

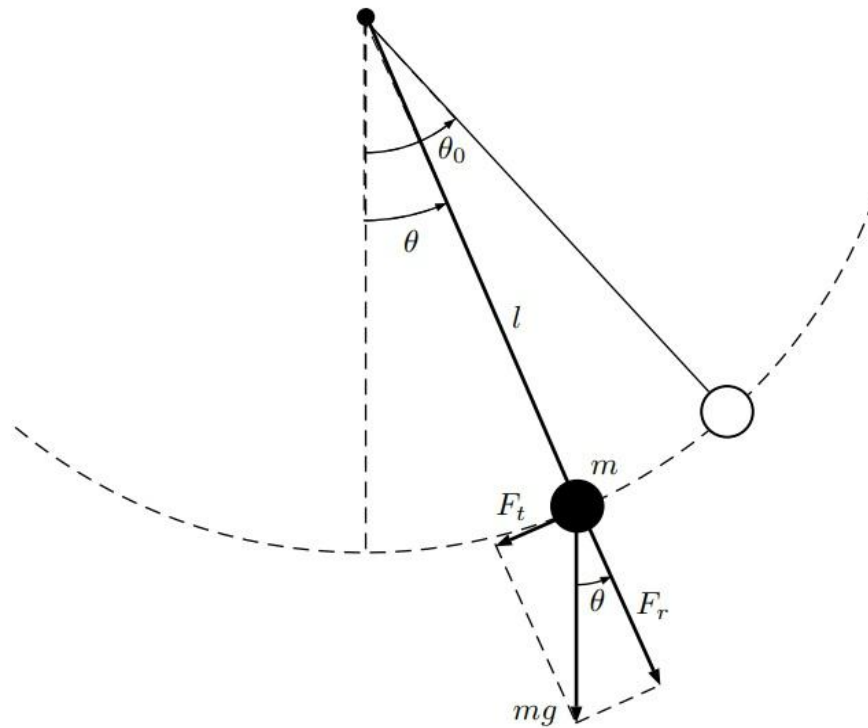


Matematičko klatno

Nataša Blagojević 159/2020

Lazar Lazović 62/2020

Matematičko klatno





Pretpostavke

- Klatno (teg) je materijalna tacka mase skoncentrisane u toj tački.
- U svakom trenutku t imamo način da izmerimo položaj te materijalne tačke u ravni vertikalnoj u odnosu na tlo koja sadrži tačku oslonca (zanemarujemo trecu koordinatu jer nema bočnih sila, npr. vetra).
- Nalazimo se u vakuumu (zanemarujemo otpor vazduha).
- Zemlja je ravna i sila gravitacije deluje vertikalno na tlo.
- Štap/kanap nema masu.
- Štap/kanap je nestišljiv - ne može da se isteže ili savija.

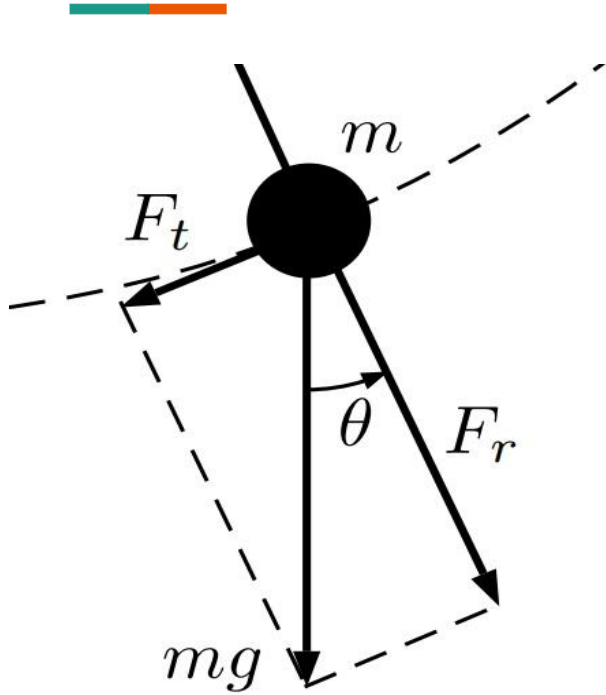


Šta imamo od podataka?

- Klatno (teg) je mase m .
- Dužina štapa/kanapa je l .
- Pocetna brzina $v_0 = 0$.
- Početni ugao otklona je θ_0 .
- Na telo deluje gravitaciona sila.
- Klatno (teg) se kreće po luku (položaj tela $s(t)$ je dužina luka od ravnotežnog položaja do tela).

Šta želimo?

- $\theta(t)$.
- Period kretanja tela.
- Kolika je brzina tela u vremenu?



Sila = masa · ubrzanje

mg - gravitaciona sila

F_r - radijalna sila (nema dejstvo)

F_t - tangencijalna sila

($F_t = -mg\sin(\theta)$)

Model bez prigušenja

$$\theta''(t) = \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin(\theta)$$

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \theta'(0) = 0$$

Izvođenje

$m\vec{a} = \vec{F}_g + \vec{F}_o$ Gde je sa \vec{F}_g označena sila gravitacije a sa \vec{F}_o sila otpora.

Pretpostavimo da se nalazimo u vakuumu i da na teg deluje samo sila gravitacije, $\vec{F}_o = 0$
 $F_g = mg$ i može se razložiti na radijalnu (F_r) i tangencijalnu silu (F_t).

Radijalna komponenta deluje u pravcu kanapa i ne proizvodi ni jedno dejstvo (pretpostavljamo da je kanap nerastegljiv). Jedino dejstvo ima tangencijalna komponenta.

$$F_t = -mg \sin \theta$$

Sa obzirom da se sila gravitacije koja deluje na teg određuje kao proizvod mase i ubrzanja, a ubrzanje kao drugi izvod pređenog puta, sledi da je

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -mg \sin \theta \rightarrow \frac{d^2 s}{dt^2} = -g \sin \theta$$
, dužina luka je direktno proporcionalna uglu otklona

Košijev problem

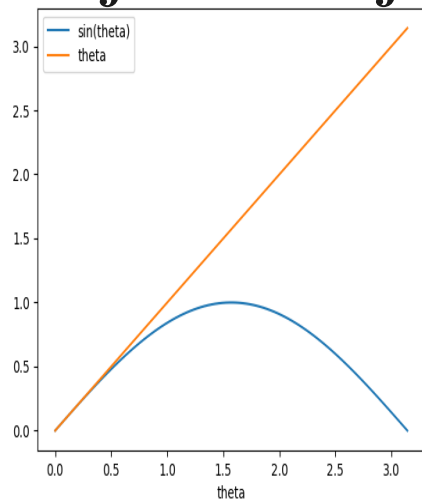
$$s(t) = l\theta(t)$$

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \theta$$
 i još početni uslovi $\theta(0) = \theta_0, \theta'(0) = 0$

Model bez prigušenja

$$\theta''(t) = \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin(\theta)$$

Pojednostavljen model (specijalni slučaj $\theta \ll 1$)



```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 theta = np.linspace(0, np.pi, 100)
5 plt.plot(theta, np.sin(theta), label='sin(theta)')
6 plt.plot(theta, theta, label='theta')
7 plt.legend()
8 plt.xlabel('theta')
9 plt.show()
```

Za $\theta_0 \ll 1$

$$\theta''(t) = \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin(\theta) \rightarrow -\frac{g}{l}\theta$$

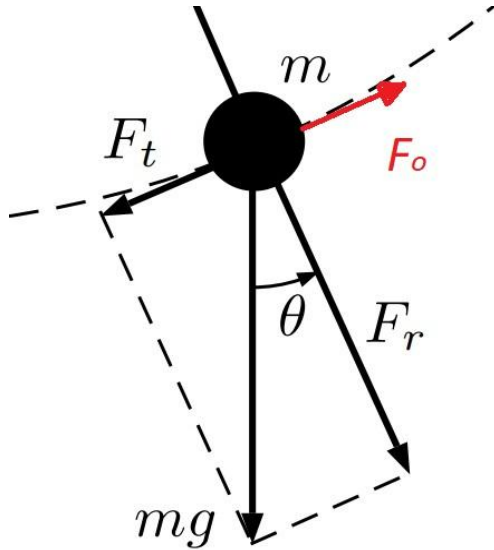
Za $\theta_0 \ll 1$

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\sqrt{\frac{g}{l}}t)$$

Period - Hajgensov zakon

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Otpor sredine



- brzina kretanja tela
- gustina sredine
- površina čeonog preseka
- oblik tela

Sila otpora

$$F_o = -Bv = -B\frac{ds}{dt} = -B\frac{d\theta}{dt}l$$

Model sa prigušenjem

$$\theta''(t) = \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{B}{m}\frac{d\theta}{dt} - \frac{g}{l}\sin(\theta)$$

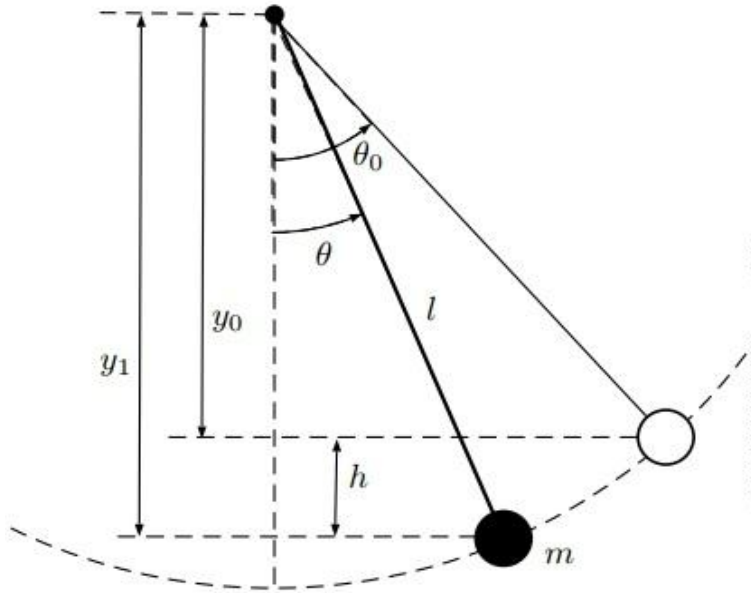
$$\theta(0) = \theta_0, \quad \theta'(0) = 0$$

Matematičko klatno

- Mehanički rad = sila · pređeni put
- Energija = koliki rad može da izvrši neko telo
- Mehanička energija = kinetička energija + potencijalna energija
- Kinetička energija (K) = energija koju telo ima pri kretanju, $K = \frac{1}{2}mv^2$
- Potencijalna energija (P) = energija uslovljena uzajamnim položajem tela, $P = mgh$

Zakon održanja energije

Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo prelazi iz jednog oblika u drugi ili sa jednog tela na drugo. $E = K + P = \text{const}$



$$\Delta K = \frac{1}{2}mv^2, \Delta P = mgh$$

$$v = \pm \sqrt{2gh}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\sqrt{2gh}}{l}, h = ?$$

$$h = l(\cos(\theta) - \cos(\theta_0))$$

Model sa prigušenjem

$$\theta'(t) = \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{l}(\cos(\theta) - \cos(\theta_0))}, \theta(0) = \theta_0$$

Period

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)}} d\theta$$



Ako početna brzina nije $v_0 = 0$?

Iz zakona kretanja

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin(\theta) \quad \theta(0) = \theta_0, \theta'(0) = \frac{v_0}{l}$$

Iz zakona održanja energije: $K(0) = v_0 \neq 0 \rightarrow \frac{d\theta}{dt} = ?$

Kolika je brzina tela u vremenu u zavisnosti od θ za različite θ_0 i v_0 ?

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{l}v, \frac{dv}{dt} = -g\sin(\theta)$$

HVALA NA PAŽNJI!