Exercice 1 À partir de la définition de la dérivée de f en a, calculer les dérivées $f'(a)$ et interpréter graphiquement :

a) $f(x) = x^2$ avec $a = 1$ puis $a = 3$. b) $f(x) = x^3$ avec $a = 2$.

c) $f(x) = x$ avec $a = 2$ puis $a = 5$. d) $f(x) = 3$ avec $a = 2$ puis $a = 7$.

Corrigé 1

Correction générée par IA

Rappelons que la dérivée de f en a est définie par :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

a) Pour $f(x) = x^2$:

Pour $a = 1$:

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{2h + h^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (2 + h) \\ &= 2 \end{aligned}$$

Interprétation : La tangente au graphe de f au point $(1; 1)$ a une pente de 2.

Pour $a = 3$:

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{6h + h^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (6 + h) \\ &= 6 \end{aligned}$$

Interprétation : La tangente au graphe de f au point $(3; 9)$ a une pente de 6.

b) Pour $f(x) = x^3$ avec $a = 2$:

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^3 - 2^3}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{8 + 12h + 6h^2 + h^3 - 8}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{12h + 6h^2 + h^3}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (12 + 6h + h^2) \\ &= 12 \end{aligned}$$

Interprétation : La tangente au graphe de f au point $(2; 8)$ a une pente de 12.

c) Pour $f(x) = x$:

Pour $a = 2$:

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \to 0} \frac{(2+h) - 2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Pour $a = 5$:

$$\begin{aligned} f'(5) &= \lim_{h \to 0} \frac{(5+h) - 5}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Interprétation : La fonction $f(x) = x$ est une droite de pente 1, donc la tangente en tout point a une pente de 1.

d) Pour $f(x) = 3$ (fonction constante) :

Pour $a = 2$:

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \to 0} \frac{3 - 3}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Pour $a = 7$:

$$\begin{aligned} f'(7) &= \lim_{h \to 0} \frac{3 - 3}{h} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Interprétation : La fonction constante a une dérivée nulle en tout point, ce qui signifie que sa tangente est horizontale partout.