Grafos

UCE: Otimização da Cadeia de Abastecimento

Mestrado em Engenharia de Sistemas

José António Oliveira
http://dps.uminho.pt/pessoais/zan

Universidade do Minho - Escola de Engenharia
Departamento de Produção e Sistemas

Optimização (I)

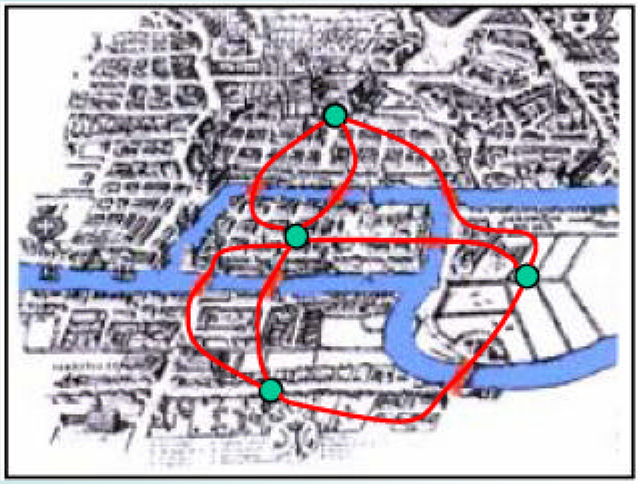
Introdução à teoria de grafos.

Introdução.
Grafos Não-Orientados.
Adjacência. Grau de um vértice.
Subgrafos.
- Subgrafo induzido por um conjunto de vértices.
- Subgrafo Induzido por um conjunto de arcos.

Grafos Completos. Complemento de um Grafo.
Caminhos e Circuitos.
Grafos ligados e Componentes.
Grafos Bipartidos. Grafos Bipartidos Completos.
Grafos Orientados.
- Caminhos, Cadeias, Circuitos e Ciclos.

Representação de Grafos.
- Matriz de Incidência Nodo-Arco. Grafos Não-Orientados. Grafos Orientados. Matriz de Adjacências. Estrela de Sucessores.

Optimização (I)



Optimização (I)

A Teoria de Grafos

Optimização (I)

- A Teoria de Grafos está directamente relacionada com a área de Investigação Operacional, Optimização Combinatória e Métodos Numéricos. Principalmente, estas áreas fornecem ferramentas fundamentais para a resolução de problemas que surgem tanto na indústria, nos serviços, como na ciência, tanto do ponto de vista teórico como do ponto de vista aplicado.

Optimização (I)

- Os grafos representam uma ferramenta muito poderosa para modelar uma grande variedade de problemas com aplicações em disciplinas diversas.

- Por exemplo, podem-se modelar com grafos problemas de:
- transporte;
- desenho de redes de comunicações;
- fluxos em redes;
- problemas de afectação de tarefas;
- controle do tráfego (layout de semáforos), etc.

Optimização (I)

- O grafos também se usam para representar as redes físicas, como circuitos eléctricos, rodovias, moléculas biológicas, etc., ou até mesmo interacções menos tangíveis como em ecossistemas, relações sociológicas, base de dados, controlo de fluxo de um programa de computação, etc.
- Em particular os grafos são ferramentas úteis para outras áreas da Ciência da Computação, tais como a Engenharia de Software, redes de informação, base de dados, o desenvolvimento de compiladores, etc.

Optimização (I)

- Por outro lado, a teoria de grafos está intimamente relacionada com vários ramos da Matemática como teoria de grupos, teoria de matrizes, análise numérica, probabilidades e combinatória.

Optimização (I)

- Alguns dos resultados da teoria de grafos facilitam a construção de algoritmos eficientes para resolver problemas comuns a vários das aplicações mencionadas, como os problemas de fluxo, caminho mais curto, partição do grafo, emparelhamento, entre outros.

Optimização (I)

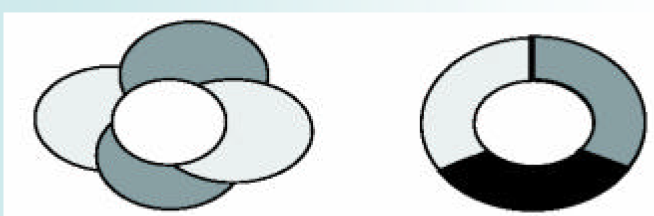
- Muitos outros problemas de grafos são NP-difíceis ou NP-completos, o que os torna computacionalmente "intratáveis" (a menos que P=NP).

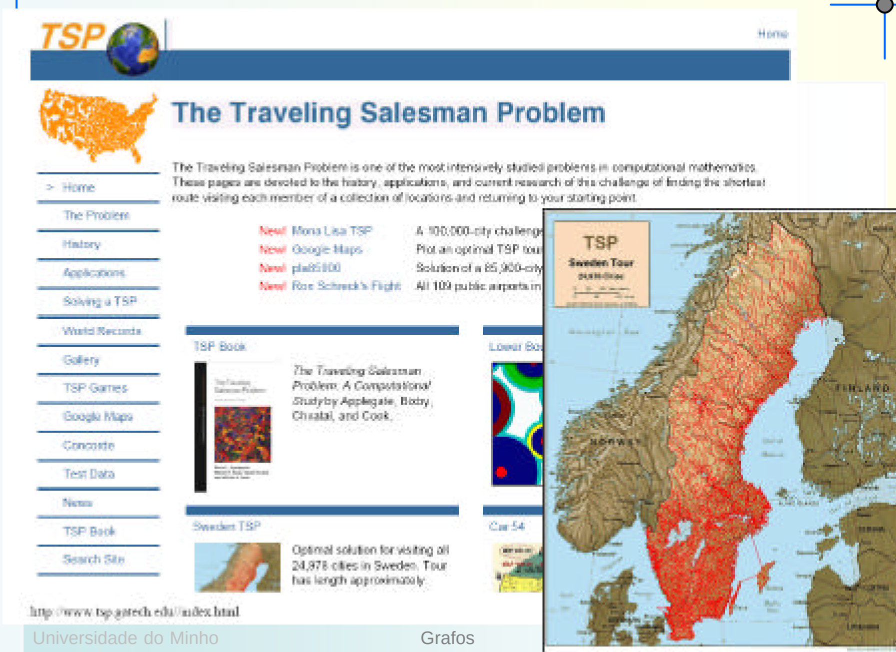
- Porém, estes problemas NP-difíceis podem ser resolvidos em tempo polinomial para muitas classes de grafos (i.e., grafos que satisfazem certas restrições) que aparecem na prática.

Optimização (I)

- O objectivo deste módulo é apresentar vários problemas de grafos que foram estudados e que são ainda estudados na actualidade.
- Serão apresentados algoritmos eficientes para resolver estes problemas ou será demonstrado que o mesmo é computacionalmente intratável.

Problema das quatro cores: pode-se pintar qualquer mapa com quatro cores sem que dois países que tenham como fronteira uma linha tenham a mesma cor?





Problema dos caminhos

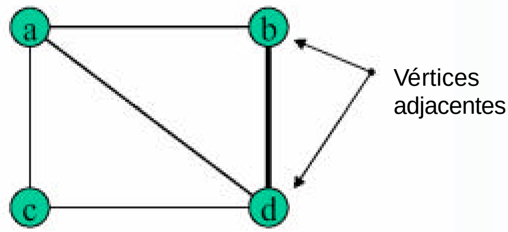
Definições

- Um grafo **G = (V,X)** é um par de conjuntos, onde **V** é um conjunto de vértices, pontos ou nodos e **X** é um subconjunto do conjunto de pares não ordenados de elementos distintos de **V** .
- Os elementos de **X** designam-se por arcos ou arestas.
- Dados **v, w** $\in$ **V**, se **e = (v, w)** $\in$ **X** diz-se que **v** e **w** são adjacentes e que **e** é incidente em **v** e em **w**.
- **Notação:** n= | V | q = | X |

Recursos na net

- Site antigo:
- http://oneweb.utc.edu/~Christopher-Mawata/petersen/
- Site actual
- http://www.mathcove.net/petersen/lessons/index

Grafo o grafo simples $G=(V,A)$

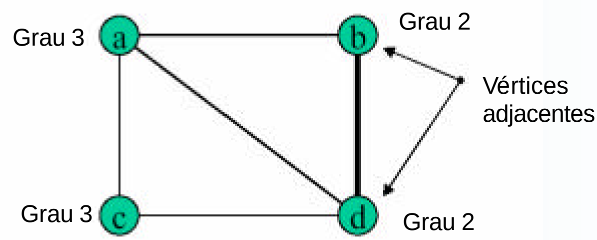


$V=\{a,b,c,d\}$ $A=\{ab,bd,cd,ac,ad\}$

- O **grau** de um nodo v é a quantidade de arcos incidentes em v.
- **Notação:** $d(v)$ = grau de v.
- **Teorema:** A soma dos graus dos vértices de um grafo é 2 vezes o número de arcos, ou seja:

$$\Sigma_{i=1,n}\ d\,(v_i) = 2\,q$$

Grafo o grafo simples G=(V,A)



$\Sigma_{i=1,n}$ d (vi) = 3+3+2+2=10 = 2*5

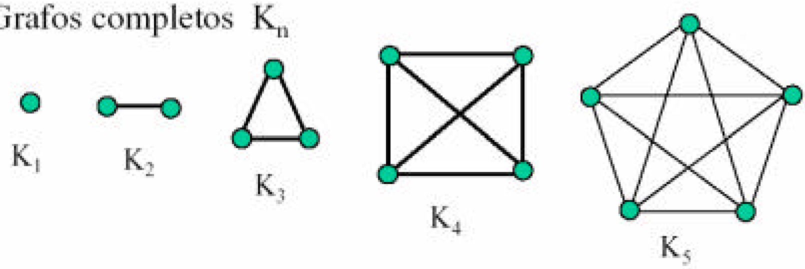
V={a,b,c,d} A={ab,bd,cd,ac,ad}

- Um grafo diz-se **completo** se todos os vértices são adjacentes entre si.

Notação: K_n grafo completo de n vértices.

Quantos arcos tem um grafo completo de n vértices?.

- Grafos completos K_n

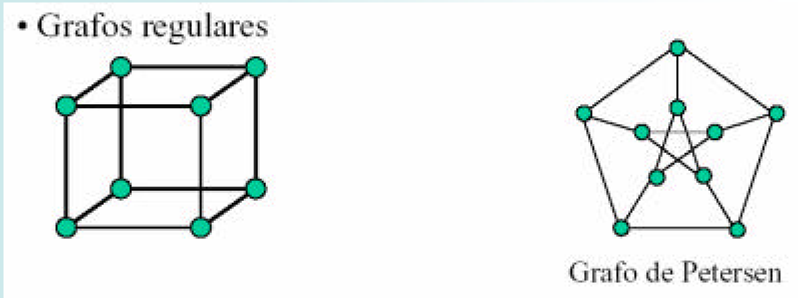


Σi=1,n d (vi) = 2 q

- O número de vértices de grau impar é sempre uma quantidade par.

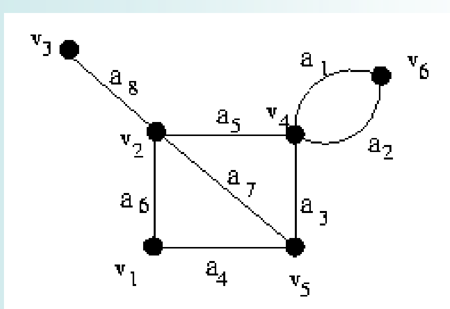
$$\sum_{v \in V} d(v) = \sum_{d(v)\,\text{impar}} d(v) + \sum_{d(v)\,\text{par}} d(v) = 2q$$

- Logo, o número de parcelas da soma dos impares tem de ser uma quantidade par

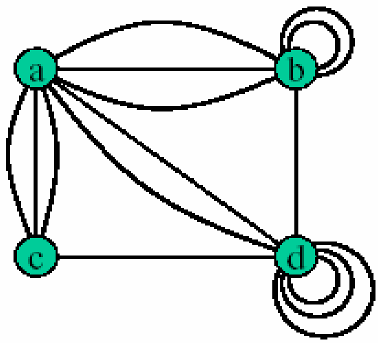


- Grafos regulares de grau 3

- Se um grafo admite mais do que uma aresta entre dois vértices diz-se **multigrafo**



- Se um grafo tem um arco que incide no mesmo vértice (anél) diz-se **pseudografo**



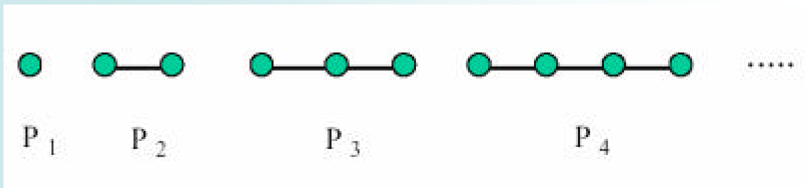
- Um **caminho** num grafo é uma sucessão de arcos

  $\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2 \ldots\ldots\ \mathbf{e}_k$

tal que um extremo de $\mathbf{e}_i$ coincide com um de $\mathbf{e}_{i-1}$ e o outro com um de $\mathbf{e}_{i+1}$.

Há outras formas de descrever um caminho…

- Um **caminho simples** é um caminho que não passa duas vezes pelo mesmo nodo.



- A **longitude** de um caminho é a quantidade de arcos que tem esse caminho.

- A **distância d(v,w)** entre dois nodos **v** e **w** de um grafo define-se como a longitude do caminho mais curto entre ambos.

Se não existe caminho entre **v** e **w** diz-se **d(v,w)** $=\infty$

Proposição: a função distância cumpre as seguintes propriedades para todo v, u y w pertencentes a V:

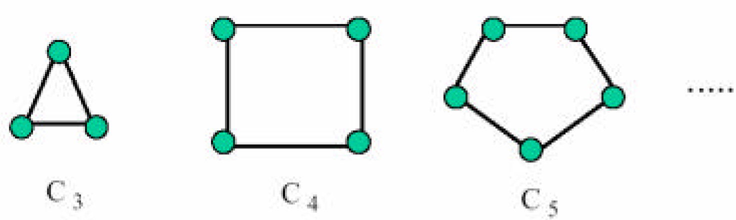
i) $d(u,v) \geq 0$, $d(u,v) = 0$ se e só se $u = v$

ii) $d(u,v) = d(v,u)$

iii) $d(u,w) \leq d(u,v) + d(v,w)$

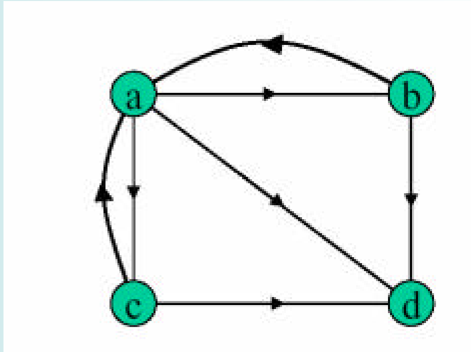
- Um **circuito** é um caminho que começa e termina no mesmo nodo.
- Um **circuito simples** é um circuito de 3 o mais nodos que não passa duas vezes pelo mesmo nodo.

• Ciclos C_n



Grafo Orientado

- Se os arcos têm um sentido, o **grafo** diz-se **orientado** ou **digrafo**



Grafo Orientado

- Um **grafo orientado ou digrafo G= (V,X)** é um par de conjuntos V e X, onde **V** é um conjunto de vértices ou nodos e **X** é um subconjunto do conjunto de pares **ordenados** de elementos distintos de **V** .

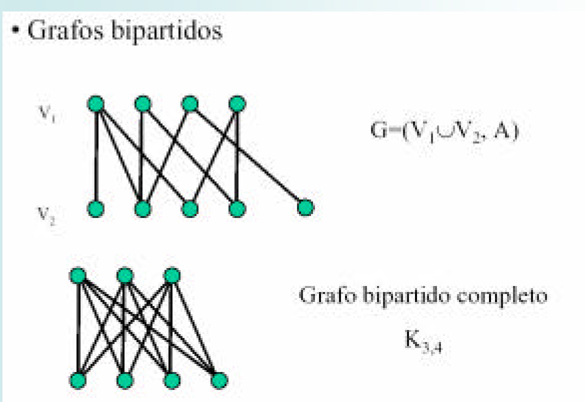
- O **grau de entrada d_{in}(v)** de um nodo de um grafo orientado é a quantidade de arcos que "chegam" a v, ou seja, a quantidade de arcos que têm a v como o seu segundo elemento.

- O **grau de saída d_{out}(v)** de um nodo de um grafo orientado é a quantidade de arcos que "saem" de v, ou seja, a quantidade de arcos que têm a v como seu primeiro elemento

Grafo Orientado

- Um **caminho orientado** num grafo orientado es uma sucessão de arcos e_1 e_2.......e_k tal que o **primeiro elemento** do par e_i coincide com **o segundo** de e_{i-1} e o **segundo elemento** de e_i com **o primeiro** de e_{i+1}.
- Uma **Cadeia** é um caminho orientado, onde pelo menos um dos arcos é percorrido em sentido contrário.
- Um **circuito orientado** num grafo orientado é um caminho orientado que começa e termina no mesmo nodo.
- Um **dígrafo** diz-se fortemente conexo se entre para qualquer par de nodos (v,u) há um caminho orientado de v a u.

Optimização (I)



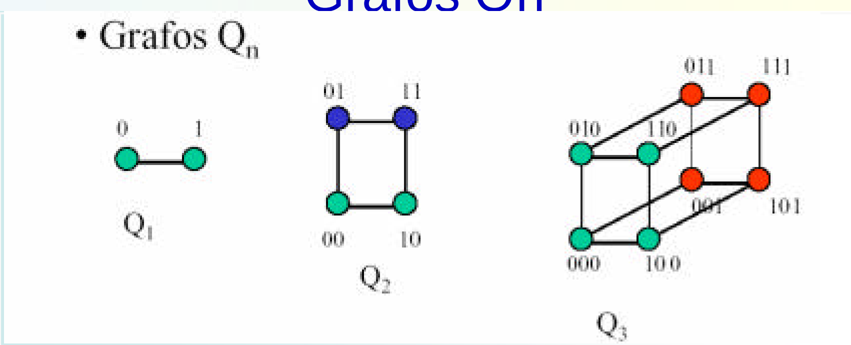
Un grafo $G = (V, X)$ é **bipartido** se existem dois subconjuntos V_1 e V_2 do conjunto de nodos V tal que:

$$V = V_1 \cup V_2 \;,\; V_1 \cap V_2 = \phi \;,\; V_1 \neq \phi \;\; V_2 \neq \phi$$

e tal que todos os arcos de G têm um extremo em V_1 e outro em V_2.

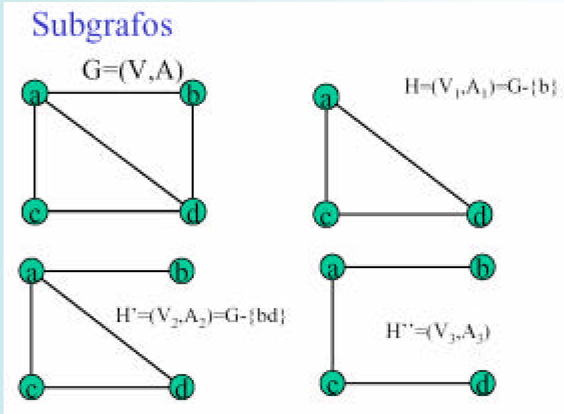
Um grafo G é bipartido se e só se todos os seus circuitos têm longitude par.

Grafos On



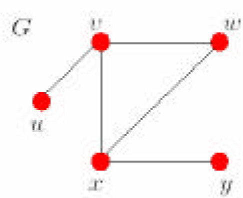
- Q_4 ?
- Vértices : Quartetos ordenados de 0 e 1's.
- Adjacência: Só diferem num só dígito.
- Q_n é n-regular, tem 2^n vértices e $n2^{n-1}$ arcos
- Q_n é bipartido

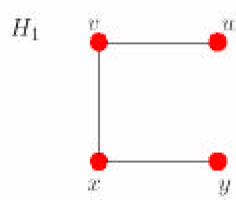
Subgrafos



Subgrafos

- Um grafo H é um subgrafo de um grafo G se $V_H \subseteq V_G$ e $E_H \subseteq E_G$.

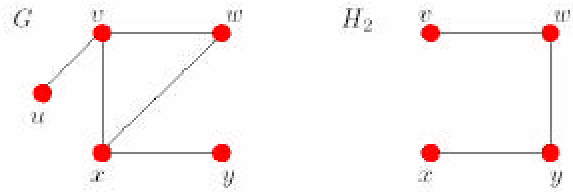




H_1 é subgrafo de G

Subgrafos

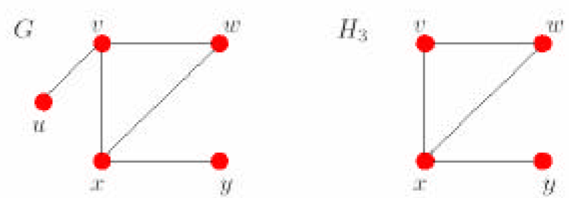
- Um grafo H é um subgrafo de um grafo G se $V_H \subseteq V_G$ e $E_H \subseteq E_G$.



H_2 não é subgrafo de G

Subgrafos

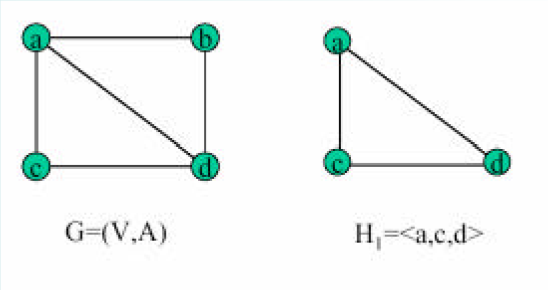
- Um grafo H é um subgrafo de um grafo G se $V_H \subseteq V_G$ e $E_H \subseteq E_G$.



H_3 é subgrafo de G

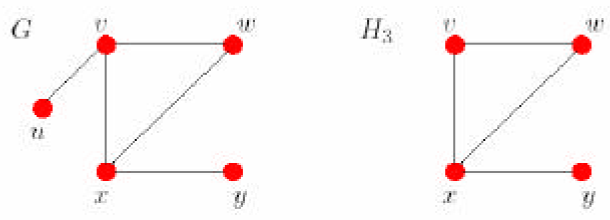
Subgrafos

- Subgrafos induzidos por vértices



Subgrafos

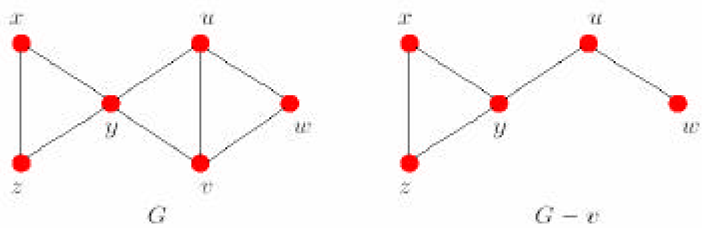
- Seja S um conjunto de vértices de um grafo G. O subgrafo induzido por S é o subgrafo maximal de G com conjunto de vértices S, denotado por $G[S]$.
- Um subgrafo H de um grafo G é um subgrafo vértice-induzido, ou subgrafo induzido, se $H = G[S]$ para algum subconjunto não vazio S de vértices de G.



H_3 é subgrafo induzido de $G (H_3 = G[\{v, w, x, y\}])$

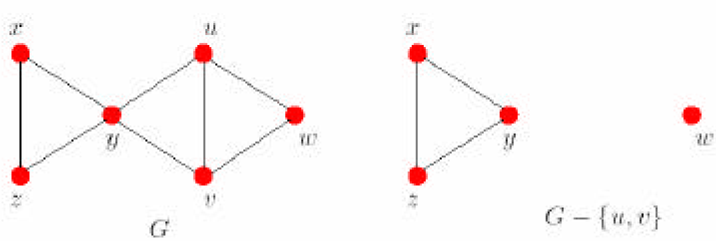
Subgrafos

- Seja G um grafo. A remoção de um subconjunto S de vértices de G é o subgrafo contendo os vértices de G que não estão em S e as arestas de G que não incidem em vértices de S. Este subgrafo é denotado por $G - S$ e $G - S = G[V_G - S]$.



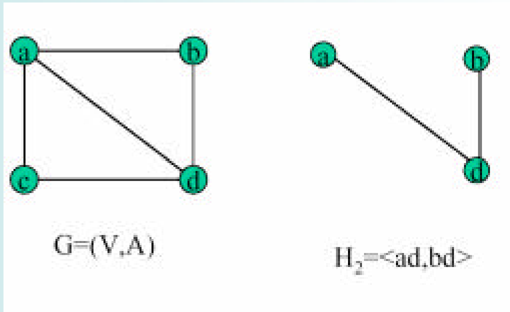
Subgrafos

- Seja G um grafo. A remoção de um subconjunto S de vértices de G é o subgrafo contendo os vértices de G que não estão em S e as arestas de G que não incidem em vértices de S. Este subgrafo é denotado por $G - S$ e $G - S = G[V_G - S]$.



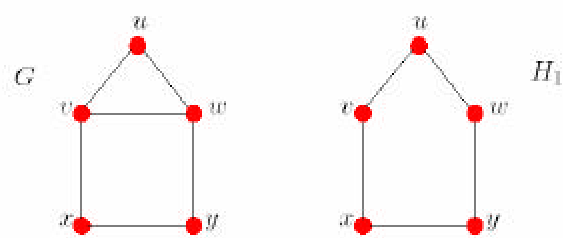
Subgrafos

- *Subgrafos induzidos por arcos*



Subgrafos

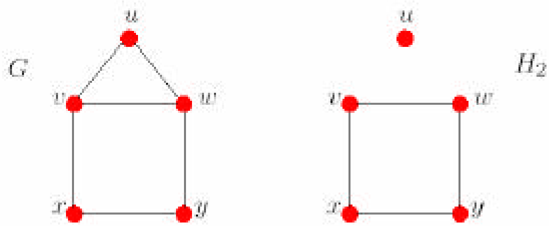
- Seja X um conjunto não vazio de arestas de um grafo G. O subgrafo induzido por X é o subgrafo minimal de G com conjunto de arestas X e é denotado por $G[X]$.
- Um subgrafo H de um grafo G é um subgrafo aresta-induzido se $H = G[X]$ para algum subconjunto não vazio X de arestas de G.



H_1 é subgrafo aresta-induzido de G

Subgrafos

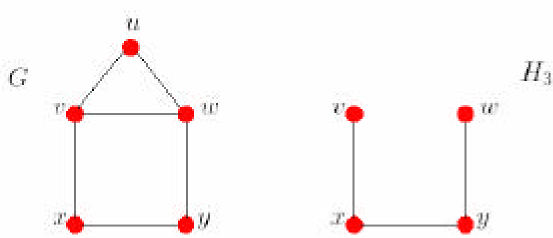
- Seja X um conjunto não vazio de arestas de um grafo G. O subgrafo induzido por X é o subgrafo minimal de G com conjunto de arestas X e é denotado por $G[X]$.
- Um subgrafo H de um grafo G é um subgrafo aresta-induzido se $H = G[X]$ para algum subconjunto não vazio X de arestas de G.



H_2 não é subgrafo aresta-induzido de G

Subgrafos

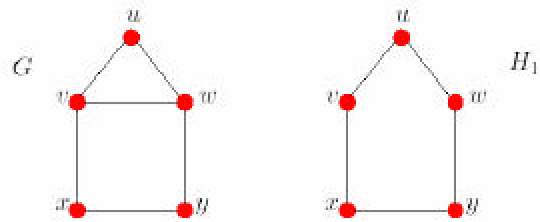
- Seja X um conjunto não vazio de arestas de um grafo G. O subgrafo induzido por X é o subgrafo minimal de G com conjunto de arestas X e é denotado por $G[X]$.
- Um subgrafo H de um grafo G é um subgrafo aresta-induzido se $H = G[X]$ para algum subconjunto não vazio X de arestas de G.



H_3 é subgrafo aresta-induzido de G

Subgrafos

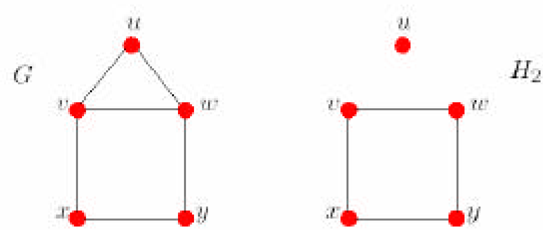
- Um subgrafo H de um grafo G é um subgrafo gerador de G se $V_H = V_G$.



H_1 é subgrafo gerador de G

Subgrafos

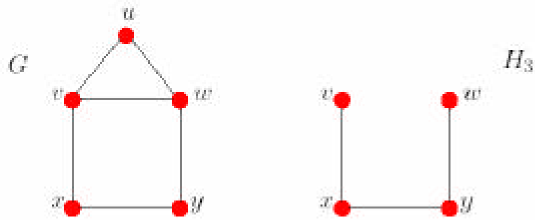
- Um subgrafo H de um grafo G é um subgrafo gerador de G se $V_H = V_G$.



H_2 é subgrafo gerador de G

Subgrafos

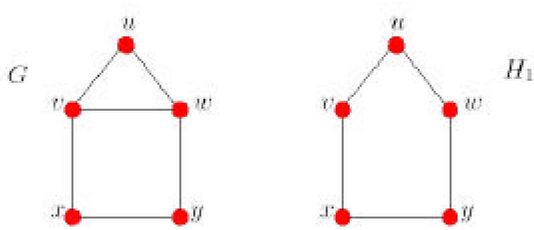
- Um subgrafo H de um grafo G é um subgrafo gerador de G se $V_H = V_G$.



H_3 não é subgrafo gerador de G

Subgrafos

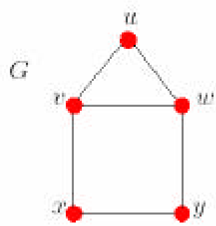
- Se X é um conjunto de arestas de um grafo G então $G - X$ é o subgrafo gerador de G obtido pela remoção de arestas em X de E_G.
- H é um subgrafo gerador de G se e somente se $H = G - X$, onde $X = E_G - E_H$.

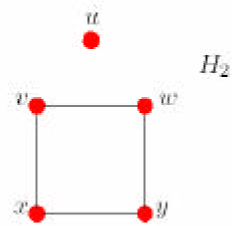


$H_1 = G - vw$

Subgrafos

- Se X é um conjunto de arestas de um grafo G então $G - X$ é o subgrafo gerador de G obtido pela remoção de arestas em X de E_G.
- H é um subgrafo gerador de G se e somente se $H = G - X$, onde $X = E_G - E_H$.

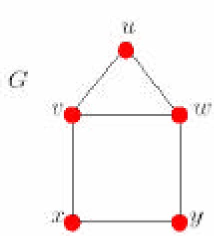


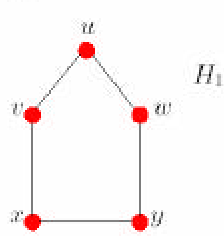


$$H_2 = G - \{uv, uw\}$$

Subgrafos

- Seja G um grafo tal que u_i, v_i são pares de vértices não adjacentes de G, com $i = 1, \ldots, n$. Então $G + \{u_1v_1, u_2v_2, \ldots, u_nv_n\}$ é o grafo obtido de G pela adição de arestas do conjunto $\{u_1v_1, u_2v_2, \ldots, u_nv_n\}$.

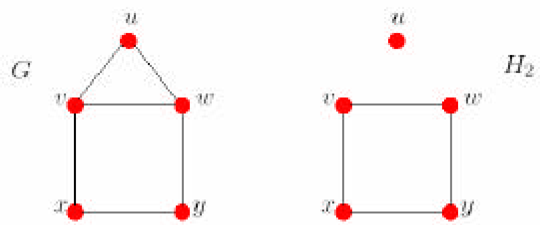




$$G = H_1 + vw$$

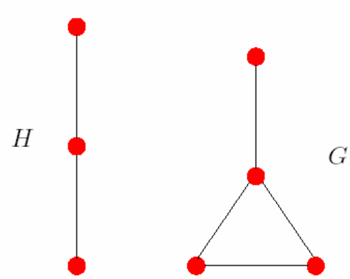
Subgrafos

- Seja G um grafo tal que u_i, v_i são pares de vértices não adjacentes de G, com $i = 1, \ldots, n$. Então $G + \{u_1v_1, u_2v_2, \ldots, u_nv_n\}$ é o grafo obtido de G pela adição de arestas do conjunto $\{u_1v_1, u_2v_2, \ldots, u_nv_n\}$.



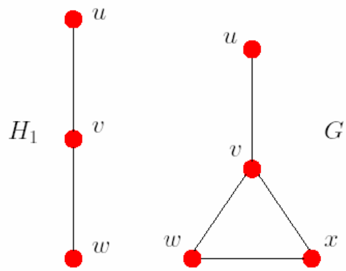
$$G = H_2 + \{uv, uw\}$$

Subgrafos



H é subgrafo de G???

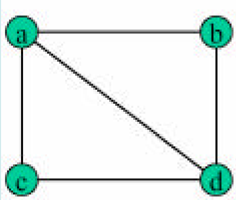
Subgrafos



H é um subgrafo (induzido) de G

Representação de Grafos

Matriz de Adjacência



G=(V,A)

V: a, b, c, d

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}$$

Matriz de G:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Representação de Grafos

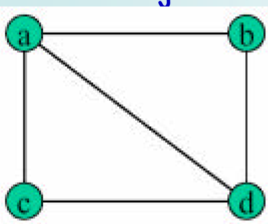
Matriz de Adjacência

$A \in R^{n \times n}$, onde os elementos a_{ij} de A definem-se como:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } G \text{ tem un arco entre } i \text{ e } j \\ 0 & \text{se não} \end{cases}$$

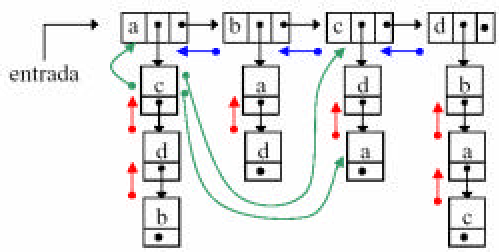
Representação de Grafos

Listas de Adjacência



Ordem em V: a, b, c, d

Listas: [[c,d,b],[a,d],[d,a],[b,a,c]]



Representação de Grafos

Matriz de Adjacência

$A \in R^{nxn}$, onde os elementos a_{ij} de A definem-se como:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } G \text{ tem un arco entre i e j} \\ 0 & \text{se não} \end{cases}$$

http://oneweb.utc.edu/~Christopher-Mawata/petersen/lesson7.htm

Representação de Grafos

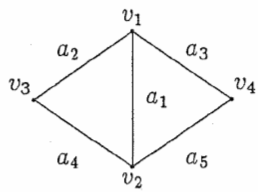
- Matriz de Incidência nodo-arco

$B \in R^{mxn}$, onde os elementos b_{ij} de B definem-se como:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o arco i é incidente no nodo j} \\ 0 & \text{se não} \end{cases}$$

Representação de Grafos

- Matriz de Incidência nodo-arco



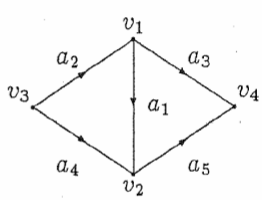
Grafo não-orientado

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}$$

Matriz de incidência nodo-arco

Representação de Grafos

- Matriz de Incidência nodo-arco



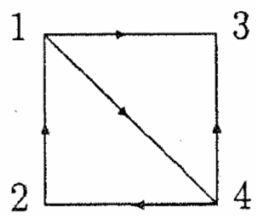
Grafo orientado

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}$$

Matriz de incidência nodo-arco

Representação de Grafos

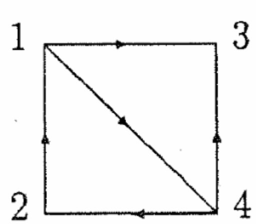
- Estrela de Sucessores



$A()$	1	3	4	4	6
$SUC()$	3	4	1	2	3

Representação de Grafos

- Estrela de Sucessores

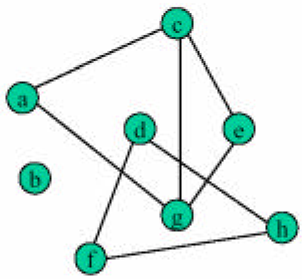


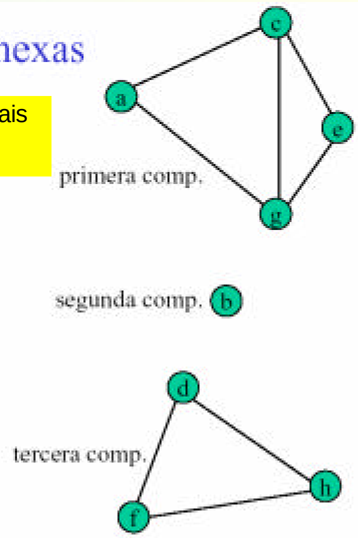
vértice	1	2	3	4	–
$A()$	1	3	4	4	6

arco	1	2	3	4	5
Origem	1	1	2	4	4
$SUC()$	3	4	1	2	3

Componentes conexas

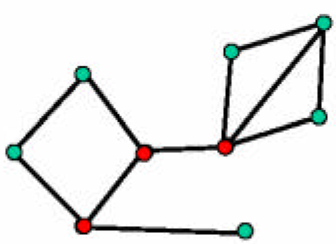
São os subgrafos conexos maximais





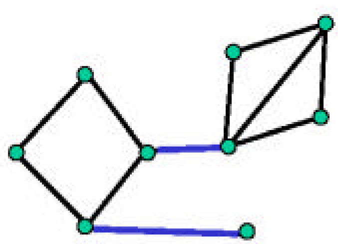
Optimização (I)

Vértices de corte



Um vértice u de G é vértice-corte se G – u tem mais componentes conexas do que G

Arcos de ponte



Uma ponte é uma aresta cuja remoção aumenta o número de componentes do grafo