Activité « somme-produit »

Partie 1/4

Voici l'énoncé du problème « somme-produit »:

> « Déterminer deux nombres entiers a et b connaissant leur somme S et leur produit P. »

Ce problème remonte aux babyloniens qui souhaitaient déterminer la longueur ℓ et la largeur L d'un terrain rectangulaire (jardin, champ, etc.) connaissant son périmètre $2(\ell + L)$ et son aire $\ell \cdot L$.

Exo. 1. Déterminer deux nombres u et v dont :

a) le produit vaut 6 et la somme 5

$u =$ __________ $v =$ __________

b) le produit vaut 12 et la somme 7

$u =$ __________ $v =$ __________

c) le produit vaut 12 et la somme -7

$u =$ __________ $v =$ __________

d) le produit vaut -5 et la somme 4

$u =$ __________ $v =$ __________

e) le produit vaut 10 et la somme -7

$u =$ __________ $v =$ __________

f) le produit vaut -9 et la somme 8

$u =$ __________ $v =$ __________

g) le produit vaut -8 et la somme -2

$u =$ __________ $v =$ __________

h) le produit vaut 15 et la somme -8

$u =$ __________ $v =$ __________

Exo. 2. Écrire clairement une procédure pour obtenir une solution.

Pour rappel, la quatrième identité remarquable est de la forme

$$(x + u)(x + v) = x^2 + (u + v)x + uv.$$

On retrouve le terme somme $(u + v)$ et le terme produit uv.

Exo. 3. À l'aide du premier exercice, factoriser les expressions suivantes en utilisant la quatrième identité remarquable.

a) $x^2 + 5x + 6 =$ ____________________

b) $x^2 + 7x + 12 =$ ____________________

c) $x^2 - 7x + 12 =$ ____________________

d) $x^2 + 4x + -5 =$ ____________________

e) $x^2 - 7x + 10 =$ ____________________

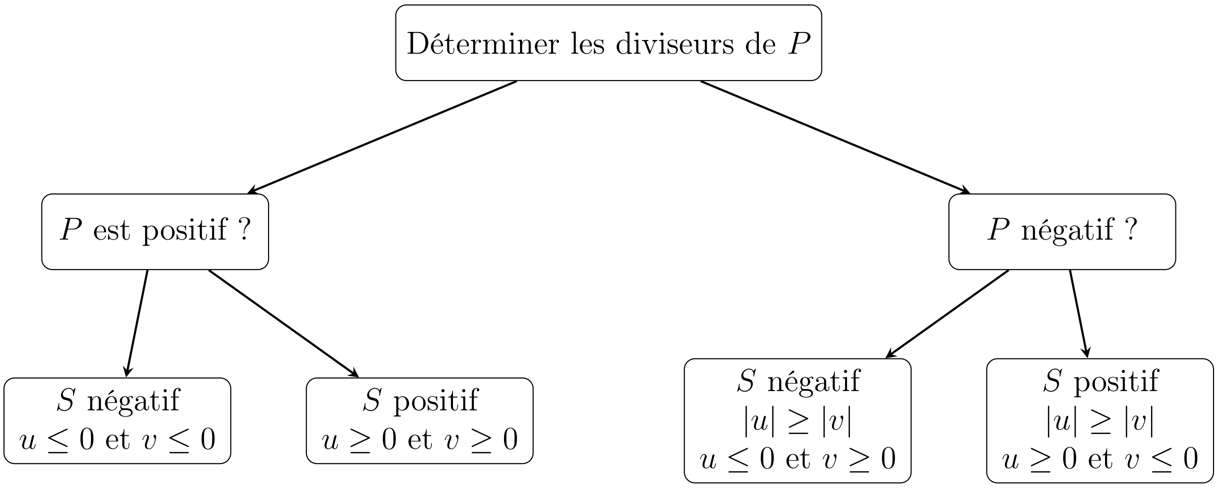
f) $x^2 + 8x - 9 =$ ____________________

g) $x^2 - 2x - 8 =$ ____________________

h) $x^2 - 8x + 15 =$ ____________________

Partie 2/4

Un exemple de procédure. On note P le produit et S la somme.



Exo. 4. Utiliser votre méthode ou la méthode ci-dessus pour déterminer deux nombres u et v dont :

a) le produit vaut -20 et la somme -8

$u =$ __________ $v =$ __________

b) le produit vaut -20 et la somme 1

$u =$ __________ $v =$ __________

c) le produit vaut 12 et la somme 8

$u =$ __________ $v =$ __________

d) le produit vaut 12 et la somme 13

$u =$ __________ $v =$ __________

e) le produit vaut -40 et la somme 3

$u =$ __________ $v =$ __________

f) le produit vaut 28 et la somme -11

$u =$ __________ $v =$ __________

Exo. 5. Factoriser à l'aide de la quatrième identité remarquable.

a) $x^2 - 8x - 20 =$ ____________________

b) $x^2 + x - 20 =$ ____________________

c) $x^2 - 8x + 12 =$ ____________________

d) $x^2 + 13x + 12 =$ ____________________

e) $x^2 + 3x - 40 =$ ____________________

f) $x^2 - 11x + 28 =$ ____________________

Exo. 6. Essayer de déterminer deux nombres a et b dont

le produit vaut 233543149332 et la somme vaut 1423373.

Si vous n'y arrivez pas, quel est l'obstacle rencontré par rapport à votre méthode ou à la méthode proposée ?

Partie 3/4

Dès cette partie, l'usage de la calculatrice est recommandé.

Les babyloniens ont trouvé une méthode pour résoudre ce problème, la voici.
Si on note P le produit et S la somme.

Étape 1 On pose $r = \dfrac{S}{2}$.

Étape 2 Il existe m tel que

$$(r+m)(r-m) = P \text{ et par définition } (r+m)+(r-m) = 2r = S.$$

On va déterminer la valeur de m pour obtenir les nombres recherchés $u = r+m$ et $v = r-m$.

Étape 3 On isole m dans l'égalité ci-dessus.

$$(r+m)(r-m) = P \iff r^2 - m^2 = P \iff -m^2 = P - r^2 \iff m^2 = r^2 - P \iff m = \sqrt{r^2 - P}$$

Étape 4 On connaît $r = \dfrac{S}{2}$ et P, ainsi

$$m = \sqrt{\frac{S^2}{4} - P}$$

Étape 5 On obtient

$$u = \frac{S}{2} - \sqrt{\frac{S^2}{4} - P} \text{ et } v = \frac{S}{2} + \sqrt{\frac{S^2}{4} - P}$$

Déterminer u et v sachant que leur produit vaut 233543149332 et leur somme vaut 1423373 puis factoriser

$$x^2 + 1423373x + 233543149332.$$

$S =$ ______________ $P =$ ______________

$\dfrac{S^2}{4} =$ ______________ $\dfrac{S}{2} =$ ______________ $\sqrt{\dfrac{S^2}{4} - P} =$ ______________

$v =$ ______________ $u =$ ______________

$x^2 + 1423373x + 233543149332 = (x +$ ______________$)(x +$ ______________$)$

Exo. 7. Factoriser les expressions suivantes

a) $x^2 + 4533498x + 4622763439976$

b) $x^2 + 4405091x + 124184968158$

Cette methode vous fait-elle penser à quelque chose que vous connaissez déjà ? Une autre procédure pour factoriser ce type d'expressions vous vient-elle à l'esprit ?

Partie 4/4

On peut résoudre l'équation

$$x^2 + Sx + P = 0 \tag{1}$$

en utilisant la formule quadratique.
Pour rappel : si $ax^2 + bx + c = 0$ admet une ou deux solutions réelles, alors $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$. De plus,

$$ax^2 + bx + c = (x - s_1)(x - s_2),$$

avec $s_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $s_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.
Dans le cas de l'équation (1), $a =$ ________, $b =$ ________ et $c =$ ____________.

Exo. 8. On reprend les expressions de l'exercice 7.

a) Les factoriser en résolvant l'équation du second degré.
$x^2 + 4533498x + 4622763439976 = 0$

$x^2 + 4405091x + 124184968158 = 0$

b) Que remarques-tu ? Pourquoi ?

____

____

____

À l'issue de cette activité, je suis capable de :

- Déterminer deux nombres connaissant leur somme et leur produit;
- Expliciter le lien entre le problème somme-produit avec la factorisation de la quatrième identité;
- Appliquer une méthode générale pour résoudre ce problème datant des babyloniens;
- Utiliser le lien entre le problème somme-produit et les équations du second degré pour ramener le problème somme-produit à la résolution d'une équation du second degré.