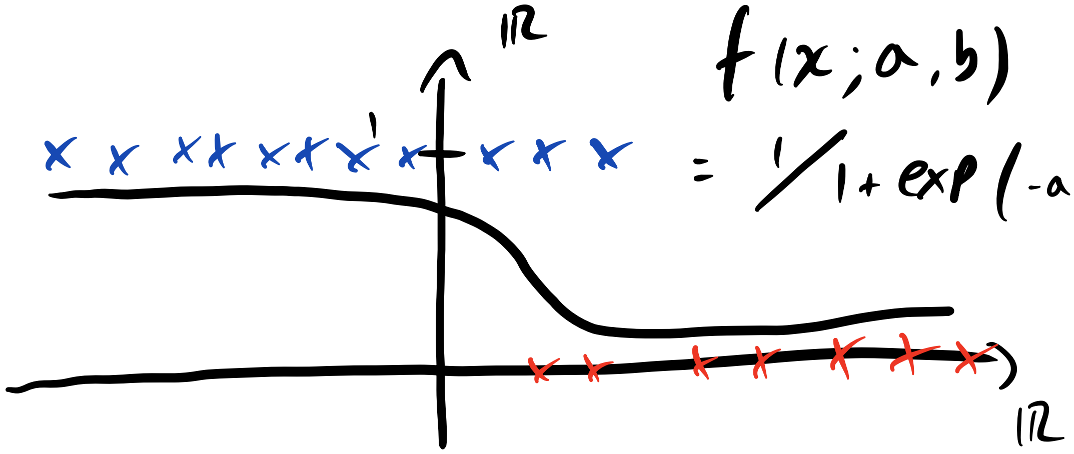
Regresión logística.

$$(x_1, y_1) \cdots (x_N, y_N)$$

$$x_n \in \mathbb{R}$$

$$y_n \in \{0, 1\}$$



$$f(x; a, b) = 1/1+\exp(-a-bx)$$

¿Cómo encontramos los parámetros a y b?

$$\mathcal{E}(a,b) = -\frac{1}{N}\left(\sum y_i \log(f(x_i)) + (1-y_i)\log(1-f(x_i))\right)$$

1. ¿qué pasa si estamos en lo correcto? $\mathcal{E}(a,b) \searrow 0$

$$y_i = 1 \quad , \quad f(x_i) \approx 1$$

$f(x_i) \approx 1$

$\to 0$

$$\mathcal{E}(a,b) = -\frac{1}{N}\left(\sum \cancel{y_i \log}(f(x_i)) + \cancel{(1-y_i)\log}(1-f(x_i))\right)$$

$y_i = 1$

$\to 0$

$y_i = 0$ y $f(x_i) \approx 0$

$y_i = 0 \rightarrow 0$

$$\mathcal{E}(a,b) = -\frac{1}{N}\Big(\sum y_i \cancel{\log(f(x_i))}$$

$1 - f(x_i) \approx 1 \rightarrow 0$

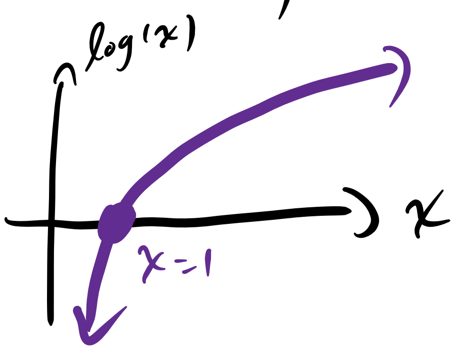
$$+ (1-y_i)\cancel{\log(1-f(x_i))}\Big)$$

2. ¿Qué pasa si nos equivocamos? $\mathcal{E}(a,b) \nearrow \infty$

$y_i = 1$ y $f(x_i) \approx 0$

$\rightarrow -\infty$

$$\mathcal{E}(a,b) = -\frac{1}{N}\Big(\sum y_i \cancel{\log(f(x_i))}$$



$y_i = 1 \rightarrow 0$

$$+ \cancel{(1-y_i)}\log(1-f(x_i))\Big)$$

$$y_i = 0 \quad y \quad f(x_i) \approx 1$$

$$\mathcal{E}(a,b) = -\frac{1}{N}\Big(\sum \cancel{y_i \log(f(x_i))}^{\,y_i=0 \;\to\; 0} + \cancel{(1-y_i)\log(\underbrace{1-f(x_i)}_{\approx 0})}^{\,\to\, -\infty}\Big)$$

Tarea:

1. ¿Cuál es el gradiente de $\mathcal{E}(a,b)$ respecto a los parámetros a y b?

2. ¿Qué pasa si tomamos $f(\vec{x};\vec{w}) = 1/(1+\exp(-\vec{w}^T\vec{x}-w_0))$? ¿Cómo luce el gradiente $\nabla_{\vec{w}}\,\mathcal{E}(\vec{w})$ en este caso?