Exercice 1 Dérivez les fonctions suivantes :

a) $f(x) = \dfrac{1}{\sin(x)}$

b) $f(x) = \tan(x) \cdot \cos(x)$

c) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{1 + \cos(x)}$

d) $f(x) = \dfrac{\sin(x) - 1}{2\sin(x) + 1}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{\sin(x) \cdot \cos(x)}$

f) $f(x) = \sin^2(x)$

g) $f(x) = \sin(2x)$

h) $f(x) = \sin^3(4x)$

i) $f(x) = \sin\left(\left(\dfrac{2x - 1}{x}\right)^2\right)$

Corrigé 1

a) $f(x) = \dfrac{1}{\sin(x)} = \sin(x)^{-1}$

En utilisant la dérivée d'une puissance et la règle de la chaîne :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -1 \cdot \sin(x)^{-2} \cdot \cos(x) \\ &= -\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} \\ &= -\frac{1}{\tan(x) \cdot \sin(x)} \end{aligned}$$

b) $f(x) = \tan(x) \cdot \cos(x)$

En utilisant la règle du produit :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \tan'(x) \cdot \cos(x) + \tan(x) \cdot \cos'(x) \\ &= \frac{1}{\cos^2(x)} \cdot \cos(x) + \tan(x) \cdot (-\sin(x)) \\ &= \frac{1}{\cos(x)} - \tan(x) \cdot \sin(x) \\ &= \frac{1}{\cos(x)} - \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \cdot \sin(x) \\ &= \frac{1}{\cos(x)} - \frac{\sin^2(x)}{\cos(x)} \\ &= \frac{1 - \sin^2(x)}{\cos(x)} \\ &= \frac{\cos^2(x)}{\cos(x)} = \cos(x) \end{aligned}$$

c) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{1 + \cos(x)}$

En utilisant la règle du quotient :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sin'(x) \cdot (1 + \cos(x)) - \sin(x) \cdot (1 + \cos(x))'}{(1 + \cos(x))^2} \\ &= \frac{\cos(x) \cdot (1 + \cos(x)) - \sin(x) \cdot (-\sin(x))}{(1 + \cos(x))^2} \\ &= \frac{\cos(x) + \cos^2(x) + \sin^2(x)}{(1 + \cos(x))^2} \\ &= \frac{\cos(x) + 1}{(1 + \cos(x))^2} \\ &= \frac{1}{1 + \cos(x)} \end{aligned}$$

d) $f(x) = \dfrac{\sin(x) - 1}{2\sin(x) + 1}$

En utilisant la règle du quotient :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\sin(x) - 1)' \cdot (2\sin(x) + 1) - (\sin(x) - 1) \cdot (2\sin(x) + 1)'}{(2\sin(x) + 1)^2} \\ &= \frac{\cos(x) \cdot (2\sin(x) + 1) - (\sin(x) - 1) \cdot 2\cos(x)}{(2\sin(x) + 1)^2} \\ &= \frac{2\sin(x)\cos(x) + \cos(x) - 2\sin(x)\cos(x) + 2\cos(x)}{(2\sin(x) + 1)^2} \\ &= \frac{3\cos(x)}{(2\sin(x) + 1)^2} \end{aligned}$$

e) $f(x) = \dfrac{1}{\sin(x) \cdot \cos(x)}$

En utilisant la règle du quotient (ou du produit avec des puissances négatives) :

$$f'(x) = \frac{0 \cdot (\sin(x)\cos(x)) - 1 \cdot (\sin(x)\cos(x))'}{(\sin(x)\cos(x))^2}$$