Cálculo de Programas
Trabalho Prático
MiEI+LCC — Ano Lectivo de 2016/17

Departamento de Informática
Universidade do Minho

Junho de 2017

Grupo nr.	37
a67637	Célia Figueiredo
a67662	Adriana Pereira
a60993	Luís Pedro Fonseca

Conteúdo

1 Preâmbulo

A disciplina de Cálculo de Programas tem como objectivo principal ensinar a programação de computadores como uma disciplina científica. Para isso parte-se de um repertório de *combinadores* que formam uma álgebra da programação (conjunto de leis universais e seus corolários) e usam-se esses combinadores para construir programas *composicionalmente*, isto é, agregando programas já existentes.

Na sequência pedagógica dos planos de estudo dos dois cursos que têm esta disciplina, restringe-se a aplicação deste método ao desenvolvimento de programas funcionais na linguagem Haskell.

O presente trabalho tem por objectivo concretizar na prática os objectivos da disciplina, colocando os alunos perante problemas de programação que deverão ser abordados composicionalmente e implementados em Haskell. Há ainda um outro objectivo: o de ensinar a documentar programas e a produzir textos técnico-científicos de qualidade.

2 Documentação

Para cumprir de forma integrada os objectivos enunciados acima vamos recorrer a uma técnica de programação dita "literária" [3], cujo princípio base é o seguinte:

> *Um programa e a sua documentação devem coincidir.*

Por outras palavras, o código fonte e a sua documentação deverão constar do mesmo documento (ficheiro).

O ficheiro `cp1617t.pdf` que está a ler é já um exemplo de programação literária: foi gerado a partir do texto fonte `cp1617t.lhs`[1] que encontrará no material pedagógico desta disciplina descompactando o ficheiro `cp1617t.zip` e executando

```
lhs2TeX cp1617t.lhs > cp1617t.tex
pdflatex cp1617t
```

em que `lhs2tex` é um pre-processador que faz "pretty printing" de código Haskell em LaTeX e que deve desde já instalar a partir do endereço

> `https://hackage.haskell.org/package/lhs2tex`.

Por outro lado, o mesmo ficheiro `cp1617t.lhs` é executável e contém o "kit" básico, escrito em Haskell, para realizar o trabalho. Basta executar

```
ghci cp1617t.lhs
```

para ver que assim é:

```
GHCi, version 8.0.2: http://www.haskell.org/ghc/  :? for help
[ 1 of 11] Compiling Show             ( Show.hs, interpreted )
[ 2 of 11] Compiling ListUtils        ( ListUtils.hs, interpreted )
[ 3 of 11] Compiling Probability      ( Probability.hs, interpreted )
[ 4 of 11] Compiling Cp               ( Cp.hs, interpreted )
[ 5 of 11] Compiling Nat              ( Nat.hs, interpreted )
[ 6 of 11] Compiling List             ( List.hs, interpreted )
[ 7 of 11] Compiling LTree            ( LTree.hs, interpreted )
[ 8 of 11] Compiling St               ( St.hs, interpreted )
[ 9 of 11] Compiling BTree            ( BTree.hs, interpreted )
[10 of 11] Compiling Exp              ( Exp.hs, interpreted )
[11 of 11] Compiling Main             ( cp1617t.lhs, interpreted )
Ok, modules loaded: BTree, Cp, Exp, LTree, List, ListUtils, Main, Nat,
Probability, Show, St.
```

O facto de o interpretador carregar as bibliotecas do material pedagógico da disciplina, entre outras, deve-se ao facto de, neste mesmo sítio do texto fonte, se ter inserido o seguinte código Haskell:

```
import Cp
import List
```

[1] O suffixo 'lhs' quer dizer *literate Haskell*.

$$
\begin{array}{l}
\mathbf{import}\ \mathit{Nat}\\
\mathbf{import}\ \mathit{Exp}\\
\mathbf{import}\ \mathsf{BTree}\\
\mathbf{import}\ \mathsf{LTree}\\
\mathbf{import}\ \mathit{St}\\
\mathbf{import}\ \mathit{Probability}\ \mathit{hiding}\ (\mathit{cond})\\
\mathbf{import}\ \mathit{Data.List}\\
\mathbf{import}\ \mathit{Test.QuickCheck}\ \mathit{hiding}\ ((\times))\\
\mathbf{import}\ \mathit{System.Random}\ \mathit{hiding}\ \langle\cdot,\cdot\rangle\\
\mathbf{import}\ \mathit{GHC}.\mathsf{IO}.\mathit{Exception}\\
\mathbf{import}\ \mathit{System}.\mathsf{IO}.\mathit{Unsafe}
\end{array}
$$

Abra o ficheiro `cp1617t.lhs` no seu editor de texto preferido e verifique que assim é: todo o texto que se encontra dentro do ambiente

```
\begin{code}
...
\end{code}
```

vai ser seleccionado pelo GHCi para ser executado.

3 Como realizar o trabalho

Este trabalho teórico-prático deve ser realizado por grupos de três alunos. Os detalhes da avaliação (datas para submissão do relatório e sua defesa oral) são os que forem publicados na página da disciplina na *internet*. Recomenda-se uma abordagem equilibrada e participativa dos membros do grupo de trabalho por forma a poderem responder às questões que serão colocadas na defesa oral do relatório.

Em que consiste, então, o *relatório* a que se refere o parágrafo anterior? É a edição do texto que está a ser lido, preenchendo o anexo C com as suas respostas. O relatório deverá conter ainda a identificação dos membros do grupo de trabalho, no local respectivo da folha de rosto.

Para gerar o PDF integral do relatório deve-se ainda correr os comando seguintes, que actualizam a bibliografia (com BibTEX) e o índice remissivo (com `makeindex`),

```
bibtex cp1617t.aux
makeindex cp1617t.idx
```

e recompilar o texto como acima se indicou. Dever-se-á ainda instalar o utilitário QuickCheck [2] que ajuda a validar programas em Haskell.

Problema 1

O controlador de um processo físico baseia-se em dezenas de sensores que enviam as suas leituras para um sistema central, onde é feito o respectivo processamento.

Verificando-se que o sistema central está muito sobrecarregado, surgiu a ideia de equipar cada sensor com um microcontrolador que faça algum pré-processamento das leituras antes de as enviar ao sistema central. Esse tratamento envolve as operações (em vírgula flutuante) de soma, subtracção, multiplicação e divisão.

Há, contudo, uma dificuldade: o código da divisão não cabe na memória do microcontrolador, e não se pretende investir em novos microcontroladores devido à sua elevada quantidade e preço.

Olhando para o código a replicar pelos microcontroladores, alguém verificou que a divisão só é usada para calcular inversos, $\frac{1}{x}$. Calibrando os sensores foi possível garantir que os valores a inverter estão entre $1 < x < 2$, podendo-se então recorrer à série de Maclaurin

$$\frac{1}{x} = \sum_{i=0}^{\infty} (1-x)^i$$

para calcular $\frac{1}{x}$ sem fazer divisões. Seja então

$$\mathit{inv}\ x\ n = \sum_{i=0}^{n} (1-x)^i$$

[2] Para uma breve introdução ver e.g. `https://en.wikipedia.org/wiki/QuickCheck`.

a função que aproxima $\frac{1}{x}$ com n iterações da série de MacLaurin. Mostre que $inv\ x$ é um ciclo-for, implementando-o em Haskell (e opcionalmente em C). Deverá ainda apresentar testes em QuickCheck que verifiquem o funcionamento da sua solução. (**Sugestão:** inspire-se no problema semelhante relativo à função ns da secção 3.16 dos apontamentos [4].)

Problema 2

Se digitar *man wc* na shell do Unix (Linux) obterá:

```
NAME
     wc -- word, line, character, and byte count

SYNOPSIS
     wc [-clmw] [file ...]

DESCRIPTION
    The wc utility displays the number of lines, words, and bytes contained in
    each input file,  or standard input (if no file is specified) to the stan-
    dard  output.  A line is defined as  a string of characters delimited by a
    <newline> character.  Characters beyond the final <newline> character will
    not be included in the line count.
    (...)
    The following options are available:
    (...)
        -w   The number of words in each input file is written to the standard
             output.
    (...)
```

Se olharmos para o código da função que, em C, implementa esta funcionalidade [2] e nos focarmos apenas na parte que implementa a opção `-w`, verificamos que a poderíamos escrever, em Haskell, da forma seguinte:

$$
\begin{array}{l}
wc\_w :: [\mathit{Char}] \rightarrow \mathit{Int} \\
wc\_w\ [\,] = 0 \\
wc\_w\ (c : l) = \\
\quad \mathbf{if}\ \neg\ (sep\ c) \wedge lookahead\_sep\ l \\
\quad \mathbf{then}\ wc\_w\ l + 1 \\
\quad \mathbf{else}\ wc\_w\ l \\
\qquad \mathbf{where} \\
\qquad\quad sep\ c = (c \equiv \texttt{'\ '} \vee c \equiv \texttt{'\textbackslash n'} \vee c \equiv \texttt{'\textbackslash t'}) \\
\qquad\quad lookahead\_sep\ [\,] = \mathit{True} \\
\qquad\quad lookahead\_sep\ (c : l) = sep\ c
\end{array}
$$

Re-implemente esta função segundo o modelo *worker/wrapper* onde *wrapper* deverá ser um catamorfismos de listas. Apresente os cálculos que fez para chegar a essa sua versão de wc_w e inclua testes em QuickCheck que verifiquem o funcionamento da sua solução. (**Sugestão:** aplique a lei de recursividade múltipla às funções wc_w e $lookahead\_sep$.)

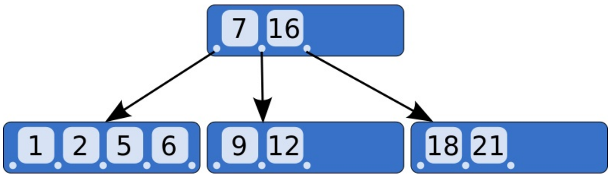
Problema 3

Uma "B-tree"é uma generalização das árvores binárias do módulo BTree a mais do que duas sub-árvores por nó:

$$\mathbf{data}\ \textsf{B-tree}\ a = \mathit{Nil} \mid \mathit{Block}\ \{\mathit{leftmost} :: \textsf{B-tree}\ a, \mathit{block} :: [(a, \textsf{B-tree}\ a)]\}\ \mathbf{deriving}\ (\mathit{Show}, \mathit{Eq})$$

Por exemplo, a B-tree[3]

[3]Créditos: figura extraída de `https://en.wikipedia.org/wiki/B-tree`.



é representada no tipo acima por:

$$
\begin{array}{l}
t = \mathit{Block}\ \{\\
\quad \mathit{leftmost} = \mathit{Block}\ \{\\
\quad\quad \mathit{leftmost} = \mathit{Nil},\\
\quad\quad \mathit{block} = [(1, \mathit{Nil}), (2, \mathit{Nil}), (5, \mathit{Nil}), (6, \mathit{Nil})]\},\\
\quad \mathit{block} = [\\
\quad\quad (7, \mathit{Block}\ \{\\
\quad\quad\quad \mathit{leftmost} = \mathit{Nil},\\
\quad\quad\quad \mathit{block} = [(9, \mathit{Nil}), (12, \mathit{Nil})]\}),\\
\quad\quad (16, \mathit{Block}\ \{\\
\quad\quad\quad \mathit{leftmost} = \mathit{Nil},\\
\quad\quad\quad \mathit{block} = [(18, \mathit{Nil}), (21, \mathit{Nil})]\})\\
\quad\quad]\}
\end{array}
$$

Pretende-se, neste problema:

1. Construir uma biblioteca para o tipo B-tree da forma habitual (in + out; ana + cata + hylo; instância na classe $\mathit{Functor}$).
2. Definir como um catamorfismo a função $\mathit{inordB\_tree} :: \text{B-tree}\ t \to [t]$ que faça travessias "inorder"de árvores deste tipo.
3. Definir como um catamorfismo a função $\mathit{largestBlock} :: \text{B-tree}\ a \to \mathit{Int}$ que detecta o tamanho do maior bloco da árvore argumento.
4. Definir como um anamorfismo a função $\mathit{mirrorB\_tree} :: \text{B-tree}\ a \to \text{B-tree}\ a$ que roda a árvore argumento de 180º
5. Adaptar ao tipo B-tree o hilomorfismo "quick sort"do módulo BTree. O respectivo anamorfismo deverá basear-se no gene $\mathit{lsplitB\_tree}$ cujo funcionamento se sugere a seguir:

$$
\begin{array}{l}
\mathit{lsplitB\_tree}\ [\,] = i_1\ ()\\
\mathit{lsplitB\_tree}\ [7] = i_2\ ([\,], [(7, [\,])])\\
\mathit{lsplitB\_tree}\ [5,7,1,9] = i_2\ ([1], [(5, [\,]), (7, [9])])\\
\mathit{lsplitB\_tree}\ [7,5,1,9] = i_2\ ([1], [(5, [\,]), (7, [9])])
\end{array}
$$

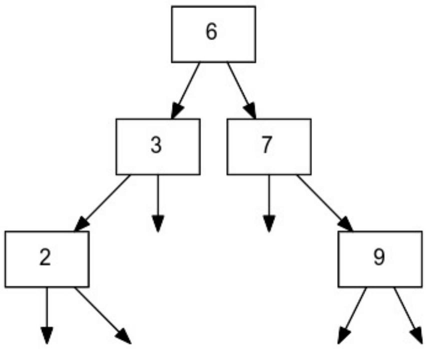
6. A biblioteca Exp permite representar árvores-expressão em formato DOT, que pode ser lido por aplicações como por exemplo Graphviz, produzindo as respectivas imagens. Por exemplo, para o caso de árvores BTree, se definirmos

$$
\begin{array}{l}
\mathit{dotBTree} :: \mathit{Show}\ a \Rightarrow \mathsf{BTree}\ a \to \mathsf{IO}\ \mathit{ExitCode}\\
\mathit{dotBTree} = \mathit{dotpict} \cdot \mathit{bmap}\ \mathit{nothing}\ (\mathit{Just} \cdot \mathit{show}) \cdot \mathit{cBTree2Exp}
\end{array}
$$

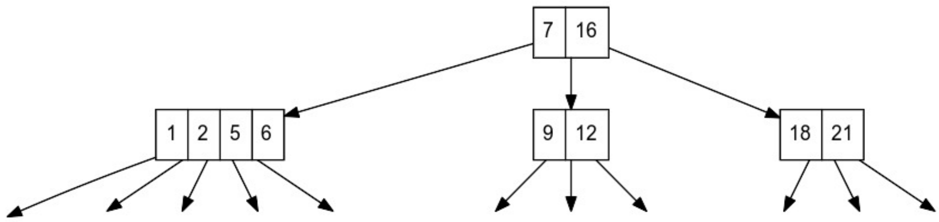
executando $\mathit{dotBTree}\ t$ para

$$t = \mathit{Node}\ (6, (\mathit{Node}\ (3, (\mathit{Node}\ (2, (\mathit{Empty}, \mathit{Empty})), \mathit{Empty})), \mathit{Node}\ (7, (\mathit{Empty}, \mathit{Node}\ (9, (\mathit{Empty}, \mathit{Empty}))))))$$

obter-se-á a imagem



Escreva de forma semelhante uma função $dotB\_tree$ que permita mostrar em Graphviz[4] árvores B-tree tal como se ilustra a seguir,



para a árvora dada acima.

Problema 4

Nesta disciplina estudaram-se funções mutuamente recursivas e como lidar com elas. Os tipos indutivos de dados podem, eles próprios, ser mutuamente recursivos. Um exemplo dessa situação são os chamados L-Systems.

Um L-System é um conjunto de regras de produção que podem ser usadas para gerar padrões por re-escrita sucessiva, de acordo com essas mesmas regras. Tal como numa gramática, há um axioma ou símbolo inicial, de onde se parte para aplicar as regras. Um exemplo célebre é o do crescimento de algas formalizado por Lindenmayer[5] no sistema:

Variáveis: A e B
Constantes: nenhuma
Axioma: A
Regras: $A \rightarrow A\ B, B \rightarrow A$.

Quer dizer, em cada iteração do "crescimento"da alga, cada A deriva num par $A\ B$ e cada B converte-se num A. Assim, ter-se-á, onde n é o número de iterações desse processo:

- $n = 0$: A
- $n = 1$: $A\ B$
- $n = 2$: $A\ B\ A$
- $n = 3$: $A\ B\ A\ A\ B$
- etc

[4] Como alternativa a instalar Graphviz, podem usar WebGraphviz num browser.
[5] Ver https://en.wikipedia.org/wiki/Aristid_Lindenmayer.

Este L-System pode codificar-se em Haskell considerando cada variável um tipo, a que se adiciona um caso de paragem para poder expressar as sucessivas iterações:

$$\begin{array}{l}\textbf{type}\ Algae = A\\ \textbf{data}\ A = \mathrm{NA} \mid A\ A\ B\ \textbf{deriving}\ Show\\ \textbf{data}\ B = \mathrm{NB} \mid B\ A\ \textbf{deriving}\ Show\end{array}$$

Observa-se aqui já que A e B são mutuamente recursivos. Os isomorfismos in/out são definidos da forma habitual:

$$\begin{array}{l} inA :: 1 + A \times B \rightarrow A\\ inA = [\underline{\mathrm{NA}}, \widehat{A}]\\ outA :: A \rightarrow 1 + A \times B\\ outA\ \mathrm{NA} = i_1\ ()\\ outA\ (A\ a\ b) = i_2\ (a, b)\\ inB :: 1 + A \rightarrow B\\ inB = [\underline{\mathrm{NB}}, B]\\ outB :: B \rightarrow 1 + A\\ outB\ \mathrm{NB} = i_1\ ()\\ outB\ (B\ a) = i_2\ a \end{array}$$

O functor é, em ambos os casos, $\mathsf{F}\ X = 1 + X$. Contudo, os catamorfismos de A têm de ser estendidos com mais um gene, de forma a processar também os B,

$$\begin{array}{l} (\!|\cdot\ \cdot|\!)_A :: (1 + c \times d \rightarrow c) \rightarrow (1 + c \rightarrow d) \rightarrow A \rightarrow c\\ (\!|ga\ gb|\!)_A = ga \cdot (id + (\!|ga\ gb|\!)_A \times (\!|ga\ gb|\!)_B) \cdot outA \end{array}$$

e a mesma coisa para os Bs:

$$\begin{array}{l} (\!|\cdot\ \cdot|\!)_B :: (1 + c \times d \rightarrow c) \rightarrow (1 + c \rightarrow d) \rightarrow B \rightarrow d\\ (\!|ga\ gb|\!)_B = gb \cdot (id + (\!|ga\ gb|\!)_A) \cdot outB \end{array}$$

Pretende-se, neste problema:

1. A definição dos anamorfimos dos tipos A e B.
2. A definição da função

   generateAlgae :: Int -¿ Algae

   como anamorfismo de $Algae$ e da função

   showAlgae :: Algae -¿ String

   como catamorfismo de $Algae$.
3. Use QuickCheck para verificar a seguinte propriedade:

   $$\mathsf{length} \cdot showAlgae \cdot generateAlgae = fib \cdot \mathsf{succ}$$

Problema 5

O ponto de partida deste problema é um conjunto de equipas de futebol, por exemplo:

$$\begin{array}{l} equipas :: [Equipa]\\ equipas = [\end{array}$$

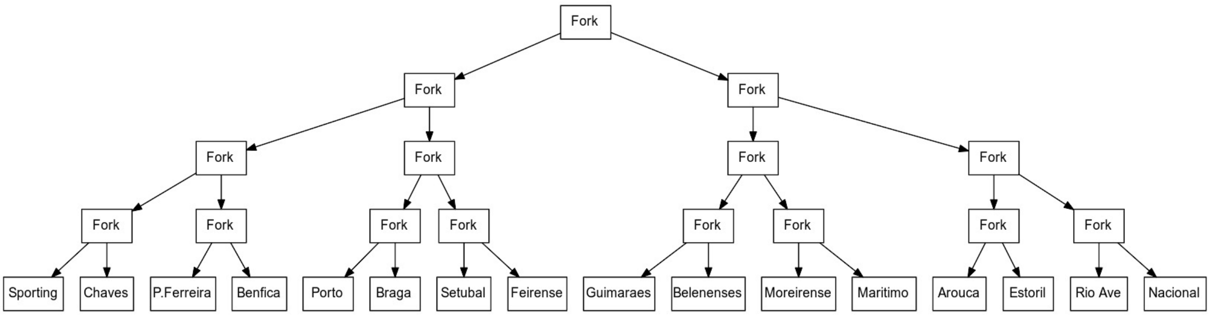
```
  "Arouca","Belenenses","Benfica","Braga","Chaves","Feirense",
  "Guimaraes","Maritimo","Moreirense","Nacional","P.Ferreira",
  "Porto","Rio Ave","Setubal","Sporting","Estoril"
  ]
```

Assume-se que há uma função $f\ (e_1, e_2)$ que dá — baseando-se em informação acumulada historicamente, e.g. estatística — qual a probabilidade de e_1 ou e_2 ganharem um jogo entre si.[6] Por exemplo, f (`"Arouca"`, `"Braga"`) poderá dar como resultado a distribuição

Arouca	28.6%
Braga	71.4%

indicando que há 71.4% de probabilidades de `"Braga"` ganhar a `"Arouca"`.

Para lidarmos com probabilidades vamos usar o mónade Dist a que vem descrito no apêndice A e que está implementado na biblioteca Probability [1] — ver definição (1) mais adiante. A primeira parte do problema consiste em sortear *aleatoriamente* os jogos das equipas. O resultado deverá ser uma LTree contendo, nas folhas, os jogos da primeira eliminatória e cujos nós indicam quem joga com quem (vencendo), à medida que a eliminatória prossegue:



A segunda parte do problema consiste em processar essa árvore usando a função

$$jogo :: (Equipa, Equipa) \rightarrow \mathsf{Dist}\ Equipa$$

que foi referida acima. Essa função simula um qualquer jogo, como foi acima dito, dando o resultado de forma probabilística. Por exemplo, para o sorteio acima e a função *jogo* que é dada neste enunciado[7], a probabilidade de cada equipa vir a ganhar a competição vem dada na distribuição seguinte:

Porto	21.7%
Sporting	21.4%
Benfica	19.0%
Guimaraes	9.4%
Braga	5.1%
Nacional	4.9%
Maritimo	4.1%
Belenenses	3.5%
Rio Ave	2.3%
Moreirense	1.9%
P.Ferreira	1.4%
Arouca	1.4%
Estoril	1.4%
Setubal	1.4%
Feirense	0.7%
Chaves	0.4%

Assumindo como dada e fixa a função *jogo* acima referida, juntando as duas partes obteremos um *hilomorfismo* de tipo $[Equipa] \rightarrow \mathsf{Dist}\ Equipa$,

$$\begin{array}{l} quem\_vence :: [Equipa] \rightarrow \mathsf{Dist}\ Equipa \\ quem\_vence = eliminatoria \cdot sorteio \end{array}$$

com características especiais: é aleatório no anamorfismo (sorteio) e probabilístico no catamorfismo (eliminatória).

[6]Tratando-se de jogos eliminatórios, não há lugar a empates.

[7]Pode, se desejar, criar a sua própria função *jogo*, mas para efeitos de avaliação terá que ser usada a que vem dada neste enunciado. Uma versão de *jogo* realista teria que ter em conta todas as estatísticas de jogos entre as equipas em jogo, etc etc.

O anamorfismo $sorteio :: [Equipa] \rightarrow \mathsf{LTree}\ Equipa$ tem a seguinte arquitectura, [8]

$$sorteio = anaLTree\ lsplit \cdot envia \cdot permuta$$

reutilizando o anamorfismo do algoritmo de "merge sort", da biblioteca LTree, para construir a árvore de jogos a partir de uma permutação aleatória das equipas gerada pela função genérica

permuta :: [a] -¿ IO [a]

A presença do mónade de IO tem a ver com a geração de números aleatórios[9].

1. Defina a função monádica $permuta$ sabendo que tem já disponível

   $$getR :: [a] \rightarrow \mathsf{IO}\ (a, [a])$$

   $getR\ x$ dá como resultado um par (h, t) em que h é um elemento de x tirado à sorte e t é a lista sem esse elemento – mas esse par vem encapsulado dentro de IO.

2. A segunda parte do exercício consiste em definir a função monádica

   eliminatoria :: LTree Equipa -¿ Dist Equipa

   que, assumindo já disponível a função $jogo$ acima referida, dá como resultado a distribuição de equipas vencedoras do campeonato.

Sugestão: inspire-se na secção 4.10 (*'Monadification' of Haskell code made easy*) dos apontamentos [4].

Referências

[1] M. Erwig and S. Kollmansberger. Functional pearls: Probabilistic functional programming in Haskell. *J. Funct. Program.*, 16:21–34, January 2006.

[2] B.W. Kernighan and D.M. Richtie. *The C Programming Language*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1978.

[3] D.E. Knuth. *Literate Programming*. CSLI Lecture Notes Number 27. Stanford University Center for the Study of Language and Information, Stanford, CA, USA, 1992.

[4] J.N. Oliveira. *Program Design by Calculation*, 2008. Draft of textbook in preparation. viii+297 pages. Informatics Department, University of Minho.

[8] A função $envia$ não é importante para o processo; apenas se destina a simplificar a arquitectura monádica da solução.

[9] Quem estiver interessado em detalhes deverá consultar System.Random.

Anexos

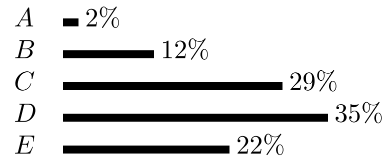
A Mónade para probabilidades e estatística

Mónades são functores com propriedades adicionais que nos permitem obter efeitos especiais em programação. Por exemplo, a biblioteca Probability oferece um mónade para abordar problemas de probabilidades. Nesta biblioteca, o conceito de distribuição estatística é captado pelo tipo

$$\textbf{newtype}\ \mathsf{Dist}\ a = D\ \{ unD :: [(a, ProbRep)] \} \qquad (1)$$

em que $ProbRep$ é um real de 0 a 1, equivalente a uma escala de 0 a 100%.

Cada par (a, p) numa distribuição $d :: \mathsf{Dist}\ a$ indica que a probabilidade de a é p, devendo ser garantida a propriedade de que todas as probabilidades de d somam 100%. Por exemplo, a seguinte distribuição de classificações por escalões de A a E,



será representada pela distribuição

$$\begin{array}{l} d1 :: \mathsf{Dist}\ Char \\ d1 = D\ [(\texttt{'A'}, 0.02), (\texttt{'B'}, 0.12), (\texttt{'C'}, 0.29), (\texttt{'D'}, 0.35), (\texttt{'E'}, 0.22)] \end{array}$$

que o GHCi mostrará assim:

```
'D'   35.0%
'C'   29.0%
'E'   22.0%
'B'   12.0%
'A'    2.0%
```

É possível definir geradores de distribuições, por exemplo distribuições *uniformes*,

$$d2 = uniform\ (words\ \texttt{"Uma frase de cinco palavras"})$$

isto é

```
     "Uma"  20.0%
   "cinco"  20.0%
      "de"  20.0%
   "frase"  20.0%
"palavras"  20.0%
```

distribuição *normais*, eg.

$$d3 = normal\ [10 \mathinner{..} 20]$$

etc.[10]

Dist forma um **mónade** cuja unidade é $return\ a = D\ [(a, 1)]$ e cuja composição de Kleisli é (simplificando a notação)

$$(f \bullet g)\ a = [(y, q * p) \mid (x, p) \leftarrow g\ a, (y, q) \leftarrow f\ x]$$

em que $g : A \rightarrow \mathsf{Dist}\ B$ e $f : B \rightarrow \mathsf{Dist}\ C$ são funções **monádicas** que representam *computações probabilísticas*.

Este mónade é adequado à resolução de problemas de *probabilidades e estatística* usando programação funcional, de forma elegante e como caso particular de programação monádica.

[10] Para mais detalhes ver o código fonte de Probability, que é uma adaptação da biblioteca PHP ("Probabilistic Functional Programming"). Para quem quiser souber mais recomenda-se a leitura do artigo [1].

B Definições auxiliares

São dadas: a função que simula jogos entre equipas,

$$
\begin{array}{l}
\mathbf{type}\ Equipa = String \\
jogo :: (Equipa, Equipa) \rightarrow \mathsf{Dist}\ Equipa \\
jogo\ (e_1, e_2) = D\ [(e_1, 1 - r1\ /\ (r1 + r2)), (e_2, 1 - r2\ /\ (r1 + r2))]\ \mathbf{where} \\
\quad r1 = rank\ e_1 \\
\quad r2 = rank\ e_2 \\
\quad rank = pap\ ranks \\
\quad ranks = [\\
\quad\quad (\texttt{"Arouca"}, 5), \\
\quad\quad (\texttt{"Belenenses"}, 3), \\
\quad\quad (\texttt{"Benfica"}, 1), \\
\quad\quad (\texttt{"Braga"}, 2), \\
\quad\quad (\texttt{"Chaves"}, 5), \\
\quad\quad (\texttt{"Feirense"}, 5), \\
\quad\quad (\texttt{"Guimaraes"}, 2), \\
\quad\quad (\texttt{"Maritimo"}, 3), \\
\quad\quad (\texttt{"Moreirense"}, 4), \\
\quad\quad (\texttt{"Nacional"}, 3), \\
\quad\quad (\texttt{"P.Ferreira"}, 3), \\
\quad\quad (\texttt{"Porto"}, 1), \\
\quad\quad (\texttt{"Rio Ave"}, 4), \\
\quad\quad (\texttt{"Setubal"}, 4), \\
\quad\quad (\texttt{"Sporting"}, 1), \\
\quad\quad (\texttt{"Estoril"}, 5)]
\end{array}
$$

a função (monádica) que parte uma lista numa cabeça e cauda *aleatórias*,

$$
\begin{array}{l}
getR :: [a] \rightarrow \mathsf{IO}\ (a, [a]) \\
getR\ x = \mathbf{do}\ \{ \\
\quad i \leftarrow getStdRandom\ (randomR\ (0, \mathsf{length}\ \ x - 1)); \\
\quad return\ (x\ !!\ i, retira\ i\ x) \\
\quad \}\ \mathbf{where}\ retira\ i\ x = take\ i\ x +\!\!+ drop\ (i + 1)\ x
\end{array}
$$

e algumas funções auxiliares de menor importância: uma que ordena listas com base num atributo (função que induz uma pré-ordem),

$$
\begin{array}{l}
presort :: (Ord\ a, Ord\ b) \Rightarrow (b \rightarrow a) \rightarrow [b] \rightarrow [b] \\
presort\ f = \mathsf{map}\ \ \pi_2 \cdot sort \cdot (\mathsf{map}\ \ (fork\ f\ id))
\end{array}
$$

e outra que converte "look-up tables"em funções (parciais):

$$
\begin{array}{l}
pap :: Eq\ a \Rightarrow [(a, t)] \rightarrow a \rightarrow t \\
pap\ m\ k = unJust\ (lookup\ k\ m)\ \mathbf{where}\ unJust\ (Just\ a) = a
\end{array}
$$

C Soluções propostas

Os alunos devem colocar neste anexo as suas soluções aos exercícios propostos, de acordo com o "layout" que se fornece. Não podem ser alterados os nomes das funções dadas, mas pode ser adicionado texto e / ou outras funções auxiliares que sejam necessárias.

Problema 1

$$
\begin{array}{l}
inv\ x\ n = \pi_2\ \$\ \mathsf{for}\ (invAccum\ x)\ (0, 0)\ n \\
\quad \mathbf{where}\ invAccum\ x\ (it, accum) = (it + 1, accum + (1 - x) ** it)
\end{array}
$$

A sua solução em C pode ser definida da seguinte forma:

```
\#include <math.h>

float inv(float x, int n){
    float accum = 0;
    for(int i = 0; i < n; i++){
        accum += pow(1 - x, i);
    }
    return accum;
}
```

Problema 2

-

wrapper :: [Int] -¿ Int wrapper = cataList (either (const 0) (uncurry (+)))

worker :: [Char] -¿ [Int] worker [] = [] worker [c] $\neg$ $(sep\ \ c) = [1]$ otherwise = [0] worker (c1:c2:cs) $\neg$ $(sep\ c1) \wedge sep\ (c2) = 1 : worker\ (c2 : cs)$ otherwise = 0 : worker (c2:cs)

-

$$
\begin{array}{l}
wc\_w\_final :: [Char] \rightarrow Int \\
wc\_w\_final = wrapper \cdot worker \\
wrapper = \pi_2 \\
worker :: [Char] \rightarrow (Bool, Int) \\
worker = cataList\ [\underline{(True, 0)}, wordAccum] \\
wordAccum :: (Char, (Bool, Int)) \rightarrow (Bool, Int) \\
wordAccum\ (a, (b, n)) \\
\quad \mid b \wedge (\neg \cdot sep)\ a = (sep\ a, \mathsf{succ}\ \ n) \\
\quad \mid otherwise = (sep\ a, n) \\
\quad \textbf{where}\ sep\ c = c \in \texttt{"\textbackslash t\textbackslash n "}
\end{array}
$$

Problema 3

Para gerar o gráfico basta correr este comando: dot -Tpng digraphG.dot -o diagrama.png

$$
\begin{array}{l}
inB\_tree :: () + (\mathsf{B\text{-}tree}\ a, [(a, \mathsf{B\text{-}tree}\ a)]) \rightarrow (\mathsf{B\text{-}tree}\ a) \\
inB\_tree = [\underline{Nil}, joinB\_trees] \\
joinB\_trees :: (\mathsf{B\text{-}tree}\ a, [(a, \mathsf{B\text{-}tree}\ a)]) \rightarrow \mathsf{B\text{-}tree}\ a \\
joinB\_trees\ (t1, ts) = Block\ \{leftmost = t1, block = ts\}
\end{array}
$$

Uma versão alternativa seria:

```
inB_tree :: Either () (B_tree a, [(a, B_tree a)]) -> B_tree a
inB_tree = either (const Nil) (uncurry Block)
```

$$
\begin{array}{l}
outB\_tree :: \mathsf{B\text{-}tree}\ a \rightarrow () + (\mathsf{B\text{-}tree}\ a, [(a, \mathsf{B\text{-}tree}\ a)]) \\
outB\_tree\ Nil = i_1\ () \\
outB\_tree\ (Block\ left\ block) = i_2\ (left, block)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
recB\_tree :: (b \rightarrow d) \rightarrow z + (b, [(a, b)]) \rightarrow z + (d, [(a, d)]) \\
recB\_tree\ f = id + (f \times (\mathsf{map}\ \ (id \times f)))
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
baseB\_tree :: (a1 \rightarrow b1) \rightarrow (a \rightarrow d) \rightarrow b + (a, [(a1, a)]) \rightarrow b + (d, [(b1, d)]) \\
baseB\_tree\ g\ f = id + (f \times (\mathsf{map}\ \ (g \times f)))
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
cataB\_tree :: (() + (d, [(a, d)]) \rightarrow d) \rightarrow \mathsf{B\text{-}tree}\ a \rightarrow d \\
cataB\_tree\ g = g \cdot (recB\_tree\ (cataB\_tree\ g)) \cdot outB\_tree
\end{array}
$$

$anaB\_tree :: (b \to () + (b, [(a, b)])) \to b \to \textsf{B-tree}\ a$
$anaB\_tree\ g = inB\_tree \cdot (recB\_tree\ (anaB\_tree\ g)) \cdot g$

$hyloB\_tree :: (() + (c, [(a, c)]) \to c) \to (b \to () + (b, [(a, b)])) \to b \to c$
$hyloB\_tree\ f\ g = cataB\_tree\ f \cdot anaB\_tree\ g$

$\mathbf{instance}\ Functor\ \textsf{B-tree}$
$\quad \mathbf{where}\ \textsf{fmap}\ f = cataB\_tree\ (inB\_tree \cdot baseB\_tree\ f\ id)$

-- esq meio dir
$inordB\_tree :: \textsf{B-tree}\ t \to [t]$
$inordB\_tree = cataB\_tree\ ordgene$

$ordgene = [\underline{[\,]}, join]$
$\quad \mathbf{where}\ join :: ([a], [(a, [a])]) \to [a]$
$\qquad join\ (xs, ys) = xs +\!\!+\ concat\ (\textsf{map}\ (\lambda(n, zs) \to (n : zs))\ ys)$

$largestBlock :: \textsf{B-tree}\ t \to Int$
$largestBlock = cataB\_tree\ [\underline{0}, size]$
$\quad \mathbf{where}\ size :: (Int, [(a, Int)]) \to Int$
$\qquad size\ (x, ys) = max\ x\ (\textsf{length}\ ys)$

$mirrorB\_tree :: \textsf{B-tree}\ a \to \textsf{B-tree}\ a$
$mirrorB\_tree = cataB\_tree\ (inB\_tree \cdot (id + (id \times reverse)))$

$dotB\_tree :: Show\ a \Rightarrow \textsf{B-tree}\ a \to \textsf{IO}\ ExitCode$
$dotB\_tree = dotpict \cdot bmap\ nothing\ (Just \cdot show) \cdot cB\_tree2Exp$

$cB\_tree2Exp :: \textsf{B-tree}\ a \to Exp\ [Char]\ [a]$
$cB\_tree2Exp = cataB\_tree\ [\underline{(Var\ \texttt{"nil"})}, connect]$

$connect :: (Exp\ v\ [a], [(a, Exp\ v\ [a])]) \to Exp\ v\ [a]$
$connect\ (x, xs) = Term\ (\textsf{map}\ \pi_1\ xs)\ (x : (\textsf{map}\ \pi_2\ xs))$

```
qSortB_tree :: Ord a => [a] -> [a]
qSortB_tree = hyloB_tree ordgene lsplitB_tree

lsplitB_tree :: [a] -> Either () ([a], [(a, [a])])
lsplitB_tree []  = i1 ()
lsplitB_tree [x] = i2 ([], (x, []))
lsplitB_tree (x:xs) =  undefined

qsep []    = Left ()
qsep (h:t) = Right (h,(s,l)) where (s,l) = part (<h) t

part:: (a -> Bool) -> [a] -> ([a], [a])
part p []                = ([],[])
part p (h:t) | p h       = let (s,l) = part p t in (h:s,l)
             | otherwise = let (s,l) = part p t in (s,h:l)
```

Problema 4

$(\!|\cdot\ \cdot|\!)_A :: (a \to 1 + (a, b)) \to (b \to 1 + a) \to a \to A$
$(\!|ga\ gb|\!)_A = inA \cdot (id + (\!|ga\ gb|\!)_A \times (\!|ga\ gb|\!)_B) \cdot ga$

$(\!|\cdot\ \cdot|\!)_B :: (a \to 1 + (a, b)) \to (b \to 1 + a) \to b \to B$
$(\!|ga\ gb|\!)_B = inB \cdot (id + (\!|ga\ gb|\!)_A) \cdot gb$

$$
\begin{array}{l}
generateAlgae :: Int \rightarrow Algae \\
generateAlgae = [\![ga\ gb]\!]_A \cdot \mathsf{succ} \\
\quad \textbf{where}\ ga\ 0 = i_1\ () \\
\qquad ga\ n = i_2\ (pred\ n, pred\ n) \\
\qquad gb\ 0 = i_1\ () \\
\qquad gb\ n = i_2\ (pred\ n)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
showAlgae :: Algae \rightarrow String \\
showAlgae = (\![ga\ gb]\!)_A \\
\quad \textbf{where}\ ga = [\underline{\texttt{"A"}}, \widehat{(+\!\!+)}] \\
\qquad gb = [\underline{\texttt{"B"}}, id]
\end{array}
$$

Problema 5

$$
\begin{array}{l}
permuta :: [a] \rightarrow \mathsf{IO}\ [a] \\
permuta\ [\,] = return\ [\,] \\
permuta\ input = \textbf{do} \\
\quad (x, xs) \leftarrow getR\ input \\
\quad permuted \leftarrow permuta\ xs \\
\quad return\ (x : permuted)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
eliminatoria :: \mathsf{LTree}\ Equipa \rightarrow \mathsf{Dist}\ Equipa \\
eliminatoria = cataLTree\ g \\
\quad \textbf{where}\ g :: Equipa + (\mathsf{Dist}\ Equipa, \mathsf{Dist}\ Equipa) \rightarrow \mathsf{Dist}\ Equipa \\
\qquad g = [return, distJogo] \\
\qquad distJogo :: (\mathsf{Dist}\ Equipa, \mathsf{Dist}\ Equipa) \rightarrow \mathsf{Dist}\ Equipa \\
\qquad distJogo\ (de1, de2) = \textbf{do} \\
\qquad\quad e_1 \leftarrow de1 \\
\qquad\quad e_2 \leftarrow de2 \\
\qquad\quad jogo\ (e_1, e_2)
\end{array}
$$

Índice