Exercices – Premier semestre

Table des matières

Exercices pour le premier semestre SECTION 1

Calcul numérique

1.1 Nombres premiers

Exercice 1
fttde

Calculer de tête, le plus simplement et rapidement possible (environ 3 minutes pour l'ensemble de l'exercice) :

a) $2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$ b) $2^3 \cdot 7 \cdot 5^3$ c) $2^4 \cdot 5^2$ d) $2^3 \cdot 5^4$
e) $2^5 \cdot 5^5 \cdot 7$ f) $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ g) $2^4 \cdot 5^4 \cdot 11$ h) $2^6 \cdot 5^3$
i) $2^4 \cdot 5^6$ j) $2^3 \cdot 5^3 \cdot 7^2$ k) $2^4 \cdot 3 \cdot 5^2$ l) $2^6 \cdot 3 \cdot 5^8$

Corrigé 1
fttde

a) $2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 = 600$ b) $2^3 \cdot 7 \cdot 5^3 = 7000$ c) $2^4 \cdot 5^2 = 400$
d) $2^3 \cdot 5^4 = 5000$ e) $2^5 \cdot 5^5 \cdot 7 = 700000$ f) $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$
g) $2^4 \cdot 5^4 \cdot 11 = 110000$ h) $2^6 \cdot 5^3 = 8000$ i) $2^4 \cdot 5^6 = 250000$
j) $2^3 \cdot 5^3 \cdot 7^2 = 49000$ k) $2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 = 1200$ l) $2^6 \cdot 3 \cdot 5^8 = 75000000$

Exercice 2
b23hy

Décomposer les nombres suivants en produit de facteurs premiers (sans calculatrice) :

a) 10 b) 10^2 c) 100000 d) $24 \cdot 1000$ e) $38 \cdot 10^5$
f) 25000 g) 28000 h) 66000 i) 16000 j) 3600000

Corrigé 2
b23hy

On utilise surtout la décomposition de $10 = 2 \cdot 5$ et donc que $10^n = 2^n \cdot 5^n$.

a) $10 = 2 \cdot 5$ b) $10^2 = 2^2 \cdot 5^2$ c) $100000 = 2^5 \cdot 5^5$
d) $24 \cdot 1000 = 2^6 \cdot 3 \cdot 5^3$ e) $38 \cdot 10^5 = 2^6 \cdot 5^5 \cdot 19$ f) $25000 = 5^5 \cdot 2^3$
g) $28000 = 2^5 \cdot 5^3 \cdot 7$ h) $66000 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 11$ i) $16000 = 2^7 \cdot 5^3$
j) $3600000 = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^5$

Exercice 3
11mx3

Leonhard EULER énonça en 1772 : « Le nombre $n^2 + n + 41$ est premier pour $n \leq 39$. » ($n \in \mathbb{N}$)

a) Vérifier son affirmation pour $0 \leq n \leq 6$ en contrôlant dans la liste de la page 2 du cours.

b) (*) Montrer que $n^2 + n + 41$ n'est premier ni pour 41 ni pour 40, sans calculer la valeur du nombre pour 40 ni 41 et sans la liste, mais uniquement par factorisation.

Corrigé 3
11mx3

Pour $n = 0$ on obtient 41. Pour $n = 1$ on obtient 43. Pour $n = 2$ on obtient 47.
Pour $n = 3$ on obtient 53. Pour $n = 4$ on obtient 61. Pour $n = 5$ on obtient 71.
Pour $n = 6$ on obtient 83.

Exercice 4
4sun4

Quel est le chiffre des unités du nombre 8^{2024} ?
(*) ...Et celui des dizaines ?!

Corrigé 4
4sun4

1.2 Division euclidienne

Exercice 5 Déterminer l'écriture décimale des nombres suivants.

a) $\dfrac{1}{3}$ b) $\dfrac{1}{9}$ c) $\dfrac{14}{13}$ d) $\dfrac{2}{17}$

Exercice 6 wv9bq

On considère les fractions

$$\frac{1}{7},\ \frac{2}{7},\ \frac{3}{7},\ \frac{4}{7},\ \frac{5}{7},\ \frac{6}{7}.$$

i) Trouver l'écriture décimale exacte de ces nombres à l'aide d'une calculatrice.

ii) Remarquer qu'en plus d'avoir les même chiffres 1,4,2,8,5,7, ceux-ci sont toujours dans cet ordre de gauche à droite. Par exemple, pour 2, on commence par lire 2, 8, 5, 7, puis on revient au début avec 1, 4. (On dit que les chiffres de la période sont cycliques.)

iii) Les fractions dont le dénominateur est 23 ont les mêmes propriétés. Au lieu d'avoir une période cyclique de 6 chiffres, elles en ont 22 . A l'aide d'une calculatrice uniquement (sans poser la division), trouver les 22 décimales de la période de $\dfrac{22}{23}$.

Corrigé 5
wv9bq

a) $\frac{1}{7} = 0{,}\overline{142857}$; $\frac{2}{7} = 0{,}\overline{285714}$; $\frac{3}{7} = 0{,}\overline{428571}$; $\frac{4}{7} = 0{,}\overline{571428}$; $\frac{5}{7} = 0{,}\overline{714285}$; $\frac{6}{7} = 0{,}\overline{857142}$.

b) À remarquer.

c) $\frac{22}{23} = 0{,}\overline{9565217391304347826086}$

Exercice 7 cc78t

Sur les multiples de 3 :

i) Trouver le plus grand multiple de 3, formé de cinq chiffres et terminant par 24.

ii) Trouver le plus petit multiple de 3, formé de quatre chiffres et terminant par 24.

iii) Trouver le plus petit multiple de 3, formé de quatre chiffres pairs distincts.

iv) Trouver le plus grand multiple de 3, formé de quatre chiffres impairs distincts.

Corrigé 6
cc78t

On note un nombre à cinq chiffres

$$a + b \cdot 10 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10^3 + e \cdot 10^4 \quad \text{où } a,b,c,d,e \in \mathbb{N}, e \neq 0$$

Si le nombre a quatre chiffres, alors on prend $e = 0$ et $d \neq 0$.

a) On a $a = 4$ et $b = 2$. Par ailleurs la somme $a + b + c + d + e$ doit être divisible par 3 pour que le nombre soit un multiple de 3. On a $2 + 4 = 6$ qui est déjà un multiple de 3. Le nombre recherché est donc 99924.

b) Le nombre recherché est 1224.

c) Le nombre recherché est 2046.

d) Le nombre recherché est 9753.

Exercice 8
vrjk9

Donner l'ensemble des diviseurs pour chacun des entiers allant de 1 à 10, sous la forme habituelle :

$$\text{Div}_1 = \{1\}; \quad \text{Div}_2 = \{1; 2\}; \quad \text{Div}_3 = \{1; 3\}; \quad \ldots; \quad \text{Div}_{10} = \ldots.$$

i) Relever la liste des entiers de 1 à 10 qui ont un nombre impair de diviseurs :
   i) Pouvez-vous trouver un point commun à ces entiers, ou leur nom ?
   ii) Donner la liste des quinze premiers nombres entiers qui ont cette caractéristique.

ii) Relever la liste des entiers de 1 à 10 qui ont exactement deux diviseurs :
   i) Pouvez-vous trouver un point commun à ces entiers, ou leur nom ?
   ii) Donner la liste des nombres entiers inférieurs à 50 qui ont cette caractéristique.

Corrigé 7
vrjk9

a) $1; 4; 9$, on les appelle des carrés parfaits.

b) Ce sont des nombres premiers. $\{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; \ldots\}$.

Exercice 9
nwgzm

En effectuant (à la main) une division, donner l'écriture décimale des nombres rationnels suivants :

a) $\dfrac{421}{20}$ b) $\dfrac{92}{30}$ c) $\dfrac{30}{7}$ d) $\dfrac{62}{11}$

Corrigé 8
nwgzm

a) $21{,}05$ b) $3{,}0\overline{6}$ c) $4{,}\overline{2857140}$ d) $5{,}\overline{63}$

1.3 Périodiques

Exercice 10 vssbc

Transformer chaque nombre rationnel en fraction irréductible.

a) $0{,}35$ b) $0,\overline{35}$ c) $0,\overline{349}$ d) $0{,}3\overline{49}$ e) $0{,}3\overline{5}$

f) $0{,}34\overline{9}$ g) $1,\overline{2}$ h) $3{,}25$ i) 15% j) $1{,}004$

k) $0,\overline{80}$ l) $0{,}16$ m) $2,\overline{9}$ n) $3,\overline{141}$

Corrigé 9 vssbc

a) $\frac{35}{100} = \frac{7}{20}$ b) $\frac{35}{99}$ c) $\frac{349}{999}$ d) $\frac{3}{10} + \frac{49}{990} = \frac{173}{495}$

e) $\frac{3}{10} + \frac{5}{90} = \frac{32}{90} = \frac{16}{45}$ f) $\frac{34}{100} + \frac{9}{900} = \frac{7}{20}$. Noter que $0{,}\overline{9} = 1$ et que $0{,}0\overline{9} = 0{,}01$. g) $1 + \frac{2}{9} = \frac{11}{9}$ h) $\frac{325}{100} = \frac{13}{4}$

i) $\frac{15}{100} = \frac{3}{20}$ j) $1 + \frac{4}{10000} = \frac{251}{250}$ k) $\frac{80}{99}$ l) $\frac{16}{100} = \frac{4}{25}$

m) 3 n) $3 + \frac{141}{999} = \frac{1046}{333}$

Exercice 11 xgk9e

Entre 1 et 2, trouver trois nombres...

a) rationnels à développement décimal fini ;
b) rationnels à développement décimal infini périodique ;
c) irrationnels.

Donner si possible l'écriture fractionnaire irréductible.

Corrigé 10 xgk9e

a) $\frac{12}{10}; \frac{13}{10}; \frac{14}{10};$ b) $1{,}\overline{1} = \frac{10}{9}; \frac{11}{9}; \frac{12}{9};$ c) $\sqrt{2}; \sqrt{3}; \frac{\sqrt{5}}{2}$.

1.4 Racines

Exercice 12 hv2ug

Calculer.

a) $2\sqrt{12} + 3\sqrt{75} - 4\sqrt{27}$ b) $\sqrt{162} + \sqrt{20} + \sqrt{50} - \sqrt{80}$

c) $\left(1 - \sqrt{3}\right)\left(1 + \sqrt{3}\right)$ d) $\left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)^2$

e) $2\left(\sqrt{3}\right)^4 - 5\left(\sqrt{3}\right)^3 - 4\left(\sqrt{3}\right)^2 + 8\sqrt{3} - 1$

f) $\left(1 + \sqrt{5}\right)^3$ g) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{15}$

h) $\dfrac{\sqrt{20} \cdot \sqrt{27} \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{105}}$

Corrigé 11 hv2ug

a) $7\sqrt{3}$ b) $14\sqrt{2} - 2\sqrt{5}$ c) -2 d) $5 - 2\sqrt{6}$

e) $5 - 7\sqrt{3}$ f) $16 + 8\sqrt{5}$ g) $20\sqrt{3}$ h) 6

Exercice 13 ksh26

Montrer que a est égal à b dans les cas suivants :

a) $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,;\, b = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b) $a = \dfrac{1}{\sqrt{27}}\,;\, b = \dfrac{\sqrt{3}}{9}$

c) $a = \dfrac{2+\sqrt{8}}{2}\,;\, b = 1+\sqrt{2}$

d) $a = \dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}\,;\, b = \dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3}$

Corrigé 12 ksh26

On utilise la multiplication par l'expression conjuguée et les propriétés des racines.

Exercice 14 9f4t8

Calculer.

a) $\dfrac{7}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} - \dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

b) $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}-2} - \dfrac{2}{\sqrt{7}+2}$

c) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} - \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$

d) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} - \dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

Corrigé 13 9f4t8

a) $\dfrac{4\sqrt{5}-10\sqrt{2}}{3}$ b) $\dfrac{11}{3}$ c) $-2\sqrt{3}$ d) $-2\sqrt{15}$

Exercice 15 f3sg7

Calculer.

a) $\sqrt{\dfrac{3}{4}} + \sqrt{\dfrac{49}{12}}$

b) $\dfrac{1}{2}\sqrt{75} + \sqrt{\dfrac{4}{27}} - 7\sqrt{12}$

c) $2\sqrt{5} - \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{5}} + \dfrac{1}{20}\sqrt{45}$

d) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} - \sqrt{5} - \sqrt{7}$

Corrigé 14 f3sg7

a) $\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$ b) $-\dfrac{203\sqrt{3}}{18}$ c) $\dfrac{41\sqrt{5}}{20}$ d) $-\dfrac{3\sqrt{5}+\sqrt{7}}{2}$.

Exercice 16 rp8cc

Développer le carré : $(3+2\sqrt{2})^2$.
En déduire une autre écriture pour $\sqrt{17+12\sqrt{2}}$.

Corrigé 15 rp8cc

$(3+2\sqrt{2})^2 = 17+12\sqrt{2}$, ainsi, $\sqrt{17+12\sqrt{2}} = 3+2\sqrt{2}$

Exercices pour le premier semestre SECTION 2

Ensembles et intervalles

2.1 Ensembles de nombres

Exercice 17 nj317

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a) $0 \in \mathbb{R}_+$ b) $-2 \in]-2;5]$ c) $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$
d) $3 \in \{2;4\}$ e) $3 \in]2;4[$ f) $3 \notin \mathbb{R} \setminus]2;3[$
g) $[0;2024] \cap \mathbb{R}_- = \emptyset$ h) $\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ i) $\mathbb{N} \setminus \mathbb{Z} = \emptyset$

Corrigé 16 nj317

a) Vrai b) Faux, semi-ouvert à gauche c) Vrai
d) Faux, ce n'est pas l'intervalle e) Vrai f) Faux, il y appartient
g) Faux, 0 est dans l'intersection h) Vrai i) Vrai

Exercice 18 j1x1v

(*) Trouver dix fractions irréductibles distinctes et appartenant toutes à l'intervalle $]\frac{1}{3};\frac{2}{3}[$, sans l'aide d'une calculatrice.
(Classez-les dans l'ordre croissant.)

Corrigé 17 j1x1v

Plusieurs possibilités, par exemple la suite suivante (à réduire) :

$$\left\{\frac{1}{3} + \frac{k}{20} \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) \mid k = 1, \dots, 10\right\}$$

Exercice 19 hggjf

Pour chaque nombre, simplifier et donner le plus petit ensemble de nombres auquel il appartient.

a) $\dfrac{3-7}{2}$ b) $\dfrac{4}{4-1}$ c) $2{,}5 : 3 + 1$ d) $\dfrac{2^0}{1^2}$

e) $(\sqrt{2}-1) : 2$ f) $\dfrac{3-\sqrt{9}}{\pi}$ g) $\sqrt{3 \cdot 27}$ h) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{12}}{\sqrt{27}}$

i) $\sqrt{\sqrt{25} - \dfrac{3}{\sqrt{9}}}$ j) $\dfrac{14}{\sqrt{25}-\sqrt{144}}$ k) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{81} - \dfrac{16}{2}}$ l) $\dfrac{5-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-5}$

Corrigé 18 hggjf

a) $\dfrac{3-7}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2 \in \mathbb{Z}$

b) $\dfrac{4}{4-1} = \dfrac{4}{3} \in \mathbb{Q}$

c) $2{,}5 : 3 + 1 = \dfrac{25}{30} + 1 = \dfrac{5}{6} + 1 = \dfrac{11}{6} \in \mathbb{Q}$

d) $\dfrac{2^0}{1^2} = \dfrac{1}{1} = 1 \in \mathbb{N}$

e) $(\sqrt{2}-1) : 2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{1}{2} \in \mathbb{R}$

f) $\dfrac{3-\sqrt{9}}{\pi} = \dfrac{3-3}{\pi} = 0 \in \mathbb{N}$

g) $\sqrt{3 \cdot 27} = \sqrt{81} = 9 \in \mathbb{N}$

h) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{12}}{\sqrt{27}} = \dfrac{\sqrt{3}-2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \dfrac{1-2}{3} = -\dfrac{1}{3} \in \mathbb{Q}$

i) $\sqrt{\sqrt{25} - \dfrac{3}{\sqrt{9}}} = \sqrt{5 - \dfrac{3}{3}} = \sqrt{4} = 2 \in \mathbb{N}$

j) $\dfrac{14}{\sqrt{25}-\sqrt{144}} = \dfrac{14}{5-12} = \dfrac{14}{-7} = -2 \in \mathbb{Z}$

k) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{81} - \dfrac{16}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{9-8} = \dfrac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} \in \mathbb{R}$

l) $\dfrac{5-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-5} = \dfrac{5-\sqrt{3}}{-(5-\sqrt{3})} = -1 \in \mathbb{Z}$

Exercice 20
w1wsu

Compléter le tableau suivant en indiquant par une croix chacun des ensembles auquel le nombre donné appartient.

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	aucun
$\dfrac{3}{2}$					
$\dfrac{3{,}14}{0{,}01}$					
$\sqrt{7}$					
$\dfrac{2-\sqrt{8}}{\sqrt{2}-1}$					
$\sqrt{9}$					
π					
$-\sqrt{100}$					

Corrigé 19
w1wsu

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	aucun
$\dfrac{3}{2}$			X	X	
$\dfrac{3{,}14}{0{,}01}$	X	X	X	X	
$\sqrt{7}$				X	
$\dfrac{2-\sqrt{8}}{\sqrt{2}-1}$		X	X	X	
$\sqrt{9}$	X	X	X	X	
π				X	
$-\sqrt{100}$		X	X	X	

Exercice 21
cbh7d

Donner le plus petit ensemble de nombres auquel appartient chaque nombre.

$$\frac{2}{7}\,;\ \sqrt{100}\,;\ \sqrt{200}\,;\ \pi+1\,;\ -\sqrt{1{,}21}\,;\ 3{,}14\cdot 10^5\,;\ -\frac{17}{2}.$$

Corrigé 20
cbh7d

$\frac{2}{7}\in\mathbb{Q}$; $\sqrt{100}\in\mathbb{N}$; $\sqrt{200}\in\mathbb{R}$; $\pi+1\in\mathbb{R}$; $-\sqrt{1{,}21}\in\mathbb{Q}$; $3{,}14\in\mathbb{Q}\cdot 10^5\in\mathbb{N}$; $-\frac{17}{2}\in\mathbb{Q}$.

2.2 Ensembles quelconques

Exercice 22
k8f2j

Énumérer les éléments des ensembles suivants.

a) $\mathrm{A}=\{x\in\mathbb{R}\mid x=2n-1, n\in\mathbb{N}, n\leq 5\}$

b) $\mathrm{B}=\{x\in\mathbb{R}\mid x=\frac{1}{n}, n\in\mathbb{N}^*$ et $n<10\}$

c) $\mathrm{C}=\{x\in\mathbb{R}\mid x^2+x=0\}$

d) $\mathrm{D}=\{x\in\mathbb{Q}\mid x^2-2=0\}$

e) $\mathrm{E}=\{x\in\mathbb{R}\mid x^2-2=0\}$

f) $\mathrm{F}=\{x\in\mathbb{R}\mid x^2+2=0\}$

Corrigé 21
k8f2j

a) $A = \{-1; 1; 3; 5; 7; 9\}$
b) $B = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}\}$
c) $C = \{-1, 0\}$
d) $D = \emptyset$
e) $E = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$
f) $F = \emptyset$

Exercice 23
tr635

Décrire les ensembles suivants en donnant une condition d'appartenance.

a) $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$
b) $B = \{1; 4; 9; 16; 25; \dots; 169\}$
c) $C = \{1; 4; 7; 10; 13; 16; 19\}$
d) $D = \left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{5}; \frac{1}{10}; \frac{1}{17}; \frac{1}{26}\right\}$
e) (*) $E = \left\{0; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}; \frac{3}{5}; \frac{2}{3}; \frac{5}{7}; \dots\right\}$
f) $F = \{1; 2; 4; 8; 16; \dots; 1024\}$

Corrigé 22
tr635

a) $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid 1 \leq x \leq 8\}$
b) $B = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq n \leq 13\}$
c) $C = \{3n + 1 \mid n \in \mathbb{N}, 0 \leq n \leq 6\}$
d) $D = \left\{\frac{1}{n^2+1} \mid n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq n \leq 5\right\}$
e) $E = \{\frac{n-1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$
f) $F = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}, 0 \leq n \leq 10\}$

Exercice 24
p6w7q

Décrire les ensembles suivants à l'aide d'intervalles.

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 5\}$
b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 < x < 5\}$
c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$
d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 10\}$
e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2 \text{ et } x \leq 2\}$
f) $F = \mathbb{R}$
g) $G = \{2\}$

Corrigé 23
p6w7q

a) $A = [-3; 5]$
b) $B =]4; 5[$
c) $C =]-\infty; 1[$
d) $D = [10; +\infty[$
e) $E = [-2; 2]$
f) $F =]-\infty; +\infty[$
g) Un intervalle contient une infinité de nombre, donc pas possible.

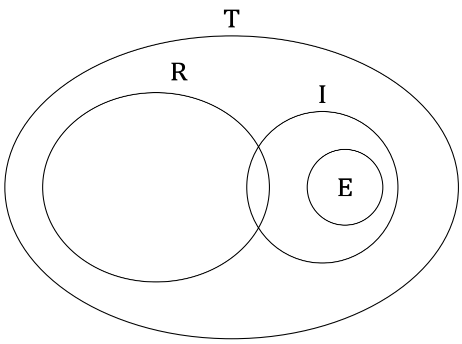
Exercice 25
ew4z2

Dans l'ensemble T des triangles, on considère I, le sous-ensemble des triangles isocèles ; E, le sous-ensemble des triangles équilatéraux ; R, le sous-ensemble des triangles rectangles

a) Représenter ces quatre ensembles à l'aide d'un diagramme.
b) Décrire par des mots les ensembles $I \cap E$, $R \cap E$ et $I \cap R$.

Corrigé 24
ew4z2

a) La taille des diagrammes n'est pas représentative de la « taille » des ensembles.



b)

— $I \cap E = E$, car l'ensemble des triangles équilatéraux est contenu dans l'ensemble de triangles isocèles.

— $R \cap E = \emptyset$, car il n'existe aucun triangle qui est équilatéral et rectangle (par le théorème de Pythagore, si $a \in \mathbb{R}_+^*$ est la longueur du côté du triangle, alors $a^2 + a^2 \neq a^2$).

— $I \cap R$ est l'ensemble des triangles dont les deux cathètes mesure $a \in \mathbb{R}_+^*$ et l'hypoténuse mesure $a\sqrt{2}$ (par Pythagore).

Exercice 26 fq51r

Déterminer les intervalles suivants où $A =]-2;3]$, $B = [0;4[$ et $C =]-\infty;2]$:

a) $A \cup B$	b) $A \cap B$	c) $A \setminus B$	d) $B \setminus A$
e) $A \cup C$	f) $A \cap C$	g) $A \setminus C$	h) $C \setminus A$
i) $B \cup C$	j) $B \cap C$	k) $B \setminus C$	l) $C \setminus B$

Corrigé 25 fq51r

a) $A \cup B =]-2;4[$	b) $A \cap B = [0;3]$	c) $A \setminus B =]-2;0[$	d) $B \setminus A =]3;4[$
e) $A \cup C =]-\infty;3]$	f) $A \cap C =]-2;2]$	g) $A \setminus C =]2;3]$	h) $C \setminus A =]-\infty;-2]$
i) $B \cup C =]-\infty;4[$	j) $B \cap C = [0;2]$	k) $B \setminus C =]2;4[$	l) $C \setminus B =]-\infty;0[$

Exercice 27 rm8qy

Déterminer les éléments des sous-ensembles A et B de E sachant que :

$$E \setminus A = \{f;g;h;i\}, \quad A \cup B = \{a;b;c;d;e;f\} \quad \text{et} \quad A \cap B = \{d;e\}$$

Corrigé 26 rm8qy

Il y a plusieurs possibilité, en voici une

$$A = \{a;b;c;d;e\} \quad B = \{d;e;f\} \quad C = \{f;g;h;i\}$$

Exercice 28 zm8w4

Décrire les ensembles suivants par une condition d'appartenance.

a) $\{\dots;-3;-1;1;3;5;7;9;11;13;\dots\}$

b) $\{0;2;4;6;8;\dots\}$ c) $\{1;4;9;25;\dots\}$

Corrigé 27 zm8w4

a) $\{2n+1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ b) $\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ c) $\{n^2 \mid n \in \mathbb{N}^*\}$

Exercice 29 krq84

Enumérer les éléments des ensembles suivants (donnés par une condition) :

$$\{2n-3 \mid n \in \mathbb{N} \text{ et } n \leq 5\} \quad \left\{\frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N}^*\right\} \quad \left\{\frac{n-1}{n^2+n} \middle| n \in \mathbb{N}^* \text{ et } n < 6\right\}$$

Corrigé 28 krq84

a) $\{-3;-1;1;3;5;7\}$

b) $\left\{1;\frac{1}{2};\frac{1}{3};\dots\right\}$

c) $\left\{0;\frac{1}{6};\frac{3}{20};\frac{2}{15}\right\}$

Exercice 30 s2efz

Dans chaque cas, trouver A et B, deux sous-ensembles de $\mathbb{Z}$ tels que :

a) $A \cup B = \{0;1;2;3;4\}$ et $A \cap B = \emptyset$

b) $A \cup B = \{0;1;2;3;4\}$ et $A \cap B = \{2;3;4\}$

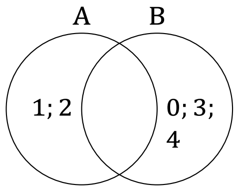
c) $A \cup B = \{0;1;2;3;4\}$ et $A \setminus B = \{2;3;4\}$

d) $A \cup B = \{0;1;2;3;4\}$ et $B \setminus A = \{1;4\}$

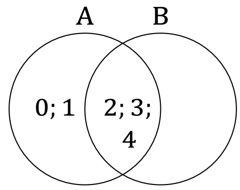
Corrigé 29
s2efz

Il y a plusieurs réponses possibles.

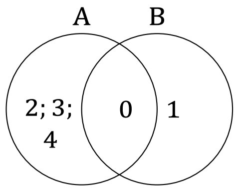
a) $A = \{1; 2\}$ et $B = \{0; 3; 4\}$



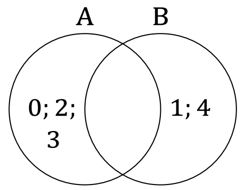
b) $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$ et $B = \{2; 3; 4\}$



c) $A = \{0; 2; 3; 4\}$ et $B = \{0; 1\}$



d) $A = \{0; 2; 3\}$ et $B = \{1; 4\}$



Exercice 31

d5xp3

a) Soient A et B les deux ensembles suivants : $A = \{-5; 3; 4; 6; 8; 9\}$ et $B = \{2; 3; 4; 8; 10\}$.
Déterminer $A \cup B$, $A \cap B$, $B \backslash A$ et $A \backslash B$.

b) Trouver les ensembles C et D puis E et F sachant que :

$$C \cup D = \{1; 2; 3; 4; 5\}, C \cap D = \{2; 3; 4\}, 1 \notin D \backslash C \text{ et } 5 \notin C \backslash D$$

$$E \cup F = \{2; 3; 4; 5\} \text{ et } E \cap F = \{2; 4\}$$

Donner toutes les possibilités.

Corrigé 30
d5xp3

a)

i) $A \cup B = \{-5; 2; 3; 4; 6; 8; 9; 10\}$

ii) $A \cap B = \{3; 4; 8\}$

iii) $B \setminus A = \{2; 10\}$

iv) $A \setminus B = \{-5; 6; 9\}$

b) $C = \{1; 2; 3; 4\}$, $D = \{2; 3; 4; 5\}$

c)

i) $E = \{2; 3; 4; 5\}$, $F = \{2; 4\}$

ii) $E = \{2; 3; 4\}$, $F = \{2; 4; 5\}$

iii) $E = \{2; 4; 5\}$, $F = \{2; 3; 4\}$

iv) $E = \{2; 4\}$, $F = \{2; 3; 4; 5\}$

2.3 Intervalles réelles

Exercice 32

v2rv8

Représenter graphiquement les intervalles suivants :

a) $[0; 2]$

b) $]-3; 3[$

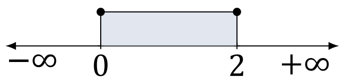
c) $]-\infty; -4[$

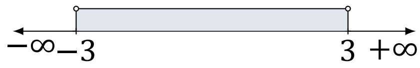
d) $]-2; -1[\cup[0; +\infty[$

e) $]-\infty; 0[\cup[1; 3]$

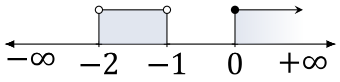
f) $]\pi; 4] \cap [7; +\infty[$

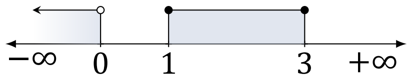
Corrigé 31
v2rv8

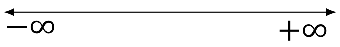
a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

f) 

Exercice 33
ht3h6

On donne trois intervalles I, J et K de $\mathbb{R}$. Déterminer $\mathrm{I} \cap \mathrm{J}$, $\mathrm{I} \cap \mathrm{K}$, $\mathrm{I} \setminus (\mathrm{J} \cup \mathrm{K})$, $(\mathrm{I} \setminus \mathrm{J}) \cup (\mathrm{I} \setminus \mathrm{K})$ dans les cas suivants :

a) $\mathrm{I} =]-3; 4]$ $\quad \mathrm{J} =]-2; 0[$ $\quad \mathrm{K} = [-5; 3[$

b) $\mathrm{I} = [-4; 2[$ $\quad \mathrm{J} =]-2; 3]$ $\quad \mathrm{K} = [-3; 1[$

c) $\mathrm{I} = [-5; 3[$ $\quad \mathrm{J} = [-1; 5[$ $\quad \mathrm{K} =]-3; 4]$

Corrigé 32
ht3h6

a)
i) $\mathrm{I} \cap \mathrm{J} =]-2; 0[$
ii) $\mathrm{I} \cap \mathrm{K} =]-3; 3[$
iii) $\mathrm{I} \setminus (\mathrm{J} \cup \mathrm{K}) = [3; 4]$
iv) $(\mathrm{I} \setminus \mathrm{J}) \cup (\mathrm{I} \setminus \mathrm{K}) =]-3; -2] \cup [0; 4]$

b)
i) $\mathrm{I} \cap \mathrm{J} =]-2; 2[$
ii) $\mathrm{I} \cap \mathrm{K} = [-3; 1[$
iii) $\mathrm{I} \setminus (\mathrm{J} \cup \mathrm{K}) = [-4; -3[$
iv) $(\mathrm{I} \setminus \mathrm{J}) \cup (\mathrm{I} \setminus \mathrm{K}) = [-4; -2] \cup [1; 2[$

c)
i) $\mathrm{I} \cap \mathrm{J} = [-1; 3[$
ii) $\mathrm{I} \cap \mathrm{K} =]-3; 3[$
iii) $\mathrm{I} \setminus (\mathrm{J} \cup \mathrm{K}) = [-5; -3]$
iv) $(\mathrm{I} \setminus \mathrm{J}) \cup (\mathrm{I} \setminus \mathrm{K}) = [-5; -1[$

Exercice 34
u14s6

Déterminer les intervalles suivants où $\mathrm{A} = [1; 5]$, $\mathrm{B} = [0; +\infty[$ et $\mathrm{C} =]-3; 3]$:

a) $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ b) $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ c) $\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}$ d) $\mathrm{B} \setminus \mathrm{A}$

e) $\mathrm{A} \cup \mathrm{C}$ f) $\mathrm{A} \cap \mathrm{C}$ g) $\mathrm{A} \setminus \mathrm{C}$ h) $\mathrm{C} \setminus \mathrm{A}$

i) $\mathrm{B} \cup \mathrm{C}$ j) $\mathrm{B} \cap \mathrm{C}$ k) $\mathrm{B} \setminus \mathrm{C}$ l) $\mathrm{C} \setminus \mathrm{B}$

Corrigé 33
u14s6

a) $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = [0; +\infty[$ b) $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = [1; 5]$ c) $\mathrm{A} \setminus \mathrm{B} = \emptyset$ d) $\mathrm{B} \setminus \mathrm{A} = [0; 1[\cup]5; +\infty[$

e) $\mathrm{A} \cup \mathrm{C} =]-3; 5]$ f) $\mathrm{A} \cap \mathrm{C} = [1; 3]$ g) $\mathrm{A} \setminus \mathrm{C} =]3; 5]$ h) $\mathrm{C} \setminus \mathrm{A} =]-3; 1[$

i) $\mathrm{B} \cup \mathrm{C} =]-3; +\infty[$ j) $\mathrm{B} \cap \mathrm{C} = [0; 3]$ k) $\mathrm{B} \setminus \mathrm{C} =]3; +\infty[$ l) $\mathrm{C} \setminus \mathrm{B} =]-3; 0[$

Exercice 35
9k125

Trouver dans chaque intervalle : $]-4; -3[$; $]\frac{1}{4}; \frac{1}{3}[$; $]10^{-4}; 10^{-3}[$:

a) deux nombres rationnels, l’un à partie décimale finie et l’autre à partie décimale infinie périodique
(les donner sous forme de fraction irréductible) ;

b) un nombre irrationnel.

Corrigé 34
9k125

Il y a une infinité de possibilités.

a) $-\frac{7}{5}, -\frac{10}{3} \in]-4; -3[$, $\frac{10}{3}, \frac{27}{99} \in]\frac{1}{4}; \frac{1}{3}[$, $\frac{5}{1000}, \frac{1}{9000} \in]10^{-4}; 10^{-3}[$

b) $-2{,}5\sqrt{2}$, $\frac{2}{5\sqrt{2}}$, $\frac{\sqrt{2}}{1000}$.

Exercice 36 mrvd7

On donne trois sous-intervalles de $\mathbb{R}$

$$\mathrm{I} = [-3; 4[, \mathrm{J} = [-2; 0[\text{ et } \mathrm{K} =]-5; 3].$$

Donner à l'aide d'intervalles : $\mathrm{I} \cup \mathrm{K}, \mathrm{I} \setminus \mathrm{K}$ et $\mathrm{K} \setminus \mathrm{I}$.

Corrigé 35 mrvd7

a) $\mathrm{I} \cup \mathrm{K} = [-3; 4[\cup]-5; 3] =]-5; 4[$

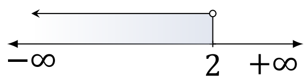
b) $\mathrm{I} \setminus \mathrm{K} = [-3; 4[\setminus]-5; 3] =]3; 4[$

c) $\mathrm{K} \setminus \mathrm{I} =]-5; 3] \setminus [-3; 4[=]-5; -3[$

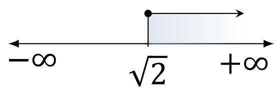
Exercice 37 6ugwm

Donner l'écriture mathématique des intervalles suivants :

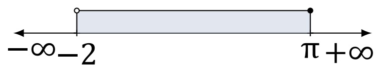
a)



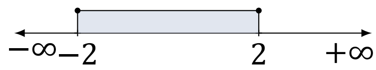
b)



c)



d)



Corrigé 36 6ugwm

a) $]-\infty; 2[$

b) $[\sqrt{2}; +\infty[$

c) $]-2; \pi]$

d) $[-2; 2]$

Exercice 38 drcdb

Quel est le nombre réel situé à égale distance des bornes de l'intervalle $[\sqrt{27}; \sqrt{75}]$?
Réponse sous forme simplifiée ; s'il s'agit d'une racine carrée : de quel entier ?

Corrigé 37 drcdb

On a $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ et $\sqrt{75} = 5\sqrt{3}$.

$$\begin{aligned}
\sqrt{27} + \frac{\sqrt{75} - \sqrt{27}}{2} &= 3\sqrt{3} + \frac{2\sqrt{3}}{2} \\
&= 3\sqrt{3} + \sqrt{3} \\
&= 4\sqrt{3}
\end{aligned}$$

On aurait pu le déduire directement depuis l'écriture simplifiée de $\sqrt{27}$ et $\sqrt{75}$.

Exercice 39 czc9e

Décrire les ensembles de réels suivants à l'aide d'intervalles :

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 2\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 > x\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -2 \text{ et } x \leq 4\}$

e) $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -\frac{3}{2} < x \leq -\frac{1}{2}\right\}$

f) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1 + \sqrt{2}\}$

g) $\mathbb{R}$

h) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x \geq 4\}$

Corrigé 38 czc9e

a) $[-3; 2]$

b) $[3; +\infty[$

c) $]-\infty; -1[$

d) $]-2; 4]$

e) $]-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}]$

f) $]-\infty; 1 + \sqrt{2}]$

g) $]-\infty; +\infty[$

h) $]-\infty; -2[\cup [4; +\infty[$

Exercice 40 p2cxv

Partie 1

Passer de l'écriture en intervalle à l'écriture ensembliste et vice versa.

a) $\cdots = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 4\}$

b) $\ldots = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -0{,}5\}$

c) $]-\infty; -2] = \{ \ \ldots \ \}$

d) $]-1; -0{,}5[= \{ \ \ldots \ \}$

Partie 2

Donner les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants à l'aide d'union ou d'intersection intervalles uniquement :

a) $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

b) $\mathbb{R} \setminus [2; 3]$

c) $\mathbb{R} \setminus]-1; 6[$

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -5 \text{ ou } x \geq 2\}$

Corrigé 39 p2cxv

a) $[-3; 4[$ b) $[-0{,}5; +\infty[$ c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2\}$ d) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < -0{,}5\}$

a) $]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$ b) $]-\infty; 2[\cup]3; +\infty[$ c) $]-\infty; -1] \cup [6; +\infty[$ d) $]-\infty; -5[\cup [2; +\infty[$

Exercice 41 nw439

Décrire par des inéquations les intervalles suivants :

a) $]-\infty; -3]$

b) $]-2; +\infty[$

c) $[0; 2]$

d) $]-3; 3[$

e) $]-5; -4[$

f) $]-2; -1[\cup[0; +\infty[$

g) $]-\infty; 0[\cup[1; 3]$

h) $]-\infty; 4] \cup [7; +\infty[$

Corrigé 40 nw439

a) $x \leq -3$ b) $x > -2$ c) $0 \leq x \leq 2$ d) $-3 < x < 3$

e) $-5 < x < -4$ f) $-2 < x < -1$ ou $0 \leq x$ g) $x < 0$ ou $1 \leq x \leq 3$

h) $x \leq 4$ ou $x \geq 7$

Exercice 42 61ve6

Traduire les inéquations suivantes sous forme d'un intervalle.

a) $x \leq 2$

b) $x > 3$

c) $x \geq -1$

d) $x > 0$ et $x \leq 2$

e) $x \leq 1$ ou $x > 3$

f) $x \geq 2$ et $x < 4$

g) $x \geq 0$ ou $x \leq -2$

h) $x \geq 1$ et $x \leq 3$

Corrigé 41 61ve6

a) $]-\infty; 2]$ b) $]3; +\infty[$ c) $[-1; +\infty[$ d) $]0; 2]$

e) $[1; +\infty[$ f) $[2; 4[$ g) $]-\infty; -2] \cup [0; +\infty[$ h) $[1; 3]$

Exercices pour le premier semestre SECTION 3

Calul littéral

3.1 Traduire un énoncé

Exercice 43 bvvy

Traduire chaque phrase par une équation, puis résoudre.

a) « Le triple du nombre x vaut 2 de plus que x. »

b) « La somme de x et de 3 vaut 2 de moins que le double de x. »

c) « Le double d'un nombre dépasse ses deux tiers de 10. »

d) « Si l'on soustrait le dixième de x au quart de x on obtient 2 de moins que x. »

e) « Si l'on retranche 5 du triple de x, on obtient la moitié de la somme de 3 et de x. »

Corrigé 42 bvvy

a) $3x = x + 2$, $\mathrm{S} = \{1\}$ b) $x + 3 = 2x - 2$, $\mathrm{S} = \{5\}$ c) $2x = \frac{2}{3}x + 10$, $\mathrm{S} = \left\{\frac{15}{2}\right\}$

d) $\frac{x}{4} - \frac{x}{10} = x - 2$, $\mathrm{S} = \left\{\frac{40}{17}\right\}$ e) $3x - 5 = \frac{x+3}{2}$, $\mathrm{S} = \left\{\frac{13}{5}\right\}$

Exercice 44 3qa3k

Un rectangle possède une largeur de $a > 3$ et une longueur de $a+4$ avec le longueurs données en cm. On lui enlève un carré de 3 cm de côté. Donner l'expression algébrique réduite de l'aire de la figure restante.

Corrigé 43 3qa3k

$\mathrm{A} = a(a+4) - 3^2 = a^2 + 4a - 9$

Exercice 45 a3tr3

En utilisant la lettre n pour désigner un entier quelconque, exprimer sous forme littérale :

a) trois entiers consécutifs;

b) le carré d'un entier impair quelconque;

c) un nombre positif, différence des carrés de deux nombres entiers consécutifs;

d) un multiple de 7;

e) un entier qui laisse un reste de 2 lorsqu'on le divise par 3;

f) un entier qui précède immédiatement un multiple de 4;

g) trois carrés parfaits consécutifs;

h) un nombre pair.

Corrigé 44 a3tr3

a) $n; n+1; n+2$ b) $(2n+1)^2$ c) $(n+1)^2 - n^2$ d) $7n$

e) $3n+2$ f) $4n-1$ g) $n^2; (n+1)^2; (n+2)^2$ h) $2n$

3.2 Isoler une variable

Exercice 46
kdgn

Dans chaque cas, exprimer x en fonction de y ou y en fonction de x.

Exemple

$3x-2y=4$	On isole y
$-2y=-3x+4$	On soustrait $3x$
$y=\dfrac{-3}{-2}x+\dfrac{4}{-2}$	On divise par -2
$y=\dfrac{3}{2}x-2$	On réduit

a) $x+3y=7$ b) $4x-y=9$ c) $2y=3x-5$
d) $x+2y=5$ e) $x-6y=8$ f) $2x+y=10$
g) $6x-y=12$ h) $2x-5y=-15$ i) $6x+3y=-24$
j) $2x-3y=30$ k) $10x-4y=70$ l) $4x-y=8$
m) $2x+3y=6$ n) $5x-2y=0$ o) $2x+3(y+2)=10$

Corrigé 45
kdgn

a) $x=7-3y$ b) $y=4x-9$ c) $y=\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}$
d) $x=5-2y$ e) $x=8+6y$ f) $y=10-2x$
g) $y=6x-12$ h) $x=\frac{5}{2}y-\frac{15}{2}$ i) $y=-2x-8$
j) $y=\frac{2}{3}x-10$ k) $y=\frac{5}{2}x-\frac{35}{2}$ l) $y=4x-8$
m) $y=-\frac{2}{3}x+2$ n) $y=\frac{5}{2}x$ o) $y=-\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}$

Exercice 47
n66ke

Exprimer la variable demandée en fonction des autres variables présentes dans la formule.

a) $v=\dfrac{d}{t}$ $d=?$ $t=?$
b) $\mathrm{P}=2(a+b)$ $b=?$
c) $\mathrm{A}=\dfrac{(\mathrm{B}+b)}{2}h$ $h=?$ $\mathrm{B}=?$
d) $\mathrm{E}=mgh$ $h=?$
e) $\mathrm{P}=f\dfrac{m_1m_2}{m_3}$ $m_1=?$ $m_3=?$
f) $\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{z_1z_4}{z_2z_3}$ $z_1=?$ $n_2=?$
g) $\mathrm{A}=\dfrac{a+b}{2}h$ $a=?$ $h=?$
h) $\mathrm{V}=\dfrac{\pi d^2}{4}h$ $h=?$

Corrigé 46
n66ke

a) $v = \dfrac{d}{t}$ $\quad d = ?$ $\quad t = ?$

Isolons d :

$$\begin{array}{rcl|l} v &=& \dfrac{d}{t} & \cdot t \\ v \cdot t &=& d & d \text{ est isolé} \end{array}$$

Isolons t :

$$\begin{array}{rcl|l} v &=& \dfrac{d}{t} & \cdot t \\ v \cdot t &=& d & \div v \\ t &=& \dfrac{d}{v} & t \text{ est isolé} \end{array}$$

b) $\mathrm{P} = 2(a+b)$ $\quad b = ?$

Isolons b :

$$\begin{array}{rcl|l} \mathrm{P} &=& 2(a+b) & \div 2 \\ \dfrac{\mathrm{P}}{2} &=& a+b & -a \\ \dfrac{\mathrm{P}}{2} - a &=& b & b \text{ est isolé} \end{array}$$

c) $\mathrm{A} = \dfrac{(\mathrm{B}+b)}{2}h$ $\quad h = ?$ $\quad \mathrm{B} = ?$

Isolons h :

$$\begin{array}{rcl|l} \mathrm{A} &=& \dfrac{(\mathrm{B}+b)}{2}h & \cdot \dfrac{2}{(\mathrm{B}+b)} \\ \mathrm{A} \cdot \dfrac{2}{\mathrm{B}+b} &=& h & \text{réduire} \\ \dfrac{2\mathrm{A}}{\mathrm{B}+b} &=& h & h \text{ est isolé} \end{array}$$

Isolons B :

$$\begin{array}{rcl|l} \mathrm{A} &=& \dfrac{(\mathrm{B}+b)}{2}h & \div h \\ \dfrac{\mathrm{A}}{h} &=& \dfrac{(\mathrm{B}+b)}{2} & \cdot 2 \\ \dfrac{2\mathrm{A}}{h} &=& \mathrm{B}+b & -b \\ \dfrac{2\mathrm{A}}{h} &=& \mathrm{B} & \mathrm{B} \text{ est isolé} \end{array}$$

d) $\mathrm{E} = mgh$ $\quad h = ?$

$$\begin{array}{rcl|l} \mathrm{E} &=& mgh & \div mg \\ \dfrac{\mathrm{E}}{mg} &=& h & = h \text{ est isolé} \end{array}$$

e) $\mathrm{P} = f\dfrac{m_1 m_2}{m_3}$ $\quad m_1 = ?$ $\quad m_3 = ?$

Isolons m_1 :

$$\begin{array}{rcl|l} \mathrm{P} &=& f\dfrac{m_1 m_2}{m_3} & \div f \\ \dfrac{\mathrm{P}}{f} &=& \dfrac{m_1 m_2}{m_3} & \cdot \dfrac{m_3}{m_2} \\ \dfrac{\mathrm{P}}{f} \cdot \dfrac{m_3}{m_2} &=& m_1 & \text{réduire} \\ \dfrac{\mathrm{P}m_3}{fm_2} &=& m_1 & m_1 \text{ est isolé} \end{array}$$

Isolons m_3 (on reprend la formule ou m_1 est isolé) :

$$\begin{array}{rcl|l} \dfrac{\mathrm{P}m_3}{fm_2} &=& m_1 & \div \mathrm{P} \\ \dfrac{m_3}{fm_2} &=& \dfrac{m_1}{\mathrm{P}} & \cdot fm_2 \\ m_3 &=& \dfrac{m_1}{\mathrm{P}} \cdot fm_2 & \text{réduire} \\ m_3 &=& \dfrac{fm_1 m_2}{\mathrm{P}} & m_3 \text{ est isolé} \end{array}$$

f) $\dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{z_1 z_4}{z_2 z_3}$ $\quad z_1 = ?$ $\quad n_2 = ?$

Isolons z_1 :

$$\begin{array}{rcl|l} \dfrac{n_1}{n_2} &=& \dfrac{z_1 z_4}{z_2 z_3} & \cdot \dfrac{z_2 z_3}{z_4} \\ \dfrac{n_1}{n_2} \cdot \dfrac{z_2 z_3}{z_4} &=& z_1 & \text{réduire} \\ \dfrac{n_1 z_2 z_3}{n_2 z_4} &=& z_1 & z_1 \text{ est isolé} \end{array}$$

Isolons n_2 :

$$\begin{array}{rcl|l} \dfrac{n_1}{n_2} &=& \dfrac{z_1 z_4}{z_2 z_3} & \cdot n_2 \\ n_1 &=& \dfrac{z_1 z_4}{z_2 z_3} \cdot n_2 & \cdot \dfrac{z_2 z_3}{z_1 z_4} \\ n_1 \dfrac{z_2 z_3}{z_1 z_4} &=& n_2 & \text{réduire} \\ \dfrac{n_1 z_2 z_3}{z_1 z_4} &=& n_2 & n_2 \text{ est isolé} \end{array}$$

g) $a = \dfrac{\mathrm{A}h}{2} - b$ $\qquad h = \dfrac{2\mathrm{A}}{a+b}$

h) $h = \dfrac{4\mathrm{V}}{\pi d^2}$

Exercice 48 2yzxt

Exprimer la variable demandée en fonction des autres variables présentes dans la formule.

a) $V = \frac{h}{6}(B_1 + B_2 + 4M)$ $h = ?$ $M = ?$

b) $D_r = \frac{D}{1 + A_r B_r}$ $D = ?$ $A_r = ?$

c) $P = Q\frac{R - r}{2R}$ $r = ?$

d) $G = \frac{kR_a}{R_i + R_a}$ $R_i = ?$

e) $A = \frac{F + S_\alpha}{S_\alpha}$ $F = ?$

f) $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ $R = ?$ $R_1 = ?$

Corrigé 47 2yzxt

a) $h = \frac{6V}{B_1 + B_2 + 4M)}$ $M = \frac{\frac{6V}{h} - B_1 - B_2}{4}$

b) $D = D_r \cdot (1 + A_r + B_r)$ $A_r = \frac{D}{D_r} - 1 - B_r$

c) $r = -\frac{2PR}{Q}$

d) $R_i = \frac{kR_a}{G} - R_a$

e) $F = \frac{A}{S_\alpha} - S_\alpha$

f) $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ $R_1 = \frac{RR_2}{R_2 - R}$

3.3 L'algèbre comme outil de preuve

Exercice 49 sxya4

Prouver que la somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est un nombre impair.

Corrigé 48 sxya4

Un nombre pair a s'écrit $a = 2n$ pour $n \in \mathbb{N}$, un nombre impair b s'écrit $b = 2m + 1$ pour $m \in \mathbb{N}$. On a

$$a + b = 2n + 2m + 1 = 2(n + m) + 1 = 2k + 1 \text{ avec } k = n + m$$

et donc $a + b$ est bien un nombre impair.

Exercice 50 wanr

Parmi les égalités suivantes, lesquelles sont toujours vraies ? lesquelles toujours fausses ? lesquelles parfois vraies parfois fausses ?

a) $5 + 5 = 5^2$ b) $x + x = x^2$ c) $x + x = 2x$

d) $(x + 1)^3 = x^3 + 1^3$ e) $0 \cdot x = 1$ f) $x^2 \cdot x^2 \cdot x^2 = 3x^2$

g) $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ h) $0 \cdot x = 0$

Corrigé 49 wanr

a) jamais b) parfois c) toujours d) parfois

e) jamais f) parfois g) toujours h) toujours

Exercice 51 jxa81

Prouver que la somme de deux entiers impairs quelconques est un nombre pair.

Corrigé 50
jxa81

Soient $a = 2m + 1$ et $b = 2n + 1$ deux nombres impairs.

$$a + b = 2m + 1 + 2n + 1 = 2m + 2n + 2 = 2(m + n + 1)$$

qui est bien un nombre pair.

Exercice 52
u38hd

Pour quels entiers x de 1 à 200 le nombre $x^4 - x^3$ est-il le cube d'un entier ?

Corrigé 51
u38hd

Pour $\{1; 2; 9; 28; 65; 126\}$ (pourquoi ?).

Exercice 53
5xg9e

L'égalité suivante est-elle valide :

$$\left(x^2 + 2x + 2\right)\left(x^2 - 2x + 2\right) = x^4 + 4\ ?$$

Corrigé 52
5xg9e

On vérifie en développant que oui.

Exercice 54
rdpye

On considère l'identité suivante, appelée égalité de Lagrange (mathématicien du XVI ^{e} siècle) :

$$\left(a^2 + b^2\right)\left(c^2 + d^2\right) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

a) Démontrer cette identité.

b) Appliquer cette identité à quatre entiers (par exemple 2,3,4,5) en utilisant la calculatrice.

Corrigé 53
rdpye

a) On développe les deux membres. On constate qu'ils sont égaux à $a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2$.

b) à la calculatrice.

3.4 Développer et réduire

Exercice 55
n86nn

Développer et réduire.

a) $5(5 + 3x)$
b) $2x\left(2x^2 - 2x\right)$
c) $-5(-5y + 9)$
d) $-1(-3x - 3)$
e) $\left(x^2 + x - 1\right)(-1)$
f) $-2(x + y)$
g) $\left(1 + x^2\right)\left(x^2 - 4\right)$
h) $-3x^2\left(1 - 2x^2 + 3x\right)$
i) $(5 + 3x)(x - 1)$
j) $3xy\left(x^2y + x - 1\right)$
k) $\left(4 - x^2\right)\left(1 - 4x^2\right)$
l) $\left(-4xy^3 - x^3y\right)(-3y)$
m) $-2(x + 3)(x - 1)$
n) $3(x - 3)(x - 3)$
o) $(-2x + 3)(x - 1)$
p) $(-2x + 3)(3 - 2x)$

Corrigé 54
n86nn

a) $15x + 25$
b) $4x^3 - 4x^2$
c) $25y - 45$
d) $3x + 3$
e) $-x^2 - x + 1$
f) $-2x - 2y$
g) $x^4 - 3x^2 - 4$
h) $6x^4 - 9x^3 - 3x^2$
i) $3x^2 + 2x - 5$
j) $3x^3y^2 + 3x^2y - 3xy$
k) $4x^4 - 17x^2 + 4$
l) $3x^3y^2 + 12xy^4$
m) $-2x^2 - 4x + 6$
n) $3x^2 - 18x + 27$
o) $-2x^2 + 5x - 3$
p) $4x^2 - 12x + 9$

Exercice 56 akwq5

Développer à l'aide d'une identité remarquable, directement et rapidement (sans copier l'énoncé, ne pas s'accorder plus de 5').

a) $(x+y)^2$ b) $(2x^2+2)(2x^2-6)$ c) $(x-y)(x+y)$
d) $(3x+y)^2$ e) $\left(x^2+y^3\right)^2$ f) $(x-1)^2$
g) $(1-x)(1+x)$ h) $(4x-3)^2$ i) $\left(x^3+3y\right)\left(x^3-3y\right)$
j) $(3z-2)^2$ k) $(1-x)^2$ l) $(xy+2y)^2$
m) $\left(x^2-1\right)^2$ n) $(2x+2)^2$ o) $(2a+3)(2a+3)$
p) $(xyz+5)(xyz-5)$ q) $\left(3x^3-5\right)^2$ r) $(a+3b)(a+3b)$
s) $\left(x^2-1\right)\left(x^2-1\right)$ t) $\left(4a^2b-5\right)\left(4a^2b+5\right)$
u) $\left(2xy^3-1\right)\left(2xy^3-1\right)$ v) $\left(x^4+y\right)\left(x^4+y\right)$
w) $\left(1-ax^4\right)\left(1+ax^4\right)$ x) $\left(x^2+a^2\right)\left(x^2-a^2\right)$

Corrigé 55 akwq5

a) $x^2+2xy+y^2$ b) $4x^4-8x^2-12$ c) x^2-y^2 d) $9x^2+6xy+y^2$
e) $x^4+2x^2y^3+y^6$ f) x^2-2x+1 g) $1-x^2$ h) $16x^2-24x+9$
i) x^6-9y^2 j) $9z^2-12z+4$ k) x^2-2x+1 l) $x^2y^2+4xy^2+4y^2$
m) x^4-2x^2+1 n) $4x^2+8x+4$ o) $4a^2+12a+9$ p) $x^2y^2z^2-25$
q) $9x^6-30x^3+25$ r) $a^2+6ab+9b^2$ s) x^4-2x^2+1 t) $16a^4b^2-25$
u) $4x^2y^6-4xy^3+1$ v) $x^8+2x^4y+y^2$ w) $1-a^2x^8$ x) x^4-a^4

Exercice 57 sj5q7

Développer les expressions suivantes.

a) $4\cdot x+1\cdot(3x-1)\cdot(5x-1)+7\cdot x$ b) $(5x-1)\cdot(5x-1)+7(5x-1)$
c) $(4x-1)(3x-4)(3x+4)-1$ d) $((3x-4)(3x+4)-x+1)x$
e) $(3x-1)(x-1)+(4x-1)(3x-4)$ f) $x^2-x^2(4x-1)(3x-4)x^2$

Corrigé 56 sj5q7

a) $15x^2+3x+1$ b) $25x^2+25x-6$
c) $36x^3-9x^2-64x+15$ d) $9x^3-x^2-15x$
e) $15x^2-23x+5$ f) $-12x^6+19x^5-4x^4+x^2$

Exercice 58 9e72h

Pour chacune des expressions suivantes, préciser (sous : « Type ») s'il s'agit d'une somme ou d'un produit, et donner le nombre de termes ou de facteurs.

	Expression	Type	Nombre de termes
a)	$4\cdot x+1\cdot(3x-1)\cdot(5x-1)+7\cdot x$		
b)	$-4\cdot(x-y)\cdot(3x-1)\cdot(5x-1)$		
c)	$(5x-1)\cdot(5x-1)+7(5x-1)$		
d)	$(4x-1)(3x-4)(3x+4)$		
e)	$(4x-1)(3x-4)(3x+4)-1$		
f)	$((3x-4)(3x+4)-x+1)x$		
g)	$(3x-1)(x-1)+(4x-1)(3x-4)$		
h)	$x^2-x^2(4x-1)(3x-4)x^2$		

Corrigé 57
9e72h

a) somme, trois termes
b) produit, quatre facteurs
c) somme, deux termes
d) produit, trois facteurs
e) somme, deux termes
f) produit, deux facteurs
g) somme, deux termes
h) somme, deux termes

Exercice 59
gw913

Un élève a développé tous les produits de trois des binômes $(x+1)$,$(x-1)$,$(x+2)$ et $(x-2)$, de toutes les manières possibles, sans répétition d'un binôme. Il a noté les résultats suivants :

$x^3-x^2-4x+4, x^3-2x^2-x+2, x^3+2x^2-x-2$ et x^3+x^2-4x-4.

Malheureusement, cet élève ne se souvient pas dans quel ordre il a effectué ses calculs. Comment peut-on l'aider à s'y retrouver immédiatement, par une simple observation ?

Corrigé 58
gw913

On utilise le terme constant (de degré 0) qui est différent pour toutes les expressions. Ainsi, il suffit de multiplier les termes de degré 0 de chaque expression pour retrouver les trois polynômes.

Exercice 60
jw3r4

Développer et réduire.

a) $7(8+9x)$
b) $6a\left(5a^2-12a\right)$
c) $-5(-7y+11)$
d) $-12(-5x-4)$
e) $-8\left(6x^2+4x-3\right)$
f) $-9x^2\left(8x^3+7y\right)$
g) $7a^5\left(6a-4a^2\right)$
h) $-5x^4\left(7x^4+9x-1\right)$

Corrigé 59
jw3r4

a) $63x+56$
b) $30a^3-72a^2$
c) $35y-55$
d) $60x+48$
e) $-48x^2-32x+24$
f) $-72x^5-63x^2y$
g) $-28a^7+42a^6$
h) $-35x^8-45x^5+5x^4$

Exercice 61
1e54x

Réduire autant que possible.

a) $2x-2x$
b) $(2x)(-2x)$
c) $2(x-2)x$
d) $-5y+9y$
e) $-(5y+9y)$
f) $(-5y)(+9y)$
g) $(-5y+9)y$
h) $(-5y)+9y$
i) $-5(y+9)y$
j) $-5(y+9y)$
k) $-x(-x)(-1)$
l) $-x(-x-1)$
m) $-(x-x)-1$
n) $x\cdot x\cdot x+x\cdot x$
o) $x\cdot x\cdot(x+x)\cdot x$

Corrigé 60
1e54x

a) 0
b) $-4x^2$
c) $2x^2-4x$
d) $4y$
e) $-14y$
f) $-45y^2$
g) $-5y^2+9y$
h) $4y$
i) $-5y^2-45y$
j) $-50y$
k) $-x^2$
l) x^2+x
m) -1
n) x^3+x^2
o) $2x^4$

Exercice 62
n9d51

Développer et réduire le produit : $\left(n^2+n+1\right)\left(n^2-n+1\right)$.
(*) Déterminer toutes les valeurs de l'entier naturel n, pour lesquelles n^4+n^2+1 est un nombre premier.

Corrigé 61
n9d51

On développe.
$(n^2+n+1)(n^2-n+1)=n^4-n^3+n^2+n^3-n^2+n+n^2-n+1=n^4+n^2+1$.
(*) Demander à l'enseignant si intéressé !

Exercice 63 Développer et réduire.

v4dqz

a) $(2y-3)(5+3x)$ b) $(5+2x)(2x-3)$ c) $(3-y)(-5y+9)$

d) $\left(x^2+x-1\right)(x-1)$ e) $(y-x)(x+y)$ f) $(x+1)(x-1)(x+2)$

g) $(2x-1)(x+3)(1-x)$ h) $\left(1+x^2\right)\left(x^2-4x+2\right)$

i) $(x+2)^3$ j) $\left(z^3-5x^3z+2z\right)\left(z^3-3x\right)$

k) $(2-x)\left(x^2+4\right)(2+x)$ l) $(x-1)^4$

Corrigé 62
v4dqz

a) $6xy-9x+10y-15$ b) $4x^2+4x-15$

c) $5y^2-24y+27$ d) x^3-2x+1

e) y^2-x^2 f) x^3+2x^2-x-2

g) $-2x^3-3x^2+8x-3$ h) $x^4-4x^3+3x^2-4x+2$

i) $x^3+6x^2+12x+8$ j) $-5x^3z^4+z^6+15x^4z-3xz^3+2z^4-6xz$

k) $-x^4+16$ l) $x^4-4x^3+6x^2-4x+1$

3.5 Identités remarquables

Exercice 64 Utiliser les identités remarquables pour calculer (sans calculatrice) les carrés suivants :

akeku

a) Avec $(a+b)^2$: 23^2 ; 92^2 ; 101^2 ; 42^2

b) Avec $(a-b)^2$: 39^2 ; 68^2 ; 99^2 ; 298^2

Corrigé 63
akeku

Par exemple, $23^2=(20+3)^2=20^2+2\cdot 20\cdot 3+3^9=400+120+9=529$.

Exercice 65 Déterminer les identités remarquables pour :

sqsur

$(a+b)^1$; $(a+b)^2$; $(a+b)^3$; $(a+b)^4$; $(a+b)^5$

Se renseigner sur le triangle de Pascal et comprendre comment calculer récursivement $(a+b)^n$ si le développement de $(a+b)^{n-1}$ est connu.

Corrigé 64
sqsur

a) $a+b$ b) $a^2+2ab+b^2$

c) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ d) $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

e) $a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

Exercice 66 Développer directement à l'aide des identités remarquables sans écrire l'étape intermédiaire.

xabyp

Exemple : $(x-3)(x+2)=x^2-x-6$.

a) $(x-1)(x-2)$ b) $(x+3)(x+1)$ c) $(x-4)(x+4)$ d) $(y+6)(y-8)$

e) $(a+1)(a-12)$ f) $(y+9)(y-4)$ g) $(a+7)(a+3)$ h) $(x-3)(x-10)$

Corrigé 65
xabyp

a) x^2-3x+2 b) x^2+4x+3 c) x^2-16 d) $y^2-2y-48$

e) $a^2-11a-12$ f) $y^2+5y-36$ g) $a^2+10a+21$ h) $x^2-13x+30$

Exercice 67
qkz3z

Connaître par coeur et savoir démontrer les identités suivantes :

a) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

b) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

c) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

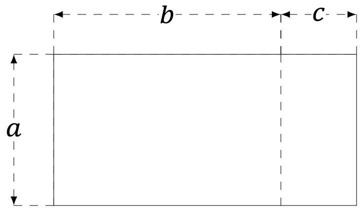
d) $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

Corrigé 66
qkz3z

Exercice 68
6edd2

En Grèce antique on donnait des preuves géométriques des propriétés des nombres réels, basées sur l'aire du rectangle.

a) Pour illustrer la distributivité de la multiplication sur l'addition pour les nombres réels a,b, et c, exprimer de deux manières l'aire du rectangle représenté ci-dessous :



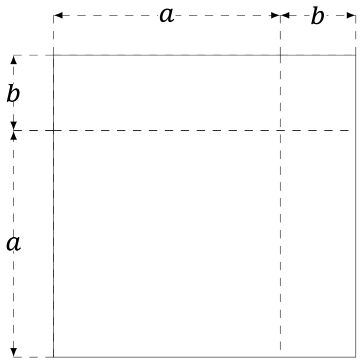
b) De manière semblables, illustrer géométriquement les identités suivantes puis les prouver :

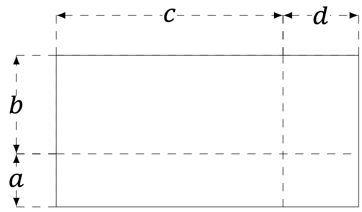
$$(a+b)^2 \quad \text{et} \quad (a+b)(c+d)$$

Corrigé 67
6edd2

a) $ab + ac$ ou $a(b+c)$, d'où la distributivité simple.

b)





Écrire l'aire de deux manière à chaque fois pour prouver les identités.

Exercice 69 Développer et réduire en utilisant les identités remarquables.

3ytn7

a) $(10rx+8)\,(10rx+5)$

b) $\left(st+\frac{3}{2}s\right)\left(st-\frac{3}{2}s\right)$

c) $\left(5s^2y-\frac{5}{8}s^2\right)^2$

d) $\left(\frac{1}{8}x+\frac{2}{3}sx\right)^2$

e) $\left(\frac{2}{5}z^2+\frac{3}{5}r^2z\right)\left(\frac{2}{5}z^2-\frac{3}{5}r^2z\right)$

f) $\left(\frac{7}{2}r-4rt^2\right)^2$

g) $(6ry+3)\,(6ry+2)$

h) $\left(\frac{4}{3}z^2+\frac{5}{9}rz\right)^2$

i) $\left(\frac{4}{7}tx-8\right)\left(\frac{4}{7}tx+7\right)$

j) $\left(10s+\frac{8}{7}t^3\right)^2$

Corrigé 68
3ytn7

a) $100r^2x^2+130rx+40$

b) $s^2t^2-\frac{9}{4}s^2$

c) $25s^4y^2-\frac{25}{4}s^4y+\frac{25}{64}s^4$

d) $\frac{4}{9}s^2x^2+\frac{1}{6}sx^2+\frac{1}{64}x^2$

e) $-\frac{9}{25}r^4z^2+\frac{4}{25}z^4$

f) $16r^2t^4-28r^2t^2+\frac{49}{4}r^2$

g) $36r^2y^2+30ry+6$

h) $\frac{16}{9}z^4+\frac{40}{27}rz^3+\frac{25}{81}r^2z^2$

i) $\frac{16}{49}t^2x^2-\frac{4}{7}tx-56$

j) $\frac{64}{49}t^6+\frac{160}{7}st^3+100s^2$

Exercice 70 Retrouver les identités remarquables pour le cube du binôme :
$(a+b)^3$ et $(a-b)^3$

82fkx

En partant de ces identités, obtenir celles pour (ou la factorisation de) :

a) a^3+b^3

b) a^3-b^3.

Corrigé 69
82fkx

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$\begin{aligned} a^3+b^3 &= (a+b)^3-3a^2b-3ab^2 \\ &= (a+b)^3-3ab(a+b) \\ &= (a+b)((a+b)^2-3ab) \\ &= (a+b)(a^2+2ab+b^2-3ab) \\ &= (a+b)(a^2-ab+b^2) \end{aligned}$$

$$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

$$\begin{aligned} a^3-b^3 &= (a-b)^3+3a^2b-3ab^2 \\ &= (a-b)^3+3ab(a-b) \\ &= (a-b)((a-b)^2+3ab) \\ &= (a-b)(a^2-2ab+b^2+3ab) \\ &= (a-b)(a^2+ab+b^2) \end{aligned}$$

3.6 Factorisation

Exercice 71 L'aire d'un rectangle est de $4a^2+6a$. Déterminer sa longueur, si la largeur mesure $2a$.

g6h1q

Corrigé 70
g6h1q

On factorise l'expression pour obtenir (par la mise en évidence)

$$4a^2+6a = 2a\cdot(2a+3)$$

Ainsi, la longueur vaut $2a+3$.

Exercice 72 Factoriser autant que possible.

q5m9j

a) $2xy^2 + 4xy + 2x$
b) $45a^2 - 30a + 5$
c) $5x^4 - 20x^2$
d) $3x^2y + 30xy + 48y$
e) $7a^4x - 14a^3x^2 + 7a^2x^3$
f) $9a^5 + 24a^3b^2 + 16ab^4$
g) $4x^3y - 16x^2y^2 + 16xy^3$
h) $2a^3x^3 - 4a^2x^2 + 2ax$
i) $3x(x+1)^2 - 27x$
j) $9ab^2c^4 - 4ab^4$
k) $a^2x^2 - 4b^2x^4$
l) $a^2(x+2y) - 4(x+2y)$

Corrigé 71
q5m9j

a) $2x(y+1)^2$
b) $5(3a-1)^2$
c) $5x^2(x-2)(x+2)$
d) $3y(x+2)(x+8)$
e) $7a^2x(a-x)^2$
f) $a(3a^2+4b^2)^2$
g) $4xy(x-2y)^2$
h) $2ax(ax-1)^2$
i) $3x(x-2)(x+4)$
j) $ab^2(3c^2-2b)(3c^2+2b)$
k) $x^2(a-2bx)(a+2bx)$
l) $(a-2)(a+2)(x+2y)$

Exercice 73 Mettre en évidence le facteur commun.

z34z9

a) $4x(x+y) + 5x(x+y)$
b) $3a(3a-b) - 8(3a-b)$
c) $5a^2b(a-2b) - 15ab^2(a-2b)$
d) $9x(x+2)^2 - 5x(x+2)$
e) $4(x-y) + 2x(y-x)$
f) $x^2(2x-1) + 3x^2(1-2x)$

Corrigé 72
z34z9

a) $9x(x+y)$
b) $(3a-8)(3a-b)$
c) $5a(ab-3b)(a-2b)$
d) $x(9x+13)(x+2)$
e) $(4-2x)(x-y)$
f) $-2x^2(2x-1)$

Exercice 74 On considère le nombre $123456789^2 - 123456786 \cdot 123456792$.

6cmvd

a) Calculer ce nombre à l'aide d'une calculatrice.
b) Poser $x = 123456789$ et exprimer le nombre considéré en fonction de x.
c) Développer et réduire l'expression trouvée en b).
d) Que conclure des calculs précédents ?

Corrigé 73
6cmvd

a) Calculer.
b) $x^2 - (x-3)(x+3)$
c) 9
d) Factoriser permet de calculer rapidement.

Exercice 75 Factoriser au maximum les expressions suivantes

4kec2

a) $25s^4 - 20s^2 + 4$
b) $9s^2t^2x^2 + 48stx + 64$
c) $s^2t^2 + 36r^4 - 12r^2st$
d) $4 + 81y^2 + 36y$
e) $s^2t^2z^2 - 1$
f) $25x^2y^2 - 90rxy + 81r^2$
g) $-147t^4yz - 420t^2y^2z - 300y^3z$

Corrigé 74
4kec2

a) $(5s^2-2)^2$
b) $(3stx+8)^2$
c) $(st-6r)^2$
d) $(2+9y)^2$
e) $(stz-1)(stz+1)$
f) $(5xy-9r)^2$
g) $-3yz(zt+10y)^2$

Exercice 76 Factoriser le plus possible les expressions suivantes.

64mtt

a) $m(a-b)+n(a-b)$
b) $x(2a-b)+y(b-2a)$
c) $a(x-y)-(y-x)$
d) $(a+b)(x-3y)-3a(x-3y)$
e) $(a+b)^3-(a+b)^2$
f) $(x-3)(x+1)-x+3+2(x-3)^2$
g) $(a-b)^3-(a-b)$
h) $(x-y)-(a+b)^2(x-y)$

Corrigé 75
64mtt

a) $(m+n)(a-b)$
b) $(x-y)(2a-b)$
c) $(a+1)(x-y)$
d) $(-2a+b)(x-3y)$
e) $(a+b-1)(a+b)^2$
f) $(x-3)(x+1)-(x-3)+2(x-3)^2=(x-3)(3x-6)=3(x-3)(x-2)$
g) $(a-b)((a-b)^2-1)=(a-b)(a-b+1)(a-b-1)$
h) $(x-y)(1-(a+b)^2)=(x-y)(1-a-b)(1+a+b)$

Exercice 77 Développer les produits, factoriser les sommes.

pq3wr

a) $(2x+3)^2$
b) $4x+6y^2$
c) $9b^2+12b+4$
d) x^2+6x-7
e) $9y^2-6y+1$
f) $4h^2(2h+3)$
g) $(1-x)^2$
h) $16a^2-25$
i) $(4a-5)(4a+5)$
j) $1-2x+x^2$
k) $8h^3+12h^2$
l) $(3y-1)^2$
m) $(x-1)(x+7)$
n) $(2+3b)^2$
o) $\left(2x+3y^2\right)\cdot 2$
p) $4x^2+12x+9$

Corrigé 76
pq3wr

a) $4x^2+12x+9$
b) $2(2x+3y^2)$
c) $(3b+2)^2$
d) $(x-1)(x+7)$
e) $(3y-1)^2$
f) $8h^3+12h^2$
g) x^2-2x+1
h) $(4a-5)(4a+5)$
i) $16a^2-25$
j) $(x-1)^2$
k) $4h^2(2h+3)$
l) $9y^2-6y+1$
m) x^2+6x-7
n) $9b^2+12b+4$
o) $4x+6y^2$
p) $(2x+3)^2$

Exercice 78 Factoriser complètement (utiliser notamment la méthode des groupements).

kywsv

a) $axy^2+bxy^2-ax-bx$
b) $8x^2+4xy-2ax-ay$
c) u^3-u-u^2+1
d) ax^2-1-x^2+a
e) x^3-2x^2+x-2
f) (*) x^3+2x^2+2x+1
g) $\left(x^2-1\right)-3(1-x)$
h) $a^2-b^2-5a+5b$
i) $a^2b^2+a^2-b^2-1$
j) x^3+2x^2-4x-8
k) $a^2b^2+b^2-a^2-1$
l) $x^3-7x^2-4x+28$

(*) Indice pour le f) : $2x^2=x^2+x^2$

Corrigé 77
kywsv

a) $x(y-1)(y+1)(a+b)$
b) $(4x-a)(2x+y)$
c) $(u^2-1)(u+1)$
d) $(x^2+1)(a-1)$
e) $(x^2+1)(x-2)$
f) $(x^2+x+1)(x+1)$
g) $(x-1)(x+4)$
h) $(a-b)(a+b-5)$
i) $(a-1)(a+1)(b^2+1)$
j) $(x+2)^2(x-2)$
k) $(b-1)(b+1)(a^2+1)$
l) $(x-2)(x+2)(x-7)$

Exercice 79 nc4wd

Factoriser complètement (utiliser notamment la méthode des groupements).

a) $2ax + ay - 12x - 6y$
b) $5x^3 - 10x^2 - x + 2$
c) $x^2 - y^2 + a\left(x^2 - 2xy + y^2\right)$
d) $7x^3 + 9 - 3x^2 - 21x$
e) $5bx - ay + by - 5ax$
f) $(x-y)(2x-y+1) + (y-x)(x-y+1)$
g) $6x^2 - 6y + ay - ax^2$
h) $(x-8)(4x-3) + x^2 - 8x$
i) $y^2 - 1 - x^2 + x^2y^2$
j) $3x^4 + 6x^3 + 2x^2 + 4x$

Corrigé 78 nc4wd

a) $(a-6)(2x+y)$
b) $(5x^2-1)(x-2)$
c) $(x+y+ax-ay)(x-y)$
d) $(7x-3)(x^2-3)$
e) $(b-a)(5x+y)$
f) $x(x-y)$
g) $(6-a)(x^2-y)$
h) $(x-8)(5x-3)$
i) $(1+x^2)(y-1)(y+1)$
j) $x(3x^2+2)(x+2)$

Exercice 80 ctbb

Observer les écritures suivantes pour trouver comment les réduire sans développer les carrés.

a) $(2x-y+1)^2 - (2x+y+1)^2$
b) $(2x+y)^2 + 2(2x+y)(2x-y) + (2x-y)^2$
c) $\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y\right)^2 - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right)^2$
d) $\left(x^2-2\right)^2 - 2\left(x^2-2\right)\left(x^2+x+1\right) + \left(x^2+x+1\right)^2$

Corrigé 79 ctbb

a) $-8xy - 4y$
b) $16x^2$
c) $-xy$
d) $x^3 + 6x + 9$

Exercice 81 x9jw

Factoriser le plus possible.

a) $4x^4 - 4$
b) $x^3 - x^2 - 4(x-1)$
c) $16x^4 - 9y^2$
d) $3x^2 + 6x - 24$
e) $8x^3 - 8x^2 + 2x$
f) $(x+y)^2 - 4u^2$
g) $x^3 - 5x$
h) $x^4 - 64$
i) $4y^2 - 12y + 9$
j) $a^2 - ab - a + b$
k) $(4x-1)^2 - 9(3-x)^2$
l) $4ax^2y^3 - (axy)^2 + 5bx^3y^2$

Corrigé 80 x9jw

a) $4\left(x^2+1\right)(x+1)(x-1)$
b) $(x-1)(x+2)(x-2)$
c) $\left(4x^2+3y\right)\left(4x^2-3y\right)$
d) $3(x+4)(x-2)$
e) $2x(2x-1)^2$
f) $(x+y+2u)(x+y-2u)$
g) $x(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})$
h) $\left(x^2+8\right)(x+\sqrt{8})(x-\sqrt{8})$
i) $(2y-3)^2$
j) $(a-b)(a-1)$
k) $(x+8)(7x-10)$
l) $x^2y^2\left(4ay - a^2 + 5bx\right)$

Exercices pour le premier semestre SECTION 4

Équations

Exercice 82 5pcp

Répondre par vrai ou faux en justifiant.

a) Le nombre -8 est-il solution de l'équation : $x^2 = 32 - 4x$?

b) Le nombre 0 est-il solution de l'équation : $x^2 + 12x + 12 = 3x^3 - 3x^2 - x + 12$?

c) Le nombre $-\dfrac{1}{2}$ est-il solution de l'équation : $x(x-2) = x^2 - 1$?

d) Le nombre $\dfrac{1}{2}$ est-il solution de l'équation : $x(x-2) = x^2 - 1$?

Corrigé 81 5pcp

a) oui b) oui c) non d) oui

4.1 Équations du premier degré

Exercice 83 qa6b

Compléter les équations b), c) et d) pour obtenir des équations équivalentes à l'équation a).

a) $x = \dfrac{2}{5}y - 2$ b) $5x = \ldots$ c) $x + 2 = \ldots$ d) $\dfrac{5}{2}x = \ldots$

Corrigé 82 qa6b

Appliquer à chaque fois l'opération indiquée à l'équation a).

b) [PE2] 5 c) [PE1] 2 d) [PE2] $\dfrac{5}{2}$

Exercice 84 ehjb

Résoudre les équations dans $\mathbb{R}$.

a) $2\sqrt{3} \cdot x = \sqrt{3} \cdot x - 1$ b) $\sqrt{3} - x = \sqrt{2} \cdot x + 2$

c) $\sqrt{3} - 3x = \sqrt{2} \cdot x + \sqrt{2}$ d) $\sqrt{2} \cdot x - \sqrt{2} = 1 - \sqrt{2} \cdot x$

Corrigé 83 ehjb

a) $S = \left\{-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right\}$ b) $S = \left\{2 - 2\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{6}\right\}$

c) $S = \left\{\dfrac{2 - 3\sqrt{2} + 3\sqrt{3} - \sqrt{6}}{7}\right\}$ d) $S = \left\{\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right\}$

Exercice 85 rhvj

Résoudre les équations dans $\mathbb{R}$.

a) $2\left(\dfrac{x}{3} + 3\right) = 0$ b) $\dfrac{1 - 6x}{4} = 2\left(1 - \dfrac{3}{4}x\right)$

c) $3x = \dfrac{x - 55}{6}$ d) $x + \dfrac{1}{4} = -\dfrac{3}{7}$

Corrigé 84 rhvj

a) $S = \{-9\}$ b) $S = \emptyset$ c) $S = \left\{-\dfrac{55}{17}\right\}$ d) $S = \left\{-\dfrac{19}{28}\right\}$

4.1.1 Résolution d'équations

4.1.2 Résolution de problèmes

Exercice 86
prpq

Un problème de Leonhard Euler (1707 - 1783).
Un père mourut en laissant quatre filles. Celles-ci se partagèrent ses biens de la manière suivante : la première prit la moitié de la fortune, moins 3000 livres ; la deuxième en prit le tiers moins 1000 livres ; la troisième prit exactement le quart des biens ; la quatrième prit 600 livres plus le cinquième des biens. Quelle était la fortune totale, et quelle somme reçut chacun des enfants ?

Corrigé 85
prpq

Fortune totale 12000 livres et chaque fille reçoit 3000 livres.

Exercice 87
ae7n

Trouver deux nombres entiers consécutifs tels que le quart du premier ajouté au cinquième du plus grand donne 29.

Corrigé 86
ae7n

64 et 65

Exercice 88
fata

Trois frères, Albrecht, Blaise et Carl ont acheté une maison 2 millions de francs. Albrecht dit qu'il pourrait payer la somme entière si Blaise lui donnait les cinq huitièmes de ce qu'il a. Blaise dit qu'il payerait tout si Carl lui donnait les huit neuvièmes de ce qu'il a. Enfin Carl dit que pour acquitter seul le prix, il lui manque le tiers de ce qu'a Albrecht plus les trois seizièmes de ce que possède Blaise. Combien chacun a-t-il ?

Corrigé 87
fata

Albrecht 1,5 million ; Brecht 0,8 million ; Carl 1,35 million.

Exercice 89
abv3

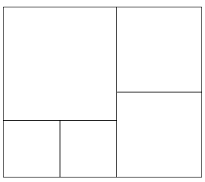
Ayant reçu un héritage, je dépense 2000 francs pour acheter une moto et je place les deux tiers du reste à la banque. Il me reste alors 30% du montant total de l'héritage. Quel était ce montant ?

Corrigé 88
abv3

20000

Exercice 90
pvqa

Le rectangle représenté ci-dessous a été découpé en 5 carrés. Le périmètre du rectangle est de 1 m . Déterminer son aire.



Corrigé 89
pvqa

$\frac{21}{338}$ m²

Exercice 91 q8vx

Il s'agit de partager 2100 francs entre trois personnes de manière que la première ait le quart de la part de la troisième et 120 francs de plus que la deuxième.

a) Voici trois façons de commencer. Compléter chacune de ces possibilités en fonction de x.

b) Résoudre ce problème.

part de la 1re personne :	x
part de la 2e personne :	
part de la 3e personne :	

part de la 1re personne :	
part de la 2e personne :	x
part de la 3e personne :	

part de la 1re personne :	
part de la 2e personne :	
part de la 3e personne :	x

Corrigé 90 q8vx

$370, 250, 1480$

4.2 Théorème du produit nul

Exercice 92 hayk

a) Écrire une équation du troisième degré dont la solution est : $S = \{-3; 5; 6\}$.

b) Écrire toutes les équations du troisième degré ayant comme solution : $S = \{0; 5\}$, et dont le coefficient du terme de degré 3 est 4 .

c) Écrire une équation du plus petit degré possible et ayant comme solution : $S = \left\{0; -2; \dfrac{1}{2}; 5\right\}$.

d) Écrire une équation du deuxième degré dont la solution est : $S = \emptyset$.

Corrigé 91 hayk

À vérifier individuellement, car plusieurs réponses possibles.

Exercice 93 r5g1

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

a) $(x-2)(x-5) = 0$

b) $(x+4)(x+6) = 0$

c) $(x-3)(7x-21) = 0$

d) $\left(x - \dfrac{1}{4}\right)\left(x + \dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{2x}{5} - 2\right) = 0$

e) $2x(2x-1)(3x+3) = 0$

f) $3(2x-3)\left(5x - \dfrac{1}{2}\right) = 0$

Corrigé 92 r5g1

Solutions : $\{2; 5\}$; $\{-4; -6\}$; $\{3\}$; $\left\{\dfrac{1}{4}; -\dfrac{1}{3}; 5\right\}$; $\left\{0; \dfrac{1}{2}; -1\right\}$; $\left\{\dfrac{3}{2}; \dfrac{1}{10}\right\}$.

4.3 Complétion du carré

Exercice 94 cn6a

En utilisant la méthode de complétion du carré, résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $x^2 - 4x - 1 = 0$ b) $4x^2 + 12x + 5 = 0$

c) $x^2 - 6x - 11 = 0$ d) $x^2 + 4x + 6 = 0$

e) $x^2 + x - 1 = 0$ f) $25x^2 + 30x + 2 = 0$

Corrigé 93 cn6a

a) $S = \{2 - \sqrt{5}; 2 + \sqrt{5}\}$ b) $S = \left\{-\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}\right\}$

c) $S = \{3 - 2\sqrt{5}; 3 + 2\sqrt{5}\}$ d) $S = \emptyset$

e) $S = \left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$ f) $S = \left\{\frac{-3-\sqrt{7}}{5}; \frac{-3+\sqrt{7}}{5}\right\}$

4.4 Formule du discriminant

Exercice 95 4yk3

Résoudre dans $\mathbb{R}$.

a) $3x^2 + 26x - 9 = 0$ b) $64 = -x^2$ c) $x^2 + 5x - 5 = 0$

d) $2x^2 = x - 1$ e) $x^2 - 10x + 63 = 0$ f) $4x^2 - 20x + 25 = 0$

g) $7x^2 + 25x - 12 = 0$ h) $x^2 = 2x$ i) $9x^2 + 42x + 49 = 0$

j) $6x^2 - 13x + 6 = 0$ k) $x^2 - 6x + 4 = 0$ l) $4x(1 + x) = -1$

Corrigé 94 4yk3

a) $S = \left\{-9; \frac{1}{3}\right\}$ b) $S = \emptyset$ c) $S = \left\{\frac{-5-3\sqrt{5}}{2}; \frac{-5+3\sqrt{5}}{2}\right\}$

d) $S = \emptyset$ e) $S = \emptyset$ f) $S = \left\{\frac{5}{2}\right\}$

g) $S = \left\{-4; \frac{3}{7}\right\}$ h) $S = \{0; 2\}$ i) $S = \left\{-\frac{7}{3}\right\}$

j) $S = \left\{\frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right\}$ k) $S = \{3 - \sqrt{5}; 3 + \sqrt{5}\}$ l) $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

Exercice 96 z8vs

Former une équation du second degré ayant pour solutions :

a) 7 et -3 b) 3 et $\frac{1}{2}$

c) $2 + \sqrt{6}$ et $2 - \sqrt{6}$ d) $\frac{-1-\sqrt{3}}{3}$ et $\frac{-1+\sqrt{3}}{3}$

Exprimer la réponse sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$, où a, b et c sont des nombres entiers.

Corrigé 95 z8vs

$x^2 - 4x - 21 = 0$; $2x^2 - 7x + 3 = 0$; $x^2 - 4x - 2 = 0$; $9x^2 + 6x - 2 = 0$

4.5 Résolutions générales d'équations

Exercice 97 Factoriser les polynômes suivants dans $\mathbb{R}$ lorsque c'est possible :

5hed

a) $10x^2 + 9x - 9$
b) $-4x^2 + 12x - 7$
c) $5x^2 - 40x + 76$
d) $x^2 - x + 2$

Corrigé 96
5hed

a) $10\left(x + \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{3}{5}\right)(= (2x+3)(5x-3))$

b) $-4\left(x - \frac{3-\sqrt{2}}{2}\right)\left(x - \frac{3+\sqrt{2}}{2}\right)(= -(2x-3+\sqrt{2})(2x-3-\sqrt{2}))$

c) $5\left(x - \frac{20-2\sqrt{5}}{5}\right)\left(x - \frac{20-2\sqrt{5}}{5}\right)$

d) non factorisable dans $\mathbb{R}$

Exercice 98 Soit le polynôme $x^6 - 1$.

ka15h

a) Le factoriser de deux manières différentes (indications : $x^6 = \left(x^3\right)^2 = \left(x^2\right)^3$ et utiliser l'activité 1).
b) En déduire une factorisation pour le polynôme $x^4 + x^2 + 1$.

Corrigé 97
ka15h

Exercice 99 Résoudre les équations dans $\mathbb{R}$:

hr3d

a) $x^3 - 6x^2 - 5x + 30 = 0$
b) $\left(x^2 + 4\right)\left(x^2 - x + 1\right) = 0$
c) $(2x - 1)\left(x^2 - 4x - 2\right) = 0$
d) $x^4 - 11x^2 + 30 = 0$

Corrigé 98
hr3d

a) $S = \{6; -\sqrt{5}; \sqrt{5}\}$;
b) $S = \emptyset$;
c) $S = \left\{\frac{1}{2}; 2+\sqrt{6}; 2-\sqrt{6}\right\}$;
d) $S = \{-\sqrt{5}; \sqrt{5}; -\sqrt{6}; \sqrt{6}\}$.

Exercice 100 Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

5tja

a) $x^2 - 10x + 16 = 0$
b) $7x^3 + 9 = 3x^2 + 21x$
c) $(x-4)(x+5) - 2x(x+5) = 0$
d) $x^2 = 8x$
e) $(x+1)(x+2) = (x+2)(x+3)$
f) $(x-8)(4x-3) + x^2 - 8x = 0$
g) $(2x+3)^2 = 8 - x(2-3x)$
h) $(x-3)^2 - 2x = 3x^2 - 1$
i) $-(-1-4x)^2 = 1 - (5x-1)^2$
j) $4x^2 + 8x + 1 = 6$

Corrigé 99
5tja

a) $S = \{2; 8\}$
b) $S = \left\{\frac{3}{7}; -\sqrt{3}; \sqrt{3}\right\}$
c) $S = \{-5; -4\}$
d) $S = \{0; 8\}$
e) $S = \{-2\}$
f) $S = \left\{8; \frac{3}{5}\right\}$
g) $S = \{-7 + 4\sqrt{3}; -7 - 4\sqrt{3}\}$
h) $S = \{-5; 1\}$
i) $S = \left\{\frac{3 - \sqrt{10}}{3}; \frac{3 + \sqrt{10}}{3}\right\}$
j) $S = \left\{-\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right\}$

Exercice 101 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

3s5y

a) $5x^2 - 8x = 0$
b) $4x^3 = 9x$
c) $2x^3 = 98x$
d) $3(x + 2) = x(x + 2)$
e) $4x^2 + 4x + 1 = 0$
f) $(2x - 6)(x + 6) - (4x + 2)(x + 6) = 0$

Corrigé 100
3s5y

Solutions : $\left\{0; \frac{8}{5}\right\}$; $\left\{-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; 0\right\}$; $\{0; -7; 7\}$; $\{-2; 3\}$; $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$; $\{-6; -4\}$

Exercice 102 Résoudre dans $\mathbb{R}$.

ufbv

a) $(x + 1)(x + 2) + (x + 3)(x + 4) = 42$
b) $(x - 6)(x + 1) - (2x + 3)(x - 5) = 0$
c) $(3x - 5)^2 - 12x = 1$
d) $(2x + 1)^2 + 3x = 1$
e) $(x - 3)^2 + (x + 4)^2 = x(x + 1)$
f) $(x + 1)^2 - (x - 1)^2 = (x - 8)^2$
g) $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{4x}{5} - 19 = \dfrac{76}{5}$
h) $\dfrac{(x - 2)^2}{5} - \dfrac{(x - 3)^2}{4} = 0$
i) $x = \dfrac{2}{5} + \dfrac{5x^2}{16}$
j) $18x^3 - 5 = 2x - 45x^2$

Corrigé 101
ufbv

a) $S = \{-7; 2\}$
b) $S = \{1 - \sqrt{10}; 1 + \sqrt{10}\}$;
c) $S = \left\{\frac{2}{3}; 4\right\}$;
d) $S = \left\{-\frac{7}{4}; 0\right\}$;
e) $S = \emptyset$
f) $S = \{4; 16\}$;
g) $S = \left\{-\frac{57}{5}; 9\right\}$;
h) $S = \{7 - 2\sqrt{5}; 7 + 2\sqrt{5}\}$;
i) $S = \left\{\frac{8-4\sqrt{2}}{5}; \frac{8+4\sqrt{2}}{5}\right\}$
j) $S = \left\{-\frac{5}{2}; \frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right\}$

Exercice 103 On considère l'équation : $x^3 - 4 = 15x$.

q822

a) Un entier naturel est solution de cette équation ; trouver lequel et justifier à l'aide de la définition du mot solution.
b) Montrer que le nombre irrationnel $\sqrt{3} - 2$ est aussi solution de cette équation.

Corrigé 102
q822

a) 4 b) à vérifier

Exercice 104 5pp8

Résoudre les équations dans $\mathbb{R}$.

a) $(2x-3)^2=(7x+3)^2$
b) $12x-9x^2=4$
c) $4x(x+1)=-1$
d) $9x^2-27=0$
e) $\frac{1}{\sqrt{2}}(5x-7)=\sqrt{2}x+\sqrt{18}$
f) $x^2+4x=32$
g) $4(x-7)=x^2(x-7)$
h) $x^3-2=x(2x-1)$

Corrigé 103
5pp8

S = $\left\{0;-\frac{6}{5}\right\}$ S = $\left\{\frac{2}{3}\right\}$ S = $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ S = $\{-\sqrt{3};\sqrt{3}\}$

S = $\left\{\frac{13}{3}\right\}$ S = $\{-8;4\}$ S = $\{-2;2;7\}$ S = $\{2\}$

Exercice 105 ek52

Résoudre les équations dans $\mathbb{R}$.

a) $x^2-5=8(2x+6)-(x-5)^2$
b) $x^3+2x^2=3x+6$
c) $x^3+9x^2-2x-18=0$
d) $\left(x^2-2x\right)^2-1=0$

Corrigé 104
ek52

$\{-1;14\}$ $\{-9;-\sqrt{2};\sqrt{2}\}$ $\{-\sqrt{3};\sqrt{3};2\}$ $\{1;1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}\}$

4.6 Résolution de problèmes

Exercice 106 v9mk

Trouver trois nombres entiers consécutifs tels que leur produit vaut le quintuple de leur somme.
(Indication : prendre l'entier intermédiaire comme inconnue x.)

Corrigé 105
v9mk

Il s'agit de $-5, -4$ et -3 ou de $-1{,}0$ et 1 ou de $3{,}4$ et 5.

Exercice 107 n9j2

Trouver deux nombres dont la différence et le produit valent 1.

Corrigé 106
n9j2

Deux possibilités : $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$; $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 108 gq2s

Un terrain rectangulaire a un périmètre de 150 m. Si l'on augmente sa largeur de 5 m et si l'on diminue sa longueur de 3 m, alors son aire augmente de 120 m^2. Quelles sont les dimensions de ce rectangle ?

Corrigé 107
gq2s

On pose les inconnues

$x =$ La largeur du rectangle $\qquad$ $y =$ La longueur du rectangle

On obtient le système $\begin{cases} 2x + 2y = 150 \\ (x+5)(y-3) = xy + 120 \end{cases}$ On résout le système après avoir simplifié au maximum la deuxième équation

$$(x+5)(y-3) = xy + 120 \iff xy - 3x + 5y - 15 = xy + 120 \iff -3x + 5y = 135.$$

On obtient que $x = 30$cm et $y = 45$cm. Le rectangle mesure 30cm sur 45cm.

Exercice 109
fu5h

Les deux côtés d'un rectangle ont 6 mètres de différence. Trouver ses dimensions sachant que son aire est de 9 m^2.

Corrigé 108
fu5h

Il mesure $-3 + 3\sqrt{2}$ m sur $3 + 3\sqrt{2}$ m.

Exercice 110
7v59j

Une agence de voyage organise une excursion. Le prix du billet a été fixé à 60 CHF, mais la compagnie a consenti, dans le cas où plus de 100 personnes feraient le voyage, à baisser le prix de chaque billet de 25 cts par personne additionnelle. Sachant qu'il en coûte 1000 CHF à l'agence pour transporter les 100 premiers passagers et 15 CHF par passager additionnel, trouver le nombre de passagers pour lequel le bénéfice net de la compagnie est maximal. Interpréter graphiquement.

Corrigé 109
7v59j

$$\text{Pour } \mathrm{N} < 100 : \quad \text{Bénéfice} = 60\,\mathrm{N} - 1000.$$

Cette fonction est linéaire croissante en N. Donc son maximum dans cette plage est atteint en $\mathrm{N} = 100$. À $\mathrm{N} = 100$, on obtient

$$\mathrm{B}(100) = 60 \times 100 - 1000 = 5000.$$

$$\text{Pour } \mathrm{N} \geq 100 : \quad x = \mathrm{N} - 100, \quad \text{Prix par billet} = 60 - 0{,}25\,x,$$

$$\text{Coût total} = 1000 + 15\,x, \quad \text{Revenu} = (100 + x)\big(60 - 0{,}25\,x\big).$$

$$\text{Bénéfice} = (100 + x)\big(60 - 0{,}25\,x\big) - \big(1000 + 15\,x\big) = 5000 + 20\,x - 0{,}25\,x^2.$$

Le sommet de cette parabole (coefficient dominant $-0{,}25 < 0$) est :

$$x_{\text{max}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{20}{2 \cdot (-0{,}25)} = 40.$$

Soit $\mathrm{N} = 100 + 40 = 140$. Le bénéfice maximum alors :

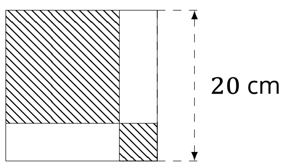
$$\mathrm{B}(140) = 5000 + 20 \times 40 - 0{,}25 \times 40^2 = 5400.$$

Comme $5400 > 5000$, le bénéfice maximal **n'est pas atteint en dessous de 100 passagers** mais bien en $\mathrm{N} = 140$.

Exercice 111
ug96

La figure ci-dessous est formée de trois carrés.

Que doit mesurer le côté du petit carré pour que la partie ombrée ait une surface triple de la partie blanche?



Corrigé 110 ug96

$5(2-\sqrt{2})$ cm (la deuxième solution est la mesure du côté du grand carré).

Exercice 112 fxnm

Un nombre est le produit de trois entiers consécutifs. Si l'on divise ce nombre successivement par chacun des trois entiers, la somme des quotients ainsi obtenus est de 767. De quel nombre s'agit-il ?

Corrigé 111 fxnm

4080 ou -4080.

Exercice 113 amb1

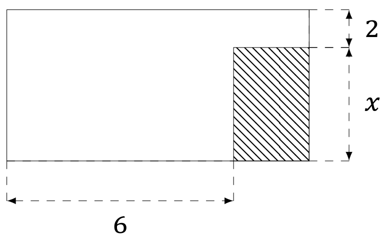
La somme des carrés de trois nombres entiers consécutifs dépasse de 288 la somme des carrés des deux nombres entiers précédents. Quels sont ces cinq nombres ?

Corrigé 112 amb1

$\{10,11,12,13,14\}$ ou $\{-26,-25,-24,-23,-22\}$

Exercice 114 uw34

Sur le dessin ci-dessous, la figure ombrée est un carré, et le grand quadrilatère, un rectangle.
(Toutes les longueurs sont en cm.)



Déterminer x pour que l'aire de la partie blanche soit égale à 38 cm^2.

Corrigé 113 uw34

$\frac{13}{4}$

4.7 Équations bicarrées

Exercice 115 9kr7

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $x^4-13x^2+36=0$ b) $x^2\left(x^2+1\right)=12$

c) $2x^4+x^2-3=0$ d) $4x^4-6x^2+1=0$

(Indication : utiliser la factorisation ou le changement de variable $y=x^2$)

Corrigé 114 9kr7

$S=\{-3;-2;2;3\}$; $S=\{-1;1\}$; $S=\{-\sqrt{3};\sqrt{3}\}$; $S=\left\{-\frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{2};\frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{2};-\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{2};\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{2}\right\}$

Exercice 116 jjs4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $x^6+4x^3-32=0$, de deux façons :

a) par un changement de variable approprié ;

b) par factorisation directe (identités remarquables).

Corrigé 115 $S = \{-2; \sqrt[3]{4}\}$
jjs4

4.8 Équations irrationnelles

Exercice 117 Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$
qndn

a) $\sqrt{(x-1)(3x-6)} = x - 2$ b) $\sqrt{2x+7} = \sqrt{x} + 2$

c) $4x - 1 = \sqrt{7x^2 - 2x + 8}$ d) $\sqrt{x+8} - \sqrt{x+3} = 5\sqrt{x}$

e) $\sqrt{x+8} + \sqrt{x+3} = 5\sqrt{x}$ f) $\sqrt{7x-27} = \sqrt{2x+1} + \sqrt{3x+4}$

Corrigé 116 $S = \{2\}$; $S = \{1; 9\}$; $S = \left\{\frac{1+2\sqrt{2}}{3}\right\}$; $S = \left\{\frac{1}{21}\right\}$; $S = \{1\}$; $S = \emptyset$
qndn

4.9 Systèmes d'équations

Exercice 118 Résoudre les systèmes d'équations suivants dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
cqkc

a) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2} = \dfrac{7x-5y}{6} + \dfrac{x+4}{4} \\ \dfrac{x-6y}{2} = \dfrac{x-2y}{7} + 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{x-3}{y-5} = \dfrac{4}{3} \\ \dfrac{x+5}{y+2} = \dfrac{6}{5} \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - y = x - 3y - 2 \\ 5 - x + \dfrac{3}{2}(x+y) = x + 2y + \dfrac{13}{2} \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4x + 3y + 6z = 41 \\ 8x + 5y = 31 \\ 7y = 21 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 6x + 4y + 8z = 6 \\ 3x + y - 2z = 1 \\ 3x + 2y - 4z = 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x - y - z = 6 \\ x - 2y - 3z = 10 \\ 5x + 6y + z = 2 \end{cases}$

Corrigé 117
cqkc

a) $\{(-4; -2)\}$ b) $\{(7; 8)\}$

c) $\{(-4; 1)\}$ d) $\{(2; 3; 4)\}$

e) $\left\{\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)\right\}$ f) $\{(3; -2; -1)\}$

Exercice 119 Le couple $\left(3; \dfrac{3}{2}\right)$ est-il solution du système $\begin{cases} 7x - 12y = 3 \\ -5x + 8y = 31 \end{cases}$?
fz7d

Corrigé 118 Non, le couple n'est pas solution du système.
fz7d

Exercice 120 r351

Le couple donné est-il solution du système d'équations ?

a) $S=(3;4)$ pour $\begin{cases} x-y=-1 \\ 9x+5y=19 \end{cases}$ b) $S=(-4;-4)$ pour $\begin{cases} -2x+2y=0 \\ -6x-10y=64 \end{cases}$

c) $S=(2;5)$ pour $\begin{cases} 4x-2y=-2 \\ 8x-6y=-14 \end{cases}$ d) $S=(1;-1)$ pour $\begin{cases} 8x+2y=6 \\ 16x+10y=6 \end{cases}$

Corrigé 119 r351

a) Non b) Oui

c) Oui d) Oui

Exercice 121 8crq

Résoudre les systèmes d'équations suivants en utilisant la méthode de combinaison linéaire.

a) $\begin{cases} 3x+5y=17 \\ 2x+3y=11 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x+2y=24 \\ 4x+3y=29 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4x-5y=-19 \\ 3x+7y=18 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 6x-5y=28 \\ 4x+9y=-6 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 6a-7b=12 \\ 5a-4b=10 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 8r-3s=15 \\ 7r-4s=20 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x+9y=12{,}5 \\ 6x+5y=8{,}9 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 3x+5y=4{,}7 \\ 6x+2y=6{,}2 \end{cases}$ i) $\begin{cases} 7u+8v=23 \\ 3u-2v=-1 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 7c+10d=-13 \\ 3c-2d=7 \end{cases}$ k) $\begin{cases} 4x-3y=2{,}7 \\ 8x+5y=13{,}1 \end{cases}$ l) $\begin{cases} 5x-6y=2{,}7 \\ 10x+7y=1{,}6 \end{cases}$

m) $\begin{cases} 3x-5y=-29 \\ 2x-10y=-42 \end{cases}$ n) $\begin{cases} 7x-2y=-26 \\ 5x-12y=-45 \end{cases}$ o) $\begin{cases} 4x+y=42 \\ 6x-5y=50 \end{cases}$

p) $\begin{cases} 2x+9y=39 \\ 5x-y=-20 \end{cases}$ q) $\begin{cases} x+12y=-8 \\ 8x-5y=37 \end{cases}$ r) $\begin{cases} 7x-8y=51 \\ x+10y=-15 \end{cases}$

s) $\begin{cases} 5x+7y=18{,}9 \\ 2x-3y=-8{,}1 \end{cases}$ t) $\begin{cases} 6x+5y=5{,}1 \\ 4x-2y=-1{,}4 \end{cases}$

Corrigé 120 8crq

a) $(4;1)$ b) $(2;7)$ c) $(-1;3)$ d) $(3;-2)$ e) $(2;0)$

f) $(0;-5)$ g) $(0{,}4;1{,}3)$ h) $(0{,}9;0{,}4)$ i) $(1;2)$ j) $(1;-2)$

k) $(1{,}2;0{,}7)$ l) $(0{,}3;-0{,}2)$ m) $(-4;3{,}4)$ n) $(-3;2{,}5)$ o) $(10;2)$

p) $(-3;5)$ q) $(4;-1)$ r) $(5;-2)$ s) $(0;2{,}7)$ t) $(0{,}1;0{,}9)$

Exercice 122 tfmt

Résoudre les systèmes d'équations suivants en utilisant la méthode de combinaison linéaire.

a) $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ 2x + y = 15 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x + y = 10 \\ 6x - y = 20 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 4y = 17 \\ -x + 7y = 38 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -x + 5y = 6 \\ x + 3y = 18 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 8x + y = 21 \\ 3x + y = 13 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 7x + y = 47 \\ 2x + y = 19 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x - 4y = 23 \\ x + 5y = -4 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x - 6y = 13 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$ i) $\begin{cases} 5x + 3y = 27 \\ 7x - 3y = 45 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 2x + 5y = 14 \\ 7x - 5y = -41 \end{cases}$ k) $\begin{cases} -2x + 7y = 8{,}7 \\ 2x + 3y = 18{,}3 \end{cases}$ l) $\begin{cases} -4x + 8y = -3{,}6 \\ 4x - 3y = 13{,}1 \end{cases}$

m) $\begin{cases} 10x + 7y = -30 \\ 8x + 7y = -24 \end{cases}$ n) $\begin{cases} 6x + 11y = -48 \\ x + 11y = -8 \end{cases}$ o) $\begin{cases} 5x - y = 22 \\ 5x + 4y = -63 \end{cases}$

p) $\begin{cases} 3x - 5y = 61 \\ 3x - y = 17 \end{cases}$ q) $\begin{cases} 2{,}3x - 1{,}7y = 3{,}5 \\ 4{,}7x - 1{,}7y = 10{,}7 \end{cases}$ r) $\begin{cases} 4{,}1x - 1{,}3y = 7{,}1 \\ 2{,}9x - 1{,}3y = 3{,}5 \end{cases}$

s) $\begin{cases} 10x - 4y = 35 \\ 3x + 4y = 21 \end{cases}$ t) $\begin{cases} 9x + 2y = 59 \\ -2x - 2y = -8 \end{cases}$

Corrigé 121 tfmt

a) $(4; 7)$ b) $(3; -2)$ c) $(-3; 5)$ d) $(9; 3)$ e) $(1{,}6; 8{,}2)$

f) $(5{,}6; 7{,}8)$ g) $(11; -3)$ h) $(7; -1)$ i) $(6; -1)$ j) $(-3; 4)$

k) $(5{,}1; 2{,}7)$ l) $(4{,}7; 1{,}9)$ m) $(-3; 0)$ n) $(-8; 0)$ o) $(1; -17)$

p) $(2; -11)$ q) $(3; 2)$ r) $(3; 4)$ s) $\left(\frac{56}{13}; \frac{105}{52}\right)$ t) $\left(\frac{51}{7}; -\frac{23}{7}\right)$

Exercice 123 marp

Résoudre les systèmes d'équations suivants avec la méthode de votre choix.

a) $\begin{cases} x - 2y = -5 \\ 7x + 10y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + 5y = 5 \\ 3x - 7y = -2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x + 6y = -2 \\ 10x + 3y = -7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5x + 4y = 13 \\ 2x - 7y = 31 \end{cases}$ e) $\begin{cases} \dfrac{x+5}{2} - \dfrac{3-y}{5} = \dfrac{5}{2} \\ x + 7 + \dfrac{y-6}{4} = 7 \cdot \dfrac{5}{2} \end{cases}$

f) $\begin{cases} \dfrac{x-3}{2} - \dfrac{5}{2} = \dfrac{2y-21}{2} + 1 \\ \dfrac{x+2}{3} + 3 = \dfrac{3-y}{5} - \dfrac{10}{3} \end{cases}$

Corrigé 122 marp

a) $S = \left\{-2; \frac{3}{2}\right\}$ b) $S = \left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$ c) $S = \left\{-\frac{4}{5}; \frac{1}{3}\right\}$

d) $S = \{5; -3\}$ e) $S = \{30; -72\}$ f) $S = \left\{-\frac{225}{13}; -\frac{41}{13}\right\}$

Exercice 124
8266

Résoudre les systèmes suivants en utilisant la méthode de la substitution.

a) $\begin{cases} y = 2x \\ 3x + y = 10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = 3x \\ 2x - y = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = 3x \\ 5x - 2y = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = 2x \\ 4x + 3y = 30 \end{cases}$ e) $\begin{cases} y = x + 4 \\ 3x + y = 16 \end{cases}$ f) $\begin{cases} y = x - 3 \\ 4x + y = 32 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x = y - 5 \\ 3x + 2y = 3 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x = y + 8 \\ 5x + 3y = 12 \end{cases}$ i) $\begin{cases} 4x + 3y = 31 \\ y = 2x + 7 \end{cases}$

Corrigé 123
8266

a) $(2; 4)$ b) $(-2; -6)$ c) $(-1; -3)$ d) $(3; 6)$ e) $(3; 7)$
f) $(7; 4)$ g) $(-1{,}4; 3{,}6)$ h) $(1{,}8; -1{,}4)$ i) $(1; 9)$

Exercice 125
2r37

— Pour chaque système d'équations, donner l'opération à effectuer pour élimer la variable x.

Exemple : $\begin{cases} 8x + 3y = 1 & (1) \\ 3x + 5y = 9 & (2) \end{cases}$

$\mathrm{E1} \cdot 3 + \mathrm{E2} \cdot (-8)$ c'est-à-dire on multiplie (1) par 3 et (2) par -8 puis on addition (1) et (2).

a) $\begin{cases} 2x + 5y = 7 & (1) \\ 3x + 4y = 9 & (2) \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x - 3y = 2 & (1) \\ -5x + 8y = 1 & (2) \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + 10y = 9 & (1) \\ 8x + 5y = 7 & (2) \end{cases}$

— Pour chaque système d'équations, donner l'opération à effectuer pour élimer la variable y.

a) $\begin{cases} 2x + 5y = 7 & (1) \\ 3x + 4y = 9 & (2) \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x - 3y = 2 & (1) \\ -5x + 8y = 1 & (2) \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + 10y = 9 & (1) \\ 8x + 5y = 7 & (2) \end{cases}$

Corrigé 124
2r37

Par exemple, pour éliminer x :

a) $\mathrm{E1} \cdot 3 - \mathrm{E2} \cdot 2$ b) $\mathrm{E1} \cdot 5 + \mathrm{E2} \cdot 4$ c) $\mathrm{E1} \cdot 4 - \mathrm{E2}$

Par exemple, pour éliminer y :

a) $\mathrm{E1} \cdot 4 - \mathrm{E2} \cdot 5$ b) $\mathrm{E1} \cdot 8 + \mathrm{E2} \cdot 3$ c) $\mathrm{E1} - \mathrm{E2} \cdot 2$

Exercice 126
qg1h

Résoudre les systèmes d'équations suivants dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

a) $\begin{cases} \dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{2} \\ 12x + 3y + 14 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 4 \\ 3x + y - 4z = 7 \\ x + 2y - 5z = 1 \end{cases}$

Corrigé 125
qg1h

a) $\left\{\left(-1; -\frac{2}{3}\right)\right\}$ b) $\{(2; -3; -1)\}$

Exercice 127
bdr9

Pour chaque système d'équations, donner l'équation obtenue après avoir élimé une des variables.

Exemple : $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ -3x - 4y = 8 \end{cases}$

On élimine x en additionnant la première équation à la deuxième équation. On obtient

$$\begin{array}{rrcr} & 3x - 2y & = & 5 \\ + & & & \\ & -3x - 4y & = & 8 \\ \hline & 0x + 2y & = & 13 \end{array}$$

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 4x - 3y = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 7x - 4y = 9 \\ 2x + 4y = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + 8y = -3 \\ -2x + 5y = 10 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x + 4y = 8 \\ -3x + 5y = -1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 4x - 5y = 9 \\ -3x + 5y = -7 \end{cases}$ f) $\begin{cases} -4x - 3y = -1 \\ 4x + 8y = 5 \end{cases}$

Corrigé 126
bdr9

On remarque que dans tous ces systèmes, une des variables de la première équation apparaît avec un coefficient opposé dans l'autre équation. On additionne donc à chaque fois la première équation à la deuxième pour éliminer une des variables.

a) $6x = 12$ b) $9x = 12$ c) $13y = 7$

d) $9y = 7$ e) $x = 2$ f) $5y = 4$

Exercice 128
q43t

Donner un système de deux équations à deux inconnues dont l'ensemble des solutions est

$$S = \{(-2; 3)\}.$$

Corrigé 127
q43t

Réponse à vérifier individuellement.

Exercice 129
qad4

Résoudre les systèmes suivants en utilisant la méthode de la substitution.

a) $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 5x - 3y = -29 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + y = 13 \\ 2x - 4y = 18 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 6x - y = 31 \\ 4x + 3y = 17 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - 7y = -22 \\ 5x + 2y = 1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 7x - 6y = -30 \\ x - 4y = -20 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2x - 9y = 14 \\ 6x - y = 42 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x + y = 23 \\ 9x - 8y = 27 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x - y = 6 \\ 10x + 11y = 149 \end{cases}$ i) $\begin{cases} x - 3y = 13 \\ 5x + 3y = 2 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 7x - 3y = -23 \\ x + 5y = 32 \end{cases}$ k) $\begin{cases} 3(x + y - 2) = -4 \\ 4x - 7y = 36 \end{cases}$ l) $\begin{cases} 4(x + y - 3) = -11 \\ 6x - 2y = -16 \end{cases}$

m) $\begin{cases} x + 6y = 19 \\ 5(x + 2y - 7) = -24 \end{cases}$ n) $\begin{cases} x + 5y = 22 \\ 3(x + 4y - 9) = -5 \end{cases}$ o) $\begin{cases} 2(x - y + 3) = 7 \\ 7x - 3(y - 1) = 9 \end{cases}$

Corrigé 128
qad4

a) $(-4;3)$ b) $(5;-2)$ c) $(5;-1)$ d) $(-1;3)$ e) $(0;5)$

f) $(7;0)$ g) $\left(\frac{211}{17};\frac{180}{17}\right)$ h) $\left(\frac{215}{21};\frac{89}{21}\right)$ i) $(2{,}5;-3{,}5)$ j) $(-0{,}5;6{,}5)$

k) $\left(\frac{122}{33};-\frac{100}{33}\right)$ l) $\left(\frac{-31}{16};\frac{35}{16}\right)$ m) $(-6{,}2;4{,}2)$ n) $\left(\frac{-154}{3};\frac{44}{3}\right)$ o) $\left(\frac{9}{8};\frac{5}{8}\right)$

4.10 Résolution de problèmes

Exercice 130
591f

Céline regarde avec envie un pull et une robe présentés dans la vitrine d'une boutique. Malheureusement, le prix total de ces deux vêtements est de 137.50 francs et dépasse son budget. Quelques temps après, le prix du pull baisse de 20% et celui de la robe de 30%. Céline calcule rapidement la dépense totale et constate que le prix total a baissé de 35 francs, ce qui lui permet d'acheter ces deux vêtements. Quels étaient les prix du pull et de la robe avant la baisse ?

Corrigé 129
591f

On pose les inconnues

$x =$ Le prix du pull avant rabais $y =$ Le prix de la robe avant rabais

On obtient le système $\begin{cases} x+y=137{,}50 \\ x-\frac{20}{100}x+y-\frac{30}{100}y=137{,}50-35 \end{cases}$ On réduit au maximum la deuxième équation :

$$x-\frac{20}{100}x+y-\frac{30}{100}y=137{,}50-32{,}50 \iff \frac{8}{10}x+\frac{7}{10}y=102{,}50 \iff 8x+7y=1025$$

Puis on résout le système $\begin{cases} x+y=137{,}50 \\ 8x+7y=1025 \end{cases}$ (par exemple par combinaison) et on obtient que $x=62{,}5$ et $y=75$, ainsi le prix du pull avant le rabais est de 62,50 francs et le prix de la robe avant le rabais était de 75 francs.

Exercice 131
a24q

Traduire chacune des ces situations par un système de deux équations et déterminer les solutions.

i) La somme de deux nombrres est 100. La différence de ces deux nombres est 68. Quels sont ces nombres ?

ii) Entendu de bon matin à la terrasse d'un café :
   — "Deux chocolats et trois croissants : Fr. 8,90."
   — "Trois chocolats et cinq croissants : Fr. 13,80."

   Quel est le prix d'un chocolat ? Et celui d'un croissant ?

iii) 350 spectateurs ont assisté à un spectacle. Au parterre, la place revient à Fr. 20.—; à la galerie, elle revient à Fr. 30.—.
   Le montant de la recette des entrées est de Fr. 7850.—.
   Combien y avait-il de spectateurs au parterre ? Et à la galerie ?

Corrigé 130
a24q

a) On pose les inconnues

x = le premier nombre y = le deuxième nombre

On obtient le système $\begin{cases} x + y = 100 \\ x - y = 68 \end{cases}$ On résout le système (par exemple par combinaison) et on obtient $x = 84$ et $y = 16$. Le premier nombre vaut 84 et le deuxième 16.

b) On pose les inconnues

x = Le prix d'un chocolat y = Le prix d'un croissant

On obtient le système $\begin{cases} 2x + 3y = 8{,}90 \\ 3x + 5y = 13{,}80 \end{cases}$ On résout le système (par exemple par combinaison) et on obtient que $x = 3{,}10$ et $y = 0{,}90$. Donc un chocolat coûte CHF 3,10 et un croissant coûte CHF 0,90.

c) On pose les inconnues

x = Le nombre de spectateurs au parterre y = Le nombre de spectateurs à la gallerie

On obtient le système $\begin{cases} x + y = 350 \\ 20x + 30y = 7850 \end{cases}$ On résout le système (par exemple par combinaison) et on obtient que $x = 265$ et $y = 85$. Il y avait donc 265 spectateurs au parterre et 85 dans la gallerie.

Exercice 132
dv8m

Ecrire un système d'équations permettant de résoudre chacun des problèmes.

a) Un nombre de trois chiffres est tel que le produit de ses chiffres divisé par leur somme donne 32 tiers ; le nombre lui-même divisé par la même somme donne 48 ; enfin, le chiffre des dizaines dépasse celui des unités d'autant qu'il est dépassé par celui des centaines. Quel est ce nombre ?

b) Si d'un nombre de quatre chiffres on soustrait le nombre qu'on obtient en écrivant les chiffres dans l'ordre inverse, on trouve 4725. Le produit des chiffres est 672, le produit des chiffres du milieu 28 et le chiffre des milliers est supérieur de 5 à celui des unités. Quel est ce nombre ?

Corrigé 131
dv8m

a) 864 b) 8473

Exercice 133
v3z1

Pour organiser une sortie de fin d'année, un collège loue des cars. Il y a des grands cars de 56 places et des petits cars de 44 places. Il y a quatre grands cars de plus que de petits. 624 élèves participent à la sortie et tous les cars sont remplis. Combien le collège a-t-il loué de cars de chaque catégorie ?

Corrigé 132
v3z1

On pose les inconnues

x = Nombre de cars à 44 places y = Nombre de cars à 56 places

On obtient le système $\begin{cases} y - x = 4 \\ 56y + 44x = 624 \end{cases}$ On résout le système (par exemple par substitution) et on obtient que $x = 4$ et $y = 8$. Le cycle a donc loué 4 petits cars et 8 grands cars.

Exercice 134
wy6v

On a payé une somme globale de $29'280$ francs pour l'achat des trois séries de meubles suivantes :

— 20 canapés, copie Directoire ;
— 18 fauteuils, copie Louis XV ;
— 16 chaises, copie Empire.

Sachant que 13 canapés valent autant que 21 fauteuils et que 3 fauteuils ont la même valeur que 8 chaises, on demande les prix d'un canapé d'un fauteuil et d'une chaise.

Corrigé 133
wy6v

CHF 840 le canapé, CHF 520 le fauteuil, CHF 195 la chaise.

Exercice 135
6vjf

Un groupe de vingt-quatre personnes fait un stage de deux jours dans une école de voile. Deux activités sont au programme : la planche à voile ou le catamaran. Le premier jour, dix personnes choisissent la planche à voile et les autres le catamaran. La facture totale de ce premier jour s'élève à 560 francs. Le deuxième jour, ils sont douze à choisir la planche à voile et les autres font du catamaran. La facture du deuxième jour s'élèves à 540 francs.
Quel est le prix par personne d'une journée de planche à voile et celui d'une journée de catamaran ?

Corrigé 134
6vjf

On pose les inconnues

x = le prix d'une journée en planche à voile $\qquad$ y = le prix d'une journée en catamaran

On obtient le système $\begin{cases} 10x + 14y = 560 \\ 12x + 12y = 540 \end{cases}$ On résout le système (par exemple par combinaison) et on obtient que $x = 17{,}50$ et $y = 27{,}50$. Une journée en planche à voile coûte CHF $17{,}50$ et une journée en catamaran CHF $27{,}50$.

Exercice 136
936c

Un confiseur répartit des truffes dans des cornets de 200 g. S'il avait réparti ses truffes dans des cornets de 150 g, il y aurait eu 12 cornets de plus.
Quelle quantité de truffes a-t-il préparée ?

Corrigé 135
936c

On pose les inconnues

x = Le nombre de sachet de 200g $\qquad$ y = Le nombre de sachet de 150g

On obtient le système $\begin{cases} y - x = 12 \\ 200x = 150y \end{cases}$ On résout le système (par exemple par substitution) et on obtient que $x = 36$ et $y = 48$. Le confiseur a donc préparé $36 \cdot 200 = 7{,}2$kg de truffes.