Chapitre 2

Ensembles et intervalles réels

1. Notations ensemblistes

Un ensemble représente une collection d'objets qui sont appelés les éléments de l'ensemble. On note un ensemble avec des accolades. Par exemple

$$\{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ est l'ensemble qui contient les éléments } 1, 2, 3, 4 \text{ et } 5$$

Notation – Soient A et B deux ensembles. On note

✎ l'ensemble vide, l'ensemble qui ne contient aucun élément, $\{\} = \emptyset$,

✎ $x \in A$ pour x appartient à (est un élément de) A ;

✎ $x \notin A$ pour x n'appartient pas à (n'est pas un élément de) A ;

✎ $B \subset A$ pour dire que B est inclus dans A, c'est-à-dire que tous les éléments de B sont aussi des éléments de A. On dit que B est un sous-ensemble de A.

✎ $B \not\subset A$ pour dire que B n'est pas inclus dans A, c'est-à-dire qu'il existe au moins un élément de B qui n'est pas un élément de A.

Voici trois façons de décrire un ensemble. Par extension, par compréhension ou par une fonction.

Par extension On donne tous les éléments de l'ensemble séparés par des points-virgules. Les points de suspension sont autorisés lorsque la règle qui définit l'appartenance à l'ensemble est claire. Par exemple

$$A = \{1; 2; 3; 4\} \text{ ou } B = \{0; 2; 4; 6; 8; \ldots\} \text{ (pour les nombres pairs)}$$

Par compréhension On donne une ou plusieurs conditions d'appartenance à l'ensemble après avoir précisé où sélectionner les éléments. Par exemple

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ est impair }\} \text{ ou } C = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid x \leq 3\}$$

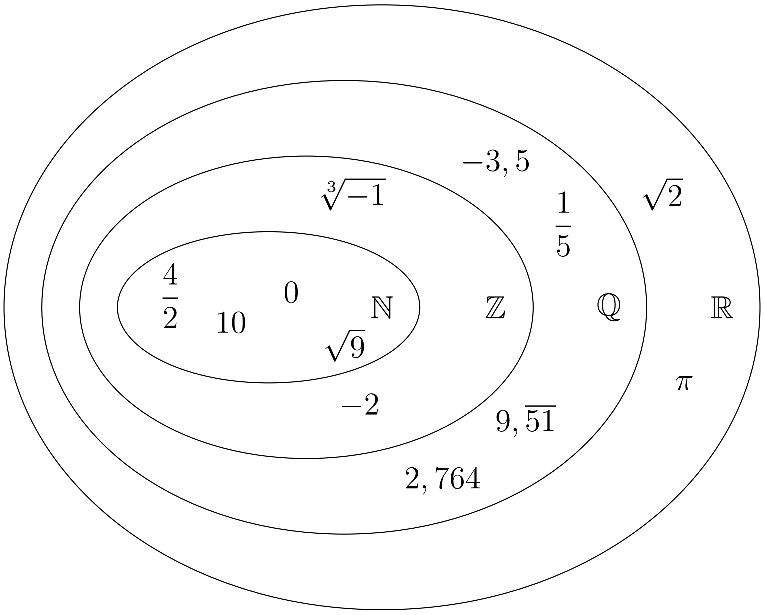
Par une fonction On fait appel à une fonction $f : D \to E$ et on définit l'ensemble $H = \{f(x) \mid x \in D\}$. Par exemple

$$I = \{2x \mid x \in \mathbb{N}\} \text{ ou encore } J = \{x^2 \mid x \in \mathbb{Q}\}$$

Les ensembles peuvent paraître abstraits, mais nous avons un outil qui permet de représenter les relations entre deux ou plusieurs ensembles.

Définition (Diagramme de Venn) – Un diagramme de Venn est une représentation d'un ou plusieurs ensembles par des lignes simples fermées dans lesquelles on représente les éléments en fonction de leurs appartenances. Chaque élément ne peut occuper qu'une seule position, celle qui correspond à sa caractérisation la plus précise.

Voici un exemple avec les ensembles de nombres vus au chapitre précédents. Chaque nombre se situe dans le plus petit ensemble auquel il appartient. Nous verrons d'autres exemples dans les séries.

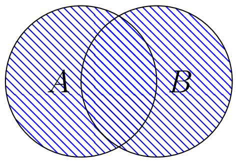


2. Opérations sur les ensembles

On définit trois opérations sur les ensembles. Soient A et B deux ensembles.

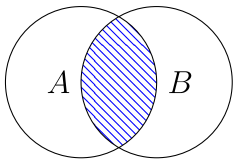
L'union de A et de B notée $A \cup B$ est l'ensemble formé en réunissant les éléments de A et de B.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$



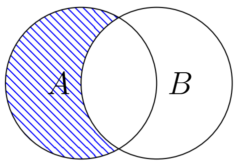
L'intersection de A et de B notée $A \cap B$ est l'ensemble formé de tous les éléments qui appartiennent à A et à B.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$$



La différence de A et de B notée $A \setminus B$ est l'ensemble formé de tous les éléments de A qui n'appartiennent pas à B.

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$$



Pour des ensembles de nombres, on introduit les notations suivantes :

Notation – Soit A un ensemble de nombres, on note

- ✎ $A^* = A \setminus \{0\}$ les éléments de A différents de zéro.
- ✎ $A_+ = A_{\geq 0} = \{a \in A \mid a \geq 0\}$ les éléments de A positifs ou nul ;
- ✎ $A_- = A_{\leq 0} = \{a \in A \mid a \leq 0\}$ les éléments de A négatifs ou nul.

3. Intervalles réels

On définit pour des ensembles réels la notion suivante.

Définition (Intervalles réels) – Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

Intervalle fermé L'intervalle $[a; b]$ s'appelle l'intervalle fermé entre a et b.

$$[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

Intervalle ouvert L'intervalle $]a; b[$ s'appelle l'intervalle ouvert entre a et b.

$$]a; b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

Intervalle semi-ouvert à gauche L'intervalle $]a; b]$ s'appelle l'intervalle semi-ouvert à gauche entre a et b.

$$]a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

Intervalle semi-ouvert à droite L'intervalle $[a; b[$ s'appelle l'intervalle semi-ouvert à droite entre a et b.

$$[a; b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

Les nombres a et b s'appelle les bornes de l'intervalle.

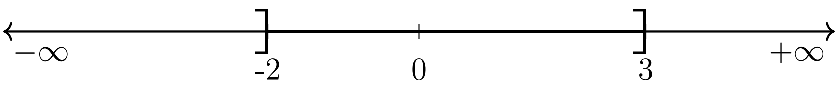
Avec ces intervalles, nous introduisons le symbole infini noté ∞. Nous utiliserons ce symbole avec $-\infty$ et $+\infty$ comme indiqué sur la droite réelle ci-dessous.
On peut utiliser les symboles $-\infty$ et $+\infty$ comme des bornes d'intervalles. L'infini n'est pas contenu dans l'intervalle et on utilise la notation semi-ouvert à la borne $-\infty$ ou $+\infty$.

$$[a; +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\} \quad \text{et} \quad]-\infty; a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$$

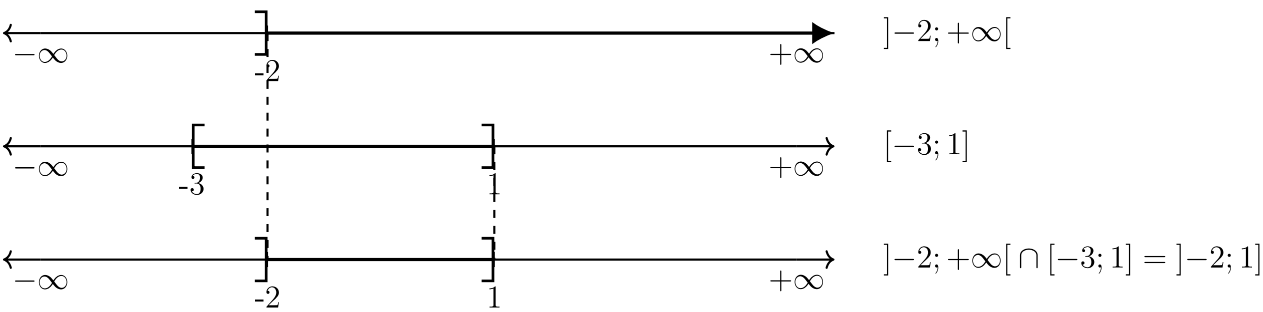
Avec ces notations

$$\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$$

On peut donner une représentation de chacun de ces intervalles sur la droite réelle de la manière suivante. Par exemple, l'intervalle $]-2; 3]$:



Pour terminer ce chapitre, voici un exemple d'opération avec les intervalles réels. Déterminons graphiquement l'intervalle $]-2; +\infty[\cap[-3; 1]$. On commence par aligner les représentations graphiques des ensemble les unes sous les autres. On utilise la définition de l'opération « intersection » pour déterminer le résultat.



Notes personnelles ou complément