение будет единственным, если заранее зафиксировать диагональные элементы одной из треугольных матриц (например, положить их равными 1).

Пример произведения треугольных матриц

Пример 2. Представить матрицу

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 14 \end{bmatrix}$$

в виде произведения двух треугольных матриц T_1 и T_2.

Решение. $A=T_1T_2$. Будем искать T_1 и T_2 в виде

$$T_1=\begin{bmatrix} t_{11} & 0 & 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} \text{ и } T_2=\begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} \\ 0 & 1 & r_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Имеем:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 14 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} t_{11} & t_{11}r_{12} & t_{11}r_{13} \\ t_{21} & t_{21}r_{12}+t_{22} & t_{21}r_{13}+t_{22}r_{23} \\ t_{31} & t_{31}r_{12}+t_{32} & t_{31}r_{13}+t_{32}r_{23}+t_{33} \end{bmatrix};$$

Пример произведения треугольных матриц

откуда

$$
\begin{array}{lll}
t_{11} = 1; & t_{11}r_{12} = -1; & t_{11}r_{13} = 2; \\
t_{21} = -1; & t_{21}r_{12} + t_{22} = 5; & t_{21}r_{13} + t_{22}r_{23} = 4; \\
t_{31} = 2; & t_{31}r_{12} + t_{32} = 4; & t_{31}r_{13} + t_{32}r_{23} + t_{33} = 14.
\end{array}
$$

Решив систему, получим:

$$
\begin{array}{lll}
t_{11} = 1; & t_{21} = -1; & t_{31} = 2; \\
t_{22} = 4; & t_{32} = 6; & t_{33} = 1; \\
r_{12} = -1; & r_{13} = 2; & r_{23} = \frac{3}{2}.
\end{array}
$$

Пример произведения треугольных матриц

Таким образом,

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

и

$$T_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Обратная матрица через произведение треугольных матриц

Пользуясь представлением квадратной матрицы A ($\det A \neq 0$) в виде произведения двух треугольных матриц, можно указать еще один способ вычисления обратной матрицы A^{-1}, а именно, если

$$A = T_1 T_2,$$

то

$$A^{-1} = T_2^{-1} T_1^{-1}.$$

Обратные матрицы для треугольных, как мы видели выше, находятся сравнительно просто.

Определители матрицы

- Элементарные преобразования
- Нахождение определителя матрицы через элементарные преобразования

Элементарные преобразования матрицы

Следующие преобразования матриц носят названия *элементарных*:

1) перестановка двух строк или столбцов;

2) умножение всех элементов какой-либо строки (столбца) на одно и то же число, отличное от нуля;

3) прибавление к элементам какой-либо строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на одно и то же число.

Две матрицы называются *эквивалентными*, если одна получается из другой с помощью конечного числа элементарных преобразований.

Нахождение определителей

Элементарные преобразования матрицы дают наиболее удобный способ вычисления определителя этой матрицы. Пусть, например,

$$\Delta_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}. \qquad (1)$$

Предполагая, что $a_{11} \neq 0$, будем иметь:

$$\Delta_n = a_{11} \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{a_{n1}}{a_{11}} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Нахождение определителей

$$\Delta_n = a_{11}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{a_{n1}}{a_{11}} & a_{n2}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{vmatrix} = a_{11}\Delta_{n-1},$$

где

$$\Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \dots & a_{3n}^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{vmatrix} \qquad (2)$$

и

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}a_{1j}}{a_{11}} \quad (i,\ j = 2,\ 3,\ \dots,\ n).$$

Нахождение определителей

К определителю Δ_{n-1} применяем тот же прием. Если все элементы

$$a_{ii}^{(i-1)} \neq 0 \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

то окончательно находим:

$$\Delta_n = a_{11} a_{22}^{(1)} \ \ldots \ a_{nn}^{(n-1)}. \tag{3}$$

Если в каком-нибудь промежуточном определителе Δ_{n-k} левый верхний элемент $a_{k+1,\,k+1}^{(k)} = 0$, то следует переставить строки или столбцы определителя Δ_{n-k} так, чтобы нужный нам элемент был отличен от нуля (это возможно всегда, если определитель $\Delta \neq 0$). Конечно, при этом следует учесть изменение знака определителя Δ_{n-k}.

Нахождение определителей

Можно дать более общее правило. Пусть определитель $\tilde{\Delta}_n = \det[\alpha_{ij}]$ преобразован так, что $\alpha_{pq} = 1$ (α_{pq} — главный элемент), т. е.

$$\tilde{\Delta}_n = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1q} & \dots & \alpha_{1j} & \dots & \alpha_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{i1} & \dots & \boxed{\alpha_{iq}} & \dots & \alpha_{ij} & \dots & \alpha_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{p1} & \dots & 1 & \dots & \boxed{\alpha_{pj}} & \dots & \alpha_{pn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nq} & \dots & \alpha_{nj} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}.$$

Нахождение определителей

Тогда

$$\tilde{\Delta}_n = (-1)^{p+q}\,\tilde{\Delta}_{n-1},$$

где $\tilde{\Delta}_{n-1} = \det\left[\alpha_{ij}^{(1)}\right]$ есть определитель $(n-1)$-го порядка, получающийся из Δ_n путем выбрасывания p-й строки и q-го столбца с последующим преобразованием элементов по формуле

$$\alpha_{ij}^{(1)} = \alpha_{ij} - \alpha_{iq}\alpha_{pj},$$

т. е. *каждый элемент* $\alpha_{ij}^{(1)}$ *определителя* $\tilde{\Delta}_{n-1}$ *равен соответствующему элементу* α_{ij} *определителя* $\tilde{\Delta}_n$, *уменьшенному на произведение его «проекций»* α_{iq} *и* α_{pj} *на отброшенные столбец и строку исходного определителя.* Доказательство этого положения легко вытекает из общих свойств определителей

Пример нахождения определителей

Пример. Вычислить

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 & \boxed{1} \\ -2 & 3 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & -3 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Пример нахождения определителей

Решение. Принимая за главный элемент $a_{15} = 1$, будем иметь:

$$\Delta_5 = (-1)^{1+5} \begin{vmatrix} -2-3\cdot3 & 3-1\cdot3 & 1-(-1)\cdot3 & 4-2\cdot3 \\ 1-3\cdot1 & 4-1\cdot1 & 2-(-1)\cdot1 & 3-2\cdot1 \\ 5-3\cdot(-1) & -2-1\cdot(-1) & -3-(-1)(-1) & 5-2\cdot(-1) \\ -1-3\cdot2 & 1-1\cdot2 & 2-(-1)2 & 3-2\cdot2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -11 & 0 & 4 & -2 \\ -2 & 3 & 3 & \boxed{1} \\ 8 & -1 & -4 & 7 \\ -7 & -1 & 4 & -1 \end{vmatrix}.$$

Далее, принимая за главный элемент $a_{24} = 1$ и применяя аналогичное преобразование, получим:

$$\Delta_4 = (-1)^6 \begin{vmatrix} -15 & 6 & 10 \\ 22 & -22 & -25 \\ -9 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -15 & 3 & 10 \\ 22 & -11 & -25 \\ -9 & \boxed{1} & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 12 & -11 \\ -77 & 52 \end{vmatrix} = 446.$$

Литература

- *Демидович Б. П., Марон И. А.* Основы вычислительной математики. Издание 3. Наука. Физматлит. 1966 г. 664 с.
  - *Глава 7. Алгебра матриц.*
    - *§1 - §6 с. 225 - 238*
    - *§11 - §15 с. 252 - 267*