

Manual do Programador Competitivo

Antti Laaksonen

Rascunho de 18 de julho de 2024

Sumário

Prefácio	v
I Técnicas básicas	1
1 Introdução	3
1.1 Linguagens de programação	3
1.2 Entrada e saída	4
1.3 Trabalhando com números	6
1.4 Encurtando código	8
1.5 Matemática	10
1.6 Competições e recursos	15
2 Complexidade de tempo	19
2.1 Regras de cálculo	19
2.2 Classes de complexidade	22
2.3 Estimar a eficiência	23
2.4 Soma máxima de subvetor	24
3 Ordenação	27
3.1 Teoria da ordenação	27
3.2 Ordenação em C++	32
3.3 Busca binária	34
4 Estruturas de Dados	39
4.1 Vetores Dinâmicos	39
4.2 Estruturas de Conjunto	41
4.3 Estruturas de Mapa	42
4.4 Iteradores e Intervalos	43
4.5 Outras Estruturas	46
4.6 Comparação com Ordenação	50
5 Busca completa	53
5.1 Gerando subconjuntos	53
5.2 Gerando permutações	55
5.3 Backtracking	56
5.4 Podando a busca	58
5.5 Encontro no meio	60

6	Algoritmos gulosos	63
6.1	Problema das moedas	63
6.2	Escalonamento	64
6.3	Tarefas e prazos	66
6.4	Minimizando somas	67
6.5	Compressão de dados	68
7	Programação dinâmica	71
7.1	Problema das moedas	71
7.2	Maior subsequência crescente	76
7.3	Caminhos em uma grade	77
7.4	Problemas da mochila	79
7.5	Distância de edição	80
7.6	Contando os ladrilhos	82
8	Análise amortizada	85
8.1	Método dos dois ponteiros	85
8.2	Elementos menores mais próximos	87
8.3	Mínimo da janela deslizante	89
9	Consultas de intervalo	91
9.1	Consultas de vetor estático	92
9.2	Árvore binária indexada	94
9.3	Árvore de segmentos	97
9.4	Técnicas adicionais	101
	Bibliografia	103

Prefácio

O objetivo deste livro é oferecer uma introdução completa à programação competitiva. É necessário que você já conheça os conceitos básicos de programação, mas não é preciso ter experiência prévia com programação competitiva.

O livro é especialmente destinado a estudantes que desejam aprender algoritmos e, possivelmente, participar da *International Olympiad in Informatics* (IOI) ou do *International Collegiate Programming Contest* (ICPC). No Brasil, a Olimpíada Brasileira de Informática (OBI) classifica para a IOI, e a Maratona de Programação da Sociedade Brasileira de Computação é a fase regional do ICPC. É claro que o livro também é adequado para qualquer pessoa interessada em programação competitiva.

Leva muito tempo para se tornar um bom programador competitivo, mas também é uma oportunidade para aprender muito. Você pode ter certeza de que o seu entendimento geral sobre algoritmos ficará muito melhor se dedicar um tempo para ler este livro, resolver problemas e participar de competições.

Esta tradução e o livro em si estão em constante desenvolvimento. Você pode enviar seu *feedback* da versão original do livro para ahslaaks@cs.helsinki.fi, ou enviar um *pull request* diretamente para fazer correções na tradução do livro.

Helsinki, agosto de 2019

Antti Laaksonen

Parte I

Técnicas básicas

Capítulo 1

Introdução

Programação competitiva combina dois tópicos: (1) o design de algoritmos e (2) a implementação de algoritmos.

O **design de algoritmos** consiste em solução de problemas e pensamento matemático. São necessárias habilidades para analisar problemas e resolvê-los de forma criativa. Um algoritmo para resolver um problema deve ser tanto correto quanto eficiente, e o cerne do problema muitas vezes é inventar um algoritmo eficiente.

O conhecimento teórico de algoritmos é importante para programadores competitivos. Tipicamente, uma solução para um problema é uma combinação de técnicas bem conhecidas e novas ideias. As técnicas que aparecem na programação competitiva também formam a base para a pesquisa científica de algoritmos.

A **implementação de algoritmos** requer boas habilidades de programação. Na programação competitiva, as soluções são avaliadas testando um algoritmo implementado usando um conjunto de casos de teste. Portanto, não é suficiente que a ideia do algoritmo seja correta, mas a implementação também deve ser correta.

Um bom estilo de codificação em competições é direto e conciso. Os programas devem ser escritos rapidamente, porque não há muito tempo disponível. Ao contrário da engenharia de *software* tradicional, os programas são curtos (geralmente com no máximo algumas centenas de linhas de código) e dispensam manutenção após a competição.

1.1 Linguagens de programação

Atualmente, as linguagens de programação mais populares usadas em competições são C++, Python e Java. Por exemplo, no Google Code Jam 2017, entre os 3.000 melhores participantes, 79% usaram C++, 16% usaram Python and 8% usaram Java [29]. Alguns participantes também usaram outras linguagens.

Muitas pessoas pensam que C++ é a melhor escolha para um programador competitivo, e o C++ está quase sempre disponível nos sistemas de competição. Os benefícios de usar C++ são ser uma linguagem muito eficiente e contar com uma biblioteca padrão com uma grande coleção de estruturas de dados e algoritmos.

Por outro lado, é bom dominar várias linguagens e entender suas forças. Por exemplo, se inteiros grandes são necessários para um problema, Python pode ser uma boa escolha, porque contém operações embutidas para cálculos com inteiros grandes. Ainda assim, a maioria dos problemas em competições de programação são definidos de forma que o uso de uma linguagem de programação específica não crie uma vantagem injusta.

Todos os exemplos de programas neste livro são escritos em C++ e as estruturas de dados e algoritmos da biblioteca padrão são frequentemente usados. Os programas seguem o padrão C++11, que pode ser usado na maioria das competições hoje em dia. Se você ainda não consegue programar em C++, agora é um bom momento para começar a aprender.

Esboço de código em C++

Um esboço de código típico em C++ para programação competitiva se parece com isso:

```
#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;

int main() {
    // solucao vai aqui
}
```

A linha `#include` no início do código é uma funcionalidade do compilador g++ que nos permite incluir toda a biblioteca padrão. Assim, não é necessário incluir separadamente bibliotecas como `iostream`, `vector` e `algorithm`, mas elas ficam disponíveis automaticamente.

A linha `using` declara que as classes e funções da biblioteca padrão podem ser usadas diretamente no código. Sem a linha `using`, teríamos que escrever, por exemplo, `std::cout`, mas agora basta escrever `cout`.

O código pode ser compilado usando o seguinte comando:

```
g++ -std=c++11 -O2 -Wall test.cpp -o test
```

Este comando produz um arquivo binário `test` a partir do código-fonte `test.cpp`. O compilador segue o padrão C++11 (`-std=c++11`), otimiza o código (`-O2`) e exibe avisos sobre possíveis erros (`-Wall`).

1.2 Entrada e saída

Na maioria das competições, comandos padrões são usados para ler a entrada e escrever a saída. Em C++, os comandos padrões são `cin` para entrada e `cout` para saída. Além disso, as funções em C `scanf` e `printf` podem ser usadas.

A entrada para o programa geralmente consiste de números e strings que são separados por espaços e novas linhas. Eles podem ser lidos pelo comando `cin` da

seguinte forma:

```
int a, b;  
string x;  
cin >> a >> b >> x;
```

Esse tipo de código sempre funciona, assumindo que há pelo menos um espaço ou uma quebra de linha entre cada elemento da entrada. Por exemplo, o código acima pode ler ambas as entradas a seguir:

```
123 456 monkey
```

```
123    456  
monkey
```

O comando `cout` é usado para saída da seguinte forma:

```
int a = 123, b = 456;  
string x = "monkey";  
cout << a << " " << b << " " << x << "\n";
```

As entradas e saídas às vezes são um gargalo no programa. As seguintes linhas no início do código tornam as entradas e saídas mais eficientes.

```
ios::sync_with_stdio(0);  
cin.tie(0);
```

Note que a quebra de linha `"\n"` é mais rápida do que o `endl`, porque o `endl` sempre força uma operação de *flush*.

As funções `scanf` e `printf` da linguagem C, são uma alternativa aos comandos padrões do C++. Elas são geralmente um pouco mais rápidas, mas também são mais difíceis de usar. O código seguinte lê dois números inteiros da entrada:

```
int a, b;  
scanf("%d %d", &a, &b);
```

O código seguinte imprime dois números inteiros:

```
int a = 123, b = 456;  
printf("%d %d\n", a, b);
```

Às vezes, o programa deve ler uma linha inteira da entrada, possivelmente contendo espaços. Isso pode ser feito usando a função `getline`:

```
string s;  
getline(cin, s);
```

Se a quantidade de dados for desconhecida, o seguinte laço é útil:

```
while (cin >> x) {  
    // código  
}
```

Este laço lê elementos da entrada um após o outro, até que não haja mais dados disponíveis na entrada.

Em alguns sistemas de competições, arquivos são usados para entrada e saída. Uma solução simples para isso é escrever o código como de costume usando comandos padrões, mas adicionar as seguintes linhas no início do código:

```
freopen("input.txt", "r", stdin);  
freopen("output.txt", "w", stdout);
```

Depois disso, o programa lê a entrada do arquivo "input.txt" e escreve a saída para o arquivo "output.txt".

1.3 Trabalhando com números

Inteiros

O tipo inteiro mais utilizado em programação competitiva é o `int`, que é um tipo de 32 bits com uma faixa de valores de $-2^{31} \dots 2^{31} - 1$, ou cerca de $-2 \cdot 10^9 \dots 2 \cdot 10^9$. Se o tipo `int` não for suficiente, o tipo de 64 bits `long long` pode ser utilizado. Ele possui uma faixa de valores de $-2^{63} \dots 2^{63} - 1$, ou aproximadamente $-9 \cdot 10^{18} \dots 9 \cdot 10^{18}$.

O código a seguir define uma variável do tipo `long long`:

```
long long x = 123456789123456789LL;
```

O sufixo `LL` significa que o tipo do número é `long long`.

Um erro comum ao usar o tipo `long long` é que o tipo `int` ainda é usado em algum lugar do código. Por exemplo, o seguinte código contém um erro sutil:

```
int a = 123456789;  
long long b = a*a;  
cout << b << "\n"; // -1757895751
```

Embora a variável `b` seja do tipo `long long`, ambos os números na expressão `a*a` são do tipo `int` e o resultado também é do tipo `int`. Devido a isso, a variável `b` conterá um resultado incorreto. O problema pode ser resolvido alterando o tipo de `a` para `long long` ou alterando a expressão para `(long long)a*a`.

Normalmente, os problemas de competição são definidos de forma que o tipo `long long` seja suficiente. Ainda assim, é bom saber que o compilador `g++` também oferece um tipo de 128 bits chamado `__int128_t` com uma faixa de valores de $-2^{127} \dots 2^{127} - 1$, ou aproximadamente $-10^{38} \dots 10^{38}$. No entanto, este tipo não está disponível em todos os sistemas de competição.

Aritmética modular

Denotamos por $x \bmod m$ o resto da divisão de x por m . Por exemplo, $17 \bmod 5 = 2$, porque $17 = 3 \cdot 5 + 2$.

Às vezes, a resposta para um problema é um número muito grande, mas é suficiente para imprimir o "módulo m ", ou seja, o resto quando a resposta é dividida por m (por exemplo, "módulo $10^9 + 7$ "). A ideia é que, mesmo que a resposta real seja muito grande, é suficiente usar os tipos `int` e `long long`.

Uma propriedade importante do resto é que, na adição, subtração e multiplicação, o resto pode ser obtido antes da operação:

$$\begin{aligned}(a + b) \bmod m &= (a \bmod m + b \bmod m) \bmod m \\(a - b) \bmod m &= (a \bmod m - b \bmod m) \bmod m \\(a \cdot b) \bmod m &= (a \bmod m \cdot b \bmod m) \bmod m\end{aligned}$$

Assim, podemos obter o resto após cada operação e os números nunca se tornarão muito grandes.

Por exemplo, o código seguinte calcula $n!$, o fatorial de n , módulo m :

```
long long x = 1;
for (int i = 2; i <= n; i++) {
    x = (x*i)%m;
}
cout << x%m << "\n";
```

Normalmente, queremos que o resto esteja sempre entre $0 \dots m-1$. No entanto, em C++ e em outras linguagens, o resto de um número negativo é zero ou negativo. Uma maneira fácil de garantir que não haja restos negativos é primeiro calcular o resto como de costume e depois adicionar m se o resultado for negativo:

```
x = x%m;
if (x < 0) x += m;
```

No entanto, isso só é necessário quando há subtrações no código e o resto pode se tornar negativo.

Números com ponto flutuante

Os tipos usuais de números de ponto flutuante em programação competitiva são o `double` de 64 bits e, como uma extensão no compilador g++, o `long double` de 80 bits. Na maioria dos casos, o tipo `double` é suficiente, mas o `long double` é mais preciso.

A precisão necessária da resposta geralmente é fornecida no enunciado do problema. Uma maneira fácil de imprimir a resposta é usar a função `printf` e fornecer o número de casas decimais na string de formatação. Por exemplo, o código seguinte imprime o valor de x com 9 casas decimais:

```
printf("%.9f\n", x);
```

Uma dificuldade ao usar números de ponto flutuante é que alguns números não podem ser representados com precisão como números de ponto flutuante, o que resultará em erros de arredondamento. Por exemplo, o resultado do código seguinte é surpreendente:

```
double x = 0.3*3+0.1;
printf("%.20f\n", x); // 0.99999999999999988898
```

Devido a um erro de arredondamento, o valor de x é um pouco menor do que 1, enquanto o valor correto seria 1.

É arriscado comparar números de ponto flutuante com o operador `==`, pois é possível que os valores devam ser iguais, mas não são devido a erros de precisão. Uma maneira melhor de comparar números de ponto flutuante é assumir que dois números são iguais se a diferença entre eles for menor que ε , onde ε é um número pequeno.

Na prática, os números podem ser comparados da seguinte forma ($\varepsilon = 10^{-9}$):

```
if (abs(a-b) < 1e-9) {
    // a e b sao iguais
}
```

Observe que, embora os números de ponto flutuante sejam imprecisos, inteiros até um certo limite ainda podem ser representados com precisão. Por exemplo, usando `double`, é possível representar com precisão todos os inteiros cujo valor absoluto é no máximo 2^{53} .

1.4 Encurtando código

Códigos curtos são ideais em programação competitiva, porque os programas devem ser escritos o mais rápido possível. Por causa disso, os programadores competitivos geralmente definem nomes mais curtos para tipos de dados e outras partes do código.

Nomes para tipos

Usando o comando `typedef` é possível dar um nome mais curto para um tipo de dados. Por exemplo, o nome `long long` é longo, então podemos definir o nome mais curto `ll`:

```
typedef long long ll;
```

Depois disso, o código

```
long long a = 123456789;
long long b = 987654321;
cout << a*b << "\n";
```

pode ser encurtado como segue:

```
ll a = 123456789;
ll b = 987654321;
cout << a*b << "\n";
```

O comando `typedef` pode também ser usado com tipos de dados mais complexos. Por exemplo, o código seguinte dá o nome `vi` para um vetor de inteiros e o nome `pi` para um `pair` que contém dois inteiros.

```
typedef vector<int> vi;
typedef pair<int,int> pi;
```

Macros

Outro jeito de encurtar o código é definindo **macros**. Um macro significa que certas strings no código serão mudadas antes da compilação. Em C++, macros são definidos usando a palavra-chave `#define`.

Por exemplo, podemos definir os seguintes macros:

```
#define F first
#define S second
#define PB push_back
#define MP make_pair
```

Depois disso, o código

```
v.push_back(make_pair(y1,x1));
v.push_back(make_pair(y2,x2));
int d = v[i].first+v[i].second;
```

pode ser encurtado como segue:

```
v.PB(MP(y1,x1));
v.PB(MP(y2,x2));
int d = v[i].F+v[i].S;
```

Um macro pode também ter parâmetros que possibilitam encurtar laços e outras estruturas. Por exemplo, podemos definir o seguinte macro:

```
#define REP(i,a,b) for (int i = a; i <= b; i++)
```

Depois disso, o código

```
for (int i = 1; i <= n; i++) {
    search(i);
}
```

pode ser encurtado como segue:

```
REP(i,1,n) {  
    search(i);  
}
```

De vez em quando, macros causam bugs que podem ser difíceis de detectar. Por exemplo, considere o seguinte macro que calcula o quadrado de um número:

```
#define SQ(a) a*a
```

O macro *nem sempre* funciona como esperado. Por exemplo, o código

```
cout << SQ(3+3) << "\n";
```

corresponde ao código

```
cout << 3+3*3+3 << "\n"; // 15
```

Uma versão melhor do macro é como segue:

```
#define SQ(a) (a)*(a)
```

Agora o código

```
cout << SQ(3+3) << "\n";
```

corresponde ao código

```
cout << (3+3)*(3+3) << "\n"; // 36
```

1.5 Matemática

A matemática desempenha um papel importante nas competições de programação, e não é possível se tornar um programador competitivo de sucesso sem ter boas habilidades matemáticas. Essa seção discute alguns conceitos matemáticos importantes e fórmulas que serão necessárias mais adiante no livro.

Fórmulas de soma

Cada soma da forma

$$\sum_{x=1}^n x^k = 1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k,$$

onde k é um inteiro positivo, tem uma fórmula de forma fechada que é um polinômio de grau $k + 1$. Por exemplo¹,

$$\sum_{x=1}^n x = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

¹ Existe uma fórmula mais geral para somas, chamada de **fórmula de Faulhaber**, mas ela é muito complexa para ser apresentada aqui.

e

$$\sum_{x=1}^n x^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Uma **progressão aritmética** é uma sequência de números onde a diferença entre quaisquer dois números consecutivos é constante. Por exemplo,

$$3, 7, 11, 15$$

é uma progressão aritmética com constante 4. A soma de uma progressão aritmética pode ser calculada usando a fórmula

$$\underbrace{a + \dots + b}_{n \text{ números}} = \frac{n(a+b)}{2}$$

onde a é o primeiro número, b é o último número e n é a quantidade de números. Por exemplo,

$$3 + 7 + 11 + 15 = \frac{4 \cdot (3 + 15)}{2} = 36.$$

A fórmula é baseada no fato que a soma consiste de n números e o valor de cada número é $(a+b)/2$ em média.

A **progressão aritmética** é uma sequência de números onde a razão entre quaisquer dois números consecutivos é constante. Por exemplo,

$$3, 6, 12, 24$$

é uma progressão aritmética com constante 2. A soma de uma progressão geométrica pode ser calculada usando a fórmula

$$a + ak + ak^2 + \dots + b = \frac{bk - a}{k - 1}$$

onde a é o primeiro número, b é o último número e a razão entre números consecutivos é k . Por exemplo,

$$3 + 6 + 12 + 24 = \frac{24 \cdot 2 - 3}{2 - 1} = 45.$$

Esta fórmula pode ser derivada como segue. Seja

$$S = a + ak + ak^2 + \dots + b.$$

Multiplicando ambos os lados por k , obtemos

$$kS = ak + ak^2 + ak^3 + \dots + bk,$$

e resolvendo a equação

$$kS - S = bk - a$$

obtemos a fórmula.

Um caso especial da soma de progressão aritmética é a fórmula

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

A **soma harmônica** é uma soma da forma

$$\sum_{x=1}^n \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Um limite superior para uma soma harmônica é $\log_2(n) + 1$. Ou seja, podemos modificar cada termo $1/k$ para que k se torna a potência de dois mais próxima que não excede k . Por exemplo, quando $n = 6$, podemos estimar a soma como segue:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}.$$

Este limite superior consiste de $\log_2(n) + 1$ partes ($1, 2 \cdot 1/2, 4 \cdot 1/4$, etc.), e o valor de cada parte é no máximo 1.

Teoria dos conjuntos

Um **conjunto** é uma coleção de elementos. Por exemplo, o conjunto

$$X = \{2, 4, 7\}$$

contém os elementos 2, 4 e 7. O símbolo \emptyset denota um conjunto vazio, e $|S|$ denota o tamanho do conjunto S , ou seja, o número de elementos no conjunto. Por exemplo, no conjunto acima, $|X| = 3$.

Se um conjunto S contém um elemento x , nós escrevemos que $x \in S$, e senão escrevemos que $x \notin S$. Por exemplo, no conjunto acima

$$4 \in X \quad \text{e} \quad 5 \notin X.$$

Agora conjuntos podem ser construídos usando operações de conjuntos:

- A **intersecção** $A \cap B$ consiste dos elementos que estão em ambos A e B . Por exemplo, se $A = \{1, 2, 5\}$ e $B = \{2, 4\}$, então $A \cap B = \{2\}$.
- A **união** $A \cup B$ consiste dos elementos que estão em A ou B ou em ambos. Por exemplo, se $A = \{3, 7\}$ e $B = \{2, 3, 8\}$, então $A \cup B = \{2, 3, 7, 8\}$.
- O **complemento** \bar{A} consiste dos elementos que não estão em A . A interpretação de um complemento depende do **conjunto universo**, que contém todos os elementos possíveis. Por exemplo, se $A = \{1, 2, 5, 7\}$ e o conjunto universo é $\{1, 2, \dots, 10\}$, então $\bar{A} = \{3, 4, 6, 8, 9, 10\}$.
- A **diferença** $A \setminus B = A \cap \bar{B}$ consiste dos elementos que estão em A mas não estão em B . Note que B pode conter elementos que não estão em A . Por exemplo, se $A = \{2, 3, 7, 8\}$ e $B = \{3, 5, 8\}$, então $A \setminus B = \{2, 7\}$.

Se cada elemento de A também pertence a S , dizemos que A é um **subconjunto** de S , denotado por $A \subset S$. Um conjunto S sempre tem $2^{|S|}$ subconjuntos, incluindo o conjunto vazio. Por exemplo, os subconjuntos do conjunto $\{2, 4, 7\}$ são

$$\emptyset, \{2\}, \{4\}, \{7\}, \{2, 4\}, \{2, 7\}, \{4, 7\} \text{ e } \{2, 4, 7\}.$$

Alguns conjuntos usados frequentemente são \mathbb{N} (números naturais), \mathbb{Z} (inteiros), \mathbb{Q} (números racionais) e \mathbb{R} (números reais). O conjunto \mathbb{N} pode ser definidos de duas maneiras, dependendo da situação: como $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ ou $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Podemos também criar um conjunto usando uma regra da forma

$$\{f(n) : n \in S\},$$

onde $f(n)$ é alguma função. O conjunto contém todos os elementos da forma $f(n)$, onde n é um elemento em S . Por exemplo, o conjunto

$$X = \{2n : n \in \mathbb{Z}\}$$

contém todos os inteiros pares.

Lógica

O valor de uma expressão lógica é ou **verdadeiro** (1) ou **falso** (0). Os operadores lógicos mais importantes são \neg (**negação**), \wedge (**conjunção**), \vee (**disjunção**), \Rightarrow (**implicação**) e \Leftrightarrow (**equivalência**). A seguinte tabela mostra o significado destes operadores:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1	0
1	0	0	1	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1	1	1

A expressão $\neg A$ tem valor oposto do valor de A . A expressão $A \wedge B$ é verdadeira se ambos A e B são verdadeiros, e a expressão $A \vee B$ é verdadeira se A ou B ou ambos são verdadeiros. A expressão $A \Rightarrow B$ é verdade se quando A for verdadeiro, B também for verdadeiro. A expressão $A \Leftrightarrow B$ é verdadeira se A e B ambos forem verdadeiros ou ambos falsos.

Um **predicado** é uma expressão que é verdadeira ou falsa dependendo de seus parâmetros. Predicados são geralmente denotados por letras maiúsculas. Por exemplo, podemos definir um predicado $P(x)$ que é verdadeira exatamente quando x é um número primo. Usando esta definição, $P(7)$ é verdadeiro mas $P(8)$ é falso.

Um **quantificador** conecta uma expressão lógica a elementos de um conjunto. Os quantificadores mais importantes são \forall (**para todos**) e \exists (**existe**). Por exemplo,

$$\forall x(\exists y(y < x))$$

significa que para cada elemento x no conjunto, existe um elemento y no conjunto de tal forma que y é menor que x . Isso é verdadeiro no conjunto dos inteiros, mas falso no conjunto dos números naturais.

Usando a notação descrita acima, podemos expressar muitos tipos de proposições lógicas. Por exemplo,

$$\forall x((x > 1 \wedge \neg P(x)) \Rightarrow (\exists a(\exists b(a > 1 \wedge b > 1 \wedge x = ab))))$$

significa que se um número x é maior que 1 e não é um número primo, então existem números a e b que são maiores que 1 e cujo produto é x . Esta proposição é verdadeira no conjunto dos inteiros.

Funções

A função $\lfloor x \rfloor$ arredonda o número x para baixo, e a função $\lceil x \rceil$ arredonda o número x para cima. Por exemplo,

$$\lfloor 3/2 \rfloor = 1 \quad \text{e} \quad \lceil 3/2 \rceil = 2.$$

As funções $\min(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $\max(x_1, x_2, \dots, x_n)$ retornam os menores e maiores valores x_1, x_2, \dots, x_n . Por exemplo,

$$\min(1, 2, 3) = 1 \quad \text{e} \quad \max(1, 2, 3) = 3.$$

O **fatorial** $n!$ pode ser definido como

$$\prod_{x=1}^n x = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

ou recursivamente

$$\begin{aligned} 0! &= 1 \\ n! &= n \cdot (n-1)! \end{aligned}$$

Os **números de Fibonacci** aparecem em várias situações. Eles podem ser definidos recursivamente como segue:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f(1) &= 1 \\ f(n) &= f(n-1) + f(n-2) \end{aligned}$$

Os primeiros números de Fibonacci são

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$$

Existe também uma fórmula de forma fechada para calcular os números de Fibonacci, que é algumas vezes chamada de **fórmula de Binet**:

$$f(n) = \frac{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}}.$$

Logaritmos

O **logaritmo** de um número x é denotado $\log_k(x)$, onde k é a base do logaritmo. De acordo com esta definição, $\log_k(x) = a$ exatamente quando $k^a = x$.

Uma propriedade útil dos logaritmos é que $\log_k(x)$ é equivalente ao número de vezes necessário para dividir x por k para alcançar o número 1. Por exemplo, $\log_2(32) = 5$ porque 5 divisões por 2 são necessárias:

$$32 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$$

Logaritmos são frequentemente usadas na análise de algoritmos, porque muitos algoritmos eficientes dividem alguma coisa em cada passo. Então, podemos estimar a eficiência destes algoritmos usando logaritmos.

O logaritmo de um produto é

$$\log_k(ab) = \log_k(a) + \log_k(b),$$

e conseqüentemente,

$$\log_k(x^n) = n \cdot \log_k(x).$$

Além disso, o logaritmo de um quociente é

$$\log_k\left(\frac{a}{b}\right) = \log_k(a) - \log_k(b).$$

Outra fórmula útil é

$$\log_u(x) = \frac{\log_k(x)}{\log_k(u)},$$

e usando isso, é possível calcular logaritmos para qualquer base se existe uma maneira de calcular logaritmos para uma base fixa.

O **logaritmo natural** $\ln(x)$ de um número x é um logaritmo cuja base é $e \approx 2.71828$. Outra propriedade de logaritmos é que o número de dígitos de um inteiro x na base b é $\lfloor \log_b(x) + 1 \rfloor$. Por exemplo, a representação de 123 na base 2 é 1111011 e $\lfloor \log_2(123) + 1 \rfloor = 7$.

1.6 Competições e recursos

IOI

A Olimpíada Internacional de Informática (IOI) é um concurso anual de programação para alunos do ensino médio. Cada país pode enviar uma equipe de quatro alunos para o concurso. Geralmente há cerca de 300 participantes de 80 países.

O IOI consiste em dois concursos de cinco horas de duração. Em ambos os concursos, os participantes são convidados a resolver três tarefas algorítmicas de várias dificuldades. As tarefas são divididas em subtarefas, cada uma das quais tem uma pontuação atribuída. Mesmo que os competidores sejam divididos em equipes, eles competem como indivíduos.

O programa da IOI [41] regula os tópicos que podem aparecer em tarefas da IOI. Quase todos os tópicos do programa IOI são cobertos por este livro.

Os participantes do IOI são selecionados por meio de concursos nacionais. Antes do IOI, muitos concursos regionais são organizados, como a Olimpíada Brasileira de Informática (OBI), a Olimpíada Báltica de Informática (BOI), a Olimpíada da Europa Central em Informática (CEOI) e a Olimpíada de Informática da Ásia-Pacífico (APIO).

Alguns países organizam concursos de prática online para futuros participantes do IOI, como o Concurso Aberto da Croácia em Informática [11] e a Olimpíada de Computação dos EUA [68]. Além disso, uma grande coleção de problemas de concursos poloneses está disponível online [60].

ICPC

O Concurso Internacional de Programação Colegiada (ICPC) é um concurso anual de programação para estudantes universitários. Cada equipe do concurso é composta por três alunos, e ao contrário do IOI, os alunos trabalham juntos; há apenas um computador disponível para cada equipe.

O ICPC é composto por várias etapas, e finalmente o melhores equipes são convidadas para as Finais Mundiais. Embora existam dezenas de milhares de participantes no concurso, há apenas um pequeno número² de vagas para as finais disponíveis, assim, avançar para as finais é uma grande conquista em algumas regiões.

Em cada prova do ICPC, as equipes têm cinco horas para resolver cerca de dez problemas de algoritmos. Uma solução para um problema só é aceita se resolver todos os casos de teste de forma eficiente. Durante a competição, os competidores poderão visualizar os resultados de outras equipes, mas na última hora o placar fica congelado e não é possível ver os resultados das últimas submissões.

Os temas que podem aparecer no ICPC não são tão bem especificados como aqueles no IOI. De qualquer forma, é claro que mais conhecimento é necessário no ICPC, especialmente mais habilidades matemáticas.

Competições online

Existem também muitos concursos online abertos a todos. No momento, o site de concursos mais ativo é o Codeforces, que organiza concursos semanais. No Codeforces, os participantes são divididos em duas divisões: iniciantes competem em Div2 e programadores mais experientes em Div1. Outros sites de concursos incluem AtCoder, CS Academy, HackerRank e Topcoder.

Algumas empresas organizam concursos online com finais presenciais. Exemplos de tais concursos são Facebook Hacker Cup, Google Code Jam e Yandex.Algorithm. Claro, as empresas também usam esses concursos para recrutamento: ter um bom desempenho em uma competição é uma boa maneira de provar suas habilidades.

Books

Já existem alguns livros (além deste) que focam em programação competitiva e resolução algorítmica de problemas:

- S. S. Skiena and M. A. Revilla: *Programming Challenges: The Programming Contest Training Manual* [59]
- S. Halim and F. Halim: *Competitive Programming 3: The New Lower Bound of Programming Contests* [33]
- K. Diks et al.: *Looking for a Challenge? The Ultimate Problem Set from the University of Warsaw Programming Competitions* [15]

²O número exato de vagas para as finais variam de ano para ano; em 2017, havia 133 vagas para a final.

Os primeiros dois livros são voltados para iniciantes, enquanto que o último livro contém material avançado.

Claro, livros de algoritmos gerais também são adequados para programadores competitivos. Alguns livros populares são:

- T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest and C. Stein: *Introduction to Algorithms* [13]
- J. Kleinberg and É. Tardos: *Algorithm Design* [45]
- S. S. Skiena: *The Algorithm Design Manual* [58]

Capítulo 2

Complexidade de tempo

A eficiência dos algoritmos é importante na programação competitiva. Normalmente, é fácil projetar um algoritmo que resolve o problema lentamente, mas o verdadeiro desafio é inventar um algoritmo rápido. Se o algoritmo for muito lento, ele receberá apenas pontos parciais ou nenhum ponto.

A **complexidade de tempo** de um algoritmo estima quanto tempo o algoritmo irá utilizar para determinada entrada. A ideia é representar a eficiência como uma função cujo parâmetro é o tamanho da entrada. Ao calcular a complexidade de tempo, podemos descobrir se o algoritmo é suficientemente rápido sem precisar implementá-lo.

2.1 Regras de cálculo

A complexidade de tempo de um algoritmo é denotada por $O(\dots)$ onde os três pontos representam alguma função. Normalmente, a variável n denota o tamanho da entrada. Por exemplo, se a entrada é uma matriz de números, n será o tamanho da matriz, e se a entrada é uma string, n será o comprimento da string.

Laços de repetição

Uma razão comum pela qual um algoritmo é lento é porque ele contém muitos laços que percorrem a entrada. Quanto mais laços aninhados o algoritmo contém, mais lento ele é. Se houver k laços aninhados, a complexidade de tempo é $O(n^k)$.

Por exemplo, a complexidade de tempo do seguinte código é $O(n)$:

```
for (int i = 1; i <= n; i++) {  
    // código  
}
```

E a complexidade de tempo do seguinte código é $O(n^2)$:

```
for (int i = 1; i <= n; i++) {  
    for (int j = 1; j <= n; j++) {  
        // código  
    }  
}
```

```
}
```

Ordem de magnitude

A complexidade de tempo não nos fornece o número exato de vezes que o código dentro de um laço é executado, mas apenas mostra a ordem de magnitude. Nos exemplos a seguir, o código dentro do laço é executado $3n$, $n+5$ e $\lceil n/2 \rceil$ vezes, mas a complexidade de tempo de cada código é $O(n)$.

```
for (int i = 1; i <= 3*n; i++) {  
    // código  
}
```

```
for (int i = 1; i <= n+5; i++) {  
    // código  
}
```

```
for (int i = 1; i <= n; i += 2) {  
    // código  
}
```

Como outro exemplo, a complexidade de tempo do seguinte código é $O(n^2)$:

```
for (int i = 1; i <= n; i++) {  
    for (int j = i+1; j <= n; j++) {  
        // código  
    }  
}
```

Fases

Se o algoritmo consiste em fases consecutivas, a complexidade de tempo total é a maior complexidade de tempo de uma única fase. A razão para isso é que a fase mais lenta geralmente é o gargalo do código.

Por exemplo, o seguinte código consiste em três fases com complexidades de tempo $O(n)$, $O(n^2)$ e $O(n)$. Portanto, a complexidade de tempo total é $O(n^2)$.

```
for (int i = 1; i <= n; i++) {  
    // código  
}  
for (int i = 1; i <= n; i++) {  
    for (int j = 1; j <= n; j++) {  
        // código  
    }  
}
```

```
for (int i = 1; i <= n; i++) {  
    // código  
}
```

Várias variáveis

Às vezes, a complexidade de tempo depende de vários fatores. Nesse caso, a fórmula da complexidade de tempo contém várias variáveis.

Por exemplo, a complexidade de tempo do seguinte código é $O(nm)$:

```
for (int i = 1; i <= n; i++) {  
    for (int j = 1; j <= m; j++) {  
        // código  
    }  
}
```

Recursão

A complexidade de tempo de uma função recursiva depende do número de vezes que a função é chamada e da complexidade de tempo de uma única chamada. A complexidade de tempo total é o produto desses valores.

Por exemplo, considere a seguinte função:

```
void f(int n) {  
    if (n == 1) return;  
    f(n-1);  
}
```

A chamada $f(n)$ causa n chamadas de função, e a complexidade de tempo de cada chamada é $O(1)$. Assim, a complexidade de tempo total é $O(n)$.

Como outro exemplo, considere a seguinte função:

```
void g(int n) {  
    if (n == 1) return;  
    g(n-1);  
    g(n-1);  
}
```

Nesse caso, cada chamada de função gera outras duas chamadas, exceto quando $n = 1$. Vamos ver o que acontece quando g é chamada com o parâmetro n . A tabela a seguir mostra as chamadas de função produzidas por essa única chamada:

chamada da função	número de chamadas
$g(n)$	1
$g(n-1)$	2
$g(n-2)$	4
...	...
$g(1)$	2^{n-1}

Com base nisso, a complexidade de tempo é

$$1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1 = O(2^n).$$

2.2 Classes de complexidade

A lista a seguir contém complexidades de tempo comuns de algoritmos:

$O(1)$ O tempo de execução de um algoritmo de **tempo constante** não depende do tamanho da entrada. Um algoritmo de tempo constante típico é uma fórmula direta que calcula a resposta.

$O(\log n)$ Um algoritmo **logarítmico** frequentemente reduz pela metade o tamanho da entrada em cada etapa. O tempo de execução de tal algoritmo é logarítmico, porque $\log_2 n$ equivale ao número de vezes que n precisa ser dividido por 2 para obter 1.

$O(\sqrt{n})$ Um **algoritmo de raiz quadrada** é mais lento do que $O(\log n)$, mas mais rápido do que $O(n)$. Uma propriedade especial das raízes quadradas é que $\sqrt{n} = n/\sqrt{n}$, então a raiz quadrada \sqrt{n} está, em certo sentido, no meio da entrada.

$O(n)$ Um algoritmo **linear** percorre a entrada um número constante de vezes. Isso muitas vezes é a melhor complexidade de tempo possível, porque geralmente é necessário acessar cada elemento da entrada pelo menos uma vez antes de obter a resposta.

$O(n \log n)$ Essa complexidade de tempo frequentemente indica que o algoritmo ordena a entrada, pois a complexidade de tempo dos eficientes algoritmos de ordenação é $O(n \log n)$. Outra possibilidade é que o algoritmo utilize uma estrutura de dados em que cada operação leva tempo $O(\log n)$.

$O(n^2)$ Um algoritmo **quadrático** muitas vezes contém dois laços aninhados. É possível percorrer todos os pares de elementos da entrada em tempo $O(n^2)$.

$O(n^3)$ Um algoritmo **cúbico** frequentemente contém três laços aninhados. É possível percorrer todos os trios de elementos da entrada em tempo $O(n^3)$.

$O(2^n)$ Esta complexidade de tempo frequentemente indica que o algoritmo itera por todos os subconjuntos dos elementos de entrada. Por exemplo, os subconjuntos de $\{1, 2, 3\}$ são \emptyset , $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$ e $\{1, 2, 3\}$.

$O(n!)$ Esta complexidade de tempo frequentemente indica que o algoritmo itera por todas as permutações dos elementos de entrada. Por exemplo, as permutações de $\{1, 2, 3\}$ são $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$ e $(3, 2, 1)$.

Um algoritmo é **polinomial** se sua complexidade de tempo for no máximo $O(n^k)$, onde k é uma constante. Todas as complexidades de tempo acima, exceto $O(2^n)$ e $O(n!)$, são polinomiais. Na prática, a constante k geralmente é pequena, e portanto, uma complexidade de tempo polinomial significa que o algoritmo é *eficiente*.

A maioria dos algoritmos neste livro é polinomial. No entanto, existem muitos problemas importantes para os quais nenhum algoritmo polinomial é conhecido, ou seja, ninguém sabe como resolvê-los de forma eficiente. Problemas **NP-difíceis** são um conjunto importante de problemas para os quais nenhum algoritmo polinomial é conhecido¹.

2.3 Estimar a eficiência

Ao calcular a complexidade de tempo de um algoritmo, é possível verificar, antes de implementá-lo, se ele é suficientemente eficiente para o problema. O ponto de partida para as estimativas é o fato de que um computador moderno pode realizar algumas centenas de milhões de operações em um segundo.

Por exemplo, vamos supor que o limite de tempo para um problema seja de um segundo e o tamanho da entrada seja $n = 10^5$. Se a complexidade de tempo for $O(n^2)$, o algoritmo executará cerca de $(10^5)^2 = 10^{10}$ operações. Isso levaria pelo menos algumas dezenas de segundos, então o algoritmo parece ser muito lento para resolver o problema.

Por outro lado, dado o tamanho da entrada, podemos tentar *adivinhar* a complexidade de tempo necessária do algoritmo que resolve o problema. A tabela a seguir contém algumas estimativas úteis, assumindo um limite de tempo de um segundo.

tamanho da entrada	complexidade de tempo necessária
$n \leq 10$	$O(n!)$
$n \leq 20$	$O(2^n)$
$n \leq 500$	$O(n^3)$
$n \leq 5000$	$O(n^2)$
$n \leq 10^6$	$O(n \log n)$ ou $O(n)$
n é grande	$O(1)$ ou $O(\log n)$

Por exemplo, se o tamanho da entrada for $n = 10^5$, é provável que se espere que a complexidade de tempo do algoritmo seja $O(n)$ ou $O(n \log n)$. Essa informação facilita o projeto do algoritmo, pois descarta abordagens que resultariam em um algoritmo com uma complexidade de tempo pior.

¹Um livro clássico sobre o assunto é *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness* de M. R. Garey e D. S. Johnson [28].

Ainda assim, é importante lembrar que a complexidade de tempo é apenas uma estimativa de eficiência, pois ela oculta os *fatores constantes*. Por exemplo, um algoritmo que roda em tempo $O(n)$ pode realizar $n/2$ ou $5n$ operações. Isso tem um efeito importante no tempo real de execução do algoritmo.

2.4 Soma máxima de subvetor

Frequentemente, existem vários algoritmos possíveis para resolver um problema, sendo que suas complexidades de tempo são diferentes. Esta seção discute um problema clássico que possui uma solução direta com complexidade de tempo $O(n^3)$. No entanto, ao projetar um algoritmo melhor, é possível resolver o problema em tempo $O(n^2)$ e até mesmo em tempo $O(n)$.

Dado um vetor de n números, nossa tarefa é calcular a **soma máxima de subvetor**, ou seja, a maior soma possível de uma sequência de valores consecutivos no vetor². O problema é interessante quando pode haver valores negativos no vetor. Por exemplo, no vetor

-1	2	4	-3	5	2	-5	2
----	---	---	----	---	---	----	---

o subvetor a seguir produz a soma máxima de 10:

-1	2	4	-3	5	2	-5	2
----	---	---	----	---	---	----	---

Nós assumimos que um subvetor vazio é permitido, então a soma máxima do subvetor é sempre pelo menos 0.

Algoritmo 1

Uma maneira direta de resolver o problema é percorrer todos os subvetores possíveis, calcular a soma dos valores em cada subvetor e manter a soma máxima. O código a seguir implementa esse algoritmo:

```
int best = 0;
for (int a = 0; a < n; a++) {
    for (int b = a; b < n; b++) {
        int sum = 0;
        for (int k = a; k <= b; k++) {
            sum += array[k];
        }
        best = max(best, sum);
    }
}
cout << best << "\n";
```

²O livro *Programming Pearls* de J. Bentley [8] tornou o problema popular.

As variáveis a e b fixam o primeiro e último índice do subvetor, e a soma dos valores é calculada na variável sum . A variável $best$ contém a soma máxima encontrada durante a busca.

A complexidade de tempo do algoritmo é $O(n^3)$, pois consiste em três laços aninhados que percorrem a entrada.

Algoritmo 2

É fácil tornar o Algoritmo 1 mais eficiente removendo um laço dele. Isso é possível calculando a soma ao mesmo tempo em que o final direito do subvetor se move. O resultado é o seguinte código:

```
int best = 0;
for (int a = 0; a < n; a++) {
    int sum = 0;
    for (int b = a; b < n; b++) {
        sum += array[b];
        best = max(best, sum);
    }
}
cout << best << "\n";
```

Após essa alteração, a complexidade de tempo é $O(n^2)$.

Algoritmo 3

Surpreendentemente, é possível resolver o problema em tempo $O(n)^3$, o que significa que apenas um loop é necessário. A ideia é calcular, para cada posição do vetor, a soma máxima de um subvetor que termina nessa posição. Em seguida, a resposta para o problema é o máximo dessas somas.

Considere o subproblema de encontrar o subvetor de soma máxima que termina na posição k . Existem duas possibilidades:

1. O subvetor contém apenas o elemento na posição k .
2. O subvetor consiste em um subvetor que termina na posição $k - 1$, seguido pelo elemento na posição k .

No último caso, uma vez que queremos encontrar um subvetor com a soma máxima, o subvetor que termina na posição $k - 1$ também deve ter a soma máxima. Portanto, podemos resolver o problema de forma eficiente calculando a soma máxima do subvetor para cada posição final da esquerda para a direita.

O código a seguir implementa o algoritmo:

```
int best = 0, sum = 0;
for (int k = 0; k < n; k++) {
```

³Em [8], este algoritmo de tempo linear é atribuído a J. B. Kadane, e o algoritmo é às vezes chamado de **algoritmo de Kadane**.

```
    sum = max(array[k], sum+array[k]);  
    best = max(best, sum);  
}  
cout << best << "\n";
```

O algoritmo contém apenas um laço que percorre a entrada, portanto, a complexidade de tempo é $O(n)$. Essa também é a melhor complexidade de tempo possível, porque qualquer algoritmo para o problema precisa examinar todos os elementos do vetor pelo menos uma vez.

Comparação de eficiência

É interessante estudar como os algoritmos são eficientes na prática. A tabela a seguir mostra os tempos de execução dos algoritmos acima para diferentes valores de n em um computador moderno.

Em cada teste, a entrada foi gerada aleatoriamente. O tempo necessário para ler a entrada não foi medido.

tamanho do vetor n	Algoritmo 1	Algoritmo 2	Algoritmo 3
10^2	0.0 s	0.0 s	0.0 s
10^3	0.1 s	0.0 s	0.0 s
10^4	> 10.0 s	0.1 s	0.0 s
10^5	> 10.0 s	5.3 s	0.0 s
10^6	> 10.0 s	> 10.0 s	0.0 s
10^7	> 10.0 s	> 10.0 s	0.0 s

A comparação mostra que todos os algoritmos são eficientes quando o tamanho da entrada é pequeno, mas tamanhos maiores de entrada evidenciam diferenças notáveis nos tempos de execução dos algoritmos. O Algoritmo 1 se torna lento quando $n = 10^4$, e o Algoritmo 2 se torna lento quando $n = 10^5$. Apenas o Algoritmo 3 é capaz de processar até mesmo as maiores entradas instantaneamente.

Capítulo 3

Ordenação

Ordenação é um problema fundamental no design de algoritmos. Muitos algoritmos eficientes utilizam a ordenação como uma sub-rotina, pois frequentemente é mais fácil processar os dados quando os elementos estão ordenados.

Por exemplo, o problema "um array contém dois elementos iguais?" é fácil de resolver usando ordenação. Se o array contiver dois elementos iguais, eles estarão um ao lado do outro após a ordenação, então é fácil encontrá-los. Além disso, o problema "qual é o elemento mais frequente em um array?" pode ser resolvido de forma semelhante.

Existem muitos algoritmos para ordenação, e eles também são bons exemplos de como aplicar diferentes técnicas de design de algoritmos. Os algoritmos de ordenação eficientes funcionam em tempo $O(n \log n)$, e muitos algoritmos que usam a ordenação como sub-rotina também têm essa complexidade de tempo.

3.1 Teoria da ordenação

O problema básico na ordenação é o seguinte:

Dado um array que contém n elementos, sua tarefa é ordenar os elementos em ordem crescente.

Por exemplo, o array

1	3	8	2	9	2	5	6
---	---	---	---	---	---	---	---

ficará da seguinte forma após a ordenação:

1	2	2	3	5	6	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---

Algoritmos $O(n^2)$

Algoritmos simples para ordenar um array operam em tempo $O(n^2)$. Tais algoritmos são curtos e geralmente consistem em dois loops aninhados. Um famoso

algoritmo de ordenação em tempo $O(n^2)$ é o **bubble sort** onde os elementos "flutuam" no array de acordo com seus valores.

O Bubble sort consiste em n rodadas. Em cada rodada, o algoritmo percorre os elementos do array. Sempre que dois elementos consecutivos são encontrados que não estão na ordem correta, o algoritmo os troca. O algoritmo pode ser implementado da seguinte forma:

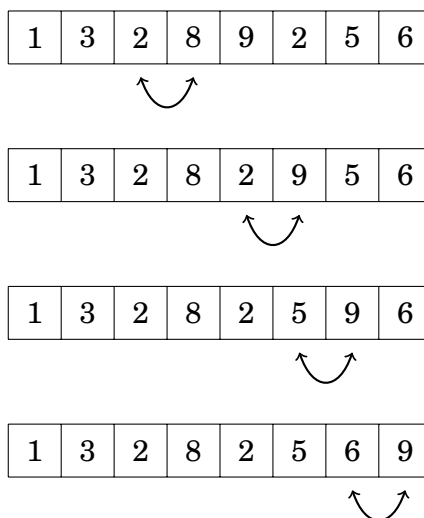
```
for (int i = 0; i < n; i++) {  
    for (int j = 0; j < n-1; j++) {  
        if (array[j] > array[j+1]) {  
            swap(array[j], array[j+1]);  
        }  
    }  
}
```

Após a primeira rodada do algoritmo, o maior elemento estará na posição correta, e em geral, após k rodadas, os k maiores elementos estarão nas posições corretas. Portanto, após n rodadas, o array inteiro estará ordenado.

Por exemplo, no array

1	3	8	2	9	2	5	6
---	---	---	---	---	---	---	---

na primeira rodada do bubble sort, os elementos são trocados da seguinte forma:



Inversões

O Bubble sort é um exemplo de um algoritmo de ordenação que sempre troca elementos *consecutivos* no array. Acontece que a complexidade de tempo de tal algoritmo é *sempre* pelo menos $O(n^2)$, porque no pior caso, são necessárias, $O(n^2)$ trocas para ordenar o array.

Um conceito útil ao analisar algoritmos de ordenação é uma **inversão**: um par de elementos de array ($array[a], array[b]$) tal que $a < b$ and $array[a] > array[b]$, ou seja, os elementos estão na ordem errada. Por exemplo, o array

1	2	2	6	3	5	9	8
---	---	---	---	---	---	---	---

tem três inversões: (6, 3), (6, 5) and (9, 8). O número de inversões indica o quanto de trabalho é necessário para ordenar o array. Um array está completamente ordenado quando não há inversões. Por outro lado, se os elementos do array estiverem em ordem reversa, o número de inversões é o máximo possível:

$$1 + 2 + \dots + (n - 1) = \frac{n(n - 1)}{2} = O(n^2)$$

A troca de um par de elementos consecutivos que estão na ordem errada remove exatamente uma inversão do array. Portanto, se um algoritmo de ordenação só pode trocar elementos consecutivos, cada troca remove no máximo uma inversão, e a complexidade de tempo do algoritmo é pelo menos $O(n^2)$.

Algoritmos $O(n \log n)$

É possível ordenar um array de forma eficiente em tempo $O(n \log n)$ usando algoritmos que não estão limitados a trocar elementos consecutivos. Um desses algoritmos é o **merge sort**¹, que é baseado em recursão.

Merge sort ordena um subarray $\text{array}[a \dots b]$ da seguinte forma:

1. Se $a = b$, não faça nada, pois o subarray já está ordenado..
2. Calcule a posição do elemento do meio: $k = \lfloor (a + b)/2 \rfloor$.
3. Ordene recursivamente o subarray $\text{array}[a \dots k]$.
4. Ordene recursivamente o subarray $\text{array}[k + 1 \dots b]$.
5. *Junte* os subarrays ordenados $\text{array}[a \dots k]$ e $\text{array}[k + 1 \dots b]$ em um subarray ordenado $\text{array}[a \dots b]$.

O merge sort é um algoritmo eficiente porque ele reduz pela metade o tamanho do subarray a cada passo. A recursão consiste em $O(\log n)$ níveis, e processar cada nível leva tempo $O(n)$. Juntar os subarrays $\text{array}[a \dots k]$ e $\text{array}[k + 1 \dots b]$ é possível em tempo linear, porque eles já estão ordenados.

Por exemplo, considere ordenar o seguinte array:

1	3	6	2	8	2	5	9
---	---	---	---	---	---	---	---

O array será dividido em dois subarrays da seguinte forma:

1	3	6	2
---	---	---	---

8	2	5	9
---	---	---	---

Então, os subarrays serão ordenados recursivamente da seguinte forma:

¹De acordo com [47], o merge sort foi inventado por J. von Neumann em 1945.

1	2	3	6
---	---	---	---

2	5	8	9
---	---	---	---

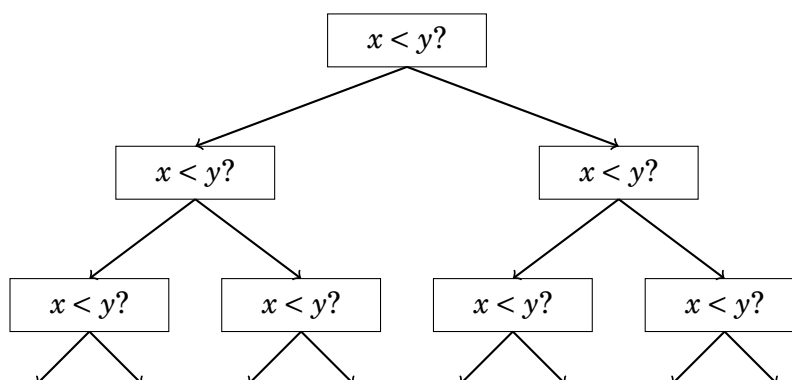
Finalmente, o algoritmo junta os subarrays ordenados e cria o array final ordenado:

1	2	2	3	5	6	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---

Limite Inferior de Ordenação

É possível ordenar um array mais rápido do que em tempo $O(n \log n)$? Acontece que isso *não* é possível quando nos limitamos a algoritmos de ordenação baseados na comparação de elementos do array.

O limite inferior para a complexidade temporal pode ser demonstrado considerando a ordenação como um processo no qual cada comparação de dois elementos fornece mais informações sobre o conteúdo do array. O processo cria a seguinte árvore:



Aqui " $x < y$?" significa que alguns elementos x e y são comparados. Se $x < y$, o processo continua para a esquerda e, caso contrário, para a direita. Os resultados do processo são as possíveis maneiras de ordenar o array, um total de $n!$ maneiras. Por essa razão, a altura da árvore deve ser pelo menos

$$\log_2(n!) = \log_2(1) + \log_2(2) + \dots + \log_2(n).$$

Obtemos um limite inferior para esta soma escolhendo os últimos $n/2$ elementos e alterando o valor de cada elemento para $\log_2(n/2)$. Isso nos dá uma estimativa

$$\log_2(n!) \geq (n/2) \cdot \log_2(n/2),$$

portanto, a altura da árvore e o número mínimo possível de etapas em um algoritmo de ordenação no pior caso é pelo menos $n \log n$.

Counting sort

O limite inferior $n \log n$ não se aplica a algoritmos que não comparam elementos de array, mas usam alguma outra informação. Um exemplo de tal algoritmo

é o **counting sort** que ordena um array em tempo $O(n)$ assumindo que cada elemento no array é um inteiro entre $0 \dots c$ e $c = O(n)$.

O algoritmo cria um *array de contagem*, cujos índices são elementos do array original. O algoritmo itera pelo array original e calcula quantas vezes cada elemento aparece no array.

Por exemplo, o array

1	3	6	9	9	3	5	9
---	---	---	---	---	---	---	---

corresponde ao array de contagem a seguir:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	2	0	1	1	0	0	3

Por exemplo, o valor na posição 3 no array de contagem é 2, porque o elemento 3 aparece 2 vezes no array original.

A construção do array de contagem leva tempo $O(n)$. Depois disso, o array ordenado pode ser criado em tempo $O(n)$ porque o número de ocorrências de cada elemento pode ser recuperado do array de contagem. Portanto, a complexidade temporal total do counting sort é $O(n)$.

O counting sort é um algoritmo muito eficiente, mas só pode ser usado quando a constante c é pequena o suficiente, de modo que os elementos do array possam ser usados como índices no array de contagem.

3.2 Ordenação em C++

Quase nunca é uma boa ideia usar um algoritmo de ordenação feito em casa em uma competição, porque existem boas implementações disponíveis em linguagens de programação. Por exemplo, a biblioteca padrão de C++ contém a função `sort` que pode ser facilmente usada para ordenar arrays e outras estruturas de dados.

Há muitos benefícios em usar uma função de biblioteca. Primeiro, isso economiza tempo porque não há necessidade de implementar a função. Segundo, a implementação da biblioteca é certamente correta e eficiente: é improvável que uma função de ordenação feita em casa seja melhor.

Nesta seção, veremos como usar a função `sort` em C++. O código a seguir ordena um vetor em ordem crescente:

```
vector<int> v = {4,2,5,3,5,8,3};  
sort(v.begin(),v.end());
```

Após a ordenação, o conteúdo do vetor será: [2,3,3,4,5,5,8]. A ordem de classificação padrão é crescente, mas uma ordem reversa é possível da seguinte forma:

```
sort(v.rbegin(),v.rend());
```

Um array comum pode ser ordenado da seguinte forma:

```
int n = 7; // tamanho do array  
int a[] = {4,2,5,3,5,8,3};  
sort(a,a+n);
```

O seguinte código ordena a string s:

```
string s = "monkey";  
sort(s.begin(), s.end());
```

Ordenar uma string significa que os caracteres da string são ordenados. Por exemplo, a string "monkey" se torna "ekmnoy".

Operadores de comparação

A função sort requer que um **operador de comparação** seja definido para o tipo de dados dos elementos a serem ordenados. Ao ordenar, esse operador será usado sempre que for necessário determinar a ordem de dois elementos.

A maioria dos tipos de dados em C++ tem um operador de comparação integrado, e elementos desses tipos podem ser ordenados automaticamente. Por exemplo, números são ordenados de acordo com seus valores e strings são ordenadas em ordem alfabética.

Pares (pair) são ordenados principalmente de acordo com seus primeiros elementos (first). No entanto, se os primeiros elementos de dois pares forem iguais, eles são ordenados de acordo com seus segundos elementos (second):

```
vector<pair<int,int>> v;  
v.push_back({1,5});  
v.push_back({2,3});  
v.push_back({1,2});  
sort(v.begin(), v.end());
```

Após isso, a ordem dos pares é: (1,2), (1,5) and (2,3).

De forma semelhante, tuplas (tuple) são ordenadas principalmente pelo primeiro elemento, secundariamente pelo segundo elemento, etc.²:

```
vector<tuple<int,int,int>> v;  
v.push_back({2,1,4});  
v.push_back({1,5,3});  
v.push_back({2,1,3});  
sort(v.begin(), v.end());
```

Após isso, a ordem das tuplas é: (1,5,3), (2,1,3) e (2,1,4).

Structs definidas pelo usuário

As structs definidas pelo usuário não possuem um operador de comparação automaticamente. O operador deve ser definido dentro da struct como uma função operator<, cujo parâmetro é outro elemento do mesmo tipo. O operador deve retornar true se o elemento for menor que o parâmetro, e false caso contrário.

²Note que em alguns compiladores mais antigos, a função make_tuple deve ser usada para criar uma tupla em vez de chaves (por exemplo, make_tuple(2,1,4) em vez de {2,1,4}).

Por exemplo, a seguinte struct P contém as coordenadas x e y de um ponto. O operador de comparação é definido de forma que os pontos sejam ordenados principalmente pela coordenada x e secundariamente pela coordenada y.

```
struct P {
    int x, y;
    bool operator<(const P &p) {
        if (x != p.x) return x < p.x;
        else return y < p.y;
    }
};
```

Funções de comparação

Também é possível fornecer uma **função de comparação** externa para a função sort como uma função de callback. Por exemplo, a seguinte função de comparação comp ordena strings principalmente por comprimento e secundariamente por ordem alfabética:

```
bool comp(string a, string b) {
    if (a.size() != b.size()) return a.size() < b.size();
    return a < b;
}
```

Agora um vetor de strings pode ser ordenado da seguinte forma:

```
sort(v.begin(), v.end(), comp);
```

3.3 Busca binária

Um método geral para buscar um elemento em um array é usar um loop for que itera pelos elementos do array. Por exemplo, o seguinte código busca por um elemento *x* no array:

```
for (int i = 0; i < n; i++) {
    if (array[i] == x) {
        // x encontrado no indice i
    }
}
```

A complexidade temporal desta abordagem é $O(n)$, porque no pior caso é necessário verificar todos os elementos do array. Se a ordem dos elementos for arbitrária, esta também é a melhor abordagem possível, pois não há informações adicionais disponíveis sobre onde no array devemos procurar pelo elemento *x*.

No entanto, se o array estiver *ordenado*, a situação é diferente. Neste caso, é possível realizar a busca muito mais rapidamente, porque a ordem dos elementos

no array orienta a busca. O seguinte algoritmo de **busca binária** efetua a busca por um elemento em um array ordenado de forma eficiente em tempo $O(\log n)$.

Método 1

A maneira usual de implementar a busca binária se assemelha a procurar uma palavra em um dicionário. A busca mantém uma região ativa no array, que inicialmente contém todos os elementos do array. Em seguida, um número de passos é executado, cada um dos quais divide pela metade o tamanho da região.

Em cada etapa, a busca verifica o elemento do meio da região ativa. Se o elemento do meio for o elemento alvo, a busca termina. Caso contrário, a busca continua recursivamente para a metade esquerda ou direita da região, dependendo do valor do elemento do meio.

A ideia acima pode ser implementada da seguinte forma:

```
int a = 0, b = n-1;
while (a <= b) {
    int k = (a+b)/2;
    if (array[k] == x) {
        // x encontrado no índice k
    }
    if (array[k] > x) b = k-1;
    else a = k+1;
}
```

Nesta implementação, a região ativa é $a \dots b$, e inicialmente a região é $0 \dots n-1$. O algoritmo divide o tamanho da região pela metade a cada etapa, então a complexidade temporal é $O(\log n)$.

Método 2

Um método alternativo para implementar a busca binária é baseado em uma maneira eficiente de iterar pelos elementos do array. A ideia é fazer saltos e diminuir a velocidade quando estivermos mais perto do elemento alvo.

busca percorre o array da esquerda para a direita, e o comprimento inicial do salto é $n/2$. Em cada etapa, o comprimento do salto será dividido pela metade: primeiro $n/4$, depois $n/8$, $n/16$, etc., até que finalmente o comprimento seja 1. Após os saltos, ou o elemento alvo foi encontrado ou sabemos que ele não aparece no array.

O código a seguir implementa a ideia acima:

```
int k = 0;
for (int b = n/2; b >= 1; b /= 2) {
    while (k+b < n && array[k+b] <= x) k += b;
}
if (array[k] == x) {
    // x encontrado no índice k
}
```

Durante a busca, a variável b contém o comprimento atual do salto.. A complexidade temporal do algoritmo é $O(\log n)$, porque o código no loop while é executado no máximo duas vezes para cada comprimento de salto.

Funções em C++

A biblioteca padrão de C++ contém as seguintes funções que são baseadas em busca binária e funcionam em tempo logarítmico:

- `lower_bound` retorna um ponteiro para o primeiro elemento do array cujo valor é pelo menos x .
- `upper_bound` retorna um ponteiro para o primeiro elemento do array cujo valor é maior do que x .
- `equal_range` retorna ambos os ponteiros acima.

As funções assumem que o array está ordenado. Se não houver tal elemento, o ponteiro aponta para o elemento após o último elemento do array. Por exemplo, o seguinte código verifica se um array contém um elemento com valor x :

```
auto k = lower_bound(array, array+n, x) - array;
if (k < n && array[k] == x) {
    // x encontrado no índice k
}
```

Então, o seguinte código conta o número de elementos cujo valor é x :

```
auto a = lower_bound(array, array+n, x);
auto b = upper_bound(array, array+n, x);
cout << b-a << "\n";
```

Usando `equal_range`, o código fica mais curto:

```
auto r = equal_range(array, array+n, x);
cout << r.second-r.first << "\n";
```

Encontrando a menor solução

Um uso importante para a busca binária é encontrar a posição onde o valor de uma *função* muda. Suponha que desejamos encontrar o menor valor k que é uma solução válida para um problema. Temos uma função $ok(x)$ que retorna true se x é uma solução válida e false caso contrário. Além disso, sabemos que $ok(x)$ é false quando $x < k$ e true quando $x \geq k$. A situação é a seguinte:

x	0	1	...	$k-1$	k	$k+1$...
$ok(x)$	false	false	...	false	true	true	...

Agora, o valor de k pode ser encontrado usando busca binária

```

int x = -1;
for (int b = z; b >= 1; b /= 2) {
    while (!ok(x+b)) x += b;
}
int k = x+1;

```

A busca encontra o maior valor de x para o qual $ok(x)$ é false. Assim, o próximo valor $k = x + 1$ é o menor valor possível para o qual $ok(k)$ é true. O comprimento inicial do salto z deve ser grande o suficiente, por exemplo, algum valor para o qual sabemos de antemão que $ok(z)$ é true.

O algoritmo chama a função ok $O(\log z)$ vezes, então a complexidade temporal total depende da função ok . Por exemplo, se a função funciona em tempo $O(n)$, a complexidade temporal total é $O(n \log z)$.

Encontrando o valor máximo

A busca binária também pode ser usada para encontrar o valor máximo de uma função que é primeiro crescente e depois decrescente. Nossa tarefa é encontrar uma posição k tal que

- $f(x) < f(x+1)$ quando $x < k$, e
- $f(x) > f(x+1)$ quando $x \geq k$.

A ideia é usar busca binária para encontrar o maior valor de x para o qual $f(x) < f(x+1)$. Isso implica que $k = x + 1$ porque $f(x+1) > f(x+2)$. O seguinte código implementa a busca:

```

int x = -1;
for (int b = z; b >= 1; b /= 2) {
    while (f(x+b) < f(x+b+1)) x += b;
}
int k = x+1;

```

Note que, ao contrário da busca binária comum, aqui não é permitido que valores consecutivos da função sejam iguais. Nesse caso, não seria possível saber como continuar a busca.

Capítulo 4

Estruturas de Dados

Uma **estrutura de dados** é uma forma de armazenar dados na memória de um computador. É importante escolher uma estrutura de dados apropriada para um problema, porque cada estrutura de dados tem suas próprias vantagens e desvantagens. A questão crucial é: quais operações são eficientes na estrutura de dados escolhida?

Este capítulo apresenta as estruturas de dados mais importantes na biblioteca padrão do C++. É uma boa ideia usar a biblioteca padrão sempre que possível, porque isso economizará muito tempo. Mais adiante no livro, aprenderemos sobre mais sofisticadas estruturas de dados que não estão disponíveis na biblioteca padrão.

4.1 Vetores Dinâmicos

Um **vetor dinâmico** é um vetor cujo tamanho pode ser alterado durante a execução do programa. O vetor dinâmico mais popular em C++ é a estrutura `vector`, que pode ser usada quase como um vetor comum.

O código a seguir cria um vetor vazio e adiciona três elementos a ele:

```
vector<int> v;  
v.push_back(3); // [3]  
v.push_back(2); // [3,2]  
v.push_back(5); // [3,2,5]
```

Depois disso, os elementos podem ser acessados como em um vetor comum:

```
cout << v[0] << "\n"; // 3  
cout << v[1] << "\n"; // 2  
cout << v[2] << "\n"; // 5
```

A função `size` retorna o número de elementos no vetor. O código a seguir itera através do vetor e imprime todos os elementos nele:

```
for (int i = 0; i < v.size(); i++) {  
    cout << v[i] << "\n";  
}
```

```
}
```

Uma maneira mais curta de iterar através de um vetor é a seguinte:

```
for (auto x : v) {  
    cout << x << "\n";  
}
```

A função `back` retorna o último elemento no vetor, e a função `pop_back` remove o último elemento:

```
vector<int> v;  
v.push_back(5);  
v.push_back(2);  
cout << v.back() << "\n"; // 2  
v.pop_back();  
cout << v.back() << "\n"; // 5
```

O código a seguir cria um vetor com cinco elementos:

```
vector<int> v = {2,4,2,5,1};
```

Outra maneira de criar um vetor é fornecer o número de elementos e o valor inicial para cada elemento:

```
// tamanho 10, valor inicial 0  
vector<int> v(10);
```

```
// tamanho 10, valor inicial 5  
vector<int> v(10, 5);
```

A implementação interna de um vetor usa um vetor comum. Se o tamanho do vetor aumenta e o vetor se torna muito pequeno, um novo vetor é alocado e todos os elementos são movidos para o novo vetor. No entanto, isso não acontece com frequência e a complexidade de tempo média de `push_back` é $O(1)$.

A estrutura `string` também é um vetor dinâmico que pode ser usado quase como um vetor. Além disso, há uma sintaxe especial para strings que não está disponível em outras estruturas de dados. Strings podem ser combinadas usando o símbolo `+`. A função `substr(k , x)` retorna a substring que começa na posição k e tem comprimento x , e a função `find(t)` encontra a posição da primeira ocorrência de uma substring t .

O código a seguir apresenta algumas operações com strings:

```
string a = "hatti";  
string b = a+a;  
cout << b << "\n"; // hattihatti  
b[5] = 'v';  
cout << b << "\n"; // hattivatti
```

```
string c = b.substr(3,4);  
cout << c << "\n"; // tiva
```

4.2 Estruturas de Conjunto

Um **conjunto** é uma estrutura de dados que mantém uma coleção de elementos. As operações básicas de conjuntos são inserção de elemento, pesquisa e remoção.

A biblioteca padrão do C++ contém duas implementações de conjunto: A estrutura `set` é baseada em uma árvore binária balanceada e suas operações funcionam em tempo $O(\log n)$. A estrutura `unordered_set` usa hashing, e suas operações funcionam em tempo $O(1)$ em média.

A escolha de qual implementação de conjunto usar é frequentemente uma questão de gosto. O benefício da estrutura `set` é que ela mantém a ordem dos elementos e fornece funções que não estão disponíveis em `unordered_set`. Por outro lado, `unordered_set` pode ser mais eficiente.

O código a seguir cria um conjunto que contém inteiros, e mostra algumas das operações. A função `insert` adiciona um elemento ao conjunto, a função `count` retorna o número de ocorrências de um elemento no conjunto, e a função `erase` remove um elemento do conjunto.

```
set<int> s;  
s.insert(3);  
s.insert(2);  
s.insert(5);  
cout << s.count(3) << "\n"; // 1  
cout << s.count(4) << "\n"; // 0  
s.erase(3);  
s.insert(4);  
cout << s.count(3) << "\n"; // 0  
cout << s.count(4) << "\n"; // 1
```

Um conjunto pode ser usado principalmente como um vetor, mas não é possível acessar os elementos usando a notação `[]`. O código a seguir cria um conjunto, imprime o número de elementos nele e então itera por todos os elementos:

```
set<int> s = {2,5,6,8};  
cout << s.size() << "\n"; // 4  
for (auto x : s) {  
    cout << x << "\n";  
}
```

Uma propriedade importante dos conjuntos é que todos os seus elementos são *distintos*. Assim, a função `count` sempre retorna 0 (o elemento não está no conjunto) ou 1 (o elemento está no conjunto), e a função `insert` nunca adiciona um elemento ao conjunto se ele já estiver lá. O código a seguir ilustra isso:

```
set<int> s;
```

```
s.insert(5);
s.insert(5);
s.insert(5);
cout << s.count(5) << "\n"; // 1
```

C++ também contém as estruturas `multiset` e `unordered_multiset` que, de outra forma, funcionam como `set` e `unordered_set` mas podem conter várias instâncias de um elemento. Por exemplo, no código a seguir, todas as três instâncias do número 5 são adicionadas a um multiconjunto:

```
multiset<int> s;
s.insert(5);
s.insert(5);
s.insert(5);
cout << s.count(5) << "\n"; // 3
```

A função `erase` remove todas as instâncias de um elemento de um multiconjunto:

```
s.erase(5);
cout << s.count(5) << "\n"; // 0
```

Frequentemente, apenas uma instância deve ser removida, o que pode ser feito da seguinte forma:

```
s.erase(s.find(5));
cout << s.count(5) << "\n"; // 2
```

4.3 Estruturas de Mapa

Um **mapa** é um vetor generalizado que consiste em pares chave-valor. Enquanto as chaves em um vetor comum são sempre os inteiros consecutivos $0, 1, \dots, n-1$, onde n é o tamanho do vetor, as chaves em um mapa podem ser de qualquer tipo de dados e não precisam ser valores consecutivos.

A biblioteca padrão do C++ contém duas implementações de mapa que correspondem às implementações de conjunto: a estrutura `map` é baseada em uma árvore binária balanceada e acessar elementos leva tempo $O(\log n)$, enquanto a estrutura `unordered_map` usa hashing e acessar elementos leva tempo $O(1)$ em média.

O código a seguir cria um mapa onde as chaves são strings e os valores são inteiros:

```
map<string, int> m;
m["monkey"] = 4;
m["banana"] = 3;
m["harpsichord"] = 9;
cout << m["banana"] << "\n"; // 3
```


Se o valor de uma chave for solicitado mas o mapa não o contém, a chave é adicionada automaticamente ao mapa com um valor padrão. Por exemplo, no código a seguir, a chave "aybabbtu" com valor 0 é adicionada ao mapa.

```
map<string,int> m;  
cout << m["aybabbtu"] << "\n"; // 0
```

A função count verifica se uma chave existe em um mapa:

```
if (m.count("aybabbtu")) {  
    // a chave existe  
}
```

O código a seguir imprime todas as chaves e valores em um mapa:

```
for (auto x : m) {  
    cout << x.first << " " << x.second << "\n";  
}
```

4.4 Iteradores e Intervalos

Muitas funções na biblioteca padrão do C++ operam com iteradores. Um **iterador** é uma variável que aponta para um elemento em uma estrutura de dados.

Os iteradores frequentemente usados begin e end definem um intervalo que contém todos os elementos em uma estrutura de dados. O iterador begin aponta para o primeiro elemento na estrutura de dados, e o iterador end aponta para a posição *após* o último elemento. A situação é a seguinte:

```
    { 3, 4, 6, 8, 12, 13, 14, 17 }  
      ↑                               ↑  
    s.begin()                       s.end()
```

Observe a assimetria nos iteradores: s.begin() aponta para um elemento na estrutura de dados, enquanto s.end() aponta para fora da estrutura de dados. Assim, o intervalo definido pelos iteradores é *semiaberto*.

Trabalhando com Intervalos

Iteradores são usados em funções da biblioteca padrão do C++ que recebem um intervalo de elementos em uma estrutura de dados. Normalmente, queremos processar todos os elementos em uma estrutura de dados, então os iteradores begin e end são fornecidos para a função.

Por exemplo, o código a seguir ordena um vetor usando a função sort, então inverte a ordem dos elementos usando a função reverse, e finalmente embaralha a ordem de os elementos usando a função random_shuffle.

```
sort(v.begin(), v.end());  
reverse(v.begin(), v.end());  
random_shuffle(v.begin(), v.end());
```

Essas funções também podem ser usadas com um vetor comum. Nesse caso, as funções recebem ponteiros para o vetor em vez de iteradores:

```
sort(a, a+n);
reverse(a, a+n);
random_shuffle(a, a+n);
```

Iteradores de Conjunto

Iteradores são frequentemente usados para acessar elementos de um conjunto. O código a seguir cria um iterador `it` que aponta para o menor elemento em um conjunto:

```
set<int>::iterator it = s.begin();
```

Uma maneira mais curta de escrever o código é a seguinte:

```
auto it = s.begin();
```

O elemento para o qual um iterador aponta pode ser acessado usando o símbolo `*`. Por exemplo, o código a seguir imprime o primeiro elemento no conjunto:

```
auto it = s.begin();
cout << *it << "\n";
```

Iteradores podem ser movidos usando os operadores `++` (para frente) e `--` (para trás), o que significa que o iterador se move para o próximo ou anterior elemento no conjunto.

O código a seguir imprime todos os elementos em ordem crescente:

```
for (auto it = s.begin(); it != s.end(); it++) {
    cout << *it << "\n";
}
```

O código a seguir imprime o maior elemento no conjunto:

```
auto it = s.end(); it--;
cout << *it << "\n";
```

A função `find(x)` retorna um iterador que aponta para um elemento cujo valor é `x`. No entanto, se o conjunto não contém `x`, o iterador será `end`.

```
auto it = s.find(x);
if (it == s.end()) {
    // x nao foi encontrado
}
```

A função `lower_bound(x)` retorna um iterador para o menor elemento no conjunto cujo valor é *pelo menos* `x`, e a função `upper_bound(x)` retorna um iterador para o menor elemento no conjunto cujo valor é *maior que* `x`. Em ambas as funções, se tal elemento não existe, o valor de retorno é `end`. Essas funções

não são suportadas pela estrutura `unordered_set` que não mantém a ordem dos elementos.

Por exemplo, o código a seguir encontra o elemento mais próximo a x :

```
auto it = s.lower_bound(x);
if (it == s.begin()) {
    cout << *it << "\n";
} else if (it == s.end()) {
    it--;
    cout << *it << "\n";
} else {
    int a = *it; it--;
    int b = *it;
    if (x-b < a-x) cout << b << "\n";
    else cout << a << "\n";
}
```

O código assume que o conjunto não está vazio, e passa por todos os casos possíveis usando um iterador `it`. Primeiro, o iterador aponta para o menor elemento cujo valor é pelo menos x . Se `it` for igual a `begin`, o elemento correspondente está mais próximo de x . Se `it` for igual a `end`, o maior elemento no conjunto está mais próximo de x . Se nenhum dos casos anteriores for válido, o elemento mais próximo a x é o elemento que corresponde a `it` ou o elemento anterior.

4.5 Outras Estruturas

Bitset

Um **bitset** é um vetor cujo cada valor é 0 ou 1. Por exemplo, o código a seguir cria um `bitset` que contém 10 elementos:

```
bitset<10> s;
s[1] = 1;
s[3] = 1;
s[4] = 1;
s[7] = 1;
cout << s[4] << "\n"; // 1
cout << s[5] << "\n"; // 0
```

O benefício de usar bitsets é que eles requerem menos memória do que vetores comuns, porque cada elemento em um `bitset` apenas usa um bit de memória. Por exemplo, se n bits são armazenados em um vetor `int`, $32n$ bits de memória serão usados, mas um `bitset` correspondente requer apenas n bits de memória. Além disso, os valores de um `bitset` podem ser manipulados eficientemente usando operadores de bits, o que torna possível otimizar algoritmos usando conjuntos de bits.

O código a seguir mostra outra maneira de criar o `bitset` acima:

```
bitset<10> s(string("0010011010")); // da direita para a esquerda
cout << s[4] << "\n"; // 1
cout << s[5] << "\n"; // 0
```

A função `count` retorna o número de uns no `bitset`:

```
bitset<10> s(string("0010011010"));
cout << s.count() << "\n"; // 4
```

O código a seguir mostra exemplos de uso de operações de bits:

```
bitset<10> a(string("0010110110"));
bitset<10> b(string("1011011000"));
cout << (a&b) << "\n"; // 0010010000
cout << (a|b) << "\n"; // 1011111110
cout << (a^b) << "\n"; // 1001101110
```

Deque

Um **deque** é um vetor dinâmico cujo tamanho pode ser eficientemente alterado em ambas as extremidades do vetor. Como um vetor, um deque fornece as funções `push_back` e `pop_back`, mas também inclui as funções `push_front` e `pop_front` que não estão disponíveis em um vetor.

Um deque pode ser usado da seguinte forma:

```
deque<int> d;
d.push_back(5); // [5]
d.push_back(2); // [5,2]
d.push_front(3); // [3,5,2]
d.pop_back(); // [3,5]
d.pop_front(); // [5]
```

A implementação interna de um deque é mais complexa do que a de um vetor, e por esta razão, um deque é mais lento que um vetor. Ainda assim, adicionar e remover elementos leva tempo $O(1)$ em média em ambas as extremidades.

Pilha

Uma **pilha** é uma estrutura de dados que fornece duas operações de tempo $O(1)$: adicionar um elemento ao topo, e remover um elemento do topo. Só é possível acessar o topo elemento de uma pilha.

O código a seguir mostra como uma pilha pode ser usada:

```
stack<int> s;
s.push(3);
s.push(2);
s.push(5);
```

```
cout << s.top(); // 5
s.pop();
cout << s.top(); // 2
```

Fila

Uma **fila** também fornece duas operações de tempo $O(1)$: adicionar um elemento ao final da fila, e remover o primeiro elemento da fila. Só é possível acessar o primeiro e último elemento de uma fila.

O código a seguir mostra como uma fila pode ser usada:

```
queue<int> q;
q.push(3);
q.push(2);
q.push(5);
cout << q.front(); // 3
q.pop();
cout << q.front(); // 2
```

Fila de Prioridade

Uma **fila de prioridade** mantém um conjunto de elementos. As operações suportadas são inserção e, dependendo do tipo de fila, recuperação e remoção de o elemento mínimo ou máximo. A inserção e remoção levam tempo $O(\log n)$, e a recuperação leva tempo $O(1)$.

Enquanto um conjunto ordenado suporta eficientemente todas as operações de uma fila de prioridade, o benefício de usar uma fila de prioridade é que ela tem fatores constantes menores. Uma fila de prioridade é geralmente implementada usando uma estrutura de heap que é muito mais simples do que uma árvore binária balanceada usada em um conjunto ordenado.

Por padrão, os elementos em uma fila de prioridade C++ são classificados em ordem decrescente, e é possível encontrar e remover o maior elemento da fila. O código a seguir ilustra isso:

```
priority_queue<int> q;
q.push(3);
q.push(5);
q.push(7);
q.push(2);
cout << q.top() << "\n"; // 7
q.pop();
cout << q.top() << "\n"; // 5
q.pop();
q.push(6);
cout << q.top() << "\n"; // 6
q.pop();
```

Se quisermos criar uma fila de prioridade que suporte encontrar e remover o menor elemento, podemos fazê-lo da seguinte forma:

```
priority_queue<int, vector<int>, greater<int>>> q;
```

Estruturas de Dados Baseadas em Políticas

O compilador g++ também suporta algumas estruturas de dados que não fazem parte da biblioteca padrão C++. Tais estruturas são chamadas de estruturas de dados *baseadas em políticas*. Para usar essas estruturas, as seguintes linhas devem ser adicionadas ao código:

```
#include <ext/pb_ds/assoc_container.hpp>
using namespace __gnu_pbds;
```

Depois disso, podemos definir uma estrutura de dados `indexed_set` que é como set mas pode ser indexada como um vetor. A definição para valores `int` é a seguinte:

```
typedef tree<int, null_type, less<int>, rb_tree_tag,
            tree_order_statistics_node_update> indexed_set;
```

Agora podemos criar um conjunto da seguinte forma:

```
indexed_set s;
s.insert(2);
s.insert(3);
s.insert(7);
s.insert(9);
```

A especialidade deste conjunto é que temos acesso a os índices que os elementos teriam em um vetor ordenado. A função `find_by_order` retorna um iterador para o elemento em uma determinada posição:

```
auto x = s.find_by_order(2);
cout << *x << "\n"; // 7
```

E a função `order_of_key` retorna a posição de um determinado elemento:

```
cout << s.order_of_key(7) << "\n"; // 2
```

Se o elemento não aparecer no conjunto, obtemos a posição que o elemento teria no conjunto:

```
cout << s.order_of_key(6) << "\n"; // 2
cout << s.order_of_key(8) << "\n"; // 3
```

Ambas as funções funcionam em tempo logarítmico.

4.6 Comparação com Ordenação

Muitas vezes é possível resolver um problema usando estruturas de dados ou ordenação. Às vezes, existem diferenças notáveis na eficiência real dessas abordagens, que podem estar ocultas em suas complexidades de tempo.

Vamos considerar um problema onde recebemos duas listas A e B que contêm n elementos. Nossa tarefa é calcular o número de elementos que pertencem a ambas as listas. Por exemplo, para as listas

$$A = [5, 2, 8, 9] \quad \text{e} \quad B = [3, 2, 9, 5],$$

a resposta é 3 porque os números 2, 5 e 9 pertencem a ambas as listas.

Uma solução direta para o problema é percorrer todos os pares de elementos em tempo $O(n^2)$, mas a seguir vamos nos concentrar em algoritmos mais eficientes.

Algoritmo 1

Construímos um conjunto dos elementos que aparecem em A , e depois disso, iteramos pelos elementos de B e verificamos para cada elemento se ele também pertence a A . Isso é eficiente porque os elementos de A estão em um conjunto. Usando a estrutura `set`, a complexidade de tempo do algoritmo é $O(n \log n)$.

Algoritmo 2

Não é necessário manter um conjunto ordenado, então, em vez da estrutura `set` também podemos usar a estrutura `unordered_set`. Esta é uma maneira fácil de tornar o algoritmo mais eficiente, porque só temos que mudar a estrutura de dados subjacente. A complexidade de tempo do novo algoritmo é $O(n)$.

Algoritmo 3

Em vez de estruturas de dados, podemos usar a ordenação. Primeiro, ordenamos as listas A e B . Depois disso, iteramos pelas duas listas ao mesmo tempo e encontramos os elementos comuns. A complexidade de tempo da ordenação é $O(n \log n)$, e o resto do algoritmo funciona em tempo $O(n)$, então a complexidade de tempo total é $O(n \log n)$.

Comparação de Eficiência

A tabela a seguir mostra a eficiência dos algoritmos acima quando n varia e os elementos das listas são inteiros aleatórios entre $1 \dots 10^9$:

n	Algoritmo 1	Algoritmo 2	Algoritmo 3
10^6	1.5 s	0.3 s	0.2 s
$2 \cdot 10^6$	3.7 s	0.8 s	0.3 s
$3 \cdot 10^6$	5.7 s	1.3 s	0.5 s
$4 \cdot 10^6$	7.7 s	1.7 s	0.7 s
$5 \cdot 10^6$	10.0 s	2.3 s	0.9 s

Os algoritmos 1 e 2 são iguais, exceto que eles usam estruturas de conjunto diferentes. Neste problema, esta escolha tem um efeito importante sobre o tempo de execução, porque o Algoritmo 2 é 4 a 5 vezes mais rápido que o Algoritmo 1.

No entanto, o algoritmo mais eficiente é o Algoritmo 3 que usa ordenação. Ele usa apenas metade do tempo em comparação com o Algoritmo 2. Curiosamente, a complexidade de tempo do Algoritmo 1 e do Algoritmo 3 é $O(n \log n)$, mas apesar disso, o Algoritmo 3 é dez vezes mais rápido. Isso pode ser explicado pelo fato de que a ordenação é um procedimento simples e é feito apenas uma vez no início do Algoritmo 3, e o resto do algoritmo funciona em tempo linear. Por outro lado, o Algoritmo 1 mantém uma árvore binária balanceada complexa durante todo o algoritmo.

Capítulo 5

Busca completa

Busca completa é um método geral que pode ser usado para resolver quase qualquer problema algorítmico. A ideia é gerar todas as soluções possíveis para o problema usando força bruta, e então selecionar a melhor solução ou contar o número de soluções, dependendo do problema.

A busca completa é uma boa técnica se houver tempo suficiente para verificar todas as soluções, porque a busca é geralmente fácil de implementar e sempre fornece a resposta correta. Se a busca completa for muito lenta, outras técnicas, como algoritmos gulosos ou programação dinâmica, podem ser necessárias.

5.1 Gerando subconjuntos

Consideramos primeiro o problema de gerar todos os subconjuntos de um conjunto de n elementos. Por exemplo, os subconjuntos de $\{0, 1, 2\}$ são \emptyset , $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{0, 1\}$, $\{0, 2\}$, $\{1, 2\}$ e $\{0, 1, 2\}$. Existem dois métodos comuns para gerar subconjuntos: podemos realizar uma busca recursiva ou explorar a representação de bits de inteiros.

Método 1

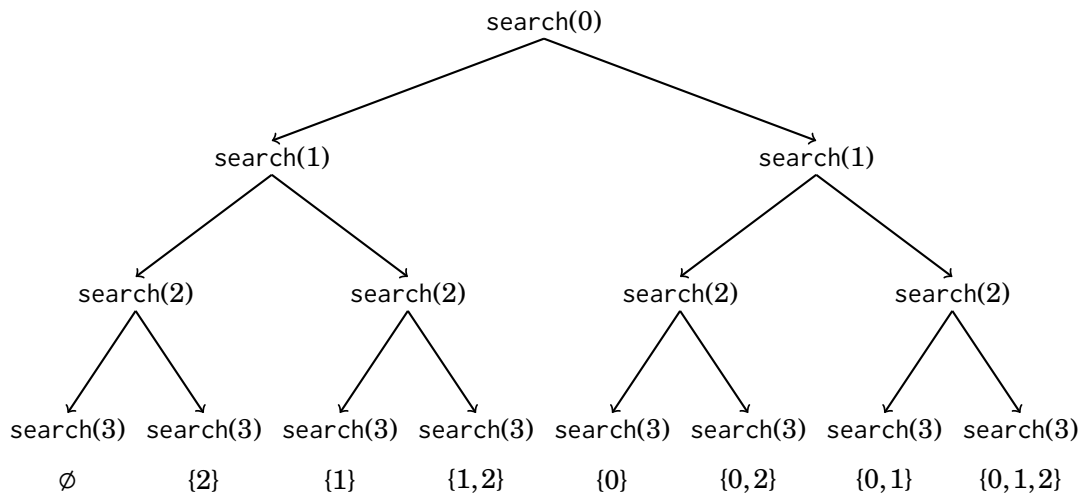
Uma maneira elegante de percorrer todos os subconjuntos de um conjunto é usar recursão. A seguinte função `search` gera os subconjuntos do conjunto $\{0, 1, \dots, n-1\}$. A função mantém um vetor `subset` que conterá os elementos de cada subconjunto. A busca começa quando a função é chamada com o parâmetro 0.

```
void search(int k) {
    if (k == n) {
        // processa subconjunto
    } else {
        search(k+1);
        subset.push_back(k);
        search(k+1);
        subset.pop_back();
    }
}
```

}

Quando a função `search` é chamada com o parâmetro k , ela decide se inclui o elemento k no subconjunto ou não, e em ambos os casos, então chama a si mesma com o parâmetro $k + 1$. No entanto, se $k = n$, a função percebe que todos os elementos foram processados e um subconjunto foi gerado.

A seguinte árvore ilustra as chamadas de função quando $n = 3$. Podemos sempre escolher o ramo esquerdo (k não está incluído no subconjunto) ou o ramo direito (k está incluído no subconjunto).



Método 2

Outra maneira de gerar subconjuntos é baseada na representação de bits de inteiros. Cada subconjunto de um conjunto de n elementos pode ser representado como uma sequência de n bits, que corresponde a um inteiro entre $0 \dots 2^n - 1$. Os uns na sequência de bits indicam quais elementos estão incluídos no subconjunto.

A convenção usual é que o último bit corresponde ao elemento 0, o penúltimo bit corresponde ao elemento 1, e assim por diante. Por exemplo, a representação de bits de 25 é 11001, que corresponde ao subconjunto $\{0, 3, 4\}$.

O seguinte código percorre os subconjuntos de um conjunto de n elementos:

```
for (int b = 0; b < (1<<n); b++) {  
    // processa subconjunto  
}
```

O seguinte código mostra como podemos encontrar os elementos de um subconjunto que corresponde a uma sequência de bits. Ao processar cada subconjunto, o código constrói um vetor que contém os elementos no subconjunto.

```
for (int b = 0; b < (1<<n); b++) {  
    vector<int> subset;  
    for (int i = 0; i < n; i++) {  
        if (b & (1<<i)) subset.push_back(i);  
    }  
}
```

```
}
```

5.2 Gerando permutações

A seguir, consideramos o problema de gerar todas as permutações de um conjunto de n elementos. Por exemplo, as permutações de $\{0, 1, 2\}$ são $(0, 1, 2)$, $(0, 2, 1)$, $(1, 0, 2)$, $(1, 2, 0)$, $(2, 0, 1)$ e $(2, 1, 0)$. Novamente, existem duas abordagens: podemos usar recursão ou percorrer as permutações iterativamente.

Método 1

Assim como os subconjuntos, as permutações podem ser geradas usando recursão. A seguinte função `search` percorre as permutações do conjunto $\{0, 1, \dots, n-1\}$. A função constrói um vetor `permutation` que contém a permutação, e a busca começa quando a função é chamada sem parâmetros.

```
void search() {
    if (permutation.size() == n) {
        // processa permutacao
    } else {
        for (int i = 0; i < n; i++) {
            if (chosen[i]) continue;
            chosen[i] = true;
            permutation.push_back(i);
            search();
            chosen[i] = false;
            permutation.pop_back();
        }
    }
}
```

Cada chamada de função adiciona um novo elemento a `permutation`. O array `chosen` indica quais elementos já estão incluídos na permutação. Se o tamanho de `permutation` for igual ao tamanho do conjunto, uma permutação foi gerada.

Método 2

Outro método para gerar permutações é começar com a permutação $\{0, 1, \dots, n-1\}$ e repetidamente usar uma função que constrói a próxima permutação em ordem crescente. A biblioteca padrão C++ contém a função `next_permutation` que pode ser usada para isso:

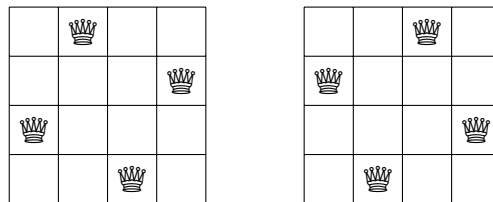
```
vector<int> permutation;
for (int i = 0; i < n; i++) {
    permutation.push_back(i);
}
do {
```

```
// processa permutacao
} while (next_permutation(permutation.begin(), permutation.end()));
```

5.3 Backtracking

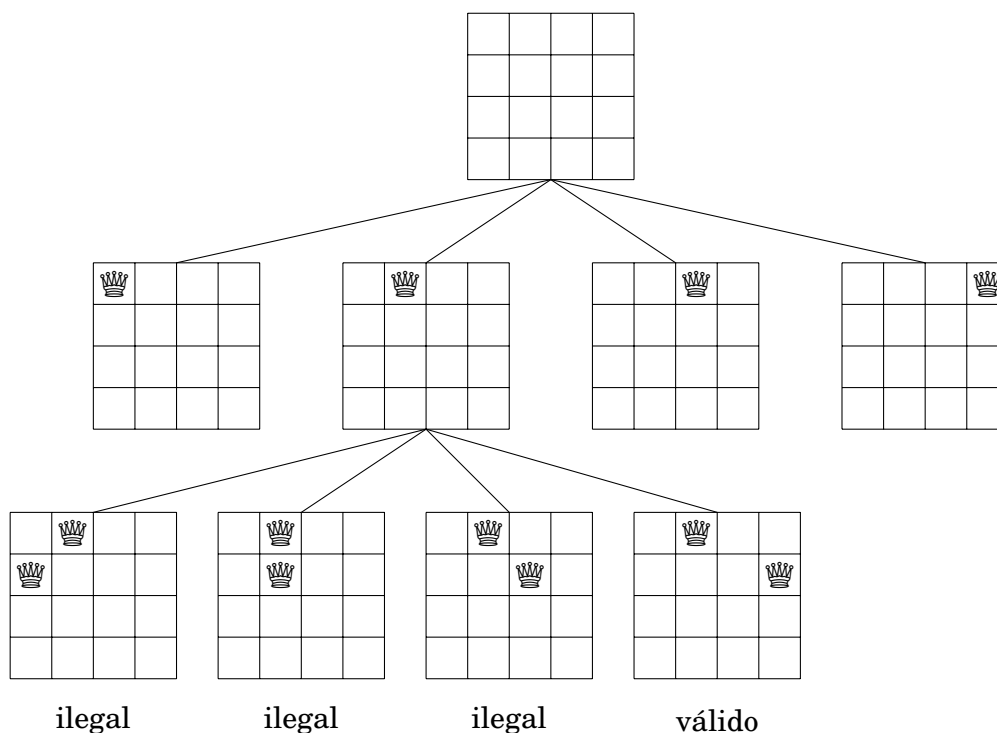
Um algoritmo de **backtracking** começa com uma solução vazia e estende a solução passo a passo. A busca percorre recursivamente todas as maneiras diferentes de como uma solução pode ser construída.

Como exemplo, considere o problema de calcular o número de maneiras pelas quais n rainhas podem ser colocadas em um tabuleiro de xadrez $n \times n$ para que nenhuma rainha ataque a outra. Por exemplo, quando $n = 4$, existem duas soluções possíveis:



O problema pode ser resolvido usando backtracking colocando rainhas no tabuleiro linha por linha. Mais precisamente, exatamente uma rainha será colocada em cada linha para que nenhuma rainha ataque qualquer uma das rainhas colocadas anteriormente. Uma solução foi encontrada quando todas as n rainhas foram colocadas no tabuleiro.

Por exemplo, quando $n = 4$, alguma solução parcial gerada pelo algoritmo de backtracking é a seguinte:



No nível inferior, as três primeiras configurações são ilegais, porque as rainhas se atacam. No entanto, a quarta configuração é válida e pode ser estendida para uma solução completa por colocando mais duas rainhas no tabuleiro. Existe apenas uma maneira de colocar as duas rainhas restantes.

O algoritmo pode ser implementado da seguinte forma:

```
void search(int y) {
    if (y == n) {
        count++;
        return;
    }
    for (int x = 0; x < n; x++) {
        if (column[x] || diag1[x+y] || diag2[x-y+n-1]) continue;
        column[x] = diag1[x+y] = diag2[x-y+n-1] = 1;
        search(y+1);
        column[x] = diag1[x+y] = diag2[x-y+n-1] = 0;
    }
}
```

A busca começa chamando `search(0)`. O tamanho do tabuleiro é $n \times n$, e o código calcula o número de soluções para `count`.

O código assume que as linhas e colunas do tabuleiro são numeradas de 0 a $n - 1$. Quando a função `search` é chamada com o parâmetro y , ela coloca uma rainha na linha y e então chama a si mesma com o parâmetro $y + 1$. Então, se $y = n$, uma solução foi encontrada e a variável `count` é incrementada em um.

O array `column` mantém o controle das colunas que contêm uma rainha, e os arrays `diag1` e `diag2` mantêm o controle das diagonais. Não é permitido adicionar outra rainha a uma coluna ou diagonal que já contém uma rainha. Por exemplo, as colunas e diagonais do tabuleiro 4×4 são numeradas da seguinte forma:

0	1	2	3
0	1	2	3
0	1	2	3
0	1	2	3

column

0	1	2	3
1	2	3	4
2	3	4	5
3	4	5	6

diag1

3	4	5	6
2	3	4	5
1	2	3	4
0	1	2	3

diag2

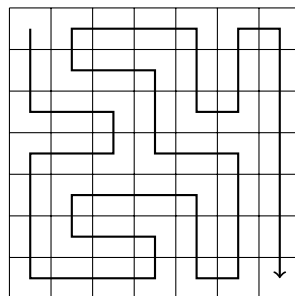
Seja $q(n)$ o número de maneiras de colocar n rainhas em um tabuleiro de xadrez $n \times n$. O algoritmo de backtracking acima nos diz que, por exemplo, $q(8) = 92$. Quando n aumenta, a busca rapidamente se torna lenta, porque o número de soluções aumenta exponencialmente. Por exemplo, calcular $q(16) = 14772512$ usando o algoritmo acima já leva cerca de um minuto em um computador moderno¹.

¹Não há maneira conhecida de calcular com eficiência valores maiores de $q(n)$. O recorde atual é $q(27) = 234907967154122528$, calculado em 2016 [55].

5.4 Podando a busca

Muitas vezes podemos otimizar o backtracking podando a árvore de busca. A ideia é adicionar "inteligência" ao algoritmo para que ele perceba o mais rápido possível se uma solução parcial não pode ser estendida para uma solução completa. Essas otimizações podem ter um tremendo efeito na eficiência da busca.

Vamos considerar o problema de calcular o número de caminhos em uma grade $n \times n$ do canto superior esquerdo para o canto inferior direito, de forma que o caminho visite cada quadrado exatamente uma vez. Por exemplo, em uma grade 7×7 , existem 111712 tais caminhos. Um dos caminhos é o seguinte:



Vamos nos concentrar no caso 7×7 , porque seu nível de dificuldade é apropriado às nossas necessidades. Começamos com um algoritmo de backtracking direto, e então o otimizamos passo a passo usando observações de como a busca pode ser podada. Após cada otimização, medimos o tempo de execução do algoritmo e o número de chamadas recursivas, para que possamos ver claramente o efeito de cada otimização na eficiência da busca.

Algoritmo básico

A primeira versão do algoritmo não contém nenhuma otimização. Nós simplesmente usamos backtracking para gerar todos os caminhos possíveis do canto superior esquerdo para o canto inferior direito e contamos o número de tais caminhos.

- tempo de execução: 483 segundos
- número de chamadas recursivas: 76 bilhões

Otimização 1

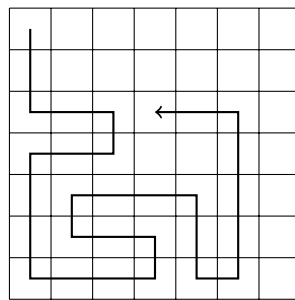
Em qualquer solução, primeiro nos movemos um passo para baixo ou para a direita. Há sempre dois caminhos que são simétricos sobre a diagonal da grade após o primeiro passo. Por exemplo, os seguintes caminhos são simétricos:

Neste caso, não podemos mais visitar todos os quadrados, então podemos encerrar a busca. Esta otimização é muito útil:

- tempo de execução: 1.8 segundos
- número de chamadas recursivas: 221 milhões

Otimização 4

A ideia da Otimização 3 pode ser generalizada: se o caminho não puder continuar em frente mas pode virar à esquerda ou à direita, a grade se divide em duas partes que contêm quadrados não visitados. Por exemplo, considere o seguinte caminho:



É claro que não podemos mais visitar todos os quadrados, então podemos encerrar a busca. Após esta otimização, a busca é muito eficiente:

- tempo de execução: 0.6 segundos
- número de chamadas recursivas: 69 milhões

Agora é um bom momento para parar de otimizar o algoritmo e ver o que alcançamos. O tempo de execução do algoritmo original foi de 483 segundos, e agora, após as otimizações, o tempo de execução é de apenas 0.6 segundos. Assim, o algoritmo se tornou quase 1000 vezes mais rápido após as otimizações.

Este é um fenômeno usual em backtracking, porque a árvore de busca é geralmente grande e até mesmo observações simples podem efetivamente podar a busca. Especialmente úteis são as otimizações que ocorrem durante as primeiras etapas do algoritmo, ou seja, no topo da árvore de busca.

5.5 Encontro no meio

Encontrar no meio é uma técnica onde o espaço de busca é dividido em duas partes de tamanho aproximadamente igual. Uma busca separada é realizada para ambas as partes, e finalmente os resultados das buscas são combinados.

A técnica pode ser usada se houver uma maneira eficiente de combinar os resultados das buscas. Nessa situação, as duas buscas podem exigir menos tempo

do que uma busca grande. Tipicamente, podemos transformar um fator de 2^n em um fator de $2^{n/2}$ usando a técnica de encontro no meio.

Como exemplo, considere um problema onde recebemos uma lista de n números e um número x , e queremos descobrir se é possível escolher alguns números da lista de modo que sua soma seja x . Por exemplo, dada a lista $[2, 4, 5, 9]$ e $x = 15$, podemos escolher os números $[2, 4, 9]$ para obter $2 + 4 + 9 = 15$. No entanto, se $x = 10$ para a mesma lista, não é possível formar a soma.

Um algoritmo simples para o problema é percorrer todos os subconjuntos dos elementos e verificar se a soma de qualquer um dos subconjuntos é x . O tempo de execução de tal algoritmo é $O(2^n)$, porque existem 2^n subconjuntos. No entanto, usando a técnica de encontro no meio, podemos alcançar um algoritmo de tempo $O(2^{n/2})$ mais eficiente². Observe que $O(2^n)$ e $O(2^{n/2})$ são complexidades diferentes porque $2^{n/2}$ é igual a $\sqrt{2^n}$.

A ideia é dividir a lista em duas listas A e B tais que ambas as listas contêm cerca de metade dos números. A primeira busca gera todos os subconjuntos de A e armazena suas somas em uma lista S_A . Da mesma forma, a segunda busca cria uma lista S_B a partir de B . Depois disso, basta verificar se é possível escolher um elemento de S_A e outro elemento de S_B tal que sua soma seja x . Isso é possível exatamente quando há uma maneira de formar a soma x usando os números da lista original.

Por exemplo, suponha que a lista seja $[2, 4, 5, 9]$ e $x = 15$. Primeiro, dividimos a lista em $A = [2, 4]$ e $B = [5, 9]$. Depois disso, criamos as listas $S_A = [0, 2, 4, 6]$ e $S_B = [0, 5, 9, 14]$. Neste caso, a soma $x = 15$ é possível de formar, porque S_A contém a soma 6, S_B contém a soma 9, e $6 + 9 = 15$. Isso corresponde à solução $[2, 4, 9]$.

Podemos implementar o algoritmo de modo que sua complexidade de tempo seja $O(2^{n/2})$. Primeiro, geramos listas *ordenadas* S_A e S_B , o que pode ser feito em tempo $O(2^{n/2})$ usando uma técnica semelhante à da mesclagem. Depois disso, como as listas estão ordenadas, podemos verificar em tempo $O(2^{n/2})$ se a soma x pode ser criada a partir de S_A e S_B .

²Esta ideia foi introduzida em 1974 por E. Horowitz e S. Sahni [39].

Capítulo 6

Algoritmos gulosos

Um **algoritmo guloso** constrói uma solução para o problema sempre fazendo a escolha que parece ser a melhor no momento. Um algoritmo guloso nunca volta atrás em suas escolhas, mas constrói diretamente a solução final. Por esta razão, os algoritmos gulosos são geralmente muito eficientes.

A dificuldade em projetar algoritmos gulosos está em encontrar uma estratégia gulosa que sempre produza uma solução ótima para o problema. As escolhas localmente ótimas num algoritmo guloso devem ser também globalmente ótimas. Muitas vezes é difícil argumentar que um algoritmo guloso funciona.

6.1 Problema das moedas

Como primeiro exemplo, consideramos um problema onde nos é dado um conjunto de moedas e nossa tarefa é formar uma soma de dinheiro n usando as moedas. Os valores das moedas são $\text{moedas} = \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$, e cada moeda pode ser usada quantas vezes quisermos. Qual é o número mínimo de moedas necessárias?

Por exemplo, se as moedas forem as moedas de euro (em centavos)

$$\{1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200\}$$

e $n = 520$, precisamos de pelo menos quatro moedas. A solução ótima é selecionar as moedas $200 + 200 + 100 + 20$ cuja soma é 520.

Algoritmo guloso

Um algoritmo guloso simples para o problema seleciona sempre a maior moeda possível, até que a soma de dinheiro necessária seja construída. Este algoritmo funciona no caso de exemplo, porque primeiro selecionamos duas moedas de 200 centavos, depois uma moeda de 100 centavos e finalmente uma moeda de 20 centavos. Mas será que este algoritmo funciona sempre?

Acontece que se as moedas são as moedas de euro, o algoritmo guloso *sempre* funciona, i.e., ele produz sempre uma solução com o menor número possível de moedas. A correção do algoritmo pode ser mostrada da seguinte forma:

Primeiro, cada moeda de 1, 5, 10, 50 e 100 aparece no máximo uma vez numa solução ótima, porque se a solução contivesse duas moedas dessas, poderíamos

substituí-las por uma moeda e obter uma solução melhor. Por exemplo, se a solução contivesse as moedas $5 + 5$, poderíamos substituí-las pela moeda 10.

Da mesma forma, as moedas de 2 e 20 aparecem no máximo duas vezes numa solução ótima, porque poderíamos substituir as moedas $2 + 2 + 2$ pelas moedas $5 + 1$ e as moedas $20 + 20 + 20$ pelas moedas $50 + 10$. Além disso, uma solução ótima não pode conter as moedas $2 + 2 + 1$ ou $20 + 20 + 10$, porque poderíamos substituí-las pelas moedas 5 e 50.

Usando estas observações, podemos mostrar para cada moeda x que não é possível construir de forma ótima uma soma x ou qualquer soma maior usando apenas moedas que são menores que x . Por exemplo, se $x = 100$, a maior soma ótima usando as moedas menores é $50 + 20 + 20 + 5 + 2 + 2 = 99$. Assim, o algoritmo guloso que seleciona sempre a maior moeda produz a solução ótima.

Este exemplo mostra que pode ser difícil argumentar que um algoritmo guloso funciona, mesmo que o próprio algoritmo seja simples.

Caso geral

No caso geral, o conjunto de moedas pode conter quaisquer moedas e o algoritmo guloso *não* produz necessariamente uma solução ótima.

Podemos provar que um algoritmo guloso não funciona mostrando um contraexemplo onde o algoritmo dá uma resposta errada. Neste problema podemos facilmente encontrar um contraexemplo: se as moedas são $\{1, 3, 4\}$ e a soma alvo é 6, o algoritmo guloso produz a solução $4 + 1 + 1$ enquanto que a solução ótima é $3 + 3$.

Não se sabe se o problema geral das moedas pode ser resolvido usando algum algoritmo guloso¹. No entanto, como veremos no Capítulo 7, em alguns casos, o problema geral pode ser eficientemente resolvido usando um algoritmo de programação dinâmica que dá sempre a resposta correta.

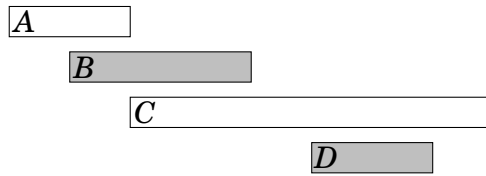
6.2 Escalonamento

Muitos problemas de escalonamento podem ser resolvidos usando algoritmos gulosos. Um problema clássico é o seguinte: Dados n eventos com seus horários de início e fim, encontre um escalonamento que inclua o maior número possível de eventos. Não é possível selecionar um evento parcialmente. Por exemplo, considere os seguintes eventos:

evento	hora de início	hora de fim
<i>A</i>	1	3
<i>B</i>	2	5
<i>C</i>	3	9
<i>D</i>	6	8

Neste caso, o número máximo de eventos é dois. Por exemplo, podemos selecionar os eventos *B* e *D* da seguinte forma:

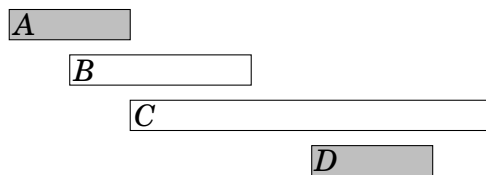
¹No entanto, é possível *verificar* em tempo polinomial se o algoritmo guloso apresentado neste capítulo funciona para um dado conjunto de moedas [53].



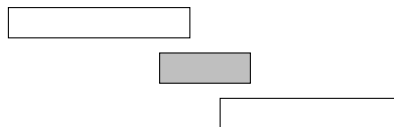
É possível inventar vários algoritmos gulosos para o problema, mas qual deles funciona em todos os casos?

Algoritmo 1

A primeira ideia é selecionar os eventos *mais curtos* possíveis. No caso de exemplo, este algoritmo seleciona os seguintes eventos:



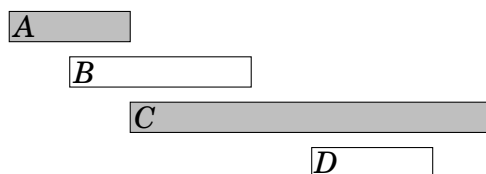
No entanto, selecionar eventos curtos nem sempre é uma estratégia correta. Por exemplo, o algoritmo falha no seguinte caso:



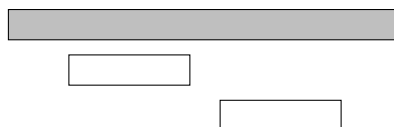
Se selecionarmos o evento curto, só podemos selecionar um evento. No entanto, seria possível selecionar ambos os eventos longos.

Algoritmo 2

Outra ideia é selecionar sempre o próximo evento possível que *começa* o mais cedo possível. Este algoritmo seleciona os seguintes eventos:



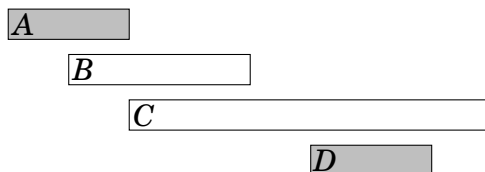
No entanto, podemos encontrar um contraexemplo também para este algoritmo. Por exemplo, no seguinte caso, o algoritmo seleciona apenas um evento:



Se selecionarmos o primeiro evento, não é possível selecionar quaisquer outros eventos. No entanto, seria possível selecionar os outros dois eventos.

Algoritmo 3

A terceira ideia é selecionar sempre o próximo evento possível que *termina* o mais cedo possível. Este algoritmo seleciona os seguintes eventos:



Acontece que este algoritmo *sempre* produz uma solução ótima. A razão para isso é que é sempre uma escolha ótima selecionar primeiro um evento que termina o mais cedo possível. Depois disso, é uma escolha ótima selecionar o próximo evento usando a mesma estratégia, etc., até não podermos selecionar mais eventos.

Uma forma de argumentar que o algoritmo funciona é considerar o que acontece se selecionarmos primeiro um evento que termina mais tarde do que o evento que termina o mais cedo possível. Agora, teremos no máximo um número igual de escolhas para selecionar o próximo evento. Portanto, selecionar um evento que termina mais tarde nunca pode resultar numa solução melhor, e o algoritmo guloso está correto.

6.3 Tarefas e prazos

Vamos agora considerar um problema onde nos são dadas n tarefas com durações e prazos e nossa tarefa é escolher uma ordem para realizar as tarefas. Para cada tarefa, ganhamos $d - x$ pontos onde d é o prazo da tarefa e x é o momento em que terminamos a tarefa. Qual é a maior pontuação total possível que podemos obter?

Por exemplo, suponha que as tarefas são as seguintes:

tarefa	duração	prazo
<i>A</i>	4	2
<i>B</i>	3	5
<i>C</i>	2	7
<i>D</i>	4	5

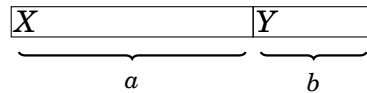
Neste caso, um escalonamento ótimo para as tarefas é o seguinte:



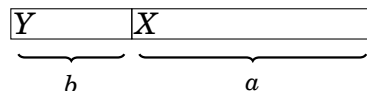
Nesta solução, *C* rende 5 pontos, *B* rende 0 pontos, *A* rende -7 pontos e *D* rende -8 pontos, então a pontuação total é -10 .

Surpreendentemente, a solução ótima para o problema sequer depende dos prazos, uma estratégia gulosa correta é simplesmente executar as tarefas *ordenadas por suas durações* em ordem crescente. A razão para isso é que se alguma vez

executarmos duas tarefas, uma após a outra, de tal forma que a primeira tarefa demore mais tempo do que a segunda tarefa, podemos obter uma solução melhor se trocarmos as tarefas. Por exemplo, considere o seguinte escalonamento:



Aqui $a > b$, então devemos trocar as tarefas:



Agora X dá b pontos a menos e Y dá a pontos a mais, então a pontuação total aumenta em $a - b > 0$. Numa solução ótima, para quaisquer duas tarefas consecutivas, deve verificar-se que a tarefa mais curta vem antes da tarefa mais longa. Assim, as tarefas devem ser executadas ordenadas pelas suas durações.

6.4 Minimizando somas

Consideramos agora um problema onde nos são dados n números a_1, a_2, \dots, a_n e nossa tarefa é encontrar um valor x que minimize a soma

$$|a_1 - x|^c + |a_2 - x|^c + \dots + |a_n - x|^c.$$

Vamos focar nos casos $c = 1$ e $c = 2$.

Caso $c = 1$

Neste caso, devemos minimizar a soma

$$|a_1 - x| + |a_2 - x| + \dots + |a_n - x|.$$

Por exemplo, se os números são $[1, 2, 9, 2, 6]$, a melhor solução é selecionar $x = 2$ o que produz a soma

$$|1 - 2| + |2 - 2| + |9 - 2| + |2 - 2| + |6 - 2| = 12.$$

No caso geral, a melhor escolha para x é a *mediana* dos números, i.e., o número do meio após a ordenação. Por exemplo, a lista $[1, 2, 9, 2, 6]$ torna-se $[1, 2, 2, 6, 9]$ após a ordenação, então a mediana é 2.

A mediana é uma escolha ótima, porque se x é menor que a mediana, a soma torna-se menor ao aumentar x , e se x é maior que a mediana, a soma torna-se menor ao diminuir x . Portanto, a solução ótima é que x seja a mediana. Se n é par e existem duas medianas, ambas as medianas e todos os valores entre elas são escolhas ótimas.

Caso $c = 2$

Neste caso, devemos minimizar a soma

$$(a_1 - x)^2 + (a_2 - x)^2 + \cdots + (a_n - x)^2.$$

Por exemplo, se os números são $[1, 2, 9, 2, 6]$, a melhor solução é selecionar $x = 4$ o que produz a soma

$$(1 - 4)^2 + (2 - 4)^2 + (9 - 4)^2 + (2 - 4)^2 + (6 - 4)^2 = 46.$$

No caso geral, a melhor escolha para x é a *média* dos números. No exemplo, a média é $(1 + 2 + 9 + 2 + 6)/5 = 4$. Este resultado pode ser derivado apresentando a soma da seguinte forma:

$$nx^2 - 2x(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)$$

A última parte não depende de x , portanto podemos ignorá-la. As partes restantes formam uma função $nx^2 - 2xs$ onde $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Esta é uma parábola com a concavidade voltada para cima com raízes $x = 0$ e $x = 2s/n$, e o valor mínimo é a média das raízes $x = s/n$, i.e., a média dos números a_1, a_2, \dots, a_n .

6.5 Compressão de dados

Um **código binário** atribui para cada caractere de uma string uma **palavra de código** que consiste em bits. Podemos *comprimir* a string usando o código binário substituindo cada caractere pela palavra de código correspondente. Por exemplo, o seguinte código binário atribui palavras de código para os caracteres A–D:

caractere	palavra de código
A	00
B	01
C	10
D	11

Este é um código de **comprimento constante** o que significa que o comprimento de cada palavra de código é o mesmo. Por exemplo, podemos comprimir a string AABACDACA da seguinte forma:

000001001011001000

Usando este código, o comprimento da string comprimida é de 18 bits. No entanto, podemos comprimir a string melhor se usarmos um código de **comprimento variável** onde as palavras de código podem ter comprimentos diferentes. Então podemos dar palavras de código curtas para caracteres que aparecem frequentemente e palavras de código longas para caracteres que aparecem raramente. Acontece que um código **ótimo** para a string acima é o seguinte:

caractere	palavra de código
A	0
B	110
C	10
D	111

Um código ótimo produz uma string comprimida que é o mais curta possível. Neste caso, a string comprimida usando o código ótimo é

001100101110100,

então são necessários apenas 15 bits em vez de 18 bits. Assim, graças a um código melhor, foi possível poupar 3 bits na string comprimida.

Exigimos que nenhuma palavra de código seja um prefixo de outra palavra de código. Por exemplo, não é permitido que um código contenha ambas as palavras de código 10 e 1011. A razão para isso é que queremos ser capazes de gerar a string original a partir da string comprimida. Se uma palavra de código pudesse ser um prefixo de outra palavra de código, isso nem sempre seria possível. Por exemplo, o seguinte código *não* é válido:

caractere	palavra de código
A	10
B	11
C	1011
D	111

Usando este código, não seria possível saber se a string comprimida 1011 corresponde à string AB ou à string C.

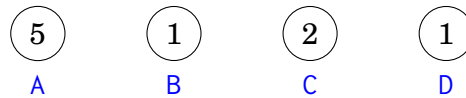
Codificação de Huffman

Codificação de Huffman² é um algoritmo guloso que constrói um código ótimo para comprimir uma dada string. O algoritmo constrói uma árvore binária com base nas frequências dos caracteres na string, e a palavra de código de cada caractere pode ser lida seguindo um caminho desde a raiz até ao nó correspondente. Um movimento para a esquerda corresponde ao bit 0, e um movimento para a direita corresponde ao bit 1.

Inicialmente, cada caractere da string é representado por um nó cujo peso é o número de vezes que o caractere ocorre na string. Então, em cada passo, dois nós com pesos mínimos são combinados criando um novo nó cujo peso é a soma dos pesos dos nós originais. O processo continua até que todos os nós tenham sido combinados.

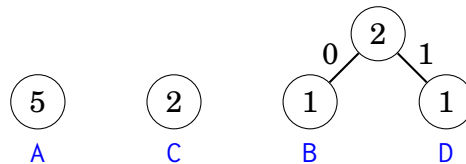
A seguir, veremos como a Codificação de Huffman cria o código ótimo para a string AABACDACA. Inicialmente, existem quatro nós que correspondem aos caracteres da string:

²D. A. Huffman descobriu este método ao resolver um trabalho de um curso universitário e publicou o algoritmo em 1952 [40].

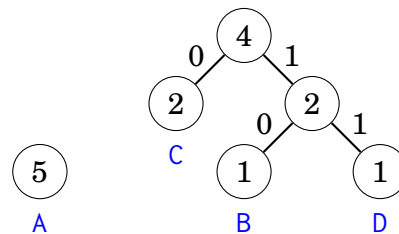


O nó que representa o caractere A tem peso 5 porque o caractere A aparece 5 vezes na string. Os outros pesos foram calculados da mesma forma.

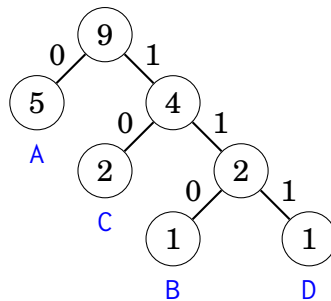
O primeiro passo é combinar os nós que correspondem aos caracteres B e D, ambos com peso 1. O resultado é:



Depois disso, os nós com peso 2 são combinados:



Finalmente, os dois nós restantes são combinados:



Agora todos os nós estão na árvore, então o código está pronto. As seguintes palavras de código podem ser lidas a partir da árvore:

caractere	palavra de código
A	0
B	110
C	10
D	111

Capítulo 7

Programação dinâmica

Programação dinâmica é uma técnica que combina a corretude da busca completa com a eficiência dos algoritmos gulosos. A programação dinâmica pode ser aplicada se o problema puder ser dividido em subproblemas sobrepostos que podem ser resolvidos independentemente.

Existem dois usos para a programação dinâmica:

- **Encontrar uma solução ótima:** Queremos encontrar uma solução que seja a maior possível ou a menor possível.
- **Contar o número de soluções:** Queremos calcular o número total de soluções possíveis.

Veremos primeiro como a programação dinâmica pode ser usada para encontrar uma solução ótima, e então usaremos a mesma ideia para contar as soluções.

Entender a programação dinâmica é um marco na carreira de todo programador competitivo. Enquanto a ideia básica é simples, o desafio é como aplicar a programação dinâmica a diferentes problemas. Este capítulo apresenta um conjunto de problemas clássicos que são um bom ponto de partida.

7.1 Problema das moedas

Vamos primeiro nos concentrar em um problema que já vimos no Capítulo 6: Dado um conjunto de valores de moedas $\text{moedas} = \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ e uma soma alvo de dinheiro n , nossa tarefa é formar a soma n usando o menor número possível de moedas.

No Capítulo 6, resolvemos o problema usando um algoritmo guloso que sempre escolhe a maior moeda possível. O algoritmo guloso funciona, por exemplo, quando as moedas são as moedas de euro, mas no caso geral, o algoritmo guloso não produz necessariamente uma solução ótima.

Agora é hora de resolver o problema de forma eficiente usando programação dinâmica, para que o algoritmo funcione para qualquer conjunto de moedas. O algoritmo de programação dinâmica é baseado em uma função recursiva que percorre todas as possibilidades de como formar a soma, como um algoritmo de

força bruta. No entanto, o algoritmo de programação dinâmica é eficiente porque usa *memoização* e calcula a resposta para cada subproblema apenas uma vez.

Formulação recursiva

A ideia da programação dinâmica é formular o problema recursivamente para que a solução do problema possa ser calculada a partir de soluções para subproblemas menores. No problema das moedas, um problema recursivo natural é o seguinte: qual é o menor número de moedas necessário para formar uma soma x ?

Seja $\text{resolver}(x)$ o número mínimo de moedas necessárias para uma soma x . Os valores da função dependem dos valores das moedas. Por exemplo, se $\text{moedas} = \{1, 3, 4\}$, os primeiros valores da função são os seguintes:

$\text{resolver}(0)$	$=$	0
$\text{resolver}(1)$	$=$	1
$\text{resolver}(2)$	$=$	2
$\text{resolver}(3)$	$=$	1
$\text{resolver}(4)$	$=$	1
$\text{resolver}(5)$	$=$	2
$\text{resolver}(6)$	$=$	2
$\text{resolver}(7)$	$=$	2
$\text{resolver}(8)$	$=$	2
$\text{resolver}(9)$	$=$	3
$\text{resolver}(10)$	$=$	3

Por exemplo, $\text{resolver}(10) = 3$, porque pelo menos 3 moedas são necessárias para formar a soma 10. A solução ótima é $3 + 3 + 4 = 10$.

A propriedade essencial de resolver é que seus valores podem ser calculados recursivamente a partir de seus valores menores. A ideia é focar na *primeira* moeda que escolhemos para a soma. Por exemplo, no cenário acima, a primeira moeda pode ser 1, 3 ou 4. Se escolhermos primeiro a moeda 1, a tarefa restante é formar a soma 9 usando o número mínimo de moedas, que é um subproblema do problema original. Claro, o mesmo se aplica às moedas 3 e 4. Assim, podemos usar a seguinte fórmula recursiva para calcular o número mínimo de moedas:

$$\begin{aligned}\text{resolver}(x) = \min(\text{resolver}(x-1) + 1, \\ \text{resolver}(x-3) + 1, \\ \text{resolver}(x-4) + 1).\end{aligned}$$

O caso base da recursão é $\text{resolver}(0) = 0$, porque nenhuma moeda é necessária para formar uma soma vazia. Por exemplo,

$$\text{resolver}(10) = \text{resolver}(7) + 1 = \text{resolver}(4) + 2 = \text{resolver}(0) + 3 = 3.$$

Agora estamos prontos para fornecer uma função recursiva geral que calcula o número mínimo de moedas necessárias para formar uma soma x :

$$\text{resolver}(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ \min_{c \in \text{moedas}} \text{resolver}(x-c) + 1 & x > 0 \end{cases}$$

Primeiro, se $x < 0$, o valor é ∞ , porque é impossível formar uma soma negativa de dinheiro. Então, se $x = 0$, o valor é 0, porque nenhuma moeda é necessária para formar uma soma vazia. Finalmente, se $x > 0$, a variável c percorre todas as possibilidades de como escolher a primeira moeda da soma.

Uma vez encontrada uma função recursiva que resolve o problema, podemos implementar diretamente uma solução em C++ (a constante INF denota infinito):

```
int resolver(int x) {
    if (x < 0) return INF;
    if (x == 0) return 0;
    int melhor = INF;
    for (auto c : moedas) {
        melhor = min(melhor, resolver(x-c)+1);
    }
    return melhor;
}
```

Ainda assim, esta função não é eficiente, porque pode haver um número exponencial de maneiras de construir a soma. No entanto, a seguir veremos como tornar a função eficiente usando uma técnica chamada memoização.

Usando memoização

A ideia da programação dinâmica é usar **memoização** para calcular eficientemente valores de uma função recursiva. Isso significa que os valores da função são armazenados em um array após o cálculo. Para cada parâmetro, o valor da função é calculado recursivamente apenas uma vez e, depois disso, o valor pode ser recuperado diretamente do array.

Neste problema, usamos arrays

```
bool pronto[N];
int valor[N];
```

onde `pronto[x]` indica se o valor de `resolver(x)` foi calculado, e se foi, `valor[x]` contém esse valor. A constante N foi escolhida de forma que todos os valores necessários caibam nos arrays.

Agora a função pode ser eficientemente implementada da seguinte forma:

```
int resolver(int x) {
    if (x < 0) return INF;
    if (x == 0) return 0;
    if (pronto[x]) return valor[x];
    int melhor = INF;
    for (auto c : moedas) {
        melhor = min(melhor, resolver(x-c)+1);
    }
    valor[x] = melhor;
    pronto[x] = true;
}
```

```
    return melhor;
}
```

A função lida com os casos base $x < 0$ e $x = 0$ como anteriormente. Então a função verifica em `pronto[x]` se `resolver(x)` já foi armazenado em `valor[x]`, e se foi, a função o retorna diretamente. Caso contrário, a função calcula o valor de `resolver(x)` recursivamente e o armazena em `valor[x]`.

Esta função funciona de forma eficiente, porque a resposta para cada parâmetro x é calculada recursivamente apenas uma vez. Depois que um valor de `resolver(x)` é armazenado em `valor[x]`, ele pode ser recuperado de forma eficiente sempre que a função for chamada novamente com o parâmetro x . A complexidade de tempo do algoritmo é $O(nk)$, onde n é a soma alvo e k é o número de moedas.

Observe que também podemos construir o array `valor` *iterativamente* usando um loop que simplesmente calcula todos os valores de `resolver` para os parâmetros $0 \dots n$:

```
valor[0] = 0;
for (int x = 1; x <= n; x++) {
    valor[x] = INF;
    for (auto c : moedas) {
        if (x-c >= 0) {
            valor[x] = min(valor[x], valor[x-c]+1);
        }
    }
}
```

Na verdade, a maioria dos programadores competitivos prefere esta implementação, porque é mais curta e tem menores fatores constantes. De agora em diante, também usaremos implementações iterativas em nossos exemplos. Ainda assim, geralmente é mais fácil pensar em soluções de programação dinâmica em termos de funções recursivas.

Construindo uma solução

Às vezes, somos solicitados a encontrar o valor de uma solução ótima e dar um exemplo de como essa solução pode ser construída. No problema das moedas, por exemplo, podemos declarar outro array que indica para cada soma de dinheiro a primeira moeda em uma solução ótima:

```
int primeiro[N];
```

Então, podemos modificar o algoritmo da seguinte forma:

```
valor[0] = 0;
for (int x = 1; x <= n; x++) {
    valor[x] = INF;
    for (auto c : moedas) {
        if (x-c >= 0 && valor[x-c]+1 < valor[x]) {
```



```

        valor[x] = valor[x-c]+1;
        primeiro[x] = c;
    }
}
}

```

Depois disso, o seguinte código pode ser usado para imprimir as moedas que aparecem em uma solução ótima para a soma n :

```

while (n > 0) {
    cout << primeiro[n] << "\n";
    n -= primeiro[n];
}

```

Contando o número de soluções

Vamos agora considerar outra versão do problema das moedas, onde nossa tarefa é calcular o número total de maneiras de produzir uma soma x usando as moedas. Por exemplo, se moedas = {1,3,4} e $x = 5$, existem um total de 6 maneiras:

- 1 + 1 + 1 + 1 + 1
- 1 + 1 + 3
- 1 + 3 + 1
- 3 + 1 + 1
- 1 + 4
- 4 + 1

Novamente, podemos resolver o problema recursivamente. Seja $\text{resolver}(x)$ o número de maneiras de formarmos a soma x . Por exemplo, se moedas = {1,3,4}, então $\text{resolver}(5) = 6$ e a fórmula recursiva é

$$\begin{aligned} \text{resolver}(x) = & \text{resolver}(x-1) + \\ & \text{resolver}(x-3) + \\ & \text{resolver}(x-4). \end{aligned}$$

Então, a função recursiva geral é a seguinte:

$$\text{resolver}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x = 0 \\ \sum_{c \in \text{moedas}} \text{resolver}(x-c) & x > 0 \end{cases}$$

Se $x < 0$, o valor é 0, porque não há soluções. Se $x = 0$, o valor é 1, porque só há uma maneira de formar uma soma vazia. Caso contrário, calculamos a soma de todos os valores da forma $\text{resolver}(x-c)$ onde c está em moedas.

O código a seguir constrói um array contagem tal que $\text{contagem}[x]$ é igual ao valor de $\text{resolver}(x)$ para $0 \leq x \leq n$:

```

contagem[0] = 1;
for (int x = 1; x <= n; x++) {

```

```

for (auto c : moedas) {
    if (x-c >= 0) {
        contagem[x] += contagem[x-c];
    }
}

```

Muitas vezes, o número de soluções é tão grande que não é necessário calcular o número exato, mas é suficiente fornecer a resposta módulo m onde, por exemplo, $m = 10^9 + 7$. Isso pode ser feito alterando o código para que todos os cálculos sejam feitos módulo m . No código acima, basta adicionar a linha

```
contagem[x] %= m;
```

após a linha

```
contagem[x] += contagem[x-c];
```

Agora discutimos todas as ideias básicas da programação dinâmica. Como a programação dinâmica pode ser usada em muitas situações diferentes, vamos agora passar por um conjunto de problemas que mostram outros exemplos sobre as possibilidades da programação dinâmica.


7.2 Maior subsequência crescente

Nosso primeiro problema é encontrar a **maior subsequência crescente** em um array de n elementos. Esta é uma sequência de comprimento máximo de elementos do array que vai da esquerda para a direita, e cada elemento na sequência é maior que o elemento anterior. Por exemplo, no array

0	1	2	3	4	5	6	7
6	2	5	1	7	4	8	3

a maior subsequência crescente contém 4 elementos:

0	1	2	3	4	5	6	7
6	2	5	1	7	4	8	3



Seja $\text{tamanho}(k)$ o comprimento da maior subsequência crescente que termina na posição k . Assim, se calcularmos todos os valores de $\text{tamanho}(k)$ onde $0 \leq k \leq n - 1$, descobriremos o comprimento da maior subsequência crescente. Por

exemplo, os valores da função para o array acima são os seguintes:

tamanho(0)	=	1
tamanho(1)	=	1
tamanho(2)	=	2
tamanho(3)	=	1
tamanho(4)	=	3
tamanho(5)	=	2
tamanho(6)	=	4
tamanho(7)	=	2

Por exemplo, $\text{tamanho}(6) = 4$, porque a maior subsequência crescente que termina na posição 6 consiste em 4 elementos.

Para calcular um valor de $\text{tamanho}(k)$, devemos encontrar uma posição $i < k$ para a qual $\text{array}[i] < \text{array}[k]$ e $\text{tamanho}(i)$ seja o maior possível. Então sabemos que $\text{tamanho}(k) = \text{tamanho}(i) + 1$, porque esta é uma maneira ótima de adicionar $\text{array}[k]$ a uma subsequência. No entanto, se não houver tal posição i , então $\text{tamanho}(k) = 1$, o que significa que a subsequência contém apenas $\text{array}[k]$.

Como todos os valores da função podem ser calculados a partir de seus valores menores, podemos usar programação dinâmica. No código a seguir, os valores da função serão armazenados em um array `tamanho`.

```
for (int k = 0; k < n; k++) {
    tamanho[k] = 1;
    for (int i = 0; i < k; i++) {
        if (array[i] < array[k]) {
            tamanho[k] = max(tamanho[k], tamanho[i]+1);
        }
    }
}
```

Este código funciona em tempo $O(n^2)$, porque consiste em dois loops aninhados. No entanto, também é possível implementar o cálculo de programação dinâmica de forma mais eficiente em tempo $O(n \log n)$. Você consegue encontrar uma maneira de fazer isso?

7.3 Caminhos em uma grade

Nosso próximo problema é encontrar um caminho do canto superior esquerdo para o canto inferior direito de uma grade $n \times n$, de forma que só nos movamos para baixo e para a direita. Cada quadrado contém um inteiro positivo, e o caminho deve ser construído de forma que a soma dos valores ao longo do caminho seja a maior possível.

A figura a seguir mostra um caminho ideal em uma grade:

3	7	9	2	7
9	8	3	5	5
1	7	9	8	5
3	8	6	4	10
6	3	9	7	8

A soma dos valores no caminho é 67, e esta é a maior soma possível em um caminho do canto superior esquerdo para o canto inferior direito.

Assuma que as linhas e colunas da grade são numeradas de 1 a n , e $\text{valor}[y][x]$ é igual ao valor do quadrado (y, x) . Seja $\text{soma}(y, x)$ a soma máxima em um caminho do canto superior esquerdo para o quadrado (y, x) . Agora $\text{soma}(n, n)$ nos diz a soma máxima do canto superior esquerdo para o canto inferior direito. Por exemplo, na grade acima, $\text{soma}(5, 5) = 67$.

Podemos calcular recursivamente as somas da seguinte forma:

$$\text{soma}(y, x) = \max(\text{soma}(y, x - 1), \text{soma}(y - 1, x)) + \text{valor}[y][x]$$

A fórmula recursiva é baseada na observação de que um caminho que termina no quadrado (y, x) pode vir do quadrado $(y, x - 1)$ ou do quadrado $(y - 1, x)$:

			↓	
		→		

Assim, selecionamos a direção que maximiza a soma. Assumimos que $\text{soma}(y, x) = 0$ se $y = 0$ ou $x = 0$ (porque tais caminhos não existem), então a fórmula recursiva também funciona quando $y = 1$ ou $x = 1$.

Como a função soma possui dois parâmetros, o array de programação dinâmica também possui duas dimensões. Por exemplo, podemos usar um array

```
int soma[N][N];
```

e calcular as somas da seguinte forma:

```
for (int y = 1; y <= n; y++) {
    for (int x = 1; x <= n; x++) {
        soma[y][x] = max(soma[y][x-1], soma[y-1][x]) + valor[y][x];
    }
}
```

A complexidade de tempo do algoritmo é $O(n^2)$.

7.4 Problemas da mochila

O termo **mochila** refere-se a problemas onde um conjunto de objetos é dado, e subconjuntos com algumas propriedades precisam ser encontrados. Os problemas da mochila podem ser resolvidos usando programação dinâmica.

Nesta seção, vamos focar no seguinte problema: Dada uma lista de pesos $[w_1, w_2, \dots, w_n]$, determine todas as somas que podem ser construídas usando os pesos. Por exemplo, se os pesos forem $[1, 3, 3, 5]$, as seguintes somas são possíveis:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X	X		X	X	X	X	X	X	X		X	X

Neste caso, todas as somas entre $0 \dots 12$ são possíveis, exceto 2 e 10. Por exemplo, a soma 7 é possível porque nós podemos selecionar os pesos $[1, 3, 3]$.

Para resolver o problema, vamos focar em subproblemas onde usamos apenas os primeiros k pesos para construir somas. Seja $\text{possivel}(x, k) = \text{verdadeiro}$ se podemos construir uma soma x usando os primeiros k pesos, e caso contrário $\text{possivel}(x, k) = \text{falso}$. Os valores da função podem ser calculados recursivamente da seguinte forma:

$$\text{possivel}(x, k) = \text{possivel}(x - w_k, k - 1) \vee \text{possivel}(x, k - 1)$$

A fórmula é baseada no fato de que podemos usar ou não o peso w_k na soma. Se usarmos w_k , a tarefa restante é formar a soma $x - w_k$ usando os primeiros $k - 1$ pesos, e se não usarmos w_k , a tarefa restante é formar a soma x usando os primeiros $k - 1$ pesos. Como casos base,

$$\text{possivel}(x, 0) = \begin{cases} \text{verdadeiro} & x = 0 \\ \text{falso} & x \neq 0 \end{cases}$$

porque se nenhum peso for usado, só podemos formar a soma 0.

A tabela a seguir mostra todos os valores da função para os pesos $[1, 3, 3, 5]$ (o símbolo "X" indica os valores verdadeiros):

$k \backslash x$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	X												
1	X	X											
2	X	X		X	X								
3	X	X		X	X		X	X					
4	X	X		X	X	X	X	X	X	X		X	X

Após calcular esses valores, $\text{possivel}(x, n)$ nos diz se podemos construir uma soma x usando *todos* os pesos.

Seja W a soma total dos pesos. A seguinte solução de programação dinâmica em tempo $O(nW)$ corresponde à função recursiva:

```
possivel[0][0] = true;
for (int k = 1; k <= n; k++) {
```

```

for (int x = 0; x <= W; x++) {
    if (x-w[k] >= 0) possivel[x][k] |= possivel[x-w[k]][k-1];
    possivel[x][k] |= possivel[x][k-1];
}
}

```

No entanto, aqui está uma implementação melhor que usa apenas um array unidimensional `possivel[x]` que indica se podemos construir um subconjunto com soma x . O truque é atualizar o array da direita para a esquerda para cada novo peso:

```

possivel[0] = true;
for (int k = 1; k <= n; k++) {
    for (int x = W; x >= 0; x--) {
        if (possivel[x]) possivel[x+w[k]] = true;
    }
}

```

Observe que a ideia geral apresentada aqui pode ser usada em muitos problemas de mochila. Por exemplo, se recebermos objetos com pesos e valores, podemos determinar para cada soma de peso o valor máximo soma de um subconjunto.

7.5 Distância de edição

A **distância de edição** ou **distância de Levenshtein**¹ é o número mínimo de operações de edição necessárias para transformar uma string em outra. As operações de edição permitidas são as seguintes:

- inserir um caractere (por exemplo, $ABC \rightarrow ABCA$)
- remover um caractere (por exemplo, $ABC \rightarrow AC$)
- modificar um caractere (por exemplo, $ABC \rightarrow ADC$)

Por exemplo, a distância de edição entre LOVE e MOVIE é 2, porque podemos primeiro realizar a operação $LOVE \rightarrow MOVE$ (modificar) e então a operação $MOVE \rightarrow MOVIE$ (inserir). Este é o menor número possível de operações, porque é claro que apenas uma operação não é suficiente.

Suponha que recebemos uma string x de comprimento n e uma string y de comprimento m , e queremos calcular a distância de edição entre x e y . Para resolver o problema, definimos uma função $distancia(a, b)$ que retorna a distância de edição entre os prefixos $x[0 \dots a]$ e $y[0 \dots b]$. Assim, usando esta função, a distância de edição entre x e y é igual a $distancia(n-1, m-1)$.

¹A distância recebe o nome de V. I. Levenshtein, que a estudou em conexão com códigos binários [49].

Podemos calcular os valores de distancia da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{distancia}(a, b) = \min(&\text{distancia}(a, b-1) + 1, \\ &\text{distancia}(a-1, b) + 1, \\ &\text{distancia}(a-1, b-1) + \text{custo}(a, b)). \end{aligned}$$

Aqui $\text{custo}(a, b) = 0$ se $x[a] = y[b]$, e caso contrário $\text{custo}(a, b) = 1$. A fórmula considera as seguintes maneiras de editar a string x:

- $\text{distancia}(a, b-1)$: inserir um caractere no final de x
- $\text{distancia}(a-1, b)$: remover o último caractere de x
- $\text{distancia}(a-1, b-1)$: combinar ou modificar o último caractere de x

Nos dois primeiros casos, uma operação de edição é necessária (inserir ou remover). No último caso, se $x[a] = y[b]$, podemos combinar os últimos caracteres sem editar, e caso contrário, uma operação de edição é necessária (modificar).

A tabela a seguir mostra os valores de distancia no caso de exemplo:

		M	O	V	I	E
L O V E	0	1	2	3	4	5
	1	1	2	3	4	5
	2	2	1	2	3	4
	3	3	2	1	2	3
	4	4	3	2	2	2

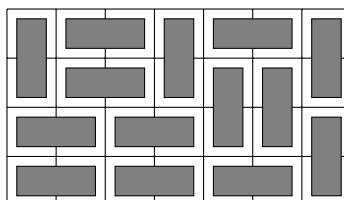
O canto inferior direito da tabela nos diz que a distância de edição entre LOVE e MOVIE é 2. A tabela também mostra como construir a menor sequência de operações de edição. Neste caso, o caminho é o seguinte:

		M	O	V	I	E	
		0	1	2	3	4	5
L		1	1	2	3	4	5
O		2	2	1	2	3	4
V		3	3	2	1	2	3
E		4	4	3	2	2	2

Os últimos caracteres de LOVE e MOVIE são iguais, então a distância de edição entre eles é igual à distância de edição entre LOV e MOVI. Podemos usar uma operação de edição para remover o caractere I de MOVI. Assim, a distância de edição é um a mais que a distância de edição entre LOV e MOV, etc.

7.6 Contando os ladrilhos

Às vezes, os estados de uma solução de programação dinâmica são mais complexos do que combinações fixas de números. Como exemplo, considere o problema de calcular o número de maneiras distintas de preencher uma grade $n \times m$ usando ladrilhos de tamanho 1×2 e 2×1 . Por exemplo, uma solução válida para a grade 4×7 é



e o número total de soluções é 781.

O problema pode ser resolvido usando programação dinâmica percorrendo a grade linha por linha. Cada linha em uma solução pode ser representada como uma string que contém m caracteres do conjunto $\{\sqcap, \sqcup, \sqsubset, \sqsupset\}$. Por exemplo, a solução acima consiste em quatro linhas que correspondem às seguintes strings:

- $\sqcap \sqsubset \sqcap \sqsubset \sqcap \sqsubset \sqcap$
- $\sqcup \sqsubset \sqcup \sqcap \sqcap \sqcup \sqcup$
- $\sqsubset \sqsubset \sqsubset \sqcup \sqcup \sqcap \sqcap$
- $\sqsubset \sqsubset \sqsubset \sqsubset \sqsubset \sqcup \sqcup$

Seja $\text{contar}(k, x)$ o número de maneiras de construir uma solução para as linhas $1 \dots k$ da grade, de modo que a string x corresponda à linha k . É possível usar a programação dinâmica aqui, porque o estado de uma linha é restringido apenas pelo estado da linha anterior.

Uma solução é válida se a linha 1 não contiver o caractere \sqcup , a linha n não contiver o caractere \sqcap , e todas as linhas consecutivas forem *compatíveis*. Por exemplo, as linhas $\sqcup \sqsubset \sqcup \sqcap \sqcap \sqcup \sqcup$ e $\sqsubset \sqsubset \sqsubset \sqcup \sqcup \sqcap \sqcap$ são compatíveis, enquanto as linhas $\sqcap \sqsubset \sqcap \sqsubset \sqcap \sqsubset \sqcap$ e $\sqsubset \sqsubset \sqsubset \sqsubset \sqsubset \sqcup \sqcup$ não são compatíveis.

Como uma linha consiste em m caracteres e existem quatro opções para cada caractere, o número de linhas distintas é no máximo 4^m . Assim, a complexidade de tempo da solução é $O(n4^{2m})$ porque podemos percorrer os $O(4^m)$ estados possíveis para cada linha, e para cada estado, existem $O(4^m)$ estados possíveis para a linha anterior. Na prática, é uma boa ideia girar a grade para que o lado mais curto tenha comprimento m , porque o fator 4^{2m} domina a complexidade de tempo.

É possível tornar a solução mais eficiente usando uma representação mais compacta para as linhas. Acontece que é suficiente saber quais colunas da linha anterior contêm o quadrado superior de um ladrilho vertical. Assim, podemos representar uma linha usando apenas caracteres \sqcap e \square , onde \square é uma combinação de caracteres \sqcup , \sqsubset e \sqsupset . Usando esta representação, existem apenas 2^m linhas distintas e a complexidade de tempo é $O(n2^{2m})$.

Como nota final, há também uma fórmula direta surpreendente para calcular o número de ladrilhos²:

$$\prod_{a=1}^{\lceil n/2 \rceil} \prod_{b=1}^{\lceil m/2 \rceil} 4 \cdot \left(\cos^2 \frac{\pi a}{n+1} + \cos^2 \frac{\pi b}{m+1} \right)$$

Esta fórmula é muito eficiente, pois calcula o número de ladrilhos em tempo $O(nm)$, mas como a resposta é um produto de números reais, um problema ao usar a fórmula é como armazenar os resultados intermediários com precisão.

²Surpreendentemente, esta fórmula foi descoberta em 1961 por duas equipes de pesquisa [43, 67] que trabalharam de forma independente.

Capítulo 8

Análise amortizada

A complexidade de tempo de um algoritmo é, muitas vezes, fácil de analisar apenas examinando a estrutura do algoritmo: quais laços o algoritmo contém e quantas vezes os laços são executados. No entanto, às vezes, uma análise direta não fornece uma imagem verdadeira da eficiência do algoritmo.

A **análise amortizada** pode ser usada para analisar algoritmos que contêm operações cuja complexidade de tempo varia. A ideia é estimar o tempo total usado para todas essas operações durante a execução do algoritmo, em vez de focar em operações individuais.

8.1 Método dos dois ponteiros

No **método dos dois ponteiros**, dois ponteiros são usadas para iterar pelos valores do vetor. Ambos os ponteiros podem se mover para uma única direção, o que garante que o algoritmo funcione de forma eficiente. A seguir, discutiremos dois problemas que podem ser resolvidos usando o método de dois ponteiros.

Soma de subvetor

Como primeiro exemplo, considere um problema em que recebemos um vetor de n inteiros positivos e uma soma alvo x , e queremos encontrar um subvetor cuja soma seja x ou relatar que não existe tal subvetor.

Por exemplo, o vetor

1	3	2	5	1	1	2	3
---	---	---	---	---	---	---	---

contém um subvetor cuja soma é 8:

1	3	2	5	1	1	2	3
---	---	---	---	---	---	---	---

Este problema pode ser resolvido em tempo $O(n)$ usando o método de dois ponteiros. A ideia é manter ponteiros que apontam para o primeiro e o último valor de um subvetor. A cada turno, o ponteiro esquerdo se move um passo para a direita e o ponteiro direito se move para a direita enquanto a soma do subvetor

resultante for no máximo x . Se a soma se tornar exatamente x , uma solução foi encontrada.

Como exemplo, considere o seguinte vetor e uma soma alvo $x = 8$:

1	3	2	5	1	1	2	3
---	---	---	---	---	---	---	---

O subvetor inicial contém os valores 1, 3 e 2, cuja soma é 6:

1	3	2	5	1	1	2	3
---	---	---	---	---	---	---	---

↑ ↑

Então, o ponteiro esquerdo se move um passo para a direita. O ponteiro direito não se move, porque, caso contrário, a soma do subvetor excederia x .

1	3	2	5	1	1	2	3
---	---	---	---	---	---	---	---

 ↑ ↑

Novamente, o ponteiro esquerdo se move um passo para a direita, e desta vez o ponteiro direito se move três passos para a direita. A soma do subvetor é $2 + 5 + 1 = 8$, então um subvetor cuja soma é x foi encontrado.

1	3	2	5	1	1	2	3
---	---	---	---	---	---	---	---

 ↑ ↑

O tempo de execução do algoritmo depende de o número de passos que o ponteiro direito se move. Embora não haja um limite superior útil sobre quantos passos o ponteiro pode se mover em um *único* turno, sabemos que o ponteiro se move *um total de* $O(n)$ passos durante o algoritmo, porque ela só se move para a direita.

Como o ponteiro esquerdo e o direito se movem $O(n)$ passos durante o algoritmo, o algoritmo funciona em tempo $O(n)$.

Problema 2SUM

Outro problema que pode ser resolvido usando o método de dois ponteiros é o seguinte problema, também conhecido como o **problema 2SUM**: dado um vetor de n números e uma soma alvo x , encontre dois valores do vetor de forma que sua soma seja x , ou relate que tais valores não existem.

Para resolver o problema, primeiro ordenamos os valores do vetor em ordem crescente. Depois disso, iteramos pelo vetor usando dois ponteiros. O ponteiro esquerdo começa no primeiro valor e se move um passo para a direita a cada turno. O ponteiro direito começa no último valor e sempre se move para a esquerda até que a soma do ponteiro esquerdo e direita seja no máximo x . Se a soma for exatamente x , uma solução foi encontrada.

Por exemplo, considere o seguinte vetor e uma soma alvo $x = 12$:

1	4	5	6	7	9	9	10
---	---	---	---	---	---	---	----

As posições iniciais dos ponteiros são como se segue. A soma dos valores é $1 + 10 = 11$ que é menor que x .

1	4	5	6	7	9	9	10
↑							↑

Então o ponteiro esquerdo se move um passo para a direita. O ponteiro direito se move três passos para a esquerda, e a soma se torna $4 + 7 = 11$.

1	4	5	6	7	9	9	10
	↑			↑			

Depois disso, o ponteiro esquerdo se move um passo para a direita novamente. O ponteiro direito não se move e uma solução $5 + 7 = 12$ foi encontrada.

1	4	5	6	7	9	9	10
		↑		↑			

O tempo de execução do algoritmo é $O(n \log n)$, pois primeiro ele ordena o vetor em tempo $O(n \log n)$, e então ambos os ponteiros movem $O(n)$ passos.

Observe que é possível resolver o problema de outra forma em tempo $O(n \log n)$ usando a busca binária. Nessa solução, iteramos pelo vetor e, para cada valor do vetor, tentamos encontrar outro valor que produza a soma x . Isso pode ser feito realizando n buscas binárias, cada uma das quais leva tempo $O(\log n)$.

Um problema mais difícil é o **problema 3SUM** que pede para encontrar *três* valores de vetor cuja soma seja x . Usando a ideia do algoritmo acima, este problema pode ser resolvido em tempo $O(n^2)$ ¹. Você consegue ver como?

8.2 Elementos menores mais próximos

A análise amortizada é frequentemente usada para estimar o número de operações realizadas em uma estrutura de dados. As operações podem ser distribuídas de forma desigual, de modo que a maioria das operações ocorra durante uma determinada fase do algoritmo, mas o número total de operações é limitado.

Como exemplo, considere o problema de encontrar para cada elemento do vetor o **elemento menor mais próximo**, ou seja, o primeiro elemento menor que precede o elemento no vetor. É possível que tal elemento não exista, caso em que o algoritmo deve relatar isso. A seguir, veremos como o problema pode ser resolvido de forma eficiente usando uma estrutura de pilha.

Percorremos o vetor da esquerda para a direita e mantemos uma pilha de elementos do vetor. Em cada posição do vetor, removemos elementos da pilha até

¹Por muito tempo, pensou-se que resolver o problema 3SUM de forma mais eficiente do que em tempo $O(n^2)$ não seria possível. No entanto, em 2014, descobriu-se [30] que este não é o caso.

que o elemento superior seja menor que o elemento atual, ou a pilha esteja vazia. Então, relatamos que o elemento superior é o elemento menor mais próximo do elemento atual, ou se a pilha estiver vazia, não existe tal elemento. Finalmente, adicionamos o elemento atual à pilha.

Como exemplo, considere o seguinte vetor:

1	3	4	2	5	3	4	2
---	---	---	---	---	---	---	---

Primeiro, os elementos 1, 3 e 4 são adicionados à pilha, porque cada elemento é maior que o elemento anterior. Assim, o elemento menor mais próximo de 4 é 3, e o elemento menor mais próximo de 3 é 1.

1	3	4	2	5	3	4	2
---	---	---	---	---	---	---	---

1 → 3 → 4

O próximo elemento 2 é menor que os dois principais elementos na pilha. Assim, os elementos 3 e 4 são removidos da pilha, e então o elemento 2 é adicionado à pilha. Seu elemento menor mais próximo é 1:

1	3	4	2	5	3	4	2
---	---	---	---	---	---	---	---

1 → 2

Então, o elemento 5 é maior que o elemento 2, então ele será adicionado à pilha, e seu elemento menor mais próximo é 2:

1	3	4	2	5	3	4	2
---	---	---	---	---	---	---	---

1 → 2 → 5

Depois disso, o elemento 5 é removido da pilha e os elementos 3 e 4 são adicionados à pilha:

1	3	4	2	5	3	4	2
---	---	---	---	---	---	---	---

1 → 2 → 3 → 4

Finalmente, todos os elementos, exceto 1, são removidos da pilha e o último elemento 2 é adicionado à pilha:

1	3	4	2	5	3	4	2
---	---	---	---	---	---	---	---

1 → 2

A eficiência do algoritmo depende de o número total de operações de pilha. Se o elemento atual for maior que o elemento superior na pilha, ele é diretamente adicionado à pilha, o que é eficiente. No entanto, às vezes a pilha pode conter vários elementos maiores e leva tempo para removê-los. Ainda assim, cada elemento é adicionado *exatamente uma vez* à pilha e removido *no máximo uma vez* da pilha. Assim, cada elemento causa $O(1)$ operações de pilha, e o algoritmo funciona em tempo $O(n)$.

8.3 Mínimo da janela deslizante

Uma **janela deslizante** é um subvetor de tamanho constante que se move da esquerda para a direita através do vetor. Em cada posição da janela, queremos calcular alguma informação sobre os elementos dentro da janela. Nesta seção, vamos focar no problema de manter o **mínimo da janela deslizante**, o que significa que devemos reportar o menor valor dentro de cada janela.

O mínimo da janela deslizante pode ser calculado usando uma ideia semelhante à que usamos para calcular os elementos menores mais próximos. Mantemos uma fila onde cada elemento é maior que o elemento anterior, e o primeiro elemento sempre corresponde ao elemento mínimo dentro da janela. Após cada movimento da janela, removemos elementos do final da fila até que o último elemento da fila seja menor que o novo elemento da janela, ou a fila fique vazia. Também removemos o primeiro elemento da fila se ele não estiver mais dentro da janela. Finalmente, adicionamos o novo elemento da janela ao final da fila.

Como exemplo, considere o seguinte vetor:

2	1	4	5	3	4	1	2
---	---	---	---	---	---	---	---

Suponha que o tamanho da janela deslizante seja 4. Na primeira posição da janela, o menor valor é 1:

2	1	4	5	3	4	1	2
---	---	---	---	---	---	---	---

1	→	4	→	5
---	---	---	---	---

Então a janela se move um passo para a direita. O novo elemento 3 é menor que os elementos 4 e 5 na fila, então os elementos 4 e 5 são removidos da fila e o elemento 3 é adicionado à fila. O menor valor ainda é 1.

2	1	4	5	3	4	1	2
---	---	---	---	---	---	---	---

1	→	3
---	---	---

Depois disso, a janela se move novamente, e o menor elemento 1 não pertence mais à janela. Assim, ele é removido da fila e o menor valor agora é 3. Além disso, o novo elemento 4 é adicionado à fila.

2	1	4	5	3	4	1	2
---	---	---	---	---	---	---	---

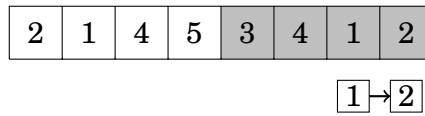
3	→	4
---	---	---

O próximo novo elemento 1 é menor que todos os elementos na fila. Assim, todos os elementos são removidos da fila e ela conterá apenas o elemento 1:

2	1	4	5	3	4	1	2
---	---	---	---	---	---	---	---

1

Finalmente, a janela atinge sua última posição. O elemento 2 é adicionado à fila, mas o menor valor dentro da janela ainda é 1.



Como cada elemento do vetor é adicionado à fila exatamente uma vez e removido da fila no máximo uma vez, o algoritmo funciona em tempo $O(n)$.

Capítulo 9

Consultas de intervalo

Neste capítulo, discutimos estruturas de dados que nos permitem processar eficientemente consultas de intervalo. Em uma **consulta de intervalo**, nossa tarefa é calcular um valor com base em um subvetor de um vetor. Consultas de intervalo típicas são:

- $\text{soma}_q(a, b)$: calcular a soma dos valores no intervalo $[a, b]$
- $\text{min}_q(a, b)$: encontrar o valor mínimo no intervalo $[a, b]$
- $\text{max}_q(a, b)$: encontrar o valor máximo no intervalo $[a, b]$

Por exemplo, considere o intervalo $[3, 6]$ no seguinte vetor:

0	1	2	3	4	5	6	7
1	3	8	4	6	1	3	4

Neste caso, $\text{soma}_q(3, 6) = 14$, $\text{min}_q(3, 6) = 1$ e $\text{max}_q(3, 6) = 6$.

Uma maneira simples de processar consultas de intervalo é usar um loop que percorre todos os valores do vetor no intervalo. Por exemplo, a seguinte função pode ser usada para processar consultas de soma em um vetor:

```
int sum(int a, int b) {  
    int s = 0;  
    for (int i = a; i <= b; i++) {  
        s += array[i];  
    }  
    return s;  
}
```

Esta função funciona em tempo $O(n)$, onde n é o tamanho do vetor. Assim, podemos processar q consultas em $O(nq)$ tempo usando a função. No entanto, se n e q forem grandes, essa abordagem é lenta. Felizmente, verifica-se que existem maneiras de processar consultas de intervalo com muito mais eficiência.

9.1 Consultas de vetor estático

Primeiro, vamos nos concentrar em uma situação em que o vetor é *estático*, ou seja, os valores do vetor nunca são atualizados entre as consultas. Nesse caso, é suficiente construir uma estrutura de dados estática que nos diga a resposta para qualquer consulta possível.

Consultas de soma

Podemos processar facilmente consultas de soma em um vetor estático construindo um **vetor de soma de prefixos**. Cada valor no vetor de soma de prefixos é igual à soma dos valores no vetor original até aquela posição, ou seja, o valor na posição k é $\text{soma}_q(0, k)$. O vetor de soma de prefixos pode ser construído em tempo $O(n)$.

Por exemplo, considere o seguinte vetor:

0	1	2	3	4	5	6	7
1	3	4	8	6	1	4	2

O vetor de soma de prefixos correspondente é o seguinte:

0	1	2	3	4	5	6	7
1	4	8	16	22	23	27	29

Como o vetor de soma de prefixos contém todos os valores de $\text{soma}_q(0, k)$, podemos calcular qualquer valor de $\text{soma}_q(a, b)$ em tempo $O(1)$ da seguinte forma:

$$\text{soma}_q(a, b) = \text{soma}_q(0, b) - \text{soma}_q(0, a - 1)$$

Ao definir $\text{soma}_q(0, -1) = 0$, a fórmula acima também é válida quando $a = 0$.

Por exemplo, considere o intervalo $[3, 6]$:

0	1	2	3	4	5	6	7
1	3	4	8	6	1	4	2

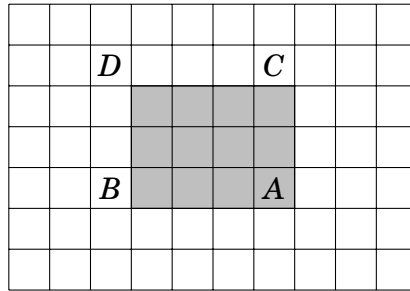
Nesse caso $\text{soma}_q(3, 6) = 8 + 6 + 1 + 4 = 19$. Essa soma pode ser calculada a partir de dois valores do vetor de soma de prefixos:

0	1	2	3	4	5	6	7
1	4	8	16	22	23	27	29

Assim, $\text{soma}_q(3, 6) = \text{soma}_q(0, 6) - \text{soma}_q(0, 2) = 27 - 8 = 19$.

Também é possível generalizar essa ideia para dimensões superiores. Por exemplo, podemos construir um vetor de soma de prefixos bidimensional que pode ser usado para calcular a soma de qualquer subvetor retangular em tempo $O(1)$. Cada soma em tal vetor corresponde a um subvetor que começa no canto superior esquerdo do vetor.

A imagem a seguir ilustra a ideia:



A soma do subvetor cinza pode ser calculada usando a fórmula

$$S(A) - S(B) - S(C) + S(D),$$

onde $S(X)$ denota a soma dos valores em um subvetor retangular do canto superior esquerdo até a posição de X .

Consultas de mínimo

Consultas de mínimo são mais difíceis de processar do que consultas de soma. Ainda assim, existe um método de pré-processamento de $O(n \log n)$ bastante simples, após o qual podemos responder a qualquer consulta de mínimo em tempo $O(1)$ ¹. Observe que, como as consultas de mínimo e máximo podem ser processadas de forma semelhante, podemos nos concentrar nas consultas de mínimo.

A ideia é pré-calculer todos os valores de $\min_q(a, b)$ onde $b - a + 1$ (o comprimento do intervalo) é uma potência de dois. Por exemplo, para o vetor

0	1	2	3	4	5	6	7
1	3	4	8	6	1	4	2

os seguintes valores são calculados:

a	b	$\min_q(a, b)$	a	b	$\min_q(a, b)$	a	b	$\min_q(a, b)$
0	0	1	0	1	1	0	3	1
1	1	3	1	2	3	1	4	3
2	2	4	2	3	4	2	5	1
3	3	8	3	4	6	3	6	1
4	4	6	4	5	1	4	7	1
5	5	1	5	6	1	0	7	1
6	6	4	6	7	2			
7	7	2						

¹Esta técnica foi introduzida em [7] e às vezes chamada de método **sparse table**. Existem também técnicas mais sofisticadas [22] onde o tempo de pré-processamento é apenas $O(n)$, mas tais algoritmos não são necessários em programação competitiva.

O número de valores pré-calculados é $O(n \log n)$, porque existem comprimentos de intervalo $O(\log n)$ que são potências de dois. Os valores podem ser calculados de forma eficiente usando a fórmula recursiva

$$\min_q(a, b) = \min(\min_q(a, a + w - 1), \min_q(a + w, b)),$$

onde $b - a + 1$ é uma potência de dois e $w = (b - a + 1)/2$. Calcular todos esses valores leva tempo $O(n \log n)$.

Depois disso, qualquer valor de $\min_q(a, b)$ pode ser calculado em tempo $O(1)$ como um mínimo de dois valores pré-calculados. Seja k a maior potência de dois que não exceda $b - a + 1$. Podemos calcular o valor de $\min_q(a, b)$ usando a fórmula

$$\min_q(a, b) = \min(\min_q(a, a + k - 1), \min_q(b - k + 1, b)).$$

Na fórmula acima, o intervalo $[a, b]$ é representado como a união dos intervalos $[a, a + k - 1]$ e $[b - k + 1, b]$, ambos de comprimento k .

Como exemplo, considere o intervalo $[1, 6]$:

0	1	2	3	4	5	6	7
1	3	4	8	6	1	4	2

O comprimento do intervalo é 6, e a maior potência de dois que não excede 6 é 4. Assim, o intervalo $[1, 6]$ é a união dos intervalos $[1, 4]$ e $[3, 6]$:

0	1	2	3	4	5	6	7
1	3	4	8	6	1	4	2

0	1	2	3	4	5	6	7
1	3	4	8	6	1	4	2

Como $\min_q(1, 4) = 3$ e $\min_q(3, 6) = 1$, concluímos que $\min_q(1, 6) = 1$.

9.2 Árvore binária indexada

Uma **árvore binária indexada** ou uma **árvore de Fenwick**² pode ser vista como uma variante dinâmica de um vetor de soma de prefixos. Ela suporta duas operações de tempo $O(\log n)$ em um vetor: processar uma consulta de soma de intervalo e atualizar um valor.

A vantagem de uma árvore binária indexada é que ela nos permite atualizar de forma eficiente os valores do vetor entre as consultas de soma. Isso não seria possível usando um vetor de soma de prefixos, porque após cada atualização, seria necessário construir todo o vetor de soma de prefixos novamente em tempo $O(n)$.

²A estrutura de árvore binária indexada foi apresentada por P. M. Fenwick em 1994 [21].

Estrutura

Mesmo que o nome da estrutura seja *árvore* binária indexada, ela é geralmente representada como um vetor. Nesta seção, assumimos que todos os vetores são indexados a partir de um, porque isso facilita a implementação.

Seja $p(k)$ a maior potência de dois que divide k . Armazenamos uma árvore binária indexada como um vetor $tree$ tal que

$$tree[k] = \text{sum}_q(k - p(k) + 1, k),$$

ou seja, cada posição k contém a soma dos valores em um intervalo do vetor original cujo comprimento é $p(k)$ e que termina na posição k . Por exemplo, como $p(6) = 2$, $tree[6]$ contém o valor de $\text{sum}_q(5, 6)$.

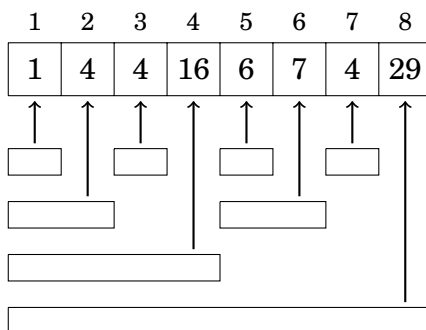
Por exemplo, considere o seguinte vetor:

1	2	3	4	5	6	7	8
1	3	4	8	6	1	4	2

A árvore binária indexada correspondente é a seguinte:

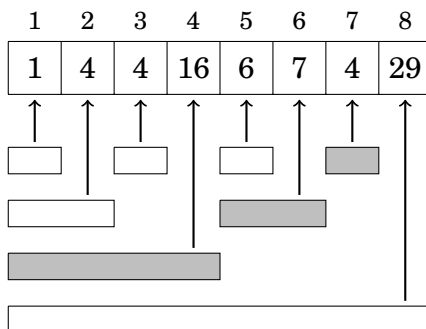
1	2	3	4	5	6	7	8
1	4	4	16	6	7	4	29

A figura a seguir mostra mais claramente como cada valor na árvore binária indexada corresponde a um intervalo no vetor original:



Usando uma árvore binária indexada, qualquer valor de $\text{sum}_q(1, k)$ pode ser calculado em tempo $O(\log n)$, porque um intervalo $[1, k]$ sempre pode ser dividido em $O(\log n)$ intervalos cujas somas são armazenadas na árvore.

Por exemplo, o intervalo $[1, 7]$ consiste nos seguintes intervalos:



Assim, podemos calcular a soma correspondente da seguinte forma:

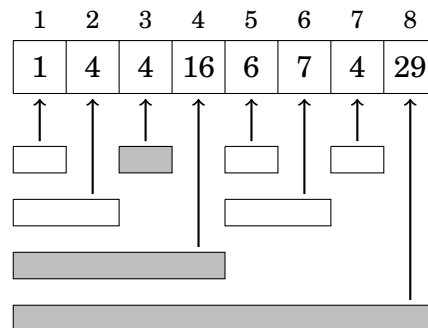
$$\text{sum}_q(1, 7) = \text{sum}_q(1, 4) + \text{sum}_q(5, 6) + \text{sum}_q(7, 7) = 16 + 7 + 4 = 27$$

Para calcular o valor de $\text{sum}_q(a, b)$ onde $a > 1$, podemos usar o mesmo truque que usamos com vetores de soma de prefixos:

$$\text{sum}_q(a, b) = \text{sum}_q(1, b) - \text{sum}_q(1, a - 1).$$

Como podemos calcular $\text{sum}_q(1, b)$ e $\text{sum}_q(1, a - 1)$ em tempo $O(\log n)$, a complexidade de tempo total é $O(\log n)$.

Então, após atualizar um valor no vetor original, vários valores na árvore binária indexada devem ser atualizados. Por exemplo, se o valor na posição 3 mudar, as somas dos seguintes intervalos mudam:



Como cada elemento do vetor pertence a $O(\log n)$ intervalos na árvore binária indexada, é suficiente atualizar $O(\log n)$ valores na árvore.

Implementação

As operações de uma árvore binária indexada podem ser implementadas eficientemente usando operações de bits. O fato chave necessário é que podemos calcular qualquer valor de $p(k)$ usando a fórmula

$$p(k) = k \& -k.$$

A seguinte função calcula o valor de $\text{sum}_q(1, k)$:

```
int sum(int k) {
    int s = 0;
    while (k >= 1) {
        s += tree[k];
        k -= k & -k;
    }
    return s;
}
```

A seguinte função aumenta o valor do vetor na posição k em x (x pode ser positivo ou negativo):

```

void add(int k, int x) {
    while (k <= n) {
        tree[k] += x;
        k += k&-k;
    }
}

```

A complexidade de tempo de ambas as funções é $O(\log n)$, porque as funções acessam $O(\log n)$ valores na árvore binária indexada, e cada movimento para a próxima posição leva tempo $O(1)$.

9.3 Árvore de segmentos

Uma **árvore de segmentos**³ é uma estrutura de dados que suporta duas operações: processar uma consulta de intervalo e atualizar um valor do vetor. As árvores de segmentos podem suportar consultas de soma, consultas de mínimo e máximo e muitas outras consultas para que ambas as operações funcionem em tempo $O(\log n)$.

Comparada a uma árvore binária indexada, a vantagem de uma árvore de segmentos é que ela é uma estrutura de dados mais geral. Enquanto as árvores binárias indexadas suportam apenas consultas de soma⁴, as árvores de segmentos também suportam outras consultas. Por outro lado, uma árvore de segmentos requer mais memória e é um pouco mais difícil de implementar.

Estrutura

Uma árvore de segmentos é uma árvore binária tal que os nós no nível inferior da árvore correspondem aos elementos do vetor, e os outros nós contêm informações necessárias para processar consultas de intervalo.

Nesta seção, assumimos que o tamanho do vetor é uma potência de dois e a indexação baseada em zero é usada, porque é conveniente construir uma árvore de segmentos para tal vetor. Se o tamanho do vetor não for uma potência de dois, podemos sempre anexar elementos extras a ele.

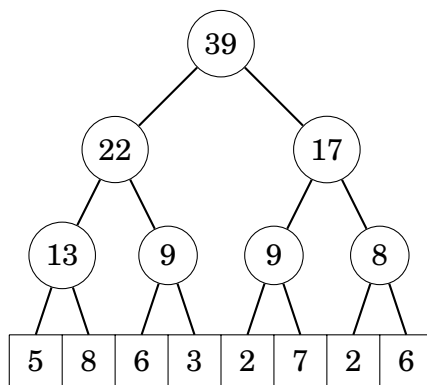
Vamos primeiro discutir árvores de segmentos que suportam consultas de soma. Como exemplo, considere o seguinte vetor:

0	1	2	3	4	5	6	7
5	8	6	3	2	7	2	6

A árvore de segmentos correspondente é a seguinte:

³A implementação bottom-up neste capítulo corresponde àquela em [62]. Estruturas semelhantes foram usadas no final dos anos 1970 para resolver problemas geométricos [9].

⁴Na verdade, usando *duas* árvores binárias indexadas, é possível suportar consultas de mínimo [16], mas isso é mais complicado do que usar uma árvore de segmentos.

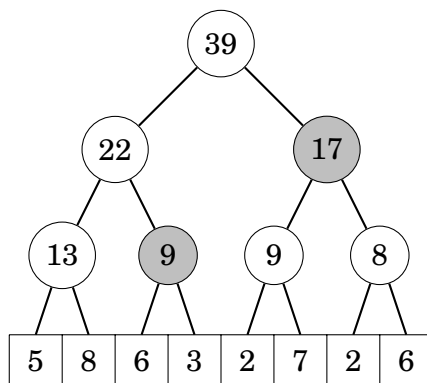


Cada nó interno da árvore corresponde a um intervalo do vetor cujo tamanho é uma potência de dois. Na árvore acima, o valor de cada nó interno é a soma dos valores correspondentes do vetor, e pode ser calculado como a soma dos valores de seu nó filho esquerdo e direito.

Acontece que qualquer intervalo $[a, b]$ pode ser dividido em $O(\log n)$ intervalos cujos valores são armazenados nos nós da árvore. Por exemplo, considere o intervalo $[2, 7]$:

0	1	2	3	4	5	6	7
5	8	6	3	2	7	2	6

Aqui $\text{sum}_q(2, 7) = 6 + 3 + 2 + 7 + 2 + 6 = 26$. Neste caso, os dois nós da árvore a seguir correspondem ao intervalo:

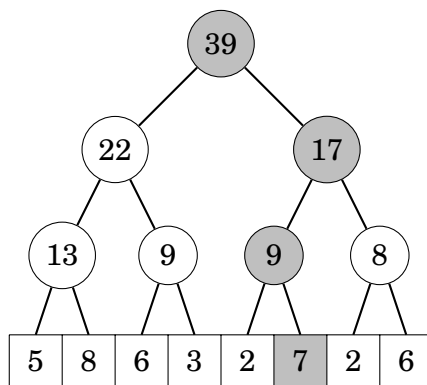


Assim, outra maneira de calcular a soma é $9 + 17 = 26$.

Quando a soma é calculada usando nós localizados o mais alto possível na árvore, no máximo dois nós em cada nível da árvore são necessários. Portanto, o número total de nós é $O(\log n)$.

Após uma atualização do vetor, devemos atualizar todos os nós cujo valor depende do valor atualizado. Isso pode ser feito percorrendo o caminho do elemento do vetor atualizado até o nó superior e atualizando os nós ao longo do caminho.

A figura a seguir mostra quais nós da árvore mudam se o valor do vetor 7 mudar:

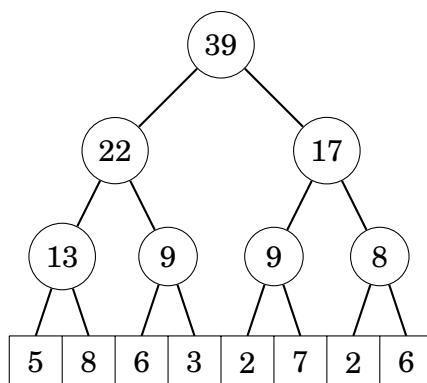


O caminho de baixo para cima sempre consiste em $O(\log n)$ nós, então cada atualização muda $O(\log n)$ nós na árvore.

Implementação

Armazenamos uma árvore de segmentos como um vetor de $2n$ elementos, onde n é o tamanho do vetor original e uma potência de dois. Os nós da árvore são armazenados de cima para baixo: $tree[1]$ é o nó superior, $tree[2]$ e $tree[3]$ são seus filhos, e assim por diante. Finalmente, os valores de $tree[n]$ a $tree[2n - 1]$ correspondem aos valores do vetor original no nível inferior da árvore.

Por exemplo, a árvore de segmentos



é armazenada da seguinte forma:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
39	22	17	13	9	9	8	5	8	6	3	2	7	2	6

Usando essa representação, o pai de $tree[k]$ é $tree[\lfloor k/2 \rfloor]$, e seus filhos são $tree[2k]$ e $tree[2k + 1]$. Note que isso implica que a posição de um nó é par se for um filho esquerdo e ímpar se for um filho direito.

A seguinte função calcula o valor de $sum_q(a, b)$:

```
int sum(int a, int b) {
    a += n; b += n;
    int s = 0;
    while (a <= b) {
```

```

    if (a%2 == 1) s += tree[a++];
    if (b%2 == 0) s += tree[b--];
    a /= 2; b /= 2;
}
return s;
}

```

A função mantém um intervalo que é inicialmente $[a + n, b + n]$. Então, a cada passo, o intervalo é movido um nível mais alto na árvore, e antes disso, os valores dos nós que não pertencem ao intervalo superior são adicionados à soma.

A seguinte função aumenta o valor do vetor na posição k por x :

```

void add(int k, int x) {
    k += n;
    tree[k] += x;
    for (k /= 2; k >= 1; k /= 2) {
        tree[k] = tree[2*k] + tree[2*k+1];
    }
}

```

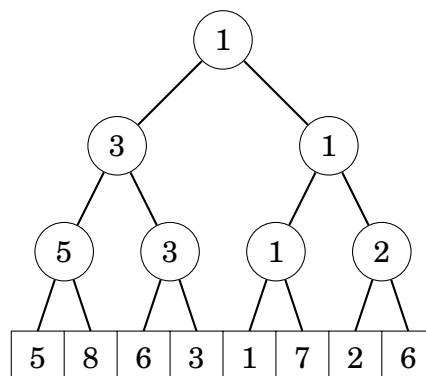
Primeiro a função atualiza o valor no nível inferior da árvore. Depois disso, a função atualiza os valores de todos os nós internos da árvore, até que alcance o nó superior da árvore.

Ambas as funções acima funcionam em tempo $O(\log n)$, pois uma árvore de segmentos de n elementos consiste em $O(\log n)$ níveis, e as funções movem um nível mais alto na árvore a cada passo.

Outras consultas

Árvores de segmentos podem suportar todas as consultas de intervalo onde é possível dividir um intervalo em duas partes, calcular a resposta separadamente para ambas as partes e então combinar as respostas de forma eficiente. Exemplos de tais consultas são mínimo e máximo, maior divisor comum, e operações de bits and, or e xor.

Por exemplo, a seguinte árvore de segmentos suporta consultas de mínimo:

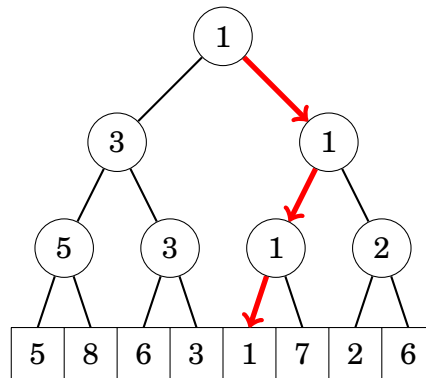


Neste caso, cada nó da árvore contém o menor valor no intervalo do vetor correspondente. O nó superior da árvore contém o menor valor em todo o vetor.

As operações podem ser implementadas como anteriormente, mas em vez de somas, os mínimos são calculados.

A estrutura de uma árvore de segmentos também nos permite usar a busca binária para localizar elementos do vetor. Por exemplo, se a árvore suporta consultas de mínimo, podemos encontrar a posição de um elemento com o menor valor em $O(\log n)$ tempo.

Por exemplo, na árvore acima, um elemento com o menor valor 1 pode ser encontrado traversando um caminho para baixo a partir do nó superior:



9.4 Técnicas adicionais

Compressão de índices

Uma limitação em estruturas de dados que são construídas sobre um vetor é que os elementos são indexados usando inteiros consecutivos. Dificuldades surgem quando índices grandes são necessários. Por exemplo, se desejarmos usar o índice 10^9 , o vetor deve conter 10^9 elementos, o que exigiria muita memória.

No entanto, geralmente podemos contornar essa limitação usando **compressão de índices**, onde os índices originais são substituídos por índices 1, 2, 3, etc. Isso pode ser feito se soubermos todos os índices necessários durante o algoritmo antecipadamente.

A ideia é substituir cada índice original x por $c(x)$, onde c é uma função que comprime os índices. Exigimos que a ordem dos índices não mude, então se $a < b$, então $c(a) < c(b)$. Isso nos permite realizar consultas convenientemente mesmo que os índices sejam comprimidos.

Por exemplo, se os índices originais são 555, 10^9 e 8, os novos índices são:

$$\begin{aligned} c(8) &= 1 \\ c(555) &= 2 \\ c(10^9) &= 3 \end{aligned}$$

Atualizações de intervalo

Até agora, implementamos estruturas de dados que suportam consultas de intervalo e atualizações de valores únicos. Vamos agora considerar uma situação

oposta, onde devemos atualizar intervalos e recuperar valores únicos. Vamos focar numa operação que aumenta todos os elementos num intervalo $[a, b]$ por x .

Surpreendentemente, podemos usar as estruturas de dados apresentadas neste capítulo também nesta situação. Para fazer isso, construímos um **vetor de diferenças** cujos valores indicam as diferenças entre valores consecutivos no vetor original. Assim, o vetor original é o vetor de soma de prefixo do vetor de diferenças. Por exemplo, considere o seguinte vetor:

0	1	2	3	4	5	6	7
3	3	1	1	1	5	2	2

O vetor de diferenças para o vetor acima é o seguinte:

0	1	2	3	4	5	6	7
3	0	-2	0	0	4	-3	0

Por exemplo, o valor 2 na posição 6 no vetor original corresponde à soma $3 - 2 + 4 - 3 = 2$ no vetor de diferenças.

A vantagem do vetor de diferenças é que podemos atualizar um intervalo no vetor original mudando apenas dois elementos no vetor de diferenças. Por exemplo, se quisermos aumentar o vetor original valores entre as posições 1 e 4 por 5, basta aumentar o valor do vetor de diferenças na posição 1 por 5 e diminuir o valor na posição 5 por 5. O resultado é o seguinte:

0	1	2	3	4	5	6	7
3	5	-2	0	0	-1	-3	0

De forma mais geral, para aumentar os valores no intervalo $[a, b]$ por x , aumentamos o valor na posição a por x e diminuimos o valor na posição $b + 1$ por x . Assim, é só necessário atualizar valores únicos e processar consultas de soma, para que possamos usar uma árvore binária indexada ou uma árvore de segmentos.

Um problema mais difícil é suportar tanto consultas de intervalo quanto atualizações de intervalo. No Capítulo 28 veremos que mesmo isso é possível.

Referências Bibliográficas

- [1] A. V. Aho, J. E. Hopcroft and J. Ullman. *Data Structures and Algorithms*, Addison-Wesley, 1983.
- [2] R. K. Ahuja and J. B. Orlin. Distance directed augmenting path algorithms for maximum flow and parametric maximum flow problems. *Naval Research Logistics*, 38(3):413–430, 1991.
- [3] A. M. Andrew. Another efficient algorithm for convex hulls in two dimensions. *Information Processing Letters*, 9(5):216–219, 1979.
- [4] B. Aspvall, M. F. Plass and R. E. Tarjan. A linear-time algorithm for testing the truth of certain quantified boolean formulas. *Information Processing Letters*, 8(3):121–123, 1979.
- [5] R. Bellman. On a routing problem. *Quarterly of Applied Mathematics*, 16(1):87–90, 1958.
- [6] M. Beck, E. Pine, W. Tarrat and K. Y. Jensen. New integer representations as the sum of three cubes. *Mathematics of Computation*, 76(259):1683–1690, 2007.
- [7] M. A. Bender and M. Farach-Colton. The LCA problem revisited. In *Latin American Symposium on Theoretical Informatics*, 88–94, 2000.
- [8] J. Bentley. *Programming Pearls*. Addison-Wesley, 1999 (2nd edition).
- [9] J. Bentley and D. Wood. An optimal worst case algorithm for reporting intersections of rectangles. *IEEE Transactions on Computers*, C-29(7):571–577, 1980.
- [10] C. L. Bouton. Nim, a game with a complete mathematical theory. *Annals of Mathematics*, 3(1/4):35–39, 1901.
- [11] Croatian Open Competition in Informatics, <http://hsin.hr/coci/>
- [12] Codeforces: On "Mo's algorithm", <http://codeforces.com/blog/entry/20032>
- [13] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest and C. Stein. *Introduction to Algorithms*, MIT Press, 2009 (3rd edition).

- [14] E. W. Dijkstra. A note on two problems in connexion with graphs. *Numerische Mathematik*, 1(1):269–271, 1959.
- [15] K. Diks et al. *Looking for a Challenge? The Ultimate Problem Set from the University of Warsaw Programming Competitions*, University of Warsaw, 2012.
- [16] M. Dima and R. Ceterchi. Efficient range minimum queries using binary indexed trees. *Olympiad in Informatics*, 9(1):39–44, 2015.
- [17] J. Edmonds. Paths, trees, and flowers. *Canadian Journal of Mathematics*, 17(3):449–467, 1965.
- [18] J. Edmonds and R. M. Karp. Theoretical improvements in algorithmic efficiency for network flow problems. *Journal of the ACM*, 19(2):248–264, 1972.
- [19] S. Even, A. Itai and A. Shamir. On the complexity of time table and multi-commodity flow problems. *16th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, 184–193, 1975.
- [20] D. Fanding. A faster algorithm for shortest-path – SPFA. *Journal of Southwest Jiaotong University*, 2, 1994.
- [21] P. M. Fenwick. A new data structure for cumulative frequency tables. *Software: Practice and Experience*, 24(3):327–336, 1994.
- [22] J. Fischer and V. Heun. Theoretical and practical improvements on the RMQ-problem, with applications to LCA and LCE. In *Annual Symposium on Combinatorial Pattern Matching*, 36–48, 2006.
- [23] R. W. Floyd Algorithm 97: shortest path. *Communications of the ACM*, 5(6):345, 1962.
- [24] L. R. Ford. Network flow theory. RAND Corporation, Santa Monica, California, 1956.
- [25] L. R. Ford and D. R. Fulkerson. Maximal flow through a network. *Canadian Journal of Mathematics*, 8(3):399–404, 1956.
- [26] R. Freivalds. Probabilistic machines can use less running time. In *IFIP congress*, 839–842, 1977.
- [27] F. Le Gall. Powers of tensors and fast matrix multiplication. In *Proceedings of the 39th International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, 296–303, 2014.
- [28] M. R. Garey and D. S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, W. H. Freeman and Company, 1979.
- [29] Google Code Jam Statistics (2017), <https://www.go-hero.net/jam/17>

- [30] A. Grønlund and S. Pettie. Threesomes, degenerates, and love triangles. In *Proceedings of the 55th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, 621–630, 2014.
- [31] P. M. Grundy. Mathematics and games. *Eureka*, 2(5):6–8, 1939.
- [32] D. Gusfield. *Algorithms on Strings, Trees and Sequences: Computer Science and Computational Biology*, Cambridge University Press, 1997.
- [33] S. Halim and F. Halim. *Competitive Programming 3: The New Lower Bound of Programming Contests*, 2013.
- [34] M. Held and R. M. Karp. A dynamic programming approach to sequencing problems. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 10(1):196–210, 1962.
- [35] C. Hierholzer and C. Wiener. Über die Möglichkeit, einen Linienzug ohne Wiederholung und ohne Unterbrechung zu umfahren. *Mathematische Annalen*, 6(1), 30–32, 1873.
- [36] C. A. R. Hoare. Algorithm 64: Quicksort. *Communications of the ACM*, 4(7):321, 1961.
- [37] C. A. R. Hoare. Algorithm 65: Find. *Communications of the ACM*, 4(7):321–322, 1961.
- [38] J. E. Hopcroft and J. D. Ullman. A linear list merging algorithm. Technical report, Cornell University, 1971.
- [39] E. Horowitz and S. Sahni. Computing partitions with applications to the knapsack problem. *Journal of the ACM*, 21(2):277–292, 1974.
- [40] D. A. Huffman. A method for the construction of minimum-redundancy codes. *Proceedings of the IRE*, 40(9):1098–1101, 1952.
- [41] The International Olympiad in Informatics Syllabus, <https://people.ksp.sk/~misof/ioi-syllabus/>
- [42] R. M. Karp and M. O. Rabin. Efficient randomized pattern-matching algorithms. *IBM Journal of Research and Development*, 31(2):249–260, 1987.
- [43] P. W. Kasteleyn. The statistics of dimers on a lattice: I. The number of dimer arrangements on a quadratic lattice. *Physica*, 27(12):1209–1225, 1961.
- [44] C. Kent, G. M. Landau and M. Ziv-Ukelson. On the complexity of sparse exon assembly. *Journal of Computational Biology*, 13(5):1013–1027, 2006.
- [45] J. Kleinberg and É. Tardos. *Algorithm Design*, Pearson, 2005.
- [46] D. E. Knuth. *The Art of Computer Programming. Volume 2: Seminumerical Algorithms*, Addison–Wesley, 1998 (3rd edition).

- [47] D. E. Knuth. *The Art of Computer Programming. Volume 3: Sorting and Searching*, Addison–Wesley, 1998 (2nd edition).
- [48] J. B. Kruskal. On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 7(1):48–50, 1956.
- [49] V. I. Levenshtein. Binary codes capable of correcting deletions, insertions, and reversals. *Soviet physics doklady*, 10(8):707–710, 1966.
- [50] M. G. Main and R. J. Lorentz. An $O(n \log n)$ algorithm for finding all repetitions in a string. *Journal of Algorithms*, 5(3):422–432, 1984.
- [51] J. Pachocki and J. Radoszewski. Where to use and how not to use polynomial string hashing. *Olympiads in Informatics*, 7(1):90–100, 2013.
- [52] I. Parberry. An efficient algorithm for the Knight’s tour problem. *Discrete Applied Mathematics*, 73(3):251–260, 1997.
- [53] D. Pearson. A polynomial-time algorithm for the change-making problem. *Operations Research Letters*, 33(3):231–234, 2005.
- [54] R. C. Prim. Shortest connection networks and some generalizations. *Bell System Technical Journal*, 36(6):1389–1401, 1957.
- [55] 27-Queens Puzzle: Massively Parallel Enumeration and Solution Counting. <https://github.com/preusser/q27>
- [56] M. I. Shamos and D. Hoey. Closest-point problems. In *Proceedings of the 16th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, 151–162, 1975.
- [57] M. Sharir. A strong-connectivity algorithm and its applications in data flow analysis. *Computers & Mathematics with Applications*, 7(1):67–72, 1981.
- [58] S. S. Skiena. *The Algorithm Design Manual*, Springer, 2008 (2nd edition).
- [59] S. S. Skiena and M. A. Revilla. *Programming Challenges: The Programming Contest Training Manual*, Springer, 2003.
- [60] SZKOpuł, <https://szkopul.edu.pl/>
- [61] R. Sprague. Über mathematische Kampfspiele. *Tohoku Mathematical Journal*, 41:438–444, 1935.
- [62] P. Stańczyk. *Algorytmika praktyczna w konkursach Informatycznych*, MSc thesis, University of Warsaw, 2006.
- [63] V. Strassen. Gaussian elimination is not optimal. *Numerische Mathematik*, 13(4):354–356, 1969.
- [64] R. E. Tarjan. Efficiency of a good but not linear set union algorithm. *Journal of the ACM*, 22(2):215–225, 1975.

- [65] R. E. Tarjan. Applications of path compression on balanced trees. *Journal of the ACM*, 26(4):690–715, 1979.
- [66] R. E. Tarjan and U. Vishkin. Finding biconnected components and computing tree functions in logarithmic parallel time. In *Proceedings of the 25th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, 12–20, 1984.
- [67] H. N. V. Temperley and M. E. Fisher. Dimer problem in statistical mechanics – an exact result. *Philosophical Magazine*, 6(68):1061–1063, 1961.
- [68] USA Computing Olympiad, <http://www.usaco.org/>
- [69] H. C. von Warnsdorf. *Des Rösselsprunges einfachste und allgemeinste Lösung*. Schmalkalden, 1823.
- [70] S. Warshall. A theorem on boolean matrices. *Journal of the ACM*, 9(1):11–12, 1962.

