Apostila de Circuitos Digitais

Julia Acras, Isabella Stuart, Nathalie Godoi e Rafaela L.

XX/XX/2025

Sumário

1 Tabela Verdade

A tabela verdade é um quadro que representa todas as possíveis combinações lógicas entre variáveis booleanas. Ela mostra como os valores de entrada (0 ou 1) influenciam a saída de um circuito.

Para construí-la, divide-se a tabela em duas partes: entradas (ou variáveis) e saídas (ou combinações resultantes). A cada nova variável adicionada, o número de combinações dobra, pois cada variável pode assumir dois valores: 0 ou 1.

Assim, para n variáveis, o número total de linhas na tabela será 2^n. Por exemplo, com 7 variáveis, temos $2^7 = 128$ combinações possíveis.

Observação: Neste material, utilizamos $\overline{A}$ para representar a negação da variável A.

Operações Lógicas

- **Conjunção (AND) :** $A \cdot B$ - verdadeiro somente se A e B forem verdadeiros.

- **Disjunção (OR):** $A + B$ - falso somente se A e B forem falsos.
- **Negação (NOT):** $\overline{A}$ - inverte o valor lógico de A.
- **Implicação:** $A \rightarrow B$ - falso apenas se A for verdadeiro e B falso.
- **Bicondicional:** $A \leftrightarrow B$ - verdadeiro se A e B tiverem o mesmo valor lógico.

Exemplo 1:

A	$\overline{A}$
1	0
0	1

$\overline{A}$ tem sempre o valor lógico oposto de A.

Exemplo 2:

A	B	$A \cdot B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

A função só é verdadeira quando A e B são ambos 1.

2 Álgebra de Boole

A Álgebra de Boole utiliza apenas dois valores:

- Verdadeiro: 1
- Falso: 0

As três operações fundamentais são:

1. **AND** (E lógico)
   A saída da operação **AND** é verdadeira somente quando todas as entradas são verdadeiras, ou seja, basta que apenas uma entrada seja falsa (0) para tornar todo o circuito falso.

2. **OR** (OU lógico)
   A saída é verdadeira se ao menos uma das entradas é verdadeira. Logo, a única situação em que o circuito tem seu valor lógico falso é quando todas as entradas são 0.

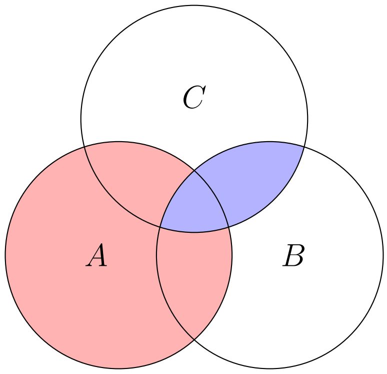
3. **NOT** (Negação)
   A saída é o inverso da entrada. Se a entrada for verdadeira (1), a saída será falsa (0) e vice-versa.

Observação: Relação com Diagrama de Venn

As operações booleanas também podem ser representadas por diagramas de Venn:

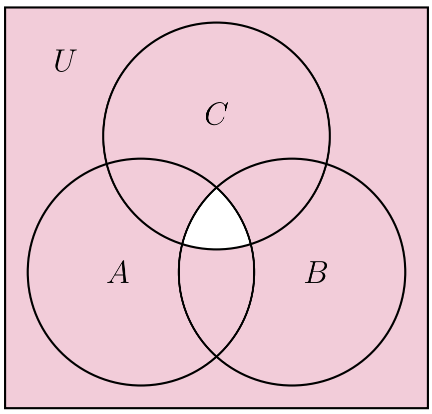
- **AND** – Interseção entre os conjuntos A e B
- **OR** – União dos conjuntos A e B
- **NOT** – Complemento do conjunto A

Diagrama de Venn da expressão: $A + (B \cdot C)$



Região destacada: $A \cup (B \cap C)$

Diagrama de Venn da expressão: $\overline{A \cdot B \cdot C}$



Região destacada: $\overline{A \cap B \cap C}$

3 Expressões, Axiomas e Simplificação

Sendo X, Y e Z variáveis que assumem os valores lógicos 0 e 1, e utilizando os símbolos:

- $+$ para disjunção (OU lógico)
- $\cdot$ para conjunção (E lógico)
- $\overline{X}$ para negação de X

As propriedades fundamentais da Álgebra de Boole são representadas abaixo:

Propriedade	**Versão OR**	**Versão AND**
1 - Identidade	$X + 0 = X$	$X \cdot 1 = X$
2 - Elemento Nulo	$X + 1 = 1$	$X \cdot 0 = 0$
3 - Idempotência	$X + X = X$	$X \cdot X = X$
4 - Complemento	$X + \overline{X} = 1$	$X \cdot \overline{X} = 0$
5 - Involução	$\overline{\overline{X}} = X$	$\overline{\overline{X}} = X$
6 - Comutativa	$X + Y = Y + X$	$X \cdot Y = Y \cdot X$
7 - Associativa	$(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$	$(X \cdot Y) \cdot Z = X \cdot (Y \cdot Z)$
8 - Distributiva	$X + (Y \cdot Z) = (X + Y) \cdot (X + Z)$	$X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + X \cdot Z$
9 - Absorção 1	$X + X \cdot Y = X$	$X \cdot (X + Y) = X$
10 - Absorção 2	$X + \overline{X} \cdot Y = X + Y$	$X \cdot (\overline{X} + Y) = X \cdot Y$
11 - Consenso	$X \cdot Y + \overline{X} \cdot Z + Y \cdot Z = X \cdot Y + \overline{X} \cdot Z$	$(X + Y)(\overline{X} + Z)(Y + Z) = (X + Y)(\overline{X}$
12 - De Morgan	$\overline{X + Y} = \overline{X} \cdot \overline{Y}$	$\overline{X \cdot Y} = \overline{X} + \overline{Y}$

As propriedades 2, 8, 9 e 11 serão demonstradas com tabelas verdades. As outras ficam a cargo do leitor demonstar.

4 Demonstração das Propriedades

4.1 Propriedade 2: Elemento Nulo

Versão OR:

X	$X + 1$
0	1
1	1

Assim, independente do valor lógico de X a função sempre 1.
Versão AND:

X	$X \cdot 0$
0	0
1	0

Dessa forma, fica perceptível que o valor lógico de X na função não altera o valor da função, que será sempre 0.

4.2 Propriedade 8: Distributiva

Versão OR:

X	Y	Z	$X + (Y \cdot Z)$	$(X + Y) \cdot (X + Z)$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Versão AND:

X	Y	Z	$X \cdot (Y + Z)$	$(X \cdot Y) + (X \cdot Z)$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

4.3 Propriedade 9: Absorção 1

Versão OR:

X	Y	$X + (X \cdot Y)$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Versão AND:

X	Y	$X \cdot (X + Y)$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

4.4 Propriedade 11: Consensus

Versão OR:

X	Y	Z	$X \cdot Y + \overline{X} \cdot Z + Y \cdot Z$	$X \cdot Y + \overline{X} \cdot Z$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Versão AND:

X	Y	Z	$(X+Y)(\overline{X}+Z)(Y+Z)$	$(X+Y)(\overline{X}+Z)$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

5 MINTERMOS E MAXTERMOS

Mintermos e maxternos são formas canônicas de representar funções booleanas Toda expressão booleanas pode ser obtida através da sua tabela verdade

> **Observação:** Dizemos que uma expressão está na *forma canônica* quando ela é representada por uma **soma de mintermos** (forma canônica disjuntiva) ou um **produto de maxtermos** (forma canônica conjuntiva). Em ambas, todas as variáveis da função aparecem em cada termo, direta ou negada.

5.1 Mintermos

Mintermi: é a forma canônica de representar uma linha da tabela verdade utilizando o operador AND (E lógico) entre todas as variáveis da função. Cada variável pode aparecer de duas formas: direta ou negada, dependendo do valor que ela assume na linha da tabela.

Notação:

- Valor 0: a variável aparece **negada** (exemplo: $A = 0 \Rightarrow \overline{A}$)
- Valor 1: a variável aparece **direta** (exemplo: $A = 1 \Rightarrow A$)

O mintermo da primeira linha da tabela verdade é o m_0 e o da útima será m_{2^n-1}, sendo n o número de variáveis da função. Para construir um mintermo, pega-se todas as variáveis da linha e usa-se a operação lógica **AND** entre elas, respeitando o uso da forma direta ou negada de acordo com os valores. Assim, cada mintermo representa exatamente uma linha onde a saída da função é igual a 1.

Notação – Forma Canônica por Mintermos

A notação $f(A, B, C) = \sum m(x, y, z)$ indica que a função f é expressa como uma **soma de mintermos**, ou seja, uma disjunção (OU) dos termos onde a saída é igual a 1 na tabela verdade. As letras "x", "y"e "z"indicam as **linhas** que a função é **1**.

5.2 Maxtermo

Maxtermo: é a forma canônica de representar uma linha da tabela verdade utilizando o operador OR (OU lógico) entre todas as variáveis da função. A contrução dos maxtermos é semlhante à dos mintemos, porém segue a lógica inversa:

Notação:

- Valor 0: a variável aparece **direta** (exemplo: $A = 0 \Rightarrow A$)
- Valor 1: a variável aparece **negada** (exemplo: $A = 1 \Rightarrow \overline{A}$)

Para cada linha da tabela verdade em que a saída é 0, pode-se formar um maxtermo. O maxtermo da primeira linha da tabela verdade é o M_0, e o último será M_{2^n-1}, com n sendo o número de variáveis.

Notação – Forma Canônica por Maxtermos

A notação $f(A, B, C) = \prod M(x, y, z)$ indica que a função f é expressa como uma **produto de maxtermos**, ou seja, uma conjunção (AND) dos termos onde a saída é igual a 0 na tabela verdade. As letras "x", "y"e "z"indicam as **linhas** que a função é **zero**.

Exemplo:

$$f = A + B$$

A	B	f	Mintermo	Maxtermo
0	0	0	$m_0 = \overline{A}\overline{B}$	$M_0 = A + B$
0	1	1	$m_1 = \overline{A}B$	$M_1 = A + \overline{B}$
1	0	1	$m_2 = A\overline{B}$	$M_2 = \overline{A} + B$
1	1	1	$m_3 = AB$	$M_3 = \overline{A} + \overline{B}$

- Os **mintermos** representam as linhas em que $f = 1$.
- Os **maxtermos** representam as linhas em que $f = 0$.
- A função $f = A + B$ tem como forma canônica:
  - **Soma de mintermos:** $f = m_1 + m_2 + m_3 = \overline{A}B + A\overline{B} + AB$
  - **Produto de maxtermos:** $f = M_0 = (A + B)$

Mintermos

Como cada mintermo é o complemento de seu maxtermo correspondente, podemos dizer que o complemento de uma função f é representado pela multiplicação (AND) dos maxtermos associados às linhas onde $f = 0$.
No exemplo acima, como $f = A + B$, temos que $f = 1$ nas linhas 1, 2 e 3, e $f = 0$ apenas na linha 0. Logo, o complemento de f é:

$$f' = M_0 = A + B \quad \Rightarrow \quad f = \overline{A + B}$$

Assim, mostramos que o maxtermo M_0 representa exatamente o valor de f' nesta função.

6 Circuito Combinacional

Circuitos combinacionais são aqueles que só dependem do estado atual da entrada, ou seja, não possuem **memória**. Um exemplo simples é um circuito onde a saída f é dada por $f = A \cdot B$, usando uma porta **AND** de duas entradas.

Esses circuitos incluem:

- Somadores
- Comparadores
- Codificadores
- Decodificadores
- Multiplexadores

7 Circuitos Sequenciais

Diferente dos circuitos combinacionais, os **circuitos sequenciais** dependem tanto das **entradas atuais** como do **estado anterior (memória)**.
Eles utilizam elementos de **armazenamento**, como flip-flops, para guardar o estado interno. Portanto, a saída é uma função das entradas e do estado armazenado.

São utilizados em:

- Regustradores
- Máquinas de Estados
- Contadores

Os circuitos sequenciais podem ser **síncronos** (controlados por um sinal de clock) ou **assíncronos** (controlados por variações nas entradas)