<table>
<tr><td>EAiIB
Informatyka</td><td colspan="2">Autor 1 Aleksander Lisiecki
Autor 2 Natalia Materek</td><td>Rok
II</td><td>Grupa
II</td><td>Zespół
VI</td></tr>
<tr><td>Pracownia
FIZYCZNA
WFiIS AGH</td><td colspan="4">Temat:
Opracowanie danych pomiarowych</td><td>nr ćwiczenia:
0</td></tr>
<tr><td>Data wykonania:
3.12.2016</td><td>Data oddania:
7.12.2016</td><td>Zwrot do poprawki:</td><td>Data oddania:</td><td>Data zaliczenia:</td><td>OCENA:</td></tr>
</table>

1 Opis wahadła matematycznego

Wahadło matematyczne (wahadło proste) jest to ciało o masie punktowej m zawieszone na cienkiej, nierozciągliwej nici o długości l. Kiedy ciało wytrącimy z równowagi, zaczyna się ono wahać w płaszczyźnie pionowej pod wpływem siły ciężkości. Jest to ruch okresowy.

Jeśli wahadło wychylimy o niewielki kąt α to jego okres można wyrazić wzorem:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{1}$$

gdzie

T okres ruchu okresowego

l długość wahadła

g przyspieszenie ziemskie

Przekształcając wzór 1 możemy wyznaczyć wartość przyspieszenia ziemskiego:

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} \tag{2}$$

2 Opis układu pomiarowego

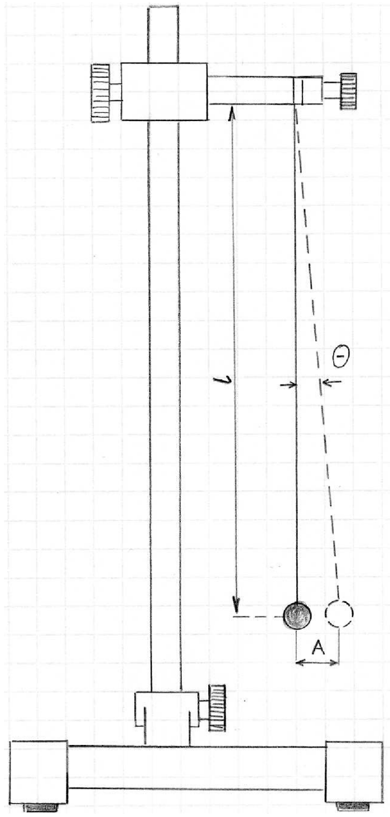
Badane wahadło przedstawione na rysunku 1 stanowi mosiężny obciążnik zawieszony na cienkiej lince. Linka jest podwieszona na wolnostojącym statywie. Pomiary były dokonywane za pomocą stopera o dokładności 0,01 s. Do niepewności pomiaru stopera należy dodać czas reakcji osoby wykonującej pomiary, który został ustalony na $0,05s$. Długość wahadła wyznaczono mierząc długość linki linijką o dokładności 1 mm. Na niepewność pomiaru długości wpływa oszacowanie odległości mocowania linki od środka obciążnika oraz trudność znalezienia punktu zawieszenia linki, została określona na 3 mm. Długość linki może być regulowana przez nawiniecie lub rozwiniecie linki na walec na którym jest umocowana.

3 Etapy doświadczenia

3.1 Wyznaczenie przyspieszenia ziemskiego korzystając z okresu drgań wahadła matematycznego:

1. Zmierzenie długosci linki na której umocowany jest obciążnik
2. Wprawienie w ruch okresowy wahadła i włączenie stopera
3. Odczekanie aż wahadło wykona 15 pełnych okresów
4. Zastopowanie stopera i zanotowanie wyniku
5. Powtórzenie czynności od 2 do 4 dziesięciokrotnie
6. Policzenie okresu dla pojedynczych prób (dzieląc wyniki przez 15)
7. Policzenie średniego okresu T_{sr} korzystając z wyznaczonych okresów

Rysunek 1: Wahadlo schemat



3.2 Badanie zależności okresu drgań od długości wahadła

W każdej próbie zmieniamy długość wahadła aby zaobserwować dla poszczególnych dŁugości różne okresy.

1. Zmienienie długości wahadła przez nawiniecie bądź rozwiniecie nitki na walec na którym jest mocowana
2. Wprawienie w ruch okresowy wahadła i włączenie stopera
3. Odczekanie aż wahadło wykona 15 pełnych okresów
4. Zastopowanie stopera i zanotowanie wyniku
5. Policzenie okresu dla próby (dzieląc wyniki przez 15)
6. Wróć do kroku 1 Doświadczenie powtórzono dla czterech różnych długości wahadła.

4 Wyniki i ich opracowanie

4.1 Wyznaczanie wartości przyspieszenia ziemskiego

Wzór na wartość średnią okresu:

$$T_{\text{śr}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i \tag{3}$$

gdzie

$T_{\text{śr}}$ średnia arytmetyczna i okresów

T_i i- ty okres

Wartość przyspieszenia ziemskiego:

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T_{\text{śr}}^2} = \frac{4 \cdot 3,141^2 \cdot 0,475}{1,339^2} \approx 10,..\left[\frac{m}{s^2}\right] \tag{4}$$

Tablica 1: Wyniki pomiarów okresu drgań wahadła matematycznego

$l[m]$	$15*T[s]$	$T[s])$
0,475	20,65	1,377
	19,97	1,331
	20,00	1,333
	19,85	1,323
	19,72	1,315
	20,26	1,351
	19,97	1,331
	20,25	1,350
	19,85	1,323
	20,30	1,353
	$T_{śr}$	1,339

4.2 Badanie zależności okresu drgań od długości wahadła

Tablica 2: Wyniki pomiarów okresu drgań wahadła matematycznego w zależności od długości wahadła

$l[m]$	$15*T[s]$	$T^2[s^2]$
0,475	20,65	1,896
0,325	15,94	1,128
0,355	17,00	1,284
0,398	18,71	1,555
0,240	13,93	0,8630
0,195	13,06	0,7586

Podnosząc wzór 1 na okres wahadła matematycznego obustronnie do kwadratu otrzymamy następującą zależność:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} \cdot l \tag{5}$$

Konstruujemy wykres zależności T^2 od l. Wykres na rysunku2 z linią regresji uzyskano przy pomocy funkcji REGLINP programu Excel. Widać że, wykres jest liniowy wiec można stwierdzić, ze proporcjonalnie do wzrostu długości wahadła l rośnie kwadrat okresu wahadła T^2. Dokładniej zwiększając długość wahadła dwukrotnie okres wahadła zwiększy się czterokrotnie.

Tablica 3: Wyniki uzyskane za pomocą funkcji REGLINP

wartość a 27,79986	wartość b 7,33731285
niepewność wyznaczenia a 1,435053	niepewność wyznaczenia b 0,49410565
współczynnik korelacji 0,989454	niepewność wyznaczenia wartości y 0,32916657

Współczynnik a wynosi:

$$a = ... \tag{6}$$

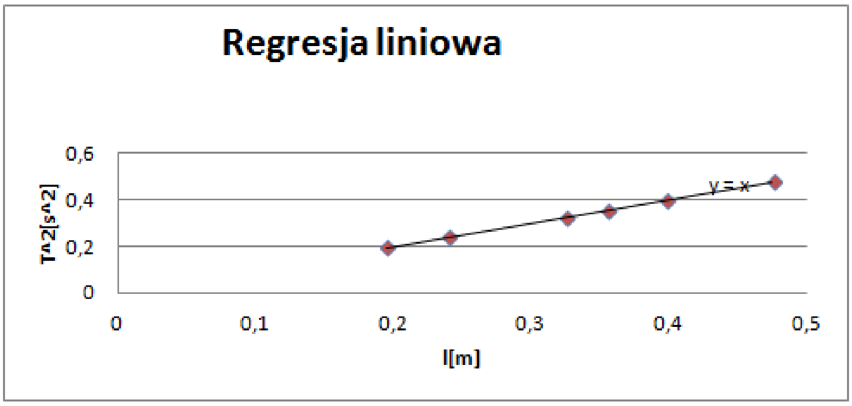
Znając współczynnik a nachylenia wykresu możemy wyznaczyć przyspieszenie ziemskie g, ponieważ:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} \cdot l \tag{7}$$

więc g:

$$a = \frac{4\pi^2}{g} \Longrightarrow g = \frac{4\pi^2}{a} \approx ... \left[\frac{m}{s^2}\right] \tag{8}$$

Rysunek 2: Regresja liniowa



5 Szacowanie niepewności pomiarowych

5.1 Wyznaczanie wartości przyspieszenia ziemskiego

5.1.1 Niepewność pomiaru okresu

Posiadając serię pomiarów okresu wahadła dla tej samej długości, możemy obliczyć jego niepewność metodą typu A, czyli jako estymator odchylenia standardowego wielkości średniej:

$$u(T_{\text{śr}}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(T_i - T_{\text{śr}})^2}{n(n-1)}} \approx ...[s] \tag{9}$$

gdzie

$u(T_{\text{śr}})$ niepewność okresu

$T_{\text{śr}}$ okres wahadła

T_i i -ty okres

n ilość prób

5.1.2 Niepewność pomiaru długości wahadła

Niepewność pomiaru długości jest szacowana metodą typu B na podstawie dokładności pomiaru:

$$u(l) = \frac{\Delta l}{\sqrt{3}} = \frac{0,003}{\sqrt{3}} \approx ...[m] \tag{10}$$

gdzie

Δl maksymalny błąd podczas mierzenia

$u(l)$ niepewność długości

5.1.3 Niepewność złożona pomiaru przyspieszenia ziemskiego

Przyspieszenie ziemskie jest wyznaczane pośrednio, wiec stosuje prawo przenoszenia niepewności:

$$u_c(g) = \sqrt{\left(\frac{\delta g}{\delta T_{\text{śr}}}\right)^2 u(T_{\text{śr}})^2 + \left(\frac{\delta g}{\delta l}\right)^2 u(l)^2} = \sqrt{\frac{64\pi^4 l^2}{T_{\text{śr}}^6} u(T_{\text{śr}})^2 + \frac{16\pi^4}{T_{\text{śr}}^4} u(l)^2} \approx ... \left[\frac{m}{s^2}\right] \tag{11}$$

gdzie

$u_{c(g)}$ niepewność złożona przyspieszenia ziemskiego

$\frac{\delta g}{\delta T_{\text{śr}}}$ pochodna g po $T_{\text{śr}}$

$\frac{\delta g}{\delta l}$ pochodna g po l

Aby porównać wyznaczona wartość przyspieszenia ziemskiego z wartością tablicową obliczamy niepewność rozszerzoną:

$$U_c(g) = k \cdot u_c(g) = 2 \cdot ... = ... \left[\frac{m}{s^2}\right] \tag{12}$$

gdzie

k współczynnik

$U_c(g)$ niepewność rozszerzona

Podsumowując wyznaczone przyspieszenie ziemskie ma wartość:

$$g = (... \pm ...) \left[\frac{m}{s^2}\right] \tag{13}$$

Wartość tablicowa przyspieszenia ziemskiego wynosi $g = 9,811 \left[\frac{m}{s^2}\right]$ i nie mieści się/mieści się w wyznaczonym przez nas przedziale.

5.2 Badanie zależności okresu drgań od długości wahadła

Ponownie stosujemy prawo przenoszenia niepewności. Tym razem mamy do czynienia z funkcją jednej zmiennej:

$$g = \frac{4\pi^2}{a} \tag{14}$$

$$u(g) = \frac{\delta g}{\delta a} u(a) = -4\pi^2 a^{-2} \cdot u(a)$$

$$|u(g)| = 4\pi^2 a^{-2} \cdot u(a) \approx ... \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

$$U_c(g) = k \cdot u_c(g) \approx 2 \cdot ... = ... \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

gdzie

a współczynnik nachylenia wykresu

$u(g)$ niepewność g uzyskanego na podstawie wykresu

$u(a)$ niepewność współczynnika a (nachylenie wykresu)

$\frac{\delta g}{\delta a}$ pochodna g po a

$u_{c(g)}$ niepewność złożona przyspieszenia ziemskiego

$U_{c(g)}$ niepewność rozszerzona g

Tak więc przyspieszenie ziemskie wyznaczone na podstawie wykresu zależności $T^2(l)$ ma wartość:

$$g = (... \pm ...) \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

6 Podsumowanie doświadczenia

Opis wielkości	Wynik $\left[\frac{m}{s^2}\right]$	u(g) $\left[\frac{m}{s^2}\right]$	$U_c(g)$ $\left[\frac{m}{s^2}\right]$
g za pomocą 10 pomiarów przy tej samej długości wahadła	...	...	...
g za pomocą wykresu $T^2(l)$	...	...	...
Wartość tablicowa g	9,811	-	-

7 Wnioski

- Wyznaczenie przyspieszenia ziemskiego za pomocą wahadła matematycznego jest łatwym w wykonaniu doświadczeniem ale musimy liczyć się z niedokładnością pomiarów.
- Jednym z powodów uzyskania różnych wartości przyspieszenia ziemskiego może być fakt że wahadło mogło się poruszać w więcej niż jednej płaszczyźnie.
- Otrzymane wartości nie zgadzają się z wartościami tabelarycznymi i nie mieszczą się również w zakresie niepewności. Przyczyną błędu mogą być niewystarczająco dokładne przyrządy pomiarowe, niewykryty wcześniej błąd systematyczny np. związany opóźnieniem uruchamiania i zatrzymywania stopera lub zbyt duża amplituda z jaką wahał się ciężarek.
- Różnica otrzymanego przez nas przyspieszenia i standardowego przyspieszenia dla Krakowa $g = 9,811\frac{m}{s^2}$ nie jest jednak tak wielka, więc można stwierdzić, że błędu grubego nie popełniono.
- Wraz z wydłużeniem nici, na której zawieszony jest ciężarek rośnie też okres wahadła. Tak jak zostało to przedstawione na wykresie 2, zależność kwadratu okresu od długości wahadła jest zależnością proporcjonalną.