

Cálculo de Programas Trabalho Prático MiEI+LCC — Ano Lectivo de 2016/17

Departamento de Informática
Universidade do Minho

Junho de 2017

Grupo nr.	37
a67637	Célia Figueiredo
a67662	Adriana Pereira
a60993	Luís Pedro Fonseca

Conteúdo

1	Preâmbulo	2
2	Documentação	2
3	Como realizar o trabalho	3
A	Mónade para probabilidades e estatística	10
B	Definições auxiliares	11
C	Soluções propostas	11

1 Preâmbulo

A disciplina de Cálculo de Programas tem como objectivo principal ensinar a programação de computadores como uma disciplina científica. Para isso parte-se de um repertório de *combinadores* que formam uma álgebra da programação (conjunto de leis universais e seus corolários) e usam-se esses combinadores para construir programas *composicionalmente*, isto é, agregando programas já existentes.

Na sequência pedagógica dos planos de estudo dos dois cursos que têm esta disciplina, restringe-se a aplicação deste método ao desenvolvimento de programas funcionais na linguagem **Haskell**.

O presente trabalho tem por objectivo concretizar na prática os objectivos da disciplina, colocando os alunos perante problemas de programação que deverão ser abordados composicionalmente e implementados em **Haskell**. Há ainda um outro objectivo: o de ensinar a documentar programas e a produzir textos técnico-científicos de qualidade.

2 Documentação

Para cumprir de forma integrada os objectivos enunciados acima vamos recorrer a uma técnica de programação dita “*literária*” [3], cujo princípio base é o seguinte:

Um programa e a sua documentação devem coincidir.

Por outras palavras, o código fonte e a sua documentação deverão constar do mesmo documento (ficheiro).

O ficheiro `cp1617t.pdf` que está a ler é já um exemplo de *programação literária*: foi gerado a partir do texto fonte `cp1617t.lhs`¹ que encontrará no *material pedagógico* desta disciplina descompactando o ficheiro `cp1617t.zip` e executando

```
lhs2TeX cp1617t.lhs > cp1617t.tex
pdflatex cp1617t
```

em que `lhs2tex` é um pre-processor que faz “pretty printing” de código Haskell em **L^AT_EX** e que deve desde já instalar a partir do endereço

<https://hackage.haskell.org/package/lhs2tex>.

Por outro lado, o mesmo ficheiro `cp1617t.lhs` é executável e contém o “kit” básico, escrito em **Haskell**, para realizar o trabalho. Basta executar

```
ghci cp1617t.lhs
```

para ver que assim é:

```
GHCI, version 8.0.2: http://www.haskell.org/ghc/  :? for help
[ 1 of 11] Compiling Show           ( Show.hs, interpreted )
[ 2 of 11] Compiling ListUtils      ( ListUtils.hs, interpreted )
[ 3 of 11] Compiling Probability   ( Probability.hs, interpreted )
[ 4 of 11] Compiling Cp             ( Cp.hs, interpreted )
[ 5 of 11] Compiling Nat             ( Nat.hs, interpreted )
[ 6 of 11] Compiling List             ( List.hs, interpreted )
[ 7 of 11] Compiling LTree          ( LTree.hs, interpreted )
[ 8 of 11] Compiling St              ( St.hs, interpreted )
[ 9 of 11] Compiling BTree          ( BTree.hs, interpreted )
[10 of 11] Compiling Exp             ( Exp.hs, interpreted )
[11 of 11] Compiling Main              ( cp1617t.lhs, interpreted )
Ok, modules loaded: BTree, Cp, Exp, LTree, List, ListUtils, Main, Nat,
Probability, Show, St.
```

O facto de o interpretador carregar as bibliotecas do *material pedagógico* da disciplina, entre outras, deve-se ao facto de, neste mesmo sítio do texto fonte, se ter inserido o seguinte código **Haskell**:

```
import Cp
import List
```

¹O suffixo ‘lhs’ quer dizer *literate Haskell*.

```

import Nat
import Exp
import BTree
import LTree
import St
import Probability hiding (cond)
import Data.List
import Test.QuickCheck hiding ((×))
import System.Random hiding (·,·)
import GHC.IO.Exception
import System.IO.Unsafe

```

Abra o ficheiro `cp1617t.lhs` no seu editor de texto preferido e verifique que assim é: todo o texto que se encontra dentro do ambiente

```

\begin{code}
...
\end{code}

```

vai ser seleccionado pelo **GHCi** para ser executado.

3 Como realizar o trabalho

Este trabalho teórico-prático deve ser realizado por grupos de três alunos. Os detalhes da avaliação (datas para submissão do relatório e sua defesa oral) são os que forem publicados na **página da disciplina** na *internet*. Recomenda-se uma abordagem equilibrada e participativa dos membros do grupo de trabalho por forma a poderem responder às questões que serão colocadas na defesa oral do relatório.

Em que consiste, então, o *relatório* a que se refere o parágrafo anterior? É a edição do texto que está a ser lido, preenchendo o anexo **C** com as suas respostas. O relatório deverá conter ainda a identificação dos membros do grupo de trabalho, no local respectivo da folha de rosto.

Para gerar o PDF integral do relatório deve-se ainda correr os comando seguintes, que actualizam a bibliografia (com **BibTeX**) e o índice remissivo (com **makeindex**),

```

bibtex cp1617t.aux
makeindex cp1617t.idx

```

e recompilar o texto como acima se indicou. Dever-se-á ainda instalar o utilitário **QuickCheck** ² que ajuda a validar programas em **Haskell**.

Problema 1

O controlador de um processo físico baseia-se em dezenas de sensores que enviam as suas leituras para um sistema central, onde é feito o respectivo processamento.

Verificando-se que o sistema central está muito sobrecarregado, surgiu a ideia de equipar cada sensor com um microcontrolador que faça algum pré-processamento das leituras antes de as enviar ao sistema central. Esse tratamento envolve as operações (em vírgula flutuante) de soma, subtracção, multiplicação e divisão.

Há, contudo, uma dificuldade: o código da divisão não cabe na memória do microcontrolador, e não se pretende investir em novos microcontroladores devido à sua elevada quantidade e preço.

Olhando para o código a replicar pelos microcontroladores, alguém verificou que a divisão só é usada para calcular inversos, $\frac{1}{x}$. Calibrando os sensores foi possível garantir que os valores a inverter estão entre $1 < x < 2$, podendo-se então recorrer à **série de Maclaurin**

$$\frac{1}{x} = \sum_{i=0}^{\infty} (1-x)^i$$

para calcular $\frac{1}{x}$ sem fazer divisões. Seja então

$$inv\ x\ n = \sum_{i=0}^n (1-x)^i$$

²Para uma breve introdução ver e.g. <https://en.wikipedia.org/wiki/QuickCheck>.

a função que aproxima $\frac{1}{x}$ com n iterações da série de MacLaurin. Mostre que *inv x* é um ciclo-for, implementando-o em Haskell (e opcionalmente em C). Deverá ainda apresentar testes em QuickCheck que verifiquem o funcionamento da sua solução. (**Sugestão:** inspire-se no problema semelhante relativo à função *ns* da secção 3.16 dos apontamentos [4].)

Problema 2

Se digitar *man wc* na shell do Unix (Linux) obterá:

```
NAME
    wc -- word, line, character, and byte count

SYNOPSIS
    wc [-clmw] [file ...]

DESCRIPTION
    The wc utility displays the number of lines, words, and bytes contained in
    each input file, or standard input (if no file is specified) to the stan-
    dard output. A line is defined as a string of characters delimited by a
    <newline> character. Characters beyond the final <newline> character will
    not be included in the line count.
    (...)
    The following options are available:
    (...)
        -w    The number of words in each input file is written to the standard
              output.
    (...)

```

Se olharmos para o código da função que, em C, implementa esta funcionalidade [2] e nos focarmos apenas na parte que implementa a opção *-w*, verificamos que a poderíamos escrever, em Haskell, da forma seguinte:

```
wc_w :: [Char] -> Int
wc_w [] = 0
wc_w (c:l) =
  if ¬ (sep c) ∧ lookahead_sep l
  then wc_w l + 1
  else wc_w l
  where
    sep c = (c ≡ ' ' ∨ c ≡ '\n' ∨ c ≡ '\t')
    lookahead_sep [] = True
    lookahead_sep (c:l) = sep c

```

Re-implemente esta função segundo o modelo *worker/wrapper* onde *wrapper* deverá ser um catamorfismo de listas. Apresente os cálculos que fez para chegar a essa sua versão de *wc_w* e inclua testes em QuickCheck que verifiquem o funcionamento da sua solução. (**Sugestão:** aplique a lei de recursividade múltipla às funções *wc_w* e *lookahead_sep*.)

Problema 3

Uma “B-tree” é uma generalização das árvores binárias do módulo BTree a mais do que duas sub-árvores por nó:

```
data B-tree a = Nil | Block { leftmost :: B-tree a, block :: [(a, B-tree a)] } deriving (Show, Eq)

```

Por exemplo, a B-tree³

³Créditos: figura extraída de <https://en.wikipedia.org/wiki/B-tree>.



é representada no tipo acima por:

```

t = Block {
  leftmost = Block {
    leftmost = Nil,
    block = [(1, Nil), (2, Nil), (5, Nil), (6, Nil)]},
  block = [
    (7, Block {
      leftmost = Nil,
      block = [(9, Nil), (12, Nil)]}),
    (16, Block {
      leftmost = Nil,
      block = [(18, Nil), (21, Nil)]})
  ]}

```

Pretende-se, neste problema:

1. Construir uma biblioteca para o tipo B-tree da forma habitual (in + out; ana + cata + hylo; instância na classe *Functor*).
2. Definir como um catamorfismo a função *inordB_tree* :: B-tree *t* → [*t*] que faça travessias “in-order” de árvores deste tipo.
3. Definir como um catamorfismo a função *largestBlock* :: B-tree *a* → *Int* que detecta o tamanho do maior bloco da árvore argumento.
4. Definir como um anamorfismo a função *mirrorB_tree* :: B-tree *a* → B-tree *a* que roda a árvore argumento de 180°
5. Adaptar ao tipo B-tree o hilomorfismo “quick sort” do módulo BTree. O respectivo anamorfismo deverá basear-se no gene *lsplitB_tree* cujo funcionamento se sugere a seguir:

```

lsplitB_tree [] = i1 ()
lsplitB_tree [7] = i2 ([], [(7, [])])
lsplitB_tree [5, 7, 1, 9] = i2 ([1], [(5, []), (7, [9])])
lsplitB_tree [7, 5, 1, 9] = i2 ([1], [(5, []), (7, [9])])

```

6. A biblioteca **Exp** permite representar árvores-expressão em formato DOT, que pode ser lido por aplicações como por exemplo **Graphviz**, produzindo as respectivas imagens. Por exemplo, para o caso de árvores **BTree**, se definirmos

```

dotBTree :: Show a => BTree a → IO ExitCode
dotBTree = dotpict · bmap nothing (Just · show) · cBTree2Exp

```

executando *dotBTree* *t* para

```

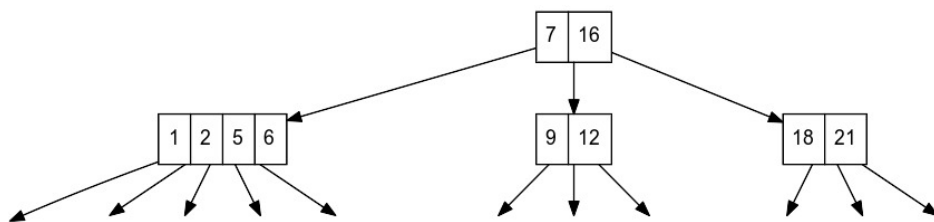
t = Node (6, (Node (3, (Node (2, (Empty, Empty)), Empty)), Node (7, (Empty, Node (9, (Empty, Empty))))))

```

obter-se-á a imagem



Escreva de forma semelhante uma função `dotB_tree` que permita mostrar em [Graphviz](#)⁴ árvores B-tree tal como se ilustra a seguir,



para a árvore dada acima.

Problema 4

Nesta disciplina estudaram-se funções mutuamente recursivas e como lidar com elas. Os tipos indutivos de dados podem, eles próprios, ser mutuamente recursivos. Um exemplo dessa situação são os chamados **L-Systems**.

Um **L-System** é um conjunto de regras de produção que podem ser usadas para gerar padrões por re-escrita sucessiva, de acordo com essas mesmas regras. Tal como numa gramática, há um axioma ou símbolo inicial, de onde se parte para aplicar as regras. Um exemplo célebre é o do crescimento de algas formalizado por Lindenmayer⁵ no sistema:

Variáveis: A e B

Constantes: nenhuma

Axioma: A

Regras: $A \rightarrow A B, B \rightarrow A$.

Quer dizer, em cada iteração do “crescimento” da alga, cada A deriva num par $A B$ e cada B converte-se num A . Assim, ter-se-á, onde n é o número de iterações desse processo:

- $n = 0$: A
- $n = 1$: $A B$
- $n = 2$: $A B A$
- $n = 3$: $A B A A B$
- etc

⁴Como alternativa a instalar [Graphviz](#), podem usar [WebGraphviz](#) num browser.

⁵Ver https://en.wikipedia.org/wiki/Aristid_Lindenmayer.

Este **L-System** pode codificar-se em Haskell considerando cada variável um tipo, a que se adiciona um caso de paragem para poder expressar as sucessivas iterações:

```
type Algae = A
data A = NA | A A B deriving Show
data B = NB | B A deriving Show
```

Observa-se aqui já que A e B são mutuamente recursivos. Os isomorfismos in/out são definidos da forma habitual:

```
inA :: 1 + A × B → A
inA = [NA, A]
outA :: A → 1 + A × B
outA NA = i1 ()
outA (A a b) = i2 (a, b)
inB :: 1 + A → B
inB = [NB, B]
outB :: B → 1 + A
outB NB = i1 ()
outB (B a) = i2 a
```

O functor é, em ambos os casos, $F X = 1 + X$. Contudo, os catamorfismos de A têm de ser estendidos com mais um gene, de forma a processar também os B ,

$$\begin{aligned} \langle \cdot \cdot \rangle_A &:: (1 + c \times d \rightarrow c) \rightarrow (1 + c \rightarrow d) \rightarrow A \rightarrow c \\ \langle ga \ gb \rangle_A &= ga \cdot (id + \langle ga \ gb \rangle_A \times \langle ga \ gb \rangle_B) \cdot outA \end{aligned}$$

e a mesma coisa para os B s:

$$\begin{aligned} \langle \cdot \cdot \rangle_B &:: (1 + c \times d \rightarrow c) \rightarrow (1 + c \rightarrow d) \rightarrow B \rightarrow d \\ \langle ga \ gb \rangle_B &= gb \cdot (id + \langle ga \ gb \rangle_A) \cdot outB \end{aligned}$$

Pretende-se, neste problema:

1. A definição dos anamorfismos dos tipos A e B .
2. A definição da função

```
generateAlgae :: Int -> Algae
```

como anamorfismo de $Algae$ e da função

```
showAlgae :: Algae -> String
```

como catamorfismo de $Algae$.

3. Use **QuickCheck** para verificar a seguinte propriedade:

$$length \cdot showAlgae \cdot generateAlgae = fib \cdot succ$$

Problema 5

O ponto de partida deste problema é um conjunto de equipas de futebol, por exemplo:

```
equipas :: [Equipa]
equipas = [
  "Arouca", "Belenenses", "Benfica", "Braga", "Chaves", "Feirense",
  "Guimaraes", "Maritimo", "Moreirense", "Nacional", "P.Ferreira",
  "Porto", "Rio Ave", "Setubal", "Sporting", "Estoril"
]
```

Assume-se que há uma função $f(e_1, e_2)$ que dá — baseando-se em informação acumulada historicamente, e.g. estatística — qual a probabilidade de e_1 ou e_2 ganharem um jogo entre si.⁶ Por exemplo, $f(\text{"Arouca"}, \text{"Braga"})$ poderá dar como resultado a distribuição

Arouca 28.6%
 Braga 71.4%

indicando que há 71.4% de probabilidades de "Braga" ganhar a "Arouca".

Para lidarmos com probabilidades vamos usar o mónade $\text{Dist } a$ que vem descrito no apêndice A e que está implementado na biblioteca **Probability** [1] — ver definição (1) mais adiante. A primeira parte do problema consiste em sortear *aleatoriamente* os jogos das equipas. O resultado deverá ser uma **LTree** contendo, nas folhas, os jogos da primeira eliminatória e cujos nós indicam quem joga com quem (vencendo), à medida que a eliminatória prossegue:



A segunda parte do problema consiste em processar essa árvore usando a função

$jogo :: (Equipa, Equipa) \rightarrow \text{Dist } Equipa$

que foi referida acima. Essa função simula um qualquer jogo, como foi acima dito, dando o resultado de forma probabilística. Por exemplo, para o sorteio acima e a função *jogo* que é dada neste enunciado⁷, a probabilidade de cada equipa vir a ganhar a competição vem dada na distribuição seguinte:

Porto 21.7%
 Sporting 21.4%
 Benfica 19.0%
 Guimaraes 9.4%
 Braga 5.1%
 Nacional 4.9%
 Maritimo 4.1%
 Belenenses 3.5%
 Rio Ave 2.3%
 Moreirense 1.9%
 P.Ferreira 1.4%
 Arouca 1.4%
 Estoril 1.4%
 Setubal 1.4%
 Feirense 0.7%
 Chaves 0.4%

Assumindo como dada e fixa a função *jogo* acima referida, juntando as duas partes obteremos um *hilomorfismo* de tipo $[Equipa] \rightarrow \text{Dist } Equipa$,

$quem_vence :: [Equipa] \rightarrow \text{Dist } Equipa$
 $quem_vence = eliminatória \cdot sorteio$

com características especiais: é aleatório no anamorfismo (sorteio) e probabilístico no catamorfismo (eliminatória).

⁶Tratando-se de jogos eliminatórios, não há lugar a empates.

⁷Pode, se desejar, criar a sua própria função *jogo*, mas para efeitos de avaliação terá que ser usada a que vem dada neste enunciado. Uma versão de *jogo* realista teria que ter em conta todas as estatísticas de jogos entre as equipas em jogo, etc etc.

O anamorfismo *sorteio* :: [Equipa] → LTree Equipa tem a seguinte arquitectura,⁸

$$\text{sorteio} = \text{anaLTree } \text{lsplit} \cdot \text{envia} \cdot \text{permuta}$$

reutilizando o anamorfismo do algoritmo de “merge sort”, da biblioteca **LTree**, para construir a árvore de jogos a partir de uma permutação aleatória das equipas gerada pela função genérica

$$\text{permuta} :: [a] \rightarrow \text{IO } [a]$$

A presença do mónade de IO tem a ver com a geração de números aleatórios⁹.

1. Defina a função monádica *permuta* sabendo que tem já disponível

$$\text{getR} :: [a] \rightarrow \text{IO } (a, [a])$$

getR *x* dá como resultado um par (*h*, *t*) em que *h* é um elemento de *x* tirado à sorte e *t* é a lista sem esse elemento – mas esse par vem encapsulado dentro de IO.

2. A segunda parte do exercício consiste em definir a função monádica

$$\text{eliminatória} :: \text{LTree Equipa} \rightarrow \text{Dist Equipa}$$

que, assumindo já disponível a função *jogo* acima referida, dá como resultado a distribuição de equipas vencedoras do campeonato.

Sugestão: inspire-se na secção 4.10 (*‘Monadification’ of Haskell code made easy*) dos apontamentos [4].

Referências

- [1] M. Erwig and S. Kollmansberger. Functional pearls: Probabilistic functional programming in Haskell. *J. Funct. Program.*, 16:21–34, January 2006.
- [2] B.W. Kernighan and D.M. Ritchie. *The C Programming Language*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1978.
- [3] D.E. Knuth. *Literate Programming*. CSLI Lecture Notes Number 27. Stanford University Center for the Study of Language and Information, Stanford, CA, USA, 1992.
- [4] J.N. Oliveira. *Program Design by Calculation*, 2008. Draft of textbook in preparation. viii+297 pages. Informatics Department, University of Minho.

⁸A função *envia* não é importante para o processo; apenas se destina a simplificar a arquitectura monádica da solução.

⁹Quem estiver interessado em detalhes deverá consultar **System.Random**.

B Definições auxiliares

São dadas: a função que simula jogos entre equipas,

```
type Equipa = String
jogo :: (Equipa, Equipa) → Dist Equipa
jogo (e1, e2) = D [(e1, 1 - r1 / (r1 + r2)), (e2, 1 - r2 / (r1 + r2))] where
  r1 = rank e1
  r2 = rank e2
  rank = pap ranks
  ranks = [
    ("Arouca", 5),
    ("Belenenses", 3),
    ("Benfica", 1),
    ("Braga", 2),
    ("Chaves", 5),
    ("Feirense", 5),
    ("Guimaraes", 2),
    ("Maritimo", 3),
    ("Moreirense", 4),
    ("Nacional", 3),
    ("P.Ferreira", 3),
    ("Porto", 1),
    ("Rio Ave", 4),
    ("Setubal", 4),
    ("Sporting", 1),
    ("Estoril", 5)]
```

a função (monádica) que parte uma lista numa cabeça e cauda *aleatórias*,

```
getR :: [a] → IO (a, [a])
getR x = do {
  i ← getStdRandom (randomR (0, length x - 1));
  return (x !! i, retira i x)
} where retira i x = take i x ++ drop (i + 1) x
```

e algumas funções auxiliares de menor importância: uma que ordena listas com base num atributo (função que induz uma pré-ordem),

```
presort :: (Ord a, Ord b) ⇒ (b → a) → [b] → [b]
presort f = map π2 · sort · (map (fork f id))
```

e outra que converte “look-up tables” em funções (parciais):

```
pap :: Eq a ⇒ [(a, t)] → a → t
pap m k = unJust (lookup k m) where unJust (Just a) = a
```

C Soluções propostas

Os alunos devem colocar neste anexo as suas soluções aos exercícios propostos, de acordo com o “layout” que se fornece. Não podem ser alterados os nomes das funções dadas, mas pode ser adicionado texto e / ou outras funções auxiliares que sejam necessárias.

Problema 1

```
inv x n = π2 $ for (invAccum x) (0, 0) n
  where invAccum x (it, accum) = (it + 1, accum + (1 - x) ** it)
```

```

val1 :: Gen Double
val1 = Test.QuickCheck.suchThat arbitrary (\i → i > 1 ∧ i < 2)
prop_inv (Positive n) = forAll val1 $ \x →
  let apro = inv x (n + 1)
      real = 1 / x
  in abs (real - apro) < 0.1

```

A sua solução em C pode ser definida da seguinte forma:

```

#include <math.h>

float inv(float x, int n){
    float accum = 0;
    for(int i = 0; i < n; i++){
        accum += pow(1 - x, i);
    }
    return accum;
}

```

Problema 2

```

wrapper :: [Int] -> Int
wrapper = cataList (either (const 0) (uncurry (+)))

worker :: [Char] -> [Int]
worker [] = []
worker [c]
    | not (sep c) = [1]
    | otherwise   = [0]
worker (c1:c2:cs)
    | not (sep c1) && sep (c2) = 1 : worker (c2:cs)
    | otherwise               = 0 : worker (c2:cs)

wc_w_final :: [Char] -> Int
wc_w_final = wrapper . worker
wrapper = π2
worker :: [Char] -> (Bool, Int)
worker = cataList [(True, 0), wordAccum]
wordAccum :: (Char, (Bool, Int)) -> (Bool, Int)
wordAccum (a, (b, n))
    | b ∧ (¬ · sep) a = (sep a, succ n)
    | otherwise       = (sep a, n)
where sep c = c ∈ " \t\n "

```

Do enunciado vem que:

$$\begin{cases} wc_w \cdot nil = 0 \\ wc_w \cdot cons = cond\ p\ (succ \cdot wc_w \cdot \pi_2)\ (wc_w \cdot \pi_2) \end{cases}$$

, em que:

$$\begin{aligned} & wc_w_final = wrapper.worker \\ = & \{ \text{justificação} \dots \} \\ & \alpha \cdot \langle p \cdot f, f \rangle \\ = & \{ \text{justificação} \dots \} \\ & \alpha \cdot (id \times f) \cdot \langle p \cdot f, id \rangle - - - - etc - - - - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{array}{l} lookahead \cdot nil = True \\ lookahead \cdot cons = sep \cdot \pi_1 \end{array} \right. \\
= & \{ \text{Eq-} + (27) \} \\
& lookahead \cdot \mathbf{in} = [True, sep \cdot \pi_1] \\
= & \{ \text{Natural-}\pi_1 (12) \} \\
& lookahead \cdot \mathbf{in} = [True, \pi_1 \cdot (sep \times lookahead)] \\
= & \{ \text{Absorção-} + (22) \} \\
& lookahead \cdot \mathbf{in} = [True, \pi_1] \cdot (id + (sep \times lookahead)) \\
= & \{ lookahead = \pi_1 \cdot \langle lookahead, wc_w \rangle \} \\
& lookahead \cdot \mathbf{in} = [True, \pi_1] \cdot (id + (sep \times \pi_1 \cdot \langle lookahead, wc_w \rangle)) \\
= & \{ \text{Functor-x} (14) \} \\
& lookahead \cdot \mathbf{in} = [True, \pi_1] \cdot (id + (sep \times \pi_1) \cdot (id \times \langle lookahead, wc_w \rangle)) \\
= & \{ \text{Functor-} + (25) \} \\
& lookahead \cdot \mathbf{in} = [True, \pi_1] \cdot (id + (sep \times \pi_1)) \cdot (id + (id \times \langle lookahead, wc_w \rangle)) \\
= & \{ \text{Absorção-} + (22) \} \\
& lookahead \cdot \mathbf{in} = [True, \pi_1 \cdot (sep \times \pi_1)] \cdot (id + (id \times \langle lookahead, wc_w \rangle)) \\
= & \{ \text{Natural-}\pi_1 (12) \} \\
& lookahead \cdot \mathbf{in} = [True, sep \cdot \pi_1] \cdot (id + (id \times \pi_1 \cdot \langle lookahead, wc_w \rangle))
\end{aligned}$$

Problema 3

Para gerar o gráfico basta correr este comando: `dot -Tpng digraphG.dot -o diagrama.png`

```

inB_tree :: () + (B-tree a, [(a, B-tree a)]) → (B-tree a)
inB_tree = [Nil, joinB_trees]
joinB_trees :: (B-tree a, [(a, B-tree a)]) → B-tree a
joinB_trees (t1, ts) = Block { leftmost = t1, block = ts }

```

Uma versão alternativa seria:

```

inB_tree :: Either () (B-tree a, [(a, B-tree a)]) → B-tree a
inB_tree = either (const Nil) (uncurry Block)

```

```

outB_tree :: B-tree a → () + (B-tree a, [(a, B-tree a)])
outB_tree Nil = i1 ()
outB_tree (Block left block) = i2 (left, block)

```

```

recB_tree :: (b → d) → z + (b, [(a, b)]) → z + (d, [(a, d)])
recB_tree f = id + (f × (map (id × f)))

```

```

baseB_tree :: (a1 → b1) → (a → d) → b + (a, [(a1, a)]) → b + (d, [(b1, d)])
baseB_tree g f = id + (f × (map (g × f)))

```

```

cataB_tree :: ((() + (d, [(a, d)]) → d) → B-tree a → d)
cataB_tree g = g · (recB_tree (cataB_tree g)) · outB_tree
anaB_tree :: (b → () + (b, [(a, b)])) → b → B-tree a
anaB_tree g = inB_tree · (recB_tree (anaB_tree g)) · g

```

```

hyloB_tree :: ((() + (c, [(a, c)]) → c) → (b → () + (b, [(a, b)]))) → b → c
hyloB_tree f g = cataB_tree f · anaB_tree g

```

instance *Functor* B-tree

where fmap f = cataB_tree (inB_tree · baseB_tree f id)

-- esq meio dir

inordB_tree :: B-tree t → [t]

inordB_tree = cataB_tree ordgene

ordgene = [[], join]

where join :: ([a], [(a, [a])]) → [a]

join (xs, ys) = xs ++ concat (map (λ(n, zs) → (n : zs)) ys)

largestBlock :: B-tree t → Int

largestBlock = cataB_tree [0, size]

where size :: (Int, [(a, Int)]) → Int

size (x, ys) = max x (length ys)

mirrorB_tree :: B-tree a → B-tree a

mirrorB_tree = cataB_tree (inB_tree · (id + (id × reverse)))

dotB_tree :: Show a ⇒ B-tree a → IO ExitCode

dotB_tree = dotpict · bmap nothing (Just · show) · cB_tree2Exp

cB_tree2Exp :: B-tree a → Exp [Char] [a]

cB_tree2Exp = cataB_tree [(Var "nil"), connect]

connect :: (Exp v [a], [(a, Exp v [a])]) → Exp v [a]

connect (x, xs) = Term (map π₁ xs) (x : (map π₂ xs))

qSortB_tree :: Ord a => [a] -> [a]

qSortB_tree = hyloB_tree ordgene lsplitB_tree

lsplitB_tree :: [a] -> Either () ([a], [(a, [a])])

lsplitB_tree [] = i1 ()

lsplitB_tree [x] = i2 ([], (x, []))

lsplitB_tree (x:xs) = undefined

qsep [] = Left ()

qsep (h:t) = Right (h, (s,l)) where (s,l) = part (<h) t

part :: (a -> Bool) -> [a] -> ([a], [a])

part p [] = ([], [])

part p (h:t) | p h = let (s,l) = part p t in (h:s,l)

| otherwise = let (s,l) = part p t in (s,h:l)

Problema 4

$\llbracket \cdot \cdot \rrbracket_A :: (a \rightarrow 1 + (a, b)) \rightarrow (b \rightarrow 1 + a) \rightarrow a \rightarrow A$

$\llbracket ga \ gb \rrbracket_A = inA \cdot (id + \llbracket ga \ gb \rrbracket_A \times \llbracket ga \ gb \rrbracket_B) \cdot ga$

$\llbracket \cdot \cdot \rrbracket_B :: (a \rightarrow 1 + (a, b)) \rightarrow (b \rightarrow 1 + a) \rightarrow b \rightarrow B$

$\llbracket ga \ gb \rrbracket_B = inB \cdot (id + \llbracket ga \ gb \rrbracket_A) \cdot gb$

generateAlgae :: Int → Algae

generateAlgae = $\llbracket ga \ gb \rrbracket_A \cdot succ$

```

where  $ga\ 0 = i_1\ ()$ 
       $ga\ n = i_2\ (pred\ n, pred\ n)$ 
       $gb\ 0 = i_1\ ()$ 
       $gb\ n = i_2\ (pred\ n)$ 
 $showAlgae :: Algae \rightarrow String$ 
 $showAlgae = \langle ga\ gb \rangle_A$ 
where  $ga = [\underline{"A"}, \widehat{(\text{++})}]$ 
       $gb = [\underline{"B"}, id]$ 

```

Problema 5

```

 $permuta :: [a] \rightarrow IO\ [a]$ 
 $permuta\ [] = return\ []$ 
 $permuta\ input = \mathbf{do}$ 
   $(x, xs) \leftarrow getR\ input$ 
   $permuted \leftarrow permuta\ xs$ 
   $return\ (x : permuted)$ 

 $eliminatoria :: LTree\ Equipa \rightarrow Dist\ Equipa$ 
 $eliminatoria = cataLTree\ g$ 
where  $g :: Equipa + (Dist\ Equipa, Dist\ Equipa) \rightarrow Dist\ Equipa$ 
       $g = [return, distJogo]$ 
       $distJogo :: (Dist\ Equipa, Dist\ Equipa) \rightarrow Dist\ Equipa$ 
       $distJogo\ (de1, de2) = \mathbf{do}$ 
         $e_1 \leftarrow de1$ 
         $e_2 \leftarrow de2$ 
         $jogo\ (e_1, e_2)$ 

```

Índice

- LaTeX, 2
 - lhs2TeX, 2
- B-tree, 4
- Cálculo de Programas, 3
 - Material Pedagógico, 2
 - BTree.hs, 4, 5
 - Exp.hs, 5
 - LTree.hs, 8, 9
- Combinador “pointfree”
 - cata*, 7
 - either*, 7
- Função
 - π_2 , 11
 - length*, 7, 11
 - map*, 11
 - succ*, 7
 - uncurry*, 7
- Functor, 3, 5, 7–11
- Graphviz, 5, 6
 - WebGraphviz, 6
- Haskell, 2, 3
 - “Literate Haskell”, 2
 - Biblioteca
 - PFP, 10
 - Probability, 8, 10
 - interpretador
 - GHCI, 3, 10
 - QuickCheck, 3, 4, 7
- L-system, 6, 7
- Programação literária, 2
- Taylor series
 - Maclaurin series, 3
- U.Minho
 - Departamento de Informática, 1
- Unix shell
 - wc*, 4
- Utilitário
 - LaTeX
 - bibtex*, 3
 - makeindex*, 3