Chapitre 1 : Fonctions continues et calcul de limites

Table des matières

CC BY-SA

Limites et continuité SECTION 1

Exercices

Dans les corrigés vous trouverez seulement des éléments de réponses. **Une réponse détaillée et justifiée** à l'aide des résultats du cours est attendue. L'enseignant est là pour valider votre réponse et vérifier votre rédaction. **En évaluation, une réponse qui n'est pas justifiée selon les attentes ne recueillera pas de point.**

1.1 Continuité

Exercice 1 Déterminer, à l'aide de votre calculatrice, si les fonctions suivantes sont continues en $a = 1$:

$$f(x) = \frac{1}{x-1}, \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & x \neq 1, \\ 3 & x = 1 \end{cases}, \qquad h(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x} & x \neq 1, \\ \dfrac{1}{2} & x = 1. \end{cases}$$

Corrigé 1 a) non b) non c) oui

Exercice 2 Déterminer, à l'aide de votre calculatrice, si la fonction g définie dans $\mathbb{R}_+$ par

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}, & \text{si } x \neq 9, \\ 6, & \text{si } x = 9. \end{cases}$$

est continue en 9.

Corrigé 2 oui, utiliser la troisième identité remarquable pour le prouver.

Exercice 3 Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x+k, & \text{si } x < 4, \\ -x+3, & \text{si } x \geq 4. \end{cases}$$

Pour quelle(s) valeur(s) de k la fonction f est-elle continue ?

Corrigé 3 Pour $k = -5$.

Exercice 4 Soit P un polynôme de degré 3 à coefficients réels. Montrer que le poylnôme P possède au moins une racine réelle.
On admet pour cet exercice que les fonctions définies par des polynômes sont continues.

Corrigé 4 On écrit $\mathrm{P}(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$. On a que pour un nombre n assez petit, signe$(\mathrm{P}(n)) = -$signe(a) et que pour un nombre m assez grand, signe$(\mathrm{P}(m)) =$ signe(a). La fonction $x \mapsto \mathrm{P}(x)$ est continue sur tout $\mathbb{R}$, donc aussi sur $[n; m]$. Ainsi, par la corollaire du théorème de la valeur intermédiaire, il existe $r \in [n; m]$ tel que $\mathrm{P}(r) = 0$.

1.2 Limites en un nombre

Exercice 5 Déterminer, si possible :

a) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)$

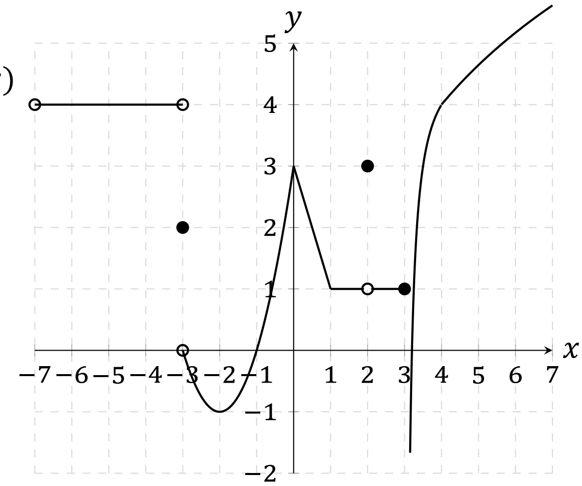
c) $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)$ d) $f(-3)$

e) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ f) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$

g) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ h) $f(3)$

i) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ j) $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$

k) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ l) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$



Corrigé 5

a) 1	b) 4	c) 0	d) 2	e) 1	f) $-\infty$
g) n’existe pas	h) 1	i) 0	j) 4	k) 1	l) 1

Exercice 6 Esquisser une fonction f qui vérifie chaque fois les conditions données :

a) $\lim\limits_{x\to 3} f(x) \to 2$ et $f(3) = 2$.

b) $\lim\limits_{x\to 3} f(x) \to 2$ et $f(3) = 1$.

c) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 4$ et $f(3) = 2$.

d) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 4$ et $f(3) = 4$.

e) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 4$ et $f(3) \neq 4$.

f) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ n’existe pas et $f(3) = 1$.

g) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$ et $2 \notin \mathrm{D}_f$.

h) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = -1$, $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 1$ et $f(3) = 2$.

Corrigé 6 Vérifier la réponse avec l’enseignant.

Exercice 7 Montrer que l’équation

$$2^x = x^2$$

admet une solution sur l’intervalle $[-1; 0]$.

Corrigé 7

- On considère la fonction $f(x) = 2^x - x^2$, continue sur $\mathbb{R}$ car somme de fonctions continues.
- On calcule :

$$f(-1) = 2^{-1} - (-1)^2 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$
$$f(0) = 2^0 - 0^2 = 1 - 0 = 1$$

- On a $f(-1) < 0$ et $f(0) > 0$, donc $f(-1) \cdot f(0) < 0$.
- D’après le corollaire du théorème de la valeur intermédiaire, il existe $c \in [-1; 0]$ tel que $f(c) = 0$.

Exercice 8 Calculer les limites suivantes en justifiant chaque étape.

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-6x+8}{x^2+5x+4}$. b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2-4x+16}}{3}$. c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \cos(2x)$.

Corrigé 8

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-6x+8}{x^2+5x+4} \overset{\text{P4}}{=} \dfrac{\lim_{x\to 1}(x^2-6x+8)}{\lim_{x\to 1}(x^2+5x+4)} \overset{\text{Cor. 4}}{=} \dfrac{1^2-6\cdot 1+8}{1^2+5\cdot 1+4} = \dfrac{3}{10}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2-4x+16}}{3} \overset{\text{P0}}{=} \dfrac{1}{3}\cdot \lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2-4x+16} \overset{\text{thm. 7 + L4 + cor. 4}}{=} \dfrac{1}{3}\cdot\sqrt{0^2-4\cdot 0+16} = \dfrac{1}{3}\cdot 4 = \dfrac{4}{3}$

c) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}} \cos(2x) \overset{\text{thm. 7 + L4}}{=} \cos\left(\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}} 2x\right) \overset{\text{P0}}{=} \cos(-\pi) = -1$

Exercice 9 Calculer les limites suivantes en justifiant chaque étape.

a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3-5x+1}{1}$ b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2}{x^2+3x+5}$ c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2}{2x+4}$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2-x}{x^2-16}$ e) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{5x}{(x+3)^2}$ f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x+2}$

g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^2+3x+5}$ h) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x^2-2x+4+2x}$ i) $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{x^2-2x+4+x}$

j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+\sqrt{x+6}}{x+\sqrt{2-x}}$

Corrigé 9

a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3-5x+1}{1} \overset{\text{P4}}{=} \dfrac{\lim_{x\to -1}(x^3-5x+1)}{1} \overset{\text{cor. 4}}{=} \dfrac{(-1)^3-5(-1)+1}{1} = \dfrac{-1+5+1}{1} = \dfrac{5}{1} = 5$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2}{x^2+3x+5} \overset{\text{P4}}{=} \dfrac{\lim_{x\to 1}(x^2-2)}{\lim_{x\to 1}(x^2+3x+5)} \overset{\text{cor. 4}}{=} \dfrac{1-2}{1+3+5} = \dfrac{-1}{9} = -\dfrac{1}{9}$

c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2}{2x+4} \overset{\text{P4}}{=} \dfrac{2}{\lim_{x\to 2}(2x+4)} \overset{\text{cor. 4}}{=} \dfrac{2}{2\cdot 2+4} = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2-x}{x^2-16} = \dfrac{2-1}{1^2-16} = \dfrac{1}{-15} = -\dfrac{1}{15}$ (idem)

e) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{5x}{(x+3)^2} = \dfrac{15}{36} = \dfrac{5}{12}$ P4 + P3 + cor. 4

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x+2} = \dfrac{0}{2} = 0$ P4+cor. 4

g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^2+3x+5} \overset{\text{P4+cor. 4}}{=} \dfrac{1-1}{1+3+5} = \dfrac{0}{9} = 0$

h) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x^2-2x+4+2x} = \lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x^2+2x+4} = \sqrt{4} = 2$ thm. 7+L4+ cor. 4

i) $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{x^2-2x+4+x} = \lim\limits_{x\to 2} \sqrt{x^2-x+4} = \sqrt{6}$ P4 + thm. 7+L4+ cor. 4

j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+\sqrt{x+6}}{x+\sqrt{2-x}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+\sqrt{x+6}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}$P4 + P1 + thm. 7+L4+ cor. 4

Exercice 10 Dans chaque cas, déterminer l'expression algébrique d'une fonction f, sur $\mathbb{R}$, satisfaisant aux conditions données :

a) f est continue partout sauf pour $x = 2$ et $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ n'existe pas.

b) f admet une limite à gauche et une limite à droite au point $x = 2$ mais elle est non continue en ce point.

Corrigé 10

a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 2 \\ -1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$. La fonction n'est pas définie en $x = 2$, et la limite en $x = 2$ n'existe pas car les limites à gauche et à droite sont différentes.

b) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 2 \\ 5 & \text{si } x = 2 \\ x & \text{si } x > 2 \end{cases}$. La limite en $x = 2$ existe et vaut 2, mais $f(2) = 5 \neq 2$, donc f est discontinue en ce point.

Exercice 11 Déterminer si la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2, \\ 4, & x = 2 \end{cases}$$

est continue en $a = 2$. Justifier.

Corrigé 11

- Pour $x \neq 2$, on a $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \dfrac{(x-2)(x+2)}{x - 2} = x + 2$
- Donc $\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2}(x + 2) = 4$
- Or $f(2) = 4$, donc $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$
- Ainsi, f est continue en $a = 2$

Exercice 12 Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x - 1}{3 - 2x^2}.$$

a) Donner les limites à droite et à gauche de $f(x)$ lorsque $x \to 0$ et lorsque $x \to 2$, et déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

b) Trouver un polynôme $g(x)$ tel que $\lim\limits_{x \to 0}\big(f(x) \cdot g(x)\big) = 3$.

c) Cette question admet-elle plusieurs réponses? Si oui, en donner au moins une autre.

d) Trouver un polynôme $h(x)$ tel que $\lim\limits_{x \to 0}\big(f(x) \cdot h(x)\big)$ soit non nul, et calculer cette limite. Cette question admet-elle plusieurs réponses? Si oui, en donner au moins une autre.

e) Trouver un polynôme $k(x)$ tel que $\lim\limits_{x \to 0}\big(f(x) \cdot k(x)\big) = 0$.

Corrigé 12

a) On a : $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \frac{-1}{3}$ et $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{-1}{3}$, donc $\lim_{x\to 0} f(x) = -\frac{1}{3}$ par le théorème 3. De le même manière, $\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{2-1}{3-2\cdot 4} = \frac{1}{-5} = -\frac{1}{5}$.

b) On a $\lim_{x\to 0} f(x) = -\frac{1}{3}$. On cherche $g(x)$ tel que $\lim_{x\to 0} f(x)\cdot g(x) = 3$. Par la propriété P3 (produit), il suffit que $\lim_{x\to 0} g(x) = -9$. Exemple : $g(x) = -9$.

c) Oui, car toute fonction g telle que $\lim_{x\to 0} g(x) = -9$ convient. Par exemple : $g(x) = -9 + x$. La limite du produit est assurée par P3.

d) Il suffit que $\lim_{x\to 0} h(x) \neq 0$ pour que $\lim f(x)\cdot h(x) \neq 0$, car $\lim f(x) = -\frac{1}{3}$. Par exemple : $h(x) = 1$ convient. Alors $\lim_{x\to 0} f(x)\cdot h(x) = -\frac{1}{3} \neq 0$ par P3.

e) Il suffit que $\lim_{x\to 0} k(x) = 0$, car alors $\lim f(x)\cdot k(x) = -\frac{1}{3}\cdot 0 = 0$ (propriété P3). Exemple : $k(x) = x$.

Exercice 13 Déterminer si la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

est continue en $a = 0$. Justifier et esquisser une représentation graphique de f.

Corrigé 13

- Pour $x \neq 0$, $f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$
- Donc $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$
- Les limites à gauche et à droite sont différentes, donc $\lim_{x\to 0} f(x)$ n'existe pas
- Ainsi, f n'est pas continue en $a = 0$

Exercice 14 Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 2 + k, & x < 2, \\ x^2 - 2, & x \geq 2. \end{cases}$$

Pour quelle(s) valeur(s) de k la fonction f est-elle continue ?

Corrigé 14

- Chaque expression définissant f est polynomiale, donc continue sur son domaine.
- Le seul point critique est $x = 2$, où les deux morceaux se rejoignent.
- $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2 + k$, $\quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = 2^2 - 2 = 2$
- Pour que f soit continue en 2, on doit avoir $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$. On impose $2 + k = 2$, donc $k = 0$.

Exercice 15 Soit la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Z}, \\ 1, & x \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

a) Quel est le domaine de définition de f ?

b) Donner un point a où f est continue. Justifier.

c) Donner un point b où f n'est pas continue. Justifier.

Corrigé 15

a) Le domaine de définition est $\mathbb{R}$ (car f attribue une valeur à tout réel selon qu'il est entier ou non).

b) f est continue en tout point $a \notin \mathbb{Z}$, car dans un voisinage de a, $f(x) = 1$ sauf en un nombre isolé de points (les entiers), donc $\lim_{x\to a} f(x) = 1 = f(a)$. Pensez-y, pour tout nombre $a \notin \mathbb{Z}$, on peut trouver un voisinage de a qui n'intersecte pas $\mathbb{Z}$.

c) f n'est pas continue en un entier b, par exemple $b = 0$, car dans tout voisinage de 0, il y a des $x \notin \mathbb{Z}$ tels que $f(x) = 1$, alors que $f(0) = 0$, donc $\lim_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$.

Exercice 16 (*) Soit la fonction réelle définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Que penser de la continuité de cette fonction ?

Corrigé 16 À discuter avec l'enseignant si intéressé.e.

Exercice 17 Montrer que la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

est continue en $a = 1$ et qu'elle n'est pas continue en $a = 0$.

Corrigé 17

- $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- En $a = 1$: $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x} = \frac{1}{\lim_{x\to 1} x} = \frac{1}{1} = 1$ (L2, P4) et $f(1) = 1$, donc $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$, donc f est continue en 1.
- En $a = 0$, f n'est pas définie, donc pas continue.

Exercice 18 Application du théorème des deux gendarmes.

a) Montrer que si $\lim_{x\to a} |f(x)| = 0$ alors $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

b) Montrer que $\lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

c) En déduire que la fonction $f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ est continue en $x = 0$.

 CC BY-SA

Corrigé 18

a) On a que $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|, \forall x \in \mathbb{R}$, donc par le théorème des deux gendarmes, $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

b) On a $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}^*$ et donc $0 \leq |\sin\left(\frac{1}{x}\right)| \leq 1$. On multiplie l'inégalité par $|x|$ et on obtient
$0 \leq |x| \cdot |\sin\left(\frac{1}{x}\right)| \leq |x|$
$0 \leq |x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)| \leq |x|$
Par le théorème des deux gendarme, $\lim_{x\to 0} |\sin\left(\frac{1}{x}\right)| = 0$ et par le point précédent $\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

c) On a bien $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$, donc la fonction f est continue en 0.

Exercice 19 Montrer que l'équation
$$x^5 - 3x - 1 = 0$$
admet une solution sur l'intervalle $[1; 2]$.

Corrigé 19

- La fonction $f(x) = x^5 - 3x - 1$ est un polynôme, donc continue sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $[1; 2]$.
- On a :
$$f(1) = 1^5 - 3 \cdot 1 - 1 = -3$$
$$f(2) = 2^5 - 3 \cdot 2 - 1 = 32 - 6 - 1 = 25$$
- Or $f(1) < 0$ et $f(2) > 0$, donc $f(1) \cdot f(2) < 0$.
- Par le corollaire du théorème de la valeur intermédiaire, il existe $c \in [1; 2]$ tel que $f(c) = 0$.

1.2.1 Limites infinies « $\frac{1}{0}$ » et indétermination du type « $\frac{0}{0}$ »

Exercice 20 Soit une fonction f définie par
$$f(x) = \frac{x^4 + x^3 - x^2 - x}{1 - x}.$$

a) Déterminer son domaine de définition et ses zéros.
b) Calculer les images de 1,9; 1,99; 1,999 puis de 2,1; 2,01 et 2,001.
c) Que penser de $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$?
d) Calculer les images de 0,9; 0,99; 0,999 puis de 1,1; 1,01 et 1,001.
e) Que penser de $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$?
f) Interpréter graphiquement avec un grapheur.

Corrigé 20 Utiliser la calculatrice.

Exercice 21 Représenter graphiquement pour chaque cas deux fonctions f différentes telles que :

a) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ n'existe pas b) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = +\infty$ c) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -\infty$

 CC BY-SA

Corrigé 21 À vérifier avec l'enseignant.

Exercice 22 Calculer, si elles existent, les limites à gauche et à droite des fonctions suivantes lorsque x tend vers a.

a) $f(x) = \dfrac{3x-7}{x-2}, \quad a = 2$

b) $f(x) = \dfrac{5x}{(x+3)^3}, \quad a = -3$

c) $f(x) = \dfrac{-3x+2}{x+2}, \quad a = -2$

d) $f(x) = \dfrac{3x}{|1-x|}, \quad a = 1$

e) $f(x) = \dfrac{-x^2+3x+5}{x^2}, \quad a = 0$

f) $f(x) = \dfrac{x^2+3x+5}{x^2+2x}, \quad a = -2$

g) $f(x) = |2x-10|, \quad a = 5$

h) $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x^2-1}, \quad a = -1$

Corrigé 22

a) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$

e) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

f) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$

g) $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = 0$ $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = 0$

h) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$

Exercice 23 Calculer les limites suivantes et interpréter graphiquement les résultats :

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x^2-7x}{x}$

c) $\lim\limits_{u\to 2} \dfrac{u^2-4}{u^2-5u+6}$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+3x^2-2x-2}{x^2-1}$

e) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-27}{x-3}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{x^2}$

Corrigé 23

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{x} = «\dfrac{0}{0}»$

On simplifie : $\dfrac{2x}{x} = 2$ pour $x \neq 0, \lim_{x\to 0} 2 = 2$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x^2-7x}{x} = «\dfrac{0-0}{0}» = «\dfrac{0}{0}»$ On factorise $\dfrac{x(5x-7)}{x} = 5x-7 \Rightarrow \lim_{x\to 0} 5x-7 = -7$

c) type $«\dfrac{0}{0}»$

$$\lim_{u\to 2} \frac{u^2-4}{u^2-5u+6} = \lim_{u\to 2} \frac{(u-2)(u+2)}{(u-2)(u-3)} \overset{x\neq 2}{=} \lim_{u\to 2} \frac{u+2}{u-3} = \frac{4}{-1} = -4$$

d) type $«\dfrac{0}{0}»$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+3x^2-2x-2}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)} \overset{x\neq 1,-1}{=} \lim_{x\to 1}(x+2) = 3$$

e) type $«\dfrac{0}{0}»$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3-27}{x-3} = \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{x-3} \overset{x\neq 3}{=} \lim_{x\to 3} x^2+3x+9 = 27$$

f) type $«\dfrac{0}{0}»$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2} \overset{x\neq 0}{=} \lim_{x\to 0} x = 0$$

Exercice 24 Calculer les limites suivantes en justifiant chaque étape.

a) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{-2}{2x+4}$ b) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x-2}{x^2-2x+1}$ c) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{3x-7}{x-2}$

d) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{-3x+2}{x+2}$ e) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{3x}{1-x^2}$ f) $\lim\limits_{x\to-3} \dfrac{5x}{x+3}$

Corrigé 24

a) Type «$\frac{1}{0}$» :

$\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{-2}{2x+4} \overset{\text{P4}}{=} \dfrac{-2}{\lim_{x\to-2}(2x+4)} \overset{\text{cor. 4}}{=} \dfrac{-2}{2\cdot(-2)+4} = \dfrac{-2}{-4+4} = «\dfrac{-2}{0}»$

$\lim\limits_{x\to-2^-} \dfrac{-2}{2x+4} = «\dfrac{-2}{0^-}» = +\infty$,

$\lim\limits_{x\to-2^+} \dfrac{-2}{2x+4} = «\dfrac{-2}{0^+}» = -\infty$ donc la limite n'existe pas.

b) Même justification que ci-dessus :

$\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x-2}{x^2-2x+1} = \dfrac{1-2}{1^2-2\cdot1+1} = «\dfrac{-1}{0}»$

Type «$\frac{1}{0}$» : on factorise : $x^2+2x-1=(x-1)^2$

$\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{x-2}{(x-1)^2} = «\dfrac{-1}{(0^-)^2}» = «\dfrac{-1}{0^+}» = -\infty$,

$\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{x-2}{(x-1)^2} = «\dfrac{-1}{(0^+)}» = -\infty$

donc $\lim_{x\to1} f(x) = -\infty$

c) Type «$\frac{1}{0}$» :$\lim\limits_{x\to2} \dfrac{3x-7}{x-2} = «\dfrac{6-7}{0}» = «\dfrac{-1}{0}»$

$\lim\limits_{x\to2^-} \dfrac{3x-7}{x-2} = «\dfrac{-1}{0^-}» = +\infty$,

$\lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{3x-7}{x-2} = «\dfrac{-1}{0^+}» = -\infty$

donc la limite n'existe pas.

d) Type «$\frac{1}{0}$» : $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{-3x+2}{x+2} = \dfrac{6+2}{0} = «\dfrac{8}{0}»$

$\lim\limits_{x\to-2^-} \dfrac{-3x+2}{x+2} = «\dfrac{8}{0^-}» = -\infty$,

$\lim\limits_{x\to-2^+} \dfrac{-3x+2}{x+2} = «\dfrac{8}{0^+}» = +\infty$

donc la limite n'existe pas.

e) Type «$\frac{1}{0}$» :$\lim\limits_{x\to1} \dfrac{3x}{1-x^2} = \dfrac{3}{1-1} = «\dfrac{3}{0}»$

$1-x^2 = -(x-1)(x+1)$, donc :

$\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{3x}{1-x^2} = «\dfrac{3}{-(0^-)(2)}» = -\infty$,

$\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{3x}{1-x^2} = «\dfrac{3}{-(0^+)(2)}» = +\infty$

donc la limite n'existe pas.

f) Type «$\frac{1}{0}$» : $\lim\limits_{x\to-3} \dfrac{5x}{x+3} = «\dfrac{-15}{0}»$

$\lim\limits_{x\to-3^-} \dfrac{5x}{x+3} = «\dfrac{-15}{0^-}» = +\infty$,

$\lim\limits_{x\to-3^+} \dfrac{5x}{x+3} = «\dfrac{-15}{0^+}» = -\infty$

donc la limite n'existe pas.

Exercice 25 Les fonctions

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x+1} \text{ et } g(x) = \frac{x^2-1}{(x+1)^2}$$

ne sont pas définies en $x=-1$. Peut-on attribuer une valeur à l'image de -1 pour que ces fonctions ainsi prolongées soient continue en $x=-1$. Esquissez les graphes de f et g.

Corrigé 25

- On factorise le numérateur : $x^2-1=(x-1)(x+1)$
- Donc :

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = x-1 \quad \text{pour } x \neq -1$$
$$g(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{x-1}{x+1} \quad \text{pour } x \neq -1$$

- Pour f : $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = (-1)-1=-2$, donc on peut définir $f(-1)=-2$ pour la rendre continue.
- Pour g : $\lim\limits_{x\to-1^-} g(x) = « \dfrac{-2}{0^-} » = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-1^+} g(x) = « \dfrac{-2}{0^+} » = -\infty$, donc la limite n'existe pas.
- Ainsi, seule f peut être prolongée continûment en $x=-1$. Si on appelle cette nouvelle fonction $\widetilde{f}$ on doit poser $\widetilde{f}(-1)=-2$.

Exercice 26 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2} & \text{si } x \neq 2, \\ c & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

pour $c \in \mathbb{R}$

a) Expliquez pourquoi cette fonction est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

b) Pour quelles valeurs de c la fonction est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Corrigé 26

a) Si $x \neq 2$, alors on peut simplifier l'expression de la fonction (division polynomiale) $f(x) = x^2 + 2x + 4$ qui est une expression polynomiale, donc continue.

b) f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Il faut à présent faire en sorte qu'elle soit continue en $x = 2$. Pour cela, on doit avoir $\lim_{x\to 2} f(x) = c$. On calcule la limite $\lim_{x\to 2} f(x) = 12$, donc pour $c = 12$.

Exercice 27 On s'intéresse à des fonctions telles que $f(3)$ n'existe pas et $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 5$.

a) Représenter graphiquement trois fonctions distinctes qui vérifient ces deux conditions.

b) Donner l'expression $f(x)$ d'une fonction f qui vérifie ces deux conditions.

Corrigé 27

a) À vérifier avec l'enseignant.

b) par exemple $x \mapsto \dfrac{5(x-2)(x-3)}{(x-3)}$.

Exercice 28 Calculer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2-\sqrt{x}}{4-x}$

b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{\sqrt{x+6}-3}$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x}{\sqrt{12-3x}-3}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2-x+1}}{x}$

e) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}$

 CC BY-SA

Corrigé 28

a) Type «$\frac{0}{0}$» :

$$\lim_{x\to4}\frac{2-\sqrt{x}}{4-x}$$
$$=\lim_{x\to4}\frac{2-\sqrt{x}}{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})}$$
$$\overset{x\neq4}{=}\lim_{x\to4}\frac{1}{2+\sqrt{x}}=\frac{1}{4}$$

b) Type «$\frac{0}{0}$» :

$$\lim_{x\to3}\frac{x-3}{\sqrt{x+6}-3}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)}{x+6-9}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)}{x-3}$$
$$\overset{x\neq3}{=}\lim_{x\to3}\sqrt{x+6}+3=6$$

c) Type «$\frac{0}{0}$» :

$$\lim_{x\to1}\frac{1-x}{\sqrt{12-3x}-3}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(1-x)(\sqrt{12-3x}+3)}{12-3x-9}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(1-x)(\sqrt{12-3x}+3)}{3(1-x)}$$
$$\overset{x\neq1}{=}\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{12-3x}+3}{3}=4$$

d) Type «$\frac{0}{0}$» :

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2-x+1}}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(x+1)-(x^2-x+1)}{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2-x+1})}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{-x^2+2x}{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2-x+1})}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{-x+2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}=1$$

e) Type «$\frac{0}{0}$» :

$$\lim_{x\to2}\frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}$$
$$=\lim\frac{(x-\sqrt{x+2})(\sqrt{4x+1}+3)}{4x+1-9}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-\sqrt{x+2})(\sqrt{4x+1}+3)}{4(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{(x^2-x-2)(\sqrt{4x+1}+3)}{4(x-2)(x+\sqrt{x+2})}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+1)(\sqrt{4x+1}+3)}{4(x-2)(x+\sqrt{x+2})}$$
$$\overset{x\neq2}{=}\lim_{x\to2}\frac{(x+1)(\sqrt{4x+1}+3)}{4(x+\sqrt{x+2})}$$
$$=\frac{3(\sqrt{9}+3)}{4(2+\sqrt{4})}=\frac{9}{8}$$

Exercice 29 Calculer les limites suivantes.

a) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^3-x^2+x-1}{x-1}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^4+x^3-x-3}{\sqrt{x-1}}$

Corrigé 29

a) Type «$\frac{0}{0}$» :

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-x^2+x-1}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+1)}{x-1}$$
$$\overset{x\neq1}{=}\lim_{x\to1}x^2+1=2$$

b) Type «$\frac{0}{0}$» :

$$\lim_{x\to1^+}\frac{x^4+x^3+x-3}{\sqrt{x-1}}$$
$$=\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x-1}(x^4+x^3+x-3)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x-1}(x-1)(x^3+2x^2+2x+3)}{x-1}$$
$$\overset{x\neq1^+}{=}\lim_{x\to1}\sqrt{x-1}(x^3+2x^2+2x+3)=0$$

Exercice 30 Calculer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to3^+} \dfrac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x-3}$ b) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{2}}{x-1}$ c) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{x-1}$

d) $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}-1}$ e) $\lim_{x\to-2^-} \dfrac{x+\sqrt{2-x}}{x+2}$

Corrigé 30

a) Type « $\frac{0}{0}$ » :

$$\lim_{x\to3^+} \frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x-3} = \lim_{x\to3^+} \frac{\sqrt{(x-1)(x-3)}}{x-3} = \lim_{x\to3^+} \frac{\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x-3}}{x-3} \overset{x\neq3}{=} \lim_{x\to3^+} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-3}^2}\cdot\sqrt{x-3} = \lim_{x\to3^+} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-3}} = +\infty$$

b) Type « $\frac{0}{0}$ » :

$$\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{2}}{x-1} = \lim_{x\to1} \frac{x^2+x-2}{(x-1)(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{2})} = \lim_{x\to1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{2})} \overset{x\neq1}{=} \lim_{x\to1} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

c) Type « $\frac{0}{0}$ » :

$$\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{x-1} = \lim_{x\to1} \frac{(x+3)-(3x+1)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1})} = \lim_{x\to1} \frac{-2(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1})} \overset{x\neq1}{=} \lim_{x\to1} \frac{-2}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

d) Type « $\frac{0}{0}$ » :

$$\lim_{x\to0^+} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}-1} = \lim_{x\to0^+} \frac{x(\sqrt{1+x^2}+1)}{1+x^2-1} = \lim_{x\to0^+} \frac{x(\sqrt{1+x^2}+1)}{x^2} = \lim_{x\to0^+} \frac{\sqrt{1+x^2}+1}{x} = +\infty$$

e) Type « $\frac{0}{0}$ » :

$$\lim_{x\to-2^-} \frac{x+\sqrt{2-x}}{x+2} = \lim_{x\to-2^-} \frac{x+\sqrt{2-x}}{x+2}\cdot\frac{x-\sqrt{2-x}}{x-\sqrt{2-x}} = \lim_{x\to-2^-} \frac{x^2-(2-x)}{(x+2)(x-\sqrt{2-x})} = \lim_{x\to-2^-} \frac{x^2+x-2}{(x+2)(x-\sqrt{2-x})} = \lim_{x\to-2^-} \frac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x-\sqrt{2-x})} \overset{x\neq-2}{=} \lim_{x\to-2^-} \frac{x-1}{x-\sqrt{2-x}} = \frac{-3}{-2-2} = \frac{3}{4}$$

Exercice 31 Calculer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\left(1+\dfrac{x}{2}\right)}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x^2-x}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$

Corrigé 31

a) Type « $\dfrac{0}{0}$ » :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\left(1+\frac{x}{2}\right)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}-\frac{1}{2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$$

b) Type « $\dfrac{0}{0}$ » :

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x^2-x}-\frac{2}{x^2-1}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x(x-1)}-\frac{2}{(x-1)(x+1)}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{(x+1)-2x}{x(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{-x+1}{x(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{-(x-1)}{x(x-1)(x+1)} \overset{x\neq 1}{=} \lim_{x\to 1}\frac{-1}{x(x+1)} = \frac{-1}{1\cdot 2} = -\frac{1}{2}$$

Exercice 32 Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2+1}}{x^2-1}$

c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-9x}{(4-x^2)^3}$ d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{(x^2-1)^2}$ e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-a}{x-a}$

f) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$ g) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-a^2}{x-a}$ h) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^3-a^3}{x-a}$

i) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1-\frac{1}{x}}{x-a}$ j) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+4}$ k) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{2x^2-6x}$

l) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-1)^2}{x^2+3x}$ m) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{2}}{x-1}$ n) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+2x-15}{x^2+8x+15}$

o) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+1}{(x+3)^2}$

Corrigé 32

a) Type « $\frac{0}{0}$ » :

$$\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3}$$
$$=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(\sqrt{2x-1}+3)}{(2x-1)-9}$$
$$=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(\sqrt{2x-1}+3)}{2(x-5)}$$
$$\stackrel{x\neq 5}{=}\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{2x-1}+3}{2}=\frac{3+3}{2}=3$$

b) Forme déterminée

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2+1}}{x^2-1}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{-1}$$
$$=1-\sqrt{3}$$

c) Type « $\frac{1}{0}$ » :

$+\infty$

d) Type « $\frac{0}{0}$ » :

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)^2}$$
$$\stackrel{x\neq 1}{=}\lim_{x\to 1}\frac{x-2}{x-1}$$
$$=\pm\infty \implies \nexists.$$

e) Type « forme déterminée » :

$$\lim_{x\to a}\frac{x-a}{x-a}=1$$

f) Type « $\frac{0}{0}$ » :

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

g) Type « $\frac{0}{0}$ » :

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x+a)}{x-a}$$
$$\stackrel{x\neq a}{=}\lim_{x\to a}x+a=2a$$

h) Type « $\frac{0}{0}$ » :

$$\lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{x-a}=\lim_{x\to a}x^2+ax+a^2=3a^2$$

i) Type « $\frac{0}{0}$ » :

$$\lim_{x\to a}\frac{1-\frac{1}{x}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x-1}{x(x-a)}$$

Si $a=0$, alors $-\infty$, si $a=1$, alors 1, autrement, non définie.

j) Type « $\frac{0}{0}$ » :

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)^2}$$
$$\stackrel{x\neq 2}{=}\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x-2}$$
$$=\pm\infty \implies \nexists$$

k) Type « $\frac{0}{0}$ » :

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{2x^2-6x}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-2)(x-3)}{2x(x-3)}$$
$$\stackrel{x\neq 3}{=}\lim_{x\to 3}\frac{x-2}{2x}=\frac{1}{6}$$

l) Type « forme déterminée » :

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x-1)^2}{x^2+3x}=\frac{4}{18}=\frac{2}{9}$$

m) Type « $\frac{0}{0}$ » :

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+2x-15}{x^2+8x+15}=\frac{(x-3)(x+5)}{(x+3)(x+5)}$$
$$\stackrel{x\neq 3}{=}\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x+3}=\frac{0}{6}=0$$

n) Type « $\frac{-2}{0^+}$ » :

$$\lim_{x\to -3}\frac{x+1}{(x+3)^2}$$
$$=-\infty$$

o) Type « $\frac{1}{0}$ » :

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+x-\sqrt{2}}}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-\sqrt{2}}{(x-1)\cdot\sqrt{x^2+x-\sqrt{2}}}$$
$$=\pm \implies \nexists$$

 CC BY-SA

Exercice 33 Calculer les limites suivantes et justifier les résultats obtenus.

a) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{|x-2|}{x^2-4}$ b) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{|x-2|}{x^2-4}$

Corrigé 33 a) $\nexists \quad (\pm\infty)$ b) $-\dfrac{1}{4}$

Exercice 34 Déterminer pour chaque cas l'expression algébrique $f(x)$ une fonction telle que :

a) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ n'existe pas b) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = +\infty$ c) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -\infty$

Justifier votre réponse. Y a-t-il plusieurs réponses possibles dans tous ces cas ?

Corrigé 34 * Oui, il y a plusieurs cas possibles. Sans justification.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ b) $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ c) $f(x) = -\dfrac{1}{(x-2)^2}$

1.2.2 Asymptotes verticales

Exercice 35 Déterminer les asymptotes verticales des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \dfrac{3x^4-5x}{x^2-1}$ b) $f(x) = \dfrac{5x^2-5x}{x^2-1}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{2x^2-4x}$ d) $f(x) = \dfrac{x^2+2x+3}{4-x^2}$

Corrigé 35 *

a) $x = 1$ et $x = -1$ b) $x = -1$ c) $x = 0$ d) $x = 2$ et $x = -2$

Exercice 36 Tracer le graphe d'une fonction réelle f satisfaisant simultanément toutes les conditions suivantes :

a) $f(2) = -4$
b) l'ensemble des antécédents de 1 est $\{5; 8\}$
c) l'ensemble des zéros de f est $\{-4; 7\}$
d) $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\infty$
e) f n'est pas définie en $x = -3$ et $\lim\limits_{x\to-3} f(x) = -2$
f) $f(1) = -5$ et $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ n'existe pas
g) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$

Corrigé 36 À vérifier avec l'enseignant.

1.3 Limites en l'infini

Exercice 37 Déterminer graphiquement :

a) $\lim\limits_{x\to -4} f(x)$

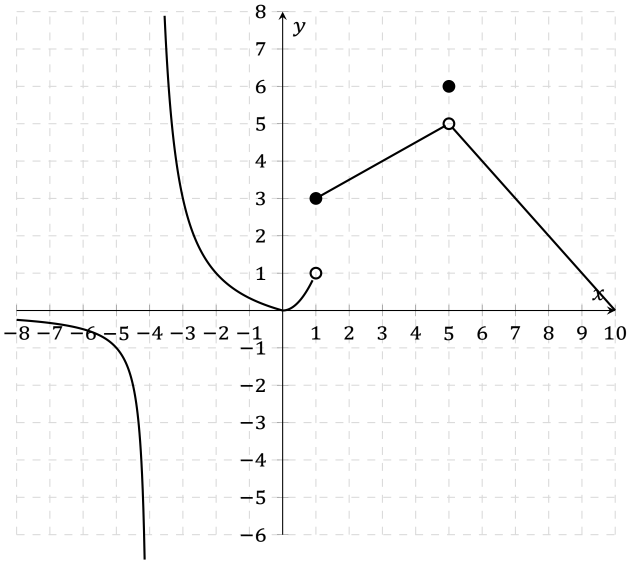
b) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

d) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

e) $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$

f) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$



Corrigé 37 a) $\nexists$ b) 3 c) 1 d) $\nexists$ e) 5 f) 0

Exercice 38 Calculer les limites suivantes et interpréter graphiquement les résultats :

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}(x^3-2x^2+5)$ b) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2}{x^3}$ c) $\lim\limits_{x\to +\infty}(x^4+2x)$

d) $\lim\limits_{x\to -\infty}(x^3-x^4)$ e) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-3}{x^2+5}$ f) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x^2+5}{1-3x^2}$

Corrigé 38 On utilise le formalisme de l'algèbre de l'infini.

a) Type « $+\infty - (+\infty)$ » :
$\lim_{x\to+\infty} (x^3 - 2x^2 + 5)$
$= \lim_{x\to+\infty} x^3 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^3}\right)$
$= (+\infty)^3 \cdot (1 - 0 + 0) = +\infty$

b) Type « $\frac{+\infty}{-\infty}$ » :
$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^3}$
$= \frac{1}{x}$
$= 0$

c) Type « $+\infty + \infty$ » :
$\lim_{x\to+\infty} (x^4 + 2x)$
$= +\infty$

d) Type « $-\infty - (+\infty)$ » :
$\lim_{x\to-\infty} (x^3 - x^4)$
$= \lim_{x\to-\infty} x^4 \left(\frac{1}{x} - 1\right)$
$= (+\infty) \cdot (0 - 1) = -\infty$

e) Type « $\frac{1}{+\infty}$ » :
$\lim_{x\to-\infty} \frac{-3}{x^2 + 5}$
$= 0$

f) Type « $\frac{+\infty}{-\infty}$ » :
$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 + 5}{1 - 3x^2}$
$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(3 + \frac{5}{x^2}\right)}{x^2\left(\frac{1}{x^2} - 3\right)}$
$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3 + 0}{0 - 3} = \frac{3}{-3} = -1$

Exercice 39 Calculer les limites suivantes en justifiant les résultats obtenus. Interpréter graphiquement.

a) $\lim_{x\to+\infty} (x^3 + 2x + 5)$

b) $\lim_{x\to-\infty} (x^4 - 2x)$

c) $\lim_{x\to-\infty} \frac{-3}{x^2 + 5}$

d) $\lim_{x\to0} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x^4}\right)$

e) $\lim_{x\to0} (x^3 + 2x + 5)$

f) $\lim_{x\to-\infty} (x^4 + 2x)$

g) $\lim_{x\to+\infty} (x^3 - x^4)$

h) $\lim_{x\to0} \frac{3x^2 + 5}{1 - 3x^2}$

i) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x}$

j) $\lim_{x\to+\infty} \frac{3 - x^2}{x^3}$

k) $\lim_{x\to-\infty} \left(3x - \sqrt{x^2 - x + 1}\right)$

Corrigé 39

a) $+\infty$ b) $+\infty$ c) 0 d) $+\infty$

e) 0 f) $+\infty$ g) $-\infty$ h) 5

i) $+\infty$ j) 0 k) $-\infty$

Exercice 40 Soient les fonctions f et g définies par

$$f(x) = x^2 + 2x + 1, \quad g(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2.$$

Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{g(x)}{f(x)}$ c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{g(x)}{f(x)}$ e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \big(f(x) - g(x)\big)$ f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)^3$

Corrigé 40 * On a $f(x) = (x+1)^2$ et $g(x) = (x+2)(x+1)(x-1)$.

a) $\nexists$ b) 0 c) 0 d) $+\infty$ e) $-\infty$ f) 0

Exercice 41 Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier :

a) Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x) + g(x)\big) = 0$.

b) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{h\to 0} f(2+h)$.

c) Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ avec $g(x) > 0$, alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.

Corrigé 41

a) Faux. Par exemple, si $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ et $g(x) = \dfrac{1}{x^4}$ alors
$\lim\limits_{x\to 0} -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^4} = \lim\limits_{x\to 0} -\dfrac{x^2}{x^4} + \dfrac{1}{x^4} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-x^2+1}{x^4} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-x)(1+x)}{x^4} = \dfrac{1}{\lim_{x\to 0} x^4} = +\infty$.

b) Vrai. Par le changement de variable $x = h + 2$, on a bien l'égalité désirée.

c) Vrai. On a déjà vu que si une limite du type « $\dfrac{1}{0}$ » existe, alors elle vaut $+\infty$ ou $-\infty$. Dans notre cas, le fait que $g(x) > 0$ garantit que la limite du quotient existe et donc que $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tend bien vers $+\infty$.

Exercice 42 Esquisser la représentation graphique d'une fonction f qui satisfait simultanément toutes les conditions ci-dessous :

a) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1$

b) $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = +\infty$

c) $f(0) = 2$ d) $-1 \notin \mathrm{D}_f$ et $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 2$

e) $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = +\infty$

Corrigé 42 À vérifier avec l'enseignant.

Exercice 43 Esquisser la représentation graphique d'une unique fonction f qui vérifie toutes les conditions ci-dessous :

a) $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-8; 1; 7\}$
b) $\mathrm{Z}_f = \{-2; 0; \pi\}$
c) $\lim\limits_{x \to -8} f(x) = 4$
d) $\lim\limits_{x \to 7^-} f(x) = -\infty$
e) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
f) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$
g) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$
h) $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = -5$

Corrigé 43 À vérifier avec l'enseignant.

Exercice 44 Représenter graphiquement une unique fonction f de votre choix qui vérifie toutes les conditions suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$
b) $f(-3) = -2$
c) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\infty$
d) $f(0) = 4$
e) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$
f) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$

Corrigé 44 À vérifier avec l'enseignant.

Exercice 45 Représenter graphiquement une unique fonction f de votre choix qui vérifie toutes les conditions suivantes :

a) $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2; 3\}$
b) $\mathrm{Z}_f = \{-3; 1; 5; 6\}$
c) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$
d) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$
e) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$
f) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 4$

Corrigé 45 À vérifier avec l'enseignant.

Exercice 46 Déterminer les asymptotes horizontales des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \dfrac{3x^4 - 5x}{x^2 + 1}$
b) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 5x}{x^2 + 1}$
c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 - 4x}$
d) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 3}{4 - x^2}$

Pourquoi parle-t-on d'asymptotes horizontales dans ces cas ?

Corrigé 46 a) $\emptyset$ b) $y = 3$ c) $y = \dfrac{1}{2}$ d) $y = -1$

Exercice 47 Représenter graphiquement une fonction qui ait 3 asymptotes verticales et une asymptote horizontale à $\pm\infty$.

Corrigé 47 À vérifier avec l'enseignant.

Exercice 48 Représenter graphiquement une fonction qui ait 2 asymptotes verticales, une asymptote horizontale à $-\infty$ et une autre asymptote horizontale à $+\infty$.

Corrigé 48 À vérifier avec l'enseignant.

Exercice 49 Déterminer les asymptotes de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^n + 3}{x^n - 1}$ pour $n = 0, 1, 2, 3$ et esquisser dans chaque cas un graphe de f cohérent avec les calculs effectués.

Corrigé 49

a) $n = 0$, asy. hor. en $\pm\infty$ $y = -3$

b) $n = 1$, asy. vert. en $x = 1$ et asy. hor. en $y = 1$

c) $n = 2$, asy. vert. en $x = -1$ et $x = 1$ et asy. hor. en $y = 1$

d) $n = 3$, asy. vert. en $x = 1$ et asy. hor. en $y = 1$

Exercice 50 Dans chacun des cas suivants, déterminer l'expression d'une fonction rationnelle répondant aux conditions données.

a) Une fonction rationnelle passant par le point $(0; 9)$ et ayant une asymptote horizontale en $y = 4$ et deux asymptotes verticales en $x = -1$ et $x = 2$.

b) Une fonction rationnelle passant par les points $(-3; 1)$ et $(-1; 0)$ et ayant une asymptote horizontale en $y = -3$ et trois asymptotes verticales en $x = 0$, $x = -4$ et $x = 5$.

Corrigé 50

a) Par exemple, $f(x) = \dfrac{4x^2 - 18}{(x+1)(x-2)}$

b) Par exemple, $f(x) = \dfrac{-3(x+1)(x-1)(x+2)}{x(x+4)(x-5)}$

Exercice 51 Déterminer, dans chacun des cas suivants, l'expression algébrique d'une fonction rationnelle avec une asymptote :

a) horizontale d'équation $y = -2$

b) verticale d'équation $x = 7$.

c) horizontale d'équation $y = 0$, deux verticales d'équations $x = 3$ et $x = -10$.

Justifier vos réponses en montrant que les conditions sont bien vérifiées.

Corrigé 51 Sans justification, par exemple :

a) $f(x) = \dfrac{-2x^2 + 1}{x^2}$

b) $f(x) = \dfrac{x}{x - 7}$

c) $f(x) = \dfrac{x}{(x-3)(x+10)}$

Exercice 52 Étudier la fonction rationnelle $f : x \mapsto \dfrac{-2x^2 - 19x - 44}{2x^2 + 14x + 24}$.

Déterminer son domaine de définition, les limites aux bornes de son domaine, ses asymptotes éventuelles, puis esquisser son graphe.

Corrigé 52 $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-4; -3\}$.

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1$
- $\lim_{x\to-4} f(x) = \dfrac{3}{2}$
- $\lim_{x\to-3^-} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-3^+} f(x) = -\infty$

La fonction f a pour asymptote horizontale $y = -1$ et pour asymptote verticale $x = -3$.

1.4 Limites de fonctions trigonométriques

Exercice 53 Calculer :

a) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sin(3x)}{3x}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sin(8x)}{10x}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to2} \frac{\sin(2x-4)}{8x-16}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{\sin(3x-3)}{9-9x}$ e) $\displaystyle\lim_{x\to-1} \frac{\sin(x^2-1)}{x^4-1}$

Corrigé 53 On utilise le théorème 10 pour chaque item.

a) 1

b)
$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to0} \frac{\sin(8x)}{10x}\\
&= \lim_{x\to0} \frac{\sin(8x)}{8x \cdot \frac{10}{8}}\\
&= \lim_{8x\to0} \frac{\sin(8x)}{8x} \cdot \frac{8}{10}\\
&= \frac{4}{5}
\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to2} \frac{\sin(2x-4)}{8x-16}\\
&= \lim_{x\to2} \frac{\sin(2x-4)}{4(2x-4)}\\
&= \lim_{2x-4\to0} \frac{\sin(2x-4)}{2x-4} \cdot \frac{1}{4}\\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to1} \frac{\sin(3x-3)}{9-9x}\\
&= \lim_{x\to1} \frac{\sin(3x-3)}{-3(3x-3)}\\
&= \lim_{3x-3\to0} \frac{\sin(3x-3)}{(3x-3)} \frac{1}{-3}\\
&= -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to-1} \frac{\sin(x^2+1)}{x^4-1}\\
&= \lim_{x\to-1} \frac{\sin(x^2-1)}{x^4-1}\\
&= \lim_{x\to-1} \frac{\sin(x^2-1)}{(x^2-1)(x^2+1)}\\
&= \lim_{x\to-1} \frac{\sin(x^2-1)}{(x^2-1)} \frac{1}{(x^2+1)}\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Exercice 54 Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(ax)}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(ax)}{\sin(bx)}, a,b \in \mathbb{R}, b \neq 0$

Corrigé 54

a) Si $a = 0$, alors la limite vaut 0. Autrement :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{\frac{ax}{a}} = \lim_{ax\to 0} \frac{\sin(ax)}{ax} \cdot a = a$$

b) On a $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ et $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(ax)}{x} = a$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(ax)}{\sin(bx)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{\cos(ax)\sin(bx)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{x}\frac{x}{\sin(bx)}\frac{1}{\cos(ax)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{x} \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(bx)} \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos(ax)} = a \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{1} = \frac{a}{b}$$

Exercice 55 Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos^2(x)+\sin(2x)-1}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin(x)}{\cos^2(x)}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^2(x)}{x\tan(x)}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin(x)}{1-\cos(x)}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin(x)}{1-\cos(x)}$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)}{x}$

Corrigé 55

a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos(x))(1+\cos(x))}{x^2(1+\cos(x))}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2(x)}{x^2(1+\cos(x))}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)}{x^2(1+\cos(x))}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos(x)}$$
$$=1^2\cdot\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{2}$$

b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2(x)+\sin(2x)-1}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2(x)-1}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2(x)}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin(x)}{x}\cdot\sin(x)+\lim_{x\to 0}2\cdot\frac{\sin(2x)}{2x}$$
$$=-1\cdot 0+2\cdot 1$$
$$=2$$

c)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin(x)}{\cos^2(x)}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin(x))(1+\sin(x))}{\cos^2(x)(1+\sin(x))}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2(x)}{\cos^2(x)(1+\sin(x))}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)(1+\sin(x))}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\sin(x)}$$
$$=\frac{1}{2}$$

d)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2(x)}{x\cdot\tan(x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)}{x\cdot\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\cdot\frac{\sin(x)}{\sin(x)}\cdot\cos(x)$$
$$=1\cdot 1\cdot 1=1$$

e)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\sin(x)}{1-\cos(x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\sin(x)}{2\cdot\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\cdot\frac{x^2}{2\cdot\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2$$
$$=1\cdot\frac{1}{2}\cdot 4=2$$

f) Type « $\frac{1}{0}$ » :

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos(x)}{x}=+\infty$$
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\cos(x)}{x}=-\infty$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{x}=\text{ n'existe pas}$$

Limites et continuité SECTION 2

Pistes pour réviser

- Quelles sont les trois conditions qu'une fonction doit satisfaire **simultanément** pour être continue en un point ? Donner des exemples de fonctions qui satisfont seulement deux des trois conditions.
- Quelle est la première étape à effectuer dans tout calcul de limite ?
- Une limite peut être déterminée ou indéterminée, en un nombre ou en l'infini. Donner des exemples de chacun de ces cas.
- Qu'est-ce qu'une indétermination ? Quels sont les différents cas, leurs particularités et les différentes manières de les lever ? Donner des exemples.
- Quelle technique a-t-on à diposition pour calculer une limite qui contient une expression littérale avec une racine ?
- Donner des conditions pour l'existence d'asymptotes verticales. Exemples.
- Donner des conditions pour l'existence d'asymptotes horizontales. Exemples.
- Quelles sont les deux façons qui ont étudiées pour calculer une limite trigonométrique ? Exemples.

Sources du cours

Les sources suivantes ont majoritairement été utilisées pour construire ce cours. Les exercices et activités proviennent également principalement de ces ouvrages. D'autres exercices ont été adaptés ou sont inspirés de ressources partagées par des collègues ou trouvées sur internet. Leur contribution mineure les exclut de cette liste.

[1] Saturnino L. Salas et Einar Hille. **Calculus : One and Several Variables**. 3^{e} éd. Wiley, 1984.

[2] Commission Romande de Mathématiques. **Analyse**. T. Monographies de la Commission Romande de Mathématique 30. CRM Éditions, 2024.

[3] Commission Romande de Mathématiques. **Fundamentum de mathématique Analyse**. T. Monographies de la Commission Romande de Mathématique 25. CRM Éditions, 2018.

[4] Association Sesamath Suisse Romande. **Sésamath – Troisième année de maturité gymnasiale**. 2022. url : `https://sesamath.ch/`.