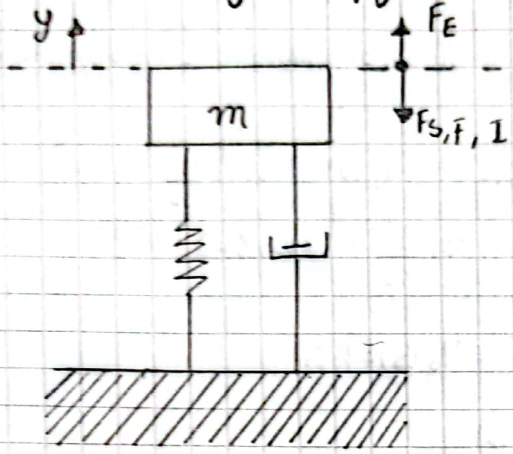
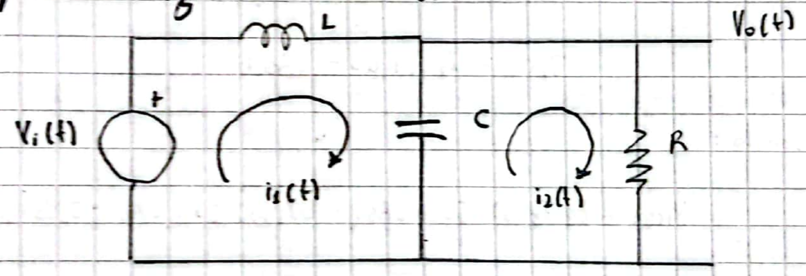
Parcial #3

1) Encuentre la función de transferencia que caracteriza el sistema masa, resorte, amortiguado, presentado en la siguiente figura. Condiciones iniciales cero.



Posteriormente, encuentre el sistema equivalente del modelo masa, resorte, amortiguado, a partir del siguiente circuito eléctrico:



Solución:

El sistema se puede modelar a partir de la conservación de las fuerzas:

$$F_S(t) + F_F(t) + F_I(t) = F_E(t)$$

donde $F_S(t) = ky(t)$, $F_F(t) = c\dfrac{dy(t)}{dt}$ y $F_I(t) = m\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}$

Entonces:

$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2} + c\frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = F_E(t) = x(t)$$

Con la transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right\} = s^n X(s)$$

Tenemos que:

$$ms^2 Y(s) + csY(s) + kY(s) = X(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$$

Ahora, para el circuito eléctrico, y utilizando impedancias transformadas:

$$V_1(s) = Ls\,I_1(s) + (I_1(s) - I_2(s))\frac{1}{cs}$$

$$(I_2(s) - I_1(s))\frac{1}{cs} + I_2(s)R = 0$$

$$V_0(s) = RI_2$$

Despejando $I_1(s)$ respecto a $I_2(s)$:

$$\frac{1}{cs} I_2(s) - \frac{1}{cs} I_1(s) + I_2(s)R = 0$$

$$I_1(s) = I_2(s)(1 + CRs)$$

Reemplazando:

$$V_1(s) = Ls\,I_2(s)(1 + CRs) + (I_2(s)(1 + CRs) - I_2(s))\frac{1}{cs}$$

$$V_1(s) = Ls\,I_2(s) + CRLs^2 I_2(s) + I_2(s)\frac{1}{Cs} + I_2(s)R - I_2(s)\frac{1}{Cs}$$

$$V_1(s) = I_2(s)(CRLs^2 + Ls + R)$$

$$\frac{I_2(s)}{V_1(s)} = \frac{1}{CRLs^2 + Ls + R}$$

$$\frac{RI_2(s)}{V_1(s)} = \frac{V_0(s)}{V_1(s)} = \frac{R}{CRLs^2 + \frac{L}{R}s + 1}$$

$$H(s) = \frac{V_0(s)}{V_1(s)} = \frac{1}{CLs^2 + \frac{L}{R}s + 1}$$

Circuito RLC	Péndulo elástico
CL	m
L/R	c
1	K

• Hallando la frecuencia natural amortiguada:

$$W_d = \left(\sqrt{\frac{K}{m}}\right)\left(\sqrt{1-\left(\frac{c}{2m\sqrt{\frac{K}{m}}}\right)^2}\right)$$

$$W_d = \frac{\sqrt{\frac{K}{m}}\sqrt{4Km-c^2}}{2\sqrt{Km}}$$

• El tiempo de levantamiento y tiempo pico se hace por simulación:

• Hallando el tiempo de establecimiento.

$$t_s = \frac{3}{\xi W_n} = \frac{3}{\left(\frac{c}{2m}\sqrt{\frac{K}{m}}\right)\sqrt{K/m}} = \frac{6m}{c}$$

Función de transferencia masa resorte amortiguada lazo cerrado:

$$H_{LC} = \frac{H(s)}{1 + A(s)\,H(s)}$$

En este caso:

$$H(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + K} \rightarrow \text{Función de transferencia lazo abierto.}$$

$$A(s) = 1$$

Calculamos $H_{LC}(s) = \dfrac{\frac{1}{ms^2+cs+K}}{1+\left(\frac{1}{ms^2+cs+K}\right)\cdot 1} = \dfrac{\frac{1}{ms^2+cs+K}}{\frac{ms^2+cs+K+1}{ms^2+cs+K}}$

$$H_{LC}(s) = \frac{ms^2+cs+K}{(ms^2+cs+K)(ms^2+cs+K+1)}$$

$$H_{LC}(s) = \frac{1}{ms^2+cs+K+1} \quad ó \quad \frac{1/m}{s^2+\frac{c}{m}s+\left(\frac{K+1}{m}\right)}$$

Hallando la forma canónica de segundo orden o comparando:

$$s^2 + 2\xi W_n s + W_n^2 = s^2 + \frac{c}{m}s + \left(\frac{K+1}{m}\right)$$

Igualando coeficientes:

$$1 = 1 \rightarrow s^2$$

Entonces teniendo en cuenta la forma canónica:

$$H(s)=\frac{1}{a_2s^2+a_1s+a_0}=\frac{1}{ms^2+cs+K}=\frac{1/m}{s^2+\frac{cs}{m}+\frac{K}{m}}$$

$$H(s)=K\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+W_n^2}$$

Hallando la forma canónica de segundo orden:

$$s^2+2\xi\omega_n s+W_n^2=s^2+\frac{cs}{m}+\frac{K}{m}$$

Igualando coeficientes:

$1=1 \rightarrow$ coef s^2

$2\xi W_n=\frac{c}{m} \rightarrow$ coef s

$W_n^2=\frac{K}{m} \rightarrow$ coef independiente

- Hallando frecuencia natural no amortiguada:

$$W_n=\sqrt{\frac{K}{m}}$$

- Hallando factor de amortiguamiento:

$$2\xi\sqrt{\frac{K}{m}}=\frac{c}{m} \quad ; \quad \xi=\frac{c}{2m\sqrt{\frac{K}{m}}}$$

- Hallando la ganancia K:

$$KW_n^2=\frac{1}{m} \rightarrow K=\frac{1}{mW_n^2} \rightarrow K=\frac{1}{\cancel{m}\frac{K}{\cancel{m}}} \rightarrow K=\frac{1}{K}$$

Finalmente, la forma canónica de segundo orden es:

$$H(s)=K\frac{W_n^2}{s^2+2\xi W_n s+W_n^2}=\frac{1}{\cancel{K}}\frac{\cancel{K}/m}{s^2+\cancel{2}\left(\frac{c}{\cancel{2}m\sqrt{\frac{K}{m}}}\right)\sqrt{\frac{K}{m}}\,s+\frac{K}{m}}$$

$$H(s)=\frac{1/m}{s^2+\frac{c}{m}s+\frac{K}{m}}=\frac{1}{m\left(s^2+\frac{c}{m}s+\frac{K}{m}\right)}$$

$$2\xi W_n = \frac{c}{m} \longrightarrow s$$

$$W_n^2 = \frac{K+1}{m} \longrightarrow \text{Independiente}$$

Hallando la frecuencia natural no amortiguada

$$W_n = \sqrt{\frac{K+1}{m}}$$

Hallando factor de amortiguamiento

$$\xi = \frac{c}{2m\sqrt{\frac{K+1}{m}}}$$

Par la ganancia:

$$KW_n^2 = \frac{1}{m}$$

$$K = \frac{1}{mW_n^2}$$

$$K = \frac{1}{m\left(\sqrt{\frac{K+1}{m}}\right)^2}$$

$$K = \frac{1}{K+1}$$

Entonces la forma canónica de segundo orden es:

$$H_{Lc}(s) = \frac{W_n^2}{s^2 + 2\xi W_n s + W_n^2}$$

$$H_{Lc}(s) = \frac{\frac{K+1}{m}}{s^2 + 2\left(\frac{c}{2m\sqrt{\frac{K+1}{m}}}\sqrt{K+1/m}\cdot s + \frac{K+1}{m}\right)}$$

$$H_{Lc}(s) = \frac{1}{m(s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{K+1}{m})}$$

Hallando la frecuencia natural amortiguada

$$W_d = W_n \sqrt{1-\xi^2}$$

$$W_d = \sqrt{\frac{k+1}{m}} \sqrt{1-\left(\frac{c}{2m\sqrt{(k+1)/m}}\right)^2}$$

$$W_d = \frac{\sqrt{\frac{k+1}{m}}\sqrt{4km+4m-c^2}}{2\sqrt{m(k+1)}}$$

Hallando el tiempo de establecimiento:

$$t_s = \frac{3}{\xi W_n} = \frac{3}{\frac{c}{2m\sqrt{\frac{k+1}{m}}}\sqrt{\frac{k+1}{m}}} = \frac{6m}{c}$$

Espectros de cada etapa

1) $A m(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta_0)$

$$A_c m(t)\left(\frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}\right) = A\left(\frac{m(t)\, e^{j2\pi f_0 t}}{2}\right) + \left(\frac{m(t)\, e^{-j2\pi f_0 t}}{2}\right)$$

con $F\{x(t) \cdot e^{\pm j w_0 t}\} = X(w \mp w_0)$

$$\frac{A}{2} \quad M((w - 2\pi f_0) + (w + 2\pi f_0))$$

2) $\cos(2\pi f_0 t + \theta_0)$ con $\theta_0 = 0$

$$\cos(2\pi f_0 t) = \left\{ \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2} \right\} = F\left\{ \frac{e^{j2\pi f_0 t}}{2} \right\} + F\left\{ \frac{e^{-j2\pi f_0 t}}{2} \right\}$$

con $F\{e^{\pm j w_0 t}\} = 2\pi \delta(w \mp w_0)$

$F(w) = \pi \delta(w - 2\pi f_0) + \pi \delta(w + 2\pi f_0)$ → Mixer. (1-2)

$$A_1 m(t) \cos^2(2\pi f_0 t + \theta_0) = \frac{A_1 m(t)}{2} + \frac{A m(t)}{2} \cos(4\pi f_0 t + \cancel{2\theta_0})$$

$$F(w) = \frac{A M(w)}{2} + \frac{A}{2} m(t) \cdot \left(\frac{e^{j4\pi f_0 t} + e^{-j4\pi f_0 t}}{2} \right)$$

$$= \frac{A M(w)}{2} + \frac{A}{2} \left(\frac{m(t) \cdot e^{j4\pi f_0 t}}{2} \right) + \left(\frac{m(t) \cdot e^{-j4\pi f_0 t}}{2} \right)$$

con $F(x(t) \cdot e^{\pm j w_0 t}) = X(w \mp w_0)$

$$= \frac{A M(w)}{2} + \frac{A}{4} M((w - 4\pi f_0) + (w + 4\pi f_0))$$ → Lowpass

$$\frac{A_1}{2} m(t)$$

$F(w) = \frac{A M(w)}{2}$ → Scale amplitude by $\frac{2}{A_1}$

$$\frac{\cancel{A_1}}{\cancel{2}} m(t) \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{A_1}} = m(t)$$ $F(m(t)) = M(w)$