UERJ - UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
IME - INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
CComp - Programa de Pós-Graduação em Ciências Computacionais
IME02701 Álgebra Linear: Aspectos Teóricos e Computacionais
Prof.^{a} Cristiane Oliveira de Faria

Relatório nº 2 - Resolução de sistemas lineares pela Regra de Cramer com auxílio do Teorema de Laplace

Aluno: Nathalia de Almeida Castelo Branco
e-mail: nathaliaacbranco@gmail.com

07 de junho de 2021

1 Introdução

Os conceitos relacionados a sistemas lineares foram descritos no relatório anterior, logo, os mesmos não serão mencionados neste. Já o determinante consiste em um escalar especial relacionado a matriz e só pode ser obtido para matrizes quadradas.

O objetivo deste trabalho é obter a resolução de sistemas lineares de ordem 8 para as matrizes especiais de Cauchy, Hilbert, Vandermonde e Toeplitz, a partir da utilização da regra de Cramer considerando o método de Laplace para o cálculo do determinante.

Na seção 1, é realizada uma breve introdução do tópico assim como o objetivo do trabalho. Na seção 2, os conceitos básicos de obtenção de determinantes pelo teorema de Laplace são brevemente discutidos, assim como a Regra de Cramer para obtenção da solução de sistemas lineares. Na seção 3, são enunciadas as matrizes especiais que serão utilizadas como base para a resolução deste exercício. Na seção 4, os resultados obtidos são descritos e finalmente a conclusão do estudo é exposta.

2 Conceitos básicos

Nesta seção serão definidos os conceitos básicos para o entedimento do problema proposto para este exercício (primeira parte do segundo relatório), sendo este a resolução dos sistemas gerados por matrizes especiais a partir da Regra de Cramer, obtendo os determinantes através do teorema (ou expansão) de Laplace.

2.1 Teorema de Laplace

Para realizar esta expansão é necessário ter conhecimento no que consistem os cofatores. Considere uma matriz quadrada A de ordem n. A submatriz M_{ij} de A de ordem $n-1$ é obtida suprimindo a i-ésima linha e j-ésima coluna. O determinante de M_{ij} é denominado menor do elemento a_{ij} de A e o cofator de a_{ij} é denotador por A_{ij}, sendo ele o menor acompanhado do sinal [1].

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\,|M_{ij}|$$

Estes sinais que acompanham os menores formam um padrão de tabuleiro de xadrez, com o sinal da soma na diagonal. Além disso, é importante mencionar que A_{ij} representa um escalar [1].

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix}$$

O determinante de uma matriz quadrada é igual à soma dos produtos obtidos multiplicando os elementos de qualquer linha ou coluna por seus respectivos cofatores [1].

$$|A| = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \cdots + a_{in} \cdot A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \tag{1}$$

$$|A| = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \cdots + a_{nj} \cdot A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \tag{2}$$

Este teorema visa reduzir o cálculo de um determinante de ordem n para o cálculo de um determinante de ordem n-1. O algoritmo (1) representa a expansão de Laplace.

Algorithm 1: Expansão de Laplace

Data: Matriz $[A]$ quadrada de ordem $n > 1$
Result: Determinante da matriz $[A]$ quadrada com ordem reduzida

escolha $a_{ij} \neq 0$ (pivô)
troca linha = 0
while $n > 1$ **do**
    for $a_{ij} \neq 0$ **do**
        operações elementares até todas os componentes abaixo do pivô = 0
        if *troca linha* **then**
            troca linha = troca linha +1
        end
    end
    if *troca linha = impar* **then**
        $|A| = -\sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$
    end
    if *troca linha = par* **then**
        $|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$
    end
end

2.2 Regra de Cramer

Considere um sistema linear $A \cdot x = b$ com a quantidade de incógnitas igual a de equações (quadrado). Seja a matriz do sistema uma matriz quadrada e b o vetor coluna dos termos independentes, a matriz A_i é obtida de A substituindo a coluna i de A pelo vetor b. As seguintes relações são criadas:

$$D = det(A), \quad N_1 = det(A_1), \quad N_2 = det(A_2), \quad N_n = det(A_n)$$

A **Regra de Cramer** define que o sistema quadrado possui uma única solução, se e somente se, $D \neq 0$. Então a única solução é determinada por:

$$x_1 = \frac{N_1}{D}, \quad x_2 = \frac{N_2}{D}, \quad \cdots, \quad x_n = \frac{N_n}{D}$$

O algoritmo utilizado na implementação da Regra de Crame foi o descrito abaixo.

Algorithm 2: Regra de Cramer

Data: Matriz $[A]$ quadrada de ordem $n > 1$ e vetor b
Result: Solução do sistema linear
calcula $D = det(A)$ pela expansão de Laplace (Algoritmo 1)
for $i = 0, \cdots, n$ **do**
  $A_i \rightarrow$ substitui a coluna i da matriz A pelo vetor b
  $N_i = det(A_i) \rightarrow$ calcular pelo Algoritmo 1
  $x_i = \dfrac{N_i}{D}$ (Solução)
end

3 Matrizes especiais

O problema proposto para este estudo consiste em um sistema linear de ordem 8, $A \cdot x = b$, cuja solução exata corresponde ao um vetor com todos os componenentes iguais a 1. Para a matriz dos coeficientes A, foram consideradas as matrizes especiais descritas nesta seção.

3.1 Matriz de Cauchy

A matriz de Cauchy [2] é definida como uma matriz mxn atribuída ao somatório dos parâmetros $m+n$, $(x_1, ..., x_m)$ e $(y_1, ..., y_n)$ como pode ser visto a seguir:

$$C_i = \left[\frac{1}{x_i + y_j}\right] \Rightarrow i = 1, ..., m \therefore j = 1, ..., n \tag{3}$$

Onde x_i, y_j são números reais tais que $x_i + y_j \neq 0$ [3].

3.2 Matriz de Hilbert

A matriz de Hilbert [2, 3] é um caso da matriz de Cauchy, onde $x_i = i$ e $y_j = j - 1$ logo seus termos são definidos conforme Eq. (4):

$$H_n = \left[\frac{1}{i + j - 1}\right] \tag{4}$$

3.3 Matriz de Vandermonde

A matriz de Vandermonde é uma matriz quadrada composta por linhas que são potências de números fixos, com a seguinte forma [3]:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

3.4 Matriz de Toeplitz

A matriz de Toeplitz possui seus termos a_{ij} constantes em suas diagonais e determinados por $T_{i,j} = t_{j-i}$ [4], possuindo a seguinte forma:

$$T = \begin{bmatrix} t_0 & t_1 & \cdots & t_{j-i} \\ t_{-1} & t_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t_1 \\ t_{j-i} & \cdots & t_{-1} & t_0 \end{bmatrix}$$

4 Experimentos numéricos

A partir do conhecimento do teorema de Laplace e da regra de Cramer expostos na seção 2, foram desenvolvidos algoritmos para obtenção da solução dos sistemas lineares a partir das matrizes especiais introduzidas na seção anterior. O estudo em questão foi desenvolvido em linguagem Python através da plataforma Google Colab.

Inicialmente, a resposta exata foi obtida a partir da expressão $A \cdot x = b$, onde A é uma matriz especial, x é o vetor com todos os componentes iguais a 1 e b é o vetor dos termos independentes a ser obtido. A partir dos resultados obtidos b_{exato} e sabendo que inicialmente o vetor das incógnitas possui todos os seus componentes iguais a 1, inicia-se a resolução dos sistemas lineares pela regra de Cramer com auxílio do teorema de Laplace para a obtenção dos determinantes.

Visando a verificação do erro da solução obtida por Cramer quando comparada ao vetor de incógnitas inicial, utilizou-se o erro quadrático médio [5], conforme a formulação abaixo:

$$EQM = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\hat{\theta}_i - \theta_i)^2 \tag{5}$$

Onde N é o número de amostras, $\hat{\theta}_i$ é um valor estimado e θ_i é um parâmetro escalar.

Os resultados foram obtidos de maneira mais eficiente devido a implementação da eliminação Gaussiana no tratamento da matriz antes do cálculo de cada determinante pelo teorema de Laplace. A utilização deste tratamento [1] contorna um problema obtido pela implementação do teorema chamado recursividade, onde a função precisa de uma igual para resolução do problema [6].

O processo para obtenção da solução dos sistemas lineares é descrito como:

1. Obter o vetor b através da $A \cdot x = b$
2. Calcular o determinante da matriz especial a partir do teorema de Laplace
3. Obter as matrizes A_1 a A_8, substituindo b na coluna correspondente
4. Obter os determinantes N_1 a N_8 das matrizes anteriores, a partir da regra de Cramer
5. Obter as soluções a partir da divisão do determinante N_i pelo determinante da matriz especial

Os resultados obtidos foram satisfatórios, visto que apresentaram um erro pequeno quando comparado a solução exata utilizada para gerar o vetor dos termos independentes b. Os mesmos podem ser vistos na tabela (1), onde o tempo computacional e o erro quadrático médio de cada matriz especial são descritos.

Tabela 1: Eficiência dos resultados obtidos

Matriz	Tempo Computacional [ms]	Erro Quadrático Médio
Cauchy	9,896	$5,24 \cdot 10^{-15}$
Hilbert	7,411	$2,43 \cdot 10^{-14}$
Vandermonde	7,770	$6,32 \cdot 10^{-24}$
Toeplitz	7,357	$1,06 \cdot 10^{-31}$

A resolução do sistema composto pela matriz de Cauchy apresenta o maior tempo computacional entre os expostos na tabela (1), esse comportamento pode ser pelo fato da matriz ser composta por números muito próximos de zero, o que dificulta o processo de eliminação gaussiana.

5 Conclusão

O objetivo deste estudo foi obter a solução de quatro sistemas lineares através do uso da Regra de Cramer, onde o Teorema de Laplace foi utilizado para auxiliar a obtenção dos determinantes, assim como a matriz foi tratada antes da aplicação deste teorema pela eliminação gaussiana para contornar o problema da recursividade.

A partir da implementação em linguagem Python, o objetivo deste trabalho foi atingido pela obtenção de soluções para todas os sistemas lineares baseados nas matrizes especiais de Cauchy, Hilbert, Vandermonde e Toeplitz. Em resumo:

- Todos as soluções foram obtidas de maneira satisfatória;
- A manipulação das matrizes pela eliminação gaussiana tornou o algoritmo menos custoso computacionalmente;
- Todos os erros foram pequenos e as soluções se aproximaram da exata;
- O maior tempo computacional foi obtido para a matriz de Cauchy;
- O maior erro quadrático médio foi obtido para a matriz de Hilbert.

Referências

[1] Seymour Lipschutz; Marc Lipson. *Linear Algebra.* Mc Graw Hill, 2009.

[2] Miroslav Fiedler. Notes on hilbert and cauchy matrices. *Linear Algebra and its Applications*, pages 351–356, 2009.

[3] Marcos Savitraz. Determinante de algumas matrizes especiais, 2015.

[4] Maria Gabriela Eberle e Maria Cristina Maciel. Finding the closest toeplitz matrix. *Computational and Applied Mathematics*, 22(1):1–18, 2003.

[5] Erro quadrático médio. `https://pt.wikipedia.org/wiki/Erro_quadratico-medio`. Acessado em 07/06/2021.

[6] Complexidade algorítmica do teorema de laplace no cálculo de determinantes. `https://www.blogcyberini.com/2017/08/complexidade-do-teorema-de-laplace.html`. Acessado em 07/06/2021.