Kitovi

Seminarski rad u okviru kursa
Osnovi matematičkog modeliranja
Matematički fakultet

Nataša Blagojević
mi20159@alas.mat.bg.ac.rs

Lazar Lazović
mi20062@alas.matf.bg.ac.rs

14. maj 2024.

Sažetak

U ovom radu ćemo se upoznati sa dinamikom populacije plavih kitova i kitova perajara koristeći matematički model. Analiziramo stacionarne tačke sistema, numerički rešavamo model, istražujemo uticaj promene prirodnog priraštaja plavih kitova i uključujemo ribarenje kako bismo odredili optimalni broj brodova radi održavanja ravnoteže u populaciji kitova.

Sadržaj

1 Uvod **2**

2 Stacionarana rešenja **2**

2.1 Analiza stacionarnih rešenja 4

3 Numeričko rešavanje modela i grafički prikaz **5**

Literatura **5**

1 Uvod

Pupulacija morskih sisara ima ključnu ulogu u održavanju ravnoteže u morskim ekosistemima. Plavi kitovi i kitovi perajari su značajni predstavnici ovih populacija, čija dinamika može biti složena i podložna različitim uticajima okoline. Međutim, aktivnost kao što je ribolov može imati značajan uticaj na ove populacije, što zahteva pažljivo istraživanje i analizu.

U ovom radu istražujemo kako se dinamika populacije plavih kitova i kitova perijara menja kroz matematički model koji uzima u obzir faktore kao što su dostupnost hrane(planktona), međusobno nadmetanje, prirodni priraštaj i uticaj ribolova. Modeliranje ovakvih složenih sistema nam omogućava bolje razumevanje i ponašanje sisara pod različitim uslovima, kao i pružanje smernica za upravljanje i očuvanje ovih vrsta u prirodi.

Naša analiza se oslanja na sistem diferencijalnih jednačina koje opisuju promene u populacijama plavih kitova (*x(t)*) i kitova perajara (*y(t)*) u odnosu na vreme *t*. Model uzima u obzir reprodukciju populacije, međusobno nadmetanje za hranu i prirodni priraštaj definisanih pomoću parametara koji karakterističu ove procese.

Cilj našeg istraživanja je da istražimo kako međusobno nadmetanje, prirodni priraštaj i ribolov utiče na samu dinamiku populacija plavih kitova i kitova perajara, kao i kako se ove promene odražavaju na stabilnost i dugoročno održavanje ovih populacija.

U nastavku ovog rada, predstavljamo detaljnu analizu našeg matematičkog modela, rezultate simulacija za različite scenarije, kao i diskusiju o analizama za očuvanje ovih morskih sisara.

2 Stacionarana rešenja

Za pronalaženje stacionarnih rešenja modela koji opisuje dinamiku plavih kitova i kitova perajara, koristimo metod stavljanja diferencijalnih jednačina u stanje ravnoteže, gde se brzine promena populacije izjednačavaju sa nulom.

Model je definisan na sledeći način:

$$\frac{dx}{dt} = 0.05x(1 - \frac{x}{250000}) - axy \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dt} = 0.08y(1 - \frac{y}{400000}) - axy \tag{2}$$

Gde nam x i y predstavljaju populacije plavih kitova i kitova perajara, dok je a parametar koji nam opisuje uticaj međusobnog nadmetanja i ribarenja.

Kako bismo pronašli stacionarna rešenja, potrebno je da obe jednačine izjednačimo sa nulom, jer nam stacionarna rešenja predstavljaju ona rešenja u kojima se populacija kitova ne menja tokom vremena.

Za zadati parametar $a = 10^{-8}$ i za zadate početne uslove da je na početku 6000 jedinki plavog kita i 60000 jedinki kita perajara. Rešavamo početni sistem na malopređašnji opisani način.

Precizna definicija početnih uslova (*):

$$a = 10^{-8}$$
$$x(0) = 6000$$

$$y(0) = 60000$$

Izjednačavanje obe jednačine sa 0:

$$\frac{dx}{dt} = 0 \tag{3}$$

$$\frac{dy}{dt} = 0 \tag{4}$$

Dobijamo sledeće sisteme:

$$0.05x(1 - \frac{x}{250000}) - axy = 0 \tag{5}$$

$$0.08y(1 - \frac{y}{400000}) - axy = 0 \tag{6}$$

Potom dobijamo:

$$x(0.05(1 - \frac{x}{250000}) - ay) = 0$$

$$y(0.08(1 - \frac{y}{400000}) - ax) = 0$$

Odnosno:

$$x = 0 \vee 0.05 \cdot (1 - \frac{x}{250000}) - ay = 0 \tag{7}$$

$$y = 0 \vee 0.08 \cdot (1 - \frac{y}{400000}) - ax = 0 \tag{8}$$

Jedno stacionarno rešenje nam predstavlja par $(x, y) = (0, 0)$, a nas zanima drugo stacionarno rešenje koje se dobija rešavanjem sistema:

$$0.05 \cdot (1 - \frac{x}{250000}) - ay = 0$$

i

$$0.08 \cdot (1 - \frac{y}{400000}) - ax = 0$$

Zamenjujemo parametar a sa vrednošću: $a = 10^{-8}$ i dobijamo sledeće jednačine:

$$0.05 \cdot (1 - \frac{x}{250000}) - 10^{-8}y = 0 \tag{9}$$

$$0.08 \cdot (1 - \frac{y}{400000}) - 10^{-8}x = 0 \tag{10}$$

Iz jednačine (7) izrazimo y:

$$y = 10^8 \cdot 0.05 \cdot (1 - \frac{x}{250000})$$

Kada malo bolje raspišemo i sredimo izraz za y dobijamo sledeću jednačinu:

$$y = 5 \cdot 10^6 - 20x \tag{11}$$

Potom izraženo y iz jednačine (11) uvrstimo u jednačinu (10) i dobijamo sledeće:

$$0.08 \cdot (1 - \frac{5 \cdot 10^6 - 20x}{400000}) - 10^{-8}x = 0$$

Nakon detaljnijeg matematičkog računa dobijamo sledeću jednakost:

$$399x = 92 \cdot 10^6 \tag{12}$$

Odatle dobijamo da je $x \approx 230576$. Kada ovo rešenje uvrstimo u jednačinu (11) dobijamo približnu vrednost za y, a to je $y \approx 388480$.

2.1 Analiza stacionarnih rešenja

Kao jedno stacionarno rešenje dobili smo par $(x, y) = (0, 0)$. Ovo rešenje znači da nijedna populacija nema prisustva u ekosistemu. To može ukazivati na izumiranje obe vrste kitova ili na nepovoljne uslove sredine koje ne podržavaju njihov opstanak. Ovo stacionarno rešenje je trivijalno i stoga ne predstavlja realističan scenarijo za ekološki sistem.

Drugo stacionarno rešenje koje smo dobili je $x \approx 230576$ i $y \approx 388480$. Ovo rešenje predstavlja situaciju u kojoj su populacije plavih kitova i kitova perajara prisutne u ekosistemu, odnosno da postoji neka određena ravnoteža između kitova.

Sada proveravamo koja su to rešenja stabilna. To cemo uraditi uz pomoć MATLAB-a u kojem ćemo napisati kod koji nam računa matricu, na osnovu koje ćemo utvrditi da li je naše malopređašnje rešenje stabilno ili nestabilno.

```
function analyze_stability(stationary_point, a)
% Izdvajanje koordinata stacionarnog resenja
x_star = stationary_point(1);
y_star = stationary_point(2);

% Izracunavanje Zordanove matrice u stacionarnoj tacki
J = [0.05*(1 - 2*x_star/250000) - a*y_star, -a*x_star;
-a*y_star, 0.08*(1 - 2*y_star/400000) - a*x_star];

% Procena sopstvenih vrednosti Zordanove matrice
eigenvalues = eig(J);

% Prikaz rezultata
disp('Zordanova matrica:');
disp(J);
disp('Sopstvene vrednosti:');
disp(eigenvalues);
```

```
% Provera stabilnosti
if all(real(eigenvalues) < 0)
disp('Stacionarno resenje je stabilno.');
else
disp('Stacionarno resenje je nestabilno.');
end
end
```

Funkcija **analyse_stability** prvo izračunava Žordanovu matricu u datoj stacionarnoj tački i potom procenjuje sopstvene vrednosti i utvrđuje stabilnost rešenja. Pozivamo je na sledeći način:

$$analyse\_stability([230576, 388480], 1e - 8);$$

Nakon izvršenja analize stabilnosti, dobijamo sledeću Žordanovu matricu i sopstvene vrednosti u tački stacionarnog rešenja ((230576, 388480)), za dati parametar $(a = 10^{-8})$:

$$\begin{bmatrix} -0.0461 & -0.0023 \\ -0.0038 & -0.0777 \end{bmatrix}$$

i sledeće sopstevene vrednosti:

$$\lambda_1 \approx -0.0458$$

$$\lambda_2 \approx -0.780$$

Oba sopstvena vektora su realna i negativna, što ukazuje na to da su obe sopstvene vrednosti negativne. Odatle zaključujemo da je stacionarno rešenje $(230576, 388480)$ stabilno.

To znači da u dugoročnom stabilnom stanju da se populacije plavih kitova i kitova perajara održavaju na nivou koji odgovara tački stacionarnog rešenja. Sistem će se vratiti na ovo stabilno stanje nakon bilo kakvih manjih poremećaja, što ukazuje na ravnotežu između reprodukcije, smrtnosti i drugih faktora koji utiču na populaciju kitova.

3 Numeričko rešavanje modela i grafički prikaz

Kako bismo numerički rešili model za parametre $a = 10^{-8}$ i $a = 10^{-6}$, potrebno ih je uvrstiti u diferencijalne jednačine i potom primenom numeričkih metoda rešiti sistem diferencijalnih jednačina. Zatim ćemo grafički prikazati broj jedinki obe vrste kitova u zavisnosi od vremena i nakon toga ćemo diskutovati o ponalanju sistema kada $t \to \infty$

References

[1]