

Ensembles de nombres et calcul numérique

1. Les ensembles de nombres

Voici les ensembles de nombres avec lesquels nous travaillerons cette année.

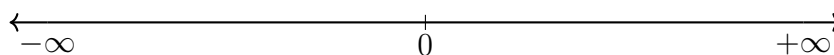
- \mathbb{N} appelé l'ensemble des entiers naturels est donné par $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.
- \mathbb{Z} appelé l'ensemble des entiers relatifs est donné par $\mathbb{Z} = \{\dots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.
- \mathbb{Q} appelé l'ensemble des nombres rationnels est donné par $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z} \text{ et } q \neq 0\}$.

La barre verticale $|$ se lit "tel que", ainsi \mathbb{Q} est l'ensemble des fractions $\frac{p}{q}$ telles que $p, q \in \mathbb{Z}$ et $q \neq 0$. On a aussi la caractérisation suivante

$\mathbb{Q} = \{x \mid x \text{ a un développement décimal fini ou infini périodique}\}$.

- \mathbb{R} appelé l'ensemble des nombres réels est donné par $\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ a un développement décimal quelconque}\}$.

On peut également représenter \mathbb{R} comme une droite



Définition (nombre irrationnel) – Un nombre irrationnel est un nombre $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \notin \mathbb{Q}$.

Par exemple, $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ ou encore π sont des nombres irrationnels.

2. Rappels

Voici quelques rappels.

Définition (multiple) – Un nombre $a \in \mathbb{N}$ est un multiple de b s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a = b \cdot n$.

Définition (diviseur) – Un nombre $a \in \mathbb{N}$ est un diviseur de b s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $b : a = n$.

Si un $a \in \mathbb{N}$ est un multiple de $b \in \mathbb{N}$, alors b est un diviseur de a .

Un procédé qui peut paraître basique, mais qui s'avère fondamental en mathématiques.

Résultat (division euclidienne) – Soit $a, b \in \mathbb{N}$. Il existe $q, r \in \mathbb{N}$ vérifiant

$$a = b \cdot q + r \text{ avec } r < b.$$

q s'appelle le quotient et r le reste de la division de a par b .

Derrière ce résultat se cache la division avec des nombres naturels comme vous l'avez apprise à l'école primaire.

Il sera utile de connaître les critères de divisibilité suivants. Un nombre est divisible par **deux** s'il est pair ;

trois si la somme de ses chiffres est divisible par trois ;

quatre si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est un multiple de quatre ;

cinq si le chiffre des unités est zéro ou cinq ;

neuf si la somme de ses chiffres est divisible par neuf.

Définition (nombre premier) – Un nombre premier est un nombre naturel qui a exactement deux diviseurs.

On remarque que 1 n'est pas un nombre premier et que 2 est le seul nombre premier pair. Voici la liste des 100 premiers nombres premiers

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397, 401, 409, 419, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463, 467, 479, 487, 491, 499, 503, 509, 521, 523, 541.

Les nombres premiers sont cruciaux en mathématiques, car ils constituent les briques élémentaires qui permettent de construire tous les autres nombres...

Résultat (décomposition en produit de nombres premiers) – Tout nombre entier naturel se décompose de manière unique comme un produit de nombres premiers.

Technique – Pour décomposer un nombre en produit de nombres premiers, on utilise les critères de divisibilité et les tables de multiplication. Par exemple :

$$\begin{array}{r|l} 462 & 2 \\ 231 & 3 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad 462 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11.$$

Voici un résultat fondamental dont la preuve apparaît déjà dans les Éléments d'Euclide (Livre 9, Proposition 20).

Résultat – (infinité de nombres premiers) Il y a une infinité de nombres premiers.

Preuve. Soit une liste finie de nombres premiers que l'on note $\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$. On considère $q = p_1 \cdot p_2 \cdots p_k + 1$ le produit de tous ces nombres auquel on ajoute 1. Aucun des nombres p_1, p_2, \dots, p_k ne divise q , car la division euclidienne de q par un de ces nombres donne un reste de 1. Par le théorème de décomposition en nombres premiers, il existe au moins un autre nombre premier en dehors de cette liste et donc l'ensemble des nombres premiers n'est pas fini (on peut toujours s'assurer qu'il en existe un de plus). \square

De grands problèmes de mathématiques encore ouverts (sans réponse) aujourd'hui concernent les nombres premiers. Des mathématiciens et mathématiciennes passent leur vie à essayer de répondre à ces questions. Voici deux exemples de conjectures.

La conjecture de Goldbach qui a été formulée en 1742 dans une correspondance avec le mathématicien suisse Euler.

Tout nombre entier pair supérieur à 3 peut s'écrire comme une somme de deux nombres premiers.

On appelle deux nombres premiers des nombres premiers jumeaux si p et $p + 2$ sont premiers. Par exemple, les nombres 3 et 5, 11 et 13 ou encore 41 et 43. La conjecture est la suivante

Il existe une infinité de nombres premiers jumeaux.

La liste des nombres premiers peut vous aider à déterminer d'autres exemples de nombres premiers jumeaux.

3. Écriture décimale et fractionnaire

Un nombre rationnel peut s'écrire sous forme fractionnaire ou sous forme décimale avec développement fini ou infini périodique.

Technique (écriture fractionnaire vers décimale) – Afin de passer de l'écriture fractionnaire à l'écriture décimale, on effectue la division du numérateur par le dénominateur de la fraction. On continue jusqu'à ce que la division aboutisse ou jusqu'à obtenir une période (c.f. Série 2).

Technique (écriture décimale vers fractionnaire) – Il y a deux cas à traiter. Si le développement est fini ou infini périodique. Si le développement est fini, on multiplie le nombre décimal par une puissance de 10 jusqu'à obtenir un nombre entier. La fraction égale au nombre décimal de départ est le nombre entier obtenu sur la puissance de 10. Par exemple

$$31,453 = \frac{31453}{1000}$$

Si le développement est infini périodique, nous illustrons la méthode à l'aide d'exemples.

Si $x = 0, \overline{34}$.

$$\begin{aligned} x &= 0, \overline{34} \\ x \cdot 10^2 &= 34, \overline{34} \\ x \cdot 10^2 &= 34 + x \\ x \cdot 10^2 - x &= 34 \\ x \cdot (10^2 - 1) &= 34 \\ x \cdot 99 &= 34 \\ x &= \frac{34}{99} \end{aligned}$$

Si $x = 2, \overline{7}$, on écrit $x = 2 + y$ avec $y = 0, \overline{7}$.

$$\begin{aligned} y &= 0, \overline{7} \\ y \cdot 10 &= 7, \overline{7} \\ y \cdot 10 &= 7 + y \\ y \cdot 10 - y &= 7 \\ y \cdot 9 &= 7 \\ y &= \frac{7}{9} \\ x &= 2 + \frac{7}{9} \\ x &= \frac{25}{9} \end{aligned}$$

Si $x = 23, 45\overline{678}$, on écrit

$$\begin{aligned} x \cdot 100 &= 2345 + 0, \overline{678} \\ \text{et on pose } y &= 0, \overline{678} \\ y &= 0, \overline{678} \\ y \cdot 10^3 &= 678, \overline{678} \\ y \cdot 10^3 &= 678 + y \\ y \cdot 10^3 - y &= 678 \\ y \cdot 999 &= 678 \\ y &= \frac{678}{999} \\ x \cdot 100 &= 2345 + \frac{678}{999} \\ x \cdot 100 &= \frac{2342655}{999} + \frac{678}{999} \\ x \cdot 100 &= \frac{2343333}{999} \\ x &= \frac{2343333}{9990} \\ x &= \frac{781111}{33300} \end{aligned}$$

Remarque – On écrit toujours le résultat sous forme d'une fraction irréductible ou d'un nombre entier.

4. Puissances

Voici quelques rappels sur les puissances.

Définition – (puissance, base, exposant) On note a^n le produit répété n -fois de a avec lui-même. On lit cette expression « a à la puissance n ».

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{-fois}}$$

On appelle a la base et n l'exposant.

Propriétés – Pour $a, b \in \mathbb{R}$ et $m, n \in \mathbb{Q}$

$$1) a^n \cdot b^n = (ab)^n \quad 2) a^m \cdot a^n = a^{n+m} \quad 3) \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \text{ pour } a \neq 0 \quad 4) (a^n)^m = a^{n^m} = a^{nm}$$

Rappelons que $a^0 = 1$ et $0^n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définition – (notation scientifique) Un nombre $a \in \mathbb{Q}, a > 0$ est en notation scientifique s'il est écrit sous la forme

$$a = b \cdot 10^n \text{ avec } 1 \leq b < 10 \text{ et } n \in \mathbb{Z}$$

Technique – La notation scientifique facilite le calcul avec les nombres décimaux.

5. Racines

Définition – (racine carrée) La racine carrée d'un nombre $a \in \mathbb{R}$ **positif** est l'unique nombre **positif** $b \in \mathbb{R}$ tel que $b^2 = a$. On note $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a} = b$.

Définition – (racine cubique) La racine cubique d'un nombre $a \in \mathbb{R}$ est l'unique nombre $b \in \mathbb{R}$ tel que $b^3 = a$. On note $\sqrt[3]{a} = b$.

Rappelons que $\sqrt{-1}$ n'est pas défini, $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{0} = 0$ et $\sqrt[3]{-1} = -1$

Propriétés – Les propriétés suivantes permettent de calculer avec des racines carrées et cubiques.

Racine carrée

- 1) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ pour $a, b \in \mathbb{R}, a, b \geq 0$
- 2) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ pour $a, b \in \mathbb{R}, a \geq 0, b > 0$
- 3) $\sqrt{a^n} = a^{\frac{n}{2}}$ pour $a \in \mathbb{R}, a \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}$
- 4) $\sqrt{a^2} = |a|$ pour $a \in \mathbb{R}$
- 5) $(\sqrt{a})^2 = a$ pour $a \in \mathbb{R}, a \geq 0$.

Racine cubique

- 1) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a \cdot b}$ pour $a, b \in \mathbb{R}$
- 2) $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ pour $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$
- 3) $\sqrt[3]{a^n} = a^{\frac{n}{3}}$ pour $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$
- 4) $\sqrt[3]{a^3} = a$ pour $a \in \mathbb{R}$
- 5) $(\sqrt[3]{a})^3 = a$ pour $a \in \mathbb{R}$.

Définition – (conjugué) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}, c \geq 0$, le conjugué de $a + b\sqrt{c}$ est $a - b\sqrt{c}$. Il vérifie

$$(a + b\sqrt{c}) \cdot (a - b\sqrt{c}) = a^2 - b^2c.$$

Voici deux exemples de calculs faisant intervenir ces propriétés.

$$\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{6}} \stackrel{\text{prop. 2)}}{=} \sqrt{\frac{32}{6}} = \sqrt{\frac{16}{3}} \stackrel{\text{prop. 2)}}{=} \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} \stackrel{\text{c.f. convention}}{=} \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\sqrt{3}(\sqrt{6} + \sqrt{5}) = \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} \stackrel{\text{prop. 2)}}{=} \sqrt{3 \cdot 6} + \sqrt{3 \cdot 5} = \sqrt{18} + \sqrt{15} \stackrel{\text{c.f. convention}}{=} 3\sqrt{2} + \sqrt{15}$$

On suit deux conventions avec les racines :

- 1) Lorsque $c \in \mathbb{N}$, on extrait les carrés sous la racines, c'est-à-dire qu'on écrit une racine $\sqrt{c} = a \cdot \sqrt{b}$ avec $b \in \mathbb{N}$ le plus petit possible. Pour faire cela, on commence par

décomposer c en produit de facteurs premiers, puis on utilise la première et la troisième propriété des racines, par exemple

$$\sqrt{288} = \sqrt{2^5 \cdot 3^2} = \sqrt{2 \cdot 2^4 \cdot 3^2} = \sqrt{2^4} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2} = 2^2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} = 12\sqrt{2}$$

On aurait également pu remarquer

$$\sqrt{288} = \sqrt{2 \cdot 144} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{144} = 12\sqrt{2}$$

- 2) On ne laisse pas de racines au dénominateur d'une fraction dans le résultat d'un calcul. Pour supprimer la racine on a les deux techniques suivantes d'amplification de la fraction en question par 1.

Si le dénominateur contient une racine simple.

$$\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot 1 = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Si le dénominateur est de la forme $a + b\sqrt{c}$, on utilise le conjugué. On amplifie la fraction

par $1 = \frac{a - b\sqrt{c}}{a - b\sqrt{c}}$.

$$\frac{7}{1 + \sqrt{5}} = \frac{7}{1 + \sqrt{5}} \cdot \frac{1 - \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}} = \frac{7(1 - \sqrt{5})}{(1 + \sqrt{5})(1 - \sqrt{5})} = \frac{7(1 - \sqrt{5})}{1 - 5} = \frac{7(1 - \sqrt{5})}{-4} = -\frac{7(1 - \sqrt{5})}{4}$$

Notes personnelles ou complément
