Exercice 1 Déterminer les dérivées suivantes et donner la réponse sans exposant négatif ou fractionnaire :

a) $\sin(x^4 - \frac{1}{x})$

b) $\cos(5\sqrt{x})$

c) $\tan(\cos(x))$

d) $\sin^3(x)$

e) $\sqrt{\cos(x)}$

f) $\sin^{-1}(2x)$

Corrigé 1 *Correction générée par IA*

a) Pour $f(x) = \sin(x^4 - \frac{1}{x})$, on utilise la formule de dérivation des fonctions composées.
Posons $u(x) = x^4 - \frac{1}{x} = x^4 - x^{-1}$, alors $u'(x) = 4x^3 + x^{-2} = 4x^3 + \frac{1}{x^2}$.
Donc :

$$f'(x) = \cos(u(x)) \cdot u'(x) = \cos\left(x^4 - \frac{1}{x}\right) \cdot \left(4x^3 + \frac{1}{x^2}\right)$$

b) Pour $f(x) = \cos(5\sqrt{x}) = \cos(5x^{\frac{1}{2}})$.
Posons $u(x) = 5x^{\frac{1}{2}}$, alors $u'(x) = 5 \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{5}{2\sqrt{x}}$.
Donc :

$$f'(x) = -\sin(u(x)) \cdot u'(x) = -\sin(5\sqrt{x}) \cdot \frac{5}{2\sqrt{x}} = -\frac{5\sin(5\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$$

c) Pour $f(x) = \tan(\cos(x))$.
Posons $u(x) = \cos(x)$, alors $u'(x) = -\sin(x)$.
La dérivée de $\tan(u)$ est $\frac{1}{\cos^2(u)}$, donc :

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(u(x))} \cdot u'(x) = \frac{-\sin(x)}{\cos^2(\cos(x))}$$

d) Pour $f(x) = \sin^3(x) = (\sin(x))^3$.
Posons $u(x) = \sin(x)$, alors $u'(x) = \cos(x)$.
Donc :

$$f'(x) = 3(\sin(x))^2 \cdot \cos(x) = 3\sin^2(x)\cos(x)$$

e) Pour $f(x) = \sqrt{\cos(x)} = (\cos(x))^{\frac{1}{2}}$.
Posons $u(x) = \cos(x)$, alors $u'(x) = -\sin(x)$.
Donc :

$$f'(x) = \frac{1}{2}(\cos(x))^{-\frac{1}{2}} \cdot (-\sin(x)) = -\frac{\sin(x)}{2\sqrt{\cos(x)}}$$

f) Pour $f(x) = \sin^{-1}(2x) = \arcsin(2x)$.
Posons $u(x) = 2x$, alors $u'(x) = 2$.
La dérivée de $\arcsin(u)$ est $\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$, donc :

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}} \cdot 2 = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$$