EAIiIB Informatyka	Aleksander Lisiecki Natalia Materek		Rok II	Grupa 2	Zespół 6
Pracownia FIZYCZNA WFiIS AGH	Temat: ***Wahadło fizyczne***				Nr ćwiczenia: 1
Data wykonania: 12.11.2016	Data oddania: 14.12.2016	Zwrot do poprawki:	Data oddania:	Data zaliczenia:	OCENA:

Ćwiczenie nr 1: Wahadło fizyczne

Cel ćwiczenia

Opis ruchu drgającego, a w szczególności drgań wahadła fizycznego. Wyznaczenie momentów bezwładności brył sztywnych.

1 Wstęp teoretyczny

Dla układu oddzielnych cząstek moment bezwładności ciała zdefiniowany jest jako:

$$I = \sum m_i r_i^2 \tag{1}$$

gdzie

m_i masa i- tego punktu $[kg]$

r_i odległość i- tego elementu od osi obrotu $[m]$

a dla ciała o ciągłym rozkładzie masy jako:

$$I = \int r^2 dm \tag{2}$$

gdzie

r odległość elementów ciała od osi obrotu $[m]$

Wahadło fizyczne jest to bryła sztywna o masie m zawieszona w punkcie O różnym od środka ciężkości. Wahadło odchylone od pionu o kąt θ, a następnie puszczone swobodnie będzie wykonywać pod wpływem momentu siły ciężkości drgania zwane ruchem wahadłowym. Moment tej siły dla wychylenia θ jest równy $mgasin\theta$. Ruch ten opisuje II zasada dynamiki dla ruchu obrotowego, zgodnie z którą iloczyn momentu bezwładności I i przyspieszenia kątowego ε jest równy działającemu momentowi siły, czyli:

$$\varepsilon = \frac{d^2\theta}{dt^2} \Rightarrow I_o \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mga\sin\theta \tag{3}$$

gdzie

ε przyspieszenie kątowe $[\frac{rad}{s^2}]$

θ kąt wychylenia od położenia równowagi

I_0 moment bezwładności bryły względem osi obrotu $\left[kg \cdot m^2\right]$

t czas $[s]$

m masa bryły $[kg]$

g przyspieszenie ziemskie $\left[\frac{m}{s^2}\right]$

a odległość osi obrotu od środka ciężkości $[m]$

Siła $mgsin\theta$ jest zawsze skierowana przeciwnie do kierunku wychylenia - stąd znak minus we wzorze 3. Jeżeli rozpatrujemy ruch dla małych kątów wychylenia, to sinus kąta można zastąpić samym kątem w mierze łukowej, ponieważ $sin\theta \approx \theta$. Zatem równanie 3 przyjmuje postać:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mga\theta}{I_o} = 0 \tag{4}$$

jest to równanie ruchu harmonicznego z okresem:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_o}{mga}} \tag{5}$$

gdzie

T okres drgań $[s]$

Twierdzenie Steinera mówi, że jeśli znamy moment bezwładności I_S danego ciała względem pewnej osi przechodzącej przez środek masy tego ciała, to aby obliczyć moment bezwładności I_0 względem dowolnej innej osi równoległej do niej, należy do momentu I_S dodać iloczyn masy ciała i kwadratu odległości a między tymi osiami:

$$I_0 = I_S + ma^2 \tag{6}$$

gdzie

I_0 moment bezwładności ciała względem innej osi równoległej do osi względem której wyznaczono I_s $\left[kg \cdot m^2\right]$

I_s moment bezwładności ciała względem osi przechodzącej przez środek masy ciała $\left[kg \cdot m^2\right]$

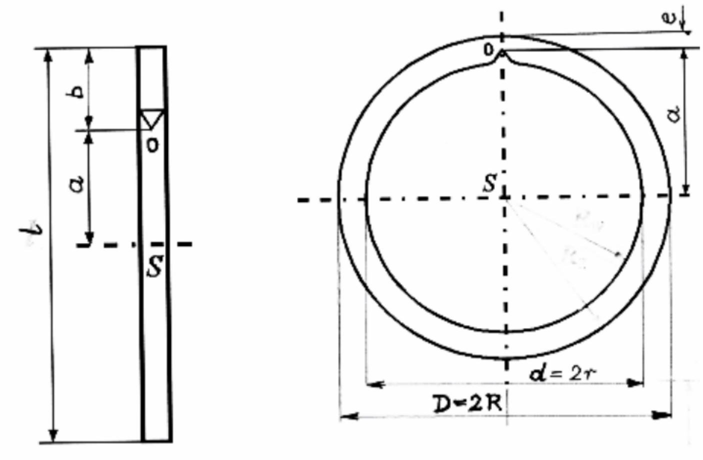
m masa ciała $[kg]$

a odległość między dwoma równoległymi osiami $[m]$

2 Opis układu pomiarowego

- Statyw, na którym zawiesza się badaną bryłę
- Badane bryły: pręt, pierścień
- Metalowy przymiar milimetrowy
- Suwmiarka
- Waga elektroniczna
- Sekundomierz

Rysunek 1: Pręt i pierścień używane w ćwiczeniu.



3 Przebieg doświadczenia

3.1 Pomiary mas i wymiarów pręta i pierścienia oraz wyznaczenie ich okresów drgań

1. Wyznaczenie masy pręta i pierścienia za pomocą wagi elektronicznej.
2. Mierzenie pręta i pierścienia wg instrukcji na rysunku 1.
3. Umieszczenie pręta na statywie i wprawienie go w ruch drgający o małej amplitudzie.
4. Przy użyciu stopera zmierzenie czasu dwudziestu pełnych drgań.
5. Powtórzenie czynności z punktu 4 dziesięciokrotnie.
6. Policzenie okresu dla pojedynczych prób (dzieląc wyniki przez 20).
7. Policzenie średniego okresu $T_{\text{śr}}$ korzystając z wyznaczonych okresów pojedynczych prób.
8. Powtórzenie czynności od 3 do 7 dla pierścienia.

3.2 Opracowanie wyników pomiarów

Tablica 1: Pomiar masy i długości pręta.

	wartość	niepewność
$m[g]$	663	1
$l[mm]$	757	1
$b[mm]$	100	1
$a[mm]$	275	1

Tablica 2: Pomiar masy i długości pierścienia.

	wartość	niepewność
$m[g]$	1360	1
$D_W[mm]$	250	0,1
$D_Z[mm]$	280	1
$R_W[mm]$	125	0,1
$R_Z[mm]$	140	1
$e[mm]$	10	0,1
$a[mm]$	130	0,1

Tablica 3: Pomiar okresu drgań dla pręta.

Lp.	liczba okresów k	czas $t[s]$ dla k okresów	okres T_i $[s]$
1	20	26,73	1,337
2	20	26,98	1,349
3	20	26,73	1,337
4	20	26,83	1,342
5	20	26,95	1,348
6	20	26,67	1,334
7	20	26,77	1,339
8	20	26,80	1,359
9	20	26,67	1,334
10	20	26,80	1,340
Wartość średnia okresu: $T_{\text{śr}}$: 1,342 $[s]$			
Niepewność: $u(T_{\text{śr}}) \approx$ 0,002490 $[s]$			

Tablica 4: Pomiar okresu drgań dla pierścienia.

Lp.	liczba okresów k	czas $t[s]$ dla k okresów	okres $T_i[s]$
1	20	20,71	1,036
2	20	20,37	1,019
3	20	19,79	0,9895
4	20	20,59	1,030
5	20	20,68	1,034
6	20	20,65	1,033
7	20	20,45	1,023
8	20	20,37	1,019
9	20	19,72	0,9860
10	20	19,99	0,9995
Wartość średnia okresu: $T_{\text{śr}}$: 1,017 $[s]$			
Niepewność: $u(T\text{śr}) \approx$ 0,005908 $[s]$			

3.3 Obliczenie momentu bezwładności

3.3.1 Obliczenie momentu bezwładności I_0 względem rzeczywistej osi obrotu korzystając z wzoru na okres drgań

Wzór na okres drgań wyraża się wzorem:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{mga}} \tag{7}$$

Przekształcając odpowiednio powyższe równanie 7 otrzymujemy wzór na moment bezwładności:

$$I_0 = \frac{mgaT^2}{4\pi^2} \tag{8}$$

gdzie

m masa bryły $[kg]$

g przyspieszenie ziemskie $\left[\frac{m}{s^2}\right]$

T okres drgań $[s]$

a odległość środka masy od osi obrotu $[m]$

Moment bezwładności I_0 dla pręta:

$$I_0 = \frac{0,663 \cdot 9,811 \cdot 0,275 \cdot (1,342)^2}{4\pi^2} \approx\ 0,07793\left[kg \cdot m^2\right] \tag{9}$$

Moment bezwładności I_0 dla pierścienia:

$$I_0 = \frac{1,36 \cdot 9,811 \cdot 0,13 \cdot (1,017)^2}{4\pi^2} \approx 0,04545\ \left[kg \cdot m^2\right] \tag{10}$$

3.3.2 Obliczenie momentu bezwładności I_S względem osi przechodzącej przez środek masy korzystając z twierdzenia Steinera

Twierdzenie Steinera stosuje się do obliczania momentu bezwładności bryły względem osi przesuniętej równolegle o długość a, gdzie I_S to moment bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy bryły.

$$I_0 = I_S + ma^2 I_S = I_0 - ma^2 \tag{11}$$

Moment bezwładności I_S dla pręta:

$$I_S = 0,07793 - 0,663 \cdot (0,275)^2 \approx 0,03006\ \left[kg \cdot m^2\right] \tag{12}$$

Moment bezwładności I_S dla pierścienia:

$$I_S = 0,04545 - 1,36 \cdot (0,13)^2 \approx 0,02298\ \left[kg \cdot m^2\right] \tag{13}$$

3.3.3 Moment bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy $I_S^{(geom)}$ na podstawie masy i wymiarów geometrycznych

Moment bezwładności większości regularnych brył można zapisać w postaci:

$$I_S^{(geom)} = k \cdot m \cdot l \tag{14}$$

gdzie

m masa bryły $[kg]$

l charakterystyczny wymiar bryły (np. długość, promień) $[m]$

k bezwymiarowy współczynnik zależny tylko od kształtu bryły i wyboru charakterystycznego wymiaru (np. promień czy średnica), a niezależny od wielkości bryły.

Moment bezwładności $I_S^{(geom)}$ dla pręta:

$$I_S^{(geom)} = \frac{1}{12}ml^2 \tag{15}$$

$$I_S^{(geom)} = \frac{1}{12} \cdot 0,663 \cdot (0,757)^2 \approx 0,03627 \ \left[kg \cdot m^2\right] \tag{16}$$

Moment bezwładności $I_S^{(geom)}$ dla pierścienia:

$$I_S^{(geom)} = \frac{1}{12}m(R^2 + r^2) \tag{17}$$

$$I_S^{(geom)} = \frac{1}{12} \cdot 1,360 \cdot ((0,140)^2 + (0,125)^2) \approx 0,02396 \left[kg \cdot m^2\right] \tag{18}$$

4 Wyznaczenie niepewności mierzonych wielkości

4.1 Niepewność pomiaru okresu – niepewność typu A

Wzór na niepewność pomiaru $u(T)$:

$$u(T) = \frac{\sqrt{\frac{\sum(T_i - T_{\text{śr}})^2}{n-1}}}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum(T_i - \overline{T})^2}{n(n-1)}} \tag{19}$$

gdzie

n liczba pomiarów

$T_{\text{śr}}$ średni czas trwania okresu $[s]$

Niepewność pomiaru okresu dla pręta:

$$u(T) = \sqrt{\frac{(1,337 - 1,342)^2 + \cdots + (1,340 - 1,342)^2}{10(10-1)}} \tag{20}$$

$$u(T) \approx 0,002490[s]$$

Niepewność pomiaru okresu dla pierścienia:

$$u(T) = \sqrt{\frac{(1,036 - 1,017)^2 + \cdots + (0,995 - 1,017)^2}{10(10-1)}} \tag{21}$$

$$u(T) \approx 0,005908[s]$$

4.2 Niepewność pomiaru masy

Do określenia masy pręta i pierścienia posłużyła nam waga cyfrowa o dokładności $0,001kg$, więc $u(m) = 1g$.

4.3 Niepewność pomiaru wymiarów geometrycznych

W pomiarze pręta przyjmujemy niepewność równą działce elementarnej linijki $u(l) = 1mm$, $u(a) = 1mm$, $u(b) = 1mm$. Zewnętrzny promień pierścienia został wyznaczony za pomocą linijki więc $u(D_Z) = 1mm$ i $u(R_Z) = 1mm$> Wewnętrzny promień został wyznaczony na podstawie zewnętrznego promienia i suwmiarki, której dokładność wynosiła $o, 1mm$ zatem $u(D_W) = 0,1mm$ i $u(R_W) = 0,1mm$. Długości tj e i a zostały wyznaczono z pomocą suwmiarki więc $u(e) = 0,1mm$, $u(a) = 0,1mm$.

4.4 Niepewność złożona momentów bezwładności

4.4.1 Niepewność złożona momentu bezwładności I_0

Wzór z którego korzystamy:

$$\frac{u(I_0)}{I_0} = \sqrt{\left(\frac{u(m)}{m}\right)^2 + \left(\frac{u(a)}{a}\right)^2 + \left(2 \cdot \frac{u(T)}{T}\right)^2} \tag{22}$$

gdzie

$u(I_0)$ niepewność pomiaru momentu bezwładności względem rzeczywistej osi obrotu

I_0 moment bezwładności względem rzeczywistej osi obrotu $\left[kg \cdot m^2\right]$

$u(m)$ niepewność pomiaru masy

$u(a)$ niepewność pomiaru odległości od środka ciężkości

$u(T)$ niepewność pomiaru okresu drgań

m masa ciała $[kg]$

a odległość od środka ciężkości $[m]$

Niepewność złożona momentu bezwładności I_0 dla pręta:

$$\frac{u(I_0)}{I_0} = \sqrt{\left(\frac{0,001}{0,663}\right)^2 + \left(\frac{0,001}{0,275}\right)^2 + \left(2 \cdot \frac{0,00249}{1,342}\right)^2} \approx 0,005410[\ kg \cdot m^2] \tag{23}$$

$$u(I_0) \approx 0,0004216 \left[kg \cdot m^2\right]$$

Niepewność złożona momentu bezwładności I_0 dla pierścienia:

$$\frac{u(I_0)}{I_0} = \sqrt{\left(\frac{0,001}{1,360}\right)^2 + \left(\frac{0,00001}{0,130}\right)^2 + \left(2 \cdot \frac{0,005908}{1,017}\right)^2} \approx 0,01167[\ kg \cdot m^2] \tag{24}$$

$$u(I_0) \approx 0,0005303 \left[kg \cdot m^2\right]$$

4.4.2 Niepewność złożona momentu bezwładności I_S

Wzór z którego korzystamy:

$$u(I_S) = \sqrt{(u(I_0))^2 + (a^2 u(m))^2 + (-2amu(m))^2} \tag{25}$$

gdzie

I_S moment bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy obliczony z wykorzystaniem twierdzenia Steinera $\left[kg \cdot m^2\right]$

$u(I_S)$ niepewność momentu bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy obliczony z wykorzystaniem twierdzenia Steinera

Niepewność złożona momentu bezwładności I_S dla pręta:

$$u(I_S) = \sqrt{(0,0004216)^2 + (0,275)^2 \cdot (0,001)^2 + (-2 \cdot 0,0,275 \cdot 0,0,663 \cdot 0,001)^2} \approx 0,... [kg{\cdot}m^2] \tag{26}$$

Niepewność złożona momentu bezwładności I_S dla pierścienia:

$$u(I_S) = \sqrt{(0,0005303)^2 + (0,130)^2 \cdot (0,0,001)^2 + (-2 \cdot 0,130 \cdot 1,360 \cdot 0,001)^2} \approx 0,... [kg{\cdot}m^2] \tag{27}$$

4.4.3 Niepewność złożona momentu bezwładności I_S^{geom}

Niepewność złożona momentu bezwładności I_S^{geom} dla pręta:

$$u(I_s^{\text{geom}}) = \sqrt{\left(\frac{l^2}{12} \cdot u(m)\right)^2 + \left(\frac{2lm}{12} \cdot u(l)\right)^2} \approx 0,... [kg \cdot m^2] \tag{28}$$

gdzie

I_S^{geom} moment bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy na podstawie masy i wymiarów geometrycznych ciała $\left[kg \cdot m^2\right]$

$u(I_S^{\text{geom}})$ niepewność momentu bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy na podstawie masy i wymiarów geometrycznych ciała

Niepewność złożona momentu bezwładności I_S^{geom} dla pierścienia:

$$u(I_S^{\text{geom}}) = \sqrt{\left(\frac{R_z^2 + R_w^2}{2} \cdot u(m)\right)^2 + (mR_z \cdot u(R_z))^2 + (mR_w \cdot u(R_w))^2} \approx 0,... [kg \cdot m^2] \tag{29}$$

Tablica 5: Wyniki obliczeń momentu bezwładności dla pręta.

	I_0 wyznaczone z okresu drgań $[kg \cdot m^2]$	**I_S wyznaczone z twierdzenia Steinera** $[kg \cdot m^2]$	**I_S^{geom} wyznaczone z pomiarów geometrycznych** $[kg \cdot m^2]$
wartość	0,08084(40)	0,...	0,...)
niepewność	0,00040	0,...	0,...

4.5 Porównanie metod wyznaczenia momentu bezwładności

Na podstawie wartości z tabel 5 i 6 można stwierdzić, że dokładniejsze wartości momentu bezwładności uzyskuje się poprzez pomiary wymiarów geometrycznych, ponieważ niepewności pomiarów są mniejsze.

Tablica 6: Wyniki obliczeń momentu bezwładności dla pierścienia.

	I_0 **wyznaczone z okresu drgań** $[kg \cdot m^2]$	I_S **wyznaczone z twierdzenia Steinera** $[kg \cdot m^2]$	I_S^{geom} **wyznaczone z pomiarów geometrycznych** $[kg \cdot m^2]$
wartość	0,...	0,...	0,024472(58)
niepewność	0,...	0,00037	0,...

4.6 Zgodność wyników pomiaru w granicach niepewności rozszerzonej

Aby wyniki były zgodne w granicach niepewności rozszerzonej to

$$\left|I_S - I_S^{\text{geom}}\right| < U(I_S - I_S^{\text{geom}}) \tag{30}$$

gdzie

I_S

I_S^{geom}

$U_(I_S)$

$$U(I_S - I_S^{\text{geom}}) = k \cdot \sqrt{(u(I_S)^2 + u(I_S^{\text{geom}})^2} \tag{31}$$

gdzie

k współczynnik rozszerzalności równy 2

Zgodność wyników pomiaru w granicach niepewności rozszerzonej dla pręta:

$$U(I_s - I_S^{\text{geom}}) \approx 0, ... \ [kg \cdot m^2]$$
$$\left|I_s - I_S^{\text{geom}}\right| \approx 0, ... \ [kg \cdot m^2]$$

Wyniki pomiarów uznajemy za zgodne ze sobą, ponieważ:

$$0, ... < 0, ...$$

$$\left|I_S - I_S^{\text{geom}}\right| < U(I_s - I_S^{\text{geom}})$$

Zgodność wyników pomiaru w granicach niepewności rozszerzonej dla pierścienia:

$$U(I_s - I_S^{\text{geom}}) \approx 0, ... \ [kg \cdot m^2]$$

$$\left|I_s - I_S^{\text{geom}}\right| \approx 0, ... \ [kg \cdot m^2]$$

Wyniki pomiarów uznajemy za zgodne / niezgodne ze sobą, ponieważ:

$$0, ... < 0, ...$$

$$\left|I_s - I_S^{\text{geom}}\right| < U(I_s - I_{geom})$$

5 Wnioski

- Doświadczenie zostało przeprowadzone prawidłowo, wyniki pomiarów mieszczą się w granicach niepewności rozszerzonej zarówno dla pręta, jak i dla pierścienia.
- Dokładniejszym sposobem wyznaczania momentu bezwładności bryły jest skorzystanie z zależności geometrycznych zamiast z twierdzenia Steinera.
- Twierdzenie Steinera pozwala nam obliczyć momenty bezwładności wobec osi których nie możemy wyliczyć doświadczalnie.