Chapitre 2 :
Calcul différentiel, partie 1

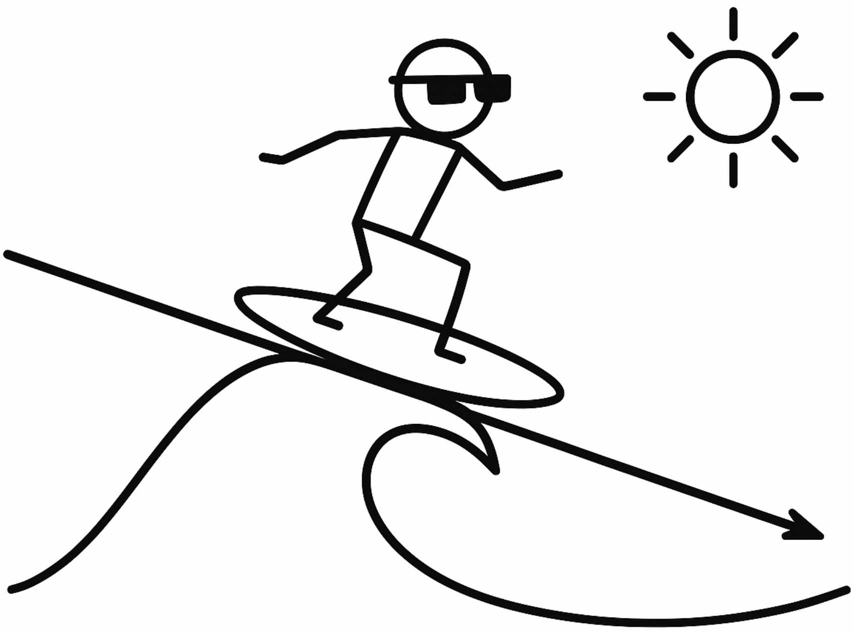


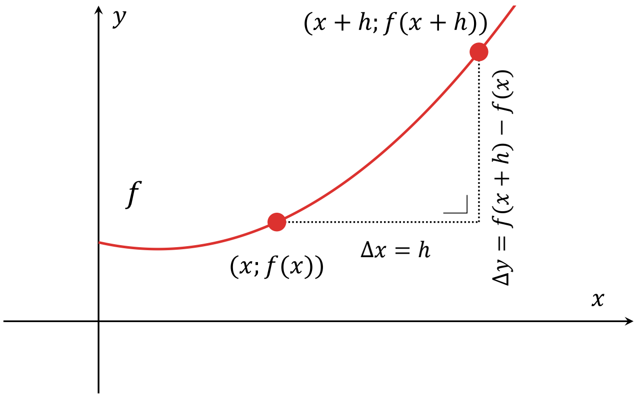
Table des matières

Calcul différentiel SECTION 1

La dérivée

1.1 Introduction : La tangente à une courbe en un point

Nous commençons avec une fonction f, et sur le graphique nous choisissons un point $(x, f(x))$ (c.f. Figure 1). Quelle droite, s'il y en a une, devrait être appelée tangente au graphique en ce point ? Et comment déterminer son équation ?



(a) Un point sur le graphe de f

(b) Une appliquette pour visualiser différentes situations

Figure 1 – Introduction à notion de dérivée

Pour répondre à cette question, nous choisissons un petit nombre $h \neq 0$ et sur le graphique marquons le point $(x + h, f(x + h))$. Maintenant nous traçons la droite sécante qui passe par ces deux points. La situation est illustrée dans la Figure 3.1.2 en prenant des valeurs de $h > 0$.

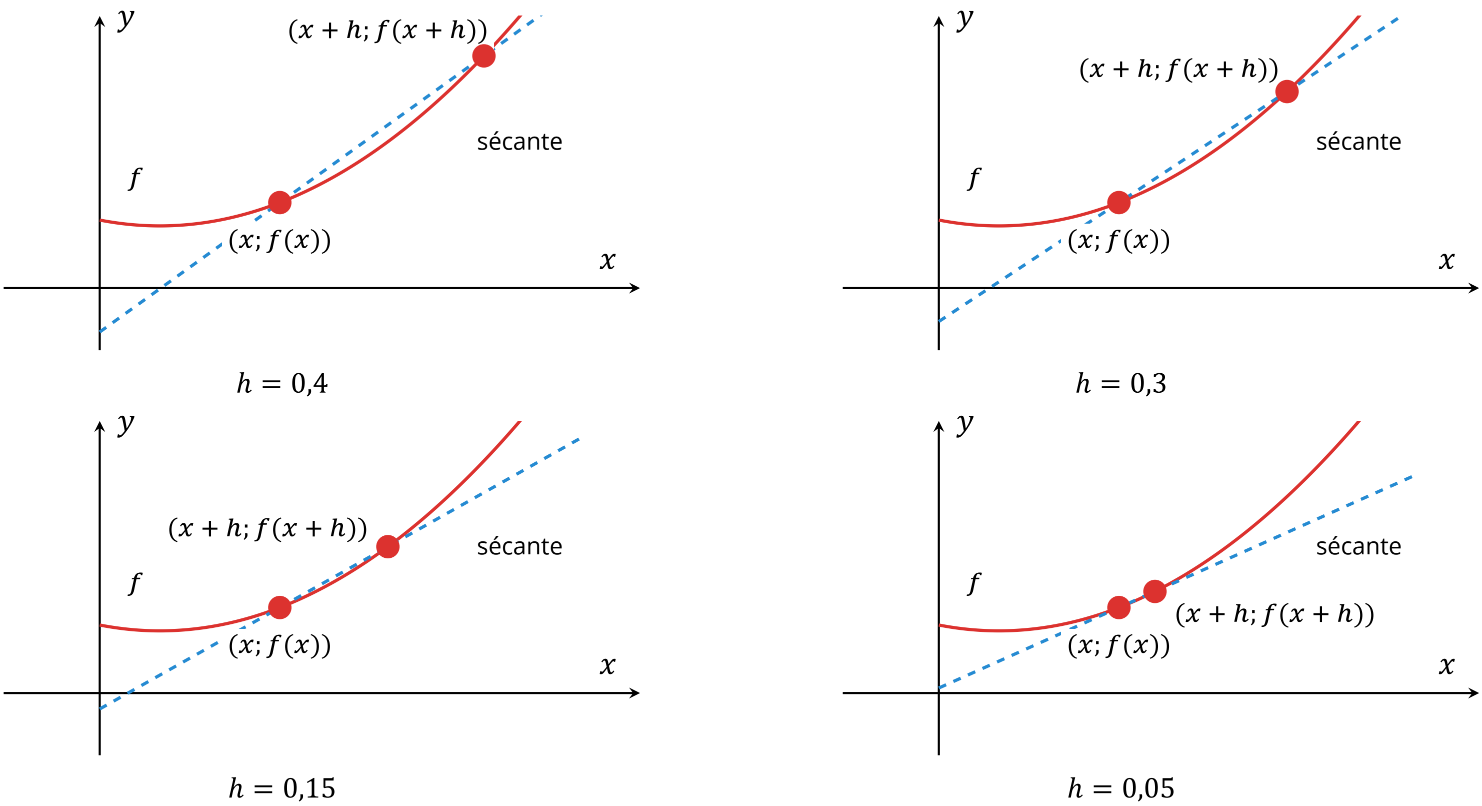


Figure 2 – Construction de la dérivée

Lorsque h tend vers zéro (une limite !), la droite sécante tend (si la limite existe) vers « la tangente de f au point $(x; f(x))$ ».
Ces droites sécantes ont une pente (aussi appelé taux de variation) donnée par

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \tag{1}$$

nous admettons que la position limite de ces sécantes ont une pente

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}. \tag{2}$$

Nous commençons l'étude systématique de telles limites, ce que les mathématiciens appellent le calcul différentiel.

Voyage au pays de maths – Flâneries infinitésimales

Exercice 1 Calculer le taux de variation de la fonction (la pente donnée de la droite entre deux points du graphe de la fonction) f donnée entre les deux points donnés et interpréter graphiquement :

a) $f(x) = x^2$, $\mathrm{A} = (1; f(1))$, $\mathrm{P} = (2; f(2))$.
b) $f(x) = x^2$, $\mathrm{A} = (1; f(1))$, $\mathrm{P} = (1{,}5; f(1{,}5))$.
c) $f(x) = x^2$, $\mathrm{A} = (-2; f(-2))$, $\mathrm{P} = (2; f(2))$.
d) $f(x) = x^3$, $\mathrm{A} = (1; f(1))$, $\mathrm{P} = (2; f(2))$.

Exercice 2 Un mobile se déplace sur un axe selon la loi $p(t) = 4t - \dfrac{t^2}{2}$, où $p(t)$ représente la position du mobile au temps t.

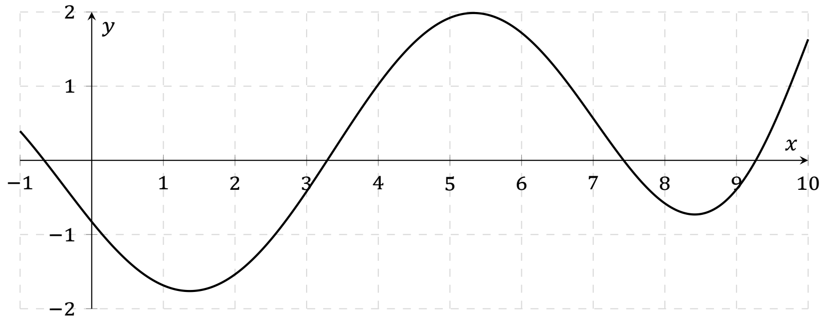
a) Calculer la vitesse moyenne du mobile entre les instants :

i) $t_1 = 2$ et $t_2 = 3$.
ii) $t_1 = 2$ et $t_2 = t$.
iii) $t_1 = a$ et $t_2 = t$.
iv) $t_1 = 2$ et $t_2 = 2 + h$.
v) $t_1 = t$ et $t_2 = t + h$.

b) Calculer la vitesse instantanée du mobile :

i) à l'instant $t = 2$.
ii) à l'instant t.

Exercice 3 Une fonction f admet le graphe suivant pour $x \in [-1; 11]$.



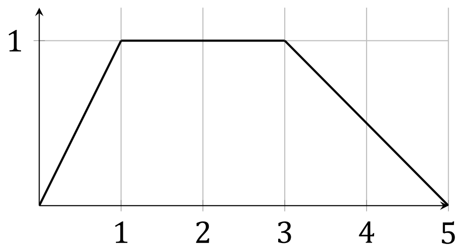
a) Pour chaque $a \in \{0; 1{,}5; 3; 4; 6; 8\}$, tracer la tangente au graphe de f en son point d'abscisse a puis estimer $f(a)$ et $f'(a)$.

b) Estimer graphiquement les solutions des équations suivantes.

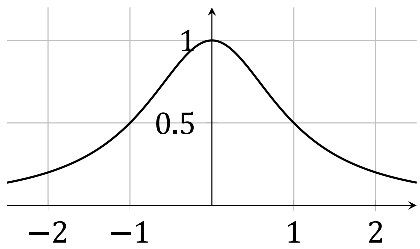
i) $f(x) = 0$	iii) $f(x) = 1$	v) $f(x) = -1$
ii) $f'(x) = 0$	iv) $f'(x) = 1$	vi) $f'(x) = -1$

Exercice 4 On donne le graphe d'une fonction f. Esquisser le graphe de f'.

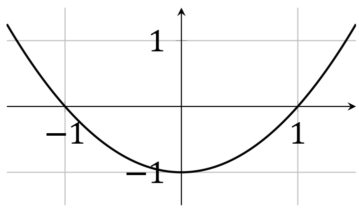
a)



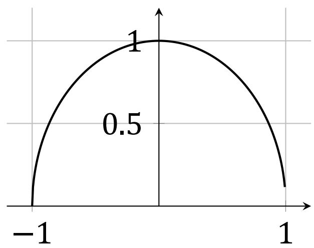
b)



c)



d)



1.2 Définitions et exemples

Définition Une fonction est dite dérivable en x ssi la limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ existe et est finie.} \qquad (\star)$$

Si cette limite existe, on l'appelle la dérivée de f en x et on la note $f'(x)$.

Définition On interprète $f'(x)$ comme la pente de la courbe f au point $(x; f(x))$. La droite qui passe par ce point et qui a cette pente s'appelle la tangente à f au point $(x; f(x))$.

Remarque Certaines fonctions sont dérivable sur $\mathbb{R}$, d'autres seulement sur un intervalle donné ou en certains points.

Remarque On parle de dérivée à droite ou dérivée à gauche si au lieu de prendre la limite birectionnelle dans ($\star$), on prend la limite à droite ou à gauche.

Commençons par calculer quelques dérivées à l'aide de la définition.

Exemple 1 Calcul de la dérivée de $f(x) = x^2$.
On part de la définition de la dérivée, on a

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\ &= \frac{2xh + h^2}{h} \\ &= 2x + h\end{aligned}$$

On prend la limite quand $h \to 0$ et on a

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x.$$

Exemple 2 Calcul de la dérivée de $f(x) = ax + b$. On part de la définition

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\qquad\qquad\qquad\qquad}{h} \\ &= \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \\ &= \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}\end{aligned}$$

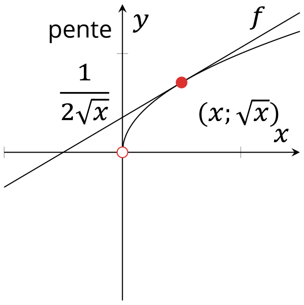
On prend la limite évidente et on obtient

Remarque Remarquons que

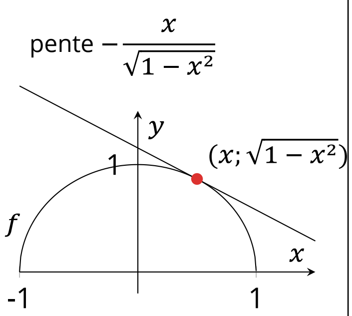
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

est une limite à droite et à gauche. Par conséquent, elle ne peut pas être prise en un point d'extrémité du domaine (on doit être sur un ouvert). Dans notre prochain exemple, nous traitons le cas de la fonction racine carrée. Bien que cette fonction soit définie pour tout $x \geq 0$, nous ne pouvons avoir une dérivée que pour $x > 0$.

Exemple 3 Calcul de la dérivée de $f(x) = \sqrt{x}$ pour $x > 0$.



Exemple 4 Calcul de la dérivée de $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ pour $x \in]-1; 1[$.



Exercice 5 Expliquer intuitivement pourquoi si une fonction est constante sur un intervalle, alors sa dérivée est nulle sur tout l'intervalle.

Exercice 6 Calculer la dérivée d'une fonction constante $f(x) = c$ pour $c \in \mathbb{R}$.

Exercice 7 Calculer la dérivée de la fonction identité $f(x) = x$.

Exercice 8
Entraînement individuel
Calculer, à partir de la définition de la fonction dérivée, la dérivée des fonctions réelles ci-dessous ; représenter f et f' dans un même repère et interpréter graphiquement le résultat (sauf pour les points d) et f)) :

a) $f(x) = 7$.
b) $f(x) = x$.
c) $f(x) = 3x$.
d) $f(x) = x^2$.
e) $f(x) = ax^2+bx+c,\ a,b,c \in \mathbb{R}$.
f) $f(x) = x^3$.
g) $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Exercice 9 On considère la fonction $f(x) = \sqrt{x}$. A l'aide de la définition de la dérivée :

a) montrer que $f'(0)$ n'existe pas ;
b) calculer $f'(a)$, pour a, un réel strictement positif ($a > 0$).

1.3 Le nombre dérivé

Parfois on s'intéresse à calculer la dérivée seulement en un point. Pour un a donné, on appelle $f'(a)$ le nombre dérivé de f en a. C'est la valeur de la dérivée évaluée en a.

Exemple 5 Calculer $f'(-2)$ pour $f(x) = 1 - x^2$.
On a deux possibilités.

Calculer $f'(x)$ Nous pouvons d'abord trouver $f'(x)$ en général :

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[1-(x+h)^2] - [1-x^2]}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2xh - h^2}{h} = \lim_{h\to 0} -2x-h = -2x.$$

et ensuite substituer -2 pour x :

$$f'(-2) = -2(-2) = 4.$$

Calculer $f'(-2)$ Nous pouvons aussi évaluer $f'(-2)$ plus directement :

$$f'(-2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[1-(-2+h)^2] - [1-(-2)^2]}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4h - h^2}{h} = \lim_{h\to 0} 4-h = 4.$$

Exemple 6 Calculer $f'(0)$ si

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2+1, & x \le 0 \\ x^3+1, & 0 < x \end{cases}.$$

Exercice 10 À partir de la définition de la dérivée de f en a, calculer les dérivées $f'(a)$ et interpréter graphiquement :

a) $f(x) = x^2$ avec $a = 1$ puis $a = 3$.
b) $f(x) = x^3$ avec $a = 2$.
c) $f(x) = x$ avec $a = 2$ puis $a = 5$.
d) $f(x) = 3$ avec $a = 2$ puis $a = 7$.

Exercice 11
Entraînement individuel
En utilisant la définition de la dérivée en un point, calculer les nombres suivants :

a) $f'(2)$, si $f(x) = -3x^2 + 1$;
b) $f'(1)$, si $f(x) = \sqrt{3x+1}$;
c) $f'(0)$, si $f(x) = \frac{x-5}{2x+1}$;
d) $f'(-2)$, si $f(x) = x^3 - 2x + 3$;
e) $f'(0)$, si $f(x) = \sin(x)$;

Exercice 12 Déterminer la pente de la tangente à la parabole d'équation $y = x^2$ au point $(-1; 1)$.

Exercice 13 Déterminer le nombre dérivé de la fonction réelle $f(t) = t^2 - 7t + 3$ en $t = -1$.

1.4 Relation avec la continuité

Théorème 1 Si f est dérivable en x alors f est continue en x.

Preuve. On a

$$\lim_{h\to 0} (f(x)+h) - f(x)) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot h\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot \lim_{h\to 0} h$$ on peut séparer les limites, car elles existent et sont finies

$$= f'(x)\cdot 0 = 0$$ car $\lim_{h\to 0} h = 0$

donc f est bien continue en x. □

Remarque La réciproque de ce théorème n'est pas valable comme nous le verrons aux exemples 7 et 8.

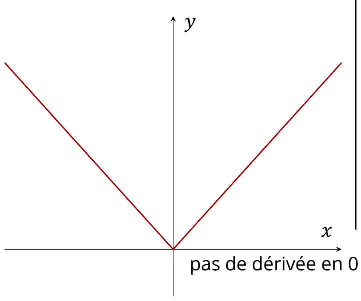
Une fonction peut être continue en un certain nombre x sans y être dérivable.

Exemple 7 La fonction valeur absolue

$$f(x) = |x|$$

est continue en 0 (elle est partout continue), mais elle n'est pas dérivable en 0 :

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{|0+h|-|0|}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} -1, & h<0 \\ 1, & h>0 \end{cases}.$$



de sorte que

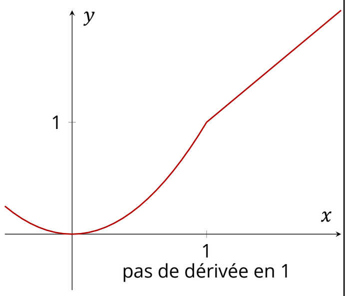
$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = -1, \quad \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = 1.$$

et

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} \quad \text{n'existe pas.}$$

L'échec de la fonction valeur absolue à être dérivable en 0 est reflété par son graphe. En $(0;0)$, le graphe change brusquement de direction et il n'y a pas de tangente en ce point.

Exemple 8



pas de dérivée en 1

On observe un changement de direction soudain similaire dans le graphe de

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ x, & x > 1 \end{cases}.$$

au point $(1;1)$. Encore une fois, f est partout continue (vérifiez-le !), mais elle n'est pas dérivable en 1 :

Définition

Soit une fonction $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$. Soit $a \in \mathrm{I}$. On dit que a est un **point anguleux** de f ssi

- f est continue en a ;
- au moins une des deux dérivée (à droite ou à gauche) est finie et les deux dérivées sont distinctes.

Exercice 14 Soit la fonction f définie par morceaux ci-dessous.

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1, & \text{si } x<2 \\ 3, & \text{si } x=2 \\ -x^2+3x+1, & \text{si } x>2 \end{cases}$$

a) En utilisant la définition de la dérivée, déterminer si f est dérivable en $a=2$.

b) Même question pour g pour $a=-1$:

$$g(x) = \begin{cases} 3x^2+1, & \text{si } x<-1 \\ 4, & \text{si } x=-1 \\ x^2-4x-1, & \text{si } x>-1 \end{cases}$$

Exercice 15 Que penser de la dérivée de la fonction réelle $f(x) = |x^2-1|$ en $x=0$, $x=1$ et $x=2$?

Exercice 16 Soit la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} x^2+ax-1, \text{ si } x \leq 1 \\ 3x-1, \text{ si } x>1 \end{cases}$

a) Lorsque a vaut 1, la fonction f est-elle continue en 1 ? (Illustrer graphiquement.)

b) Pour quelles valeurs du paramètre a cette fonction sera-t-elle continue en 1 ? (Idem.)

c) Pour la valeur de a trouvée en b), la fonction f est-elle dérivable en 1 ?

Exercice 17

a) Donner un exemple d'une fonction continue en $x=2$, mais pas dérivable en $x=2$. Justifier.

b) Démontrer qu'une fonction f définie dans un voisinage de $x \in \mathbb{R}$ qui est dérivable en x est continue en x.

c) Donner un critère visuel sur le graphe d'une fonction continue pour déterminer si elle est dérivable.

1.5 Règles de dérivation

Calculer les dérivées de fonction comme

$$f(x) = (x^3-2)(4x+1) \quad \text{ou encore} \quad f(x) = \frac{6x^2-1}{x^4+5x+1}$$

peut vite devenir laborieux à l'aide de la définition de la dérivée. Dans cette sous-section, nous énonçons et démontrons des règles de dérivation qui permettent de faciliter le calcul de dérivées.
Pour rappel, on a démontré les deux résultats suivants en exercices

Proposition 1 On a

- Si $f(x)=c, c \in \mathbb{R}$, alors $f'(x)=0$.
- Si $f(x)=x$, alors $f'(x)=1$.

Voici un résumé des formules (démontrées plus bas ou en exercices).

Formules Soient f et g des fonctions dérivables en x. Alors

Produit constante $(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x), c \in \mathbb{R}$

Somme $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

Produit $(f \cdot g)'(x) = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$

Inverse $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$, si $g(x) \neq 0$

Quotient $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = -\frac{f(x) \cdot g'(x) - f'(x) \cdot g(x)}{g(x)^2}$

Exposant $x^{\frac{n}{m}} = \frac{n}{m}x^{\frac{n}{m}-1}, \forall n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$

Composition Dans les conditions du Théorème 2

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Proposition 2 Soit f une fonction dérivable en x et $c \in \mathbb{R}$ une constante, alors $c \cdot f$ est dérivable en x et $(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$.

Preuve. Il faut montrer que

$$\lim_{h \to 0} \frac{(cf)(x+h) - (cf)(x)}{h} = cf'(x).$$

Ceci découle directement du fait que

$$\frac{(cf)(x+h) - (cf)(x)}{h} = \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} = c\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right].$$

□

Proposition 3 Soient f et g des fonctions dérivables en x, alors $f + g$ est dérivable en x et $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Preuve. On a

$$\begin{aligned}\frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} &= \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h} \\ &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.\end{aligned}$$

Par définition,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x), \quad \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x).$$

Ainsi

$$\lim_{h \to 0} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} = f'(x) + g'(x),$$

ce qui signifie que $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$. □

Proposition 4 Soient f et g des fonctions dérivables en x, alors fg est dérivable en x et $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

Preuve. On a

$$\frac{(fg)(x+h)-(fg)(x)}{h} = \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$
$$= \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)+f(x+h)g(x)-f(x)g(x)}{h}$$
$$= f(x+h)\left[\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] + g(x)\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right].$$

Puisque f est dérivable en x, nous savons que f est continue en x et ainsi

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x).$$

Puisque $\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = g'(x)$ et $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$, nous obtenons $\lim_{h\to 0} \frac{(fg)(x+h)-(fg)(x)}{h} = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$. □

Corollaire 1 Si $f(x) = x^n$ pour $n \in \mathbb{N}$, alors $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

Preuve. On commence par remarquer que

$$(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots + h^n$$

Ainsi,

$$(x^n)' = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots + h^n - x^n}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots + h^n}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \ldots + h^{n-1}\right)$$
$$= nx^{n-1}$$

□

Exemple 9 $p(x) = x$ a pour dérivée $p'(x) = 1$,
$p(x) = x^2$ a pour dérivée $p'(x) = 2x$,
$p(x) = x^3$ a pour dérivée $p'(x) = 3x^2$,
$p(x) = x^4$ a pour dérivée $p'(x) = 4x^3$,
et ainsi de suite.

Proposition 5 Soit g une fonction dérivable en x et $g(x) \neq 0$, alors $\frac{1}{g}$ est dérivable en x et $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$.

Preuve. g est dérivable en x, donc g est continue en x. Puisque $g(x) \neq 0$, nous savons que $1/g$ est continue en x, et ainsi que

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x+h)} = \frac{1}{g(x)}.$$

Pour h différent de zéro et suffisamment petit, $g(x+h) \neq 0$ et

$$\frac{1}{h}\left[\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}\right] = -\left[\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]\frac{1}{g(x+h)g(x)}.$$

En prenant la limite quand h tend vers zéro, nous voyons que le membre de droite (et donc celui de gauche) tend vers

$$-\frac{g'(x)}{g(x)^2}.$$

□

Corollaire 2 Si $f(x) = x^k$ pour $k \in \mathbb{Z}$, alors $f'(x) = k \cdot x^{k-1}$.

Preuve. Soit k un nombre négatif. Notons que

$$p(x) = \frac{1}{g(x)} \text{ où } g(x) = x^{-k} \text{ et } -k \text{ est un entier positif.}$$

Par la proposition 5, on a

$$p'(x) = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2} = -\frac{(-k)x^{-k-1}}{x^{-2k}} = kx^{k-1},$$

où on a appliqué le corollaire 1 à $g(x)$ pour calculer $g'(x)$. □

Exemple 10 $p(x) = x^{-1}$ a pour dérivée $p'(x) = (-1)x^{-2} = -x^{-2}$,
$p(x) = x^{-2}$ a pour dérivée $p'(x) = -2x^{-3}$,
$p(x) = x^{-3}$ a pour dérivée $p'(x) = -3x^{-4}$,
et ainsi de suite.

Exemple 11 Dériver

$$f(x) = 5x^2 - \frac{6}{x}$$

et déterminer le nombre dérivé $f'\left(\frac{1}{2}\right)$.

$f(x) = 5x^2 - 6x^{-1}$ donc

$$f'(x) = 10x + 6x^{-2},$$

ce qui, si vous n'aimez pas les exposants négatifs, peut être réécrit comme

$$f'(x) = 10x + \frac{6}{x^2}.$$

On calcule le nombre dérivé en substituant

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + \frac{6}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 5 + 24 = 29$$

Exemple 12 Dériver

$$f(x) = \frac{1}{ax^2 + bx + c}$$

Proposition 6 Soient f et g des fonctions dérivables en x et $g(x) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en x et $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$.

Preuve. La preuve est laissée en exercice (exercice 23). □

Exemple 13 Dériver

$$\mathrm{F}(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

Nous avons un quotient $\mathrm{F}(x) = f(x)/g(x)$. La règle du quotient donne

$$\mathrm{F}'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2},$$

ce qui donne

$$\mathrm{F}'(x) = \frac{(cx + d) \cdot a - (ax + b) \cdot c}{(cx + d)^2} = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}.$$

Exemple 14 Dériver

$$\mathrm{F}(x) = \frac{6x^2 - 1}{x^4 + 5x + 1}$$

Nous avons un quotient $\mathrm{F}(x) = f(x)/g(x)$. La règle du quotient donne

$$\mathrm{F}'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2},$$

d'où

$$\mathrm{F}'(x) = \frac{(x^4 + 5x + 1)(12x) - (6x^2 - 1)(4x^3 + 5)}{(x^4 + 5x + 1)^2}.$$

Exemple 15 Calculer $f'(0)$, $f'(1)$, et $f'(2)$ pour $f(x) = \dfrac{5x}{1+x}$.

Exemple 16 Calculer $f'(-1)$ pour $f(x) = \dfrac{x^2}{ax^2 + b}$.

Théorème 2
(sans démonstration)

Si g est dérivable en x et f est dérivable en $g(x)$, alors la fonction composée $f \circ g$ est dérivable en x et

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Corollaire 3 Si $f(x) = x^r$ pour $r \in \mathbb{Q}$, alors $f'(x) = r \cdot x^{r-1}$.

Preuve. On sait déjà que pour $k \in \mathbb{Z}$, $(x^k)' = kx^{k-1}$. Soit $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$. On pose $f(x) = x^m$ et $g(x) = x^{\frac{1}{n}} = x^{-n}$. On a alors que $(f \circ g)(x) = x^{\frac{m}{n}}$. On applique le théorème 2 à $f \circ g$. On a

$$\begin{aligned}
\left(x^{\frac{m}{n}}\right)' &= \left(\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m\right)' \\
&= m \cdot \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1} \cdot \frac{1}{n} \cdot x^{\left(\frac{1}{n}-1\right)} \\
&= \frac{m}{n} x^{\frac{m-1}{n}} \cdot x^{\frac{1-n}{n}} \\
&= \frac{m}{n} x^{\left(\frac{m-1}{n}+\frac{1-n}{n}\right)} \\
&= \frac{m}{n} x^{\frac{m-n}{n}} \\
&= \frac{m}{n} x^{\left(\frac{m}{n}-1\right)}
\end{aligned}$$

□

Exercice 18 Dériver les fonctions en x suivantes, à l'aide des propriétés de la dérivée (a, b, c, d et π sont des nombres réels) :

a) $f(x) = 2x - 3$
b) $f(x) = \pi x^2$
c) $f(x) = 4x^2 - 5x + 6$
d) $f(x) = ax^2 + bx + c$
e) $f(x) = (2x - 3)^2$
f) $f(x) = 2x - \frac{1}{x^2-1}$
g) $f(x) = \frac{x+5}{x-1}$
h) $f(x) = \frac{a}{x^2}$
i) $f(x) = \frac{1}{x^4}$
j) $f(x) = (2x - 1)(3 - 4x)$
k) $f(x) = \frac{10}{x^3-4x^2-2}$
l) $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$

Exercice 19 Montrer que si f est dérivable en x, alors $\left(f(x)^2\right)' = 2f(x)f'(x)$.

Exercice 20 On considère le théorème « Dérivée de la différence de deux fonctions »

a) L'énoncer en identifiant clairement hypothèses et conclusions.

b) Illustrer son utilité par des exemples.

c) On donne ci-dessous une démonstration :

Démonstration :

$$\begin{aligned}
(f-g)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(f-g)(x+h)-(f-g)(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h)-g(x+h))-(f(x)-g(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)-g(x+h)+g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)-(g(x+h)-g(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= f'(x)-g'(x)
\end{aligned}$$

Justifier chaque étape de la démonstration.

Exercice 21 Montrer que si f, g, h sont dérivable, alors

$$(fgh)'(x) = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

Exercice 22 Dériver la fonction h, donnée par $h(x) = \left(x^2+1\right)^3$, de deux façons différentes :

a) après avoir d'abord distribué et réduit ;

b) directement à l'aide de la formule pour la dérivée d'une fonction composée.

Exercice 23 Soient f et g des fonctions dérivables en x et $g(x) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en x et $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$.

Indication : $f/g = f \cdot 1/g$.

Exercice 24

Entraînement individuel

Utiliser les formules de dérivation pour déterminer (donner des réponses sans exposant négatif ou fractionnaire) :

a) $\left(\dfrac{4}{x}\right)'$ b) $\left(\dfrac{-18}{x}\right)'$ c) $\left(\dfrac{1}{x^2}\right)'$

d) $\left(\dfrac{1}{3x^3}\right)'$ e) $\left(\dfrac{24}{x^2}\right)'$ f) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)'$

g) $\left(\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\right)'$ h) $\left(x^2-\dfrac{1}{2x}\right)'$ i) $\left(\dfrac{x^2}{x^3+1}\right)'$

j) $\left(\dfrac{1+2u^3}{2u}\right)'$ k) $((2x+3)(3x-7))'$ l) $\left(x^2(1+\sqrt{x})\right)'$

m) $((x^3-x)(x^2-9))'$ n) $\left(\dfrac{x^2+1}{4x}\right)'$

Exercice 25

Utiliser les formules de dérivation pour déterminer les dérivées suivantes en justifiant toutes les étapes, et en donnant des réponses sans exposant négatif ou fractionnaire :

a) $(x^2-3)'$ b) $\left(\dfrac{2}{x^5}\right)'$ c) $\left(\sqrt{2x^3-3}\right)'$ d) $\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)'$

Exercice 26

On considère les fonctions données par : $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sin(x)$ et $h(x) = 4x^3+3$. *Indice :* $\sin(x)' = \cos(x)$.

a) Donner l'image de x pour les fonctions suivantes :

i) $(f\circ h)(x)$; iii) $(g\circ h)(x)$; v) $(f\circ g\circ h)(x)$

ii) $(g\circ f)(x)$; iv) $(h\circ g)(x)$;

b) Calculer la dérivée des fonctions $f\circ h, g\circ f, g\circ h, h\circ g$ et $f\circ g\circ h$.

Exercice 27

Utiliser les formules de dérivation pour déterminer (donner des réponses sans exposant négatif ou fractionnaire) :

a) $(x^5-10x)'$ b) $(x^{100}+100x)'$ c) $(x^2+3)'$

d) $(x^2+\pi x^3)'$ e) $\left(x^3-3x^2+9\right)'$ f) $\left(\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x}{7}\right)'$

g) $(t^3+t^2+t+1)'$ h) $(x^{895})'$ i) $(x^{-45})'$

j) $(3\sqrt{x})'$ k) $(\sqrt{3}x)'$ l) $(\sqrt[3]{x})'$

m) $(\sqrt{x^3})'$ n) $(\sqrt{2x^3})'$ o) $\left(x^{\frac{4}{3}}\right)'$

p) $(x\sqrt{x})'$

Exercice 28 Dériver les fonctions.

Entraînement individuel

a) $f(x) = (1-x)^{20}$

b) $f(x) = \left(x^2+1\right)^4$

c) $f(x) = \left(x^2+1\right)^3\left(2-x^3\right)^2$

d) $f(x) = \left(7x^2 - \frac{4}{x} + 6\right)^6$

e) $f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{2x}}$

f) $f(x) = \frac{2}{\left(x^2-x+1\right)^2}$

g) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$

h) $f(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2$

i) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}$

1.6 L'équation de la tangente

Formule Soient f une fonction dérivable et $(x_0; y_0)$ un point du graphe de f. La tangente à f en ce point a pour pente $f'(x_0)$. Pour obtenir l'équation de la tangente, on utilise la formule de la pente

$$f'(x_0) = \frac{y-y_0}{x-x_0} \iff y = f'(x_0)\cdot x - f'(x_0)\cdot x_0 + y_0$$

ou encore

$$y = f'(x_0)\cdot(x-x_0) + y_0$$

Exemple 17 Déterminer l'équation de la tangente de $f(x) = 3x^2$ au point d'abscisse -1.

Exemple 18 Déterminer l'équation de la tangente de

$$f(x) = \frac{2x+1}{3-x}$$

au point $(2; 5)$.

Exemple 19 Déterminer l'équation de la tangente de

$$x^2 + y^2 = 25$$

au point $(3; 4)$.

Exercice 29 Déterminer l'équation de la tangente à $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ au point $\left(2\,;\,\dfrac{1}{4}\right)$.

Exercice 30 Soit la fonction $f(x) = 2x^2 - 3x$.

a) En quel point la tangente au graphe de f a-t-elle une pente de $\dfrac{1}{4}$?

b) Déterminer l'équation des tangentes au graphe de f qui passent par le point $(0; -8)$.

Exercice 31 Soit la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

a) Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse 2.

b) En quel point la tangente au graphe de f a-t-elle une pente de $\dfrac{1}{4}$?

c) Déterminer les points de tangence des tangentes au graphe de f qui passent par le point $\left(\dfrac{1}{2}; 2\right)$.

Exercice 32 Soit la fonction $f(x) = x^2$.

a) Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f au point $(2; 4)$.

b) La droite d'équation $y = 4x - 3$ est-elle tangente au graphe de f au point d'abscisse 2 ? Justifier.

Exercice 33 Déterminer l'équation des tangentes au graphe de la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ aux points d'abscisse $x = 4$ et $x = 1$.

Exercice 34 Donner l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse a.

a) $f(x) = 5x^2 - 6x + 2$ et $a = 1$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$ et $a = 4$

c) $f(x) = \dfrac{3x - 2}{5x + 6}$ et $a = 0$

Exercice 35 Déterminer les points du graphe de f en lesquels la tangente passe par le point P et indiquer l'équation de cette tangente.

a) $f(x) = x^2$ et $\mathrm{P}(1; 0)$.

b) $f(x) = x^3 + x^2$ et $\mathrm{P}(0; 0)$.

c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $\mathrm{P}(-3; 1)$.

d) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x$ et $\mathrm{P}(0; 0)$.

Exercice 36 Calculer les coordonées des points d'intersection de la courbe d'équation $y = x^3$ avec sa tangente au point d'abscisse 2.

Exercice 37 Déterminer la valeur de k pour que la tangente au graphe de f au point où d'intersection avec l'axe $0y$ soit parallèle à la droite d'équation $3x - 2y = 0$.

a) $f(x) = x^2 + kx + 5$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 + kx - 2}{x^2 - x + 2}$

Exercice 38 Vrai ou faux ? Justifier soigneusement :

a) Si une droite est tangente à une courbe en un point, alors elle ne rencontre la courbe qu'à ce point.

b) Si une droite rencontre une courbe en un seul point, alors elle est tangente à la courbe en ce point.

1.7 Dérivées des fonctions trigonométriques

Théorème 3
Dérivées des fonctions trigonométriques (avec démonstration)

On a

- $[\sin(x)]' = \cos(x)$
- $[\cos(x)]' = -\sin(x)$
- $[\tan(x)]' = 1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$

Preuve de $[\sin(x)]' = \cos(x)$. On a l'identité trigonométrique suivante

$$\sin(a) - \sin(x) = 2\sin\left(\frac{a-x}{2}\right)\cos\left(\frac{a+x}{2}\right)$$

On procède au changement de variable $a = x + h$. On obtient
$\sin(x+h) - \sin(x) = 2\sin\left(\dfrac{h}{2}\right)\cos\left(x + \dfrac{h}{2}\right)$
On calcule la dérivée avec cette identité :

$$\begin{aligned}
[\sin(x)'] &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\left(\frac{h}{2}\right)\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \cos\left(x+\frac{h}{2}\right) \\
&= \lim_{\frac{h}{2}\to 0} \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \lim_{h\to 0} \cos\left(x+\frac{h}{2}\right) \\
&= 1\cdot\cos(x) = \cos(x).
\end{aligned}$$

□

Preuve de $[\cos(x)]' = -\sin(x)$. On utilise les relations

$$\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \text{et} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$$

On a par la formule de dérivation d'une fonction composée et la dérivée du sinus :
$\cos'(x) = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cdot(-1) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin(x)$
□

Preuve de $[\tan(x)]'$. À faire en exercice. □

Notation De même que qu'on écrit $[\sin(x)]^2 = \sin^2(x)$, on note plus simplement $[\sin(x)]' = \sin'(x)$, $[\cos(x)]' = \cos'(x)$ et $[\tan(x)]' = \tan'(x)$.

Exemple 20
$[\sin(-20x^3 + x)]'$

On utilise la formule de dérivation de la composition de fonctions.
$\sin(-20x^3 + x) = g(f(x))$ avec $f(x) = -20x^3 + x$ et $g(x) = \sin(x)$

$$[\sin(-20x^3+x)]' = \cos(-20x^3+x)\cdot(-20x^3+x)'$$
$$= \cos(-20x^3+x)\cdot(-60x^2+1)$$

Exemple 21

$[\cos^5(x)]'$

On utilise la formule de dérivation de la composition de fonctions.
$\cos^5(x) = [\cos(x)]^5 = g(f(x))$ avec $f(x) = \cos(x)$ et $g(x) = x^5$

$$\begin{aligned}[\cos^5(x)]' &= [[\cos(x)]^5]' \\ &= 5[\cos(x)]^4\cdot[\cos(x)]' \\ &= 5[\cos(x)]^4\cdot[-\sin(x)] \\ &= -5\cos^4(x)\sin(x)\end{aligned}$$

Exemple 22

$[\sin^3(x^2-1)]'$

On utilise la formule de dérivation de la composition de fonctions.
$\sin^3(x^2-1) = [\sin(x^2-1)]^3 = g(f(x))$ avec $f(x) = \sin(x^2-1)$ et $g(x) = x^3$
On a
$[[\sin(x^2-1)]^3]' = 3[\sin(x^2-1)]^2\cdot[\sin(x^2-1)]'$
et on doit recommencer pour dériver $[\sin(x^2-1)]'$:
$[\sin(x^2-1)]' = \cos(x^2-1)\cdot(x^2-1)' = \cos(x^2-1)\cdot(2x)$
d'où enfin :

$$\begin{aligned}[[\sin(x^2-1)]^3]' &= 3[\sin(x^2-1)]^2\cos(x^2-1)\cdot 2x \\ &= 6x\sin^2(x^2-1)\cos(x^2-1)\end{aligned}$$

Exercice 39

Prouver que $\tan'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x)$

Exercice 40

Déterminer les dérivées suivantes et donner la réponse sans exposant négatif ou fractionnaire :

a) $\sin(x^4 - \frac{1}{x})$

b) $\cos(5\sqrt{x})$

c) $\tan(\cos(x))$

d) $\sin^3(x)$

e) $\sqrt{\cos(x)}$

f) $\sin^{-1}(2x)$

Exercice 41 Déterminer les dérivées des fonctions f suivantes :

a) $f(x) = \sin(x) + 2\cos(x)$

b) $f(x) = \sin(x)\cos(x)$

c) $f(x) = (\sin(x)+2\cos(x))\cos(x)$

d) $f(x) = \dfrac{\sin(x)+1}{\sin(x)-1}$

e) $f(x) = \dfrac{\cos(x)+2}{\cos(x)+3}$

f) $f(x) = \dfrac{\sin(3x)}{\cos(5x)}$

g) $f(x) = 2\cos(x) - \cos(2x)$

h) $f(x) = 2\sin^2(x) + 5\sin(x) - 3$

i) $f(x) = 3\sin^4(x) + \cos^3(x) - 1$

j) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}$

k) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(2x)}$

l) $f(x) = \sqrt{\cos(2x)} + 3\sin^2(x)$

m) $f(x) = x - \sin(x)\cos(x)$

n) $f(x) = \cos(x)(\sin^2(x) + 2)$

o) $f(x) = \dfrac{\sin(x) - x\cos(x)}{x\sin(x) + \cos(x)}$

p) $f(x) = \dfrac{x\sin(x) + \cos(x)}{\sin(x) - x\cos(x)}$

q) $f(x) = 2x\cos(x)+(x^2-2)\sin(x)$

Sources du cours

Les sources suivantes ont majoritairement été utilisées pour construire ce cours. Les exercices et activités proviennent également principalement de ces ouvrages. D'autres exercices ont été adaptés ou sont inspirés de ressources partagées par des collègues ou trouvées sur internet. Leur contribution mineure les exclut de cette liste.

[1] Saturnino L. Salas et Einar Hille. **Calculus : One and Several Variables**. 3e éd. Wiley, 1984.

[2] Commission Romande de Mathématiques. **Analyse**. T. Monographies de la Commission Romande de Mathématique 30. CRM Éditions, 2024.

[3] Commission Romande de Mathématiques. **Fundamentum de mathématique Analyse**. T. Monographies de la Commission Romande de Mathématique 25. CRM Éditions, 2018.

[4] Association Sesamath Suisse Romande. **Sésamath – Troisième année de maturité gymnasiale**. 2022. url : `https://sesamath.ch/`.