Exercice 1 On colle les côtés $[\mathrm{AB}]$ et $[\mathrm{DC}]$ d'un rectangle ABCD de périmètre donné pour former un cylindre ouvert. Quelle doit être la mesure de l'angle entre le côté $[\mathrm{AB}]$ et la diagonale $[\mathrm{AC}]$ pour que le volume du cylindre soit maximal ?

Corrigé 1 *Correction générée par IA*

Notons P le périmètre du rectangle ABCD, et α l'angle entre le côté $[\mathrm{AB}]$ et la diagonale $[\mathrm{AC}]$.
Si $\mathrm{AB} = x$ et $\mathrm{BC} = y$, alors le périmètre est $\mathrm{P} = 2(x+y)$, donc $x + y = \frac{\mathrm{P}}{2}$ (constante).
De plus, $\tan\alpha = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} = \frac{y}{x}$, donc $y = x\tan\alpha$.
En collant les côtés $[\mathrm{AB}]$ et $[\mathrm{DC}]$, on forme un cylindre :

- La circonférence de la base est $2\pi r = x$, donc $r = \frac{x}{2\pi}$
- La hauteur du cylindre est $h = y$

Le volume du cylindre est :

$$\mathrm{V} = \pi r^2 h = \pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 y = \frac{x^2 y}{4\pi}$$

Avec la contrainte $y = x\tan\alpha$ et $x + y = \frac{\mathrm{P}}{2}$, nous avons :

$$x + x\tan\alpha = \frac{\mathrm{P}}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\mathrm{P}}{2(1+\tan\alpha)}$$

$$y = \frac{\mathrm{P}}{2} - x = \frac{\mathrm{P}\tan\alpha}{2(1+\tan\alpha)}$$

Le volume devient :

$$\mathrm{V}(\alpha) = \frac{x^2 y}{4\pi} = \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{\mathrm{P}^2}{4(1+\tan\alpha)^2}\cdot\frac{\mathrm{P}\tan\alpha}{2(1+\tan\alpha)} = \frac{\mathrm{P}^3\tan\alpha}{32\pi(1+\tan\alpha)^3}$$

Pour maximiser V, posons $t = \tan\alpha$ et étudions :

$$f(t) = \frac{t}{(1+t)^3}$$

Dérivons :

$$f'(t) = \frac{(1+t)^3 - t\cdot 3(1+t)^2}{(1+t)^6} = \frac{(1+t)^2[(1+t) - 3t]}{(1+t)^6} = \frac{1-2t}{(1+t)^4}$$

L'annulation de la dérivée donne :

$$1 - 2t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{2}$$

Donc $\tan\alpha = \frac{1}{2}$, ce qui donne :

$$\alpha = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) \approx 26{,}57°$$

L'angle optimal est $\boxed{\alpha = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) \approx 26{,}57°}$.