

APLICAÇÃO DE MÉTODOS NUMÉRICOS EM PYTHON PARA A ANÁLISE E MODELAGEM MATEMÁTICA DA CURVA DE ACIDENTES DE TRÂNSITO NO BRASIL

Gabriel Almeida Rodrigues Pereira Jonatas Carrocine Nathália Cristina Pires Vidal

RESUMO

O aumento constante do fluxo de veículos nas vias brasileiras tem sido cercado por uma preocupante ascensão nos índices de acidentes de trânsito. O entendimento sobre esses eventos torna-se essencial para a implementação de medidas eficazes para prevenção e controle. Neste cenário, emerge como uma ferramenta valiosa a utilização de métodos numéricos para a análise e modelagem matemática dos dados relacionados a acidentes de trânsito.

Este artigo tem como objetivo a utilização de modelagem matemática para análise dos dados de acidentes de trânsito no Brasil, especificamente, em São Paulo, com o intuito de gerar curvas de tendência com base na aplicação do método de Interpolação Polinomial de Lagrange nos dados obtidos através do portal do Ministério de Transportes que abrangem as rodovias estaduais e municipais. Os resultados foram obtidos utilizando de técnicas avançadas de métodos numéricos implementados na linguagem de programação Python, sendo possível analisar a dinâmica da curva de acidentes de trânsito no estado de São Paulo. A curva de tendência dos dados de acidentes de trânsito coletados em São Paulo, comprovam a eficácia do método numérico proposto, oferecendo assim, uma contribuição significativa para a compreensão e melhoria da segurança no trânsito brasileiro.

PALAVRAS-CHAVE

Análise de dados. Modelagem Matemática. Acidentes de Trânsito no Brasil. Curvas de Tendência de Lagrange. Programação em Python, Interpolação Polinomial

ABSTRACT

The constant increase in the flow of vehicles on Brazilian roads has been accompanied by a concerning rise in traffic accident rates. Understanding these events becomes essential for the implementation of effective measures for prevention and control. In this scenario, the use of numerical methods for the analysis and mathematical modeling of traffic accident data emerges as a valuable tool.

This article aims to use mathematical modeling for the analysis of traffic accident data in Brazil, specifically in São Paulo, with the intention of generating trend curves based on the application of the Lagrange Polynomial Interpolation method to data obtained through the Ministry of Transport's portal, which covers state and municipal highways. The results were obtained using advanced techniques of numerical methods implemented in the Python programming language, making it possible to analyze the dynamics of the traffic accident curve in the state of São Paulo. The trend curve of the traffic accident data collected in São Paulo confirms the effectiveness of the proposed numerical method, thus providing a significant contribution to the understanding and improvement of safety in Brazilian traffic.

KEYWORDS

Data Analysis. Mathematical Modeling. Traffic Accidents in Brazil. Lagrange Trend Curves. Python Programming. Polynomial Interpolation.

1. INTRODUÇÃO

O Maio Amarelo é uma campanha mundial de conscientização sobre a segurança no trânsito que ocorre todos os anos no mês de maio. Essa iniciativa busca chamar a atenção da sociedade para a importância de prevenir acidentes e reduzir o número de vítimas nas vias. Nesse contexto, a realização de estudos que investigam os padrões de acidentes de trânsito se torna ainda mais relevante, pois contribui para o objetivo central da campanha. (GOVERNO BRASILEIRO, 2023)

Usando como exemplo o município de Belo Horizonte, onde ocorrem diversas ações e eventos relacionados ao Maio Amarelo, as análises dos padrões de acidentes de trânsito ganham uma motivação adicional. Compreender os fatores que contribuem para a ocorrência desses acidentes, identificar as áreas de maior incidência e as principais causas, bem como analisar as características dos envolvidos e dos veículos, permite direcionar esforços e recursos de forma mais eficiente, visando à redução dos índices de acidentes e à promoção de uma cultura de segurança no trânsito. (PREFEITURA DE BELO HORIZONTE, 2023)

O aumento constante dos casos de acidentes de trânsito levanta sérios desconfortos quanto à segurança viária e à integridade dos usuários das vias. Muitos são os possíveis motivos para tal crescimento como desrespeito às normas de trânsito, distrações no volante, condições inadequadas das estradas e consumo de ilícitos. Neste cenário, a Tabela 1 contém os dados comparativos do Brasil e do estado de São Paulo, no ano de 2022, os quais serão analisados para enriquecer a compreensão dos padrões de acidentes de trânsito e comparar informações.

Tabela 1 - Dados comparativos do Brasil e do estado de São Paulo em 2022.

ACIDENTES							
BRA	SIL	SÃO PAL	JLO				
População	214.688.249,00	População	47.055.650,00				
Frota ativa	77.919.036,00	Frota ativa	19.868.821,00				
Acidentes	1.421.145,00	Acidentes	191.641,00				
Feridos / Ilesos	1.556.910,00	Feridos / Ilesos	166.803,00				
Óbitos	20.852,00	Óbitos	4.457,00				
Acidentes / 100 mil habitantes	475,50	Acidentes / 100 mil habitantes	96,45				

Fonte: Autores. Dados: Ministério do Transporte.

Para o desenvolvimento de soluções em análise de dados de acidentes de trânsito no Brasil empregou-se o uso do Google Collaboratory, um ambiente colaborativo para desenvolvimento de códigos na linguagem de programação Python. Assim, com a utilização de bibliotecas como *Pandas*, biblioteca para ciência de dados de código aberto, e *matplotlib*, biblioteca para visualização de dados e plotagem gráfica, foi possível a manipulação, análise e visualização dos dados coletados, proporcionando uma abordagem mais aprimorada na compreensão dos padrões de acidentes de trânsito no contexto brasileiro.

Ademais, utilizou-se também a linguagem de programação Python e o conteúdo teórico ministrado na disciplina de Cálculo Numérico para o desenvolvimento do método numérico, com o objetivo de identificar tendências de aumento ou diminuição de acidentes ao longo do tempo, fatores de risco, áreas críticas, visualização gráfica e principalmente previsão e planejamento. Assim, este trabalho pode fornecer subsídios para a formulação de políticas e programas de segurança viária para promover uma cultura de direção segura e reduzir os índices de acidentes de trânsito no Brasil.

2. METODOLOGIA

A metodologia utilizada para análise matemática da curva de acidentes de trânsito no Brasil é baseada em uma abordagem sistemática. Tomando como base de conhecimento e aplicações o artigo 'APLICAÇÃO DE MÉTODOS NUMÉRICOS COM O EXCEL PARA A ANÁLISE E MODELAGEM MATEMÁTICA DA CURVA DE CONTAMINAÇÃO DA COVID-19 NOS ESTADOS DO BRASIL', o qual utiliza o método da interpolação de Lagrange para tratar da pandemia da COVID-19 nos estados do Brasil, conseguiu-se aplicar para os casos de acidentes de trânsito no Brasil, com ressalvas ao cálculo dos coeficientes e grau do polinômio considerado.

Neste trabalho a análise dos dados dos acidentes de trânsito no estado de São Paulo foi dividida em 2 passos fundamentais: Coleta e processamento de dados e Análises de métodos matemáticos.

2.1 COLETA E PROCESSAMENTO DE DADOS

Os dados necessários para a realização deste trabalho foram coletados através do portal do Ministério de Transportes. Durante o período foram analisados os índices de acidentes nos estados e municípios brasileiros mensalmente durante o ano de 2022.

Para este trabalho serão analisados e manipulados somente os dados dos acidentes de trânsito no estado de São Paulo, a metodologia aplicada será a mesma para outros estados e municípios. A Figura 1 mostra como os dados estão dispostos.

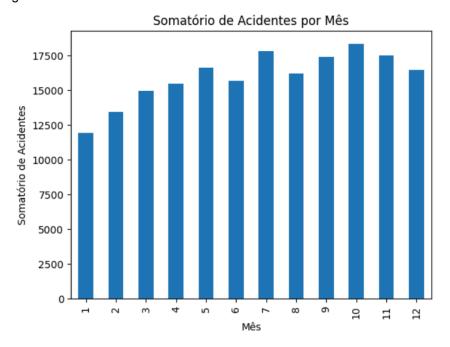


Figura 1: Somatório dos números de acidentes em São Paulo no ano de 2022.

Podemos observar que há um estado de não-linearidade nas variáveis: Mês, Quantidade de Acidentes, podendo ser observado de uma melhor maneira na Figura 2.

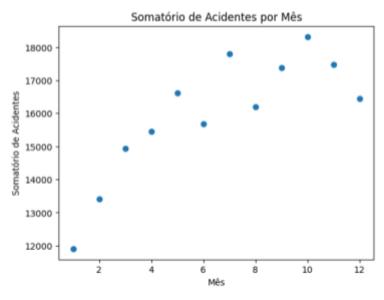


Figura 2 - Dispersão dos acidentes

Fonte: Autores.

Para melhor esclarecimento, plotou-se também os gráficos de todos os meses do ano de 2022. Com isso, comprovou-se que, de forma mais clara, a não linearidade do somatório de acidentes mês a mês.

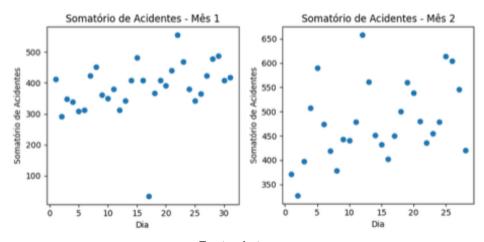


Figura 2.1 - Acidentes dos meses Janeiro e Fevereiro.

Figura 2.3 - Acidentes nos meses de Março e Abril.

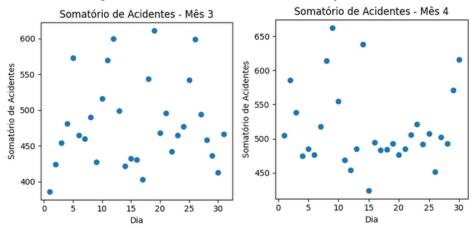
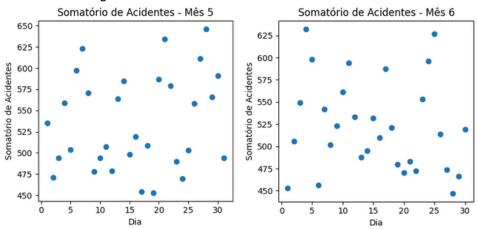


Figura 2.4 - Acidentes nos meses de Maio e Junho.



Fonte: Autores.

Figura 2.5 - Acidentes nos meses de Julho e Agosto.

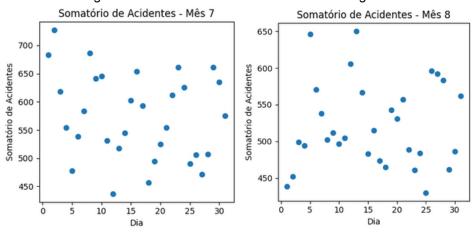


Figura 2.6 - Acidentes nos meses de Setembro e Outubro.

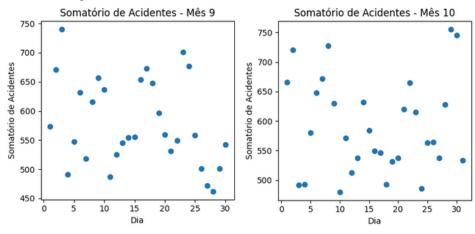
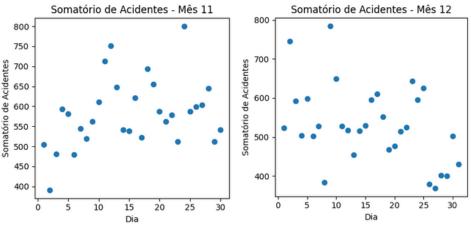


Figura 2.7 - Acidentes nos meses de Novembro e Dezembro.



Fonte: Autores.

Para obter uma representação mais clara da distribuição temporal dos dados ao longo dos meses do ano em análise, foram elaboradas tabelas específicas que detalham a ocorrência diária dos acidentes. Assim, temos as Tabelas 2.1 a 2.12, onde cada tabela corresponde a um mês distinto, proporcionando uma visualização numérica precisa de variação desses valores ao longo do período analisado.

Tabela 2.1 - Acidentes no mês de Janeiro, separados por dia.

	Janeiro							
Dia	Nº de Acidentes	Dia	Nº de Acidentes	Dia	Somatório de Acidentes			
1	412	12	312	23	468			
2	292	13	343	24	380			
3	348	14	409	25	343			
4	339	15	481	26	366			
5	308	16	408	27	423			
6	313	17	34	28	478			
7	424	18	367	29	487			
8	452	19	408	30	408			
9	362	20	391	31	417			
10	350	21	441		-			
11	381	22	555					

Tabela 2.2 - Acidentes no mês de Fevereiro, separados por dia.

Fevereiro							
Dia	N° de Acidentes	Dia	N° de Acidentes	Dia	Somatório de Acidentes		
1	371	12	658	23	455		
2	327	13	561	24	479		
3	398	14	451	25	614		
4	507	15	432	26	604		
5	590	16	402	27	546		
6	474	17	450	28	420		
7	419	18	500				
8	378	19	560				
9	443	20	538				
10	440	21	480				
11	479	22	436				

Tabela 2.3 - Acidentes no mês de Março, separados por dia.

	Março							
Dia	Nº de Acidentes	Dia	N° de Acidentes	Dia	Somatório de Acidentes			
1	386	12	600	23	465			
2	424	13	499	24	477			
3	454	14	422	25	542			
4	481	15	432	26	599			
5	573	16	431	27	494			
6	465	17	403	28	458			
7	460	18	544	29	436			
8	490	19	611	30	413			
9	427	20	468	31	466			
10	516	21	496					
11	570	22	442					

Fonte: Autores.

Tabela 2.4 - Acidentes no mês de Abril, separados por dia.

	Abril							
Dia	Nº de Acidentes	Dia	Nº de Acidentes	Dia	Somatório de Acidentes			
1	505	12	454	23	521			
2	586	13	485	24	492			
3	538	14	638	25	507			
4	475	15	424	26	451			
5	485	16	494	27	502			
6	476	17	483	28	493			
7	518	18	484	29	571			
8	614	19	493	30	616			
9	662	20	476					
10	555	21	485					
11	469	22	506					

Fonte: Autores.

Tabela 2.5 - Acidentes no mês de Maio, separados por dia.

Maio							
Dia	Nº de Acidentes	Dia	N° de Acidentes	Dia	Somatório de Acidentes		
1	535	12	479	23	490		
2	471	13	564	24	470		
3	494	14	585	25	503		
4	559	15	498	26	558		
5	504	16	519	27	611		
6	597	17	454	28	646		
7	623	18	509	29	566		
8	571	19	453	30	591		
9	478	20	587	31	494		
10	494	21	634		•		
11	507	22	579				

Tabela 2.6 - Acidentes no mês de Junho, separados por dia.

	Junho							
Dia	Nº de Acidentes	Dia	Nº de Acidentes	Dia	Somatório de Acidentes			
1	453	12	533	23	553			
2	506	13	488	24	596			
3	549	14	495	25	627			
4	632	15	532	26	514			
5	598	16	510	27	474			
6	456	17	587	28	447			
7	542	18	521	29	466			
8	502	19	480	30	519			
9	523	20	470		•			
10	561	21	483					
11	594	22	472					

Tabela 2.7 - Acidentes no mês de Julho, separados por dia.

	Julho							
Dia	Nº de Acidentes	Dia	N° de Acidentes	Dia	Somatório de Acidentes			
1	683	12	437	23	661			
2	727	13	518	24	626			
3	618	14	545	25	490			
4	554	15	602	26	506			
5	478	16	654	27	471			
6	539	17	593	28	507			
7	584	18	457	29	661			
8	686	19	494	30	635			
9	641	20	525	31	575			
10	645	21	554					
11	531	22	612					

Fonte: Autores.

Tabela 2.8 - Acidentes no mês de Agosto, separados por dia.

	Agosto							
Dia	Nº de Acidentes	Dia	Nº de Acidentes	Dia	Somatório de Acidentes			
1	439	12	606	23	461			
2	452	13	650	24	484			
3	499	14	567	25	430			
4	494	15	483	26	596			
5	646	16	515	27	592			
6	571	17	474	28	583			
7	538	18	465	29	462			
8	502	19	543	30	486			
9	512	20	531	31	562			
10	497	21	557		•			
11	505	22	489					

Fonte: Autores.

Tabela 2.9 - Acidentes no mês de Setembro, separados por dia.

Setembro							
Dia	Nº de Acidentes	Dia	N° de Acidentes	Dia	Somatório de Acidentes		
1	573	12	525	23	701		
2	671	13	545	24	677		
3	740	14	554	25	558		
4	491	15	555	26	501		
5	547	16	654	27	472		
6	632	17	673	28	462		
7	518	18	648	29	501		
8	616	19	597	30	542		
9	657	20	559				
10	637	21	531				
11	487	22	549				

Tabela 2.10 - Acidentes no mês de Outubro, separados por dia.

	Outubro							
Dia	N° de Acidentes	Dia	N° de Acidentes	Dia	Somatório de Acidentes			
1	666	12	513	23	615			
2	720	13	538	24	486			
3	492	14	632	25	563			
4	493	15	584	26	564			
5	580	16	549	27	538			
6	648	17	546	28	628			
7	672	18	493	29	755			
8	727	19	532	30	745			
9	630	20	538	31	534			
10	480	21	620					
11	571	22	665					

Tabela 2.11 - Acidentes no mês de Novembro, separados por dia.

Novembro							
Dia	Nº de Acidentes	Dia	Nº de Acidentes	Dia	Somatório de Acidentes		
1	504	12	751	23	512		
2	391	13	648	24	800		
3	481	14	541	25	587		
4	594	15	538	26	599		
5	581	16	622	27	604		
6	479	17	523	28	645		
7	545	18	694	29	512		
8	520	19	655	30	542		
9	562	20	588		<u> </u>		
10	611	21	563				
11	713	22	578				

Fonte: Autores.

Tabela 2.12 - Acidentes no mês de Dezembro, separados por dia.

Dezembro						
Dia	Nº de Acidentes	Dia	Nº de Acidentes	Dia	Somatório de Acidentes	
1	523	12	517	23	643	
2	746	13	454	24	595	
3	592	14	516	25	626	
4	504	15	529	26	379	
5	599	16	596	27	369	
6	503	17	611	28	402	
7	528	18	552	29	401	
8	384	19	468	30	503	
9	784	20	477	31	430	
10	649	21	515			
11	528	22	525			

Fonte: Autores.

2.2 ANÁLISES DE MÉTODOS MATEMÁTICOS

O processo de criação do método matemático para descrever os acidentes de trânsito no estado de São Paulo foi desenvolvido seguindo as seguintes etapas:

• Etapa 1:

 Divisão do conjunto de dados em grupos de 5, obtendo um total de 73 variáveis que serão utilizadas na Etapa 2.

Etapa 2:

 Aplicação do Método de Interpolação polinomial de Lagrange para polinômios de grau 72.

- Etapa 3:
 - Geração de um sistema linear 73x73
- Etapa 4:
 - o A Resolução do Sistema gerado por Eliminação Gaussiana.

Conforme indicado na etapa 1, para a determinação do conjunto de dados a ser utilizado na etapa 2, calculou-se uma média móvel para os valores, ou seja, para cada cinco dias presente, realizou-se a média desses valores e utilizou-se o dia máximo como referência desse valor, dessa forma, obtemos a tabela 3 com esses dados:

Tabela 3 - Média móvel para determinação do conjunto de dados.

Dia(X)	Média Móvel(Y)
5	339,8
10	380,2
15	385,2
20	321,6
25	437,4
30	432,4
35	404
40	460,8
45	517,8
50	468,8
55	477,6
60	514
65	479,4
70	492,6
75	476,8
80	504,4
85	505
90	453,4
95	517,8
100	565

105	101
	494
110	486
115	502,2
120 125	526,6
125	512,6
130	552,6 526,6 504,4
135	526,6
140	504,4
145	535,2
150	594,4
155	526,8
160	524,2
165	534,2
170	526
175	514,8
180	505,6
185	620,2
190	585,6
195	585,6 535,2
200	560
205	595,6
210	507
210	527
215	520
220	550,2
225	554
230	500,8 516,2
235	516,2
240	537 550,8
245	550,8
250 255	585,6
255	584,4
260	596,2
265	576,8
270	581,8
275	578,2
280	576,8 581,8 578,2 577 584,2
	584.2
285	304,2
270 275 280 285 290	569.8
290	569.8
290 295	569.8
290	569,8 569,6 553,2 633,2

310	505,2
315	590,2
320	620
325	604,6
330	615,2
335	565,2
340	588,8
345	574,6
350	522,4
355	524,6
360	553,6
365	421

O método de interpolação consiste em determinar uma função g(x) que descreve de forma aproximada o comportamento de outra função f(x) que não se conhece. São conhecidos alguns valores tabelados do tipo (x, f(x)) (Professor Volmir Eugênio Wilhelm — Professora Mariana Kleina).

 $f(x) = \begin{cases} f(x) & f(x) \\ (x_0, f(x_0)) & (x_2, f(x_2)) \\ (x_3, f(x_3)) & (x_4, f(x_4)) \end{cases}$

Figura 3 - Nós de interpolação.

Fonte: WILHELM; KLEINA, 2023, slide 3.

Dessa forma, interpolar um ponto x a um conjunto de n+1 dados $\{xi, f(xi)\}$, significa calcular o valor de f(x), sem conhecer a forma analítica de f(x) ou ajustar uma função analítica aos dados.

A interpolação polinomial consiste em determinar um polinômio, que assume valores conhecidos nos nós de interpolação, como pode-se verificar na figura 4.

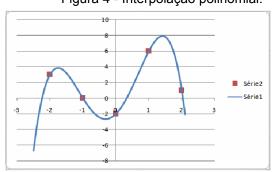


Figura 4 - Interpolação polinomial.

Fonte: WILHELM; KLEINA, 2023, slide 9.

Para a etapa 2, a interpolação de Lagrange que será aplicada ao problema, tem por objetivo determinar um polinômio que melhor represente um conjunto de dados não linear conhecido. Aplicou-se a aproximação da equação desejada para um polinômio de grau 72, como apresentado na equação 1.

$$y = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots + a_{73} x^{72}$$
 (1)

Dessa forma, gerou-se um sistema linear que pode ser resolvido através da eliminação Gaussiana que é um método numérico utilizado para resolver sistemas lineares de equações. O método consiste em realizar operações elementares sobre as linhas da matriz do sistema para transformá-la em uma forma triangular superior e obtendo-se a solução por meio da substituição regressiva.

O sistema linear 73x73 foi gerado utilizando a linguagem de programação *Python* em conjunto com a biblioteca *Numpy*, que suporta o processamento de matrizes, estando disponível através dos seguintes endereços:

- Matriz Linear
- Coeficientes

Com o cálculo dos coeficientes realizados, é possível então realizar a substituição em (1) para a definição do modelo matemático que relaciona a quantidade de acidentes pelos dias corridos, usando a média móvel.

3. RESULTADOS

A curva de tendência, obtida através da aplicação do método de Interpolação Polinomial de Lagrange nos dados do Ministério do Transporte, oferece uma apresentação clara da dinâmica dos acidentes de trânsito ao longo do ano. A partir da análise da curva de tendência gerada é possível extrair informações valiosas sobre picos sazonais e padrões que podem ser cruciais para o desenvolvimento de estratégias de prevenção.

O modelo matemático gerado possibilitou a criação de uma curva de tendência, que descreve a evolução na quantidade de acidentes de trânsito no estado de São Paulo durante o ano de 2022. A partir do gráfico apresentado na figura 5 pode-se observar esta evolução.

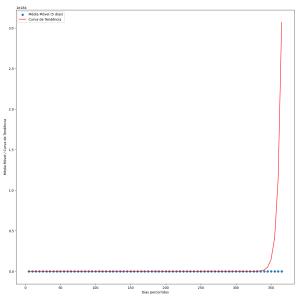


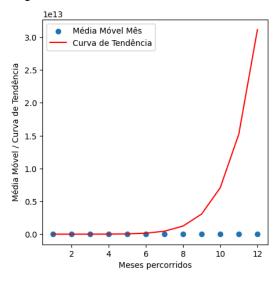
Figura 5 - Curva de tendência - teste inicial

Fonte: Autores

Com isso, pelo resultado da curva de tendência, verificou-se que ela "explodiu", por conta do tamanho do polinômio de grau, que faz o método escolhido gerar curvas fora do esperado, em relação aos dados obtidos. Por conta dessa falha, decidiu-se a alternativa onde foi feita a soma dos acidentes mês a mês.

Sendo assim, o sistema linear tornou-se significantemente menor (12x12), sendo necessário menos variáveis, porém, quando gerou a saída do seu resultado, a partir da Figura 6, a sua curva de tendência permaneceu muito alta.

Figura 6 - Curva de tendência - teste inicial



Verificando que o erro continuou igual, simulou-se para os 6 primeiros meses, no qual gerou o mesmo comportamento, a sua curva de tendência explodiu.

4. CONCLUSÃO

Os resultados obtidos por meio da implementação de técnicas avançadas de métodos numéricos proporcionam o entendimento profundo sobre a curva de acidentes de trânsito no Brasil, sobretudo sobre o estado de São Paulo. A partir dos dados coletados por meio do portal do Ministério de Transportes, a curva de tendência gerada valida a eficácia do método proposto.

Apesar das tentativas, não foi possível gerar a curva de tendência esperada, com isso, concluiu-se que a Interpolação Polinomial de Lagrange não é uma opção muito viável para graus elevados de polinômios, por conta de ser sensível a condições adversas, sendo mais eficaz realizar uma abordagem utilizando métodos iterativos, por exemplo. Porém, foi possível realizar as aplicações no estudo e analisar qual é a melhor abordagem para gerar o resultado correto.

Ademais, este trabalho destaca a importância da utilização de métodos numéricos e modelagem matemática como ferramentas fundamentais na formulação de estratégias para auxiliar os governos estaduais do Brasil na formulação de estratégias eficazes para a promoção da segurança viária.

REFERÊNCIAS

Registro Nacional de Acidentes e Estatísticas de Trânsito. Disponível em: https://www.gov.br/transportes/pt-br/assuntos/transito/conteudo-Senatran/registro-nacional-de-acidentes-e-estatisticas-de-transito>. Acesso em: 9 de novembro de 2023.

GOVERNO BRASILEIRO. **Fundacentro. Movimento Maio Amarelo reforça a importância de ações para reduzir acidentes de trânsito.** Disponível em: https://www.gov.br/fundacentro/pt-br/comunicacao/noticias/noticias/2023/maio/movimento-maio-amarelo-reforca-a-importancia-de-acoes-para-reduzir-acidentes-de-transito>. Acesso em: 9 de novembro de 2023.

PREFEITURA DE BELO HORIZONTE. **BHTrans participa dos 10 anos do Maio Amarelo:**no trânsito, escolha a vida. Disponível em:
https://prefeitura.pbh.gov.br/noticias/bhtrans-participa-dos-10-anos-do-maio-amarelo-no-tra
nsito-escolha-vida\>. Acesso em: 9 de novembro de 2023.

PREFEITURA DE BELO HORIZONTE. **10 anos de Maio Amarelo: campanha do ponto cego conscientiza motociclistas.** Disponível em: https://prefeitura.pbh.gov.br/noticias/10-anos-de-maio-amarelo-campanha-do-ponto-cego-conscientiza-motociclistas. Acesso em: 10 de Novembro de 2023.

PEDRO DA SILVA, Juliano; SOARES DE LIMA, Alan; AUGUSTO DE OLIVEIRA MOURA, Anderson; LUIZA VIEIRA REIS, Maria; BORBA DOS SANTOS, Sidicley. **APLICAÇÃO DE MÉTODOS NUMÉRICOS COM O EXCEL PARA A ANÁLISE E MODELAGEM MATEMÁTICA DA CURVA DE CONTAMINAÇÃO DA COVID-19 NOS ESTADOS DO BRASIL.** Caderno de Graduação - Ciências Exatas e Tecnológicas - UNIT - ALAGOAS, [S. I.], v. 6, n. 3, p. 57, 2021. Disponível em: https://periodicos.set.edu.br/fitsexatas/article/view/9523. Acesso em: 28 nov. 2023.

Professor Volmir Eugênio Wilhelm – Professora Mariana Kleina, **Métodos Numéricos.**

Interpolação – Métodos de Lagrange, UFPR - Universidade Federal do Paraná, Disponível em: https://docs.ufpr.br/~volmir/MN_11_interpolação_lagrange_ppt.pdf \>. Acesso em 4 de Dezembro de 2023.