

Cálculo 2

Relatório do produto educativo

Professora: Tatiane Evangelista

Alunos:

Nathan Abreu 221022696

Gabriel Augusto 221022533

22 de junho de 2024

Brasília - DF

Introdução

Este relatório foi elaborado para a disciplina de Cálculo 2, ministrada pela Professora Tati na Universidade de Brasília (UnB). A abordagem escolhida foi um jogo lúdico com o intuito de demonstrar o uso de Equações Diferenciais Ordinárias e suas aplicações no cotidiano, conforme estudado no primeiro semestre de 2024 na disciplina.

O tema escolhido foi a criação de gado, ambientado em uma fazenda fictícia denominada Fazenda Fibonacci, em homenagem ao matemático italiano e ao primeiro conteúdo estudado na disciplina (sequências). O personagem principal, representado pela Professora Tati, visita a fazenda do senhor Fibonacci e explora maneiras de ajudá-lo a economizar e investir na criação de gado, tudo utilizando conceitos matemáticos. Em seguida, é utilizada a fórmula de crescimento populacional para calcular a população em um tempo X.

$$P(t) = C \cdot e^{r \cdot t}$$

$P(t)$ é a população no tempo t .

C é a população inicial.

r é a taxa de crescimento.

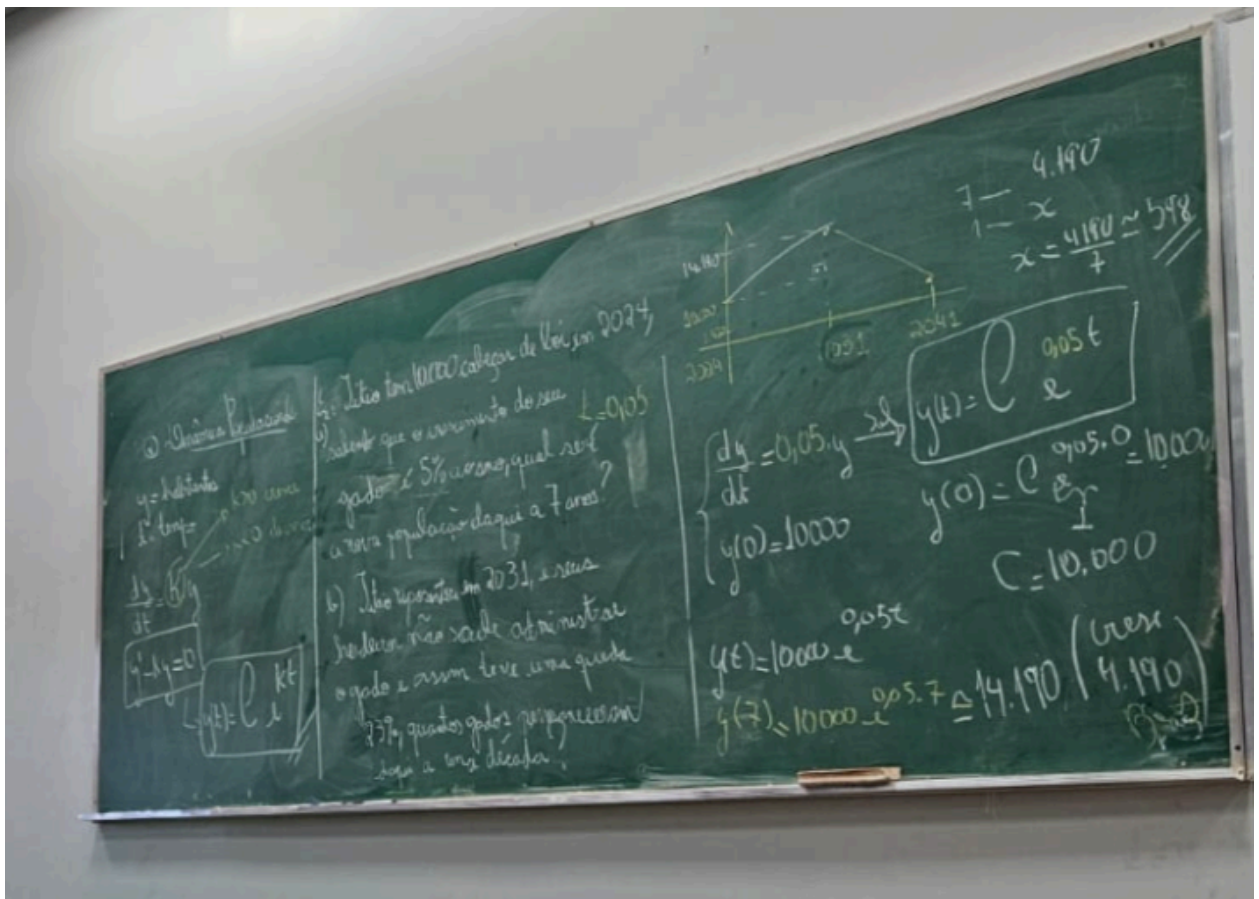
t é o tempo.



Desenvolvimento

Para o desenvolvimento do produto educacional, o tema Equações Diferenciais Ordinárias foi escolhido baseado em um exemplo dado pela professora na sala de aula.

Enunciado da questão: Júlio tem 1000 cabeças de boi em 2024, sabendo que o crescimento do seu gado é 5% ao ano, qual será a nova população daqui a 7 anos?



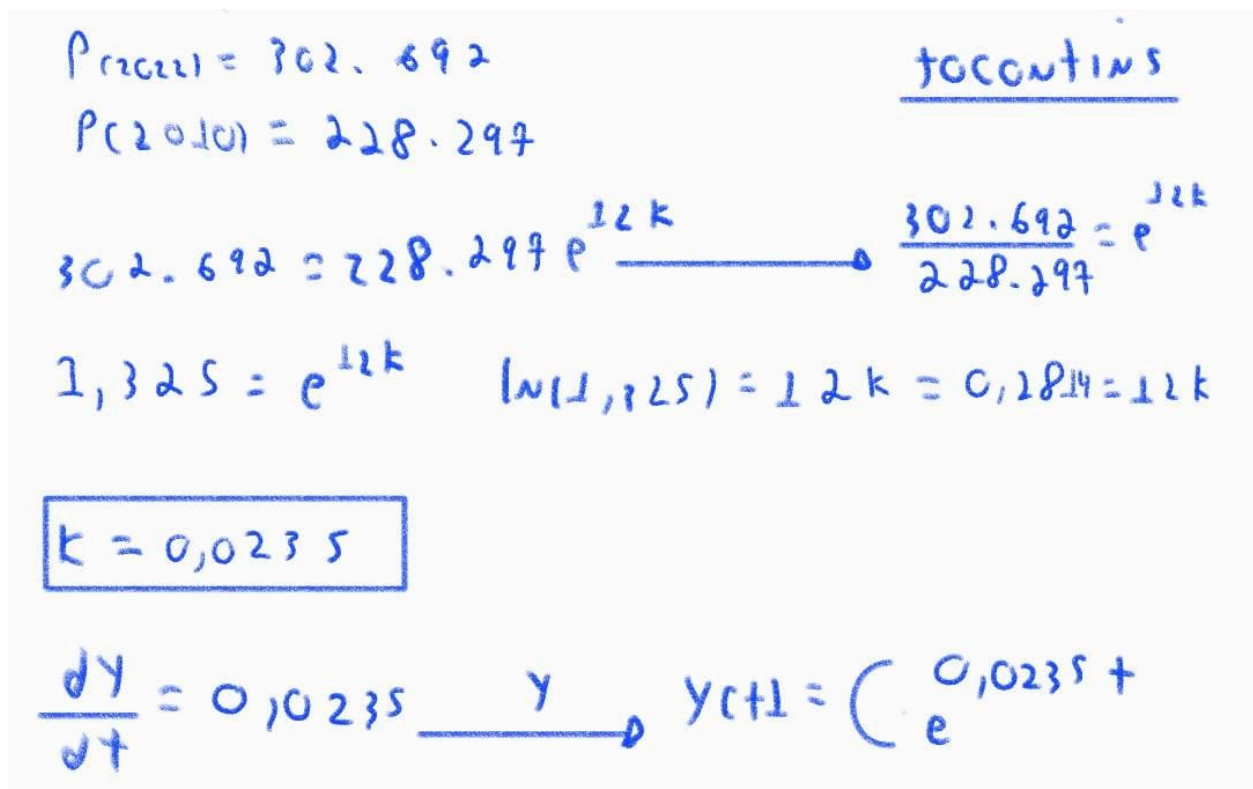
Na questão onde é utilizado o conceito de EDO, é necessário uma taxa da população em relação ao tempo, isso é dado pelo enunciado porém exposto na na equação já em decimal a seguir:

$$\frac{dy}{dt} = 0.05y$$

Com a taxa definida, é necessário apenas aplicar na fórmula de crescimento já apresentada, para chegar em uma aproximação de uma população em X tempo.

Taxa

Para encontrarmos a taxa no nosso projeto, utilizamos um outro exemplo em que a professora providenciou, para a realização do Desafio de Aplicação de EDO's, onde se encontra através da razão entre as populações dividido pelo tempo intervalo entre elas.



Handwritten calculations showing the derivation of the growth rate k :

$$P(2022) = 302.692$$

$$P(2010) = 228.297$$

tocontins

$$302.692 = 228.297 e^{12k} \longrightarrow \frac{302.692}{228.297} = e^{12k}$$

$$1,325 = e^{12k} \quad \ln(1,325) = 12k = 0,2814 = 12k$$

$$k = 0,0235$$

$$\frac{dy}{dt} = 0,0235 \cdot y \longrightarrow y(t+1) = e^{0,0235} \cdot y(t)$$

Questões

Para encontrar as variáveis, utilizamos algumas perguntas chaves para conseguir extrair do usuário todas as informações necessárias para a equação e salvar elas em uma variável para o cálculo:

1. Quantas cabeças de gado o senhor possui agora? (**cattleCount**)
2. Quantas cabeças de gado o senhor tinha a 1 ano atrás? (**oldCount**)
3. Quantas vacas o senhor gostaria de investir? (**investmentCount**)
4. Em quanto tempo gostaria de ver o retorno? (**timeCount**)

Equação

Com as variáveis encontradas, precisamos primeiro achar a razão entre *cattleCount* e *oldCount*, onde poderemos usar o logaritmo natural para encontrar a taxa e depois dividir pelo tempo intervalo de acordo com a fórmula Dy / Dt .

$$\frac{cattleCount}{oldCount} = e^{t \cdot r}$$

$$\frac{\ln \frac{cattleCount}{oldCount}}{t} = r$$

Primeiramente, precisamos usar logaritmo natural para isolar a taxa. Após isolarmos, dividimos em relação ao tempo T para acharmos a taxa final. Após isso, aplicamos a taxa na fórmula de crescimento populacional.

$$P(t) = C \cdot e^{r \cdot t}$$

Com a taxa definida, utilizamos agora uma outra variável C , para somarmos o investimento do usuário junto a atual população de gados, onde aplicamos a taxa nessa variável para estimarmos uma população variando de acordo com o tempo.

$$C = cattleCount + oldCount$$

Por fim, conseguimos estimar aproximadamente a população de gados com o investimento através das variáveis fornecidas e tomadas através do “input” do usuário na plataforma, visando facilitar o entendimento do conteúdo e de simplificar a equação para usos futuros, como por exemplo, criar um espaçamento maior no intervalo de tempo entre populações diferentes.

Exemplo:

- Número atual de gados (**cattleCount**) = 500;
- Quantidade de gado do ano passado (**oldCount**) = 400;
- Quantidade de gado adicionados por investimento (**investmentCount**) = 100;
- Tempo decorrido (**timeCount**) = 1 ano;

Primeiro, vamos calcular a razão entre a população atual e a população ano passado para a variável “**razão**”:

$$\text{razão} = \frac{\text{cattleCount}}{\text{oldCount}}$$
$$\text{razão} = \frac{500}{400} = 1.25$$

Em seguida, calcularemos a taxa de crescimento populacional estimada “**rateCount**”, dividindo pelo “**timeCount**” do usuário, que é 1:

$$\text{rateCount} = \ln(\text{razão})$$
$$\text{rateCount} = \frac{\ln(1.25)}{1} = 0.2231$$

Agora, a quantidade da nossa constante **C** que será a população total:

$$C = \text{cattleCount} + \text{investmentCount}$$
$$C = 500 + 100$$
$$C = 600$$

Por fim, aplicamos na equação para a população futura após 1 ano ‘**Pt**’:

$$P_t = C \cdot e^{\text{rateCount} \cdot \text{timeCount}}$$
$$P_1 = 600 \cdot e^{0.2231 \cdot 1}$$
$$P_1 = 600 \cdot e^{0.2231}$$
$$P_1 = 600 \cdot 1.2506$$
$$P_1 = 750.36$$



Nesse exemplo, é possível ver como a equação é utilizada passo a passo para conseguir chegar em um valor aproximado de acordo com a interação do jogador na plataforma.

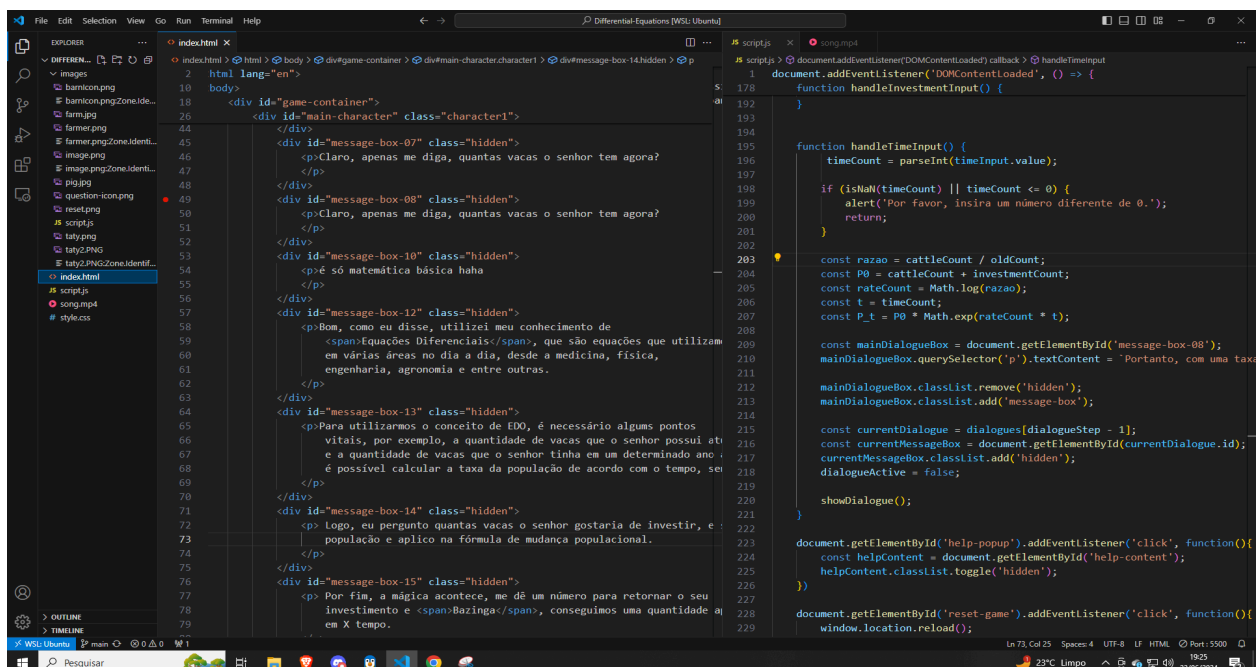
Explicação

Para explicar ao usuário como foi encontrada a quantidade de vacas em X tempo, precisamos encontrar uma maneira mais simplificada de fazê-lo. Por isso, foi elaborado um pequeno texto explicando os pontos vitais necessários para realizar a equação.



Plataforma e ferramentas

Para o desenvolvimento do jogo, foi utilizado as linguagens e frameworks para desenvolvimento web, como Javascript, HTML e CSS. O jogo possui mecânicas de movimentação, assim como trilha sonora e interação entre os personagens. Foi adicionado uma ferramenta de auxílio e guia para aqueles que tiverem dificuldades de como jogá-lo.



A equação em Javascript fica expressa da seguinte maneira:

```
const razao = cattleCount / oldCount;  
const C = cattleCount + investmentCount;  
const rateCount = Math.log(razao) / timeCount;  
const t = timeCount;  
const P_t = C * Math.exp(rateCount * t);
```

Conclusão

Por fim, o produto educacional desenvolvido cumpre os requisitos de um jogo lúdico, onde o usuário consegue interagir e aprender sobre equações diferenciais, que são utilizadas em várias áreas do mundo moderno para diversos propósitos. Através desta ferramenta, conseguimos proporcionar uma experiência de aprendizado dinâmica e envolvente, que não só facilita a compreensão dos conceitos teóricos, mas também permite a aplicação prática dos mesmos de maneira intuitiva e divertida. Assim, acreditamos que esta abordagem inovadora pode contribuir significativamente para o ensino e a aprendizagem das equações diferenciais, tornando-as mais acessíveis e interessantes para os estudantes.

Links

link do jogo: <https://fibofarm.pages.dev/>

link do vídeo explicativo: <https://www.youtube.com/watch?v=mNnIFSpMRXc>

link do git com o jogo: <https://github.com/nateejpg/Differential-Equations>