# Apostila de Circuitos Digitais

Julia Acras, Isabella Stuart, Nathalie Godoi e Rafaela L.

XX/XX/2025

## Sumário



# 1 Tabela Verdade

A tabela verdade é um quadro que representa todas as possíveis combinações lógicas entre variáveis booleanas. Ela mostra como os valores de entrada (0 ou 1) influenciam a saída de um circuito.

Para construí-la, divide-se a tabela em duas partes: entradas (ou variáveis) e saídas (ou combinações resultantes). A cada nova variável adicionada, o número de combinações dobra, pois cada variável pode assumir dois valores: 0 ou 1.

Assim, para $n$ variáveis, o número total de linhas na tabela será $2^n$. Por exemplo, com 7 variáveis, temos $2^7 = 128$ combinações possíveis.

**Observação:** Neste material, utilizamos $\overline{A}$ para representar a negação da variável $A$.

## Operações Lógicas

- **Conjunção (AND) :** $A \cdot B$ - verdadeiro somente se $A$ e $B$ forem verdadeiros.
- **Disjunção (OR):** $A + B$ - falso somente se $A$ e $B$ forem falsos.
- **Negação (NOT):** $\overline{A}$ - inverte o valor lógico de $A$.
- **Implicação:** $A \to B$ - falso apenas se $A$ for verdadeiro e $B$ falso.
- **Bicondicional:** $A \leftrightarrow B$ - verdadeiro se $A$ e $B$ tiverem o mesmo valor lógico.

## Exemplo 1:

| A | $\overline{A}$ |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 0 | 1 |

*$\overline{A}$ tem sempre o valor lógico oposto de $A$.*

## Exemplo 2:

| A | B | $A \cdot B$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

*A função só é verdadeira quando $A$ e $B$ são ambos* 1*.*

## Exemplo 3:

| A | B | $A + B$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

*A função só é verdadeira quando $A$ ou $B$ são* 1*.*

## Exemplo 4:

| A | B | C | $(\overline{A \cdot B}) \cdot C$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

*A função só é verdadeira quando $C$ e $\overline{A \cdot B}$ são ambos verdadeiras.*

**Observação: números de linhas da Tabela Verdade**

A cada nova variável adicionada à tabela, o número de linhas dessa tabela verdade dobra. Dá para perceber isso comparando, por exemplo, os exemplos 1 e 2 - onde foram adicionadas 2 novas possibilidades - ou então do exemplo 3 para o 4, que aumentaram 4 possibilidade.

# 2 Álgebra de Boole

A Álgebra de Boole utiliza apenas dois valores:

- Verdadeiro: 1
- Falso: 0

## 2.1 Operações Fundamentais

As três operações fundamentais são:

1. **AND** (E lógico)
   A saída da operação **AND** é verdadeira somente quando todas as entradas são verdadeiras, ou seja, basta que apenas uma entrada seja falsa (0) para tornar todo o circuito falso.
2. **OR** (OU lógico)
   A saída é verdadeira se ao menos uma das entradas é verdadeira. Logo, a única situação em que o circuito tem seu valor lógico falso é quando todas as entradas são 0.
3. **NOT** (Negação)
   A saída é o inverso da entrada. Se a entrada for verdadeira (1), a saída será falsa (0) e vice-versa.

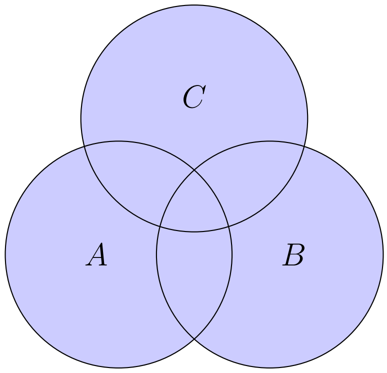
**Observação: Relação com Diagrama de Venn**

As operações booleanas também podem ser representadas por diagramas de Venn:

- **AND** – Interseção entre os conjuntos $A$ e $B$
- **OR** – União dos conjuntos $A$ e $B$
- **NOT** – Complemento do conjunto $A$

## 2.2 Representação na forma de Diagrama de Venn

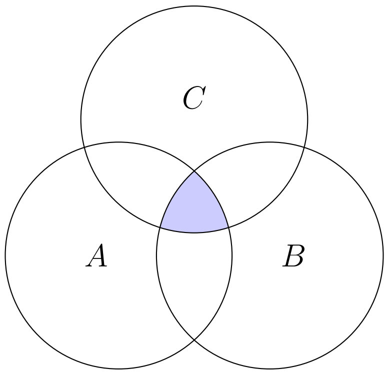
**Diagrama de Venn da expressão** $f = A + B + C$




Região destacada: $A \cup B \cup C$

**Explicação:** Nesse exemplo, para que a função $f$ acima tenha valor lógico 1, é preciso que ao menos **UMA** das variáveis seja verdadeira.

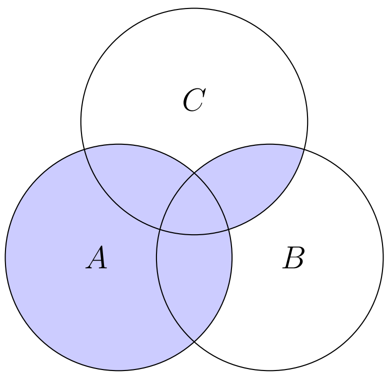
**Diagrama de Venn da função:** $f = A \cdot B \cdot C$




Região destacada: $A \cap B \cap C$

**Explicação:** Diferente do exemplo anterior, para que essa função $f$ seja verdadeira, é preciso que **TODAS** as variáveis tenham valor lógico 1.

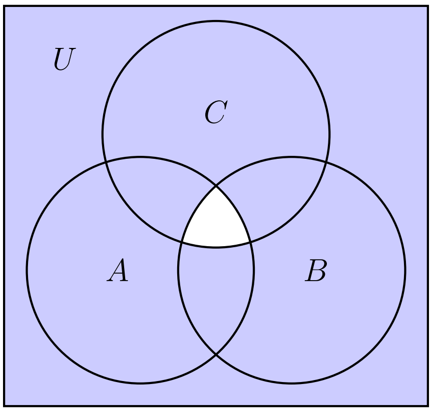
**Diagrama de Venn da expressão:** $f = A + (B \cdot C)$




Região destacada: $A \cup (B \cap C)$

**Explicação:**

**Diagrama de Venn da expressão:** $g = \overline{A \cdot B \cdot C}$




Região destacada: $\overline{A \cap B \cap C}$

**Explicação:** E sse exemplo seria equivalente ao complemento da intersecção de todas as variávies. Por exemplo, se uma função $f$ é determinada por essa intersecção e como visto anteriormente que essa expressão só é verdadeira quando todas as variáveis são simultaneamente 1, temos que nossa função $g$ é verdadeira sempre que $f$ for falsa, ou seja, ao menos uma das variáveis não for 1.

# 3 Expressões, Axiomas e Simplificação

Sendo $X, Y$ e $Z$ variáveis que assumem os valores lógicos 0 e 1, e utilizando os símbolos:

- $+$ para disjunção (OU lógico)
- $\cdot$ para conjunção (E lógico)
- $\overline{X}$ para negação de X

As propriedades fundamentais da Álgebra de Boole são representadas abaixo:

| **Propriedade** | **Versão OR** | **Versão AND** |
|---|---|---|
| 1 - Identidade | $X + 0 = X$ | $X \cdot 1 = X$ |
| 2 - Elemento Nulo | $X + 1 = 1$ | $X \cdot 0 = 0$ |
| 3 - Idempotência | $X + X = X$ | $X \cdot X = X$ |
| 4 - Complemento | $X + \overline{X} = 1$ | $X \cdot \overline{X} = 0$ |
| 5 - Involução | $\overline{\overline{X}} = X$ | $\overline{\overline{X}} = X$ |
| 6 - Comutativa | $X + Y = Y + X$ | $X \cdot Y = Y \cdot X$ |
| 7 - Associativa | $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$ | $(X \cdot Y) \cdot Z = X \cdot (Y \cdot Z)$ |
| 8 - Distributiva | $X + (Y \cdot Z) = (X + Y) \cdot (X + Z)$ | $X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + X \cdot Z$ |
| 9 - Absorção 1 | $X + X \cdot Y = X$ | $X \cdot (X + Y) = X$ |
| 10 - Absorção 2 | $X + \overline{X} \cdot Y = X + Y$ | $X \cdot (\overline{X} + Y) = X \cdot Y$ |
| 11 - Consenso | $X \cdot Y + \overline{X} \cdot Z + Y \cdot Z = X \cdot Y + \overline{X} \cdot Z$ | $(X + Y)(\overline{X} + Z)(Y + Z) = (X + Y)(\overline{X}$ |
| 12 - De Morgan | $\overline{X + Y} = \overline{X} \cdot \overline{Y}$ | $\overline{X \cdot Y} = \overline{X} + \overline{Y}$ |

As propriedades 2, 8, 9 e 11 serão demonstradas com tabelas verdades. As outras ficam a cargo do leitor demonstar.

# 4 Demonstração das Propriedades

## 4.1 Propriedade 2: Elemento Nulo

Versão OR:

| $X$ | $X+1$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 1 |

Assim, independente do valor lógico de $X$ a função sempre 1.
Versão AND:

| $X$ | $X \cdot 0$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 0 |

Dessa forma, fica perceptível que o valor lógico de $X$ na função não altera o valor da função, que será sempre 0.

## 4.2 Propriedade 8: Distributiva

Versão OR:

| $X$ | $Y$ | $Z$ | $X+(Y \cdot Z)$ | $(X+Y) \cdot (X+Z)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Versão AND:

| $X$ | $Y$ | $Z$ | $X \cdot (Y+Z)$ | $(X \cdot Y)+(X \cdot Z)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

## 4.3 Propriedade 9: Absorção 1

Versão OR:

| $X$ | $Y$ | $X + (X \cdot Y)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

Versão AND:

| $X$ | $Y$ | $X \cdot (X + Y)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

## 4.4 Propriedade 11: Consensus

Versão OR:

| $X$ | $Y$ | $Z$ | $X \cdot Y + \overline{X} \cdot Z + Y \cdot Z$ | $X \cdot Y + \overline{X} \cdot Z$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Versão AND:

| $X$ | $Y$ | $Z$ | $(X + Y)(\overline{X} + Z)(Y + Z)$ | $(X + Y)(\overline{X} + Z)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

# 5 MINTERMOS E MAXTERMOS

Mintermos e maxternos são formas canônicas de representar funções booleanas Toda expressão booleanas pode ser obtida através da sua tabela verdade

> **Observação:** Dizemos que uma expressão está na *forma canônica* quando ela é representada por uma **soma de mintermos** (forma canônica disjuntiva) ou um **produto de maxtermos** (forma canônica conjuntiva). Em ambas, todas as variáveis da função aparecem em cada termo, direta ou negada.

## 5.1 Mintermos

Mintermi: é a forma canônica de representar uma linha da tabela verdade utilizando o operador AND (E lógico) entre todas as variáveis da função. Cada variável pode aparecer de duas formas: direta ou negada, dependendo do valor que ela assume na linha da tabela.

*Notação*:

- Valor 0: a variável aparece **negada** (exemplo: $A = 0 \Rightarrow \overline{A}$)
- Valor 1: a variável aparece **direta** (exemplo: $A = 1 \Rightarrow A$)

O mintermo da primeira linha da tabela verdade é o $m_0$ e o da útima será $m_{2^n-1}$, sendo $n$ o número de variáveis da função. Para construir um mintermo, pega-se todas as variáveis da linha e usa-se a operação lógica **AND** entre elas, respeitando o uso da forma direta ou negada de acordo com os valores. Assim, cada mintermo representa exatamente uma linha onde a saída da função é igual a 1.

**Notação – Forma Canônica por Mintermos**

A notação $f(A, B, C) = \sum m(x, y, z)$ indica que a função $f$ é expressa como uma **soma de mintermos**, ou seja, uma disjunção (OU) dos termos onde a saída é igual a 1 na tabela verdade. As letras "x", "y"e "z"indicam as **linhas** que a função é **1**.

## 5.2 Maxtermo

Maxtermo: é a forma canônica de representar uma linha da tabela verdade utilizando o operador OR (OU lógico) entre todas as variáveis da função. A contrução dos maxtermos é semlhante à dos mintemos, porém segue a lógica inversa:

*Notação*:

- Valor 0: a variável aparece **direta** (exemplo: $A = 0 \Rightarrow A$)
- Valor 1: a variável aparece **negada** (exemplo: $A = 1 \Rightarrow \overline{A}$)

Para cada linha da tabela verdade em que a saída é 0, pode-se formar um maxtermo. O maxtermo da primeira linha da tabela verdade é o $M_0$, e o último será $M_{2^n-1}$, com $n$ sendo o número de variáveis.

**Notação – Forma Canônica por Maxtermos**

A notação $f(A, B, C) = \prod M(x, y, z)$ indica que a função $f$ é expressa como uma **produto de maxtermos**, ou seja, uma conjunção (AND) dos termos onde a saída é igual a 0 na tabela verdade. As letras "x", "y"e "z"indicam as **linhas** que a função é **zero**.

**Exemplo**:

$$f = A + B$$

| $A$ | $B$ | $f$ | Mintermo | Maxtermo |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | $m_0 = \overline{A}\overline{B}$ | $M_0 = A + B$ |
| 0 | 1 | 1 | $m_1 = \overline{A}B$ | $M_1 = A + \overline{B}$ |
| 1 | 0 | 1 | $m_2 = A\overline{B}$ | $M_2 = \overline{A} + B$ |
| 1 | 1 | 1 | $m_3 = AB$ | $M_3 = \overline{A} + \overline{B}$ |

- Os **mintermos** representam as linhas em que $f = 1$.
- Os **maxtermos** representam as linhas em que $f = 0$.
- A função $f = A + B$ tem como forma canônica:
  - **Soma de mintermos:** $f = m_1 + m_2 + m_3 = \overline{A}B + A\overline{B} + AB$
  - **Produto de maxtermos:** $f = M_0 = (A + B)$

**Mintermos**

Como cada mintermo é o complemento de seu maxtermo correspondente, podemos dizer que o complemento de uma função $f$ é representado pela multiplicação (AND) dos maxtermos associados às linhas onde $f = 0$.
No exemplo acima, como $f = A + B$, temos que $f = 1$ nas linhas 1, 2 e 3, e $f = 0$ apenas na linha 0. Logo, o complemento de $f$ é:

$$f' = M_0 = A + B \quad \Rightarrow \quad f = \overline{A + B}$$

Assim, mostramos que o maxtermo $M_0$ representa exatamente o valor de $f'$ nesta função.

# 6 Circuito Combinacional

**Circuitos combinacionais** são aqueles que só dependem do estado atual da entrada, ou seja, não possuem **memória**. Um exemplo simples é um circuito onde a saída $f$ é dada por $f = A \cdot B$, usando uma porta **AND** de duas entradas.

Esses circuitos incluem:

- Somadores
- Comparadores
- Codificadores
- Decodificadores
- Multiplexadores

# 7 Circuitos Sequenciais

**Diferente** dos circuitos combinacionais, os **circuitos sequenciais** dependem tanto das **entradas atuais** como do **estado anterior (memória)**.

Eles utilizam elementos de **armazenamento**, como flip-flops, para guardar o estado interno. Portanto, a saída é uma função das entradas e do estado armazenado.

São utilizados em:

- Regustradores
- Máquinas de Estados
- Contadores

Os circuitos sequenciais podem ser **síncronos** (controlados por um sinal de clock) ou **assíncronos** (controlados por variações nas entradas)