
Activités

Acti. 1. Prouver que la somme de deux entiers impairs quelconques est un nombre pair.

Acti. 2. On considère l'identité suivante, appelée égalité de Lagrange (mathématicien du XVI^e siècle):

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

a) Démontrer cette identité.

b) Appliquer cette identité à quatre entiers (par exemple 2, 3, 4, 5) en utilisant la calculatrice.

Acti. 3. On considère le nombre $123456789^2 - 123456786 \cdot 123456792$.

a) Calculer ce nombre à l'aide d'une calculatrice. b) Poser $x = 123456789$ et exprimer le nombre considéré en fonction de x .

c) Développer et réduire l'expression trouvée en b). d) Que conclure des calculs précédents ?

Acti. 4. Développer le carré: $(3 + 2\sqrt{2})^2$. En déduire une autre écriture pour $\sqrt{17 + 12\sqrt{2}}$.

Exercices

Exo. 1. Connaître par coeur et savoir démontrer les identités suivantes :

a) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

b) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

c) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

d) $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

Exo. 2. Prouver que la somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est un nombre impair.

Exo. 3. Développer à l'aide d'une identité remarquable, directement et rapidement (sans copier l'énoncé, ne pas s'accorder plus de 5').

a) $(x + y)^2$

b) $(2x^2 + 2)(2x^2 - 6)$

c) $(x - y)(x + y)$

d) $(3x + y)^2$

e) $(x^2 + y^3)^2$

f) $(x - 1)^2$

g) $(1 - x)(1 + x)$

h) $(4x - 3)^2$

i) $(x^3 + 3y)(x^3 - 3y)$

j) $(3z - 2)^2$

k) $(1 - x)^2$

l) $(xy + 2y)^2$

m) $(x^2 - 1)^2$

n) $(2x + 2)^2$

o) $(2a + 3)(2a + 3)$

p) $(xyz + 5)(xyz - 5)$

q) $(3x^3 - 5)^2$

r) $(a + 3b)(a + 3b)$

s) $(x^2 - 1)(x^2 - 1)$

t) $(4a^2b - 5)(4a^2b + 5)$

u) $(2xy^3 - 1)(2xy^3 - 1)$

v) $(x^4 + y)(x^4 + y)$

w) $(1 - ax^4)(1 + ax^4)$

x) $(x^2 + a^2)(x^2 - a^2)$

Exo. 4. Développer directement à l'aide des identités remarquables sans écrire l'étape intermédiaire.

Exemple : $(x - 3)(x + 2) = x^2 - x - 6$.

a) $(x - 1)(x - 2)$

b) $(x + 3)(x + 1)$

c) $(x - 4)(x + 4)$

d) $(y + 6)(y - 8)$

e) $(a + 1)(a - 12)$

f) $(y + 9)(y - 4)$

g) $(a + 7)(a + 3)$

h) $(x - 3)(x - 10)$

Exo. 5. Utiliser les identités remarquables pour calculer (sans calculatrice) les carrés suivants :

a) Avec $(a + b)^2$: 23^2 ; 92^2 ; 101^2 ; 42^2

b) Avec $(a - b)^2$: 39^2 ; 68^2 ; 99^2 ; 298^2

Exo. 6. Déterminer les identités remarquables pour : $(a + b)^1$; $(a + b)^2$; $(a + b)^3$; $(a + b)^4$; $(a + b)^5$ (Expressions réduites et ordonnées selon les puissances décroissantes de a)

Exo. 7. Développer et réduire en utilisant les identités remarquables.

a) $(10rx + 8)(10rx + 5)$

b) $\left(st + \frac{3}{2}s\right)\left(st - \frac{3}{2}s\right)$

c) $\left(5s^2y - \frac{5}{8}s^2\right)^2$

d) $\left(\frac{1}{8}x + \frac{2}{3}sx\right)^2$

e) $\left(\frac{2}{5}z^2 + \frac{3}{5}r^2z\right)\left(\frac{2}{5}z^2 - \frac{3}{5}r^2z\right)$

f) $\left(\frac{7}{2}r - 4rt^2\right)^2$

g) $(6ry + 3)(6ry + 2)$

h) $\left(\frac{4}{3}z^2 + \frac{5}{9}rz\right)^2$

i) $\left(\frac{4}{7}tx - 8\right)\left(\frac{4}{7}tx + 7\right)$

j) $\left(10s + \frac{8}{7}t^3\right)^2$

Automatismes

Automatismes testés en semaine 7, car il y a l'évaluation en semaine 6.

Aut. 1. Développer explicitement à l'aide d'une identité remarquable (réduire le développement obtenu lorsque c'est possible).

a) $(-3\sqrt{3} + 5\sqrt{5})^2$

b) $(6\sqrt{3} + 6)(6\sqrt{3} - 6)$

c) $(-3\sqrt{2} + 5\sqrt{2})(-3\sqrt{2} - 5\sqrt{2})$

d) $(-5\sqrt{2} + 5)^2$

e) $(4\sqrt{3} - 6)^2$

f) $(-2\sqrt{11} - 5)^2$

Aut. 2. Développer explicitement à l'aide d'une identité remarquable (réduire le développement obtenu lorsque c'est possible).

a) $(1 + \sqrt{5})^2$

b) $(\sqrt{3} + \sqrt{7})^2$

c) $(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})^2$

d) $(\sqrt{3} + \sqrt{15})(\sqrt{3} + \sqrt{12})$

e) $(2 - \sqrt{5})(2 + \sqrt{5})$

f) $(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2$

Aut. 3. Factoriser au maximum les expressions suivantes.

a) $40ty - 10t^2 + 35y$

b) $12s^2t + 32s^2 + 24st$

c) $-30z + 45t + 10$

d) $70sz^2 + 50sz + 60z$

e) $50rs^2 + 40r^2 + 20r$

f) $21t + 56$

g) $72rx^2 + 32x^2 - 56x$

h) $-63y^2 - 56xy - 42y$

i) $-56sy - 40s + 24$

j) $-6s^2t + 9t^3$

Aut. 4. Factoriser au maximum les expressions suivantes.

a) $-60rsyz - 48sz - 18z$

b) $-30r^2t^2x^2 - 60r^2t^2x + 10rtx^2$

c) $-21stxz + 42sxz + 56s$

d) $-2syx^2 - 16st + 14s$

e) $10st^2x^2y - 14s^2tx$

f) $-18rxz^2 + 21tz - 15z$

g) $rst + 7rt$

h) $56rtxy^2 + 48rtx^2$

i) $35rx^3 + 42xyz^2$

j) $-3ry + 15y + 15$