Chapitre 2 : Calcul différentiel

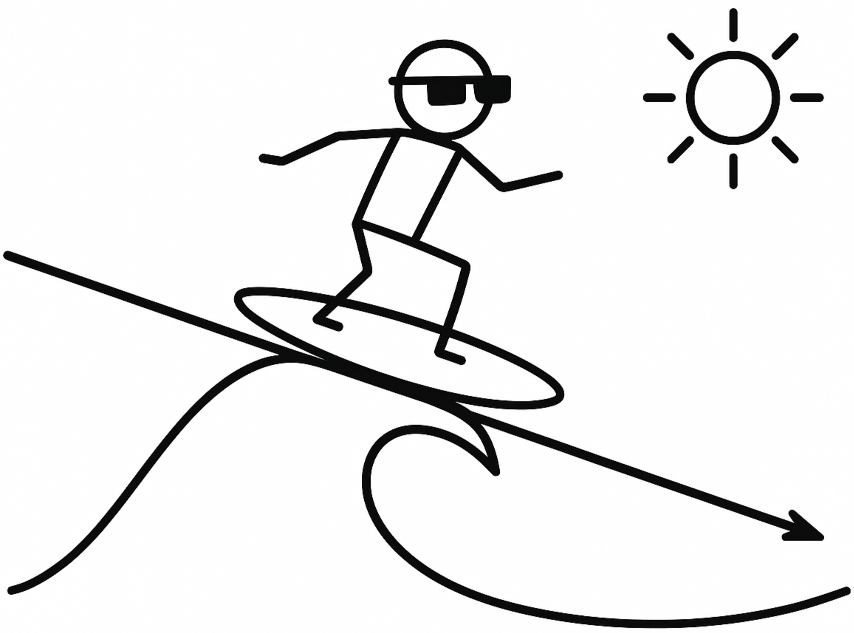


Table des matières

Version du 17 septembre 2025

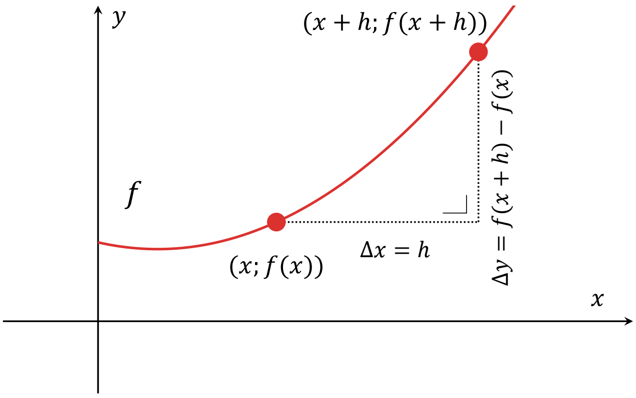
Prérequis

Calcul différentiel SECTION 1

La dérivée

1.1 Introduction : La tangente à une courbe en un point

Nous commençons avec une fonction f, et sur le graphique nous choisissons un point $(x, f(x))$ (c.f. Figure 1). Quelle droite, s'il y en a une, devrait être appelée tangente au graphique en ce point ? Et comment déterminer son équation ?

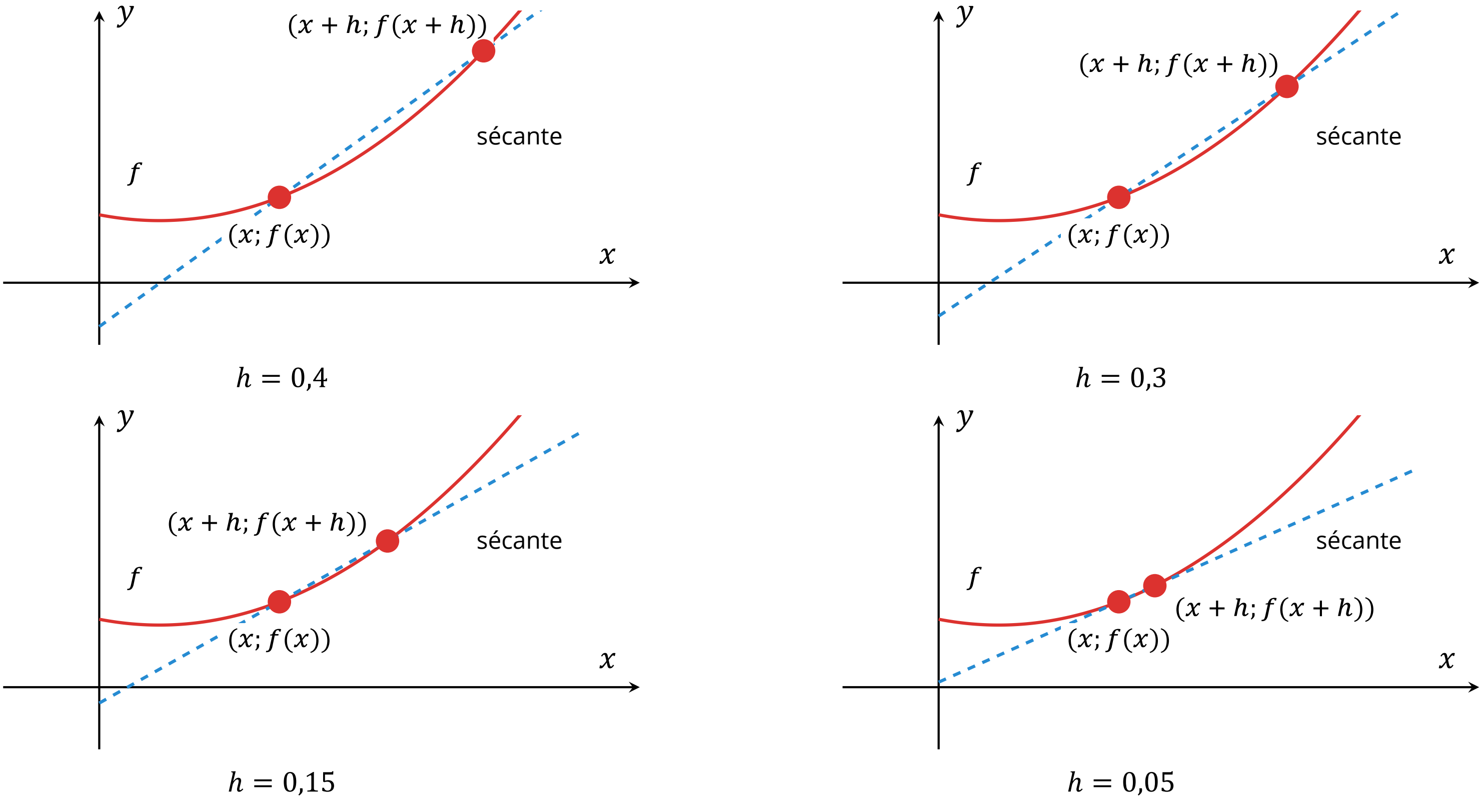


(a) Un point sur le graphe de f

(b) Une appliquette pour visualiser différentes situations

Figure 1 – Introduction à notion de dérivée

Pour répondre à cette question, nous choisissons un petit nombre $h \neq 0$ et sur le graphique marquons le point $(x + h, f(x + h))$. Maintenant nous traçons la droite sécante qui passe par ces deux points. La situation est illustrée dans la Figure 3.1.2 en prenant des valeurs de $h > 0$.



$h = 0{,}4$ $h = 0{,}3$

$h = 0{,}15$ $h = 0{,}05$

Figure 2 – Construction de la dérivée

Lorsque h tend vers zéro (une limite !), la droite sécante tend (si la limite existe) vers « la tangente de f au point $(x, f(x))$ ».
Puisque les droites sécantes ont une pente de la forme

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \tag{1}$$

nous admettons que la position limite de ces sécantes ont une pente

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}. \tag{2}$$

Nous commençons l'étude systématique de telles limites, ce que les mathématiciens appellent le calcul différentiel.

Voyage au pays de maths – Flâneries infinitésimales

1.2 Définitions et exemples

Définition Une fonction est dite dérivable en x ssi la limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \text{ existe et est finie.} \tag{$\star$}$$

Si cette limite existe, on l'appelle la dérivée de f en x et on la note $f'(x)$.

Définition On interprète $f'(x)$ comme la pente de la courbe f au point $(x; f(x))$. La droite qui passe par ce point et qui a cette pente s'appelle la tangente à f au point $(x; f(x))$.

Remarque Certaines fonctions sont dérivable sur $\mathbb{R}$, d'autres seulement sur un intervalle donné ou en certains points.

Remarque On parle de dérivée à droite ou dérivée à gauche si au lieu de prendre la limite birectionnelle dans ($\star$), on prend la limite à droite ou à gauche.

Commençons par calculer quelques dérivées à l'aide de la définition.

Exemple 1 Calcul de la dérivée de $f(x) = x^2$.
On part de la définition de la dérivée, on a

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\ &= \frac{2xh + h^2}{h} \\ &= 2x + h\end{aligned}$$

On prend la limite quand $h \to 0$ et on a

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x.$$

Exemple 2 Calcul de la dérivée de $f(x) = ax + b$. On part de la définition

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\qquad\qquad\qquad\qquad}{h} \\ &= \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \\ &= \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}\end{aligned}$$

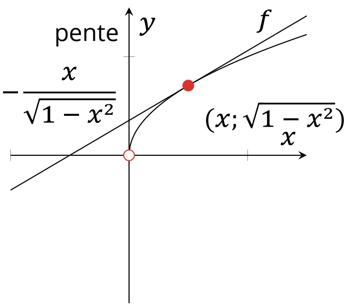
On prend la limite évidente et on obtient

Remarque Remarquons que

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

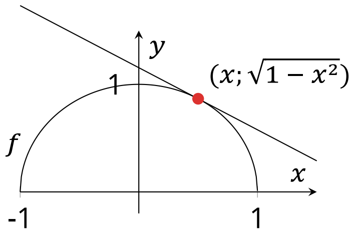
est une limite à droite et à gauche. Par conséquent, elle ne peut pas être prise en un point d'extrémité du domaine (on doit être sur un ouvert). Dans notre prochain exemple, nous traitons le cas de la fonction racine carrée. Bien que cette fonction soit définie pour tout $x \geq 0$, nous ne pouvons avoir une dérivée que pour $x > 0$.

Exemple 3



Calcul de la dérivée de $f(x) = \sqrt{x}$ pour $x > 0$.

Exemple 4



Calcul de la dérivée de $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ pour $x \in]-1; 1[$.

1.3 Le nombre dérivé

Parfois on s'intéresse à calculer la dérivée seulement en un point. Pour un a donné, on appelle $f'(a)$ le nombre dérivé de f en a. C'est la valeur de la dérivée évaluée en a.

Exemple 5 Calculer $f'(-2)$ pour $f(x) = 1 - x^2$.
On a deux possibilités.

Calculer $f'(x)$ Nous pouvons d'abord trouver $f'(x)$ en général :

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[1-(x+h)^2] - [1-x^2]}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2xh - h^2}{h} = \lim_{h\to 0} -2x-h = -2x.$$

et ensuite substituer -2 pour x :

$$f'(-2) = -2(-2) = 4.$$

Calculer $f'(-2)$ Nous pouvons aussi évaluer $f'(-2)$ plus directement :

$$f'(-2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[1-(-2+h)^2] - [1-(-2)^2]}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4h - h^2}{h} = \lim_{h\to 0} 4-h = 4.$$

Exemple 6 Calculer $f'(0)$ si

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1, & x \leq 0 \\ x^3 + 1, & 0 < x \end{cases}.$$

1.4 Relation avec la continuité

Une fonction peut être continue en un certain nombre x sans y être dérivable.

Exemple 7 La fonction valeur absolue

$$f(x) = |x|$$

est continue en 0 (elle est partout continue), mais elle n'est pas dérivable en 0 :

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|0+h| - |0|}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} -1, & h < 0 \\ 1, & h > 0 \end{cases}.$$

de sorte que

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = -1, \quad \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = 1.$$

et

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \quad \text{n'existe pas.}$$

L'échec de la fonction valeur absolue à être dérivable en 0 est reflété par son graphe. En $(0, 0)$, le graphe change brusquement de direction et il n'y a pas de tangente en ce point.

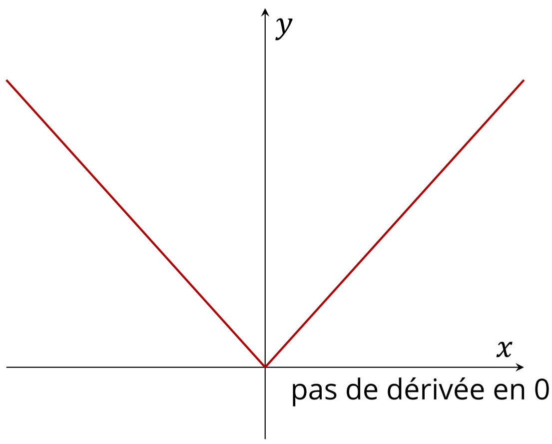


Figure 3 – La fonction valeur absolue

Exemple 8 On observe un changement de direction soudain similaire dans le graphe de

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ x, & x > 1 \end{cases}.$$

au point $(1, 1)$. Encore une fois, f est partout continue (vérifiez-le !), mais elle n'est pas dérivable en 1 :

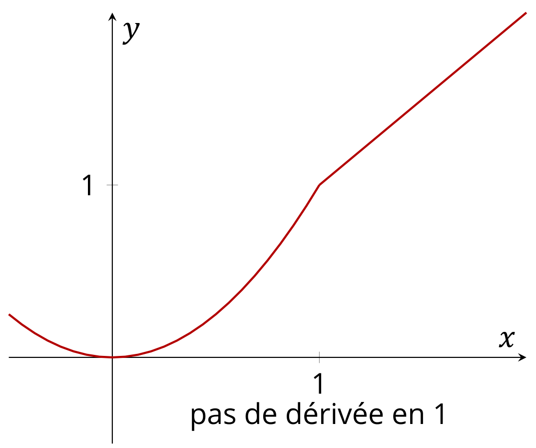


Figure 4 – Une fonction avec un point anguleux

Définition Soit une fonction $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$. Soit $a \in \mathrm{I}$. On dit que a est un **point anguleux** de f ssi

- f est continue en a ;
- au moins une des deux dérivée (à droite ou à gauche) est finie et les deux dérivées sont distinctes.

Théorème 1 Si f est dérivable en x alors f est continue en x.
Preuve. On a

$$\lim_{h\to 0}(f(x)+h)-f(x)) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot h\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot\lim_{h\to 0} h \qquad \text{limites } \exists \text{ et finies}$$

$$= f'(x)\cdot 0 = 0 \qquad \text{car } \lim_{h\to 0} h = 0$$

donc f est bien continue en x. □

Remarque La réciproque de ce théorème n'est pas valable comme nous l'avons vu aux exemples 7 et 8.

1.5 Règles de dérivation

Calculer les dérivées de fonction comme

$$f(x) = (x^3-2)(4x+1) \quad \text{ou encore} \quad f(x) = \frac{6x^2-1}{x^4+5x+1}$$

peut vite devenir laborieux à l'aide de la définition de la dérivée. Dans cette sous-section, nous énonçons et démontrons des règles de dérivation qui permettent de faciliter le calcul de dérivées.
Pour rappel, on a démontré les deux résultats suivants en exercices

Proposition 1 On a

- Si $f(x) = c, c \in \mathbb{R}$, alors $f'(x) = 0$.
- Si $f(x) = x$, alors $f'(x) = 1$.

Voici un résumé des formules (démontrées plus bas ou en exercices).

Formules Soient f et g des fonctions dérivables en x. Alors

Produit constante $(c\cdot f)'(x) = c\cdot f'(x), c\in\mathbb{R}$

Somme $(f+g)'(x) = f'(x)+g'(x)$

Produit $(f\cdot g)'(x) = f(x)\cdot g'(x)+f'(x)\cdot g(x)$

Inverse $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$, si $g(x)\neq 0$

Quotient $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = -\frac{f(x)\cdot g'(x)-f'(x)\cdot g(x)}{g(x)^2}$

Proposition 2 Soit f une fonction dérivable en x et $c \in \mathbb{R}$ une constante, alors $c \cdot f$ est dérivable en x et $(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$.

Preuve. Il faut montrer que

$$\lim_{h \to 0} \frac{(cf)(x+h) - (cf)(x)}{h} = cf'(x).$$

Ceci découle directement du fait que

$$\frac{(cf)(x+h) - (cf)(x)}{h} = \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} = c\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right].$$

□

Proposition 3 Soient f et g des fonctions dérivables en x, alors $f + g$ est dérivable en x et $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Preuve. On a

$$\begin{aligned}\frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} &= \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h} \\ &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.\end{aligned}$$

Par définition,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x), \quad \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x).$$

Ainsi

$$\lim_{h \to 0} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} = f'(x) + g'(x),$$

ce qui signifie que $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$. □

Proposition 4 Soient f et g des fonctions dérivables en x, alors fg est dérivable en x et $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

Preuve. On a

$$\frac{(fg)(x+h)-(fg)(x)}{h} = \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$= \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)+f(x+h)g(x)-f(x)g(x)}{h}$$

$$= f(x+h)\left[\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] + g(x)\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right].$$

Puisque f est dérivable en x, nous savons que f est continue en x et ainsi

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x).$$

Puisque

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = g'(x) \quad \text{et} \quad \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x),$$

nous obtenons

$$\lim_{h\to 0}\frac{(fg)(x+h)-(fg)(x)}{h} = f(x)g'(x) + g(x)f'(x).$$

□

Corollaire 1 Si $f(x) = x^n$ pour $n \in \mathbb{N}$, alors $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

Preuve. Nous procédons par induction sur n. Si $n = 1$,

$$p(x) = x,$$

dont nous savons qu'elle satisfait

$$p'(x) = 1 = 1 \cdot x^0.$$

Nous supposons maintenant que le résultat est valable pour $n = k$ et montrons qu'il tient pour $n = k + 1$. Nous posons

$$p(x) = x^{k+1}$$

et notons que

$$p(x) = x \cdot x^k.$$

En appliquant la règle du produit et notre hypothèse d'induction, on a

$$p'(x) = x \cdot kx^{k-1} + 1 \cdot x^k = (k+1)x^k.$$

Ceci montre que la formule tient pour $k + 1$. □

Exemple 9 $p(x) = x$ a pour dérivée $p'(x) = 1$,
$p(x) = x^2$ a pour dérivée $p'(x) = 2x$,
$p(x) = x^3$ a pour dérivée $p'(x) = 3x^2$,
$p(x) = x^4$ a pour dérivée $p'(x) = 4x^3$,
et ainsi de suite.

Proposition 5 Soit g une fonction dérivable en x et $g(x) \neq 0$, alors $\frac{1}{g}$ est dérivable en x et $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$.

Preuve. g est dérivable en x, donc g est continue en x. Puisque $g(x) \neq 0$, nous savons que $1/g$ est continue en x, et ainsi que

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{g(x+h)} = \frac{1}{g(x)}.$$

Pour h différent de zéro et suffisamment petit, $g(x+h) \neq 0$ et

$$\frac{1}{h}\left[\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}\right] = -\left[\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right]\frac{1}{g(x+h)g(x)}.$$

En prenant la limite quand h tend vers zéro, nous voyons que le membre de droite (et donc celui de gauche) tend vers

$$-\frac{g'(x)}{g(x)^2}.$$

□

Corollaire 2 Si $f(x) = x^k$ pour $k \in \mathbb{Z}$, alors $f'(x) = k \cdot x^{k-1}$.

Preuve. Soit k un nombre négatif. Notons que

$$p(x) = \frac{1}{g(x)} \text{ où } g(x) = x^{-k} \text{ et } -k \text{ est un entier positif.}$$

Par la proposition 5, on a

$$p'(x) = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2} = -\frac{(-k)x^{-k-1}}{x^{-2k}} = kx^{k-1},$$

où on a appliqué le corollaire 1 à $g(x)$ pour calculer $g'(x)$. □

Exemple 10 $p(x) = x^{-1}$ a pour dérivée $p'(x) = (-1)x^{-2} = -x^{-2}$,
$p(x) = x^{-2}$ a pour dérivée $p'(x) = -2x^{-3}$,
$p(x) = x^{-3}$ a pour dérivée $p'(x) = -3x^{-4}$,
et ainsi de suite.

Exemple 11 Dériver

$$f(x) = 5x^2 - \frac{6}{x}$$

et déterminer le nombre dérivé $f'\left(\frac{1}{2}\right)$.

$f(x) = 5x^2 - 6x^{-1}$ donc

$$f'(x) = 10x + 6x^{-2},$$

ce qui, si vous n'aimez pas les exposants négatifs, peut être réécrit comme

$$f'(x) = 10x + \frac{6}{x^2}.$$

On calcule le nombre dérivé en substituant

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + \frac{6}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 5 + 24 = 29$$

Exemple 12 Dériver

$$f(x) = \frac{1}{ax^2 + bx + c}$$

Proposition 6 Soient f et g des fonctions dérivables en x et $g(x) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en x et $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$.

Preuve. La preuve est laissée en exercice (exercice 15). □

Exemple 13 Dériver

$$\mathrm{F}(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

Nous avons un quotient $\mathrm{F}(x) = f(x)/g(x)$. La règle du quotient donne

$$\mathrm{F}'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2},$$

ce qui donne

$$\mathrm{F}'(x) = \frac{(cx+d)\cdot a - (ax+b)\cdot c}{(cx+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}.$$

Exemple 14 Dériver

$$\mathrm{F}(x) = \frac{6x^2-1}{x^4+5x+1}$$

Nous avons un quotient $\mathrm{F}(x) = f(x)/g(x)$. La règle du quotient donne

$$\mathrm{F}'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2},$$

d'où

$$\mathrm{F}'(x) = \frac{(x^4+5x+1)(12x) - (6x^2-1)(4x^3+5)}{(x^4+5x+1)^2}.$$

Exemple 15 Calculer $f'(0)$, $f'(1)$, et $f'(2)$ pour $f(x) = \dfrac{5x}{1+x}$.

Exemple 16 Calculer $f'(-1)$ pour $f(x) = \dfrac{x^2}{ax^2+b}$.

Théorème 2 (sans démonstration) Si g est dérivable en x et f est dérivable en $g(x)$, alors la fonction composée $f \circ g$ est dérivable en x et

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Corollaire 3 Si $f(x) = x^r$ pour $r \in \mathbb{Q}$, alors $f'(x) = r \cdot x^{r-1}$.

Preuve. On sait déjà que pour $k \in \mathbb{Z}$, $(x^k)' = kx^{k-1}$. Soit $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$. On pose $f(x) = x^m$ et $g(x) = x^{\frac{1}{n}} = x^{-n}$. On a alors que $(f \circ g)(x) = x^{\frac{m}{n}}$. On applique le théorème 2 à $f \circ g$. On a

$$\begin{aligned}
\left(x^{\frac{m}{n}}\right)' &= \left(\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m\right)' \\
&= m \cdot \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1} \cdot \frac{1}{n} \cdot x^{\left(\frac{1}{n}-1\right)} \\
&= \frac{m}{n} x^{\frac{m-1}{n}} \cdot x^{\frac{1-n}{n}} \\
&= \frac{m}{n} x^{\left(\frac{m-1}{n} + \frac{1-n}{n}\right)} \\
&= \frac{m}{n} x^{\frac{m-n}{n}} \\
&= \frac{m}{n} x^{\left(\frac{m}{n}-1\right)}
\end{aligned}$$

□

1.6 L'équation de la tangente

Formule Soient f une fonction dérivable et $(x_0; y_0)$ un point du graphe de f. La tangente à f en ce point a pour pente $f'(x_0)$. Pour obtenir l'équation de la tangente, on utilise la formule de la pente

$$f'(x_0) = \frac{y - y_0}{x - x_0} \iff y = f'(x_0) \cdot x - f'(x_0) \cdot x_0 + y_0$$

ou encore

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + y_0$$

Exemple 17 Déterminer l'équation de la tangente de

$$f(x) = \frac{2x + 1}{3 - x}$$

au point $(2; 5)$.

Exemple 18 Déterminer l'équation de la tangente de

$$x^2 + y^2 = 25$$

au point $(3; 4)$.

1.7 Dérivées des fonctions trigonométriques

Théorème [Dérivée du sinus]

Théorème 3 Dérivées des fonctions trigonométriques

On a

- $[\sin(x)]' = \cos(x)$
- $[\cos(x)]' = -\sin(x)$
- $[\tan(x)]' = 1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$

Notation De même que pour $[\sin(x)]^2 = \sin^2(x)$ on note plus simplement $[\sin(x)]' = \sin'(x)$, $[\cos(x)]' = \cos'(x)$ et $[\tan(x)]' = \tan'(x)$.

Exemple 19 $[\sin(-20x^3 + x)]'$

On utilise la formule de dérivation de la composition de fonctions.
$\sin(-20x^3 + x) = g(f(x))$ avec $f(x) = -20x^3 + x$ et $g(x) = \sin(x)$
$[\sin(-20x^3 + x)]' = \cos(-20x^3 + x) \cdot (-20x^3 + x)' = \cos(-20x^3 + x) \cdot (-60x^2 + 1)$

Exemple 20 $[\cos^5(x)]'$

On utilise la formule de dérivation de la composition de fonctions.
$\cos^5(x) = [\cos(x)]^5 = g(f(x))$ avec $f(x) = \cos(x)$ et $g(x) = x^5$
$[\cos^5(x)]' = [[\cos(x)]^5]' = 5[\cos(x)]^4 \cdot [\cos(x)]' = 5[\cos(x)]^4 \cdot [-\sin(x)] = 5[-\cos(x)]^4 \sin(x)$

Exemple 21 $[\sin^3(x^2 - 1)]'$

On utilise la formule de dérivation de la composition de fonctions.
$\sin^3(x^2 - 1) = [\sin(x^2 - 1)]^3 = g(f(x))$ avec $f(x) = \sin(x^2 - 1)$ et $g(x) = x^5$
$[[\sin(x^2 - 1)]^3]' = 3[\sin(x^2 - 1)]^2 \cdot [\sin(x^2 - 1)]'$
et on doit recommencer pour dériver $[\sin(x^2 - 1)]'$:
$[\sin(x^2 - 1)]' = \cos(x^2 - 1) \cdot (x^2 - 1)' = \cos(x^2 - 1) \cdot (2x)$
d'où enfin : $[[\sin(x^2-1)]^3]' = 3[\sin(x^2-1)]^2 \cos(x^2-1) \cdot 2x = 6x \sin^2(x^2-1) \cos(x^2 - 1)$

Calcul différentiel SECTION 2

Activité

2.1 Exercices

2.1.1 Introduction : La tangente à une courbe en un point

2.1.2 Définitions et exemples

Exercice 1
j2esz

Calculer le taux de variation de la fonction f donnée entre les deux points donnés et interpréter graphiquement :

a) $f(x) = x^2$, $\mathrm{A} = (1; f(1))$, $\mathrm{P} = (2; f(2))$.
b) $f(x) = x^2$, $\mathrm{A} = (1; f(1))$, $\mathrm{P} = (1.5; f(1.5))$.
c) $f(x) = x^2$, $\mathrm{A} = (-2; f(-2))$, $\mathrm{P} = (2; f(2))$.
d) $f(x) = x^3$, $\mathrm{A} = (1; f(1))$, $\mathrm{P} = (2; f(2))$.

Exercice 2
mmztw

Trouver la pente de la tangente à la parabole d'équation $y = x^2$ au point $(-1; 1)$.

a)

Exercice 3
h2mu9

Expliquer intuitivement pourquoi si une fonction est constante sur un intervalle, alors sa dérivée est nulle sur tout l'intervalle.

Exercice 4

Calculer la dérivée d'une fonction constante $f(x) = c$ pour $c \in \mathbb{R}$.

Exercice 5

Calculer la dérivée de la fonction identité $f(x) = x$.

Exercice 6
uhfwb

Un mobile se déplace sur un axe selon la loi $p(t) = 4t - \frac{t^2}{2}$, où $p(t)$ représente la position du mobile au temps t.

a) Calculer la vitesse moyenne du mobile entre les instants :

i) $t_1 = 2$ et $t_2 = 3$.
ii) $t_1 = a$ et $t_2 = t$.
iii) $t_1 = 2$ et $t_2 = t$.
iv) $t_1 = t$ et $t_2 = t + h$.
v) $t_1 = 2$ et $t_2 = 2 + h$.

b) Calculer la vitesse instantanée du mobile :

i) à l'instant $t = 2$.
ii) à l'instant t.

Exercice 7
sjs2h

Que penser de la dérivée de la fonction réelle $f(x) = |x^2 - 1|$ en $x = 0$, $x = 1$ et $x = 2$?

Exercice 8
hb4kv

Déterminer le nombre dérivé de la fonction réelle $f(t) = t^0 - 7t + 3$ en $t = -1$.

Exercice 9
g75hx

Calculer, à partir de la définition de la fonction dérivée, la dérivée des fonctions réelles ci-dessous ; si possible, représenter f et f' dans un même repère et interpréter graphiquement le résultat :

a) $f(x) = 7$.

b) $f(x) = x$.

c) $f(x) = 3x$.

d) $f(x) = ax + b$, avec $a,b \in \mathbb{R}$.

e) $f(x) = x^2$.

f) $f(x) = ax^2+bx+c$, avec $a,b,c \in \mathbb{R}$.

g) $f(x) = x^3$.

h) $f(x) = \sqrt{x}$.

i) $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

j) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$.

2.1.3 Le nombre dérivé

Exercice 10
rqd6n

À partir de la définition de la dérivée de f en a, calculer les dérivées $f'(a)$ et interpréter graphiquement :

a) $f(x) = x^2$ avec $a = 1$ puis $a = 3$.

b) $f(x) = x^3$ avec $a = 2$.

c) $f(x) = x$ avec $a = 2$ puis $a = 5$.

d) $f(x) = 3$ avec $a = 2$ puis $a = 7$.

2.1.4 Relation avec la continuité

2.1.5 Règles de dérivation

Exercice 11 raguk

On considère le théorème « Dérivée de la différence de deux fonctions »

a) L'énoncer en identifiant clairement hypothèses et conclusions.

b) Illustrer son utilité par des exemples.

c) On donne ci-dessous une démonstration :

Démonstration : $(f-g)'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{(f-g)(x+h)-(f-g)(x)}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \dfrac{(f(x+h)-g(x+h))-(f(x)-g(x))}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)-g(x+h)+g(x)}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)-(g(x+h)-g(x))}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} - \dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} - \lim_{h\to 0} \dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$

$= f'(x) - g'(x)$

Justifier chaque étape de la démonstration.

Exercice 12

Montrer que si f, g, h sont dérivable, alors

$$(fgh)'(x) = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

Exercice 13

Montrer que si f est dérivable en x, alors $\left(f(x)^2\right)' = 2f(x)f'(x)$.

Exercice 14

Montrer que si f est dérivable, alors $(f(x)^n)' = nf(x)^{n-1}f'(x)$.

Exercice 15

Soient f et g des fonctions dérivables en x et $g(x) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en x et $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$.

Indication : $f/g = f \cdot 1/g$.

Exercice 16 4pfpm

Utiliser les formules de dérivation pour déterminer les dérivées suivantes en justifiant toutes les étapes, et en donnant des réponses sans exposant négatif ou fractionnaire :

a) $(x^2-3)'$ b) $\left(\dfrac{2}{x^5}\right)'$ c) $\left(\sqrt{2x^3-3}\right)'$ d) $\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)'$

Exercice 17
bgaa8

Utiliser les formules de dérivation pour déterminer (donner des réponses sans exposant négatif ou fractionnaire) :

a) $(x^5 - 10x)'$ b) $(x^{100} + 100x)'$ c) $(x^2 + 3)'$

d) $(x^2 + \pi x^3)'$ e) $\left(x^3 - 3x^2 + 9\right)'$ f) $\left(\dfrac{x^5}{5} + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x}{7}\right)'$

g) $(t^3 + t^2 + t + 1)'$ h) $(3\sqrt{x})'$ i) $(\sqrt{3},x)'$

j) $(\sqrt[3]{x})'$ k) $(\sqrt{x^3})'$ l) $(\sqrt{2x^3})'$

m) $(x\sqrt{x})'$ n) $(x^{895})'$ o) $(x^{-45})'$

p) $\left(x^{\frac{4}{3}}\right)'$ q) $\left(x^{\sqrt{2}}\right)'$ r) $\left(\dfrac{4}{x}\right)'$

s) $\left(\dfrac{-18}{x}\right)'$ t) $\left(\dfrac{1}{x^2}\right)'$ u) $\left(\dfrac{1}{3x^3}\right)'$

v) $\left(\dfrac{24}{x^2}\right)'$ w) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)'$ x) $\left(\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\right)'$

y) $\left(x^2 - \dfrac{1}{2x}\right)'$ z) $\left(\dfrac{x^2}{x^3 + 1}\right)'$ aa) $\left(\dfrac{1 + 2u^3}{2u}\right)'$

ab) $((2x+3)(3x-7))'$ ac) $\left(x^2(1 + \sqrt{x})\right)'$ ad) $((x^3 - x)(x^2 - 9))'$

ae) $\left(\dfrac{x^2 + 1}{4x}\right)'$

2.1.6 L'équation de la tangente

Exercice 18
ayg94

Trouver l'équation de la droite tangente à la parabole $y = x^2$ au point $(-1; 1)$.

Exercice 19
pbjwq

Déterminer l'équation de la tangente à la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ au point $\left(2; \dfrac{1}{4}\right)$.

Exercice 20
5tfx9

Soit f définie par $f(x) = x^3 - x$.

a) Déterminer l'équation de la tangente sachant que 2 est l'abscisse du point de tangence.

b) Déterminer l'équation de la tangente sachant que la pente vaut 2.

c) Déterminer les x pour lesquels les tangentes sont horizontales.

Exercice 21
ddnv1

Vrai ou faux ? Justifier soigneusement :

a) Si une droite est tangente à une courbe en un point, alors elle ne rencontre la courbe qu'à ce point.

b) Si une droite rencontre une courbe en un seul point, alors elle est tangente à la courbe en ce point.

Exercice 22
nj1k9

Montrer que la pente de la tangente à la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $\mathrm{A}(a; f(a))$ est $-\dfrac{1}{a^2}$, puis calculer l'équation de la tangente au point $\mathrm{A}(4; f(4))$ et la représenter graphiquement avec f.

Exercice 23
p9k57

Les courbes $f(x) = x^2$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$ ont-elles une tangente commune ? Si oui, déterminer son équation. Si non, le prouver.

Exercice 24
22t18

On considère la fonction f définie par $f(x) = x(3-x)(x-1)^2$ pour $x \in [0; 3]$. La courbe représentative de cette fonction modélise la vue en coupe de deux sommets des Alpes, qu'on désire relier par un téléphérique.

a) Déterminer l'équation de la tangente en deux points distincts de cette courbe (les deux points de tangence représentent les stations du téléphérique et le segment de droite compris entre ces deux points représente le câble).

b) Calculer la longueur du câble.

Indication : utiliser un outil de calcul formel pour résoudre le système !

2.1.7 Dérivation de fonctions trigonométriques

Exercice 25
aef2y

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\sin(x) + \cos(x)}{1 + \cos}$. Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, f' s'annule au moins une fois sur l'intervalle $]a, a + 2\pi[$.

Exercice 26 u68mh

Déterminer les dérivées des fonctions f suivantes :

a) $f(x) = \sin(x) + 2\cos(x)$

b) $f(x) = \sin(x)\cos(x)$

c) $f(x) = (\sin(x)+2\cos(x))\cos(x)$

d) $f(x) = \dfrac{\sin(x)+1}{\sin(x)-1}$

e) $f(x) = \dfrac{\cos(x)+2}{\cos(x)+3}$

f) $f(x) = \dfrac{\sin(3x)}{\cos(5x)}$

g) $f(x) = 2\cos(x) - \cos(2x)$

h) $f(x) = 2\sin^2(x) + 5\sin(x) - 3$

i) $f(x) = 3\sin^4(x) + \cos^3(x) - 1$

j) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}$

k) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(2x)}$

l) $f(x) = \sqrt{\cos(2x)} + 3\sin^2(x)$

m) $f(x) = x - \sin(x)\cos(x)$

n) $f(x) = \cos(x)(\sin^2(x)+2)$

o) $f(x) = \dfrac{\sin(x) - x\cos(x)}{x\sin(x)+\cos(x)}$

p) $f(x) = \dfrac{x\sin(x)+\cos(x)}{\sin(x) - x\cos(x)}$

q) $f(x) = 2x\cos(x)+(x^2-2)\sin(x)$

Exercice 27 areny

Déterminer les dérivées suivantes et donner la réponse sans exposant négatif ou fractionnaire :

a) $(\sin(x^4 - \dfrac{1}{x}))$

b) $(\cos(5\sqrt{x}))$

c) $(\tan(\cos(x)))$

d) $(\sin^3(x))$

e) $(\sqrt{\cos(x)})$

f) $(\sin^{-1}(2x))$

Exercice 28 hhksj

Étudier les fonctions suivantes :

a) $f(x) = 2\cos(x) - \cos(2x)$

b) $f(x) = \sin^2(x) - \sin(x)$

c) $f(x) = 2\cos^3(x) - 3$

d) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(2x)}$

e) $f(x) = \dfrac{\tan(2x)}{\tan^2(x)}$

f) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1-2\sin^2(x)}}$

Calcul différentiel SECTION 3

Le théorème des accroissement finis et ses applications

3.1 Le théorème des accroissement finis

Nous allons étudier dans ce chapitre un théorème qui peut paraître évident, mais qui est très utile : le théorème des accroissements finis.

Proposition 7 Soit f une fonction dérivable en x_0.
Si $f'(x_0) > 0$, alors

$$f(x_0 - h) < f(x_0) < f(x_0 + h)$$

pour tout nombre positif h assez petit.
Si $f'(x_0) < 0$, alors

$$f(x_0 + h) < f(x_0) < f(x_0 - h)$$

pour tout nombre positif h assez petit.

Théorème 4
Thm de Rolle

Soit f une fonction dérivable sur $]a;b[$ et continue sur $[a;b]$. Si $f(a) = f(b) = 0$, alors il existe (au moins un) $c \in]a;b[$ tel que

$$f'(c) = 0.$$

Théorème 5
Thm des accroissements finis

Soit f une fonction dérivable sur $]a;b[$ et continue sur $[a;b]$, alors il existe (au moins un) $c \in]a;b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

3.2 Fonctions croissantes et décroissantes

Maintenant que l'on a une bonne idée de ce que représente la dérivée, on comprend intuitivement que

a) une fonction est « croissante » sur un intervalle sur lequel sa dérivée est positive ;
b) une fonction est « décroissante » sur un intervalle sur lequel sa dérivée est négative ;
c) une fonction est constante sur un intervalle sur lequel sa dérivée est nulle.

On va démontrer ces théorèmes en activités.

Définition On dit qu'une fonction est

— **croissante** sur un intervalle I ssi pour tout $x_1, x_2 \in \mathrm{I}$

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$$

— **décroissante** sur un intervalle I ssi pour tout $x_1, x_2 \in \mathrm{I}$

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$$

Exemple 22 La fonction $f(x) = x^2$ est décroissante sur l'intervalle $]-\infty; 0]$ et croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Exemple 23 La fonction

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ x, & x \geq 0, \end{cases}$$

est constante sur l'intervalle $]-\infty; 0]$ et croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Exemple 24 La fonction $f(x) = x^3$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

Théorème 6 Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $]a; b[$, alors

— Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathrm{I}$, alors f est croissante sur I;

— Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in \mathrm{I}$, alors f est décroissante sur I;

— Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathrm{I}$, alors f est constante sur I.

Exemple 25 Étude de la monotonie de $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

Exemple 26 Étude de la monotonie de $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Exemple 27 Étude de la monotonie de $f(x) = 4x^5 - 15x^4 - 20x^3 + 110x^2 - 120x + 40$

3.3 Maximum et minimum

Discussion Nous généralisons à présent un sujet que vous avez déjà survolé les années précédentes : la recherche d'un maximum ou d'un minimum d'une fonction. Que pouvez-vous dire à ce sujet pour les fonctions affines ou quadratiques ?

Définition Une fonction admet un maximum local en c ssi

$$f(c) \geq f(x) \text{ pour tout } x \text{ assez proche de } c.$$

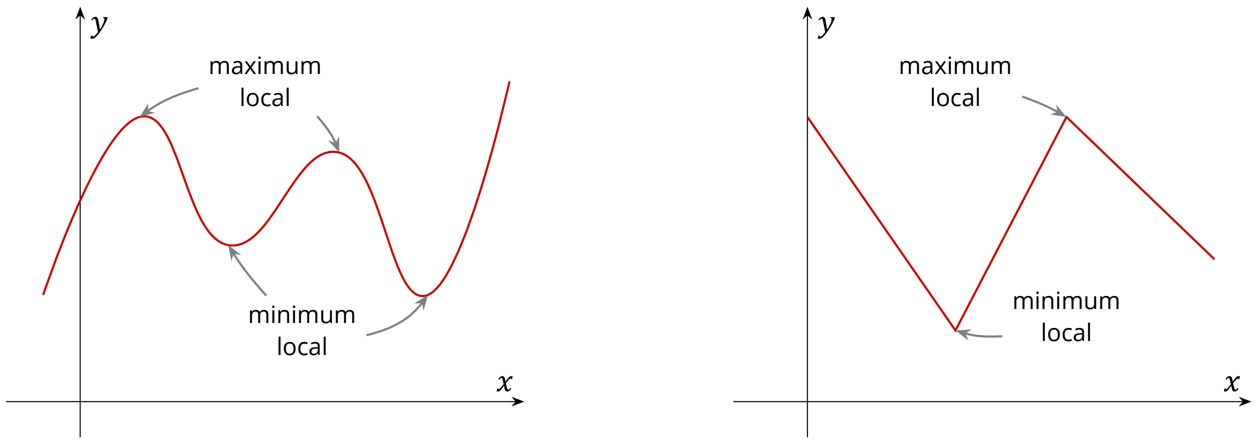
Une fonction admet un minimum local en c ssi

$$f(c) \leq f(x) \text{ pour tout } x \text{ assez proche de } c.$$

Théorème 7 Si f a un maximum ou un minimum local en c, alors

$$f'(c) = 0 \text{ ou } f'(c) \text{ n'existe pas.}$$

Figure 5 – Illustration de la notion de maximum et minimum local sur un ouvert

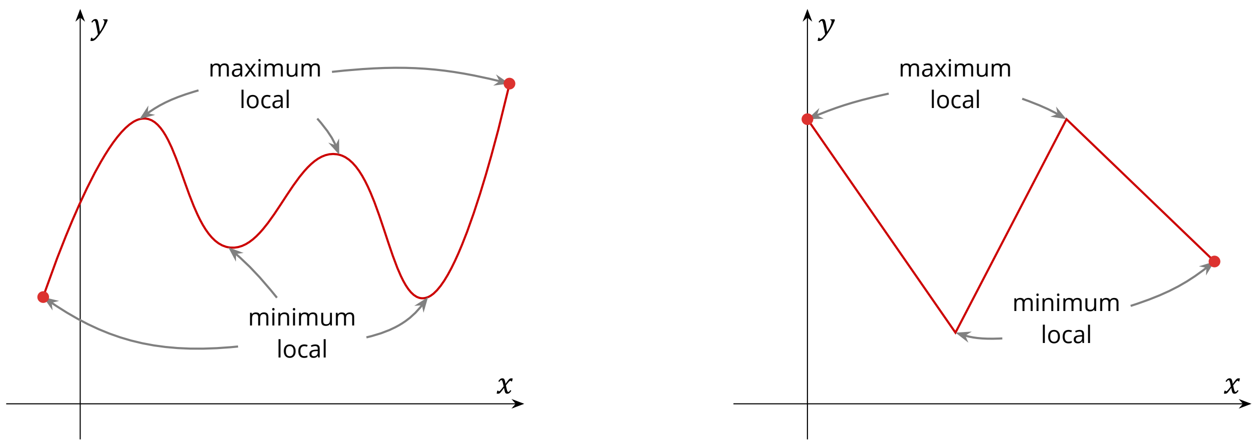


Définition Un point c de l'ensemble de définition de la fonction f est appelé un point critique de f ssi

$$f'(c) = 0 \text{ ou } f'(c) \text{ n'existe pas.}$$

Remarque Si f est définie sur un intervalle $[a; b]$ fermé, alors les bornes de l'intervalle sont des points critiques sur lesquel la fonction peut prendre un maximum ou un minimum local.

Figure 6 – Illustration de la notion de maximum et minimum local sur un fermé



Exemple 28 Déterminer les points critiques et les maximums et minimums locaux de $f(x) = 3 - x^2$.

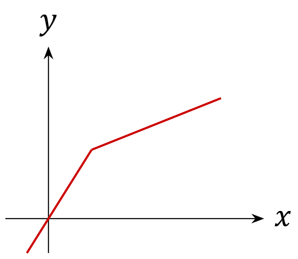
Exemple 29 Déterminer les points critiques et les maximums et minimums locaux de $f(x) = |x+1| + 2$.

Exemple 30 Déterminer les points critiques et les maximums et minimums locaux de $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$.

Remarque Un point critique n'est pas nécessairement un maximum ou un minimum local !

Exemple 31 Déterminer les points critiques et les maximums et minimums locaux de $f(x) = x^3$.

Exemple 32 Déterminer les points critiques et les maximums et minimums locaux de $f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 1 \\ \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}, & x \geq 1 \end{cases}$.



Méthode

Test de la dérivée première

Soit c un point critique de f et f continue en c (pas nécessairement dérivable en c). S'il existe un voisinage $]c-a;c+a[$ de c tel que

— $f'(x) < 0$ pour tout $x \in]c-a;c[$ et $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]c;c+a[$ alors c est un minimum local.

— $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]c-a;c[$ et $f'(x) < 0$ pour tout $x \in]c;c+a[$ alors c est un maximum local.

Exemple 33 Déterminer à l'aide du test de la dérivée première si les points critiques de la fonction $f(x) = |x^2 - 1|$ sont des maximums ou minimums locaux.

Exemple 34 Déterminer à l'aide du test de la dérivée permière si les points critiques de la fonction $f(x) = (x-2)(x-1)^4$ sont des maximums ou minimums locaux.

Méthode

Test de la dérivée seconde

Soit f une fonction deux fois dérivable en c. Soit c tel que $f'(c) = 0$.

— Si $f''(c) > 0$, alors $f(c)$ est un minimum local.
— Si $f''(c) < 0$, alors $f(c)$ est un maximum local.

Exemple 35 Utiliser le test de la dérivée seconde afin de déterminer si les points critique de $f(x) = x^3 - x$ sont des extremums.

Activité 1

Soient $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$ et $g(x) = x^4$.

a) Appliquer le test de la dérivée première pour étudier les points critiques de f et de g.

b) Appliquer le test de la dérivée seconde pour étudier les points critiques de f et de g.

Quelle conclusion en tirer ?

Définition
Extrema absolus

— Un point $(c; f(c))$ est un maximum absolu de la fonction f ssi $f(c) \geq f(x)$ pour tout $x \in \mathrm{D}_f$.
— Un point $(c; f(c))$ est un minimum absolu de la fonction f ssi $f(c) \leq f(x)$ pour tout $x \in \mathrm{D}_f$.

Méthode
Étudier les points critiques

i) Déterminer le domaine de définition si cela n'est pas donné.
ii) Déterminer le domaine sur lequel la fonction est dérivable.
iii) Déterminer les points critiques, c'est-à-dire tous les points du domaine de définition tel que $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ n'existe pas. **Ne pas oublier les bornes de l'intervalle si la fonction est définie sur un intervalle fermé**.
iv) Tester les points critiques (hors bornes)
    i) avec le test de la dérivée première ;
    ii) si $f''(c)$ existe et est différent de 0, alors avec le test de la dérivée seconde.
v) Tester toutes les bornes incluses dans l'intervalle en évaluant la fonction et/ou en regardant le comportement de f' dans un voisinage.
vi) Déterminer si les points critiques sont des extrema locaux ou absolus.

Activité 2

Étudier les points critiques de

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}$$

3.4 Optimisation

Vous avez déjà rencontré des problèmes d'optimisation dans votre cursus. Ces questions représentent des applications concrètes des outils d'analyse que nous avons étudiés dans les sections précédentes. Il s'agit de déterminer la valeur minimale ou maximale d'une quantité variable dans une situation donnée.
La partie la plus complexe dans la résolution d'un problème d'optimisation consiste à exprimer la quantité à optimiser comme une fonction dérivable à une variable. Une fois que cela est fait, il suffit d'étudier les points critiques de la fonction pour déterminer les extrema recherchés.

Méthode

Résoudre un problème d'optimisation

i) Lire attentivement l'énoncé du problème.
ii) Réaliser un schéma si nécessaire.
iii) Assigner des variables aux quantités apparaissants dans le problème.
iv) Écrire les relations entre les différentes quantités qui interviennent dans le problème. S'il y a n variables, trouver au moins $n-1$ équations liant les quantités entre-elles.
v) Exprimer la quantité à optimiser par une fonction à une variable (il se peut qu'il faille substituer plusieurs équations dans une seule afin d'obtenir une seule expression avec une seule variable).
vi) Étudier les points critiques (utiliser la méthode à la page 31).
vii) Interpréter la réponse trouvée et conclure.

Activité 3
Quelles sont les dimensions du rectangle d'aire maximale qui puisse être inscrit dans un cercle de rayon r ?

a) Réaliser un schéma.
b) Déterminer la fonction à optimiser.
c) Écrire les formules qui lient les variables.
d) Déterminer une fonction à une variable à optimiser.
e) Étudier les points critiques.
f) Conclure.

Activité 4
Quelles doivent être les dimensions d'une boîte de base carrée (pas un cube !) sans couvercle de contenance un litre pour que sa construction demande un minimum de matériau ?

3.5 Concavité et points d'inflexion

3.6 Application à l'étude de fonctions

3.7 Applications

3.8 Exercices

Exercice 29
g4sjk

Tracer le graphe d'une fonction réelle f satisfaisant simultanément toutes les conditions suivantes :

a) $f(2) = -4$

b) l'ensemble des préimages de 1 est $\{-5; 8\}$

c) l'ensemble Z_f des zéros de f est $\{-4; 7\}$

d) $\lim_{x\to-1} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to-1^+} f(x) = -\infty$

e) f n'est pas définie en $x = -3$ et $\lim_{x\to-3} f(x) = -2$

f) $f(1) = -5$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ n'existe pas

g) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$

h) f n'est pas dérivable en $x = 4$

Exercice 30
d4c88

Soit la fonction polynomiale P définie par $P(x) = 3x^4 - 11x^3 + 12x^2 - 4x + 2$. Montrer que P' s'annule au moins une fois sur $]0,1[$.

3.8.1 Le théorème des accroissement finis

Exercice 31
d4c88

Soit la fonction polynomiale P définie par $P(x) = 3x^4 - 11x^3 + 12x^2 - 4x + 2$. Montrer que P' s'annule au moins une fois sur $]0,1[$.

Exercice 32
aef2y

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\sin(x) + \cos(x)}{1 + \cos}$. Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, f' s'annule au moins une fois sur l'intervalle $]a, a + 2\pi[$.

Exercice 33
n67du

Soient p et q deux réels et n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Montrer que la fonction polynomiale P définie par $P(x) = x^n + px + q$ admet au plus trois racines réelles si n est impair et au plus deux racines réelles si n est pair.

Exercice 34
5hev4

Trouver la ou les valeurs prévues par le théorème des accroissements finis pour la fonction $f(x) = x^2 - x$ sur l'intervalle $[-3,4]$

Exercice 35
hju27

Trouver la ou les valeurs prévues par le théorème des accroissements finis pour la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{x - 7}$$

sur l'intervalle $[7,1; 7,2]$.

Exercice 36

zar8b

Soit la fonction $f(x) = mx^2 + kx + q$ ($m \neq 0$). On considère f dans l'intervalle $[0;3]$.

a) Poser $m = -1$, $k = 2$ et $q = 3$ et calculer le point $c \in]0;3]$ annoncé par le théorème des accroissements finis.

b) Représenter graphiquement la situation du point c.

c) Considérer f dans l'intervalle $[1;5]$ et calculer le point $c \in]1;5]$ annoncé par le théorème des accroissements finis.

d) Considérer f dans l'intervalle $[2;8]$ et calculer le point $c \in]2;8]$ annoncé par le théorème des accroissements finis.

e) Considérer f dans l'intervalle $[a;b]$. Formuler et démontrer une conjecture sur le point $c \in]a;b[$ annoncé par le théorème des accroissements finis.

Exercice 37

x5ny2

La vitesse maximale autorisée sur une route nationale est de 110 km/h. L'indicateur de vitesse d'une voiture marque 80 km/h au moment où elle passe à hauteur d'une borne kilométrique le long d'une route. Quatre minutes plus tard, elle est 8 km plus loin et son compteur marque 88 km/h. Montrer qu'à un moment au moins, entre ces deux repères, la voiture a dépassé la vitesse de 118 km/h.

Exercice 38

r9x4h

Vrai ou faux ? Justifier.

a) Il n'existe pas de fonction à la fois croissante et décroissante sur un intervalle I.

b) Si f est nulle sur un intervalle ouvert I, alors $f'(x) > 0$ sur I.

c) Si f est strictement croissante sur un intervalle ouvert I, alors $f'(x) > 0$ sur I.

d) Si f est strictement décroissante et dérivable sur un intervalle ouvert I, alors $f'(x) < 0$ sur I.

Exercice 39

Après avoir vérifié que la fonction satisfait les conditions du théorème des accroissements finis sur l'intervalle indiqué, trouver les valeurs prédite pour c par le théorème sur l'intervalle $[a;b]$ donné.

a) $f(x) = x^2 \quad [1;2]$

b) $f(x) = x^2 \quad [1;3]$

c) $f(x) = x^3 \quad [0;1]$

d) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x} \quad [1;4]$

e) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1} \quad [1;3]$

f) $f(x) = x^{2/3} \quad [1;8]$

Exercice 40

Déterminer si la fonction $f(x) = (1 - x^2)^{1/3} + x^2$ satisfait les conditions du théorème de Rolle sur l'intervalle $[-1,1]$. Si oui, trouver les valeurs de c prédites par le théorème.

Exercice 41 Soit $f(x) = x^{-1}$, $a = -1$, $b = 1$. Vérifier qu'il n'existe aucun nombre c tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Expliquer en quoi cela ne contredit pas le théorème des accroissements finis.

Exercice 42

a) Tracer le graphe de la fonction $f(x) = |2x - 1| - 3$ et calculer sa dérivée.

b) Vérifier que $f(-1) = 0 = f(2)$ et pourtant $f'(x)$ n'est jamais nul.

c) Expliquer pourquoi cela ne contredit pas le théorème de Rolle.

Exercice 43 Tracer le graphe de

$$f(x) = \begin{cases} 2 + x^3, & x \leq 1 \\ 3x, & x > 1 \end{cases}$$

et calculer sa dérivée. Déterminer si f satisfait les conditions du théorème des accroissemtns finis sur l'intervalle [1,2] et, si oui, trouver toutes les valeurs de c prédites par le théorème.

Exercice 44 Soit P un polynôme non constant

$$\mathrm{P}(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Montrer que, entre deux racines consécutives de l'équation $\mathrm{P}(x) = 0$, il existe au plus une racine de l'équation $\mathrm{P}'(x) = 0$.

Exercice 45 Montrer que l'équation $6x^4 - 7x + 1 = 0$ n'a pas plus de deux racines réelles. (Utiliser le théorème de Rolle.)

Exercice 46 Montrer que l'équation $6x^5 + 13x + 1 = 0$ a exactement une racine réelle. (Utiliser le théorème de Rolle et le théorème de la valeur intermédiaire.)

Exercice 47 Montrer que l'équation $x^3 + 9x^2 + 33x - 8 = 0$ a exactement une racine réelle.

Exercice 48 Soit f deux fois dérivable. Montrer que, si l'équation $f(x) = 0$ a n racines réelles, alors l'équation $f'(x) = 0$ a au moins $n - 1$ racines réelles et l'équation $f''(x) = 0$ a au moins $n - 2$ racines réelles.

Exercice 49
n67du

Soient p et q deux réels et n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Montrer que la fonction polynomiale P définie par $\mathrm{P}(x) = x^n + px + q$ admet au plus trois racines réelles si n est impair et au plus deux racines réelles si n est pair.

3.8.2 Fonctions croissantes et décroissantes

Exercice 50 Trouver les intervalles sur lesquels f est croissante et ceux sur lesquels elle est décroissante, si $f(x)$ est donnée comme suit.

a) $x^3 - 3x + 2$

b) $x^3 - 3x^2 + 6$

c) $3x + \frac{1}{x}$

d) $x^3(1 + x)$

e) $\frac{x}{x^2 + 1}$

f) $(x + 1)^4$

g) $\sqrt{x - 2}$

h) $\frac{1}{x - 5}$

i) $\frac{x^2}{x^2 - 1}$

j) $\frac{x}{x^2 + 1}$

k) $\frac{x^2}{x + 1}$

l) $\frac{x^2(1 + x)^2}{x - 1}$

m) $\frac{x}{x^2 - 1}$

n) $\frac{x^2}{x^2 + 1}$

o) $\left(1 - \sqrt{x}\right)^7$

p) $\sqrt{\frac{2 + x}{1 + x^2}}$

q) $\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

r) $|x + 1||x - 2|$

3.8.3 Maximum et minimum

Exercice 51 Trouver les points critiques et les extrema locaux.

a) x^3+3x-2

b) $2x^4-4x^2+6$ c) $x+\dfrac{1}{x}$

d) $x^{-1}(1-x)$ e) $x(x+1)(x+2)$

f) $(1-x)^2(1+x)$ g) $\dfrac{1}{x-2}$

h) $\dfrac{1+x}{1-x}$ i) $\dfrac{2-3x}{2+x}$

j) $\dfrac{2}{x(x+1)}$ k) $|x^2-16|$

l) $x^3(1-x)^2$ m) $\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)^3$

n) $(1-2x)(x-1)^3$ o) $(1-x)(1+x)^3$

p) $\dfrac{x^2}{1+x}$ q) $\dfrac{|x|}{1+|x|}$

r) $(3x-5)^3$ s) $|x-1||x+2|$

t) $x\sqrt[3]{1-x}$ u) $-\dfrac{x^3}{x+1}$

v) $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-2}$ w) $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}$

x) $|x-3|+|2x+1|$

Exercice 52 Trouver les points critiques et classifier les valeurs extrêmes.

a) $f(x)=\sqrt{x+2}$ b) $f(x)=(x-1)(x-2)$

c) $f(x)=x^2-4x+1,\ x\in[0;3]$

d) $f(x)=2x^2+5x-1,\ x\in[-2;0]$ e) $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x}$

f) $f(x)=x+\dfrac{1}{x^2}$ g) $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x},\ x\in\left[\dfrac{1}{10};2\right]$

h) $f(x)=x+\dfrac{1}{x^2},\ x\in]-1;0[$ i) $f(x)=(x-1)(x-2),\ x\in[0;2]$

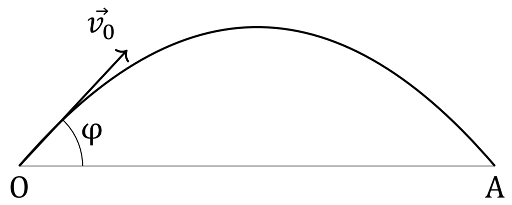
j) $f(x)=(x-1)^2(x-2)^2,\ x\in[0;4]$

k) $f(x)=\dfrac{1-3\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}}$ l) $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2},\ x\in[-1;2]$

m) $f(x)=(x-\sqrt{x})^2$ n) $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$

3.8.4 Optimisation

Exercice 53 La portée $\mathrm{P} = \mathrm{OA}$ d'un projectile lancé (dans le vide) avec une vitesse initiale v_0 et un angle d'élévation φ est donnée par $\mathrm{P} = \dfrac{v_0^2 \cdot \sin(2\varphi)}{g}$, g étant l'accélération de la pesanteur. Pour une vitesse initiale donnée, déterminer la valeur de l'angle φ pour laquelle la portée est maximale.



Exercice 54 Parmi tous les triangles rectangles d'hypoténuse donnée h, quel est celui dont le périmètre est le plus grand ? Quel est ce périmètre maximal ?

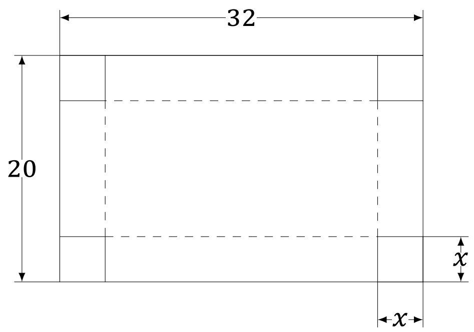
Exercice 55 Parmi tous les rectangles de périmètre donné $2p$, quel est celui dont l'aire est maximale ? Quelle est la valeur de cette aire ?

Exercice 56 Parmi toutes les boîtes cylindriques d'aire totale donnée, caractériser celle dont le volume est maximal.

Exercice 57 Un fil de longueur L doit être coupé en deux parties. Avec l'une on forme un triangle équilatéral et avec l'autre un carré. Où faut-il couper ce fil pour que l'aire totale des deux figures construites soit maximale ? minimale ?

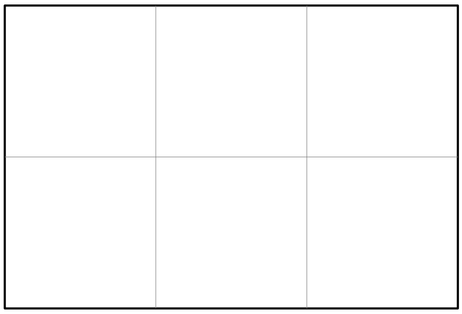
Exercice 58 Déterminer les dimensions d'une boîte cylindrique sans couvercle, de volume donné, pour que sa construction demande le moins de matériau possible (on négligera l'épaisseur des parois et les déchets de construction). Même question pour une boîte avec couvercle.

Exercice 59 On construit une boîte rectangulaire en découpant quatre carrés aux coins d'une feuille de carton mesurant 32 cm sur 20 cm. Déterminer la hauteur x de la boîte de volume maximal.



Exercice 60 On construit un conteneur de forme cylindrique sans couvercle de volume $648\,\pi$ cm^3. Le matériau utilisé pour le fond coûte 15 centimes par cm^2 et celui utilisé pour la paroi latérale 5 centimes par cm^2. Si la fabrication ne donne lieu à aucun déchet, quelles sont les dimensions du conteneur le plus économique ?

Exercice 61 On dispose de 288 m de clôture grillagée pour construire 6 enclos identiques pour un zoo selon le plan ci-contre. Quelles dimensions donner à ces enclos de manière à maximiser leur surface au sol ?

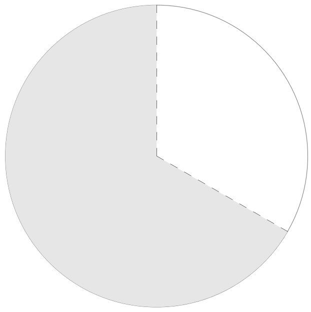


Exercice 62 Une fenêtre a la forme d'un rectangle surmonté d'un demi-cercle. Si le périmètre de la fenêtre est de 6 m, quelles seront les dimensions de la fenêtre laissant passer un maximum de lumière ?

Exercice 63 Un mur de 2 m de haut, situé à 1 m d'une façade, interdit l'accès à celle-ci. Calculer la longueur de l'échelle la plus courte qui s'appuie contre la façade et dont le pied est sur le sol, devant le mur.

Exercice 64 Une feuille rectangulaire doit contenir 392 cm^2 de texte imprimé. Les marges supérieure et inférieure doivent être de 2 cm chacune ; les marges latérales de 1 cm chacune. Déterminer les dimensions de la feuille nécessitant le moins de papier.

Exercice 65 On fabrique un cornet de forme conique en rejoignant les bords rectilignes d'un secteur circulaire de rayon r. Quel est le volume du plus grand cornet possible ?



Exercice 66 On désire construire un réservoir dont la forme est un cylindre fermé en chacune de ses extrémités par une demi-sphère. Si le coût par unité de surface des parties sphériques est le double de celui de la partie cylindrique, quelles sont les dimensions du réservoir de volume $4\,\pi$ m^3 le plus économique ?

Exercice 67 On fait tourner un rectangle de périmètre $2p$ autour de l'un de ses axes de symétrie. Déterminer les dimensions du rectangle pour que le corps ainsi obtenu ait

a) le plus grand volume ;
b) la plus grande aire latérale ;
c) la plus grande aire totale.

Exercice 68 On considère la parabole γ d'équation $y = 1 - x^2$ ainsi qu'un point M de γ situé dans le premier quadrant. La tangente à γ en M coupe l'axe $0x$ au point A et l'axe $0y$ au point B. Déterminer les coordonnées du point M pour que l'aire du triangle OAB soit minimale.

Exercice 69 La résistance d'une poutre de section rectangulaire est proportionnelle au produit de la largeur par le carré de la hauteur de sa section transversale. Quelle est la forme de la poutre la plus résistante que l'on peut tailler dans un tronc d'arbre de section circulaire ?

Exercice 70 Deux usines situées à 10 km l'une de l'autre émettent des fumées polluantes. On suppose que la pollution provoquée par chaque usine en un endroit est proportionnelle à la quantité de fumée, et inversement proportionnelle au cube de la distance à l'usine. Si la première usine rejette trois fois plus de fumée que la seconde, quel est l'endroit le moins pollué situé entre les deux usines ?

Exercice 71 Sur l'axe $0x$ on fixe une première source de lumière en $x = 0$ et une deuxième en $x = 10$. On note I_1 et I_2 les intensités lumineuses des deux sources, L_1 et L_2 les intensités des flux lumineux en un point provenant respectivement de la première source et de la deuxième source. Sachant que $\mathrm{I}_2 = 4\mathrm{I}_1$, et que l'intensité du flux lumineux en un point est proportionnelle à l'intensité lumineuse de la source considérée et inversement proportionnelle au carré de la distance séparant ce point de la source, déterminer le point de l'intervalle $[0; 10]$ qui reçoit un flux total minimal des deux sources. Calculer le rapport des distances séparant ce point aux deux sources.

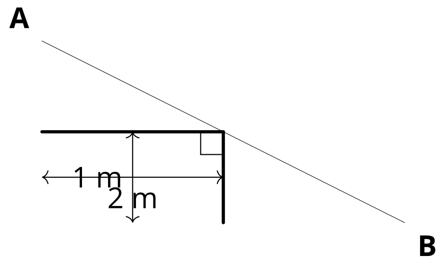
Exercice 72 On désire fabriquer une tente en forme de pyramide régulière de base carrée. On dispose de S m^2 de toile pour fabriquer les quatre faces. On désigne par V le volume de la tente, par x le côté du carré de la base et par h la hauteur de la tente. Montrer que V est maximum lorsque $\dfrac{x}{h} = \sqrt{2}$.

Exercice 73 Un navire doit parcourir 40 km contre un courant de 10 km/h. Il consomme par heure une quantité de carburant proportionnelle au carré de sa vitesse. En supposant qu'il navigue à vitesse constante, quelle doit être sa vitesse pour minimiser la quantité de carburant consommée ?

Exercice 74 À 10 kilomètres de votre maison, vous vous rappelez avoir oublié de fermer un robinet, ce qui vous coûte 40 centimes par heure. En roulant à une vitesse constante de s kilomètres par heure, le coût du carburant est de $8+\dfrac{s}{20}$ centimes par kilomètre. À quelle vitesse devez-vous faire l'aller et retour pour minimiser les frais totaux ?

Exercice 75 On colle les côtés $[\mathrm{AB}]$ et $[\mathrm{DC}]$ d'un rectangle ABCD de périmètre donné pour former un cylindre ouvert. Quelle doit être la mesure de l'angle entre le côté $[\mathrm{AB}]$ et la diagonale $[\mathrm{AC}]$ pour que le volume du cylindre soit maximal ?

Exercice 76 Deux couloirs de largeurs 1 m et 2 m se rencontrent à angle droit. On transporte une barre rigide AB parallèlement au sol. Quelle est la longueur maximale que peut avoir cette barre si l'on veut pouvoir la transporter d'un couloir dans l'autre ?



Exercice 77 Des mesures répétées d'une grandeur inconnue x ont donné les résultats suivants : $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$. Montrer que la somme des carrés des écarts $(x-x_1)^2+(x-x_2)^2+\cdots+(x-x_n)^2$ sera minimale si l'on estime x par la moyenne des mesures $\dfrac{x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n}{n}$.

Exercice 78 La somme de deux nombres positifs est 16. Déterminer ces deux nombres de telle façon que :

gmcwt

a) la somme des cubes soit minimale ; quelle est alors la valeur de ce minimum ?

b) la somme des cubes soit maximale ; quelle est alors la valeur de ce maximum

Exercice 79 La somme de deux nombres positifs est 20. Déterminer ces deux nombres de telle façon que :

shcv8

a) le produit soit maximal

b) la somme des carrés soit minimale

c) le produit du carré de l'un par le cube de l'autre soit maximal.

Exercice 80 Un fermier veut délimiter un champ rectangulaire avec une clôture longue de 400m. La pièce étant située le long d'une rivière, il suffit au fermier de poser la clôture sur 3 des 4 côtés. Calculer les dimensions du champ d'aire maximale.

9q8gz

Exercice 81
xkwd5

Comment faut-il partager 200m de clôture pour faire un enclos circulaire et un enclos carré de manière que l'aire totale soit :

a) minimale ? Quelle est alors la valeur de ce minimum ?

b) maximale ? Quelle est alors la valeur de ce maximum ?

Exercice 82
bs74m

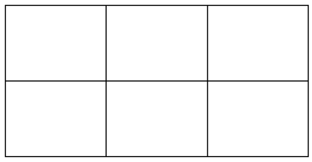
Déterminer les dimensions de la boîte de conserve cylindrique d'une contenance de 1 litre construite avec le moins de matériau possible (on négligera l'épaisseur des parois et les déchets de construction).

Exercice 83
nv48n

On construit une boîte rectangulaire en pliant une feuille de carton mesurant 30 cm sur 20 cm. Déterminez la hauteur x de la boîte pour qu'elle ait la plus grande capacité possible.

Exercice 84
pmwx1

On dispose de 288 mètres de clôture grillagée pour construire 6 enclos pour un zoo le plan ci-contre :



Quelles dimensions donner à ces enclos de manière à maximiser leur surface au sol ?

Exercice 85
fnj4z

Déterminer les coordonnées des points de la courbe d'équation $y = 1 - x^2$ les plus proches de l'origine.

Exercice 86
bhu5u

Quelles sont les dimensions du rectangle grisé d'aire maximale inscrit sous cette parabole de sommet $(0,4)$ et de zéros 5 et 5 ?

Exercice 87
sms7s

Quel est le plus grand des nombres c et $c+c$ dessous ? Justifier ! $c = 0,987654321^3 - 3.0,987654321$ $d = 0,987654320^3 - 3.0,987654320$

3.8.5 Concavité et points d'inflexion

Exercice 88

Décrire la concavité du graphe des fonctions suivantes et déterminer les points d'inflections s'il y en a :

a) $\dfrac{1}{x}$ b) $x + \dfrac{1}{x}$ c) $x^3 - 3x + 2$

d) $2x^2 - 5x + 2$ e) $\dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{1}{2}x^2$ f) $x^3(1 - x)$

g) $\dfrac{x}{x^2 - 1}$ h) $\dfrac{x+2}{x-2}$ i) $(1 - x)^2(1 + x)^2$

j) $\dfrac{6x}{x^2 + 1}$ k) $\dfrac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$ l) $(x - 3)^{1/5}$

Exercice 89 Trouver d sachant que $(d, f(d))$ est un point d'inflexion de

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c).$$

Exercice 90 Trouver c sachant que le graphe de $f(x) = cx^2 + x^{-2}$ a un point d'inflexion en $(1, f(1))$.

Exercice 91 Trouver a et b sachant que le graphe de $f(x) = ax^3 + bx^2$ passe par $(-1, 1)$ et a un point d'inflexion quand $x = \frac{1}{3}$.

Exercice 92 Déterminer A et B pour que la courbe $y = \mathrm{A}x^{1/2} + \mathrm{B}x^{-1/2}$ ait un point d'inflexion en $(1, 4)$.

3.8.6 Application à l'étude de fonctions

Exercice 93 Étudier les fonctions définies par (sans deuxième dérivée) :

515q8

a) $f(x) = 3x^5 - 5x^3$

b) $f(x) = x^4 - 2x^3$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 6}{(x-2)^2}$

d) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3}{x - 1}$

e) $f(x) = \dfrac{x - x^2}{x^2 - 6x + 5x}$

Exercice 94 Étudier les fonctions suivantes (sans deuxième dérivée) :

yn5fe

a) $f(x) = \dfrac{2x^2 + 1}{x - 1}$

b) $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{3x^2}$

c) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

Exercice 95 Étudier les fonctions ci-dessous avec la deuxième dérivée :

3exms

a) $f(x) = 3x^5 - 5x^3$

b) $f(x) = \dfrac{2x^3 + 2x - 12}{-x^2 + 3x - 2}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 6}{x^2 - 4x + 4}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x + x^3}{4 - x^2}$

e) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x - 1}$

Exercice 96
w3pgx

Étudier les fonctions suivantes sans deuxième dérivée :

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{|x|+2}$

b) $f(x) = 5x + 3\sqrt{x^2-1}$

c) $f(x) = x + 1 + \sqrt{x^2+4x}$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x^3-3x}$

e) $f(x) = \dfrac{3x-1}{\sqrt{x^2+2}}$

f) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$

g) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x+1}$

3.8.7 Applications

Exercice 97
fg15r

Trouver l'angle d'intersection des courbes représentatives des fonctions f et g définies par $f(x) = x^2$ et $g(x) = \dfrac{1}{3}x + 1$.

Exercice 98
2mqwc

Trouver x et y des nombres positifs dont la somme soit égale à 60 et tels que xy^3 soit :

a) maximal

b) minimal.

Exercice 99
m4mzh

Déterminer les dimensions d'un rectangle de plus grande aire ayant un périmètre de 30 cm.

Exercice 100
wu8y4

Quelles dimensions faut-il donner à une boîte cylindrique fermée en aluminium de 5dl pour utiliser le minimum d'aluminium ? Que vaut alors ce minimum ?

Exercice 101
u7dja

Une ficelle de longueur L est coupée en deux morceaux : avec l'un des deux on obtient un carré et avec l'autre un triangle équilatéral. À quel endroit doit-on couper la ficelle pour que la somme des aires des domaines obtenus soit maximale ?

Exercice 102
e1wtj

Parmi tous les rectangles inscrits dans un cercle de rayon r, trouver celui dont l'aire est maximale.

Exercice 103
hvq58

On inscrit un cylindre droit dans un cône droit de rayon r et de hauteur h.

a) Quelles sont ses dimensions pour que son volume soit minimal ?

b) Quelles sont ses dimensions pour que son aire latérale soit minimale ?

Exercice 104
uvgs1

Déterminer les dimensions du cylindre de volume maximal inscrit dans une sphère de rayon R.

Exercice 105
7zb7h

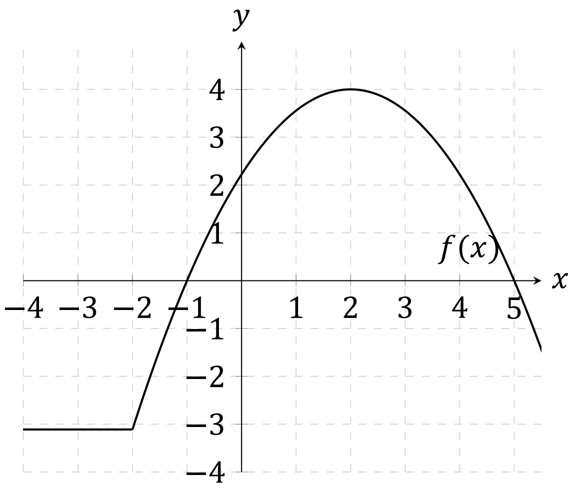
Déterminer la distance minimale du point $\mathrm{A} = (4; 2)$ à la parabole $y^2 = 8x$.

Calcul différentiel SECTION 4

Activités

Exercice 106 Sur le graphique ci-dessous on a représenté une fonction g pour $x \in [-4; 5{,}5]$:

ezscr



a) Recopier ce graphique puis esquisser aussi précisément que possible la représentation graphique de la fonction dérivée g'.

b) Sur le même repère, mais avec une autre couleur, tracer une courbe h qui passe par le point $\mathrm{P}(0; -2)$ et telle que $h'(x) = g(x)$.

Sources du cours

Les sources suivantes ont majoritairement été utilisées pour construire ce cours. Les exercices et activités proviennent également principalement de ces ouvrages. D'autres exercices ont été adaptés ou sont inspirés de ressources partagées par des collègues ou trouvées sur internet. Leur contribution mineure les exclut de cette liste.

[1] Saturnino L. Salas et Einar Hille. **Calculus : One and Several Variables**. 3e éd. Wiley, 1984. isbn : 9780471316596.

[2] Commission romande de mathématiques. **Fundamentum de mathématique Analyse**. CRM Éditions, 2018. isbn : 9782940621026.

[3] Association Sesamath Suisse Romande. **Sésamath – Troisième année de maturité gymnasiale**. 2022. url : `https://sesamath.ch/`.