Exercice 1 Démontrer le théorème suivant : Si un quadrilatère est inscrit dans un cerlce, alors la somme des angles opposés (dans le quadrilatère) est de $180°$.

Corrigé 1

Correction générée par IA

Soit ABCD un quadrilatère inscrit dans un cercle de centre O. Nous devons démontrer que la somme des angles opposés est égale à $180°$.

Démonstration :

Considérons les angles $\widehat{\mathrm{ABC}}$ et $\widehat{\mathrm{ADC}}$ qui sont opposés dans le quadrilatère.

L'angle $\widehat{\mathrm{ABC}}$ est un angle inscrit qui intercepte l'arc $\widehat{\mathrm{ADC}}$ (l'arc allant de A à C en passant par D).

L'angle $\widehat{\mathrm{ADC}}$ est un angle inscrit qui intercepte l'arc $\widehat{\mathrm{ABC}}$ (l'arc allant de A à C en passant par B).

D'après le théorème de l'angle inscrit, un angle inscrit est égal à la moitié de l'angle au centre qui intercepte le même arc.

Notons α la mesure de l'arc $\widehat{\mathrm{ABC}}$ et β la mesure de l'arc $\widehat{\mathrm{ADC}}$.

Alors :

$$\widehat{\mathrm{ABC}} = \frac{\beta}{2} \quad \text{et} \quad \widehat{\mathrm{ADC}} = \frac{\alpha}{2}$$

Comme le quadrilatère est inscrit dans le cercle, les deux arcs $\widehat{\mathrm{ABC}}$ et $\widehat{\mathrm{ADC}}$ forment le cercle complet :

$$\alpha + \beta = 360°$$

Par conséquent :

$$\widehat{\mathrm{ABC}} + \widehat{\mathrm{ADC}} = \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{360°}{2} = 180°$$

De même, on peut démontrer que $\widehat{\mathrm{BAD}} + \widehat{\mathrm{BCD}} = 180°$.

Conclusion : Si un quadrilatère est inscrit dans un cercle, alors la somme des angles opposés est égale à $180°$.

□