Exercice 1 On considère les fonctions données par : $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sin(x)$ et $h(x) = 4x^3 + 3$.

a) Donner l'image de x pour les fonctions suivantes :

i) $(f \circ h)(x)$;
ii) $(g \circ f)(x)$;
iii) $(g \circ h)(x)$;
iv) $(h \circ g)(x)$;
v) $(f \circ g \circ h)(x)$

b) Calculer la dérivée des fonctions $f \circ h, g \circ f, g \circ h, h \circ g$ et $f \circ g \circ h$.

Corrigé 1

Correction générée par IA

On a $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sin(x)$ et $h(x) = 4x^3 + 3$.

a) Images des fonctions composées :

i) $(f \circ h)(x) = f(h(x)) = f(4x^3 + 3) = \sqrt{4x^3 + 3}$
ii) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sin(\sqrt{x})$
iii) $(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(4x^3 + 3) = \sin(4x^3 + 3)$
iv) $(h \circ g)(x) = h(g(x)) = h(\sin(x)) = 4\sin^3(x) + 3$
v) $(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x))) = f(g(4x^3 + 3)) = f(\sin(4x^3 + 3)) = \sqrt{\sin(4x^3 + 3)}$

b) Dérivées des fonctions composées (en utilisant la règle de dérivation en chaîne $(u \circ v)' = (u' \circ v) \cdot v'$) :

Pour $f \circ h$:
$$\begin{aligned}(f \circ h)'(x) &= f'(h(x)) \cdot h'(x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{4x^3 + 3}} \cdot 12x^2 \\ &= \frac{12x^2}{2\sqrt{4x^3 + 3}} \\ &= \frac{6x^2}{\sqrt{4x^3 + 3}}\end{aligned}$$

Pour $g \circ f$:
$$\begin{aligned}(g \circ f)'(x) &= g'(f(x)) \cdot f'(x) \\ &= \cos(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

Pour $g \circ h$:
$$\begin{aligned}(g \circ h)'(x) &= g'(h(x)) \cdot h'(x) \\ &= \cos(4x^3 + 3) \cdot 12x^2 \\ &= 12x^2 \cos(4x^3 + 3)\end{aligned}$$

Pour $h \circ g$:
$$\begin{aligned}(h \circ g)'(x) &= h'(g(x)) \cdot g'(x) \\ &= 12\sin^2(x) \cdot \cos(x) \\ &= 12\sin^2(x)\cos(x)\end{aligned}$$

Pour $f \circ g \circ h$:
$$\begin{aligned}(f \circ g \circ h)'(x) &= f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\sin(4x^3 + 3)}} \cdot \cos(4x^3 + 3) \cdot 12x^2 \\ &= \frac{12x^2 \cos(4x^3 + 3)}{2\sqrt{\sin(4x^3 + 3)}} \\ &= \frac{6x^2 \cos(4x^3 + 3)}{\sqrt{\sin(4x^3 + 3)}}\end{aligned}$$