Matematički fakultet
Univerzitet u Beogradu

Metodika nastave matematike i računarstva

Matematička indukcija

Studenti:
Dragana Šaponjić
Jelena Tasić
Bojana Popović
Marina Sljivić
Dušan Milosavljević
Aleksandar Stojanović

Profesor:
Nebojša Ikodinović

1. Dokazati jednakost:

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}, \quad n \in N$$

BI. Proveravamo da li tvrdjenje važi za $n = 1$.
Kako je $1 = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$, zadovoljena je baza indukcije.
IH. Pretpostavimo da tvrdjenje važi za n.
IK. Dokažimo da važi i za $n + 1$.

$$1 + 2 + 3 + ... + n + (n+1) \overset{\text{IH.}}{=} \frac{n \cdot (n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}$$

Po principu matematičke indukcije, zaključujemo da tvrdjenje važi za svaki prirodan broj n.

2. Dokazati jednakost:

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2, \quad n \in N$$

BI. Proveravamo da li tvrdjenje važi za $n = 1$.
Kako je $2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1^2$, zadovoljena je baza indukcije.
IH. Pretpostavimo da tvrdjenje važi za n.
IK. Dokažimo da važi i za $n + 1$.

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) + (2 \cdot (n+1) - 1) \overset{\text{IH.}}{=} n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

Po principu matematičke indukcije, zaključujemo da tvrdjenje važi za svaki prirodan broj n.

3. Dokazati:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad n \in N$$

BI. Proveravamo da li tvrdjenje važi za $n = 1$.
Kako je $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, zadovoljena je baza indukcije.
IH. Pretpostavimo da tvrdjenje važi za n.
IK. Dokažimo da važi i za $n + 1$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{IH.}}{=} \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Po principu matematičke indukcije, zaključujemo da tvrdjenje važi za svaki prirodan broj n.

4. Dokazati Bernulijevu nejednakost:

$$(1+x)^n \geq 1+nx \qquad x>-1, n \in N$$

BI. Proveravamo da li tvrdjenje važi za $n=1$.
Kako je $(1+x)^1 = 1+1\cdot x$, zadovoljena je baza indukcije.
IH. Pretpostavimo da tvrdjenje važi za n.
IK. Dokažimo da važi i za $n+1$.

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x) \overset{\text{IH.}}{\geq} (1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq (1+x)^{n+1}$$

Po principu matematičke indukcije, zaključujemo da tvrdjenje važi za svaki prirodan broj n.

5. Dokazati jednakost:

$$-1+3-5+...+(-1)^n(2n-1) = (-1)^n \cdot n$$

gde je $n \in N$.
Baza indukcije: Za n=1 jednakost je očigledna.
IH. Neka važi indukcijska hipoteza, odnosno neka jednakost važi za n=k, tj. važi

$$-1+3-5+...+(-1)^k(2k-1) = (-1)^k \cdot k$$

IK. Dokažimo za n=k+1:

$$-1+3-5+...+(-1)^k(2k-1)+(-1)^{k+1}(2(k+1)-1) =$$

$$(\text{IH}) = (-1)^k \cdot k + (-1)^{k+1}(2k+1) =$$

$$= (-1)^{k+1}(-k+2k+1) = (-1)^{k+1}(k+1)$$

čime je indukcijski korak dokazan, a samim tim, prema principu matematičke indukcije, jednakost važi sa svaki prirodan broj n.

6. Niz $\{\text{Fn}\}_{n \in N}$ zadat je sa
$F_1 = 1, F_2 = 1,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ n > 2$
Dokazati da važi nejednakost:

$$F_n \leq \varphi^{n-1}$$

za svako $n \in N$, gde je $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Koristićemo *princip jake indukcije* ovde.

BI. Ispitajmo bazni slučaj n=1 i n=2:
$F_1 = 1 = \varphi^0$
$F_2 = 1 < 1.6 < \varphi = \varphi^1$
IH. Pretpostavimo da nejednakost važi za sve n=1,2, ... ,k-1,k.(Dovoljno će nam biti da pretpostavimo da važi za k-1 i k)
Dokažimo da važi za n=k+1: $F_k + 1 = F_k + F_{k-1} \leq \varphi^{k-1} + \varphi^{k-2} = \varphi^{k-2}(\varphi + 1)$
Dovoljno je još dokazati da je $\varphi + 1 \leq \varphi^2$.
$\varphi + 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$
$\varphi^2 = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$
Dakle dokazali smo više:
$\varphi + 1 = \varphi^2$
čime je, po principu jake indukcije, nejednakost dokazana za svako $n \in N$.

7. Dokazati binomnu formulu.

Podsetimo se, binomna formula glasi $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ i da vazži za svaki prirodan broj n.Dokažimo to matematičkom indukcijom.
BI. Proveravamo da li tvrdjenje važi za $n = 0$.
Kako je $(a+b)^0 = 1 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^{0-k} b^k$, zadovoljena je baza indukcije.
IH. Pretpostavimo da važi $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$
IK. Dokažimo da tvrdjenje važi za $n+1$, tj. $(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k$

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n$$

$$= (a+b)(a+b)^n = (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} b^k$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} b^k + b^{n+1}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} (\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}) a^{n+1-k} b^k + b^{n+1}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k$$

Što smo i želeli da pokažemo.
Po principu matematičke indukcije, zaključujemo da binomna formula važi za svaki prirodan broj n.

8. Dokaži za je $\forall n \in N$:

$$1 + 4 + 9 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

BI. Proveravamo da li formula važi za $n = 1$
Kako je $1 = \frac{1*2*3}{6}$, važi.
IH. Pretpostavimo da važi $1 + 4 + 9 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
IK. Proveravamo da li formula važi za $n + 1$,
tj. da li je $1 + 4 + 9 + ... + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

$$1 + 4 + 9 + ... + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

Što smo i želeli da pokažemo.
Pa, je prema principu matematičke indukcije, formula tačno za svaki prirodan broj n.

9.Dokazati da za svaki prirodan broj važi sledeće:

$$6|n(n+1)(2n+1)$$

BI. Za n=1: $n(n+1)(2n+1) = 6$, pa jednakost očigledno važi.
IH. Pretpostavimo da važi: $6|n(n+1)(2n+1)$
IK. Dokažimo da tvrdjenje važi za n+1:
$(n+1)(n+2)(2(n+1)+1) = (n+1)(n+2)(2n+3) = n(n+1)(2n+3) + 2(n+1)(2n+3) = n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + 2(n+1)(2n+3) = n(n+1)(2n+1) + 2(n+1)(3n+3) = n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)(n+1)$
Odavde vidimo da 6 deli prvi sabirak po induktivnoj hipotezi, a očigledno deli i drugi, pa važi:
$6|(n+1)(n+2)(2n+3)$
Po principu matematičke indukcije zaključujemo da tvrdjenje važi za svaki prirodan broj.

10.Dokazati da za svaki prirodan broj $n \geq 0$ važi sledeće:

$$3|5^n + 2^{n+1}$$

BI. Za n=1: $5^n + 2^{n+1} = 5 + 4 = 9$, pa jednakost očigledno važi.
IH. Pretpostavimo da važi: $3|5^n + 2^{n+1}$
IK. Dokažimo da tvrdjenje važi za n+1:
$5^{n+1} + 2^{n+2} = 5^{n+1} - 5^n 2 + 5^n 2 + 2^{n+2} = 5^n(5-2) + 2(5^n + 2^{n+1}) = 35^n + 2(5^n + 2^{n+1})$
Odavde vidimo da 3 očigledno deli prvi sabirak, a 3 deli i drugi sabirak po induktivnoj hipotezi, pa važi:
$3|5^{n+1}2^{n+2}$
Po principu matematičke indukcije zaključujemo da tvrdjenje važi za svaki prirodan broj.

11. Dokazati da za svaki prirodan broj $n \geq 5$, važi nejednakost:

$$2^n > n^2.$$

BI. Proveravamo da li tvrdjenje važi za $n = 5$.
Kako je $2^5 = 32 > 5^2 = 25$, zadovoljena je baza indukcije.
IH. Pretpostavimo da tvrdjenje važi za n.
IK. Dokažimo da važi i za $n + 1$.

$$2^{n+1} = 2^n \cdot 2 \overset{\text{IH.}}{>} n^2 \cdot 2 = n^2 + n^2 > n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

Po principu matematičke indukcije, zaključujemo da tvrdjenje važi za svaki prirodan broj $n \geq 5$.
Koristili smo nejednakost $n^2 > 2n+1$ za $n > 2$, koju ćemo, takodje, dokazati koristeći matematičku indukciju.
BI. Proveravamo da li nejednakost važi za $n = 3$.
Kako je $3^2 = 9 > 2 \cdot 3 + 1 = 7$, zadovoljena je baza indukcije.
IH. Pretpostavimo da tvrdjenje važi za n.
IK. Dokažimo da važi i za $n + 1$.

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \overset{\text{IH.}}{>} 2n + 1 + 2n + 1 = 2 \cdot (n+1) + 2n > 2 \cdot (n+1) + 1$$

Po principu matematičke indukcije, zaključujemo da nejednakost važi za svaki prirodan broj $n > 2$.
12. Dokazati Moavrovu formulu.
Neka je dat kompleksan broj u trigonometrijskom obliku $z = r(cos\theta + isin\theta)$.
Tada se $n - ti$ stepen broja z računa po formuli:

$$z^n = r^n(cosn\theta + isinn\theta) \tag{1}$$

BI. Formula je tačna za slučaj $n = 1$, jer

$$z = r(cos\theta + isin\theta)$$

IH. Pretpostavimo da važi za neko n:

$$z^n = r^n(cosn\theta + isinn\theta)$$

IK. Dokažiimo sada tvrdjenje za $n + 1$

$$z^{n+1} = (r^n(cosn\theta + isinn\theta))(r(cos\theta + isin\theta)) =$$
$$= r^{n+1}((cosn\theta cos\theta - sinn\theta sin\theta) + i(cosn\theta sin\theta + sinn\theta cos\theta)) =$$
$$= r^{n+1}(cos(n+1)\theta + isin(n+1)\theta) = z^{n+1}$$

U poslednjoj jednačini iskoristili smo odgovarajuće adicione formule.
Dakle, Moavrova formula je tačna za svaki prirodan broj n.