Exercice 1 Soit la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

a) Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse 2.

b) En quel point la tangente au graphe de f a-t-elle une pente de $\dfrac{1}{4}$?

c) Déterminer les points de tangence des tangentes au graphe de f qui passent par le point $\left(\dfrac{1}{2}; 2\right)$.

Corrigé 1 On a $f(x) = \dfrac{1}{x^2} = x^{-2}$, donc $f'(x) = -2x^{-3} = -\dfrac{2}{x^3}$.

a) Pour $x = 2$, on a $f(2) = \dfrac{1}{4}$ et $f'(2) = -\dfrac{2}{8} = -\dfrac{1}{4}$.
L'équation de la tangente est :

$$y = -\frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{4} \iff y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$$

b) On cherche a tel que $f'(a) = \dfrac{1}{4}$. Pour $a \neq 0$:

$$-\frac{2}{a^3} = \frac{1}{4} \quad \Longrightarrow \quad a^3 = -8 \quad \Rightarrow \quad a = -2$$

Le point de tangence est $\left(-2; \dfrac{1}{4}\right)$.

c) Soit a l'abscisse du point de tangence. L'équation de la tangente en ce point est :

$$y = -\frac{2}{a^3}(x-a) + \frac{1}{a^2}$$

Cette tangente passe par $\left(\dfrac{1}{2}; 2\right)$, donc :

$$2 = -\frac{2}{a^3}\left(\frac{1}{2} - a\right) + \frac{1}{a^2} \iff 2 = -\frac{1}{a^3} + \frac{3}{a^2}$$

En multipliant par a^3 $(a \neq 0)$:

$$2a^3 = -1 + 3a \quad \Rightarrow \quad 2a^3 - 3a + 1 = 0$$

Par factorisation : $(a-1)(2a^2 + 2a - 1) = 0$.
Donc $a = 1$ ou $a = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{4} = \dfrac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$.
Les points de tangence sont : $(1{,}1)$, $\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}; \dfrac{4}{4-2\sqrt{3}}\right)$ et $\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}; \dfrac{4}{4+2\sqrt{3}}\right)$.