Corrigés – première partie

Table des matières

Exercices - première partie SECTION 1

Réponses

1.1 Calcul numérique

1.1.1 Division euclidienne

Corrigé 1

a) $0{,}\overline{3}$ b) $0{,}\overline{1}$ c) $1{,}\overline{076923}$ d) $0{,}\overline{1176470588235294}$

Corrigé 2

a) $\frac{1}{7} = 0{,}\overline{142857}$; $\frac{2}{7} = 0{,}\overline{285714}$; $\frac{3}{7} = 0{,}\overline{428571}$; $\frac{4}{7} = 0{,}\overline{571428}$; $\frac{5}{7} = 0{,}\overline{714285}$; $\frac{6}{7} = 0{,}\overline{857142}$.

b) À remarquer.

c) $\frac{22}{23} = 0{,}\overline{9565217391304347826086}$

Corrigé 3

On note un nombre à cinq chiffres

$$a + b \cdot 10 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10^3 + e \cdot 10^4 \quad \text{où } a,b,c,d,e \in \mathbb{N}, e \neq 0$$

Si le nombre a quatre chiffres, alors on prend $e = 0$ et $d \neq 0$.

a) On a $a = 4$ et $b = 2$. Par ailleurs la somme $a + b + c + d + e$ doit être divisible par 3 pour que le nombre soit un multiple de 3. On a $2 + 4 = 6$ qui est déjà un multiple de 3. Le nombre recherché est donc 99924.

b) Le nombre recherché est 1224.

c) Le nombre recherché est 2046.

d) Le nombre recherché est 9753.

Corrigé 4

a) 1; 4; 9, on les appelle des carrés parfaits.

b) Ce sont des nombres premiers. $\{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; \ldots\}$.

Corrigé 5

a) 21,05 b) $3{,}0\overline{6}$ c) $4{,}\overline{2857140}$ d) $5{,}\overline{63}$

1.1.2 Nombres rationnels

Corrigé 6

a) $\frac{35}{100} = \frac{7}{20}$ b) $\frac{35}{99}$ c) $\frac{349}{999}$ d) $\frac{3}{10} + \frac{49}{990} = \frac{173}{495}$

e) $\frac{3}{10} + \frac{5}{90} = \frac{32}{90} = \frac{16}{45}$ f) $\frac{34}{100} + \frac{9}{900} = \frac{7}{20}$. Noter que $0{,}\overline{9} = 1$ et que $0{,}0\overline{9} = 0{,}01$. g) $1 + \frac{2}{9} = \frac{11}{9}$ h) $\frac{325}{100} = \frac{13}{4}$

i) $\frac{15}{100} = \frac{3}{20}$ j) $1 + \frac{4}{10000} = \frac{251}{250}$ k) $\frac{80}{99}$ l) $\frac{16}{100} = \frac{4}{25}$

m) 3 n) $3 + \frac{141}{999} = \frac{1046}{333}$

Corrigé 7

a) $\frac{12}{10}$; $\frac{13}{10}$; $\frac{14}{10}$; b) $1{,}\overline{1} = \frac{10}{9}$; $\frac{11}{9}$; $\frac{12}{9}$; c) $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

1.1.3 Racines

Corrigé 8

a) $7\sqrt{3}$ b) $14\sqrt{2}-2\sqrt{5}$ c) -2 d) $5-2\sqrt{6}$

e) $5-7\sqrt{3}$ f) $16+8\sqrt{5}$ g) $20\sqrt{3}$ h) 6

Corrigé 9 On utilise la multiplication par l'expression conjuguée et les propriétés des racines.

Corrigé 10

a) $\dfrac{4\sqrt{5}-10\sqrt{2}}{3}$ b) $\dfrac{11}{3}$ c) $-2\sqrt{3}$ d) $-2\sqrt{15}$

Corrigé 11

a) $\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$ b) $-\dfrac{203\sqrt{3}}{18}$ c) $\dfrac{41\sqrt{5}}{20}$ d) $-\dfrac{3\sqrt{5}+\sqrt{7}}{2}$.

Corrigé 12 $(3+2\sqrt{2})^2 = 17+12\sqrt{2}$, ainsi, $\sqrt{17+12\sqrt{2}} = 3+2\sqrt{2}$

1.2 Ensembles et intervalles

1.2.1 Ensembles de nombres

Corrigé 13 $\dfrac{2}{7} \in \mathbb{Q}\,;\ \sqrt{100} \in \mathbb{N}\,;\ \sqrt{200} \in \mathbb{R}\,;\ \pi+1 \in \mathbb{R}\,;\ -\sqrt{1{,}21} \in \mathbb{Q}\,;\ 3{,}14 \in \mathbb{Q} \cdot 10^5 \in \mathbb{N}\,;\ -\dfrac{17}{2} \in \mathbb{Q}$.

Corrigé 14

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	aucun
$\dfrac{3}{2}$			X	X	
$\dfrac{3{,}14}{0{,}01}$	X	X	X	X	
$\sqrt{7}$				X	
$\dfrac{2-\sqrt{8}}{\sqrt{2}-1}$		X	X	X	
$\sqrt{9}$	X	X	X	X	
π				X	
$-\sqrt{100}$		X	X	X	

Corrigé 15

a) Vrai b) Faux, semi-ouvert à gauche c) Vrai

d) Faux, ce n'est pas l'intervalle e) Vrai f) Faux, il y appartient

g) Faux, 0 est dans l'intersection h) Vrai i) Vrai

Corrigé 16 Plusieurs possibilités, par exemple la suite suivante (à réduire) :

$$\left\{\frac{1}{3}+\frac{k}{20}\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right) \mid k = 1, \dots, 10\right\}$$

Corrigé 17

a) $\frac{3-7}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \in \mathbb{Z}$

b) $\frac{4}{4-1} = \frac{4}{3} \in \mathbb{Q}$

c) $2{,}5 : 3 + 1 = \frac{25}{30} + 1 = \frac{5}{6} + 1 = \frac{11}{6} \in \mathbb{Q}$

d) $\frac{2^0}{1^2} = \frac{1}{1} = 1 \in \mathbb{N}$

e) $(\sqrt{2} - 1) : 2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$

f) $\frac{3-\sqrt{9}}{\pi} = \frac{3-3}{\pi} = 0 \in \mathbb{N}$

g) $\sqrt{3 \cdot 27} = \sqrt{81} = 9 \in \mathbb{N}$

h) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{12}}{\sqrt{27}} = \frac{\sqrt{3}-2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \frac{1-2}{3} = -\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$

i) $\sqrt{\sqrt{25} - \frac{3}{\sqrt{9}}} = \sqrt{5 - \frac{3}{3}} = \sqrt{4} = 2 \in \mathbb{N}$

j) $\frac{14}{\sqrt{25}-\sqrt{144}} = \frac{14}{5-12} = \frac{14}{-7} = -2 \in \mathbb{Z}$

k) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{81} - \frac{16}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{9-8} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} \in \mathbb{R}$

l) $\frac{5-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-5} = \frac{5-\sqrt{3}}{-(5-\sqrt{3})} = -1 \in \mathbb{Z}$

1.2.2 Ensembles quelconques

Corrigé 18 $\notin$, $\in$, $\subset$, $\not\subset$

Corrigé 19

a) $\mathrm{A} = \{-1; 1; 3; 5; 7; 9\}$

b) $\mathrm{B} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}\}$

c) $\mathrm{C} = \{-1, 0\}$

d) $\mathrm{D} = \emptyset$

e) $\mathrm{E} = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

f) $\mathrm{F} = \emptyset$

Corrigé 20

a) $\mathrm{A} = \{x \in \mathbb{N}^* \mid 1 \leq x \leq 8\}$

b) $\mathrm{B} = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq n \leq 13\}$

c) $\mathrm{C} = \{3n + 1 \mid n \in \mathbb{N}, 0 \leq n \leq 6\}$

d) $\mathrm{D} = \left\{\frac{1}{n^2+1} \mid n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq n \leq 5\right\}$

e) $\mathrm{E} = \{\frac{n-1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$

f) $\mathrm{F} = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}, 0 \leq n \leq 10\}$

Corrigé 21

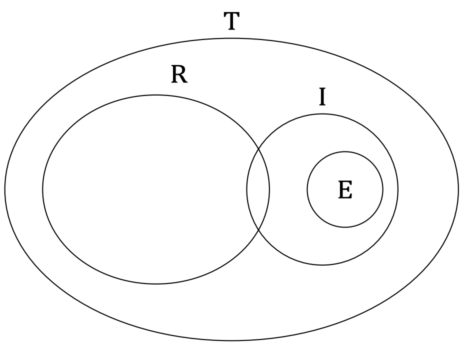
a) $\{-3; -1; 1; 3; 5; 7\}$

b) $\left\{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \dots\right\}$

c) $\left\{0; \frac{1}{6}; \frac{3}{20}; \frac{2}{15}\right\}$

Corrigé 22

a) La taille des diagrammes n'est pas représentative de la « taille » des ensembles.



b)

- $\mathrm{I} \cap \mathrm{E} = \mathrm{I}$, car l'ensemble des triangles équilatéraux est contenu dans l'ensemble de triangles isocèles.
- $\mathrm{R} \cap \mathrm{E} = \emptyset$, car il n'existe aucun triangle qui est équilatéral et rectangle (par le théorème de Pythagore, si $a \in \mathbb{R}_+^*$ est la longueur du côté du triangle, alors $a^2 + a^2 \neq a^2$).
- $\mathrm{I} \cap \mathrm{R}$ est l'ensemble des triangles dont les deux cathètes mesure $a \in \mathbb{R}_+^*$ et l'hypoténuse mesure $a\sqrt{2}$ (par Pythagore).

Corrigé 23 Il y a plusieurs possibilité, en voici une

$$\mathrm{A} = \{a; b; c; d; e\} \quad \mathrm{B} = \{d; e; f\} \quad \mathrm{C} = \{f; g; h; i\}$$

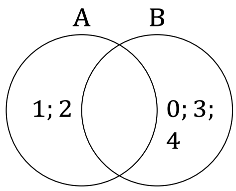
Corrigé 24

a) $\{2n + 1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ b) $\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ c) $\{n^2 \mid n \in \mathbb{N}^*\}$

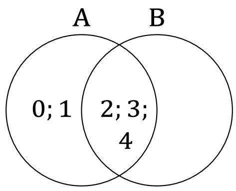
Corrigé 25

Il y a plusieurs réponses possibles.

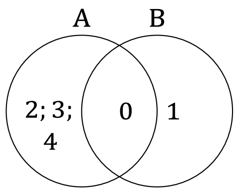
a) $\mathrm{A} = \{1; 2\}$ et $\mathrm{B} = \{0; 3; 4\}$



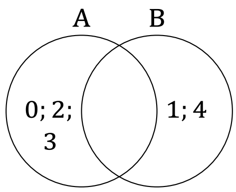
b) $\mathrm{A} = \{0; 1; 2; 3; 4\}$ et $\mathrm{B} = \{2; 3; 4\}$



c) $\mathrm{A} = \{0; 2; 3; 4\}$ et $\mathrm{B} = \{0; 1\}$



d) $\mathrm{A} = \{0; 2; 3\}$ et $\mathrm{B} = \{1; 4\}$



Corrigé 26

a)

i) $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \{-5; 2; 3; 4; 6; 8; 9; 10\}$

ii) $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{3; 4; 8\}$

iii) $\mathrm{B} \setminus \mathrm{A} = \{2; 10\}$

iv) $\mathrm{A} \setminus \mathrm{B} = \{-5; 6; 9\}$

b) $\mathrm{C} = \{1; 2; 3; 4\}$, $\mathrm{D} = \{2; 3; 4; 5\}$

c)

i) $\mathrm{E} = \{2; 3; 4; 5\}$, $\mathrm{F} = \{2; 4\}$

ii) $\mathrm{E} = \{2; 3; 4\}$, $\mathrm{F} = \{2; 4; 5\}$

iii) $\mathrm{E} = \{2; 4; 5\}$, $\mathrm{F} = \{2; 3; 4\}$

iv) $\mathrm{E} = \{2; 4\}$, $\mathrm{F} = \{2; 3; 4; 5\}$

1.2.3 Intervalles réelles

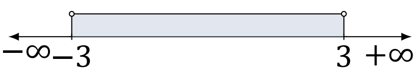
Corrigé 27

a) $]-\infty; 2[$ b) $[\sqrt{2}; +\infty[$ c) $]-2; \pi]$ d) $[-2; 2]$

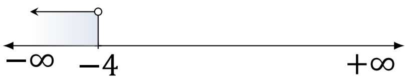
Corrigé 28

a)

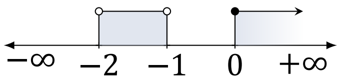
b)



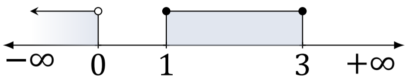
c)



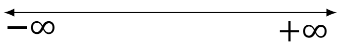
d)



e)



f)



Corrigé 29

a) $[-3; 4[$ b) $[-0,5; +\infty[$ c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2\}$ d) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < -0,5\}$

a) $]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$ b) $]-\infty; 2[\cup]3; +\infty[$ c) $]-\infty; -1] \cup [6; +\infty[$ d) $]-\infty; -5[\cup [2; +\infty[$

Corrigé 30

a) $A = [-3; 5]$ b) $B =]4; 5[$ c) $C =]-\infty; 1[$
d) $D = [10; +\infty[$ e) $E = [-2; 2]$ f) $F =]-\infty; +\infty[$
g) Un intervalle contient une infinité de nombre, donc pas possible.

Corrigé 31

a) $[-3; 2]$ b) $[3; +\infty[$ c) $]-\infty; -1[$ d) $]-2; 4]$
e) $]-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}]$ f) $]-\infty; 1+\sqrt{2}]$ g) $]-\infty; +\infty[$ h) $]-\infty; -2[\cup [4; +\infty[$

Corrigé 32

a) $x \leq -3$ b) $x > -2$ c) $0 \leq x \leq 2$ d) $-3 < x < 3$
e) $-5 < x < -4$ f) $-2 < x < -1$ ou $0 \leq x$ g) $x < 0$ ou $1 \leq x \leq 3$
h) $x \leq 4$ ou $x \geq 7$

Corrigé 33

a) $]-\infty; 2]$ b) $]3; +\infty[$ c) $[-1; +\infty[$ d) $]0; 2]$
e) $[1; +\infty[$ f) $[2; 4[$ g) $]-\infty; -2] \cup [0; +\infty[$ h) $[1; 3]$

Corrigé 34

a) $A \cup B =]-2; 4[$ b) $A \cap B = [0; 3]$ c) $A \setminus B =]-2; 0[$ d) $B \setminus A =]3; 4[$
e) $A \cup C =]-\infty; 3]$ f) $A \cap C =]-2; 2]$ g) $A \setminus C =]2; 3]$ h) $C \setminus A =]-\infty; -2]$
i) $B \cup C =]-\infty; 4[$ j) $B \cap C = [0; 2]$ k) $B \setminus C =]2; 4[$ l) $C \setminus B =]-\infty; 0[$

Corrigé 35

a)
i) $I \cap J =]-2; 0[$
ii) $I \cap K =]-3; 3[$
iii) $I \setminus (J \cup K) = [3; 4]$
iv) $(I\setminus J) \cup (I \setminus K) =]-3; -2] \cup [0; 4]$

b)
i) $I \cap J =]-2; 2[$
ii) $I \cap K = [-3; 1[$
iii) $I \setminus (J \cup K) = [-4; -3[$
iv) $(I\setminus J) \cup (I \setminus K) = [-4; -2] \cup [1; 2[$

c)
i) $I \cap J = [-1; 3[$
ii) $I \cap K =]-3; 3[$
iii) $I \setminus (J \cup K) = [-5; -3]$
iv) $(I\setminus J) \cup (I \setminus K) = [-5; -1[$

Corrigé 36

a) $A \cup B = [0; +\infty[$ b) $A \cap B = [1; 5]$ c) $A \setminus B = \emptyset$ d) $B \setminus A = [0; 1[\cup]5; +\infty[$
e) $A \cup C =]-3; 5]$ f) $A \cap C = [1; 3]$ g) $A \setminus C =]3; 5]$ h) $C \setminus A =]-3; 1[$
i) $B \cup C =]-3; +\infty[$ j) $B \cap C = [0; 3]$ k) $B \setminus C =]3; +\infty[$ l) $C \setminus B =]-3; 0[$

Corrigé 37

Il y a une infinité de possibilités.

a) $-\frac{7}{5}, -\frac{10}{3} \in]-4; -3[$, $\frac{10}{3}, \frac{27}{99} \in]\frac{1}{4}; \frac{1}{3}[$, $\frac{5}{1000}, \frac{1}{9000} \in]10^{-4}; 10^{-3}[$

b) $-2{,}5\sqrt{2}$, $\frac{2}{5\sqrt{2}}$, $\frac{\sqrt{2}}{1000}$.

Corrigé 38

a) $I \cup K = [-3; 4[\cup]-5; 3] =]-5; 4[$ b) $I \setminus K = [-3; 4[\setminus]-5; 3] =]3; 4[$
c) $K \setminus I =]-5; 3] \setminus [-3; 4[=]-5; -3[$

Corrigé 39

On a $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ et $\sqrt{75} = 5\sqrt{3}$.

$$\begin{aligned}\sqrt{27} + \frac{\sqrt{75}-\sqrt{27}}{2} &= 3\sqrt{3} + \frac{2\sqrt{3}}{2}\\ &= 3\sqrt{3} + \sqrt{3}\\ &= 4\sqrt{3}\end{aligned}$$

On aurait pu le déduire directement depuis l'écriture simplifiée de $\sqrt{27}$ et $\sqrt{75}$.

1.3 Calul littéral

1.3.1 Traduire un énoncé

Corrigé 40

$\mathrm{A} = a(a+4) - 3^2 = a^2 + 4a - 9$

Corrigé 41

a) $n; n+1; n+2$ b) $(2n+1)^2$ c) $(n+1)^2 - n^2$ d) $7n$

e) $3n+2$ f) $4n-1$ g) $n^2; (n+1)^2; (n+2)^2$ h) $2n$

1.3.2 Isoler une variable

Corrigé 42

a) $x = 7 - 3y$ b) $y = 4x - 9$ c) $y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$

d) $x = 5 - 2y$ e) $x = 8 + 6y$ f) $y = 10 - 2x$

g) $y = 6x - 12$ h) $x = \frac{5}{2}y - \frac{15}{2}$ i) $y = -2x - 8$

j) $y = \frac{2}{3}x - 10$ k) $y = \frac{5}{2}x - \frac{35}{2}$ l) $y = 4x - 8$

m) $y = -\frac{2}{3}x + 2$ n) $y = \frac{5}{2}x$ o) $y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$

Corrigé 43

a) $v = \dfrac{d}{t}$ $\quad d = ?$ $\quad t = ?$

Isolons d :

$$\begin{aligned} v &= \frac{d}{t} & &\cdot t \\ v \cdot t &= d & &d \text{ est isolé} \end{aligned}$$

Isolons t :

$$\begin{aligned} v &= \frac{d}{t} & &\cdot t \\ v \cdot t &= d & &: v \\ t &= \frac{d}{v} & &t \text{ est isolé} \end{aligned}$$

b) $\mathrm{P} = 2(a+b)$ $\quad b = ?$

Isolons b :

$$\begin{aligned} \mathrm{P} &= 2(a+b) & &: 2 \\ \frac{\mathrm{P}}{2} &= a+b & &-a \\ \frac{\mathrm{P}}{2} - a &= b & &b \text{ est isolé} \end{aligned}$$

c) $\mathrm{A} = \dfrac{(\mathrm{B}+b)}{2}h$ $\quad h = ?$ $\quad \mathrm{B} = ?$

Isolons h :

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &= \frac{(\mathrm{B}+b)}{2}h & &\cdot \frac{2}{(\mathrm{B}+b)} \\ \mathrm{A} \cdot \frac{2}{\mathrm{B}+b} &= h & &\text{réduire} \\ \frac{2\mathrm{A}}{\mathrm{B}+b} &= h & &h \text{ est isolé} \end{aligned}$$

Isolons B :

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &= \frac{(\mathrm{B}+b)}{2}h & &: h \\ \frac{\mathrm{A}}{h} &= \frac{(\mathrm{B}+b)}{2} & &\cdot 2 \\ \frac{2\mathrm{A}}{h} &= \mathrm{B}+b & &-b \\ \frac{2\mathrm{A}}{h} &= \mathrm{B} & &\mathrm{B} \text{ est isolé} \end{aligned}$$

d) $\mathrm{E} = mgh$ $\quad h = ?$

$$\begin{aligned} \mathrm{E} &= mgh & &: mg \\ \frac{\mathrm{E}}{mg} &= h & &= h \text{ est isolé} \end{aligned}$$

e) $\mathrm{P} = f\dfrac{m_1 m_2}{m_3}$ $\quad m_1 = ?$ $\quad m_3 = ?$

Isolons m_1 :

$$\begin{aligned} \mathrm{P} &= f\frac{m_1 m_2}{m_3} & &: f \\ \frac{\mathrm{P}}{f} &= \frac{m_1 m_2}{m_3} & &\cdot \frac{m_3}{m_2} \\ \frac{\mathrm{P}}{f} \cdot \frac{m_3}{m_2} &= m_1 & &\text{réduire} \\ \frac{\mathrm{P}m_3}{fm_2} &= m_1 & &m_1 \text{ est isolé} \end{aligned}$$

Isolons m_3 (on reprend la formule ou m_1 est isolé) :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{P}m_3}{fm_2} &= m_1 & &: \mathrm{P} \\ \frac{m_3}{fm_2} &= \frac{m_1}{\mathrm{P}} & &\cdot fm_2 \\ m_3 &= \frac{m_1}{\mathrm{P}} \cdot fm_2 & &\text{réduire} \\ m_3 &= \frac{fm_1 m_2}{\mathrm{P}} & &m_3 \text{ est isolé} \end{aligned}$$

f) $\dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{z_1 z_4}{z_2 z_3}$ $\quad z_1 = ?$ $\quad n_2 = ?$

Isolons z_1 :

$$\begin{aligned} \frac{n_1}{n_2} &= \frac{z_1 z_4}{z_2 z_3} & &\cdot \frac{z_2 z_3}{z_4} \\ \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{z_2 z_3}{z_4} &= z_1 & &\text{réduire} \\ \frac{n_1 z_2 z_3}{n_2 z_4} &= z_1 & &z_1 \text{ est isolé} \end{aligned}$$

Isolons n_2 :

$$\begin{aligned} \frac{n_1}{n_2} &= \frac{z_1 z_4}{z_2 z_3} & &\cdot n_2 \\ n_1 &= \frac{z_1 z_4}{z_2 z_3} \cdot n_2 & &\cdot \frac{z_2 z_3}{z_1 z_4} \\ n_1 \frac{z_2 z_3}{z_1 z_4} &= n_2 & &\text{réduire} \\ \frac{n_1 z_2 z_3}{z_1 z_4} &= n_2 & &n_2 \text{ est isolé} \end{aligned}$$

g) $a = \dfrac{\mathrm{A}h}{2} - b$ $\qquad h = \dfrac{2\mathrm{A}}{a+b}$

h) $h = \dfrac{4\mathrm{V}}{\pi d^2}$

Corrigé 44

a) $h = \dfrac{6\mathrm{V}}{\mathrm{B}_1 + \mathrm{B}_2 + 4\mathrm{M})}$ $\quad \mathrm{M} = \dfrac{\frac{6\mathrm{V}}{h} - \mathrm{B}_1 - \mathrm{B}_2}{4}$

b) $\mathrm{D} = \mathrm{D}_r \cdot (1 + \mathrm{A}_r + \mathrm{B}_r) \quad \mathrm{A}_r = \dfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}_r} - 1 - \mathrm{B}_r$

c) $r = -\dfrac{2\mathrm{PR}}{\mathrm{Q}}$

d) $\mathrm{R}_i = \dfrac{k\mathrm{R}_a}{\mathrm{G}} - \mathrm{R}_a$

e) $\mathrm{F} = \dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{S}_\alpha} - \mathrm{S}_\alpha$

f) $\mathrm{R} = \dfrac{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2}{\mathrm{R}_1 + \mathrm{R}_2} \quad \mathrm{R}_1 = \dfrac{\mathrm{R}\mathrm{R}_2}{\mathrm{R}_2 - \mathrm{R}}$

1.3.3 L'algèbre comme outil de preuve

Corrigé 45 Un nombre pair a s'écrit $a = 2n$ pour $n \in \mathbb{N}$, un nombre impair b s'écrit $b = 2m + 1$ pour $m \in \mathbb{N}$. On a

$$a + b = 2n + 2m + 1 = 2(n + m) + 1 = 2k + 1 \text{ avec } k = n + m$$

et donc $a + b$ est bien un nombre impair.

Corrigé 46

a) jamais b) parfois c) toujours d) parfois
e) jamais f) parfois g) toujours h) toujours

Corrigé 47 Soient $a = 2m + 1$ et $b = 2n + 1$ deux nombres impairs.

$$a + b = 2m + 1 + 2n + 1 = 2m + 2n + 2 = 2(m + n + 1)$$

qui est bien un nombre pair.

Corrigé 48 Pour $\{1; 2; 9; 28; 65; 126\}$ (pourquoi ?).

Corrigé 49 On vérifie en développant que oui.

Corrigé 50

a) On développe les deux membres. On constate qu'ils sont égaux à $a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2$.
b) à la calculatrice.

1.3.4 Développer et réduire

Corrigé 51

a) somme, trois termes b) produit, quatre facteurs c) somme, deux termes
d) produit, trois facteurs e) somme, deux termes f) produit, deux facteurs
g) somme, deux termes h) somme, deux termes

Corrigé 52

a) $63x + 56$ b) $30a^3 - 72a^2$ c) $35y - 55$ d) $60x + 48$
e) $-48x^2 - 32x + 24$ f) $-72x^5 - 63x^2y$ g) $-28a^7 + 42a^6$ h) $-35x^8 - 45x^5 + 5x^4$

Corrigé 53

a) 0 b) $-4x^2$ c) $2x^2 - 4x$ d) $4y$ e) $-14y$
f) $-45y^2$ g) $-5y^2 + 9y$ h) $4y$ i) $-5y^2 - 45y$ j) $-50y$
k) $-x^2$ l) $x^2 + x$ m) -1 n) $x^3 + x^2$ o) $2x^4$

Corrigé 54

a) $6xy - 9x + 10y - 15$
b) $4x^2 + 4x - 15$
c) $5y^2 - 24y + 27$
d) $x^3 - 2x + 1$
e) $y^2 - x^2$
f) $x^3 + 2x^2 - x - 2$
g) $-2x^3 - 3x^2 + 8x - 3$
h) $x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 4x + 2$
i) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$
j) $-5x^3z^4 + z^6 + 15x^4z - 3xz^3 + 2z^4 - 6xz$
k) $-x^4 + 16$
l) $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$

Corrigé 55

a) $15x + 25$
b) $4x^3 - 4x^2$
c) $25y - 45$
d) $3x + 3$
e) $-x^2 - x + 1$
f) $-2x - 2y$
g) $x^4 - 3x^2 - 4$
h) $6x^4 - 9x^3 - 3x^2$
i) $3x^2 + 2x - 5$
j) $3x^3y^2 + 3x^2y - 3xy$
k) $4x^4 - 17x^2 + 4$
l) $3x^3y^2 + 12xy^4$
m) $-2x^2 - 4x + 6$
n) $3x^2 - 18x + 27$
o) $-2x^2 + 5x - 3$
p) $4x^2 - 12x + 9$

Corrigé 56

a) $x^2 + 2xy + y^2$
b) $4x^4 - 8x^2 - 12$
c) $x^2 - y^2$
d) $9x^2 + 6xy + y^2$
e) $x^4 + 2x^2y^3 + y^6$
f) $x^2 - 2x + 1$
g) $1 - x^2$
h) $16x^2 - 24x + 9$
i) $x^6 - 9y^2$
j) $9z^2 - 12z + 4$
k) $x^2 - 2x + 1$
l) $x^2y^2 + 4xy^2 + 4y^2$
m) $x^4 - 2x^2 + 1$
n) $4x^2 + 8x + 4$
o) $4a^2 + 12a + 9$
p) $x^2y^2z^2 - 25$
q) $9x^6 - 30x^3 + 25$
r) $a^2 + 6ab + 9b^2$
s) $x^4 - 2x^2 + 1$
t) $16a^4b^2 - 25$
u) $4x^2y^6 - 4xy^3 + 1$
v) $x^8 + 2x^4y + y^2$
w) $1 - a^2x^8$
x) $x^4 - a^4$

Corrigé 57

a) $15x^2 + 3x + 1$
b) $25x^2 + 25x - 6$
c) $36x^3 - 9x^2 - 64x + 15$
d) $9x^3 - x^2 - 15x$
e) $15x^2 - 23x + 5$
f) $-12x^6 + 19x^5 - 4x^4 + x^2$

Corrigé 58

On utilise le terme constant (de degré 0) qui est différent pour toutes les expressions. Ainsi, il suffit de multiplier les termes de degré 0 de chaque expression pour retrouver les trois polynômes.

Corrigé 59

On développe.
$(n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1) = n^4 - n^3 + n^2 + n^3 - n^2 + n + n^2 - n + 1 = n^4 + n^2 + 1$.
(*) Demander à l'enseignant si intéressé !

Corrigé 60

a) $2x^3 + x^2 - 98x + 49$
b) $12x^2 + 4x - 108x + 36$
c) $x + t - 7s$
d) $10rs^2t^5 - 20r^2s^3t^2 + 15rs^5t^2$
e) $-20x^3 + 6x^2 - 4x$
f) $\frac{19x-19}{6}$

Corrigé 61

a) $16x^8 - 4$
b) $\frac{1}{16}x^2 + x\sqrt{2} + 8$
c) $-32x^2 + 60x + 27$
d) $x^8 - 256$
e) $x^8 - 9x^4 + 8$
f) $16a^8 + 8a^4 - 3$
g) $14x^2 + 9x + 1$

1.3.5 Identités remarquables

Corrigé 62

a) $x^2 - 3x + 2$
b) $x^2 + 4x + 3$
c) $x^2 - 16$
d) $y^2 - 2y - 48$
e) $a^2 - 11a - 12$
f) $y^2 + 5y - 36$
g) $a^2 + 10a + 21$
h) $x^2 - 13x + 30$

Corrigé 63

a) $r^4 + 14r^2 + 49$
b) $s^4 - 6s^2 + 9$
c) $9y^2z^2 + 54yz + 81$
d) $s^2y^2 + 4sy - 5$
e) $t^2z^2 - 81$
f) $-9r^2x^2 + 16$
g) $25r^4 - 80r^3s + 64r^2s^2$
h) $81x^2 - 45x + 6$
i) $r^4 - 64$
j) $100r^2 + 20r + 1$

Corrigé 64

a) $100r^2x^2 + 130rx + 40$
b) $s^2t^2 - \frac{9}{4}s^2$
c) $25s^4y^2 - \frac{25}{4}s^4y + \frac{25}{64}s^4$
d) $\frac{4}{9}s^2x^2 + \frac{1}{6}sx^2 + \frac{1}{64}x^2$
e) $-\frac{9}{25}r^4z^2 + \frac{4}{25}z^4$
f) $16r^2t^4 - 28r^2t^2 + \frac{49}{4}r^2$
g) $36r^2y^2 + 30ry + 6$
h) $\frac{16}{9}z^4 + \frac{40}{27}rz^3 + \frac{25}{81}r^2z^2$
i) $\frac{16}{49}t^2x^2 - \frac{4}{7}tx - 56$
j) $\frac{64}{49}t^6 + \frac{160}{7}st^3 + 100s^2$

Corrigé 65

a) $\frac{9}{16}t^2 + \frac{3}{4}t - 42$
b) $t^4 - 14t^2 + 40$
c) $z^4 - \frac{2}{3}z^2 + \frac{1}{9}$
d) $r^2z^2 - \frac{1}{25}$
e) $\frac{1}{9}r^4 + \frac{1}{2}r^2x^2 + \frac{9}{16}x^4$
f) $-\frac{49}{100}r^4 + \frac{25}{9}$
g) $t^2x^2 + \frac{12}{5}tx + \frac{36}{25}$
h) $\frac{4}{9}t^2y^2 - \frac{20}{9}ty^2 + \frac{25}{9}y^2$
i) $r^2y^2 - \frac{25}{36}$
j) $\frac{64}{25}y^2 + \frac{152}{5}y + 90$

Corrigé 66

a) -31 b) 23 c) $98 + 12\sqrt{66}$ d) $279 - 20\sqrt{11}$ e) $90 - 36\sqrt{6}$

Corrigé 67

Par exemple, $23^2 = (20+3)^2 = 20^2 + 2 \cdot 20 \cdot 3 + 3^9 = 400 + 120 + 9 = 529$.

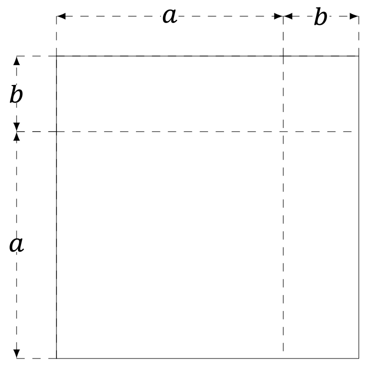
Corrigé 68

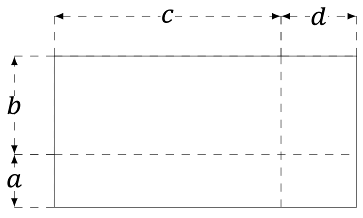
a) $a + b$
b) $a^2 + 2ab + b^2$
c) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
d) $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
e) $a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

Corrigé 69

a) $ab + ac$ ou $a(b+c)$, d'où la distributivité simple.

b)





Écrire l'aire de deux manière à chaque fois pour prouver les identités.

Corrigé 70

a) $8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3$
b) $125a^3 - 75a^2b + 15ab^2 - b^3$
c) $x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$
d) $a^8 + 4a^6b^2 + 6a^4b^4 + 4a^2b^6 + b^8$
e) $8a^9 - 12a^6b^4 + 6a^3b^8 - b^{12}$
f) $x^{10} + 5x^8y + 10x^6y^2 + 10x^4y^3 + 5x^2y^4 + y^5$
g) $a^6 - 12a^5b + 60a^4b^2 - 160a^3b^3 + 240a^2b^4 - 192ab^5 + 64b^6$
h) $\frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{6}x^3y + \frac{1}{6}x^2y^2 + \frac{2}{27}xy^3 + \frac{1}{81}y^4$
i) $x^{3m} + 3x^{2m}y^n + 3x^my^{2n} + y^{3n}$

1.3.6 Factorisation

Corrigé 71

On factorise l'expression pour obtenir (par la mise en évidence)

$$4a^2 + 6a = 2a \cdot (2a + 3)$$

Ainsi, la longueur vaut $2a + 3$.

Corrigé 72

a) $4x^2 + 12x + 9$
b) $2(2x + 3y^2)$
c) $(3b + 2)^2$
d) $(x - 1)(x + 7)$
e) $(3y - 1)^2$
f) $8h^3 + 12h^2$
g) $x^2 - 2x + 1$
h) $(4a - 5)(4a + 5)$
i) $16a^2 - 25$
j) $(x - 1)^2$
k) $4h^2(2h + 3)$
l) $9y^2 - 6y + 1$
m) $x^2 + 6x - 7$
n) $9b^2 + 12b + 4$
o) $4x + 6y^2$
p) $(2x + 3)^2$

Corrigé 73

a) $2x(y + 1)^2$
b) $5(3a - 1)^2$
c) $5x^2(x - 2)(x + 2)$
d) $3y(x + 2)(x + 8)$
e) $7a^2x(a - x)^2$
f) $a(3a^2 + 4b^2)^2$
g) $4xy(x - 2y)^2$
h) $2ax(ax - 1)^2$
i) $3x(x - 2)(x + 4)$
j) $ab^2(3c^2 - 2b)(3c^2 + 2b)$
k) $x^2(a - 2bx)(a + 2bx)$
l) $(a - 2)(a + 2)(x + 2y)$

Corrigé 74

a) Calculer. Elle devrait donner 0.
b) $x^2 - (x - 3)(x + 3)$
c) 9
d) La calculatrice se trompe à cause d'une erreur d'arrondi. Dans ce cas, la factorisation permet de calculer rapidement et correctement.

Corrigé 75

a) $2(4t^2 - 3)(10t + 3)$
b) $-t(3t + 7)$
c) $(-10y + 7)(3y + 2)$
d) $-11r(-3r + 10)$
e) $7t^2(5t + 7)$
f) $-14z^2(4z + 7)$
g) $(-8s^2 + 3)(-s + 6)$
h) $2(-9t + 5)(-4t + 5)$
i) $(-9r^2 + 5)(-7r + 8)$
j) $r(3r - 2)(r + 3)$
k) $2(2s + 3)(7s + 10)$
l) $4(-7x^2 + 8)(x + 2)$
m) $20x(4x - 3)$
n) $10s(-s + 2)(4s - 1)$
o) $28y^2(-3y + 4)$

Corrigé 76

a) $(5s^2 - 2)^2$
b) $(3stx + 8)^2$
c) $(st - 6r)^2$
d) $(2 + 9y)^2$
e) $(stz - 1)(stz + 1)$
f) $(5xy - 9r)^2$
g) $-3yz(zt + 10y)^2$

Corrigé 77

a) $9x(x + y)$
b) $(3a - 8)(3a - b)$
c) $5a(ab - 3b)(a - 2b)$
d) $x(9x + 13)(x + 2)$
e) $(4 - 2x)(x - y)$
f) $-2x^2(2x - 1)$

Corrigé 78

a) $(m+n)(a-b)$
b) $(x-y)(2a-b)$
c) $(a+1)(x-y)$
d) $(-2a+b)(x-3y)$
e) $(a+b-1)(a+b)^2$
f) $(x-3)(x+1)-(x-3)+2(x-3)^2=(x-3)(3x-6)=3(x-3)(x-2)$
g) $(a-b)((a-b)^2-1)=(a-b)(a-b+1)(a-b-1)$
h) $(x-y)(1-(a+b)^2)=(x-y)(1-a-b)(1+a+b)$

Corrigé 79

a) $x(y-1)(y+1)(a+b)$
b) $(4x-a)(2x+y)$
c) $(u^2-1)(u+1)$
d) $(x^2+1)(a-1)$
e) $(x^2+1)(x-2)$
f) $(x^2+x+1)(x+1)$
g) $(x-1)(x+4)$
h) $(a-b)(a+b-5)$
i) $(a-1)(a+1)(b^2+1)$
j) $(x+2)^2(x-2)$
k) $(b-1)(b+1)(a^2+1)$
l) $(x-2)(x+2)(x-7)$

Corrigé 80

a) $(a-6)(2x+y)$
b) $(5x^2-1)(x-2)$
c) $(x+y+ax-ay)(x-y)$
d) $(7x-3)(x^2-3)$
e) $(b-a)(5x+y)$
f) $x(x-y)$
g) $(6-a)(x^2-y)$
h) $(x-8)(5x-3)$
i) $(1+x^2)(y-1)(y+1)$
j) $x(3x^2+2)(x+2)$

Corrigé 81

a) $-8xy-4y$
b) $16x^2$
c) $-xy$
d) x^3+6x+9

Corrigé 82

a) $4\,(x^2+1)\,(x+1)(x-1)$
b) $(x-1)(x+2)(x-2)$
c) $(4x^2+3y)\,(4x^2-3y)$
d) $3(x+4)(x-2)$
e) $2x(2x-1)^2$
f) $(x+y+2u)(x+y-2u)$
g) $x(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})$
h) $(x^2+8)\,(x+\sqrt{8})(x-\sqrt{8})$
i) $(2y-3)^2$
j) $(a-b)(a-1)$
k) $(x+8)(7x-10)$
l) $x^2y^2\,(4ay-a^2+5bx)$

Corrigé 83

a) $x(x+2)$
b) $2(xy-1)(xy+1)$
c) $x(x^2+4)$
d) $(2ax-1)(2ax+1)(4a^2x^2+1)$
e) $(a+3)(b-c)$
f) $(a-m)(x+y)$
g) $\left(3a-\frac{1}{2}b^3\right)^2$
h) $3(x-3)(x+3)(x^2+9)$
i) $(x+1)(x+2)$
j) $(xy-4)(xy-3)$
k) $(x-6)(x-5)$
l) $x^3-3x^2+4x-22$
m) $(x+1)(x+15)$
n) $(x-5)(x+4)$
o) $(2x-2y+z)(2x+4y-z)$
p) $(4x-9y)(8x+3y)$
q) $-8y(x-y)(x^2-2xy+2y^2)$
r) $(10x-13)(2x^2-12x+19)$
s) $\left(x^2y-ab^3\right)^2$
t) $(3x+1)(8x-3)$

Corrigé 84

a) $(2x+7)(4x-3)$
b) $(2x-3)(12x+1)$
c) $(2x-15)(2x+5)$
d) $4(x+4)(3x+1)$
e) $2(x-7)(4x-7)$
f) $(2x-1)(9x-4)$
g) $4(x-2)(2x-7)$
h) $(x-2)(1-4x)$
i) $5(x+1)(3x+1)$
j) $(x-3)(1-3x)$
k) $4(x-4)(x+1)$
l) $(x-4)(4x-9)$
m) $(x-2)(5x+1)$
n) $(2x-3)(5x+1)$
o) $(x-1)(3x-2)$
p) $4(x-1)(2x-3)$
q) $-2(x-2)(3x+2)$
r) $(2x-7)(5x-2)$
s) $-(x-1)(4x+5)$
t) $(x+3)(5x-2)$
u) $-(x-3)(x-2)$
v) $(x+8)(7x-10)$
w) x^2+4
x) $(x-2)(x+3)$

Corrigé 85

a) $(a-b)(m+n)$
b) $(2a-b)(x-y)$
c) $(a+1)(x-y)$
d) $(2a-b)(3y-x)$
e) $(a+b)^2(a+b-1)$
f) $3(x-3)(x-2)$
g) $(a-b)(a-b-1)(a-b+1)$
h) $(x-y)(1-a-b)(1+a+b)$
i) $-4a(a-1)$
j) $4b(a+b)$
k) $3a(a+b)$
l) $\dfrac{(x-1)(2-3x)}{6}$
m) $3a(a-2)^2(a+2)$
n) $5a(a+4)^2$
o) $3(x-3)(x-1)(x+1)$
p) $(a-b)(5x-8)$
q) $a(x^2-5)(x^2+5)$
r) $(a-1)(a+1)(b+1)$
s) $\left(\dfrac{2}{3}a^2+\dfrac{1}{5}x^2\right)^2$
t) $8x(x-y)(x+y)$
u) $2ay^3(2a^3-7y^2)(2a^3+7y^2)$
v) $(16-x^8)(16+x^8)$
w) $(x-y+1)(x-y+5)$
x) $(2x-y-1)^2$

Corrigé 86

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$\begin{aligned}a^3+b^3&=(a+b)^3-3a^2b-3ab^2\\&=(a+b)^3-3ab(a+b)\\&=(a+b)((a+b)^2-3ab)\\&=(a+b)(a^2+2ab+b^2-3ab)\\&=(a+b)(a^2-ab+b^2)\end{aligned}$$

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

$$\begin{aligned}a^3-b^3&=(a-b)^3+3a^2b-3ab^2\\&=(a-b)^3+3ab(a-b)\\&=(a-b)((a-b)^2+3ab)\\&=(a-b)(a^2-2ab+b^2+3ab)\\&=(a-b)(a^2+ab+b^2)\end{aligned}$$

1.4 Équations

Corrigé 87

a) oui
b) oui
c) non
d) oui

1.4.1 Équations du premier degré

Résolution d'équations

Corrigé 88 Appliquer à chaque fois l'opération indiquée à l'équation a).

b) [PE2] 5 c) [PE1] 2 d) [PE2] $\frac{5}{2}$

Corrigé 89

a) $3x = x + 2$, $S = \{1\}$ b) $x + 3 = 2x - 2$, $S = \{5\}$ c) $2x = \frac{2}{3}x + 10$, $S = \left\{\frac{15}{2}\right\}$

d) $\frac{x}{4} - \frac{x}{10} = x - 2$, $S = \left\{\frac{40}{17}\right\}$ e) $3x - 5 = \frac{x+3}{2}$, $S = \left\{\frac{13}{5}\right\}$

Corrigé 90

a) $S = \{-9\}$ b) $S = \emptyset$ c) $S = \left\{-\frac{55}{17}\right\}$ d) $S = \left\{-\frac{19}{28}\right\}$

Corrigé 91

a) $S = \left\{-\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$ b) $S = \left\{2 - 2\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{6}\right\}$

c) $S = \left\{\frac{2 - 3\sqrt{2} + 3\sqrt{3} - \sqrt{6}}{7}\right\}$ d) $S = \left\{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right\}$