Exercice 1 À 10 kilomètres de votre maison, vous vous rappelez avoir oublié de fermer un robinet, ce qui vous coûte 40 centimes par heure. En roulant à une vitesse constante de s kilomètres par heure, le coût du carburant est de $8 + \dfrac{s}{20}$ centimes par kilomètre. À quelle vitesse devez-vous faire l'aller et retour pour minimiser les frais totaux ?

Corrigé 1 *Correction générée par IA*

Notons s la vitesse en km/h. La distance totale de l'aller-retour est $2 \times 10 = 20$ km.
Le temps nécessaire pour l'aller-retour est :

$$t = \frac{20}{s} \text{ heures}$$

Coût du robinet : Pendant ce temps, le robinet ouvert coûte 40 centimes par heure, donc :

$$\text{Coût robinet} = 40t = \frac{800}{s} \text{ centimes}$$

Coût du carburant : Le coût par kilomètre est $8 + \frac{s}{20}$ centimes, donc pour 20 km :

$$\text{Coût carburant} = 20\left(8 + \frac{s}{20}\right) = 160 + s \text{ centimes}$$

Coût total :

$$\mathrm{C}(s) = \frac{800}{s} + 160 + s$$

Pour minimiser le coût, nous dérivons par rapport à s :

$$\mathrm{C}'(s) = -\frac{800}{s^2} + 1$$

L'annulation de la dérivée donne :

$$-\frac{800}{s^2} + 1 = 0$$
$$\frac{800}{s^2} = 1$$
$$s^2 = 800$$
$$s = \sqrt{800} = 20\sqrt{2} \approx 28{,}28 \text{ km/h}$$

Vérifions qu'il s'agit bien d'un minimum :

$$\mathrm{C}''(s) = \frac{1600}{s^3} > 0$$

pour $s > 0$, donc nous avons bien un minimum.
La vitesse optimale est $\boxed{20\sqrt{2} \approx 28{,}28 \text{ km/h}}$.
Le coût minimal est alors :

$$\mathrm{C}(20\sqrt{2}) = \frac{800}{20\sqrt{2}}+160+20\sqrt{2} = \frac{40}{\sqrt{2}}+160+20\sqrt{2} = 20\sqrt{2}+160+20\sqrt{2} = 40\sqrt{2}+160 \approx 216{,}57 \text{ centimes}$$