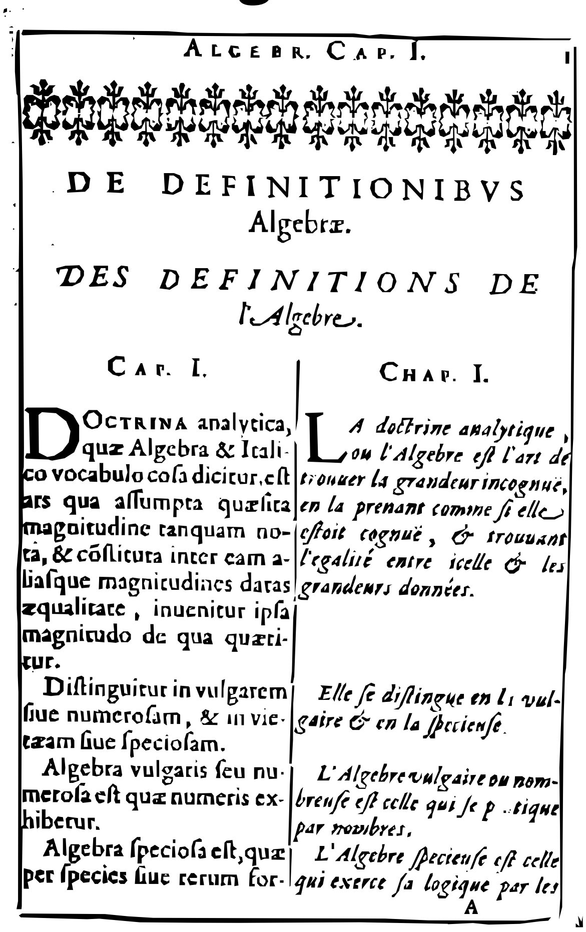


Algèbre


ALGEBR. CAP. I. 1

DE DEFINITIONIBVS Algebræ.

DES DEFINITIONS DE l'Algebre.

CAP. I.

DOCTRINA analytica, quæ Algebra & Italico vocabulo coſa dicitur, eſt ars qua aſſumpta quæſita magnitudine tanquam nota, & cõſtituta inter eam aliaſque magnitudines datas æqualitate, inuenitur ipſa magnitudo de qua quæritur.

Diſtinguitur in vulgarem ſiue numeroſam, & in vietæam ſiue ſpecioſam.

Algebra vulgaris ſeu numeroſa eſt quæ numeris exhibetur.

Algebra ſpecioſa eſt, quæ per ſpecies ſiue rerum for-

CHAP. I.

LA doctrine analytique, ou l'Algebre eſt l'art de trouuer la grandeur incognuë, en la prenant comme ſi elle eſtoit cognuë, & trouuant l'egalité entre icelle & les grandeurs données.

Elle ſe diſtingue en la vulgaire & en la ſpecieuſe.

L'Algebre vulgaire ou nombreuſe eſt celle qui ſe p..tique par nombres.

L'Algebre ſpecieuſe eſt celle qui exerce ſa logique par les

A

Hérigone, Pierre. Cours mathématique. Vol. 1. Paris, 1634, p. A1.

Table des matières

Algèbre SECTION 1

Calcul littéral

1.1 Techniques de factorisation

Pour factoriser il faut

i) mettre en évidence le plus grand facteur possible ;
ii) vérifier si on se trouve face à une identité remaquable ;
iii) appliquer la technique des groupements pour révéler une factorisation plus poussée ;
iv) réduire les expressions obtenues ;
v) recommencer les étapes ci-dessus.

Factoriser une expression est un problème difficile, il n'y a pas de marche à suivre précise, mais il faut maîtriser les techniques suivantes afin reconnaître les situations dans lesquelles il est nécessaire de les appliquer.

Mise en évidence On détermine le pgcd des coefficients et la partie littérale commune de chacun des termes.

Identités remarquables On applique les schémas vus dans la théorie pour nous aider à choisir de quelle identité il s'agit.

Technique des groupements On essaye de faire apparaître un facteur commun à plusieurs termes, mais pas à tous en même temps.

Exemple 1

Exemple de factorisation avec groupements

Les groupements peuvent être égaux au signe près. On multiplie par $1 = (-1)^2$ pour obtenir un changement de signe du groupement.

Exemple 2

Retrouver un groupement au signe près

Les techniques s'enchaînent. Voici quelques exemples.

Exemple 3

Identité remarquable avec groupements

Exemple 4

Identité remarquable pour faire apparaître un groupement

Exemple 5

Groupement pour faire apparaître une identité

Exercice 1 Factoriser le plus possible les expressions suivantes.

a) $(7x-1)^2-(5x+2)^2$ b) $(4x-1)^2-9(3-x)^2$

c) $2x^2-4x+2-3(x-1)(2x+1)$

d) $25x^2+(5x-3)(2x+7)-9+(6-10x)(x-3)$

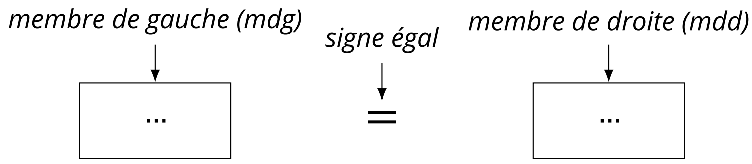
Algèbre SECTION 2

Équations du premier degré

2.1 Généralités

Définition équation

Une **équation** est une expression mathématique avec un membre de gauche, un signe égalité et un membre de droite. Les membres de gauche et de droite sont des expressions littérales contenant des inconnues.



Définition degré

Le **degré** d'une équation est le plus haut degré d'un monôme apparaissant dans l'équation.

Définition solution d'une équation

Une **solution d'une équation** est un nombre ou un tuple de nombres qui satisfait l'égalité lorsqu'on substitue à la place de l'inconnue ou des inconnues.

Exemple 6 Solution d'une équation

On note avec un ensemble l'ensemble de toutes les solution d'une équation $S = \{...\}$

Définition équations équivalentes

Deux équations sont appelées **équivalentes** si elles ont le même ensemble de solutions.

Exemple 7 Équations équivalentes

Résoudre une équation c'est déterminer une équation équivalente dans laquelle la solution peut être lue facilement. Par exemple, l'équation $2x+3 = 4x-1$ est équivalente à l'équation $x = 2$. La deuxième équation permet de déduire la solution. Deux principes permettent de passer d'une équation à une équation équivalente.

Exemple 8

Principe d'équivalence 1 [PE1]

Exemple 9

Principe d'équivalence 2 [PE2]

2.2 Équations du premier degré

Une équation du premier degré à une inconnue est de la forme $ax + b = cx + d$ avec $a,b,c,d \in \mathbb{R}$.

Exemple 10

Résolution d'une équation du premier degré

Ce type d'équation peut avoir une unique solution, aucune solution ou une infinité de solutions :

si $a \neq c$ alors l'équation admet une unique solution ;

si $a = c$ est $b \neq d$ alors $\mathrm{S} = \emptyset$;

si $a = c$ et $b = d$ alors $\mathrm{S} = \mathbb{R}$.

Exemple 11

Les trois types d'ensemble de solutions

On résout, comme exemple, quelques équations.

Exemple 12

Équation avec des fractions

Exemple 13

Équation avec de la distributivité

2.3 Équation contenant un paramètre

Exemple 14

Une première équation avec un paramètre (discussion)

Exemple 15

Reconnaître une équation avec un paramètre

Exemple 16

Exemple 1 $(k+2)x = 8$

Exemple 17

Exemple 2 $a(x-3)=5a$

Exemple 18

Exemple 3
$(p-1)x+3=3x$

Exemple 19

Exemple 4
$(m+3)x+7=mx+10$

Exercice 2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ pour x.

a) $4mx-8-11m=3+2m$ b) $5x-3p=2x-7$
c) $9r^2x+2r=4x-5$

2.4 Résolution d'un problème du premier degré

Les équations sont l'outil principal de résolution de problème en mathématiques.
Voici les étapes à suivre pour résoudre un problème à l'aide d'une équation.

Partie 1 : Déterminer l'équation

1) Lire le problème autant de fois que nécessaire pour bien comprendre et interpréter la situation. **Faire un schéma si besoin** ;
2) déterminer les deux quantités à comparer, elles deviendront les deux membres de l'équation ;
3) poser une inconnue qui permet d'exprimer les quantités à égaliser ;
4) écrire les deux membres de l'équation en fonction de l'inconnue. L'inconnue devrait apparaître dans au moins un des deux membres.

Partie 2 : Résoudre l'équation

5) Résoudre l'équation avec les principes d'équivalence.

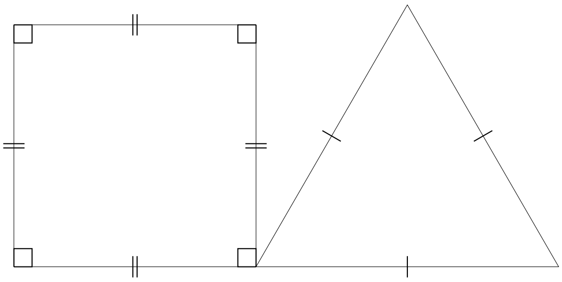
Partie 3 : Interpréter le résultat et conclure

6) Vérifier la cohérence du résultat avec le choix de l'inconnue ;
7) Interpréter la valeur obtenue et répondre à la question posée dans l'énoncé.

Exemple 20 [Exemple 1]

Exemple 21

Déterminer la mesure du côté du carré afin que les périmètres du carré et du triangle soient égaux.



Exemple 22

Algèbre SECTION 3

Équations du second degré

3.1 Théorème du produit nul

Exemple 23

Théorème du produit nul

Grâce à la factorisation et au théorème du produit nul, on peut résoudre une équation de dégré supérieur en résolvant plusieurs équations de dégré inférieur.

Exemple 24

Résoudre
$x^3(x+2)^2 = x^2(x+2)^2$

Exemple 25

Résoudre $x^2 + 2x - 1 = 0$

En appliquant les étapes suivantes :

a) $[\mathrm{PE}_1]$: +2

b) factoriser le membre de gauche

c) $[\mathrm{PE}_1]$: -2

d) factoriser le membre de gauche

e) $[\mathrm{PN}]$

Exemple 26

Résoudre
$(8x + 1)^2 - (2x - 3)^2 = 0$

3.2 Complétion du carré

La complétion du carré est une technique qui permet de résoudre une équation du second en se ramenant aux techniques de factorisation connues.

Exemple 27

$x^2 - 8x + 4 = 0$

Exemple 28

$2x^2 + 3x - 2 = 0$

Voici les étapes à suivre pour l'appliquer sur l'équation générale

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

En suivant ces étapes, on remarque que l'on vient de démontrer la formule de résolution d'équation du second degré. On appellera cette formule dans le cours la **formule du deuxième degré**. Résoudre les équations suivantes à l'aide de la méthode de complétion du carré.

a) $3x^2 + 24x + 48 = 0$

b) $6x^2 + 7x - 20 = 0$

c) $2x^2 - 6x + 2 = 0$

d) $-x^2 + 4x - 2 = 0$

3.3 Utilisation de la formule du deuxième degré

On a démontré la formule suivante pour résoudre une équation du second degré.

Exemple 29

$2x^2 - x + 3 = 0$

Exemple 30

$2x^2 - x - 6 = 0$

Exemple 31

$2x^2 - x + 3 = 3x^2 + x + 2$

Résoudre les équations dans $\mathbb{R}$, à l'aide de la formule du deuxième degré :

a) $3x^2 - 4x - 2 = 0$

b) $6 - 3x + x^2 = 2 + 3x$

c) $2x^2 - x + 3 = 2$

3.4 Factoriser en résolvant une équation

Le théorème du produit nul nous a permis d'expliciter les liens entre les solutions d'une équation et sa forme factorisée. Jusqu'à maintenant, nous avons utilisé la forme factorisée d'une équation pour déduire les solutions de cette équation. Nous allons maintenant passer par la résolution d'une équation pour déterminer la forme factorisée d'un trinôme.

Exemple 32

Rappels

Connaître les racines d'un trinôme n'est pas suffisant pour le factoriser.

Exemple 33

Deux trinômes différents avec des mêmes racines

On doit également fixer un des coefficients pour assurer l'unicité de l'expression.
Déterminer l'expression réduite du polynôme ayant r_1 et r_2 pour racines et dont le coefficient dominant vaut 4.

Exemple 34

Racines et coefficient dominant

Si besoin, on commence par déterminer les racines $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ d'un polynôme puis on multiplie le produit $(x - r_1) \cdots (x - r_n)$ par le coefficient nécessaire pour obtenir le polynôme souhaité.

Exemple 35

Factoriser $2x^2 - 3x + 1$

Exercice 3 Déterminer tous les polynômes de degré 2 ayant -3 et 4 comme racines.

Exercice 4 Déterminer tous les polynômes de degré 2 ayant comme racines $1 + \sqrt{3}$ et $1 - \sqrt{3}$.

Exercice 5 Déterminer tous les polynômes de degré 3 ayant

a) comme racines 0 et -1.

b) comme racines 0 et -1, mais aucun autre nombre.

3.5 Résolution de problèmes du deuxième degré

Pour résoudre un problème du second degré, on procède de la même manière que pour résoudre un problème du premier degré.

a) Lire et relire autant de fois que nécessaire la consigne.
b) Déterminer l'inconnue ou les inconnues à poser.
c) Écrire l'équation ou les équations qui permettent de mettre en relation les inconnues et les données.
d) Résoudre les équations en appliquant la méthode de résolution adaptée.
e) Interpréter le résultat et répondre à la question.
f) Vérifier la cohérence du résultat.

Exemple 36

Le périmètre d'un rectangle vaut 96 m et son aire 540 m^2. Déterminer les mesures du rectangle.

3.6 Équations bicarrées

Nous allons étudier comment résoudre une équation de la forme

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

On commence par remarquer que

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \iff a(x^2)^2 + bx^2 + c = 0 \iff ay^2 + by + c = 0 \text{ avec } y = x^2$$

On applique la formule du deuxième degré à l'équation en y. L'équation aura

0 solution réelle ; 1 solution réelle ; 2 solutions réelle.

On détermine ensuite les solutions de l'équation en déterminant les valeurs de $x = \pm\sqrt{y}$ pour $y \geq 0$.

Seulement les solutions positives pour l'équation en y donneront des solutions pour l'équation en x, car la racine carrée n'est pas définie sur les nombres négatifs.

Exemple 37

$x^4 - 20x^2 + 91 = 0$

Exemple 38

$x^4 + 2x^2 - 1 = 0$

Exercice 6

Résoudre à l'aide de la méthode présentée les équations suivantes (calculatrice autorisée).

a) $9x^4 - 37x^2 + 4 = 0$

b) $4x^4 + 91x^2 - 225 = 0$

c) $16x^4 + 40x^2 + 9 = 0$

d) $x^4 - 2x^2 - 6 = 0$

3.7 Équations irrationnelles

L'équation $x = -1$ a une solution évidente -1. Lorsque l'on élève l'équation au carré, on obtient $x^2 = 1$ qui a deux solutions, les nombres -1 et 1.
Remarque :

Ainsi, l'opération « élever au carré » n'est pas une opération d'équivalence. On n'écrit pas « $\Leftrightarrow$ », mais « $\Longrightarrow$ », car la nouvelle équation n'a pas le même ensemble de solutions.

$$x = -1 \implies \quad x^2 = 1 \quad (\text{ et non pas } \Leftrightarrow)$$

L'opération « élever à une puissance » est utile pour résoudre des équations qui contiennent des inconnues sous des radicaux ($\sqrt[n]{\quad}$).

Inconnue sous un radical	Pas d'inconnue sous un radical
$\sqrt{x+1} = x + 2$	$\sqrt{3}x = 1 + x$

Une équation du premier degré avec une inconnue sous un radical peut avoir une infinité de solution, deux, une ou aucune solution. **Toutes les solutions de l'équation initiale sont des solutions de l'équation élevée au carré, mais toutes les solutions de l'équations élevée au carré ne sont pas des solutions de l'équations initiales.** Il faut vérifier chaque solution.

$$1 = -x + \sqrt{4x + 16}$$

On résout ce type d'équation de la manière suivante :

$1 = -x + \sqrt{4x + 16}$	isoler la racine carrée
$\Leftrightarrow\ x + 1 = \sqrt{4x + 16}$	élever au carré
$\Longrightarrow\ (x + 1)^2 = 4x + 16$	développer
$\Leftrightarrow\ x^2 + 2x + 1 = 4x + 16$	comparer à zéro
$\Leftrightarrow\ x^2 - 2x - 15 = 0$	résoudre l'équation (ici par factorisation)
$\Leftrightarrow\ (x + 3)\,(x - 5) = 0$	appliquer le théorème du produit nul
$\Leftrightarrow\ x + 3 = 0 \quad \text{ou} \quad x - 5 = 0$	résoudre les équations
$\Leftrightarrow\ x = -3 \quad \text{ou} \quad x = 5$	

On vérifie à présent les solutions obtenues.
Pour $x = -3$

$$1 \stackrel{?}{=} -(-3) + \sqrt{4 \cdot (-3) + 16}$$
$$1 \neq 5$$

donc -3 n'est pas solution de l'équation.
Pour $x = 5$

$$1 \stackrel{?}{=} -(5) + \sqrt{4 \cdot (5) + 16}$$
$$1 = 1$$

donc 5 est solution de l'équation.
Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation est $S = \{5\}$.

Exemple 39

$x = 6 + \sqrt{-7x + 30}$

Algèbre SECTION 4

Systèmes d'équations

4.1 Systèmes d'équations – généralités

— Un système d'équations est un ensemble d'équations portant sur les mêmes inconnues qui doivent être résolues simultanément. Un **système d'équations linéaires** est un système dont toutes les équations sont du premier degré.

— Une solution d'un système d'équations à deux inconnues $x, y \in \mathbb{R}$ est un couple noté $(x_0; y_0)$ qui vérifie les deux équations simultanément .

— Une solution d'un système d'équations à trois inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$ est un triplet noté $(x_0; y_0; z_0)$ qui vérifie les trois équations simultanément.

Voici deux exemples :
Le triplet $(1; 3; 1)$ est solution du système

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = -3 \\ 3x + 2y + 5z = 14 \end{cases},$$

car $1 - 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = -3$ et $3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 5 \cdot 1 = 14$.
Mais le triplet $(0; 2; 1)$ n'est pas solution même si $1 \cdot 0 - 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = -3$, car $3 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = 9 \neq 14$.

Remarque Afin qu'un tuple soit solution d'un système, toutes les équations du système doivent être vérifiées simultanément.

Résoudre une système c'est déterminer l'ensemble de toutes ses solutions.
Pour résoudre un système d'équations, on cherche à « éliminer une ou plusieurs inconnues » pour se ramener à un système avec moins d'inconnues.

Définition Deux systèmes sont dits équivalents s'ils ont le même ensemble de solutions.

En plus des deux principes d'équivalence déjà rencontrés lors de la résolution d'équations du premier degré, nous pouvons également appliquer le principe d'équivalence suivant :

PE3 : en additionnant à une équation d'un système un multiple non nul d'une autre équation du même système, on obtient un système équivalent.

Exemple 40

$$\begin{cases} 3x + y = 4 \\ -2x + 3y = 10 \end{cases}$$

4.2 Systèmes d'équations – résolution

Par substitution

Pour résoudre un système d'équations par subsitution, on **isole une inconnue dans une équation du système** puis on **substitue l'expression obtenue dans une autre équation du système** afin « d'éliminer » l'inconnue en question de l'équation. Afin d'appliquer cette méthode, on n'utilise pas **PE3**.

Exemple 41

$$\begin{cases} -3x + y = 9 \\ 4x - 3y = -17 \end{cases}$$

Par combinaison linéaire

Pour résoudre un système d'équations par combinaison linéaire, on applique **PE3** pour éliminer une inconnue dans une équation du système.

Exemple 42

$$\begin{cases} 5x - 4y = 8 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases}$$

Remarque On réécrit toutes les équations à chaque étape.

Algèbre SECTION 5

Exercices aléatoirisés

Identités remarquables	**Factorisation avec identités**	**Groupements**	**Complétion du carré**
Formule deuxième degré	**Résoudre pour factoriser**	**Équations bicarrées**	**Équations irrationnelles**
Solutions d'un système	**Résolution par substitution**	**Résolution par comb. lin.**	**Problèmes**