

Exercice 1

Déterminer le domaine de définition de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x - 4 + \sqrt{x^2 - 2}}$

Corrigé 1

Correction générée par IA

Pour déterminer le domaine de définition de $f(x) = \frac{1}{x - 4 + \sqrt{x^2 - 2}}$, nous devons identifier les valeurs de x pour lesquelles la fonction est définie.

Contraintes :

1. Le dénominateur ne doit pas être nul : $x - 4 + \sqrt{x^2 - 2} \neq 0$
2. L'expression sous la racine doit être positive ou nulle : $x^2 - 2 \geq 0$

Étude de la contrainte 2 :

$$x^2 - 2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 2 \Rightarrow |x| \geq \sqrt{2}$$

Donc $x \in]-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; +\infty[$.

Étude de la contrainte 1 :

Il faut trouver les valeurs de x pour lesquelles :

$$x - 4 + \sqrt{x^2 - 2} = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 2} = 4 - x$$

Pour que cette équation ait un sens, il faut que $4 - x \geq 0$, donc $x \leq 4$.

En élevant au carré (valable car les deux membres doivent être positifs) :

$$x^2 - 2 = (4 - x)^2 = 16 - 8x + x^2$$

$$-2 = 16 - 8x$$

$$8x = 18$$

$$x = \frac{18}{8} = \frac{9}{4}$$

Vérifions : pour $x = \frac{9}{4}$:

$$\sqrt{\left(\frac{9}{4}\right)^2 - 2} = \sqrt{\frac{81}{16} - \frac{32}{16}} = \sqrt{\frac{49}{16}} = \frac{7}{4}$$

Et :

$$\frac{9}{4} - 4 + \frac{7}{4} = \frac{9 + 7 - 16}{4} = 0$$

La valeur $x = \frac{9}{4}$ annule bien le dénominateur.

Domaine de définition :

En combinant les contraintes, le domaine est :

$$\mathcal{D}_f =]-\infty; -\sqrt{2}] \cup \left[\sqrt{2}; \frac{9}{4}\right[\cup \left[\frac{9}{4}; +\infty\right[$$