2.4 Prirodna dedukcija u iskaznoj logici

U iskaznom računu Ł glavnu ulogu u generisanju izvodjenja imaju:

- pravilo *modus ponens* $\dfrac{\alpha \quad \alpha \Rightarrow \beta}{\beta}$, koje odredjuje kako u izvodjenjima da koristimo *implikacije*, tj. formule čiji je glavni znak $\Rightarrow$ i
- stav dedukcije – $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ akko $\Gamma \vdash \alpha \Rightarrow \beta$; Stav dedukcije utvrdjuje kako da dokazujemo *implikacije*: da bismo dokazali $\Gamma \vdash \alpha \Rightarrow \beta$, dovoljno je dokazati $\Gamma, \alpha \vdash \beta$.

Ova zapažanja veoma su bliska idejama na kojima je zasnovan jedan od najpoznatijih formalnih teorija koje karakterišu iskaznu logiku – **prirodna dedukcija**[42]. Skup aksioma ovog formalnog sistema je prazan dok su pravila izvodjenja data sledećim shemama (u smislu da α, β i γ mogu biti proizvoljne formule):

[42] Račun prirodne dedukcije uveo je, 1935. godine, Gerhard Gencen s namerom da prirodnije opiše uobičajeno zaključivanje matematičara

$$\frac{\alpha \quad \beta}{\alpha \wedge \beta}\ (\wedge_{\mathrm{U}})$$

Uvodjenje konjunkcije ($\wedge_{\mathrm{U}}$): iz pretpostavki α, β (direktno) zaključujemo $\alpha \wedge \beta$. Možemo razmišljati i ovako: da bismo dokazali $\alpha \wedge \beta$ potrebno je da dokažemo svaki konjunkt pojedinačno, i α i β. Drugim rečima dokaz za $\alpha \wedge \beta$ dobijamo spajanjem dokaza za α i dokaza za β.

$$\frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha}\ (\wedge_{\mathrm{E}}^{\mathrm{L}}) \qquad \frac{\alpha \wedge \beta}{\beta}\ (\wedge_{\mathrm{E}}^{\mathrm{D}})$$

Eliminacija konjunkcije: iz pretpostavke $\alpha \wedge \beta$ zaključujemo α (odn. β) primenom pravila ($\wedge_{\mathrm{E}}^{\mathrm{L}}$) (odn. ($\wedge_{\mathrm{E}}^{\mathrm{D}}$)).

Primer 20. Dokažimo sekvent $(p \wedge q) \wedge s, r \wedge t \vdash t \wedge q$.

1.	$(p \wedge q) \wedge s$	pretpostavka	
2.	$r \wedge t$	pretpostavka	
3.	$p \wedge q$	$\wedge_{\mathrm{E}}^{\mathrm{L}}$, 1	[formula $p \wedge q$ je dobijena primenom pravila $\wedge_{\mathrm{E}}^{\mathrm{L}}$ na 1.]
4.	q	$\wedge_{\mathrm{E}}^{\mathrm{D}}$, 3	
5.	t	$\wedge_{\mathrm{E}}^{\mathrm{D}}$, 2	
6.	$t \wedge q$	$\wedge_{\mathrm{U}}$, 5, 4	

Navedeni dokaz možemo prikazati i na sledeći način.

$$\dfrac{\dfrac{r \wedge t}{t}\,\wedge_{\mathrm{E}}^{\mathrm{D}} \qquad \dfrac{\dfrac{(p \wedge q) \wedge s}{p \wedge q}\,\wedge_{\mathrm{E}}^{\mathrm{L}}}{q}\,\wedge_{\mathrm{E}}^{\mathrm{D}}}{t \wedge q}\,\wedge_{\mathrm{U}}$$

Uvodna razmatranja najavljuju pravila uvodjenja i eliminacije implikacije.

$$\frac{\alpha \Rightarrow \beta \quad \alpha}{\beta}\ (\Rightarrow_{\mathrm{E}})$$

Eliminacija implikacije (odn. modus ponens) ($\Rightarrow_{\mathrm{E}}$) opisuje kako se u dokazima koriste tvrdnje formulisane u obliku imlikacije.

$$\frac{\left|\begin{array}{l} \alpha \\ \vdots \\ \beta \end{array}\right.}{\alpha \Rightarrow \beta}\ (\Rightarrow_{\mathrm{U}})$$

Uvodjenje implikacije ($\Rightarrow_{\mathrm{U}}$): da bismo dokazali implikaciju $\alpha \Rightarrow \beta$ treba uvesti *dodatnu (privremenu) pretpostavku* α i dokazati β, pri čemu je u tom dokazu dozvoljeno koristiti α, sve ostale pretpostavke i medjuzaključke koje smo već izveli. Dokaz formule β nakon uvodjenja dodatne pretpostavke α ističemo vertikalnom crtom i nazivamo *poddokazom*. Neposredno ispod završetka vertikalne linije navodimo zaključak $\alpha \Rightarrow \beta$, oznaku pravila ($\Rightarrow_{\mathrm{U}}$) i brojeve kojima su numerisani koraci poddokaza.

Primer 21. Dokažimo $p \Rightarrow q, p \Rightarrow r \vdash p \Rightarrow q \wedge r$

1.	$p \Rightarrow q$	pretpostavka
2.	$p \Rightarrow r$	pretpostavka
3.	$\quad p$	dodatna pretpostavka
4.	$\quad q$	$\Rightarrow_E$, 1, 3
5.	$\quad r$	$\Rightarrow_E$, 2, 3
6.	$\quad q \wedge r$	$\wedge_U$, 4, 5
7.	$p \Rightarrow q \wedge r$	$\Rightarrow_U$, 3-6

$\vdots$			Kada želimo da dokažemo $\alpha \Rightarrow \beta$:
$j.$	α		uvodimo dodatnu pretpostavku α
$\vdots$	$\vdots$		i nastojimo da dokažemo β.
$k.$	β		Kada uspemo,
$k+1.$	$\alpha \Rightarrow \beta$	$\Rightarrow_U$, j-k	izvodimo željeni zaključak.

$$\frac{\alpha \quad \neg\alpha}{\bot}(\neg_E)$$

Eliminacija negacije $(\neg_E)$: iz pretpostavki α, $\neg\alpha$ izvodimo kontradikciju.

$$\frac{\begin{array}{|l} \alpha \\ \vdots \\ \bot \end{array}}{\neg\alpha}(\neg_U)$$

Uvodjenje negacije $(\neg_U)$: ako iz α dokažemo kontradikciju, onda zaključujemo $\neg\alpha$.

$$\frac{\begin{array}{|l} \neg\alpha \\ \vdots \\ \bot \end{array}}{\alpha}(\bot_c)$$

Pravilo $(\bot_c)$: da bismo dokazali α, u klasičnoj logici, dovoljno je izvesti kontradikciju iz $\neg\alpha$.

$$\frac{\alpha}{\alpha \vee \beta}(\vee_U^L) \qquad \frac{\beta}{\alpha \vee \beta}(\vee_U^D)$$

Uvodjenje disjunkcije: iz α (ako smo dokazali α) izvodimo zaključak $\alpha \vee \beta$), za bilo koju formulu β, primenom pravila $(\vee_U^L)$; na isti način, iz β izvodimo zaključak $\alpha \vee \beta$, za bilo koju formulu α, primenom pravila $(\vee_U^D)$.

$$\frac{\alpha \vee \beta \quad \begin{array}{|l} \alpha \\ \vdots \\ \gamma \end{array} \quad \begin{array}{|l} \beta \\ \vdots \\ \gamma \end{array}}{\gamma}(\vee_E)$$

Eliminacija disjunkcije $(\vee_E)$ opisuje na koji način u dokazima koristimo formule oblika $\alpha \vee \beta$? Zamislimo da želimo da dokažemo γ pretpostavljajući $\alpha \vee \beta$. Budući da ne znamo koja je od formula α, β tačna (a jedna mora biti), moramo sprovesti dva odvojena dokaza:

- Najpre, pretpostavljamo da je α tačno i dokazujemo γ.
- Zatim, pretpostavljamo da je β tačno i dokazujemo γ.

Na osnovu ova dva dokaza i pretpostavke $\alpha \vee \beta$ zaključujemo γ, jer dva poddokaza pokrivaju obe mogućnosti.

Ekvivalencija dva iskaza $\alpha \Leftrightarrow \beta$ jeste zapravo konjunkcija dve obratne implikacije $(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha)$, pa se pravila **uvodjenja** i **eliminacije ekvivalencije** sama nameću.

$$\frac{\alpha \Rightarrow \beta \quad \beta \Rightarrow \alpha}{\alpha \Leftrightarrow \beta}(\Leftrightarrow_U) \qquad \frac{\alpha \Leftrightarrow \beta}{\alpha \Rightarrow \beta}(\Leftrightarrow_E^{LD}) \qquad \frac{\alpha \Leftrightarrow \beta}{\beta \Rightarrow \alpha}(\Leftrightarrow_E^{DL})$$

Navedena pravila karakterišu dokazivost tzv. *sekvenata*

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_k \vdash \psi$$

(tj. dokazivost da iz pretpostavki $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ sledi ψ). Sekvente dokazujemo tako što formiramo niz koji čine pretpostavke $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ i (medju)zaključci dobijeni primenom pravila dedukcije na već navedene formule. Postupak završavamo kada dobijemo željeni zaključak ψ, a formirani niz nazivamo dokazom formule ψ iz pretpostavki $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$, odn. *dokazom* odgovarajućeg sekventa.

PRIMER 22. Dokazati $\vdash (p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow q \vee r)$.

1.	$(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$	dodatna pretpostavka
2.	$p \Rightarrow q$	dodatna pretpostavka
3.	p	dodatna pretpostavka
4.	q	$\Rightarrow_E$, 2, 3
5.	$q \vee r$	$\vee_U^L$, 4
6.	$p \Rightarrow (q \vee r)$	$\Rightarrow_U$, 3-5
7.	$p \Rightarrow r$	dodatna pretpostavka
8.	p	dodatna pretpostavka
9.	r	$\Rightarrow_E$, 7, 8
10.	$q \vee r$	$\vee_U^D$, 9
11.	$p \Rightarrow (q \vee r)$	$\Rightarrow_U$, 7-10
12.	$p \Rightarrow (q \vee r)$	$\vee_E$, 1, 2-6, 7-11
13.	$(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow q \vee r)$	$\Rightarrow_U$, 1-12

Teorema 11. $\Gamma \vdash_Ł \varphi$ *akko* $\Gamma \vdash \varphi$ *(je dokaziv sekvent primenom pravila prirodne dedukcije).*

Specijalno, formula φ je teorema u računu prirodne dedkucije, ako je dokaziv sekvent $\vdash \varphi$ (sa praznim skupom pretpostavki). Iz prethodne teoreme i teoreme potpunosti zaključujemo da se pravilima prirodne dedukcije mogu dokazati sve tautologije, i samo tautologije.

Da bismo pojednostavili dokazivanje sekvanata, spisak pravila proširujemo još nekim **izvedenim pravilima**, čija se upotreba, naravno, jednostavno može eliminisati iz svakog dokaza.

$$\boxed{\frac{\alpha \Rightarrow \beta \quad \neg\beta}{\neg\alpha}\ (\mathrm{MT})}$$

Pravilo modus tolens (MT) može biti veoma korisno pri upotrebi tvrdnji u obliku implikacije.

1.	$\alpha \Rightarrow \beta$	pretpostavka
2.	$\neg\beta$	pretpostavka
3.	α	dodatna pret.
4.	β	$\Rightarrow_E$, 1, 3
5.	$\perp$	$\neg_E$, 2, 4
6.	$\neg\alpha$	$\neg_U$, 3-5

$\dfrac{\neg\neg\alpha}{\alpha}\ (\neg\neg_E)$
$\dfrac{\alpha}{\neg\neg\alpha}\ (\neg\neg_U)$

Pravilo $(\neg\neg_E)$ nam dozvoljava da obrišemo dva znaka negacije. Nasuprot tome, pravilo $(\neg\neg_U)$ dozvoljava da se ispred svake formule dopišu dva znaka negacije.

Opravdavamo samo pravilo $\neg\neg_U$.

1.	α	pretpostavka
2.	$\mid\ \neg\alpha$	dodatna pret.
3.	$\mid\ \bot$	$\neg_E$, 1, 2
4.	$\neg\neg\alpha$	$\neg_U$, 2-3

PRIMER 23. Primenu izvedenih pravila jednostavno možemo eliminisati iz svakog dokaza. To ilustrujemo dokazom sekventa $p \Rightarrow \neg q, q \vdash \neg p$.

1.	$p \Rightarrow \neg q$	pretpostavka
2.	q	pretpostavka
3.	$\neg\neg q$	$\neg\neg_U$, 2
4.	$\neg p$	MT, 1, 3

Bez pravila $\neg\neg_U$ i MT dati sekvent bismo dokazali na sledeći način.

1.	$p \Rightarrow \neg q$	pretpostavka
2.	q	pretpostavka
3.	$\mid\ \neg q$	dodatna pretpostavka
4.	$\mid\ \bot$	$\neg_E$, 2, 3
5.	$\neg\neg q$	$\neg_U$, 3-4
6.	$\mid\ p$	dodatna pretpostavka
7.	$\mid\ \neg q$	$\Rightarrow_E$, 1, 6
8.	$\mid\ \bot$	$\neg_E$, 2, 7
9.	$\neg p$	$\neg_U$, 6-8

Disjunktivni silogizmi	
$\dfrac{\alpha \vee \beta \quad \neg\alpha}{\beta}\ (\mathrm{DS})$	$\dfrac{\alpha \vee \beta \quad \neg\beta}{\alpha}\ (\mathrm{DS})$

Oba pravila označavamo na isti način jer će uvek biti očigledno koje od ova dva pravila koristimo.

1.	$\alpha \vee \beta$	pretpostavka
2.	$\neg\alpha$	pretpostavka
3.	$\mid\ \alpha$	dodatna pretpostavka
4.	$\mid\ \bot$	$\neg_E$, 2, 3
5.	$\mid\ \beta$	$\bot_E$, 4
6.	$\mid\ \beta$	dodatna pretpostavka
7.	β	$\vee_E$, 1, 3-5, 6

Analogno se dokazuje i sekvent $\alpha \vee \beta, \neg\beta \vdash \alpha$, za bilo koje formule α, β.

Tranzitivnost implikacije	Zakoni kontrapozicije	
$\dfrac{\alpha \Rightarrow \beta \quad \beta \Rightarrow \gamma}{\alpha \Rightarrow \gamma}\ (\mathrm{T})$	$\dfrac{\alpha \Rightarrow \beta}{\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha}\ (\mathrm{K})$	$\dfrac{\neg\alpha \Rightarrow \neg\beta}{\beta \Rightarrow \alpha}\ (\mathrm{K})$

1.	$\alpha \Rightarrow \beta$	pretpostavka		1.	$\alpha \Rightarrow \beta$	pretpostavka
2.	$\beta \Rightarrow \gamma$	pretpostavka		2.	$\neg\beta$	dodatna pret.
3.	α	dodatna pret.		3.	$\neg\alpha$	MT, 1, 2
4.	β	$\Rightarrow_E$, 1, 3		4.	$\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha$	$\Rightarrow_U$, 2-3
5.	γ	$\Rightarrow_E$, 2, 4				
6.	$\alpha \Rightarrow \gamma$	$\Rightarrow_U$, 3-5				

Zakon isključenja trećeg (tertium non datur)
$\dfrac{}{\alpha \vee \neg\alpha}$ (TND)

Prema zakonu isključenja trećeg, u dokazima možemo koristiti kao pretpostavku $\alpha \vee \neg\alpha$, za bilo koju formulu α.

1.	$\neg(\alpha \vee \neg\alpha)$	dodatna pretpostavka
2.	α	dodatna pretpostavka
3.	$\alpha \vee \neg\alpha$	$\vee_U^L$, 2
4.	$\perp$	$\neg_E$, 1, 3
5.	$\neg\alpha$	$\neg_U$, 2-4
6.	$\alpha \vee \neg\alpha$	$\vee_U^D$, 5
7.	$\perp$	$\neg_E$, 1, 6
8.	$\neg\neg(\alpha \vee \neg\alpha)$	$\neg_U$, 1-7
9.	$\alpha \vee \neg\alpha$	$\neg\neg_E$, 8

De Morganovi zakoni			
$\dfrac{\neg\alpha \vee \neg\beta}{\neg(\alpha \wedge \beta)}$ (DM)	$\dfrac{\neg\alpha \wedge \neg\beta}{\neg(\alpha \vee \beta)}$ (DM)	$\dfrac{\neg(\alpha \vee \beta)}{\neg\alpha \wedge \neg\beta}$ (DM)	$\dfrac{\neg(\alpha \wedge \beta)}{\neg\alpha \vee \neg\beta}$ (DM)

Svako od ova četiri pravila nazvaćemo De Morganovim zakonom, jer prilikom primene neće biti zabune.

1.	$\neg\alpha \vee \neg\beta$	pretpostavka		1.	$\neg\alpha \wedge \neg\beta$	pretpostavka
2.	$\alpha \wedge \beta$	dodatna pret.		2.	$\neg\alpha$	$\wedge_E^L$, 1
3.	α	$\wedge_E^L$, 2		3.	$\neg\beta$	$\wedge_E^D$, 1
4.	$\neg\neg\alpha$	$\neg\neg_U$,		4.	$\alpha \vee \beta$	dodatna pret.
5.	$\neg\beta$	DS, 1, 4		5.	β	DS, 2, 4
6.	β	$\wedge_E^D$, 2		6.	$\perp$	$\neg_E$, 3, 5
7.	$\perp$	$\neg_E$, 5, 6		7.	$\neg(\alpha \vee \beta)$	$\neg_U$, 2-6
8.	$\neg(\alpha \wedge \beta)$	$\neg_U$, 2-7				

1.	$\neg(\alpha \vee \beta)$	pretpostavka
2.	α	dodatna pret.
3.	$\alpha \vee \beta$	$\vee_U^L$, 2
4.	$\perp$	$\neg_E$, 1, 3
5.	$\neg\alpha$	$\neg_U$, 2-4
6.	β	dodatna pret.
7.	$\alpha \vee \beta$	$\vee_U^D$, 6
8.	$\perp$	$\neg_E$, 1, 7
9.	$\neg\beta$	$\neg_U$, 6-8
10.	$\neg\alpha \wedge \neg\beta$	$\wedge_U$, 5, 9

1.	$\neg(\alpha \wedge \beta)$	pretpostavka
2.	α	dodatna pret.
3.	β	dodatna pret.
4.	$\alpha \wedge \beta$	$\wedge_U$, 2, 3
5.	$\perp$	$\neg_E$, 1, 4
6.	$\neg\beta$	$\neg_U$, 3-5
7.	$\neg\alpha \vee \neg\beta$	$\vee_U^D$, 6
8.	$\neg\alpha$	dodatna pret.
9.	$\neg\alpha \vee \neg\beta$	$\vee_U^L$, 8
10.	$\alpha \vee \neg\alpha$	TND
11.	$\neg\alpha \vee \neg\beta$	$\vee_E$, 10, 2-7, 8-9