

Kitovi

Seminarski rad u okviru kursa
Osnovi matematičkog modeliranja
Matematički fakultet

Nataša Blagojević Lazar Lazović
mi20159@alas.mat.bg.ac.rs mi20062@alas.matf.bg.ac.rs

28. maj 2024.

Sažetak

U ovom radu ćemo se upoznati sa dinamikom populacije plavih kitova i kitova perajara koristeći matematički model. Analiziramo stacionarne tačke sistema, numerički rešavamo model, istražujemo uticaj promene prirodnog priraštaja plavih kitova i uključujemo ribarenje kako bismo odredili optimalni broj brodova radi održavanja ravnoteže u populaciji kitova.

Sadržaj

1	Uvod	2
2	Matematički model	2
3	Stacionarna rešenja	3
3.1	Analiza stacionarnih rešenja	5
4	Numeričko rešavanje modela i grafički prikaz	7
4.1	Detaljna analiza za $a = 10^{-8}$	8
4.2	Detaljna analiza za $a = 10^{-6}$	8
5	Prirodni priraštaj	8
5.1	Niska stopa priraštaja (2%)	9
5.2	Umerena stopa priraštaja (3-4%)	9
5.3	Visoka stopa priraštaja (6-7%)	10
5.4	Opšti zaključak	10
6	Lov na kitove	11
7	Zaključak	13
	Literatura	14

1 Uvod

Populacija morskih sisara ima ključnu ulogu u održavanju ravnoteže u morskim ekosistemima. Plavi kitovi i kitovi perajari su značajni predstavnici ovih populacija, čija dinamika može biti složena i podložna različitim uticajima okoline. Međutim, aktivnost kao što je ribolov može imati značajan uticaj na ove populacije, što zahteva pažljivo istraživanje i analizu.

U ovom radu istražujemo kako se dinamika populacije plavih kitova i kitova perajara menja kroz matematički model koji uzima u obzir faktore kao što su dostupnost hrane (planktona), međusobno nadmetanje, prirodni priraštaj i uticaj ribolova. Modeliranje ovakvih složenih sistema nam omogućava bolje razumevanje i ponašanje sisara pod različitim uslovima, kao i pružanje smernica za upravljanje i očuvanje ovih vrsta u prirodi.

Naša analiza se oslanja na sistem diferencijalnih jednačina koje opisuju promene u populacijama plavih kitova ($x(t)$) i kitova perajara ($y(t)$) u odnosu na vreme t . Model uzima u obzir reprodukciju populacije, međusobno nadmetanje za hranu i prirodni priraštaj definisanih pomoću parametara koji karakteristišu ove procese.

Cilj našeg istraživanja je da istražimo kako međusobno nadmetanje, prirodni priraštaj i ribolov utiče na samu dinamiku populacija plavih kitova i kitova perajara, kao i kako se ove promene odražavaju na stabilnost i dugoročno održavanje ovih populacija.

U nastavku ovog rada, predstavljamo detaljnu analizu našeg matematičkog modela, rezultate simulacija za različite scenarije, kao i diskusiju o analizama za očuvanje ovih morskih sisara.

2 Matematički model

Predstavljamo matematički model koji opisuje dinamiku promene populacije jedinki plavih kitova i kitova perajara koji se takmiče za hranu (planktone).

Neka su $x(t)$ i $y(t)$ označeni kao ukupan broj plavih kitova i kitova perajara u trenutku t . Parametar a je pozitivan parametar koji predstavlja intezitet konkurencije između ove dve vrste za zajedničke resurse, a to je hrana.

Sistem diferencijalnih jednačina koji opisuje dinamiku populacije je dat sa:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 0.05x\left(1 - \frac{x}{250000}\right) - axy \\ \frac{dy}{dt} &= 0.08y\left(1 - \frac{y}{400000}\right) - axy\end{aligned}$$

Prva jednačina opisuje kako se broj plavih kitova menja tokom vremena. Prvi član, tj. $0.05x(1 - \frac{x}{250000})$ predstavlja prirodni priraštaj broja plavih kitova, gde se brzina rasta smanjuje kako populacija plavih kitova

približava kapacitetu staništa od 250000. Drugi član, tj. $-axy$ opisuje negativan uticaj konkurencije između plavih kitova i kitova perajara na rast populacije plavih kitova.

Promena broja kitova perajara u odnosu na vreme opisana je drugom jednačinom. Prvi član na desnoj strani, tj. $0.08y(1 - \frac{y}{400000})$ predstavlja prirodni poriraštaj kitova perajara, gde se stopa rasta takođe smanjuje s povećanjem broja kitova perajara, ali opada kako se populacija približava kapacitetu staništa od 400000. Drugi član, tj. $-axy$ predstavlja negativan uticaj konkurencije između plavih kitova i kitova perajara na rast populacije kitova perajara.

Početni uslovi ovog modela su da na početku imamo 6000 jedinki plavog kita i 60000 jedinki kitova perajara.

3 Stacionarna rešenja

Za pronalaženje stacionarnih rešenja modela koji opisuje dinamiku plavih kitova i kitova perajara, koristimo metod stavljanja diferencijalnih jednačina u stanje ravnoteže, gde se brzine promena populacije izjednačavaju sa nulom.

Model je definisan na sledeći način:

$$\frac{dx}{dt} = 0.05x(1 - \frac{x}{250000}) - axy \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = 0.08y(1 - \frac{y}{400000}) - axy \quad (2)$$

Gde nam x i y predstavljaju populacije plavih kitova i kitova perajara, dok je a parametar koji nam opisuje uticaj međusobnog nadmetanja.

Kako bismo pronašli stacionarna rešenja, potrebno je da obe jednačine izjednačimo sa nulom, jer nam stacionarna rešenja predstavljaju ona rešenja u kojima se populacija kitova ne menja tokom vremena.

Za zadati parametar $a = 10^{-8}$ i za zadate početne uslove da je na početku 6000 jedinki plavog kita i 60000 jedinki kita perajara. Rešavamo početni sistem na malopredloženi opisani način.

Precizna definicija početnih uslova (*):

$$a = 10^{-8}$$

$$x(0) = 6000$$

$$y(0) = 60000$$

Izjednačavanje obe jednačine sa 0:

$$\frac{dx}{dt} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{dy}{dt} = 0 \quad (4)$$

Dobijamo sledeće sisteme:

$$0.05x(1 - \frac{x}{250000}) - axy = 0 \quad (5)$$

$$0.08y(1 - \frac{y}{400000}) - axy = 0 \quad (6)$$

Potom dobijamo:

$$x(0.05(1 - \frac{x}{250000}) - ay) = 0$$

$$y(0.08(1 - \frac{y}{400000}) - ax) = 0$$

Odnosno:

$$x = 0 \vee 0.05 \cdot (1 - \frac{x}{250000}) - ay = 0 \quad (7)$$

$$y = 0 \vee 0.08 \cdot (1 - \frac{y}{400000}) - ax = 0 \quad (8)$$

Rešavanjem ovako dobijenog sistema, odmah možemo uočiti trivijalno rešenje, a to je par $(x, y) = (0, 0)$.

Kako znamo da nam je $x = 0$, tu vrednost možemo uvrstiti u izraz $0.08 \cdot (1 - \frac{y}{400000}) - ax = 0$, pri čemu znamo da je $a = 10^{-8}$. Sređivanjem ovog izraza dobijamo da je $y = 400000$.

Tako ubacujemo i vrednost $y = 0$ u izraz $0.05 \cdot (1 - \frac{x}{250000}) - ay = 0$. Znamo da nam je $a = 10^{-8}$ i kada sve sredimo, dobijamo $x = 250000$.

Ovim računanjem smo dobili još dva para rešenja, a to su: $(x, y) = (0, 400000)$ i $(x, y) = (250000, 0)$.

Rešavanjem sledećeg sistema, dobijamo još jedan par koji predstavlja stacionarno rešenje.

$$0.05 \cdot \left(1 - \frac{x}{250000}\right) - ay = 0$$

i

$$0.08 \cdot \left(1 - \frac{y}{400000}\right) - ax = 0$$

Zamenjujemo parametar a sa vrednošću: $a = 10^{-8}$ i dobijamo sledeće jednačine:

$$0.05 \cdot \left(1 - \frac{x}{250000}\right) - 10^{-8}y = 0 \quad (9)$$

$$0.08 \cdot \left(1 - \frac{y}{400000}\right) - 10^{-8}x = 0 \quad (10)$$

Iz jednačine (7) izrazimo y :

$$y = 10^8 \cdot 0.05 \cdot \left(1 - \frac{x}{250000}\right)$$

Kada malo bolje raspišemo i sredimo izraz za y dobijamo sledeću jednačinu:

$$y = 5 \cdot 10^6 - 20x \quad (11)$$

Potom izraženo y iz jednačine (11) uvrstimo u jednačinu (10) i dobijamo sledeće:

$$0.08 \cdot \left(1 - \frac{5 \cdot 10^6 - 20x}{400000}\right) - 10^{-8}x = 0$$

Nakon detaljnijeg matematičkog računa dobijamo sledeću jednakost:

$$399x = 92 \cdot 10^6 \quad (12)$$

Odatle dobijamo da je $x \approx 230576$. Kada ovo rešenje uvrstimo u jednačinu (11) dobijamo približnu vrednost za y , a to je $y \approx 388480$.

3.1 Analiza stacionarnih rešenja

Kao jedno stacionarno rešenje dobili smo par $(x, y) = (0, 0)$. Ovo rešenje znači da nijedna populacija nema prisustva u ekosistemu. To može ukazivati na izumiranje obe vrste kitova ili na nepovoljne uslove sredine koje ne podržavaju njihov opstanak. Ovo stacionarno rešenje je trivijalno i stoga ne predstavlja realističan scenarij za ekološki sistem.

Drugo stacionarno rešenje koje smo dobili je $x \approx 230576$ i $y \approx 388480$. Ovo rešenje predstavlja situaciju u kojoj su populacije plavih kitova i kitova perajara prisutne u ekosistemu, odnosno da postoji neka određena ravnoteža između kitova.

Sada proveravamo koja su to rešenja stabilna. To ćemo uraditi uz pomoć MATLAB-a u kojem ćemo napisati kod koji nam računa matricu, na osnovu koje ćemo utvrditi da li je naše malopredašnje rešenje stabilno ili nestabilno.

Funkcija **analyse_stability** prvo izračunava Žordanovu matricu u datoj stacionarnoj tački i potom procenjuje sopstvene vrednosti i utvrđuje stabilnost rešenja. Pozivamo je na sledeći način:

analyse_stability([230576, 388480], $1e-8$);

Nakon izvršenja analize stabilnosti, dobijamo sledeću Žordanovu matricu i sopstvene vrednosti u tački stacionarnog rešenja ((230576, 388480)), za dati parametar ($a = 10^{-8}$):

$$\begin{bmatrix} -0.0461 & -0.0023 \\ -0.0038 & -0.0777 \end{bmatrix}$$

i sledeće sopstvene vrednosti:

$$\lambda_1 \approx -0.0458$$

$$\lambda_2 \approx -0.780$$

Oba sopstvena vektora su realna i negativna, što ukazuje na to da su obe sopstvene vrednosti negativne. Odatle zaključujemo da je stacionarno rešenje (230576, 388480) stabilno.

To znači da u dugoročnom stabilnom stanju da se populacije plavih kitova i kitova perajara održavaju na nivou koji odgovara tački stacionarnog rešenja. Sistem će se vratiti na ovo stabilno stanje nakon bilo kakvih manjih poremećaja, što ukazuje na ravnotežu između reprodukcije, smrtnosti i drugih faktora koji utiču na populaciju kitova.

Sada izanalizirajmo sledeće stacionarno rešenje: $(x, y) = (250000, 0)$. Ako pokrenemo istu funkciju, samo za različite parametre x i y , dobićemo sledeću Žordanovu matricu:

$$\begin{bmatrix} -0.05 & -0.0025 \\ 0 & 0.0775 \end{bmatrix}$$

Odnosno, sledeće sopstvene vrednosti:

$$\lambda_1 = -0.05$$

$$\lambda_2 = 0.0775$$

Kako imamo pozitivno prisustvo parametra λ_2 , to nam ukazuje da je ovo rešenje nestabilno. Nestabilnost ove tačke nam govori da teoretski populacija kitova perajara može da preživi bez plavih kitova. Iz stvarnog sveta gledano, bilo koje malo odstupanje može dovesti do promene dinamike sistema, što znači da nije verovatno da će ovakav scenarij biti dugoročan. Gledano sa ekološke strane, populacija plavih kitova izumire, dok se populacija kitova perajara dostiže ravnotežnu tačku od 400000 jedinki.

Razmotirimo još jedno stacionarno rešenje: $(x, y) = (0, 400000)$. Računamo Žordanovu matricu uz pomoć prethodne funkcije i dobijamo:

$$\begin{bmatrix} 0.046 & 0 \\ -0.004 & -0.0800 \end{bmatrix}$$

Sopstvene vrednosti za ovu matricu su:

$$\lambda_1 = -0.08$$

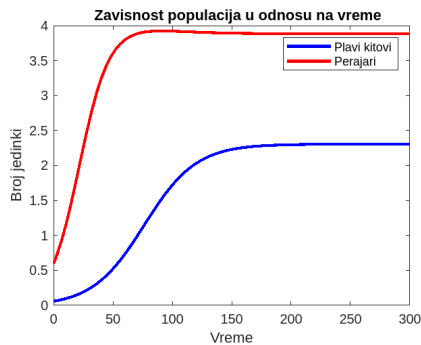
$$\lambda_2 = 0.046$$

Kao i u prethodnom slučaju, pozitivna vrednost λ_2 nam sugerise da je ovo stacionarna tačka nestabilna. Nestabilnost ove tačke nam govori da teoretski populacija plavih kitova može da preživi bez kitova perajara. U stvarnosti, bilo kakvo malo odstupanje mogu da dovedu do promene dinamike sistema, a to znači da nije verovatno da će ovakav scenarijo biti dugoročan. Iz ekološke tačke gledišta, ovo je scenarijo u kojem populacija kitova perajara izumire, dok populacija plavih kitova dostiže ravnotežnu tačku od 250000 jedinki.

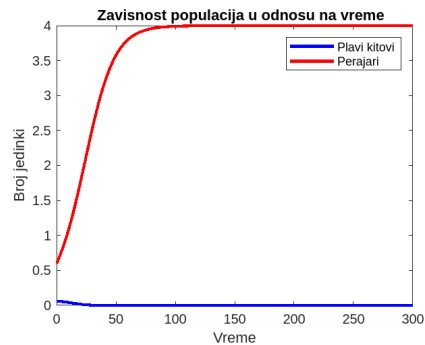
Iako nam stacionarna rešenja ukazuju na moguće ravnotežne tačke gde jedna vrsta može da preživi bez druge, njihova nestabilnost govori da je ovako nešto nemoguće postići u prirodi.

4 Numeričko rešavanje modela i grafički prikaz

Kako bismo numerički rešili model za parametre $a = 10^{-8}$ i $a = 10^{-6}$, potrebno ih je uvrstiti u diferencijalne jednačine i potom primenom numeričkih metoda rešiti sistem diferencijalnih jednačina. Zatim ćemo grafički prikazati broj jedinki obe vrste kitova u zavisnosti od vremena i nakon toga ćemo diskutovati o ponašanju sistema kada $t \rightarrow \infty$.



Slika 1: $a = 10^{-8}$



Slika 2: $a = 10^{-6}$

Parametar a nam predstavlja međusobno nadmetanje između vrsta, različite vrednosti rezultiraju različitim dinamikama populacije. Manja vrednost ($a = 10^{-8}$) nam ukazuje na to da će nadmetanje između vrsta biti manje, što za posledicu ima da se obe vrste populacija kitova povećava (Slika 1). A, sa druge strane za $a = 10^{-6}$ nam ukazuje na intenzivnije međusobno nadmetanje, što za posledicu ima izumiranje plavih kitova (Slika 2).

4.1 Detaljna analiza za $a = 10^{-8}$

Kako imamo manju konkurenciju za resurse, kao što su u ovom slučaju hrana, omogućava svakoj populaciji veći pristup neophodnim resursima za opstanak. Očekujemo da će konkurencija među populacijama biti manje izražena, populacije će imati veću tendenciju da dostignu stabilne tačke u kojima nema značajnih promena tokom vremena ili će te promene biti sporije. Tako da, kada nam vreme teži beskonačnosti, odnosno $t \rightarrow \infty$, populacije će težiti svojim stabilnim tačkama.

4.2 Detaljna analiza za $a = 10^{-6}$

Očekujemo da će nadmetanje između plavih kitova i kitova perajara biti više izražena. Održava intenzitet konkurencije između ove dve vrste za zajedničke resurse. Kako je parametar za nadmetanje veći, to će imati veći uticaj na promenu populacije. Kada analiziramo samu dinamiku sistema, očekujemo da će populacija kitova perajara dostići stabilnu tačku, gde će se broj jedinki stabilizovati na određenom nivou. Zbog intenzivnije konkurencije i većeg uticaja parametra nadmetanja, populacija plavih kitova će izumreti.

5 Prirodni priraštaj

Prirodni priraštaj predstavlja ključni faktor u dinamici populacija u prirodi. Njegova uloga u održavanju stabilnosti ekosistema i dugoročnog opstanka vrsta je od suštinskog značaja.

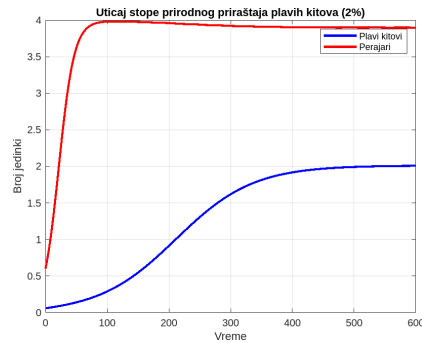
Prirodni priraštaj jedna je od osnovnih komponenti koja utiče na promene u populaciji plavih kitova. Ona se definiše kao stopa kojom se populacija povećava ili smanjuje zbog prirodnih procesa kao što su reprodukcija, smrtnost, migracija i slično.

Sledeća jednačina predstavlja matematički model koji u odnosu na prethodni uključuje i prirodni priraštaj (u jednačini označen sa p) u razmatranje:

$$\frac{dx}{dt} = px \cdot \left(1 - \frac{x}{250000}\right) - axy$$

Izanaliziramo konkretne slučajeve za prirodni priraštaj i njegov uticaj na dinamiku populacije plavih kitova. Fiksiraćemo $a = 10^{-8}$ za parametar razmatraćemo vrednosti 2%, 3%, 4%, 6%, 7%.

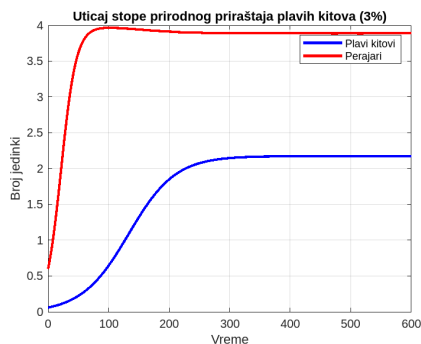
5.1 Niska stopa priraštaja (2%)



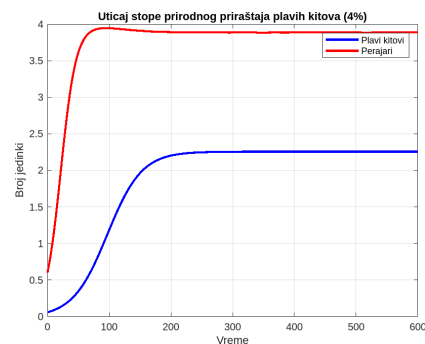
Slika 3: Priraštaj za 2%

Sa prirodnim priraštajem od 2%, sa grafika (Slika 3) uočavamo spor rast populacije plavih kitova. Početna populacija će polako da raste, a efekti sa konkurencijom kitova perajara će imati manji uticaj na početku zbog nižeg rasta broja jedinki. Populacija plavih kitova će dostići stabilnu tačku, ali im je za to potrebno dosta vremena. Stacionarna tačka će biti niska u poređenju sa višim stopama prirodnog priraštaja.

5.2 Umerena stopa priraštaja (3-4%)



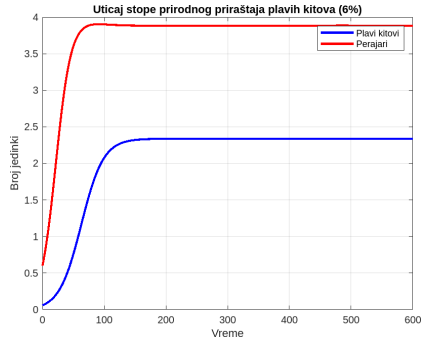
Slika 4: Priraštaj za 3%



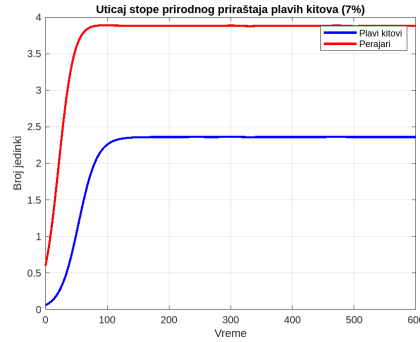
Slika 5: Priraštaj za 4%

Kod stope prirodnog priraštaja od 3% (Slika 4) i 4% (Slika 5), primećujemo da je rast populacije brži u odnosu na 2%. Populacija će dostići stabilnu tačku, koja je nešto viša u odnosu sa nižom stopom prirodnog priraštaja. Time konkurencija sa kitovima perajarima postaje značajnija, ali će i dalje biti kontrolisana. Populacija plavih kitova raste umereno i stabilizuje se na višem nivou. Konkurencija za resurse je intenzivnija, ali ne dovodi do izumiranja.

5.3 Visoka stopa priraštaja (6-7%)



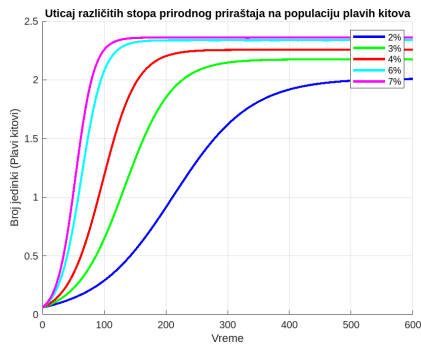
Slika 6: Priraštaj za 6%



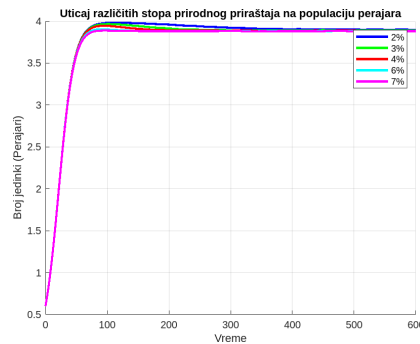
Slika 7: Priraštaj za 7%

Stope prirodnog priraštaja od 6% (Slika 6) i 7% (Slika 7) značajno utiču na dinamiku populacija plavih kitova, a tako i na kitove perajare. Sa ovim stopama prirodnog priraštaja, populacija plavih kitova raste veoma brzo i to dovodi do bržeg dostizanja kapaciteta staništa. Ovo povećava konkurenciju između dve vrste za resurse i to može da izazove oscilacije u populaciji i moguću nestabilnost pre nego što se dostigne stabilna tačka.

5.4 Opšti zaključak



Slika 8: Grafik stopa prirodnih priraštaja za plave kitove



Slika 9: Grafik stopa prirodnih priraštaja za kitove perajare

Zaključujemo da povećanjem parametra prirodnog priraštaja populacija raste brže nego pre, odnosno plavi kitovi će za kraće vreme dostići stabilnu tačku. Ako je stopa prirodnog priraštaja plavih kitova niska, populacija plavih kitova će rasti sporije (Slika 8). Ovo omogućava populaciji kitova perajara da se stabilizuju na većoj tački (Slika 9). Povećanjem stope prirodnog priraštaja plavih kitova vodi ka većoj populaciji i povećanjem stacionarnih tačaka, što povećava konkurenciju za resurse i dovodi do smanjenja stacionarnih tačaka populacije perajara.

6 Lov na kitove

Kako bismo obuhvatili ribolov, možemo proširiti model dodavanjem novih parametara diferencijalnim jednačinama koje opisuju ulov kitova od strane brodova koji ih love. Ovak uslov možemo opisati sa stopom ulova q , koja predstavlja procenat populacije koja se godišnje ulovi brodovima. Evo kako možemo izmeniti početne diferencijalne jednačine, tako da one sad predstavljaju zadati opisani problem:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 0.05x(1 - \frac{x}{250000}) - axy - Eqx \\ \frac{dy}{dt} &= 0.08y(1 - \frac{y}{400000}) - axy - Epy\end{aligned}$$

Parametar E predstavlja koliko brodova učestvuje u lovu na kitove.

Kako bismo odredili maksimalan broj brodova E koji mogu loviti kitove, a da pritom ne dođe do izumiranja bilo koje vrste potrebno je da nađemo ravnotežne tačke ovog sistema.

To radimo tako što početne jednačine izjednačimo sa nulom i rešimo sistem:

$$0.05x(1 - \frac{x}{250000}) - axy - qEx = 0 \quad (1)$$

$$0.08y(1 - \frac{y}{400000}) - axy - qEy = 0 \quad (2)$$

Iz jednačine (1) možemo da izvučemo x , a iz jednačine (2) možemo da izvučemo y , i dobijamo sledeće:

$$x \cdot (0.05(1 - \frac{x}{250000}) - ay - qE) = 0 \quad (3)$$

$$y \cdot (0.08(1 - \frac{y}{400000}) - ax - qE) = 0 \quad (4)$$

Iz jednačine (3) dobijamo da je $x = 0$ ili da je sledeći izraz jednak nuli:

$$0.05(1 - \frac{x}{250000}) - ay - qE = 0$$

Sređujemo ovaj izraz po x i dobijamo:

$$x = 25 \cdot 10^4 - 5 \cdot 10^6(ay + qE)$$

Odnosno, kada zamenimo poznate parametre $a = 10^{-8}$ i $q = 10^{-5}$ dobijamo:

$$x = 25 \cdot 10^4 - 5 \cdot 10^{-2}y - 50E \quad (5)$$

Iz jednačine (4) dobijamo da je $y = 0$ i sledeći izraz da je jednak nuli:

$$0.08(1 - \frac{y}{400000}) - ax - qE = 0$$

Sređujemo izraz po y , i dobijamo sledeći izraz:

$$y = 4 \cdot 10^5 - 5 \cdot 10^6 ax - 5 \cdot 10^6 qE$$

Odnosno kada ubacimo konkretne vrednosti za parametre $a = 10^{-8}$ i $q = 10^{-5}$, dobijamo:

$$y = 4 \cdot 10^5 - 5 \cdot 10^{-2}x - 50E \quad (6)$$

Ravnotežne tačke zavise od broja brodova E . Da bi se održala stabilna populacija obe vrste kitova, x i y moraju biti pozitivni. Prenesemo to sad na jednačine (5) i (6):

$$25 \cdot 10^4 - 5 \cdot 10^{-2}y - 50E > 0$$

$$4 \cdot 10^5 - 5 \cdot 10^{-2}x - 50E > 0$$

Ove nejednačine izrazimo tako da samo sa jedne strane imamo čisto E , posle njihovog sređivanja dobijamo:

$$E < 5000 - 0.001y \quad (7)$$

$$E < 8000 - 0.001x \quad (8)$$

Nejednačine (7) i (8) možemo jedinstveno zapisati kao sledeći izraz:

$$E < \min(5000 - 0.001y, 8000 - 0.001x) \quad (9)$$

Ovako dobijeni izraz nam određuje maksimalan broj brodova E . Ovo ograničenje nam osigurava da populacije ostanu pozitivne i stabilne. Najveći broj kitova koji može biti ulovljen, a da pritom ne dođe do izumiranja bilo koje vrste, zavisi od kombinacije ovih parametara. Kako bismo precizno odredili opseg, potrebno je ubaciti početne uslove, a to su $x(0) = 6000$ i $y(0) = 60000$.

$$E < \min(4940, 7994) \quad (10)$$

Kako je opseg minimum ovde dve vrednosti sledi da je

$$E < 4940 \quad (11)$$

Maksimalan broj brodova E koji može uloviti kitove, a da pritom ne dođe do izumiranja bilo koje vrste je 4940. Ovo osigurava da se populacije stabilizuju na pozitivnim ravnotežnim tačkama. Stoga zaključujemo da broj brodova mora biti manji od 4940 kako bi izbegli izumiranje kitova.

7 Zaključak

U ovom radu smo analizirali matematički model interakcije dve vrste kitova - plavih kitova i kitova perajara, koji se takmiče za hranu, koristeći sistem diferencijalnih jednačina. Cilj je bio razumeti kako različiti faktori kao što su prirodni priraštaj, konkurencija za resurse i ribolov mogu uticati na dinamiku ovih populacija.

Glavni zaključci su sledeći:

1. **Stacionarna rešenja:** Analizom stacionarnih rešenja otkriveno je nekoliko ravnotežnih tačaka. Na primer, tačke $(250000, 0)$ i $(0, 400000)$ nam predstavljaju situacije u kojima jedna vrsta izumire dok druga dostiže stabilnost. Ove tačke su nestabilne, a to znači da su osetljive na male promene u početnim uslovima, a to dalje ukazuje na potencijalnu nestabilnost u ekosistemu.
2. **Konkurencija za resurse:** Konkurencija između dve vrste kitova može dovesti do izumiranja jedne vrste ukoliko je ta konkurencija previše intenzivna. Kada je parametar konkurencije manji, odnosno $a = 10^{-8}$, tada je ta konkurencija manje izražena i populacije imaju tendenciju da dostignu svoje stabilne tačke. Nasuprot tome, kada je a veći, odnosno $a = 10^{-6}$, konkurencija je intenzivnija i to dovodi do izumiranja plavih kitova. Ove različite vrednosti nam pružaju uvid u tome kako interakcija između vrsta utiče na stabilnost njihovih populacija.
3. **Promena prirodnog priraštaja:** Razmatranjem različitih stopa prirodnog priraštaja kod plavih kitova, ustanovljeno je da će veće stope priraštaja omogućavati brži oporavak populacije, ali i dalje zavise od inteziteta konkurencije sa kitovima perajarima. U većini slučajeva, veći prirodni priraštaj doprinosi stabilnosti populacije plavih kitova, ali ne može u potpunosti neutralisati negativne efekte konkurencije.
4. **Utica j ribolova:** Uvođenjem robilova u model, analizirali smo kako različite stope ulova i broj brodova utiču na populaciju kitova. Zaključili smo da postoji određen opseg broja brodova E i stope ulova q za koje populacije obe vrste mogu dostići stabilne tačke bez rizika da će izumreti. Prekoračenje ovog opsega može dovesti ozbiljnih ekoloških posledica, uključujući i izumiranje jedne ili pak obe populacije.

Literatura

- [1] Milan Dražić, *Matematičko modeliranje*, Univerzitet u Beogradu Matematički fakultet, 2017.
- [2] Zorica Dražić, Populacioni model jedne vrste: https://poincare.matf.bg.ac.rs/~zorica.drazic/OMM/04-OMM-populacioni_a.pdf
- [3] Zorica Dražić, Populacioni modeli više vrsta <https://poincare.matf.bg.ac.rs/~zorica.drazic/OMM/04%20-%20OMM%20-%20populacioni.pdf>