



UERJ - UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO  
IME - INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
CComp - Programa de Pós-Graduação em Ciências Computacionais  
IME02701 Álgebra Linear: Aspectos Teóricos e Computacionais  
Prof.<sup>a</sup> Cristiane Oliveira de Faria

*Relatório nº 2 - Separação cega de fontes aplicada a dinâmica das estruturas*

*Aluno: Nathalia de Almeida Castelo Branco*  
e-mail: nathaliaacbranco@gmail.com

*12 de junho de 2021*

## Resumo

Separação de sinais sem que tenhamos conhecimento de como os mesmos foram misturados faz parte do nosso dia a dia, visto que nosso cérebro faz esta separação sem o menor esforço. No entanto, para as máquinas, este ainda é um problema complexo. Este trabalho tem como objetivo fazer um breve estudo e aplicação da separação cega de sinais à dinâmica das estruturas, visto que o tema de pesquisa do autor provém desta área. Os conceitos de separação de sinais são descritos de maneira breve e mais simplificada possível, mesmo partindo de conceitos complexos. Sobre dinâmica das estruturas, o autor optou por desenvolver a teoria em conjunto com a resolução do problema proposto pelo mesmo. Os sinais provenientes da solução do problema em dinâmica das estruturas são misturados e depois separados, sem que se tenha conhecimento de como foi feita a mistura, através da aplicação do algoritmo FastICA, que utiliza autovalores e autovetores como pré-processamento dos sinais misturados. Após a aplicação deste algoritmo, os sinais foram separados com êxito.

## 1 Introdução

Na engenharia civil, os carregamentos estáticos (não variam no tempo) são amplamente abordados e adotados como únicos durante muitos cursos de graduação. No entanto, toda estrutura é submetida a carregamentos dinâmicos (que variam com o tempo) como caminhar de pessoas, motor de máquinas, vento, terremotos, saltos, entre outras situações. Estes carregamentos geram sinais que são chamados de vibrações e estes sinais possuem grande importância no dimensionamento de estruturas de todos os portes, além disso, possuem grande influência no conforto dos usuários desta estrutura.

Este trabalho tem como objetivo a separação de sinais sem que se tenha conhecimento das suas fontes. A separação cega de fontes é utilizada com naturalidade por nossos cérebros, no entanto, para as máquinas essa ainda não é uma tarefa corriqueira.

Para isso, de maneira a ilustrar uma situação de separação de sinais aplicada a engenharia de estruturas, o autor trás um problema clássico de dinâmica das estruturas visando o desenvolvimento desta metodologia que utilizamos diariamente sem termos conhecimento.

O objetivo deste trabalho é apresentar o método de Separação Cega de Fontes (Blind Source Separation) através do uso do algoritmo FastICA aplicado a um problema de dinâmica das estruturas. O autor friza que esta aplicação não possui objetivo prático, apenas uma sugestão de verificação e aplicação do método desenvolvida pelo mesmo que pode ser facilmente entendida por alunos dos cursos de engenharia e de matemática ou computação.

Na seção 1, é realizada uma breve introdução do tópico assim como o objetivo do trabalho. Na seção 2, o método de separação de sinais utilizado neste estudo é introduzido e descrito. Na seção 3, o problema de dinâmica das estruturas escolhido é desenvolvido. Na seção 4, aplica-se a separação cega de sinais nos resultados obtidos na seção 3 e finalmente a conclusão do estudo é exposta.

## 2 Separação cega de fontes (BSS)

Quando pensamos em sinais, um dos principais problemas relacionados consiste na recuperação de sinais de interesse, como por exemplo, a identificação de uma voz específica em um ambiente onde muitas pessoas estão conversando ao mesmo tempo. Esta recuperação de maneira clássica é feita tendo conhecimento prévio dos sinais e de como ocorre a mistura de diversas vozes. No entanto, essa metodologia torna necessário que os sinais tenham espectros de resposta distintos [1].

Além de diversas limitações quanto ao conhecimento das características das fontes emissoras dos sinais, temos também restrição da existência de sinais de espectros diferentes. Visando contornar este problema, um dos principais temas de estudo na área de processamento de sinais é a separação destes sinais misturados sem que exista conhecimento das fontes ou de como foi feita a mistura, este processo é chamado de Separação Cega de Fontes (ou em inglês, Blind Source Separation - BSS). As aplicações deste processo não se restringem apenas a áudios, também sendo utilizadas a processamento de sinais biomédicos e de telecomunicações [2].

### 2.1 Definição do problema

Considerado um conjunto de sinais fontes submetidos a ação de um misturador, onde a saída consiste em uma mistura dos sinais fontes, temos o problema central da separação cega de sinais. Pouco ou nada se sabe sobre como os sinais são misturados ou outras características dos sinais, desta afirmação provém o nome de "cega", pela pouca ou nenhuma informação sobre as misturas ou fontes [2].

A situação clássica utilizada para demonstrar o funcionamento deste processamento de sinais é chamada de problema do *cocktail party*. Considere um ambiente fechado onde duas pessoas conversam e existem sensores (os microfones) captando suas vozes, conforme Fig. (1). O problema consiste em separar estes sinais captados tendo conhecimento que estes agora estão misturados [1].

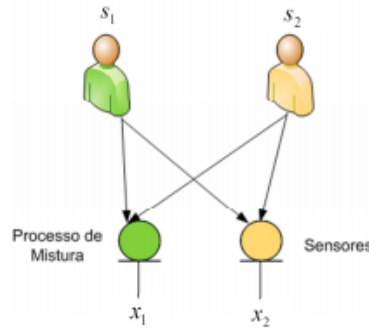


Figura 1: O problema clássico do *cocktail party* [1]

A representação matemática deste problema é dada por:

$$x = A \cdot s \quad (1)$$

Onde  $A$  representa a matriz de mistura,  $s$  o vetor dos sinais e  $x$  o vetor das misturas ou os sensores. E de forma matricial, possui a seguinte estrutura para o problema da Fig. (1):

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Observando este problema, se a matriz de mistura  $A$  fosse conhecida poderíamos resolvê-lo através de métodos clássicos de resolução de sistemas lineares, no entanto, esta matriz não é conhecida. Uma maneira de resolução deste problema é considerar que os componentes dos vetor  $s$  são estatisticamente independentes. Esta técnica é conhecida como Análise de Componentes Independentes (em inglês, Independent Component Analysis - ICA) que permite recuperar ou estimar os sinais originais através das suas misturas obtidas no vetor  $x$  [1]. A Fig. (2) demonstra como esse processo é feito.

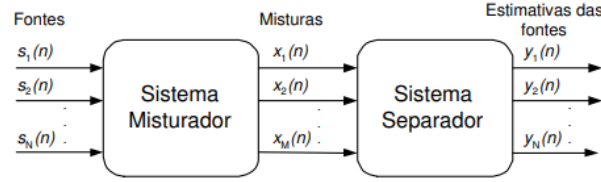


Figura 2: Modelo do problema de separação cega de fontes [2]

## 2.2 Conceitos básicos

Alguns conceitos são essenciais para o correto entendimento do processo de aplicação da ICA para separação cega de fontes. É importante mencionar que a ICA é apenas um método utilizado para resolução de um problema de BSS, embora sejam confundidos como se fossem equivalentes [2].

### 2.2.1 Estatística

O método de separação de sinais deste estudo consiste em recuperar os sinais originais tendo apenas uma mistura dos mesmos, sendo um princípio utilizado para determinar as misturas a **independência estatística**, ou seja, o valor de qualquer um dos componentes não fornece informação sobre os demais [1]. A ICA está diretamente relacionada a função densidade de probabilidade (*fdp*), a seus momentos e a outros conceitos estatísticos.

Os momentos são utilizados para determinar o quão relacionados os vetores estão e quão dependente são uns dos outros. O primeiro momento representa um valor médio do sinal; o momento central representa o comportamento da distribuição em relação ao seu valor médio; o segundo momento representa a variância, valor utilizado para entender como a *fdp* está "espalhada"; o terceiro momento verifica a assimetria da distribuição e o quarto momento verifica o achatamento da *fdp* através da curtose, que relaciona o quarto e o segundo momentos de uma função de densidade de probabilidade [1].

### 2.2.2 Branqueamento

A ICA utiliza estatística de ordem superior como medida de redundância das misturas. Outros métodos como o PCA (Análise de componentes principais) utiliza estatística de segunda ordem, o que faz que alguns dados sejam perdidos na recuperação dos sinais [1].

Utiliza-se então um processo conhecido como branqueamento para estimar as fontes. Este é utilizado como pré-processamento da mistura e influencia na obtenção final dos sinais. Aqui retornam os conceitos estatísticos, pois se duas variáveis aleatórias são independentes, isto implica que as mesmas estão descorrelacionadas, porém o inverso não é verdadeiro. Se duas variáveis são descorrelacionadas e possuem variância igual a 1, estas são então chamadas de brancas, sendo a matriz de covariância igual à matriz identidade [1].

A obtenção destas variáveis brancas [1] pode ser feita a partir do seguinte passo:

1. Matriz de covariância igual à matriz identidade

$$Ezz' = I$$

2. Transformação linear

$$z = V \cdot x$$

3. Branqueamento de  $x$  (vetor das misturas) pela matriz  $V$

$$V = E \cdot D^{-\frac{1}{2}} \cdot E^T$$

onde,  $E$  é uma matriz ortogonal cujas colunas são **autovetores** de  $Exx^T$  e  $D$  é uma matriz diagonal com os **autovalores** correspondentes.

$$Exx^T = E \cdot D \cdot E^T$$

4. Obtenção da uma nova matriz  $\hat{A}$

Sabendo que  $x = A \cdot s$ , após o branqueamento obtemos a seguinte relação:

$$z = V \cdot A \cdot s = \hat{A} \cdot s$$

5. Transformação ortogonal de  $z$

$$y = U \cdot z$$

Onde verifica-se que  $y$  (sinais finais estimados) também é branco conforme expressão abaixo:

$$Eyy^T = EUzz^TU^T = UIU^T = I$$

A partir disto, verifica-se que o branqueamento é apenas um pré processamento dos sinais para a ICA, pois ele não é suficiente para estimar as fontes, fornecendo apenas uma transformação ortogonal do vetor  $s$ .

### 2.2.3 Distribuições Gaussianas e outros conceitos

Uma distribuição gaussiana ou normal de probabilidades apresenta o formato conforme a Fig. (3) e é possível observar que o aumento da variância faz com que a altura da *fdp* diminua.

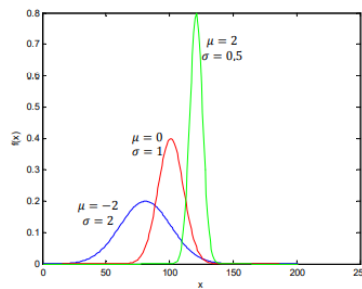


Figura 3: Exemplos de distribuições gaussianas [1]

O conceito de entropia está relacionado à obtenção de informações de variáveis aleatórias e é definida como sua medida de incerteza. A nengetropia é baseada na entropia e é conhecida como uma medida de não-gaussianidade, ou seja, o quanto uma distribuição de uma determinada variável aleatória não se parece com uma gaussiana [1]. Os algoritmos de separação de sinais que utilizam a nengetropia tem como requisito o branqueamento das misturas antes do processo de separação, tópico discutido anteriormente.

A definição destes conceitos é importante devido ao critério utilizado no algoritmo que será apresentado a seguir, que consiste em maximizar a não-gaussianidade.

## 2.3 Algoritmo FastICA

Conhecida algumas características relacionadas à análise de componentes independentes, nesta seção serão descritos o algoritmo escolhido para este estudo e suas principais características.

O FastICA foi desenvolvido objetivando maximizar a não-gaussianidade das misturas, ou seja, tornar as densidades de probabilidades de cada uma das estimativas mais distantes possíveis de uma variável gaussiana. Este processo está relacionado ao teorema central do limite que estabelece que a soma de um conjunto de variáveis aleatórias resulta em uma variável mais próxima da gaussianidade do que qualquer uma presente neste conjunto. Logo, é de se esperar que as misturas possuam distribuições mais próximas das gaussianas se comparadas com as fontes [2].

A matriz de separação  $\mathbf{W}$  baseia-se na recuperação da não-gaussianidade das estimativas das fontes relacionando diretamente o conceito de curtose, visto que a variável gaussiana é uma das poucas exceções que possui a curtose nula [2].

Considerando a recuperação de uma fonte a partir da matriz de separação  $\mathbf{W}$ , que possui o seguinte formato  $y_i = \mathbf{w}_i^T \cdot x$ , onde  $y_i$  é a estimativa da fonte,  $\mathbf{w}_i$  é uma linha da matriz de separação e  $x$  é o vetor de mistura. A partir destes dados, deve-se considerar a maximização da nengetropia aproximada para a maximização da não-gaussianidade. Isso nos leva a um problema de otimização[1], conforme expressão abaixo:

$$\tilde{\mathbf{w}}_i = \underset{\tilde{\mathbf{w}}_i}{\operatorname{argmax}} (E \{G(y_i)\} - E \{G(\nu)\})^2$$

Sendo a restrição determinada por  $E \{y_i\} = E \{\mathbf{w}_i^T \mathbf{x}\} = 1$ .

A condição de otimalidade é definida através do método de Lagrange, a partir da seguinte condição satisfeita:

$$E \{xG'(\mathbf{w}_i^T \mathbf{x})\} + \beta \mathbf{w}_i = 0$$

Tendo em mente que as misturas já estão branqueadas (requisito para separação de sinais por nenge-tropia), o algoritmo aplica o método de Newton para resolução da condição descrita anteriormente, onde é obtida a regra de atualização ou ajuste [1].

$$\mathbf{w}_i \leftarrow E \{xG'(\mathbf{w}_i \mathbf{x})\} - E \{G''(\mathbf{w}_i^T \mathbf{x})\} \mathbf{w}_i$$

$$\mathbf{w}_i \leftarrow \mathbf{w}_i / \|\mathbf{w}_i\|$$

Visando extrair mais de uma fonte através desta regra de ajuste obtida anteriormente, é necessário executá-la para todos os vetores de  $\mathbf{w}_i$ . No entanto, é preciso evitar que todas as execuções converjam para o mesmo ótimo, o que representaria recuperar a mesma fonte em todas as execuções. É conhecido que devido ao branqueamento prévio das misturas, o sistema separador também consiste em uma matriz ortogonal, logo suas linhas são ortogonais, então para contornar o problema de obter sempre o mesmo ótimo, a estratégia utilizada é garantir a ortogonalidade dos vetores obtidos [2].

O procedimento utilizado para garantir esta ortogonalidade é chamado de *deflation* e funciona da seguinte forma: extraída a primeira fonte, a recuperação da segunda é feita através da aplicação da regra de atualização do FastICA, sendo a cada iteração retirada a contribuição do vetor referente a primeira fonte do processo de estimação do vetor correspondente a próxima fonte, de modo que estes vetores sejam ortogonais [2]. O algoritmo é apresentado abaixo.

---

**Algorithm 1:** Algoritmo FastICA com ortogonalização simétrica [2]

---

1. Centralizar e branquear os dados
  2. Definir os valores iniciais de  $\mathbf{w}_i$  (colunas de  $\mathbf{W}$ ). Ortogonalizar  $\mathbf{W}$  de acordo com o passo 4
  3. Para todo  $i$ , executar a regra de atualização ou ajuste  
 $\mathbf{w}_i \leftarrow E \{xG'(\mathbf{w}_i \mathbf{x})\} - E \{G''(\mathbf{w}_i^T \mathbf{x})\} \mathbf{w}_i$   
 $\mathbf{w}_i \leftarrow \mathbf{w}_i / \|\mathbf{w}_i\|$
  4. Realizar a ortogonalização simétrica de  $\mathbf{W}$ , que pode ser feita do seguinte modo  
 $\mathbf{W} \leftarrow (\mathbf{W}\mathbf{W}^T)^{-\frac{1}{2}} \mathbf{W}$
  5. Caso não convirja, voltar ao passo 3
- 

### 3 Dinâmica das Estruturas

As estruturas da engenharia são submetidas às forças estáticas, que não variam com o tempo, e às forças dinâmicas, que variam. A dinâmica das estruturas estuda o comportamento das estruturas, o impacto no conforto dos usuários e a durabilidade, quando estas são submetidas a estes carregamentos que variam no tempo. Esta aplicação de uma força em função de um período determinado gera vibração nas estruturas.

Existem duas maneiras de vibrar: a livre, onde o corpo/estrutura em estudo sofre um impacto único e é deixada vibrando até que este impacto seja amortecido pela própria estrutura; e a forçada, onde este corpo/estrutura sofre a aplicação de determinada força externa e esta força faz com que o corpo vibre.

A resposta dinâmica que ilustra o comportamento da primeira maneira de vibrar (livre) é a transiente, onde temos uma amplitude alta nos primeiros momentos da aplicação da carga e nos instantes seguintes, esta amplitude é atenuada pelo amortecimento da própria estrutura. No entanto, a resposta dinâmica que ilustra o comportamento da segunda forma de vibrar é a resposta permanente, onde a amplitude do sinal se mantém a mesma durante a aplicação da carga.

A solução da aplicação de uma carga dinâmica no tempo é influenciada por estas duas respostas e as duas ocorrem ao mesmo tempo. Logo, a solução geral de um problema de dinâmica é a soma da resposta transiente com a resposta permanente.

Caso o leitor desperte o interesse no tema, o autor recomenda os livros do Craig [3] e do Clough [4].

### 3.1 Problema clássico

Para o desenvolvimento da aplicação de separação de sinais em dinâmica das estruturas, foi utilizado um problema clássico de vibração forçada, visando o correto entendimento do comportamento assim como para facilitar a visualização do produto final.

A teoria relacionada a cada passo de resolução deste problema será exposta durante a própria resolução, com o objetivo de não tornar este relatório extremamente longo. Todos os conceitos descritos nesta seção provém dos livros [3, 4].

Este problema consiste na aplicação de uma carga senoidal no sentido contrário da gravidade cuja expressão considera a força inicial e uma velocidade angular em função do tempo, sendo esta:

$$F(t) = 30 \cdot \text{sen}(15 \cdot t)$$

Onde a força inicial equivale a 30 N e a velocidade angular relacionada a esta ação possui valor de 15 rad/s. Além desta força externa de caráter permanente, a massa sofre um impulso inicial cuja velocidade é de 0,15 m/s. O problema é ilustrado na figura (4).

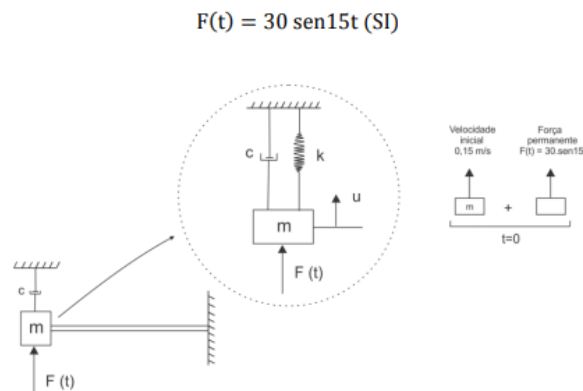


Figura 4: Problema clássico de dinâmica das estruturas

Os dados relacionados ao problema são: massa suspensa de 20 kg, rigidez da mola equivalente a 9000 N/m, propriedade do amortecedor igual a  $150 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$  e aceleração da gravidade de valor igual a  $9,80 \text{ m/s}^2$ .

Para obtenção das respostas permanente, transiente e da solução geral, são necessários alguns passos. Sendo estes:

1. Obter a frequência fundamental
2. Obter o coeficiente de amortecimento a partir das propriedades do amortecedor

3. Obter o coeficiente que relaciona a frequência de excitação com a frequência fundamental do problema analisado
4. Obter o ângulo de defasagem da resposta permanente
5. Obter o fator de amplificação dinâmica
6. Obter a resposta permanente (ou harmônica) desta estrutura
7. Obter a frequência amortecida
8. Obter a resposta transiente desta estrutura
9. Obter a expressão da solução geral
10. Acrescentar a velocidade inicial a resposta

Visando facilitar o entendimento, este problema será desenvolvido em subtópicos enumerados.

### 3.1.1 Frequência Fundamental

Para obtenção da frequência fundamental da estrutura [3], cujo valor também equivale ao primeiro autovalor da equação de movimento dinâmico, utilizamos a fórmula (3).

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3)$$

Onde  $\omega_n$  representa a frequência fundamental,  $k$  a rigidez da estrutura e  $m$  a sua massa. Logo, a partir dos dados da estrutura, temos:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{9000}{20}} = 21,21 \text{ rad/s}$$

### 3.1.2 Coeficiente de amortecimento

O coeficiente de amortecimento ( $\xi$ ) é uma propriedade adimensional que relaciona as propriedades do amortecedor e o amortecimento crítico da estrutura, conforme equação abaixo:

$$\xi = \frac{c}{c_{cr}} \quad (4)$$

Onde o coeficiente de amortecimento crítico  $c_{cr}$  é dado por:

$$c_{cr} = 2 \cdot m \cdot \omega_n \quad (5)$$

Logo, a partir das condições do problema, obtemos:

$$\xi = \frac{150}{2 \cdot 20 \cdot 21,21} = 0,176$$

### 3.1.3 Relação entre as frequências de excitação e fundamental

Para esta etapa, é importante observar a relação entre as frequências de excitação impostas a estrutura e a frequência fundamental, propriedade da própria estrutura. Esta verificação objetiva observar a ocorrência ou não de um fenômeno chamado ressonância.

Este coeficiente adimensional é obtido pela seguinte fórmula:

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_n} \quad (6)$$

Logo, a partir dos dados do problema, obtemos um valor de:

$$\beta = \frac{15}{21,21} = 0,707$$

Esta relação varia entre 0 e 1, e quanto mais próxima de 1, maior a chance de ocorrência do fenômeno da ressonância.

### 3.1.4 Ângulo de defasagem

Esta propriedade informa o atraso da reaplicação da força externa e é obtida através da seguinte fórmula:

$$\phi = \arctan \frac{2 \cdot \xi \cdot \beta}{1 - \beta^2} \quad (7)$$

Logo, a partir dos dados, temos:

$$\varphi = \arctan \frac{2 \cdot 0,176 \cdot 0,707}{1 - 0,707^2} = 0,463 \text{ rad}$$

### 3.1.5 Fator de Amplificação Dinâmica - FAD

O fator de amplificação dinâmica é a relação entre o deslocamento causado pelo carregamento dinâmico e o deslocamento causado pelo carregamento estático, sendo dado pela seguinte fórmula:

$$FAD = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot \beta)^2}} \quad (8)$$

A partir dos dados, temos:

$$FAD = \frac{1}{\sqrt{(1 - 0,707^2)^2 + (2 \cdot 0,176 \cdot 0,707)^2}} = 1,788$$

### 3.1.6 Resposta Permanente

Após a obtenção de todos esses resultados, temos os suficiente para obter a resposta permanente ( $u_P$ ) desta massa. Esta resposta representa a uma parcela da solução geral (ou final) e existe até que a força externa seja extinguida.

A resposta permanente corresponde ao modo particular de vibração imposta por um agente externo e consiste na seguinte fórmula.

$$u_P = \frac{F_0}{k} FAD \text{sen}(\omega \cdot t - \phi) \quad (9)$$

Então, a partir dos dados obtidos e calculados, temos a resposta permanente relacionada ao carregamento externo.

$$u_P = \frac{30}{9000} \cdot 1,788 \cdot \text{sen}(30 \cdot t + 0,463)$$

$$u_P = 0,006 \cdot \text{sen}(30 \cdot t + 0,463)$$



### 3.1.7 Frequência Amortecida

Visando obter a parcela transiente da solução geral, obtemos a frequência amortecida, que relaciona o coeficiente de amortecimento adimensional e a frequência fundamental da massa a partir da seguinte fórmula:

$$\omega_a = \sqrt{1 - \xi^2} \cdot \omega_n \quad (10)$$

Temos como resultado uma frequência amortecida de:

$$\omega_a = \sqrt{1 - 0,176^2} \cdot 21,21 = 20,87 \text{ rad/s}$$

### 3.1.8 Resposta Transiente

A resposta transiente da estrutura com deslocamento inicial igual a zero é dada por [3]:

$$u_H = e^{-\xi\omega_n t} A \cdot \text{sen}(\omega_a \cdot t + \psi) \quad (11)$$

### 3.1.9 Solução Geral

A solução geral é dada pela parcela transiente, que representa a vibração livre, onde um objeto sofre uma força inicial e então esta força produz vibração até ser totalmente atenuada pelo amortecimento e pela parcela permanente, que provém diretamente do carregamento externo aplicado à massa. Esta é representada como um somatório de ambas as parcelas, conforme Eqs. (12) e (13).

$$u(t) = u_H + u_P \quad (12)$$

Substituindo as equações (9) e (11) na Eq. (12), temos:

$$u(t) = e^{-\xi\omega_n t} A \cdot \text{sen}(\omega_a \cdot t + \psi) + \frac{F_0}{k} FAD \text{sen}(\omega \cdot t - \phi) \quad (13)$$

Derivando no tempo inicial (t=0), obtemos a velocidade:

$$v(t) = -\xi \cdot \omega_n \cdot A \cdot e^{-\xi\omega_n t} \cdot \text{sen}(\omega_a \cdot t + \psi) + A \cdot e^{-\xi\omega_n t} \cdot \omega_a \cdot \cos(\omega_a \cdot t + \psi) + \frac{F_0}{k} \cdot FAD \cdot F_0 \cdot \cos(F_0 \cdot t + \phi)$$

### 3.1.10 Acrescentando a velocidade inicial à solução

A solução geral pode também ser afetada por quaisquer valores iniciais, como um deslocamento ou uma velocidade inicial. Neste problema, não temos deslocamento inicial, no entanto, temos velocidade. Logo, precisamos adicionar este valor na solução geral da massa.

Considerando o deslocamento inicial igual a 0 em t=0, temos:

$$0 = e^{-\xi\omega_n \cdot 0} \cdot A \cdot \text{sen}(\omega_a \cdot 0 + \psi) + \frac{F_0}{k} \cdot FAD \cdot \text{sen}(F_0 \cdot 0 + \phi)$$

Simplificando:

$$A \cdot \text{sen}(\psi) = -\frac{F_0}{k} \cdot FAD \cdot \text{sen}(\phi)$$

Considerando a velocidade inicial igual a 0,15 m/s<sup>2</sup> quando t=0, temos:

$$0,15 = -\xi \cdot \omega_n \cdot A \cdot e^{-\xi\omega_n 0} \cdot \text{sen}(\omega_a \cdot 0 + \psi) + A \cdot e^{-\xi\omega_n 0} \cdot \omega_a \cdot \cos(\omega_a \cdot 0 + \psi) + \frac{F_0}{k} \cdot FAD \cdot F_0 \cdot \cos(F_0 \cdot 0 + \phi)$$

Simplificando:

$$A \cdot \cos(\psi) = \frac{0,15 + \xi \cdot \omega_n \cdot A \cdot \sin(\psi) - \frac{F_0}{k} \cdot FAD \cdot F_0 \cdot \cos(\phi)}{\omega_a}$$

Substituindo os valores obtidos até então, temos:

$$A \cdot \sin(\psi) = -0,0026$$

$$A \cdot \cos(\psi) = -0,00095$$

$$\tan(\psi) = \frac{A \cdot \sin(\psi)}{A \cdot \cos(\psi)}$$

$$\tan(\psi) = \frac{-0,0026}{-0,00095} = 2,783$$

$$\psi = \arctan(2,783) = 1,22\text{rad}$$

A partir destas informações, obtemos também o A (que representa a amplitude da resposta transiente, conforme Eq. (11) ).

$$A = \frac{-\frac{F_0}{k} \cdot FAD \cdot \sin(\phi)}{\sin(\psi)} = -0,00283m$$

### 3.1.11 Sinais obtidos

A partir da resolução do problema, obtivemos as respostas transiente, permanente e a solução geral, que corresponde à soma das duas primeiras.

A Fig. (5) mostra estas respostas em um intervalo de tempo variando entre 0 e 2 segundos. Nesta figura, a linha vermelha representa a solução geral; a linha azul, a solução transiente e a linha amarela, a solução permanente.

É possível visualizar o comportamento das respostas dinâmicas, conforme descrito anteriormente. A solução transiente rapidamente é amortecida e se extingue mesmo durante a atuação da força externa. No entanto, a solução permanente se mantém até que a carga não seja mais aplicada.

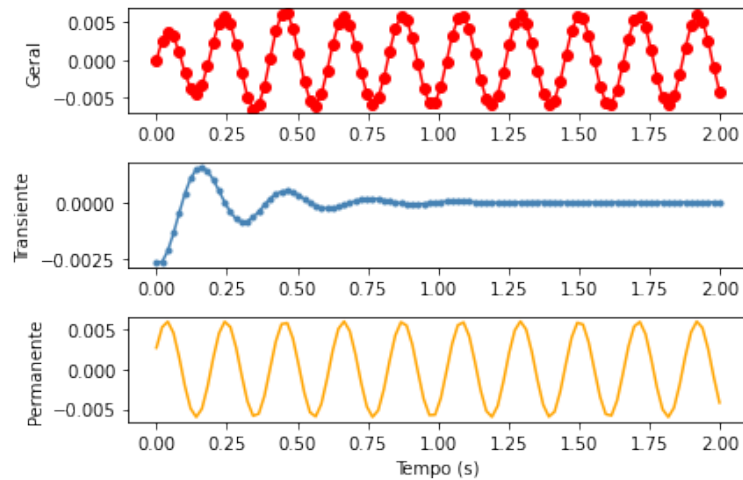


Figura 5: Respostas dinâmicas

## 4 Aplicação do método de separação de sinais

A aplicação do algoritmo FastICA nos sinais obtidos do problema de dinâmica se dá pelo desenvolvimento do algoritmo na linguagem Python através da biblioteca *sklearn* no ambiente de desenvolvimento na nuvem Google Colab.

Os sinais das respostas transiente ( $s_1$ ) e permanente ( $s_2$ ) são misturados e depois são obtidos a partir da matriz de separação. É importante mencionar que o algoritmo FastICA não preserva a amplitude ou o sinal (positivo ou negativo) dos sinais finais estimados [5].

A matriz de mistura  $A$  consiste em uma matriz estimada e foi adotada como:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0,5 & 2 \end{bmatrix}$$

Depois de misturados, o vetor resultante da mistura sofre branqueamento (onde se aplicam os autovalores e autovetores), descrito na seção 2, como pré-processamento e pré-requisito ao uso do algoritmo FastICA.

A matriz de separação  $W$  obtida consiste em:

$$W = \begin{bmatrix} 0,05720205 & -0,0301747 \\ -0,00103853 & 0,0515473 \end{bmatrix}$$

Conforme Fig. (6), podemos observar os sinais misturados pela matriz descrita anteriormente. Logo abaixo, os sinais originais também são expostos, e no terceiro gráfico os sinais finais estimados são mostrados. Então, podemos ver a eficácia do algoritmo FastICA que foi capaz de separar os sinais de entrada.

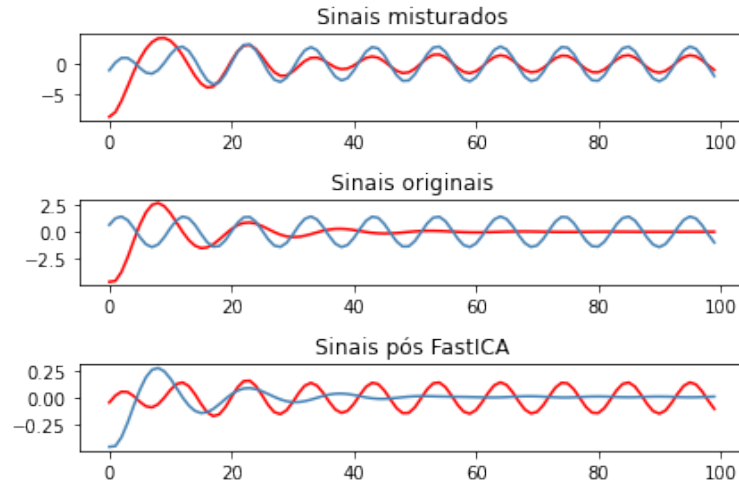


Figura 6: Sinais misturados, originais e separados

Visando a execução de um novo teste para validação do algoritmo para este problema, utilizou-se uma nova matriz de mistura arbitrária, dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 0,8 & 5 \\ 0,15 & 9 \end{bmatrix}$$

Neste teste, os sinais misturados apresentam comportamento diferente do teste anterior, como pode ser visto na Fig. (7). No entanto, na mesma figura, observa-se que os sinais originais e estimados são semelhantes, logo o algoritmo é capaz de separá-los. Um detalhe importante mencionado no início desta seção são as amplitudes dos sinais que não são preservadas após a aplicação do algoritmo FastICA.

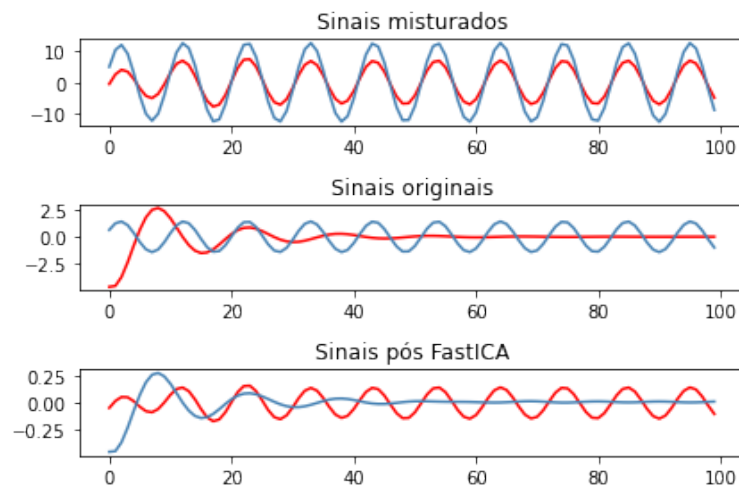


Figura 7: Sinais misturados, originais e separados

## 5 Conclusão

A separação cega de sinais é um tema amplamente pesquisado e utilizado em diversas situações do cotidiano. Neste trabalho, optou-se por utilizá-lo em uma situação puramente didática, visto que não possui aplicação prática na engenharia civil.

O objetivo geral deste trabalho consistia em desenvolver um problema relacionado ao BSS e resolvê-lo fazendo uso de autovalores e autovetores. O objetivo específico consistia em conseguir efetuar a separação de sinais provenientes de um problema de dinâmica das estruturas.

Os mesmos foram atingidos devido ao processo de branqueamento da mistura obtida, visto que este pré-processamento é obrigatório para a implementação do algoritmo FastICA e devido a obtenção de resultados.

Como sugestão para trabalhos futuros, o autor sugere que sejam feitos testes de separação de sinais a partir de dados reais, coletados ou não, ao mesmo tempo em que a separação é feita.

## Referências

- [1] Nielsen Castelo Damasceno. Separação cega de fontes lineares e não lineares usando algoritmo genético, redes neurais artificiais rbf e negentropia de rényi como medida de independência, 2010.
- [2] Leonardo Tomazeli Duarte. Um estudo sobre separação cega de fontes e contribuições ao caso de misturas não-lineares, 2006.
- [3] Roy R Craig. *Structural Dynamics*. John Wiley Sons, 1981.
- [4] Ray W. Clough and Joseph Penzien. *Structural Dynamics*. Computer Structures, Inc. , 2003.
- [5] Alan Paulo Oliveira da Silva. Uma implementação da análise de componentes independentes em plataforma de hardware reconfigurável, 2010.