Activité « somme-produit »

Partie 1/4

Voici l'énoncé du problème « somme-produit »:

> « Déterminer deux nombres entiers a et b connaissant leur somme s et leur produit p. »

Ce problème remonte aux babyloniens qui souhaitaient déterminer la longueur ℓ et la largeur L d'un terrain rectangulaire (jardin, champ, etc.) connaissant son périmètre $2(\ell + L)$ et son aire $\ell \cdot L$.

Exo. 1. Déterminer deux nombres a et b dont :

a) le produit vaut 6 et la somme 5

$a =$ __________ $b =$ __________

b) le produit vaut 12 et la somme 7

$a =$ __________ $b =$ __________

c) le produit vaut 12 et la somme -7

$a =$ __________ $b =$ __________

d) le produit vaut -5 et la somme 4

$a =$ __________ $b =$ __________

e) le produit vaut 10 et la somme -7

$a =$ __________ $b =$ __________

f) le produit vaut -9 et la somme 8

$a =$ __________ $b =$ __________

g) le produit vaut -8 et la somme -2

$a =$ __________ $b =$ __________

h) le produit vaut 15 et la somme -8

$a =$ __________ $b =$ __________

Exo. 2. Écrire clairement une procédure pour obtenir une solution.

____

____

____

____

Pour rappel, la quatrième identité remarquable est de la forme

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab.$$

On retrouve le terme somme $(a + b)$ et le terme produit (ab).

Exo. 3. À l'aide du premier exercice, factoriser les expressions suivante en utilisant la quatrième identité remarquable.

a) $x^2 + 5x + 6 =$ ____________________

b) $x^2 + 7x + 12 =$ ____________________

c) $x^2 - 7x + 12 =$ ____________________

d) $x^2 + 4x + -5 =$ ____________________

e) $x^2 - 7x + 10 =$ ____________________

f) $x^2 + 8x - 9 =$ ____________________

g) $x^2 - 2x - 8 =$ ____________________

h) $x^2 - 8x + 15 =$ ____________________

Partie 2/4

Un exemple de procédure

Exo. 4. Utiliser votre méthode ou la méthode ci-dessus pour déterminer deux nombres a et b dont :

a) le produit vaut -20 et la somme -8

$a =$ ________ $b =$ ________

b) le produit vaut -20 et la somme 1

$a =$ ________ $b =$ ________

c) le produit vaut 12 et la somme 8

$a =$ ________ $b =$ ________

d) le produit vaut 12 et la somme 13

$a =$ ________ $b =$ ________

e) le produit vaut -40 et la somme 3

$a =$ ________ $b =$ ________

f) le produit vaut 28 et la somme -11

$a =$ ________ $b =$ ________

Exo. 5. Factoriser à l'aide de la quatrième identité remarquable.

a) $x^2 - 8x - 20 =$ ________________

b) $x^2 + x - 20 =$ ________________

c) $x^2 - 8x + 12 =$ ________________

d) $x^2 + 13x + 12 =$ ________________

e) $x^2 + 3x - 40 =$ ________________

f) $x^2 - 11x + 28 =$ ________________

Exo. 6. Essayer de déterminer deux nombres a et b dont

le produit vaut 233543149332 et la somme vaut 1423373.

Si vous n'y arrivez pas, quel est l'obstacle rencontré par rapport à votre méthode ou à la méthode proposée ?

____

____

Partie 3/4

Les babyloniens ont trouvé une méthode pour résoudre ce problème, la voici.
Si on note P le produit et S la somme.

Étape 1 On pose $r = \dfrac{S}{2}$.

Étape 2 Il existe m tel que

$$(r+m)(r-m) = P.$$

On va déterminer la valeur de m pour obtenir les nombres recherchés $a = r + m$ et $b = r - m$.

Étape 3 On développe l'égalité ci-dessus

$$(r+m)(r-m) = P \iff r^2 - m^2 = P \iff -m^2 = P - r^2 \iff m^2 = r^2 - P \iff m = \sqrt{r^2 - P}$$

Étape 4 On connaît $r = \dfrac{S}{2}$ et P, ainsi

$$m = \sqrt{\frac{S^2}{4} - P}$$

Étape 5 On obtient

$$a = \frac{S}{2} - \sqrt{\frac{S^2}{4} - P} \text{ et } b = \frac{S}{2} + \sqrt{\frac{S^2}{4} - P}$$

Déterminer a et b sachant que leur produit vaut 233543149332 et leur somme vaut 1423373 puis factoriser

$$x^2 + 1423373x + 233543149332.$$

Exo. 7. Factoriser les expressions suivantes

a) $x^2 + 1423373x + 233543149332$

b) $x^2 + 1423373x + 233543149332$

Cette methode vous fait-elle penser à quelque chose que vous connaissez déjà ? Une autre procédure pour factoriser ce type d'expressions vous vient-elle à l'esprit ?

Partie 4/4