

Exercice 1

Des mesures répétées d'une grandeur inconnue x ont donné les résultats suivants : $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$. Montrer que la somme des carrés des écarts $(x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \dots + (x - x_n)^2$ sera minimale si l'on estime x par la moyenne des mesures $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$.

Corrigé 1

Correction générée par IA

Notons $S(x) = \sum_{i=1}^n (x - x_i)^2$ la somme des carrés des écarts.

Développons cette expression :

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{i=1}^n (x - x_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (x^2 - 2xx_i + x_i^2) \\ &= nx^2 - 2x \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{aligned}$$

Pour minimiser $S(x)$, nous dérivons par rapport à x :

$$S'(x) = 2nx - 2 \sum_{i=1}^n x_i$$

L'annulation de la dérivée donne :

$$\begin{aligned} 2nx - 2 \sum_{i=1}^n x_i &= 0 \\ nx &= \sum_{i=1}^n x_i \\ x &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \end{aligned}$$

Vérifions qu'il s'agit bien d'un minimum en calculant la dérivée seconde :

$$S''(x) = 2n > 0$$

La dérivée seconde est positive, donc nous avons bien un minimum.

Conclusion : La somme des carrés des écarts $(x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \dots + (x - x_n)^2$ est minimale lorsque x est égal à la moyenne arithmétique des mesures :

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

Ce résultat justifie l'utilisation de la moyenne comme meilleur estimateur d'une grandeur à partir de mesures répétées, au sens des moindres carrés.