

Exercices – Premier semestre

Table des matières

1	Calcul numérique	2
1.1	Nombres premiers	2
1.2	Division euclidienne	3
1.3	Périodiques	5
1.4	Racines	5
2	Ensembles et intervalles	7
2.1	Ensembles de nombres	7
2.2	Ensembles quelconques	9
2.3	Intervalles réelles	11
3	Calul littéral	15
3.1	Traduire un énoncé	15
3.2	Isoler une variable	16
3.3	L'algèbre comme outil de preuve	20
3.4	Développer et réduire	21
3.5	Identités remarquables	24
3.6	Factorisation	26
4	Équations	30
4.1	Équations du premier degré	30
4.2	Théorème du produit nul	33
4.3	Complétion du carré	33
4.4	Formule du discriminant	34
4.5	Résolutions générales d'équations	34
4.6	Résolution de problèmes	36
4.7	Équations bicarrées	38
4.8	Équations irrationnelles	39
4.9	Systèmes d'équations	39
4.10	Résolution de problèmes	44

Calcul numérique

1.1 Nombres premiers

Exercice 1


Calculer de tête, le plus simplement et rapidement possible (environ 3 minutes pour l'ensemble de l'exercice) :

1M-fttde

a) $2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$

b) $2^3 \cdot 7 \cdot 5^3$

c) $2^4 \cdot 5^2$

d) $2^3 \cdot 5^4$

e) $2^5 \cdot 5^5 \cdot 7$

f) $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

g) $2^4 \cdot 5^4 \cdot 11$

h) $2^6 \cdot 5^3$

i) $2^4 \cdot 5^6$

j) $2^3 \cdot 5^3 \cdot 7^2$

k) $2^4 \cdot 3 \cdot 5^2$

l) $2^6 \cdot 3 \cdot 5^8$

Corrigé 1

a) $2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 = 600$

b) $2^3 \cdot 7 \cdot 5^3 = 7000$

c) $2^4 \cdot 5^2 = 400$

d) $2^3 \cdot 5^4 = 5000$

e) $2^5 \cdot 5^5 \cdot 7 = 700000$

f) $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$

g) $2^4 \cdot 5^4 \cdot 11 = 110000$

h) $2^6 \cdot 5^3 = 8000$

i) $2^4 \cdot 5^6 = 250000$

j) $2^3 \cdot 5^3 \cdot 7^2 = 49000$

k) $2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 = 1200$

l) $2^6 \cdot 3 \cdot 5^8 = 75000000$

Exercice 2


Décomposer les nombres suivants en produit de facteurs premiers (sans calculatrice) :

1M-b23hy

a) 10

b) 10^2

c) 100000

d) $24 \cdot 1000$

e) $38 \cdot 10^5$

f) 25000

g) 28000

h) 66000

i) 16000

j) 3600000

Corrigé 2

On utilise surtout la décomposition de $10 = 2 \cdot 5$ et donc que $10^n = 2^n \cdot 5^n$.

a) $10 = 2 \cdot 5$

b) $10^2 = 2^2 \cdot 5^2$

c) $100000 = 2^5 \cdot 5^5$

d) $24 \cdot 1000 = 2^6 \cdot 3 \cdot 5^3$

e) $38 \cdot 10^5 = 2^6 \cdot 5^5 \cdot 19$

f) $25000 = 5^5 \cdot 2^3$

g) $28000 = 2^5 \cdot 5^3 \cdot 7$

h) $66000 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 11$

i) $16000 = 2^7 \cdot 5^3$

j) $3600000 = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^5$

Exercice 3


Leonhard EULER énonça en 1772 : « Le nombre $n^2 + n + 41$ est premier pour $n \leq 39$. » ($n \in \mathbb{N}$)

1M-11mx3

a) Vérifier son affirmation pour $0 \leq n \leq 6$ en contrôlant dans la liste de la page 2 du cours.

b) (*) Montrer que $n^2 + n + 41$ n'est premier ni pour 41 ni pour 40, sans calculer la valeur du nombre pour 40 ni 41 et sans la liste, mais uniquement par factorisation.

Corrigé 3

Pour $n = 0$ on obtient 41.

Pour $n = 1$ on obtient 43.

Pour $n = 2$ on obtient 47.

Pour $n = 3$ on obtient 53.

Pour $n = 4$ on obtient 61.

Pour $n = 5$ on obtient 71.

Pour $n = 6$ on obtient 83.

Exercice 4


Quel est le chiffre des unités du nombre 8^{2024} ?
(*) ...Et celui des dizaines ?!

1M-4sun4

Corrigé 4

1.2 Division euclidienne

Exercice 5

Déterminer l'écriture décimale des nombres suivants.

a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{9}$

c) $\frac{14}{13}$

d) $\frac{2}{17}$

Exercice 6

On considère les fractions

1M-wv9bq

$$\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}$$

- i) Trouver l'écriture décimale exacte de ces nombres à l'aide d'une calculatrice.
- ii) Remarquer qu'en plus d'avoir les même chiffres 1,4,2,8,5,7, ceux-ci sont toujours dans cet ordre de gauche à droite. Par exemple, pour 2, on commence par lire 2, 8, 5, 7, puis on revient au début avec 1, 4. (On dit que les chiffres de la période sont cycliques.)
- iii) Les fractions dont le dénominateur est 23 ont les mêmes propriétés. Au lieu d'avoir une période cyclique de 6 chiffres, elles en ont 22. À l'aide d'une calculatrice uniquement (sans poser la division), trouver les 22 décimales de la période de $\frac{22}{23}$.

Corrigé 5

a) $\frac{1}{7} = 0,142857; \frac{2}{7} = 0,285714; \frac{3}{7} = 0,428571; \frac{4}{7} = 0,571428; \frac{5}{7} = 0,714285; \frac{6}{7} = 0,857142$.

b) À remarquer.

c) $\frac{22}{23} = 0,9565217391304347826086$

Exercice 7

1M-cc78t

Sur les multiples de 3 :

- i) Trouver le plus grand multiple de 3, formé de cinq chiffres et terminant par 24.
- ii) Trouver le plus petit multiple de 3, formé de quatre chiffres et terminant par 24.
- iii) Trouver le plus petit multiple de 3, formé de quatre chiffres pairs distincts.
- iv) Trouver le plus grand multiple de 3, formé de quatre chiffres impairs distincts.

Corrigé 6

On note un nombre à cinq chiffres

$$a + b \cdot 10 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10^3 + e \cdot 10^4 \quad \text{où } a, b, c, d, e \in \mathbb{N}, e \neq 0$$

Si le nombre a quatre chiffres, alors on prend $e = 0$ et $d \neq 0$.

- a) On a $a = 4$ et $b = 2$. Par ailleurs la somme $a + b + c + d + e$ doit être divisible par 3 pour que le nombre soit un multiple de 3. On a $2 + 4 = 6$ qui est déjà un multiple de 3. Le nombre recherché est donc 99924.
- b) Le nombre recherché est 1224.
- c) Le nombre recherché est 2046.
- d) Le nombre recherché est 9753.

Exercice 8

Donner l'ensemble des diviseurs pour chacun des entiers allant de 1 à 10, sous la forme habituelle :

1M-vrjk9

$$\text{Div}_1 = \{1\}; \quad \text{Div}_2 = \{1; 2\}; \quad \text{Div}_3 = \{1; 3\}; \quad \dots; \quad \text{Div}_{10} = \dots$$

- i) Relever la liste des entiers de 1 à 10 qui ont un nombre impair de diviseurs :
 - i) Pouvez-vous trouver un point commun à ces entiers, ou leur nom ?
 - ii) Donner la liste des quinze premiers nombres entiers qui ont cette caractéristique.
- ii) Relever la liste des entiers de 1 à 10 qui ont exactement deux diviseurs :
 - i) Pouvez-vous trouver un point commun à ces entiers, ou leur nom ?
 - ii) Donner la liste des nombres entiers inférieurs à 50 qui ont cette caractéristique.

Corrigé 7**Exercice 9**

En effectuant (à la main) une division, donner l'écriture décimale des nombres rationnels suivants :

1M-nwgzm

a) $\frac{421}{20}$

b) $\frac{92}{30}$

c) $\frac{30}{7}$

d) $\frac{62}{11}$

Corrigé 8

1.3 Périodiques

Exercice 10



1M-vssbc



Transformer chaque nombre rationnel en fraction irréductible.

- a) 0,35 b) $0,\overline{35}$ c) $0,\overline{349}$ d) $0,\overline{349}$ e) $0,\overline{35}$
 f) $0,\overline{349}$ g) $1,\overline{2}$ h) 3,25 i) 15% j) 1,004
 k) $0,\overline{80}$ l) 0,16 m) $2,\overline{9}$ n) $3,\overline{141}$

Corrigé 9

- a) $\frac{35}{100} = \frac{7}{20}$ b) $\frac{35}{99}$ c) $\frac{349}{999}$ d) $\frac{3}{10} + \frac{49}{990} = \frac{173}{495}$
 e) $\frac{3}{10} + \frac{5}{90} = \frac{32}{90} = \frac{16}{45}$ f) $\frac{34}{100} + \frac{9}{900} = \frac{7}{20}$. g) $1 + \frac{2}{9} = \frac{11}{9}$ h) $\frac{325}{100} = \frac{13}{4}$
 Noter que $0,\overline{9} = 1$ et que $0,0\overline{9} = 0,01$.
 i) $\frac{15}{100} = \frac{3}{20}$ j) $1 + \frac{4}{10000} = \frac{251}{250}$ k) $\frac{80}{99}$ l) $\frac{16}{100} = \frac{4}{25}$
 m) 3 n) $3 + \frac{141}{999} = \frac{1046}{333}$

Exercice 11



1M-xgk9e

Entre 1 et 2, trouver trois nombres...

- a) rationnels à développement décimal fini;
 b) rationnels à développement décimal infini périodique;
 c) irrationnels.

Donner si possible l'écriture fractionnaire irréductible.

Corrigé 10

- a) $\frac{12}{10}; \frac{13}{10}; \frac{14}{10};$ b) $1,\overline{1} = \frac{10}{9}; \frac{11}{9}; \frac{12}{9};$ c) $\sqrt{2}; \sqrt{3}; \frac{\sqrt{5}}{2}.$

1.4 Racines

Exercice 12



1M-hv2ug

Calculer.

- a) $2\sqrt{12} + 3\sqrt{75} - 4\sqrt{27}$ b) $\sqrt{162} + \sqrt{20} + \sqrt{50} - \sqrt{80}$
 c) $(1 - \sqrt{3})(1 + \sqrt{3})$ d) $(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2$
 e) $2(\sqrt{3})^4 - 5(\sqrt{3})^3 - 4(\sqrt{3})^2 + 8\sqrt{3} - 1$ f) $(1 + \sqrt{5})^3$
 g) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{15}$ h) $\frac{\sqrt{20} \cdot \sqrt{27} \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{105}}$

Corrigé 11

- a) $7\sqrt{3}$ b) $14\sqrt{2} - 2\sqrt{5}$ c) -2 d) $5 - 2\sqrt{6}$
 e) $5 - 7\sqrt{3}$ f) $16 + 8\sqrt{5}$ g) $20\sqrt{3}$ h) 6

Exercice 13

1M-ksh26

Montrer que a est égal à b dans les cas suivants :

a) $a = \frac{1}{\sqrt{2}} ; b = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $a = \frac{1}{\sqrt{27}} ; b = \frac{\sqrt{3}}{9}$

c) $a = \frac{2 + \sqrt{8}}{2} ; b = 1 + \sqrt{2}$

d) $a = \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} ; b = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{3}$

Corrigé 12

On utilise principalement la multiplication par l'expression conjuguée.

Exercice 14

1M-9f4t8

Calculer.

a) $\frac{7}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$

b) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7} - 2} - \frac{2}{\sqrt{7} + 2}$

c) $\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} - \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}$

d) $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} - \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$

Corrigé 13

a) $\frac{4\sqrt{5} - 10\sqrt{2}}{3}$

b) $\frac{11}{3}$

c) $-2\sqrt{3}$

d) $-2\sqrt{15}$

Exercice 15

1M-f3sg7

Calculer.

a) $\sqrt{\frac{3}{4}} + \sqrt{\frac{49}{12}}$

b) $\frac{1}{2}\sqrt{75} + \sqrt{\frac{4}{27}} - 7\sqrt{12}$

c) $2\sqrt{5} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{5}} + \frac{1}{20}\sqrt{45}$

d) $\frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{7}} - \sqrt{5} - \sqrt{7}$

Corrigé 14

a) $\frac{5}{\sqrt{3}}$

b) $\frac{203}{6\sqrt{3}}$

c) $\frac{41}{4\sqrt{5}}$

d) $\frac{1}{3\sqrt{2}}$

Exercice 16

1M-rp8cc

Développer le carré: $(3+2\sqrt{2})^2$. En déduire une autre écriture pour $\sqrt{17 + 12\sqrt{2}}$.**Corrigé 15**

Ensembles et intervalles

2.1 Ensembles de nombres

Exercice 17


1M-nj317

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- | | | |
|--|--|--|
| a) $0 \in \mathbb{R}_+$ | b) $-2 \in]-2; 5]$ | c) $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ |
| d) $3 \in \{2; 4\}$ | e) $3 \in]2; 4[$ | f) $3 \notin \mathbb{R} \setminus]2; 3[$ |
| g) $[0; 2024] \cap \mathbb{R}_- = \emptyset$ | h) $\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ | i) $\mathbb{N} \setminus \mathbb{Z} = \emptyset$ |

Corrigé 16

- | | | |
|------------------------------------|-------------------------------|--------------------------|
| a) Vrai | b) Faux, semi-ouvert à gauche | c) Vrai |
| d) Faux, ce n'est pas l'intervalle | e) Vrai | f) Faux, il y appartient |
| g) Faux, 0 est dans l'intersection | h) Vrai | i) Vrai |

Exercice 18


1M-j1x1v

 (*) Trouver dix fractions irréductibles distinctes et appartenant toutes à l'intervalle $]\frac{1}{3}; \frac{2}{3}[$, sans l'aide d'une calculatrice. (Classez-les dans l'ordre croissant.)

Corrigé 17
Exercice 19


1M-hggjf

Pour chaque nombre, simplifier et donner les ensembles de nombres auxquels il appartient.

- | | | | |
|--|--|--|---|
| a) $\frac{3-7}{2}$ | b) $\frac{4}{4-1}$ | c) $2,5 : 3 + 1$ | d) $\frac{2^0}{1^2}$ |
| e) $(\sqrt{2} - 1) : 2$ | f) $\frac{3-\sqrt{9}}{\pi}$ | g) $\sqrt{3 \cdot 27}$ | h) $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{12}}{\sqrt{27}}$ |
| i) $\sqrt{\sqrt{25} - \frac{3}{\sqrt{9}}}$ | j) $\frac{14}{\sqrt{25} - \sqrt{144}}$ | k) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{81} - \frac{16}{2}}$ | l) $\frac{5 - \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 5}$ |

Corrigé 18

- | | |
|--|--|
| a) $\frac{3-7}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \in \mathbb{Z}$ | b) $\frac{4}{4-1} = \frac{4}{3} \in \mathbb{Q}$ |
| c) $2,5 : 3 + 1 = \frac{25}{30} + 1 = \frac{5}{6} + 1 = \frac{11}{6} \in \mathbb{Q}$ | d) $\frac{2^0}{1^2} = \frac{1}{1} = 1 \in \mathbb{N}$ |
| e) $(\sqrt{2} - 1) : 2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ | f) $\frac{3-\sqrt{9}}{\pi} = \frac{3-3}{\pi} = 0 \in \mathbb{N}$ |
| g) $\sqrt{3 \cdot 27} = \sqrt{81} = 9 \in \mathbb{N}$ | h) $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{12}}{\sqrt{27}} = \frac{\sqrt{3} - 2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \frac{1-2}{3} = -\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ |
| i) $\sqrt{\sqrt{25} - \frac{3}{\sqrt{9}}} = \sqrt{5 - \frac{3}{3}} = \sqrt{4} = 2 \in \mathbb{N}$ | j) $\frac{14}{\sqrt{25} - \sqrt{144}} = \frac{14}{5-12} = \frac{14}{-7} = -2 \in \mathbb{Z}$ |
| k) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{81} - \frac{16}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{9-8} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} \in \mathbb{R}$ | l) $\frac{5 - \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 5} = \frac{5 - \sqrt{3}}{-(5 - \sqrt{3})} = -1 \in \mathbb{Z}$ |

Exercice 20

Compléter le tableau suivant en indiquant par une croix chacun des ensembles auquel le nombre donné appartient.

1M-w1wsu

	N	Z	Q	R	aucun
$\frac{3}{2}$					
$\frac{3,14}{0,01}$					
$\sqrt{7}$					
$\frac{2 - \sqrt{8}}{\sqrt{2} - 1}$					
$\sqrt{9}$					
π					
$-\sqrt{100}$					

Corrigé 19

	N	Z	Q	R	aucun
$\frac{3}{2}$			X	X	
$\frac{3,14}{0,01}$	X	X	X	X	
$\sqrt{7}$				X	
$\frac{2 - \sqrt{8}}{\sqrt{2} - 1}$		X	X	X	
$\sqrt{9}$	X	X	X	X	
π				X	
$-\sqrt{100}$		X	X	X	

Exercice 21

Donner tous les ensembles parmi \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} et \mathbb{R} au(x)quel(s) appartient chacun des nombres suivants :

1M-cbh7d

$$\frac{2}{7}; \sqrt{100}; \sqrt{200}; \pi + 1; -\sqrt{1,21}; 3,14 \cdot 10^5; -\frac{17}{2}.$$

Corrigé 20

2.2 Ensembles quelconques

Exercice 22



1M-k8f2j

Énumérer les éléments des ensembles suivants.

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 2n - 1, n \in \mathbb{N}, n \leq 5\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \text{ et } n < 10\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x = 0\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 2 = 0\}$

e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2 = 0\}$

f) $F = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2 = 0\}$

Corrigé 21

Exercice 23



1M-tr635

Décrire les ensembles suivants en donnant une condition d'appartenance.

a) $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$

b) $B = \{1; 4; 9; 16; 25; \dots; 169\}$

c) $C = \{1; 4; 7; 10; 13; 16; 19\}$

d) $D = \left\{ \frac{1}{2}; \frac{1}{5}; \frac{1}{10}; \frac{1}{17}; \frac{1}{26} \right\}$

e) $E = \left\{ 0; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}; \frac{3}{5}; \frac{2}{3}; \frac{5}{7}; \dots \right\}$

f) $F = \{1; 2; 4; 8; 16; \dots; 1024\}$

Corrigé 22

Exercice 24



1M-p6w7q

Décrire les ensembles suivants à l'aide d'intervalles.

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 5\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 < x < 5\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 10\}$

e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2 \text{ et } x \leq 2\}$

f) $F = \mathbb{R}$

g) $G = \{2\}$

Corrigé 23

Exercice 25



1M-ew4z2

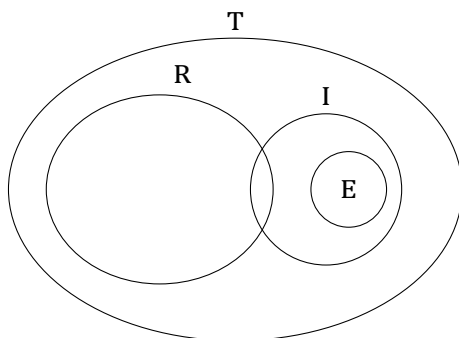
Dans l'ensemble T des triangles, on considère I, le sous-ensemble des triangles isocèles; E, le sous-ensemble des triangles équilatéraux; R, le sous-ensemble des triangles rectangles

a) Représenter ces quatre ensembles à l'aide d'un diagramme.

b) Décrire par des mots les ensembles $I \cap E$, $R \cap E$ et $I \cap R$.

Corrigé 24

- a) La taille des diagrammes n'est pas représentative b) de la « taille » des ensembles.



- $I \cap E = E$, car l'ensemble des triangles équilatéraux est contenu dans l'ensemble de triangles isocèles.
- $R \cap E = \emptyset$, car il n'existe aucun triangle qui est équilatéral et rectangle (par le théorème de Pythagore, si $a \in \mathbb{R}_+^*$ est la longueur du côté du triangle, alors $a^2 + a^2 \neq a^2$).
- $I \cap R$ est l'ensemble des triangles dont les deux cathètes mesurent $a \in \mathbb{R}_+^*$ et l'hypoténuse mesure $a\sqrt{2}$ (par Pythagore).

Exercice 26

1M-fq51r

Déterminer les intervalles suivants où $A =]-2; 3]$, $B = [0; 4[$ et $C =]-\infty; 2]$:

- | | | | |
|---------------|---------------|--------------------|--------------------|
| a) $A \cup B$ | b) $A \cap B$ | c) $A \setminus B$ | d) $B \setminus A$ |
| e) $A \cup C$ | f) $A \cap C$ | g) $A \setminus C$ | h) $C \setminus A$ |
| i) $B \cup C$ | j) $B \cap C$ | k) $B \setminus C$ | l) $C \setminus B$ |

Corrigé 25**Exercice 27**

1M-rm8qy

Déterminer les éléments des sous-ensembles A et B de E sachant que:

$$E \setminus A = \{f; g; h; i\}, \quad A \cup B = \{a; b; c; d; e; f\} \quad \text{et} \quad A \cap B = \{d; e\}$$

Corrigé 26**Exercice 28**

1M-zm8w4

Décrire les ensembles suivants par une condition d'appartenance (comme dans l'énoncé de l'activité 4).

- | | |
|---|-----------------------------|
| a) $\{\dots; -3; -1; 1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; \dots\}$ | c) $\{1; 4; 9; 25; \dots\}$ |
| b) $\{0; 2; 4; 6; 8; \dots\}$ | |
| d) (*) $\left\{0; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}; \frac{3}{5}; \frac{2}{3}; \frac{5}{7}; \dots\right\}$ | |

Corrigé 27

- | | | |
|---------------------------------------|-----------------------------------|--------------------------------------|
| a) $\{2n + 1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ | b) $\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ | c) $\{n^2 \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ |
|---------------------------------------|-----------------------------------|--------------------------------------|

Exercice 29

1M-krq84

Enumérer les éléments des ensembles suivants (donnés par une condition) :

$$\{2n - 3 \mid n \in \mathbb{N} \text{ et } n \leq 5\} \quad \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\} \quad \left\{\frac{n-1}{n^2+n} \mid n \in \mathbb{N}^* \text{ et } n < 6\right\}$$

Corrigé 28

Exercice 30

1M-s2efz

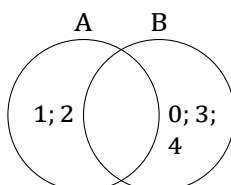
Dans chaque cas, trouver A et B, deux sous-ensembles de \mathbb{Z} tels que:

- a) $A \cup B = \{0; 1; 2; 3; 4\}$ et $A \cap B = \emptyset$
- b) $A \cup B = \{0; 1; 2; 3; 4\}$ et $A \cap B = \{2; 3; 4\}$
- c) $A \cup B = \{0; 1; 2; 3; 4\}$ et $A \setminus B = \{2; 3; 4\}$
- d) $A \cup B = \{0; 1; 2; 3; 4\}$ et $B \setminus A = \{1; 4\}$

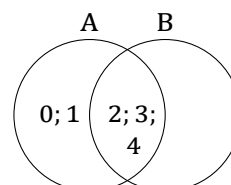
Corrigé 29

Il y a plusieurs réponses possibles.

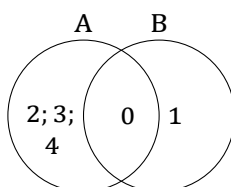
a) $A = \{1; 2\}$ et $B = \{0; 3; 4\}$



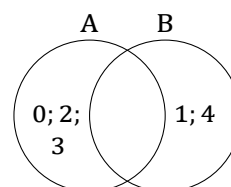
b) $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$ et $B = \{2; 3; 4\}$



c) $A = \{0; 2; 3; 4\}$ et $B = \{0; 1\}$



d) $A = \{0; 2; 3\}$ et $B = \{1; 4\}$

**Exercice 31**

1M-d5xp3

- a) Soient A et B les deux ensembles suivants : $A = \{-5; 3; 4; 6; 8; 9\}$ et $B = \{2; 3; 4; 8; 10\}$.

Déterminer $A \cup B$, $A \cap B$, $B \setminus A$ et $A \setminus B$.

- b) Trouver les ensembles C et D puis E et F sachant que :

$$C \cup D = \{1; 2; 3; 4; 5\}, C \cap D = \{2; 3; 4\}, 1 \notin D \setminus C \text{ et } 5 \notin C \setminus D$$

$$E \cup F = \{2; 3; 4; 5\} \text{ et } E \cap F = \{2; 4\}$$

Donner toutes les possibilités.

Corrigé 30**2.3 Intervalles réelles****Exercice 32**

1M-v2rv8

Représenter graphiquement les intervalles suivants:

- a) $[0; 2]$
- b) $] - 3; 3[$
- c) $] - \infty; -4[$
- d) $] - 2; -1[\cup [0; +\infty[$
- e) $] - \infty; 0[\cup [1; 3]$
- f) $] \pi; 4] \cap [7; +\infty[$

Corrigé 31

Exercice 33

On donne trois intervalles I, J et K de \mathbb{R} . Déterminer $I \cap J, I \cap K, I \setminus (J \cup K), (I \setminus J) \cup (I \setminus K)$ dans les cas suivants :

1M-ht3h6

- a) $I =]-3; 4]$ $J =]-2; 0[$ $K = [-5; 3[$
 b) $I = [-4; 2[$ $J =]-2; 3]$ $K = [-3; 1[$
 c) $I = [-5; 3[$ $J = [-1; 5[$ $K =]-3; 4]$

Corrigé 32**Exercice 34**

Déterminer les intervalles suivants où $A = [1; 5]$, $B = [0; +\infty[$ et $C =]-3; 3]$:

1M-u14s6

- | | | | |
|---------------|---------------|--------------------|--------------------|
| a) $A \cup B$ | b) $A \cap B$ | c) $A \setminus B$ | d) $B \setminus A$ |
| e) $A \cup C$ | f) $A \cap C$ | g) $A \setminus C$ | h) $C \setminus A$ |
| i) $B \cup C$ | j) $B \cap C$ | k) $B \setminus C$ | l) $C \setminus B$ |

Corrigé 33**Exercice 35**

Trouver dans chaque intervalle: $] -4; -3[;]\frac{1}{4}; \frac{1}{3}[;]10^{-4}; 10^{-3}[$:

1M-9k125

- a) deux nombres rationnels, l'un à partie décimale finie et l'autre à partie décimale infinie périodique (les donner sous forme de fraction irréductible);
 b) un nombre irrationnel.

Corrigé 34**Exercice 36**

On donne trois sous-intervalles de \mathbb{R}

1M-mrvd7

$$I = [-3; 4[, J = [-2; 0[\text{ et } K =]-5; 3].$$

Donner à l'aide d'intervalles : $I \cap J, I \cup K, I \cap K, I \setminus K$ et $K \setminus I$.

Corrigé 35

- | | |
|---|---|
| a) $I \cap J = [-3; 4[\cap [-2; 0[= [-2; 0[$ | b) $I \cup K = [-3; 4[\cup]-5; 3] =]-5; 4[$ |
| c) $I \cap K = [-3; 4[\cap]-5; 3] = [-3; 3]$ | d) $I \setminus K = [-3; 4[\setminus]-5; 3] =]3; 4[$ |
| e) $K \setminus I =]-5; 3] \setminus [-3; 4[=]-5; -3[$ | |

Exercice 37

1M-6ugwm

Donner l'écriture mathématique des intervalles suivants:

a)



b)



c)



d)

**Corrigé 36****Exercice 38**

1M-drcdb

Quel est le nombre réel situé à égale distance des bornes de l'intervalle $[\sqrt{27}; \sqrt{75}]$?

(Réponse sous forme simplifiée; s'il s'agit d'une racine carrée: de quel entier ?)

Corrigé 37**Exercice 39**

1M-czc9e

Décrire les ensembles de réels suivants à l'aide d'intervalles:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 2\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 > x\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -2 \text{ et } x \leq 4\}$

e) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{3}{2} < x \leq -\frac{1}{2}\right\}$

f) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1 + \sqrt{2}\}$

g) \mathbb{R}

h) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x \geq 4\}$

Corrigé 38

a) $[-3; 2]$

b) $[3; +\infty[$

c) $] -\infty; -1[$

d) $] -2; 4]$

e) $] -\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}]$

f) $] -\infty; 1 + \sqrt{2}]$

g) $] -\infty; +\infty[$

h) $] -\infty; -2[\cup [4; +\infty[$

Exercice 40

1M-p2cxv

Partie 1

Passer de l'écriture en intervalle à l'écriture ensembliste et vice versa.

- a) $\dots = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 4\}$ b) $\dots = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -0,5\}$
 c) $] -\infty; -2] = \{ \dots \}$ d) $] -1; -0,5[= \{ \dots \}$

Partie 2Donner les sous-ensembles de \mathbb{R} suivants à l'aide d'intervalles uniquement :

- a) $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ b) $\mathbb{R} \setminus [2; 3]$
 c) $\mathbb{R} \setminus]-1; 6[$ d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -5 \text{ ou } x \geq 2\}$

Corrigé 39**Exercice 41**

1M-nw439

Décrire par des inéquations les intervalles suivants:

- a) $] -\infty; -3]$ b) $] -2; +\infty[$
 c) $[0; 2]$ d) $] -3; 3[$
 e) $] -5; -4[$ f) $] -2; -1[\cup [0; +\infty[$
 g) $] -\infty; 0[\cup [1; 3]$ h) $] -\infty; 4] \cup [7; +\infty[$

Corrigé 40**Exercice 42**

1M-61ve6

Traduire les inéquations suivantes sous forme d'un intervalle.

- a) $x \leq 2$ b) $x > 3$
 c) $x \geq -1$ d) $x < 0$ et $x \leq 2$
 e) $x \leq 1$ ou $x > 3$ f) $x \geq 2$ et $x < 4$
 g) $x \geq 0$ ou $x \leq -2$ h) $x \geq 1$ et $x \leq 3$

Corrigé 41

Calcul littéral

3.1 Traduire un énoncé

Exercice 43


1M-bvvy

Traduire chaque phrase par une équation, puis résoudre.

- a) « Le triple du nombre x vaut 2 de plus que x . »
- b) « La somme de x et de 3 vaut 2 de moins que le double de x . »
- c) « Le double d'un nombre dépasse ses deux tiers de 10. »
- d) « Si l'on soustrait le dixième de x au quart de x on obtient 2 de moins que x . »
- e) « Si l'on retranche 5 du triple de x , on obtient la moitié de la somme de 3 et de x . »

Corrigé 42

- a) $3x = x + 2, S = \{1\}$
- b) $x + 3 = 2x - 2, S = \{5\}$
- c) $2x = \frac{2}{3}x + 10, S = \left\{\frac{15}{2}\right\}$
- d) $\frac{x}{4} - \frac{x}{10} = x - 2, S = \left\{\frac{40}{17}\right\}$
- e) $3x - 5 = \frac{x + 3}{2}, S = \left\{\frac{13}{5}\right\}$

Exercice 44


1M-3qa3k

Un rectangle possède une largeur de $a > 3$ et une longueur de $a + 4$ avec le longueurs données en cm. On lui enlève un carré de 3 cm de côté. Donner l'expression algébrique réduite de l'aire de la figure restante.

Corrigé 43
Exercice 45


1M-a3tr3

En utilisant la lettre n pour désigner un entier quelconque, exprimer sous forme littérale :

- a) trois entiers consécutifs;
- b) le carré d'un entier impair quelconque;
- c) un nombre positif, différence des carrés de deux nombres entiers consécutifs;
- d) un multiple de 7;
- e) un entier qui laisse un reste de 2 lorsqu'on le divise par 3 ;
- f) un entier qui précède immédiatement un multiple de 4 ;
- g) trois carrés parfaits consécutifs;
- h) un nombre pair.

Corrigé 44

3.2 Isoler une variable

Exercice 46



1M-kdgn

Dans chaque cas, exprimer x en fonction de y ou y en fonction de x .

Exemple

$$3x - 2y = 4$$

$$-2y = -3x + 4$$

$$y = \frac{-3}{-2}x + \frac{4}{-2}$$

$$y = \frac{3}{2}x - 2$$

On isole y On soustrait $3x$ On divise par -2

On réduit

a) $x + 3y = 7$

b) $4x - y = 9$

c) $2y = 3x - 5$

d) $x + 2y = 5$

e) $x - 6y = 8$

f) $2x + y = 10$

g) $6x - y = 12$

h) $2x - 5y = -15$

i) $6x + 3y = -24$

j) $2x - 3y = 30$

k) $10x - 4y = 70$

l) $4x - y = 8$

m) $2x + 3y = 6$

n) $5x - 2y = 0$

o) $2x + 3(y + 2) = 10$

Corrigé 45

a) $x = 7 - 3y$

b) $y = 4x - 9$

c) $y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$

d) $x = 5 - 2y$

e) $x = 8 + 6y$

f) $y = 10 - 2x$

g) $y = 6x - 12$

h) $x = \frac{5}{2}y - \frac{15}{2}$

i) $y = -2x - 8$

j) $y = \frac{2}{3}x - 10$

k) $y = \frac{5}{2}x - \frac{35}{2}$

l) $y = 4x - 8$

m) $y = -\frac{2}{3}x + 2$

n) $y = \frac{5}{2}x$

o) $y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$

Exercice 47



1M-n66ke

Exprimer la variable demandée en fonction des autres variables présentes dans la formule.

a) $v = \frac{d}{t}$

$d = ?$

$t = ?$

b) $P = 2(a + b)$

$b = ?$

c) $A = \frac{(B + b)}{2}h$

$h = ?$

$B = ?$

d) $E = mgh$

$h = ?$

e) $P = f \frac{m_1 m_2}{m_3}$

$m_1 = ?$

$m_3 = ?$

f) $\frac{n_1}{n_2} = \frac{z_1 z_4}{z_2 z_3}$

$z_1 = ?$

$n_2 = ?$

g) $A = \frac{a + b}{2}h$

$a = ?$

$h = ?$

h) $V = \frac{\pi d^2}{4}h$

$h = ?$

Corrigé 46

i) $v = \frac{d}{t}$

Isolons d :

$d = ?$

$t = ?$

$$v = \frac{d}{t}$$

$$v \cdot t = d$$

 $\cdot t$
 d est isolé
Isolons t :

$$v = \frac{d}{t}$$

$$v \cdot t = d$$

$$t = \frac{d}{v}$$

 $\cdot t$
 $\div v$
 t est isolé

ii) $P = 2(a + b)$

Isolons b :

$b = ?$

$$P = 2(a + b)$$

$$\frac{P}{2} = a + b$$

$$\frac{P}{2} - a = b$$

 $\div 2$
 $-a$
 b est isolé

iii) $A = \frac{(B + b)}{2}h$

Isolons h :

$h = ?$

$B = ?$

$$A = \frac{(B + b)}{2}h$$

$$A \cdot \frac{2}{B + b} = h$$

$$\frac{2A}{B + b} = h$$

 $\cdot \frac{2}{(B + b)}$
réduire
 h est isolé
Isolons B :

$$A = \frac{(B + b)}{2}h$$

$$\frac{A}{h} = \frac{(B + b)}{2}$$

$$\frac{2A}{h} = B + b$$

$$\frac{2A}{h} - b = B$$

 $\div h$
 $\cdot 2$
 $-b$
 B est isolé

iv) $E = mgh$

$h = ?$

$$E = mgh$$

$$\frac{E}{mg} = h$$

 $\div mg$
 $= h$ est isolé

v) $P = f \frac{m_1 m_2}{m_3}$

Isolons m_1 :

$m_1 = ?$

$m_3 = ?$

$$P = f \frac{m_1 m_2}{m_3}$$

$$\frac{P}{f} = \frac{m_1 m_2}{m_3}$$

$$\frac{P}{f} \cdot \frac{m_3}{m_2} = m_1$$

$$\frac{P m_3}{f m_2} = m_1$$

 $\div f$
 $\cdot \frac{m_3}{m_2}$
réduire
 m_1 est isolé
Isolons m_3 (on reprend la formule où m_1 est isolé):

$$\frac{P m_3}{f m_2} = m_1$$

$$\frac{P m_3}{f m_2} = \frac{m_1}{1}$$

$$m_3 = \frac{m_1}{P} \cdot f m_2$$

$$m_3 = \frac{f m_1 m_2}{P}$$

 $\div P$
 $\cdot f m_2$
réduire
 m_3 est isolé

Exercice 48

1M-2yzxt

Exprimer la variable demandée en fonction des autres variables présentes dans la formule.

$$\text{a) } V = \frac{h}{6} (B_1 + B_2 + 4M) \quad h = ? \quad M = ?$$

$$\text{b) } D_r = \frac{D}{1 + A_r B_r} \quad D = ? \quad A_r = ?$$

$$\text{c) } P = Q \frac{R - r}{2R} \quad r = ?$$

$$\text{d) } G = \frac{kR_a}{R_i + R_a} \quad R_i = ?$$

$$\text{e) } A = \frac{F + S_\alpha}{S_\alpha} \quad F = ?$$

$$\text{f) } \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad R = ? \quad R_1 = ?$$

Corrigé 47

i) $V = \frac{h}{6}(B_1 + B_2 + 4M)$

$h = ?$

$M = ?$

Isolons h :

$$\begin{array}{l|l} V = \frac{h}{6}(B_1 + B_2 + 4M) & \div (B_1 + B_2 + 4M) \\ \frac{V}{B_1 + B_2 + 4M} = \frac{h}{6} & \cdot 6 \\ \frac{6V}{B_1 + B_2 + 4M} = h & h \text{ est isolé} \end{array}$$

Isolons M :

$$\begin{array}{l|l} V = \frac{h}{6}(B_1 + B_2 + 4M) & \cdot \frac{6}{h} \\ \frac{6V}{h} = B_1 + B_2 + 4M & -B_1 - B_2 \\ \frac{6V}{h} - B_1 - B_2 = 4M & \div 4 \\ \frac{\frac{6V}{h} - B_1 - B_2}{4} = M & M \text{ est isolé} \end{array}$$

ii) $D_r = \frac{D}{1 + A_r B_r}$

$D = ?$

$A_r = ?$

Isolons D :

$$\begin{array}{l|l} D_r = \frac{D}{1 + A_r B_r} & \cdot (1 + A_r B_r) \\ D_r \cdot (1 + A_r B_r) = D & D \text{ est isolé} \end{array}$$

Isolons A_r (on reprend la dernière formule du point précédent):

$$\begin{array}{l|l} D_r \cdot (1 + A_r B_r) = D & \div D_r \\ 1 + A_r B_r = \frac{D}{D_r} & -1 - B_r \\ A_r = \frac{\frac{D}{D_r} - 1 - B_r}{B_r} & A_r \text{ est isolé} \end{array}$$

iii) $P = Q \frac{R - r}{2R}$

$r = ?$

Isolons r :

$$\begin{array}{l|l} P = Q \frac{R - r}{2R} & \div Q \\ \frac{P}{Q} = \frac{R - r}{2R} & \cdot 2R \\ \frac{P \cdot 2R}{Q} = R - r & -R \\ \frac{\frac{P \cdot 2R}{Q} - R}{-1} = -r & \cdot (-1) \\ -\frac{2PR}{Q} = r & r \text{ est isolé} \end{array}$$

iv) $G = \frac{kR_a}{R_i + R_a}$

$R_i = ?$

Isolons R_i :

$$\begin{array}{l|l} G = \frac{kR_a}{R_i + R_a} & \cdot (R_i + R_a) \\ G(R_i + R_a) = kR_a & \div G \\ R_i + R_a = \frac{kR_a}{G} & -R_a \\ R_i = \frac{kR_a}{G} - R_a & R_a \text{ est isolé} \end{array}$$

v) $A = \frac{F + S_\alpha}{S_\alpha}$

$F = ?$

Isolons F :

$$\begin{array}{l|l} A = \frac{F + S_\alpha}{S_\alpha} & \cdot S_\alpha \\ AS_\alpha = F + S_\alpha & -S_\alpha \\ AS_\alpha - S_\alpha = F & \end{array}$$

A

3.3 L'algèbre comme outil de preuve

Exercice 49


Prouver que la somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est un nombre impair.

1M-sxya4

Corrigé 48

Un nombre pair a s'écrit $a = 2n$ pour $n \in \mathbb{N}$, un nombre impair b s'écrit $b = 2m + 1$ pour $m \in \mathbb{N}$. On a

$$a + b = 2n + 2m + 1 = 2(n + m) + 1 = 2k + 1 \text{ avec } k = n + m$$

et donc $a + b$ est bien un nombre impair.

Exercice 50


Parmi les égalités suivantes, lesquelles sont toujours vraies? lesquelles toujours fausses? lesquelles parfois vraies parfois fausses?

1M-wanr

a) $5 + 5 = 5^2$

b) $x + x = x^2$

c) $x + x = 2x$

d) $(x + 1)^3 = x^3 + 1^3$

e) $0 \cdot x = 1$

f) $x^2 \cdot x^2 \cdot x^2 = 3x^2$

g) $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$

h) $0 \cdot x = 0$

Corrigé 49

a) jamais

b) parfois

c) toujours

d) parfois

e) jamais

f) parfois

g) toujours

h) toujours

Exercice 51


Prouver que la somme de deux entiers impairs quelconques est un nombre pair.

1M-jxa81

Corrigé 50
Exercice 52


(*) Pour quels entiers x de 1 à 200 le nombre $x^4 - x^3$ est-il le cube d'un entier?

1M-u38hd

Corrigé 51
Exercice 53


L'égalité suivante est-elle valide :

$$(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2) = x^4 + 4?$$

1M-5xg9e

Corrigé 52

On vérifie en développant :

$$(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2) = x^4 + 4 = x^4 - 2x^3$$

Exercice 54

1M-rdppe

On considère l'identité suivante, appelée égalité de Lagrange (mathématicien du XVI^e siècle):

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

- Démontrer cette identité.
- Appliquer cette identité à quatre entiers (par exemple 2,3,4,5) en utilisant la calculatrice.

Corrigé 53**3.4 Développer et réduire****Exercice 55**

1M-n86nn

Développer et réduire.

- | | | |
|-------------------------|---------------------------|---------------------------|
| a) $5(5 + 3x)$ | b) $2x(2x^2 - 2x)$ | c) $-5(-5y + 9)$ |
| d) $-1(-3x - 3)$ | e) $(x^2 + x - 1)(-1)$ | f) $-2(x + y)$ |
| g) $(1 + x^2)(x^2 - 4)$ | h) $-3x^2(1 - 2x^2 + 3x)$ | i) $(5 + 3x)(x - 1)$ |
| j) $3xy(x^2y + x - 1)$ | k) $(4 - x^2)(1 - 4x^2)$ | l) $(-4xy^3 - x^3y)(-3y)$ |
| m) $-2(x + 3)(x - 1)$ | n) $3(x - 3)(x - 3)$ | o) $(-2x + 3)(x - 1)$ |
| p) $(-2x + 3)(3 - 2x)$ | | |

Corrigé 54

- | | | | |
|---------------------|----------------------------|-----------------------|-------------------------|
| a) $15x + 25$ | b) $4x^3 - 4x^2$ | c) $25y - 45$ | d) $3x + 3$ |
| e) $-x^2 - x + 1$ | f) $-2x - 2y$ | g) $x^4 - 3x^2 - 4$ | h) $6x^4 - 9x^3 - 3x^2$ |
| i) $3x^2 + 2x - 5$ | j) $3x^3y^2 + 3x^2y - 3xy$ | k) $4x^4 - 17x^2 + 4$ | l) $3x^3y^2 + 12xy^4$ |
| m) $-2x^2 - 4x + 6$ | n) $3x^2 - 18x + 27$ | o) $-2x^2 + 5x - 3$ | p) $4x^2 - 12x + 9$ |

Exercice 56

1M-akwq5

Développer à l'aide d'une identité remarquable, directement et rapidement (sans copier l'énoncé, ne pas s'accorder plus de 5').

- | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|---------------------------|
| a) $(x + y)^2$ | b) $(2x^2 + 2)(2x^2 - 6)$ | c) $(x - y)(x + y)$ |
| d) $(3x + y)^2$ | e) $(x^2 + y^3)^2$ | f) $(x - 1)^2$ |
| g) $(1 - x)(1 + x)$ | h) $(4x - 3)^2$ | i) $(x^3 + 3y)(x^3 - 3y)$ |
| j) $(3z - 2)^2$ | k) $(1 - x)^2$ | l) $(xy + 2y)^2$ |
| m) $(x^2 - 1)^2$ | n) $(2x + 2)^2$ | o) $(2a + 3)(2a + 3)$ |
| p) $(xyz + 5)(xyz - 5)$ | q) $(3x^3 - 5)^2$ | r) $(a + 3b)(a + 3b)$ |
| s) $(x^2 - 1)(x^2 - 1)$ | t) $(4a^2b - 5)(4a^2b + 5)$ | |
| u) $(2xy^3 - 1)(2xy^3 - 1)$ | | v) $(x^4 + y)(x^4 + y)$ |
| w) $(1 - ax^4)(1 + ax^4)$ | x) $(x^2 + a^2)(x^2 - a^2)$ | |

Corrigé 55

- a) $x^2 + 2xy + y^2$ b) $4x^4 - 4x^2 - 12$ c) $x^2 - y^2$ d) $9x^2 + 6xy + y^2$
 e) $x^4 + 2x^2y^3 + y^6$ f) $x^2 - 2x + 1$ g) $1 - x^2$ h) $16x^2 - 24x + 9$
 i) $x^6 - 9y^2$ j) $9z^2 - 12z + 4$ k) $x^2 - 2x + 1$ l) $x^2y^2 + 4xy^2 + 4y^2$
 m) $x^4 - 2x^2 + 1$ n) $4x^2 + 8x + 4$ o) $4a^2 + 12a + 9$ p) $x^2y^2z^2 - 25$
 q) $9x^6 - 30x^3 + 25$ r) $a^2 + 6ab + 9b^2$ s) $x^4 - 2x^2 + 1$ t) $16a^4b^2 - 25$
 u) $4x^2y^6 - 4xy^3 + 1$ v) $x^8 + 2x^4y + y^2$ w) $1 - a^2x^8$ x) $x^4 - a^4$

Exercice 57

1M-sj5q7

Développer les expressions suivantes.

- a) $4 \cdot x + 1 \cdot (3x - 1) \cdot (5x - 1) + 7 \cdot x$ b) $(5x - 1) \cdot (5x - 1) + 7(5x - 1)$
 c) $(4x - 1)(3x - 4)(3x + 4) - 1$ d) $((3x - 4)(3x + 4) - x + 1)x$
 e) $(3x - 1)(x - 1) + (4x - 1)(3x - 4)$ f) $x^2 - x^2(4x - 1)(3x - 4)x^2$

Corrigé 56

- a) $15x^2 + 3x + 1$ b) $25x^2 + 25x - 6$
 c) $36x^3 - 9x^2 - 64x + 15$ d) $9x^3 - x^2 - 15x$
 e) $15x^2 - 23x + 5$ f) $-12x^6 + 19x^5 - 4x^4 + x^2$

Exercice 58

1M-9e72h

Pour chacune des expressions suivantes, préciser (sous : « Type ») s'il s'agit d'une somme ou d'un produit, et donner le nombre de termes (de cette somme ou de ce produit).

Expression	Type	Nombre de termes
a) $4 \cdot x + 1 \cdot (3x - 1) \cdot (5x - 1) + 7 \cdot x$		
b) $-4 \cdot (x - y) \cdot (3x - 1) \cdot (5x - 1)$		
c) $(5x - 1) \cdot (5x - 1) + 7(5x - 1)$		
d) $(4x - 1)(3x - 4)(3x + 4)$		
e) $(4x - 1)(3x - 4)(3x + 4) - 1$		
f) $((3x - 4)(3x + 4) - x + 1)x$		
g) $(3x - 1)(x - 1) + (4x - 1)(3x - 4)$		
h) $x^2 - x^2(4x - 1)(3x - 4)x^2$		

Corrigé 57**Exercice 59**

1M-gw913

Un élève a développé tous les produits de trois des binômes $(x + 1)$, $(x - 1)$, $(x + 2)$ et $(x - 2)$, de toutes les manières possibles, sans répétition d'un binôme. Il a noté les résultats suivants :

$$x^3 - x^2 - 4x + 4, x^3 - 2x^2 - x + 2, x^3 + 2x^2 - x - 2 \text{ et } x^3 + x^2 - 4x - 4.$$

Malheureusement, cet élève ne se souvient pas dans quel ordre il a effectué ses calculs. Comment peut-on l'aider à s'y retrouver immédiatement, par une simple observation ?

Corrigé 58

On utilise le terme constant (de degré 0) qui est différent pour toutes les expressions. Ainsi, il suffit de multiplier les termes de degré 0 de chaque expression pour déterminer le produit des trois polynômes.

Exercice 60

1M-jw3r4

Développer et réduire.

a) $7(8 + 9x)$

b) $6a(5a^2 - 12a)$

c) $-5(-7y + 11)$

d) $-12(-5x - 4)$

e) $-8(6x^2 + 4x - 3)$

f) $-9x^2(8x^3 + 7y)$

g) $7a^5(6a - 4a^2)$

h) $-5x^4(7x^4 + 9x - 1)$

Corrigé 59

a) $63x + 56$

b) $30a^3 - 72a^2$

c) $35y - 55$

d) $60x + 48$

e) $-48x^2 - 32x + 24$

f) $-72x^5 - 63x^2y$

g) $-28a^7 + 42a^6$

h) $-35x^8 - 45x^5 + 5x^4$

Exercice 61

1M-1e54x

Réduire autant que possible.

a) $2x - 2x$

b) $(2x)(-2x)$

c) $2(x - 2)x$

d) $-5y + 9y$

e) $-(5y + 9y)$

f) $(-5y)(+9y)$

g) $(-5y + 9)y$

h) $(-5y) + 9y$

i) $-5(y + 9)y$

j) $-5(y + 9y)$

k) $-x(-x)(-1)$

l) $-x(-x - 1)$

m) $-(x - x) - 1$

n) $x \cdot x \cdot x + x \cdot x$

o) $x \cdot x \cdot (x + x) \cdot x$

Corrigé 60

a) 0

b) $-4x^2$

c) $2x^2 - 4x$

d) $4y$

e) $-14y$

f) $-45y^2$

g) $-5y^2 + 9y$

h) $4y$

i) $-5y^2 - 45y$

j) $-50y$

k) $-x^2$

l) $x^2 + x$

m) -1

n) $x^3 + x^2$

o) $2x^4$

Exercice 62

1M-n9d51

Développer et réduire le produit: $(n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1)$. (*) Déterminer toutes les valeurs de l'entier naturel n , pour lesquelles $n^4 + n^2 + 1$ est un nombre premier.**Corrigé 61**

On développe.

$$(n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1) = n^4 - n^3 + n^2 + n^3 - n^2 + n + n^2 - n + 1 = n^4 + n^2 + 1$$

Exercice 63

1M-v4dqz

Développer et réduire.

a) $(2y - 3)(5 + 3x)$

b) $(5 + 2x)(2x - 3)$

c) $(3 - y)(-5y + 9)$

d) $(x^2 + x - 1)(x - 1)$

e) $(y - x)(x + y)$

f) $(x + 1)(x - 1)(x + 2)$

g) $(2x - 1)(x + 3)(1 - x)$

h) $(1 + x^2)(x^2 - 4x + 2)$

i) $(x + 2)^3$

j) $(z^3 - 5x^3z + 2z)(z^3 - 3x)$

k) $(2 - x)(x^2 + 4)(2 + x)$

l) $(x - 1)^4$

Corrigé 62

a) $6xy - 9x + 10y - 15$

b) $4x^2 + 4x - 15$

c) $5y^2 - 24y + 27$

d) $x^3 - 2x + 1$

e) $y^2 - x^2$

f) $x^3 + 2x^2 - x - 2$

g) $-2x^3 - 3x^2 + 8x - 3$

h) $x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 4x + 2$

i) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

j) $-5x^3z^4 + z^6 + 15x^4z - 3xz^3 + 2z^4 - 6xz$

k) $-x^4 + 16$

l) $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$

3.5 Identités remarquables

Exercice 64


Utiliser les identités remarquables pour calculer (sans calculatrice) les carrés suivants :

1M-akeku

a) Avec $(a + b)^2$: 23^2 ; 92^2 ; 101^2 ; 42^2

b) Avec $(a - b)^2$: 39^2 ; 68^2 ; 99^2 ; 298^2

Corrigé 63

Par exemple, $23^2 = (20 + 3)^2 = 20^2 + 2 \cdot 20 \cdot 3 + 3^2 = 400 + 120 + 9 = 529$.

Exercice 65


Déterminer les identités remarquables pour :

$(a + b)^1$; $(a + b)^2$; $(a + b)^3$; $(a + b)^4$; $(a + b)^5$

1M-sqsur

Corrigé 64

a) $a + b$

b) $a^2 + 2ab + b^2$

c) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

d) $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

e) $a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

Exercice 66


Développer directement à l'aide des identités remarquables sans écrire l'étape intermédiaire.

Exemple : $(x - 3)(x + 2) = x^2 - x - 6$.

1M-xabyp

a) $(x-1)(x-2)$ b) $(x+3)(x+1)$ c) $(x-4)(x+4)$ d) $(y+6)(y-8)$

e) $(a+1)(a-12)$ f) $(y+9)(y-4)$ g) $(a+7)(a+3)$ h) $(x-3)(x-10)$

Corrigé 65

a) $x^2 - 3x + 2$

b) $x^2 + 4x + 3$

c) $x^2 - 16$

d) $y^2 - 2y - 48$

e) $a^2 - 11a - 12$

f) $y^2 + 5y - 36$

g) $a^2 + 10a + 21$

h) $x^2 - 13x + 30$

Exercice 67


Connaître par coeur et savoir démontrer les identités suivantes :

1M-qkz3z

a) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

b) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

c) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

d) $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

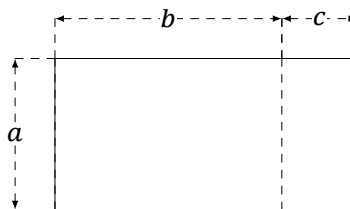
Corrigé 66

Exercice 68

Les savants de la Grèce antique donnèrent des preuves géométriques des propriétés des nombres réels, basées sur l'aire du rectangle.

1M-6edd2

- a) Pour illustrer la distributivité de la multiplication sur l'addition pour les nombres réels a, b , et c , exprimer de deux manières l'aire du rectangle représenté ci-dessous :



- b) De manière semblable, illustrer géométriquement les identités suivantes :

$$(a + b)^2 \quad \text{et} \quad (a + b)(c + d)$$

Corrigé 67**Exercice 69**

Développer et réduire en utilisant les identités remarquables.

1M-3ytn7

a) $(10rx + 8)(10rx + 5)$

b) $\left(st + \frac{3}{2}s\right)\left(st - \frac{3}{2}s\right)$

c) $\left(5s^2y - \frac{5}{8}s^2\right)^2$

d) $\left(\frac{1}{8}x + \frac{2}{3}sx\right)^2$

e) $\left(\frac{2}{5}z^2 + \frac{3}{5}r^2z\right)\left(\frac{2}{5}z^2 - \frac{3}{5}r^2z\right)$

f) $\left(\frac{7}{2}r - 4rt^2\right)^2$

g) $(6ry + 3)(6ry + 2)$

h) $\left(\frac{4}{3}z^2 + \frac{5}{9}rz\right)^2$

i) $\left(\frac{4}{7}tx - 8\right)\left(\frac{4}{7}tx + 7\right)$

j) $\left(10s + \frac{8}{7}t^3\right)^2$

Corrigé 68

a) $100r^2x^2 + 130rx + 40$

b) $s^2t^2 - \frac{9}{4}s^2$

c) $25s^4y^2 - \frac{25}{4}s^4y + \frac{25}{64}s^4$

d) $\frac{4}{9}s^2x^2 + \frac{1}{6}sx^2 + \frac{1}{64}x^2$

e) $-\frac{9}{25}r^4z^2 + \frac{4}{25}z^4$

f) $16r^2t^4 - 28r^2t^2 + \frac{49}{4}r^2$

g) $36r^2y^2 + 30ry + 6$

h) $\frac{16}{9}z^4 + \frac{40}{27}rz^3 + \frac{25}{81}r^2z^2$

i) $\frac{16}{49}t^2x^2 - \frac{4}{7}tx - 56$

j) $\frac{64}{49}t^6 + \frac{160}{7}st^3 + 100s^2$

Exercice 70

Retrouver les identités remarquables pour le cube du binôme : $(a + b)^3$ et $(a - b)^3$

1M-82fkx

En partant de ces identités, obtenir celles pour (ou la factorisation de) :

a) $a^3 + b^3$

b) $a^3 - b^3$

Corrigé 69

3.6 Factorisation

Exercice 71



1M-g6h1q

L'aire d'un rectangle est de $4a^2 + 6a$. Déterminer sa longueur, si la largeur mesure $2a$.

Corrigé 70

On factorise l'expression pour obtenir (par la mise en évidence)

$$4a^2 + 6a = 2a \cdot (2a + 3)$$

Ainsi, la longueur vaut $2a + 3$.

Exercice 72



1M-q5m9j

Factoriser autant que possible.

a) $2xy^2 + 4xy + 2x$

b) $45a^2 - 30a + 5$

c) $5x^4 - 20x^2$

d) $3x^2y + 30xy + 48y$

e) $7a^4x - 14a^3x^2 + 7a^2x^3$

f) $9a^5 + 24a^3b^2 + 16ab^4$

g) $4x^3y - 16x^2y^2 + 16xy^3$

h) $2a^3x^3 - 4a^2x^2 + 2ax$

i) $3x(x + 1)^2 - 27x$

j) $9ab^2c^4 - 4ab^4$

k) $a^2x^2 - 4b^2x^4$

l) $a^2(x + 2y) - 4(x + 2y)$

Corrigé 71

a) $2x(y + 1)^2$

b) $5(3a - 1)^2$

c) $5x^2(x - 4)(x + 4)$

d) $3y(x + 2)(x + 8)$

e) $7a^2x(a - x)^2$

f) $a(3a^2 + 4b^2)^2$

g) $4xy(x - 2y)^2$

h) $2ax(ax - 1)^2$

i) $3x(x - 2)(x + 4)$

j) $ab^2(3x^2 - 2b)(3x^2 + 2b)$

k) $x^2(a - 2b)(a + 2b)$

l) $(a - 2)(a + 2)(x + 2y)$

Exercice 73



1M-z34z9

Mettre en évidence le facteur commun.

a) $4x(x + y) + 5x(x + y)$

b) $3a(3a - b) - 8(3a - b)$

c) $5a^2b(a - 2b) - 15ab^2(a - 2b)$

d) $9x(x + 2)^2 - 5x(x + 2)$

e) $4(x - y) + 2x(y - x)$

f) $x^2(2x - 1) + 3x^2(1 - 2x)$

Corrigé 72

Exercice 74



1M-6cmvd

On considère le nombre $123456789^2 - 123456786 \cdot 123456792$.

a) Calculer ce nombre à l'aide d'une calculatrice.

b) Poser $x = 123456789$ et exprimer le nombre considéré en fonction de x .

c) Développer et réduire l'expression trouvée en b).

d) Que conclure des calculs précédents ?

Corrigé 73

Exercice 75



1M-4kec2

Factoriser au maximum les expressions suivantes

a) $25s^4 - 20s^2 + 4$

b) $9s^2t^2x^2 + 48stx + 64$

c) $s^2t^2 + 36r^4 - 12r^2st$

d) $4 + 81y^2 + 36y$

e) $s^2t^2z^2 - 1$

f) $25x^2y^2 - 90rxy + 81r^2$

g) $-147t^4yz - 420t^2y^2z - 300y^3z$

Corrigé 74

Exercice 76



1M-64mtt

Factoriser le plus possible les expressions suivantes.

a) $m(a - b) + n(a - b)$

b) $x(2a - b) + y(b - 2a)$

c) $a(x - y) - (y - x)$

d) $(a + b)(x - 3y) - 3a(x - 3y)$

e) $(a + b)^3 - (a + b)^2$

f) $(x - 3)(x + 1) - x + 3 + 2(x - 3)^2$

g) $(a - b)^3 - (a - b)$

h) $(x - y) - (a + b)^2(x - y)$

Corrigé 75

a) $(m + n)(a - b)$

b) $(x - y)(2a - b)$

c) $(a + 1)(x - y)$

d) $(-2a + b)(x - 3y)$

e) $(a + b - 1)(a + b)^2$

f) $(x - 3)(x + 1) - (x - 3) + 2(x - 3)^2 = (x - 3)(3x - 6) = 3(x - 3)(x - 2)$

g) $(a - b)((a - b)^2 - 1) = (a - b)(a - b + 1)(a - b - 1)$

h) $(x - y)(1 - (a + b)^2) = (x - y)(1 - a - b)(1 + a + b)$

Exercice 77



1M-pq3wr

Développer les produits, factoriser les sommes.

a) $(2x + 3)^2$

b) $4x + 6y^2$

c) $9b^2 + 12b + 4$

d) $x^2 + 6x - 7$

e) $9y^2 - 6y + 1$

f) $4h^2(2h + 3)$

g) $(1 - x)^2$

h) $16a^2 - 25$

i) $(4a - 5)(4a + 5)$

j) $1 - 2x + x^2$

k) $8h^3 + 12h^2$

l) $(3y - 1)^2$

m) $(x - 1)(x + 7)$

n) $(2 + 3b)^2$

o) $(2x + 3y^2) \cdot 2$

p) $4x^2 + 12x + 9$

Corrigé 76

a) $4x^2 + 12x + 9$

b) $2(2x + 3y^2)$

c) $(3b + 2)^2$

d) $(x - 1)(x + 7)$

e) $(3y - 1)^2$

f) $8h^3 + 12h^2$

g) $x^2 - 2x + 1$

h) $(4a - 5)(4a + 5)$

i) $16a^2 - 25$

j) $(x - 1)^2$

k) $4h^2(2h + 3)$

l) $9y^2 - 6y + 1$

m) $x^2 + 6x - 7$

n) $9b^2 + 12b + 4$

o) $4x + 6y^2$

p) $(2x + 3)^2$

Exercice 78

1M-kywsv

Factoriser complètement (utiliser notamment la méthode des groupements).

a) $axy^2 + bxy^2 - ax - bx$

b) $8x^2 + 4xy - 2ax - ay$

c) $u^3 - u - u^2 + 1$

d) $ax^2 - 1 - x^2 + a$

e) $x^3 - 2x^2 + x - 2$

f) (*) $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$

g) $(x^2 - 1) - 3(1 - x)$

h) $a^2 - b^2 - 5a + 5b$

i) $a^2b^2 + a^2 - b^2 - 1$

j) $x^3 + 2x^2 - 4x - 8$

k) $a^2b^2 + b^2 - a^2 - 1$

l) $x^3 - 7x^2 - 4x + 28$

(*) Indice pour le f): $2x^2 = x^2 + x^2$ **Corrigé 77**

a) $x(y - 1)(y + 1)(a + b)$

b) $(4x - a)(2x + y)$

c) $(u^2 + 1)(u + 1)$

d) $(x^2 + 1)(a - 1)$

e) $(x^2 + 1)(x - 2)$

f) $(x^2 + x + 1)(x + 1)$

g) $(x - 1)(x + 4)$

h) $(a - b)(a + b - 5)$

i) $(a - b)(a + 1)(b^2 + 1)$

j) $(x + 2)^2(x - 2)$

k) $(b - 1)(b + 1)(a^2 + 1)$

l) $(x - 2)(x + 2)(x - 7)$

Exercice 79

1M-nc4wd

Factoriser complètement (utiliser notamment la méthode des groupements).

a) $2ax + ay - 12x - 6y$

b) $5x^3 - 10x^2 - x + 2$

c) $x^2 - y^2 + a(x^2 - 2xy + y^2)$

d) $7x^3 + 9 - 3x^2 - 21x$

e) $5bx - ay + by - 5ax$

f) $(x - y)(2x - y + 1) + (y - x)(x - y + 1)$

g) $6x^2 - 6y + ay - ax^2$

h) $(x - 8)(4x - 3) + x^2 - 8x$

i) $y^2 - 1 - x^2 + x^2y^2$

j) $3x^4 + 6x^3 + 2x^2 + 4x$

Corrigé 78

a) $(a - 6)(2x + y)$

b) $(5x^2 - 1)(x - 2)$

c) $(x + y + ax - ay)(x - y)$

d) $(7x - 3)(x^2 - 3)$

e) $(b - a)(5x + y)$

f) $x(x - y)$

g) $(6 - a)(x^2 - y)$

h) $(x - 8)(5x - 3)$

i) $(1 + x^2)(y - 1)(y + 1)$

j) $x(3x^2 + 2)(x + 2)$

Exercice 80

1M-ctbb

Observer les écritures suivantes pour trouver comment les réduire sans développer les carrés.

a) $(2x - y + 1)^2 - (2x + y + 1)^2$

b) $(2x + y)^2 + 2(2x + y)(2x - y) + (2x - y)^2$

c) $\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y\right)^2 - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right)^2$

d) $(x^2 - 2)^2 - 2(x^2 - 2)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)^2$

Corrigé 79

a) $-8xy - 4y$

b) $4y^2$

c) $-xy$

d) $x^3 + 6x + 9$

Exercice 81

1M-x9jw

Factoriser le plus possible.

a) $4x^4 - 4$

b) $x^3 - x^2 - 4(x - 1)$

c) $16x^4 - 9y^2$

d) $3x^2 + 6x - 24$

e) $8x^3 - 8x^2 + 2x$

f) $(x + y)^2 - 4u^2$

g) $x^3 - 5x$

h) $x^4 - 64$

i) $4y^2 - 12y + 9$

j) $a^2 - ab - a + b$

k) $(4x - 1)^2 - 9(3 - x)^2$

l) $4ax^2y^3 - (axy)^2 + 5bx^3y^2$

Corrigé 80

a) $4(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$

b) $(x - 1)(x + 2)(x - 2)$

c) $(4x^2 + 3y)(4x^2 - 3y)$

d) $3(x + 4)(x - 2)$

e) $2x(2x - 1)^2$

f) $(x + y + 2u)(x + y - 2u)$

g) $x(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5})$

h) $(x^2 + 8)(x + \sqrt{8})(x - \sqrt{8})$

i) $(2y - 3)^2$

j) $(a - b)(a - 1)$

k) $(x + 8)(7x - 10)$

l) $x^2y^2(4ay - a^2 + 5bx)$

Exercice 82

1M-5hed

Factoriser les polynômes suivants dans \mathbb{R} lorsque c'est possible :

a) $10x^2 + 9x - 9$

b) $-4x^2 + 12x - 7$

c) $5x^2 - 40x + 76$

d) $x^2 - x + 2$

Corrigé 81

a) $10\left(x + \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{3}{5}\right) (= (2x + 3)(5x - 3))$

b) $-4\left(x - \frac{3 - \sqrt{2}}{2}\right)\left(x - \frac{3 + \sqrt{2}}{2}\right) (= -(2x - 3 + \sqrt{2})(2x - 3 - \sqrt{2}))$

c) $5\left(x - \frac{20 - 2\sqrt{5}}{5}\right)\left(x - \frac{20 + 2\sqrt{5}}{5}\right)$

d) non factorisable dans \mathbb{R} **Exercice 83**

1M-ka15h

Soit le polynôme $x^6 - 1$.a) Le factoriser de deux manières différentes (indications: $x^6 = (x^3)^2 = (x^2)^3$ et utiliser l'activité 1).b) En déduire une factorisation pour le polynôme $x^4 + x^2 + 1$.**Corrigé 82**

Équations

Exercice 84

1M-5pcp

Répondre par vrai ou faux en justifiant.

- a) Le nombre -8 est-il solution de l'équation : $x^2 = 32 - 4x$?
- b) Le nombre 0 est-il solution de l'équation : $x^2 + 12x + 12 = 3x^3 - 3x^2 - x + 12$?
- c) Le nombre $-\frac{1}{2}$ est-il solution de l'équation : $x(x - 2) = x^2 - 1$?
- d) Le nombre $\frac{1}{2}$ est-il solution de l'équation : $x(x - 2) = x^2 - 1$?

Corrigé 83

a) oui

b) oui

c) non

d) oui

4.1 Équations du premier degré

Exercice 85

1M-qa6b

Compléter les équations b), c) et d) pour obtenir des équations équivalentes à l'équation A.

- a) $x = \frac{2}{5}y - 2$ b) $5x = \dots$ c) $x + 2 = \dots$ d) $\frac{5}{2}x = \dots$

Corrigé 84

Appliquer à chaque fois l'opération indiquée.

b) [PE2] 5

c) [PE1] 2

d) [PE2] $\frac{5}{2}$ **Exercice 86**

1M-ehjb

Résoudre les équations dans \mathbb{R} .

- a) $2\sqrt{3} \cdot x = \sqrt{3} \cdot x - 1$ b) $\sqrt{3} - x = \sqrt{2} \cdot x + 2$
- c) $\sqrt{3} - 3x = \sqrt{2} \cdot x + \sqrt{2}$ d) $\sqrt{2} \cdot x - \sqrt{2} = 1 - \sqrt{2} \cdot x$

Corrigé 85

a) $S = \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{3} \right\}$

b) $S = \{2 - 2\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{6}\}$

c) $S = \left\{ \frac{2 - 3\sqrt{2} + 3\sqrt{3} - \sqrt{6}}{7} \right\}$

d) $S = \left\{ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} \right\}$

Exercice 87

1M-rhvj

Résoudre les équations dans \mathbb{R} .

- a) $2\left(\frac{x}{3} + 3\right) = 0$ b) $\frac{1 - 6x}{4} = 2\left(1 - \frac{3}{4}x\right)$
- c) $3x = \frac{x - 55}{6}$ d) $x + \frac{1}{4} = -\frac{3}{7}$

Corrigé 86

a) $S = \{-9\}$

b) $S = \emptyset$

c) $S = \left\{ -\frac{55}{17} \right\}$

d) $S = \left\{ -\frac{19}{28} \right\}$

4.1.1 Résolution d'équations

4.1.2 Résolution de problèmes

Exercice 88

1M-fxnm

Un nombre est le produit de trois entiers consécutifs. Si l'on divise ce nombre successivement par chacun des trois entiers, la somme des quotients ainsi obtenus est de 767. De quel nombre s'agit-il?

Corrigé 874080 ou -4080 .**Exercice 89**

1M-prpq

Un problème de Leonhard Euler (1707 - 1783).

Un père mourut en laissant quatre fils. Ceux-ci se partagèrent ses biens de la manière suivante : le premier prit la moitié de la fortune, moins 3000 livres; le deuxième en prit le tiers moins 1000 livres; le troisième prit exactement le quart des biens; le quatrième prit 600 livres plus le cinquième des biens. Quelle était la fortune totale, et quelle somme reçut chacun des enfants?

Corrigé 88

12000; 3000

Exercice 90

1M-ae7n

Trouver deux nombres entiers consécutifs tels que le quart du premier ajouté au cinquième du plus grand donne 29.

Corrigé 89

64 et 65

Exercice 91

1M-fata

Trois frères, Albrecht, Blaise et Carl ont acheté une maison 2 millions de francs. Albrecht dit qu'il pourrait payer la somme entière si Blaise lui donnait les cinq huitièmes de ce qu'il a. Blaise dit qu'il payerait tout si Carl lui donnait les huit neuvièmes de ce qu'il a. Enfin Carl dit que pour acquitter seul le prix, il lui manque le tiers de ce qu'a Albrecht plus les trois seizièmes de ce que possède Blaise. Combien chacun a-t-il ?

Corrigé 90

Albrecht 1,5 million ; Brecht 0,8 million ; Carl 1,35 million.

Exercice 92

1M-abv3

Ayant reçu un héritage, je dépense 2000 francs pour acheter une moto et je place les deux tiers du reste à la banque. Il me reste alors 30% du montant total de l'héritage. Quel était ce montant?

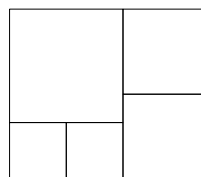
Corrigé 91

20000

Exercice 93

1M-pvqqa

Le rectangle représenté ci-dessous a été découpé en 5 carrés. Le périmètre du rectangle est de 1 m . Déterminer son aire.

**Corrigé 92**

$$\frac{21}{338} \text{ m}^2$$

Exercice 94

1M-591f

Céline regarde avec envie un pull et une robe présentés dans la vitrine d'une boutique. Malheureusement, le prix total de ces deux vêtements est de 137.50 francs et dépasse son budget. Quelques temps après, le prix du pull baisse de 20% et celui de la robe de 30%. Céline calcule rapidement la dépense totale et constate que le prix total a baissé de 35 francs, ce qui lui permet d'acheter ces deux vêtements. Quels étaient les prix du pull et de la robe avant la baisse?

Corrigé 93

On pose les inconnues

 x = Le prix du pull avant rabais y = Le prix de la robe avant rabais

On obtient le système $\begin{cases} x + y = 137,50 \\ x - \frac{20}{100}x + y - \frac{30}{100}y = 137,50 - 35 \end{cases}$ On réduit au maximum la deuxième équation:

$$x - \frac{20}{100}x + y - \frac{30}{100}y = 137,50 - 32,50 \Leftrightarrow \frac{8}{10}x + \frac{7}{10}y = 102,50 \Leftrightarrow 8x + 7y = 1025$$

Puis on résout le système $\begin{cases} x + y = 137,50 \\ 8x + 7y = 1025 \end{cases}$ (par exemple par combinaison) et on obtient que $x = 62,5$ et $y = 75$, ainsi le prix du pull avant le rabais est de 62,50 francs et le prix de la robe avant le rabais était de 75 francs.

Exercice 95

1M-q8vx

Il s'agit de partager 2100 francs entre trois personnes de manière que la première ait le quart de la part de la troisième et 120 francs de plus que la deuxième.

a) Voici trois façons de commencer. Compléter chacune de ces possibilités en fonction de x .

b) Résoudre ce problème.

part de la 1re personne :	x
part de la 2e personne :	
part de la 3e personne :	

part de la 1re personne :	
part de la 2e personne :	x
part de la 3e personne :	

part de la 1re personne :	
part de la 2e personne :	
part de la 3e personne :	x

Corrigé 94

370, 250, 1480

4.2 Théorème du produit nul

Exercice 96

1M-hayk

- a) Écrire une équation du troisième degré dont la solution est: $S = \{-3; 5; 6\}$.
 b) Écrire toutes les équations du troisième degré ayant comme solution: $S = \{0; 5\}$, et dont le coefficient du terme de degré 3 est 4.
 c) Écrire une équation du plus petit degré possible et ayant comme solution : $S = \left\{0; -2; \frac{1}{2}; 5\right\}$.
 d) Écrire une équation du deuxième degré dont la solution est : $S = \emptyset$.

Corrigé 95

À vérifier individuellement, car plusieurs réponses possibles.

Exercice 97

1M-r5g1

Résoudre les équations suivantes dans \mathbb{R} :

- a) $(x - 2)(x - 5) = 0$ b) $(x + 4)(x + 6) = 0$
 c) $(x - 3)(7x - 21) = 0$ d) $\left(x - \frac{1}{4}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{2x}{5} - 2\right) = 0$
 e) $2x(2x - 1)(3x + 3) = 0$ f) $3(2x - 3)\left(5x - \frac{1}{2}\right) = 0$

Corrigé 96Solutions : $\{2; 5\}$; $\{-4; -6\}$; $\{3\}$; $\left\{\frac{1}{4}; -\frac{1}{3}; 5\right\}$; $\left\{0; \frac{1}{2}; -1\right\}$; $\left\{\frac{3}{2}; \frac{1}{10}\right\}$.

4.3 Complétion du carré

Exercice 98

1M-cn6a

En utilisant la méthode de complétion du carré, résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

- a) $x^2 - 4x - 1 = 0$ b) $4x^2 + 12x + 5 = 0$
 c) $x^2 - 6x - 11 = 0$ d) $x^2 + 4x + 6 = 0$
 e) $x^2 + x - 1 = 0$ f) $25x^2 + 30x + 2 = 0$

Corrigé 97

- a) $S = \{2 - \sqrt{5}; 2 + \sqrt{5}\}$ b) $S = \left\{-\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}\right\}$
 c) $S = \{3 - 2\sqrt{5}; 3 + 2\sqrt{5}\}$ d) $S = \emptyset$
 e) $S = \left\{\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right\}$ f) $S = \left\{\frac{-3 - \sqrt{7}}{5}; \frac{-3 + \sqrt{7}}{5}\right\}$

4.4 Formule du discriminant

Exercice 99

Résoudre dans \mathbb{R} .

1M-4yk3

- a) $3x^2 + 26x - 9 = 0$ b) $64 = -x^2$ c) $x^2 + 5x - 5 = 0$
 d) $2x^2 = x - 1$ e) $x^2 - 10x + 63 = 0$ f) $4x^2 - 20x + 25 = 0$
 g) $7x^2 + 25x - 12 = 0$ h) $x^2 = 2x$ i) $9x^2 + 42x + 49 = 0$
 j) $6x^2 - 13x + 6 = 0$ k) $x^2 - 6x + 4 = 0$ l) $4x(1 + x) = -1$

Corrigé 98

- a) $S = \left\{-9; \frac{1}{3}\right\}$ b) $S = \emptyset$ c) $S = \left\{\frac{-5 - 3\sqrt{5}}{2}; \frac{-5 + 3\sqrt{5}}{2}\right\}$
 d) $S = \emptyset$ e) $S = \emptyset$ f) $S = \left\{\frac{5}{2}\right\}$
 g) $S = \left\{-4; \frac{3}{7}\right\}$ h) $S = \{0; 2\}$ i) $S = \left\{-\frac{7}{3}\right\}$
 j) $S = \left\{\frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right\}$ k) $S = \{3 - \sqrt{5}; 3 + \sqrt{5}\}$ l) $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

Exercice 100

Former une équation du second degré ayant pour solutions :



1M-z8vs

- a) 7 et -3 b) 3 et $\frac{1}{2}$
 c) $2 + \sqrt{6}$ et $2 - \sqrt{6}$ d) $\frac{-1 - \sqrt{3}}{3}$ et $\frac{-1 + \sqrt{3}}{3}$

Exprimer la réponse sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$, où a, b et c sont des nombres entiers.

Corrigé 99

$$x^2 - 4x - 21 = 0; \quad 2x^2 - 7x + 3 = 0; \quad x^2 - 4x - 2 = 0; \quad 9x^2 + 6x - 2 = 0$$

4.5 Résolutions générales d'équations

Exercice 101

Résoudre les équations dans \mathbb{R} :

1M-hr3d

- a) $x^3 - 6x^2 - 5x + 30 = 0$ b) $(x^2 + 4)(x^2 - x + 1) = 0$
 c) $(2x - 1)(x^2 - 4x - 2) = 0$ d) $x^4 - 11x^2 + 30 = 0$

Corrigé 100

- a) $S = \{6; -\sqrt{5}; \sqrt{5}\};$ b) $S = \emptyset;$
 c) $S = \left\{\frac{1}{2}; 2 + \sqrt{6}; 2 - \sqrt{6}\right\};$ d) $S = \{-\sqrt{5}; \sqrt{5}; -\sqrt{6}; \sqrt{6}\}.$

Exercice 102Résoudre les équations suivantes dans \mathbb{R} :

1M-5tja

a) $x^2 - 10x + 16 = 0$

b) $7x^3 + 9 = 3x^2 + 21x$

c) $(x - 4)(x + 5) - 2x(x + 5) = 0$

d) $x^2 = 8x$

e) $(x + 1)(x + 2) = (x + 2)(x + 3)$

f) $(x - 8)(4x - 3) + x^2 - 8x = 0$

g) $(2x + 3)^2 = 8 - x(2 - 3x)$

h) $(x - 3)^2 - 2x = 3x^2 - 1$

i) $-(-1 - 4x)^2 = 1 - (5x - 1)^2$

j) $4x^2 + 8x + 1 = 6$

Corrigé 101

a) $S = \{2; 8\}$

b) $S = \left\{\frac{3}{7}; -\sqrt{3}; \sqrt{3}\right\}$

c) $S = \{-5; -4\}$

d) $S = \{0; 8\}$

e) $S = \{-2\}$

f) $S = \left\{8; \frac{3}{5}\right\}$

g) $S = \{-7 + 4\sqrt{3}; -7 - 4\sqrt{3}\}$

h) $S = \{-5; 1\}$

i) $S = \left\{\frac{3 - \sqrt{10}}{3}; \frac{3 + \sqrt{10}}{3}\right\}$

j) $S = \left\{-\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right\}$

Exercice 103Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

1M-3s5y

a) $5x^2 - 8x = 0$

b) $4x^3 = 9x$

c) $2x^3 = 98x$

d) $3(x + 2) = x(x + 2)$

e) $4x^2 + 4x + 1 = 0$

f) $(2x - 6)(x + 6) - (4x + 2)(x + 6) = 0$

Corrigé 102Solutions : $\left\{0; \frac{8}{5}\right\}; \left\{-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; 0\right\}; \{0; -7; 7\}; \{-2; 3\}; \left\{-\frac{1}{2}\right\}; \{-6; -4\}$ **Exercice 104**Résoudre dans \mathbb{R} .

1M-ufbv

a) $(x + 1)(x + 2) + (x + 3)(x + 4) = 42$

b) $(x - 6)(x + 1) - (2x + 3)(x - 5) = 0$

c) $(3x - 5)^2 - 12x = 1$

d) $(2x + 1)^2 + 3x = 1$

e) $(x - 3)^2 + (x + 4)^2 = x(x + 1)$

f) $(x + 1)^2 - (x - 1)^2 = (x - 8)^2$

g) $\frac{x^2}{3} + \frac{4x}{5} - 19 = \frac{76}{5}$

h) $\frac{(x - 2)^2}{5} - \frac{(x - 3)^2}{4} = 0$

i) $x = \frac{2}{5} + \frac{5x^2}{16}$

j) $18x^3 - 5 = 2x - 45x^2$

Corrigé 103

a) $S = \{-7; 2\}$

b) $S = \{1 - \sqrt{10}; 1 + \sqrt{10}\};$

c) $S = \left\{\frac{2}{3}; 4\right\};$

d) $S = \left\{-\frac{7}{4}; 0\right\};$

e) $S = \emptyset$

f) $S = \{4; 16\};$

g) $S = \left\{-\frac{57}{5}; 9\right\};$

h) $S = \{7 - 2\sqrt{5}; 7 + 2\sqrt{5}\};$

i) $S = \left\{\frac{8 - 4\sqrt{2}}{5}; \frac{8 + 4\sqrt{2}}{5}\right\}$

j) $S = \left\{-\frac{5}{2}; \frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right\}$

Exercice 105

1M-q822

On considère l'équation : $x^3 - 4 = 15x$.

- a) Un entier naturel est solution de cette équation; trouver lequel et justifier à l'aide de la définition du mot solution.
- b) Montrer que le nombre irrationnel $\sqrt{3} - 2$ est aussi solution de cette équation.

Corrigé 104

- a) 4 b) à
véri-
fier

Exercice 106

1M-5pp8

Résoudre les équations dans \mathbb{R} .

- a) $(2x - 3)^2 = (7x + 3)^2$ b) $12x - 9x^2 = 4$
- c) $4x(x + 1) = -1$ d) $9x^2 - 27 = 0$
- e) $\frac{1}{\sqrt{2}}(5x - 7) = \sqrt{2}x + \sqrt{18}$ f) $x^2 + 4x = 32$
- g) $4(x - 7) = x^2(x - 7)$ h) $x^3 - 2 = x(2x - 1)$

Corrigé 105

$$S = \left\{0; -\frac{6}{5}\right\}$$

$$S = \left\{\frac{2}{3}\right\}$$

$$S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

$$S = \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$$

$$S = \left\{\frac{13}{3}\right\}$$

$$S = \{-8; 4\}$$

$$S = \{-2; 2; 7\}$$

$$S = \{2\}$$

Exercice 107

1M-ek52

Résoudre les équations dans \mathbb{R} .

- a) $x^2 - 5 = 8(2x + 6) - (x - 5)^2$ b) $x^3 + 2x^2 = 3x + 6$
- c) $x^3 + 9x^2 - 2x - 18 = 0$ d) $(x^2 - 2x)^2 - 1 = 0$

Corrigé 106

$$\{-1; 14\} \quad \{-9; -\sqrt{2}; \sqrt{2}\} \quad \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}; 2\} \quad \{1; 1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}\}$$

4.6 Résolution de problèmes

Exercice 108

1M-v9mk

Trouver trois nombres entiers consécutifs tels que leur produit vaut le quintuple de leur somme.

(Indication : prendre l'entier intermédiaire comme inconnue x .)

Corrigé 107Il s'agit de $-5, -4$ et -3 ou de $-1, 0$ et 1 ou de $3, 4$ et 5 .**Exercice 109**

1M-n9j2

Trouver deux nombres dont la différence et le produit valent 1.

Corrigé 108

Deux possibilités : $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$; $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 110

1M-gq2s

Un terrain rectangulaire a un périmètre de 150 m. Si l'on augmente sa largeur de 5 m et si l'on diminue sa longueur de 3 m, alors son aire augmente de 120 m². Quelles sont les dimensions de ce rectangle?

Corrigé 109

On pose les inconnues

x = La largeur du rectangle

y = La longueur du rectangle

On obtient le système $\begin{cases} 2x + 2y = 150 \\ (x + 5)(y - 3) = xy + 120 \end{cases}$ On résout le système après avoir simplifié au maximum la deuxième équation

$$(x + 5)(y - 3) = xy + 120 \Leftrightarrow xy - 3x + 5y - 15 = xy + 120 \Leftrightarrow -3x + 5y = 135.$$

On obtient que $x = 30$ cm et $y = 45$ cm. Le rectangle mesure 30 cm sur 45 cm.

Exercice 111

1M-fu5h

Les deux côtés d'un rectangle ont 6 mètres de différence. Trouver ses dimensions sachant que son aire est de 9 m².

Corrigé 110

Il mesure $-3 + 3\sqrt{2}$ m sur $3 + 3\sqrt{2}$ m.

Exercice 112

1M-7v59j

Une agence de voyage organise une excursion. Le prix du billet a été fixé à 60 CHF, mais la compagnie a consenti, dans le cas où plus de 100 personnes feraient le voyage, à baisser le prix de chaque billet de 25 cts par personne additionnelle. Sachant qu'il en coûte 1000 CHF à l'agence pour transporter les 100 premiers passagers et 15 CHF par passager additionnel, trouver le nombre de passagers pour lequel le bénéfice net de la compagnie est maximal. Interpréter graphiquement.

Corrigé 111

Pour $N < 100$: Bénéfice = $60N - 1000$.

Cette fonction est linéaire croissante en N . Donc son maximum dans cette plage est atteint en $N = 100$. À $N = 100$, on obtient

$$B(100) = 60 \times 100 - 1000 = 5000.$$

Pour $N \geq 100$: $x = N - 100$, Prix par billet = $60 - 0,25x$,

Coût total = $1000 + 15x$, Revenu = $(100 + x)(60 - 0,25x)$.

$$\text{Bénéfice} = (100 + x)(60 - 0,25x) - (1000 + 15x) = 5000 + 20x - 0,25x^2.$$

Le sommet de cette parabole (coefficient dominant $-0,25 < 0$) est :

$$x_{\max} = -\frac{b}{2a} = -\frac{20}{2 \cdot (-0,25)} = 40.$$

Soit $N = 100 + 40 = 140$. Le bénéfice maximum alors :

$$B(140) = 5000 + 20 \times 40 - 0,25 \times 40^2 = 5400.$$

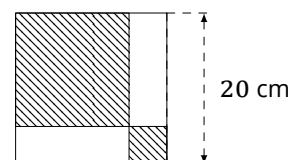
Comme $5400 > 5000$, le bénéfice maximal **n'est pas atteint en dessous de 100 passagers** mais bien en $N = 140$.

Exercice 113

1M-ug96

La figure ci-dessous est formée de trois carrés.

Que doit mesurer le côté du petit carré pour que la partie ombrée ait une surface triple de la partie blanche ?

**Corrigé 112**
 $5(2 - \sqrt{2})$ cm (la deuxième solution est la mesure du côté du grand carré).
Exercice 114

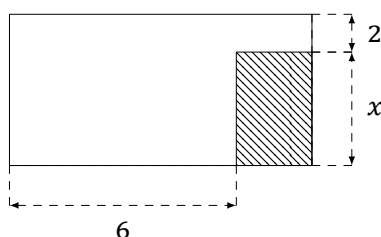
1M-amb1

La somme des carrés de trois nombres entiers consécutifs dépasse de 288 la somme des carrés des deux nombres entiers précédents. Quels sont ces cinq nombres ?

Corrigé 113
 $\{10, 11, 12, 13, 14\}$ ou $\{-26, -25, -24, -23, -22\}$
Exercice 115

1M-uw34

Sur le dessin ci-dessous, la figure ombrée est un carré, et le grand quadrilatère, un rectangle. (Toutes les longueurs sont en cm.)



Déterminer x pour que l'aire de la partie blanche soit égale à 38 cm^2 .

Corrigé 114 $\frac{13}{4}$ **4.7 Équations bicarrées****Exercice 116**

1M-9kr7

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes:

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

b) $x^2(x^2 + 1) = 12$

c) $2x^4 + x^2 - 3 = 0$

d) $4x^4 - 6x^2 + 1 = 0$

(Indication: utiliser la factorisation ou le changement de variable $y = x^2$)**Corrigé 115**

$$S = \{-3; -2; 2; 3\}; S = \{-1; 1\}; S = \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}; S = \left\{-\frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{2}; \frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{2}; -\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{2}; \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{2}\right\}$$

Exercice 117

1M-jjs4

Résoudre dans \mathbb{R} l'équation suivante : $x^6 + 4x^3 - 32 = 0$, de deux façons :

a) par un changement de variable approprié;

b) par factorisation directe (identités remarquables).

Corrigé 116 $S = \{-2; \sqrt[3]{4}\}$

4.8 Équations irrationnelles

Exercice 118



1M-qndn

Résoudre les équations suivantes dans \mathbb{R}

a) $\sqrt{(x-1)(3x-6)} = x-2$

b) $\sqrt{2x+7} = \sqrt{x} + 2$

c) $4x-1 = \sqrt{7x^2-2x+8}$

d) $\sqrt{x+8} - \sqrt{x+3} = 5\sqrt{x}$

e) $\sqrt{x+8} + \sqrt{x+3} = 5\sqrt{x}$

f) $\sqrt{7x-27} = \sqrt{2x+1} + \sqrt{3x+4}$

Corrigé 117 $S = \{2\}; S = \{1; 9\}; S = \left\{\frac{1+2\sqrt{2}}{3}\right\}; S = \left\{\frac{1}{21}\right\}; S = \{1\}; S = \emptyset$

4.9 Systèmes d'équations

Exercice 119



1M-cqkc

Résoudre les systèmes d'équations suivants dans \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 .

a)
$$\begin{cases} \frac{x+y}{2} = \frac{7x-5y}{6} + \frac{x+4}{4} \\ \frac{x-6y}{2} = \frac{x-2y}{7} + 4 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \frac{x-3}{y-5} = \frac{4}{3} \\ \frac{x+5}{y+2} = \frac{6}{5} \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 2x - y = x - 3y - 2 \\ 5 - x + \frac{3}{2}(x+y) = x + 2y + \frac{13}{2} \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 4x + 3y + 6z = 41 \\ 8x + 5y = 31 \\ 7y = 21 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} 6x + 4y + 8z = 6 \\ 3x + y - 2z = 1 \\ 3x + 2y - 4z = 1 \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} x - y - z = 6 \\ x - 2y - 3z = 10 \\ 5x + 6y + z = 2 \end{cases}$$

Corrigé 118

a) $\{(-4; -2)\}$

b) $\{(7; 8)\}$

c) $\{(-4; 1)\}$

d) $\{(2; 3; 4)\}$

e) $\left\{\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)\right\}$

f) $\{(3; -2; -1)\}$

Exercice 120



1M-fz7d

Le couple $\left(3; \frac{3}{2}\right)$ est-il solution du système $\begin{cases} 7x - 12y = 3 \\ -5x + 8y = 31 \end{cases}$?

Corrigé 119

Non, le couple n'est pas solution du système.

Exercice 123

Résoudre les systèmes d'équations suivants en utilisant la méthode de combinaison linéaire.

1M-tfmt

a)
$$\begin{cases} 3x - y = 5 \\ 2x + y = 15 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 4x + y = 10 \\ 6x - y = 20 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x + 4y = 17 \\ -x + 7y = 38 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} -x + 5y = 6 \\ x + 3y = 18 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} 8x + y = 21 \\ 3x + y = 13 \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} 7x + y = 47 \\ 2x + y = 19 \end{cases}$$

g)
$$\begin{cases} x - 4y = 23 \\ x + 5y = -4 \end{cases}$$

h)
$$\begin{cases} x - 6y = 13 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

i)
$$\begin{cases} 5x + 3y = 27 \\ 7x - 3y = 45 \end{cases}$$

j)
$$\begin{cases} 2x + 5y = 14 \\ 7x - 5y = -41 \end{cases}$$

k)
$$\begin{cases} -2x + 7y = 8,7 \\ 2x + 3y = 18,3 \end{cases}$$

l)
$$\begin{cases} -4x + 8y = -3,6 \\ 4x - 3y = 13,1 \end{cases}$$

m)
$$\begin{cases} 10x + 7y = -30 \\ 8x + 7y = -24 \end{cases}$$

n)
$$\begin{cases} 6x + 11y = -48 \\ x + 11y = -8 \end{cases}$$

o)
$$\begin{cases} 5x - y = 22 \\ 5x + 4y = -63 \end{cases}$$

p)
$$\begin{cases} 3x - 5y = 61 \\ 3x - y = 17 \end{cases}$$

q)
$$\begin{cases} 2,3x - 1,7y = 3,5 \\ 4,7x - 1,7y = 10,7 \end{cases}$$

r)
$$\begin{cases} 4,1x - 1,3y = 7,1 \\ 2,9x - 1,3y = 3,5 \end{cases}$$

s)
$$\begin{cases} 10x - 4y = 35 \\ 3x + 4y = 21 \end{cases}$$

t)
$$\begin{cases} 9x + 2y = 59 \\ -2x - 2y = -8 \end{cases}$$

Corrigé 122

a) (4; 7)

b) (3; -2)

c) (-3; 5)

d) (9; 3)

e) (1,6; 8,2)

f) (5,6; 7,8)

g) (11; -3)

h) (7; -1)

i) (6; -1)

j) (-3; 4)

k) (5,1; 2,7)

l) (4,7; 1,9)

m) (-3; 0)

n) (-8; 0)

o) (1; -17)

p) (2; -11)

q) (3; 2)

r) (3; 4)

s) $\left(\frac{56}{13}; \frac{105}{52}\right)$

t) $\left(\frac{51}{7}; -\frac{23}{7}\right)$

Exercice 124

Résoudre les systèmes d'équations suivants avec la méthode de votre choix.

1M-marp

a)
$$\begin{cases} x - 2y = -5 \\ 7x + 10y = 1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 5x + 5y = 5 \\ 3x - 7y = -2 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 5x + 6y = -2 \\ 10x + 3y = -7 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 5x + 4y = 13 \\ 2x - 7y = 31 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} \frac{x+5}{2} - \frac{3-y}{5} = \frac{5}{2} \\ x+7 + \frac{y-6}{4} = 7 \cdot \frac{5}{2} \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} \frac{x-3}{2} - \frac{5}{2} = \frac{2y-21}{2} + 1 \\ \frac{x+2}{3} + 3 = \frac{3-y}{5} - \frac{10}{3} \end{cases}$$

Corrigé 123

a) $S = \left\{-2; \frac{3}{2}\right\}$

b) $S = \left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$

c) $S = \left\{-\frac{4}{5}; \frac{1}{3}\right\}$

d) $S = \{5; -3\}$

e) $S = \{30; -72\}$

f) $S = \left\{-\frac{225}{13}; -\frac{41}{13}\right\}$

Exercice 125

Résoudre les systèmes suivants en utilisant la méthode de la substitution.

1M-8266

a) $\begin{cases} y = 2x \\ 3x + y = 10 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = 3x \\ 2x - y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = 3x \\ 5x - 2y = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = 2x \\ 4x + 3y = 30 \end{cases}$

e) $\begin{cases} y = x + 4 \\ 3x + y = 16 \end{cases}$

f) $\begin{cases} y = x - 3 \\ 4x + y = 32 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x = y - 5 \\ 3x + 2y = 3 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x = y + 8 \\ 5x + 3y = 12 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 4x + 3y = 31 \\ y = 2x + 7 \end{cases}$

Corrigé 124

a) (2; 4)

b) (-2; -6)

c) (-1; -3)

d) (3; 6)

e) (3; 7)

f) (7; 4)

g) (-1,4; 3,6)

h) (1,8; -1,4)

i) (1; 9)

Exercice 126

- Pour chaque système d'équations, donner l'opération à effectuer pour éliminer la variable x .

1M-2r37

Exemple: $\begin{cases} 8x + 3y = 1 & (1) \\ 3x + 5y = 9 & (2) \end{cases}$

$E1 \cdot 3 + E2 \cdot (-8)$ c'est-à-dire on multiplie (1) par 3 et (2) par -8 puis on additionne (1) et (2).

a) $\begin{cases} 2x + 5y = 7 & (1) \\ 3x + 4y = 9 & (2) \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x - 3y = 2 & (1) \\ -5x + 8y = 1 & (2) \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + 10y = 9 & (1) \\ 8x + 5y = 7 & (2) \end{cases}$

- Pour chaque système d'équations, donner l'opération à effectuer pour éliminer la variable y .

a) $\begin{cases} 2x + 5y = 7 & (1) \\ 3x + 4y = 9 & (2) \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x - 3y = 2 & (1) \\ -5x + 8y = 1 & (2) \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + 10y = 9 & (1) \\ 8x + 5y = 7 & (2) \end{cases}$

Corrigé 125Par exemple, pour éliminer x :

a) $E1 \cdot 3 - E2 \cdot 2$

b) $E1 \cdot 5 + E2 \cdot 4$

c) $E1 \cdot 4 - E2$

Par exemple, pour éliminer y :

a) $E1 \cdot 4 - E2 \cdot 5$

b) $E1 \cdot 8 + E2 \cdot 3$

c) $E1 - E2 \cdot 2$

Exercice 127Résoudre les systèmes d'équations suivants dans \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 .

1M-qg1h

a) $\begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{y}{2} \\ 12x + 3y + 14 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 4 \\ 3x + y - 4z = 7 \\ x + 2y - 5z = 1 \end{cases}$

Corrigé 126

a) $\left\{ \left(-1; -\frac{2}{3} \right) \right\}$

b) $\{(2; -3; -1)\}$

Exercice 128

1M-bdr9

Pour chaque système d'équations, donner l'équation obtenue après avoir éliminé une des variables.

Exemple:
$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ -3x - 4y = 8 \end{cases}$$

On élimine x en additionnant la première équation à la deuxième équation. On obtient

$$\begin{array}{rcl} 3x - 2y & = & 5 \\ + & & \\ -3x - 4y & = & 8 \\ \hline 0x + 2y & = & 13 \end{array}$$

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 4x - 3y = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 7x - 4y = 9 \\ 2x + 4y = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + 8y = -3 \\ -2x + 5y = 10 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x + 4y = 8 \\ -3x + 5y = -1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 4x - 5y = 9 \\ -3x + 5y = -7 \end{cases}$ f) $\begin{cases} -4x - 3y = -1 \\ 4x + 8y = 5 \end{cases}$

Corrigé 127

On remarque que dans tous ces systèmes, une des variables de la première équation apparaît avec un coefficient opposé dans l'autre équation. On additionne donc à chaque fois la première équation à la deuxième pour éliminer une des variables.

a) $6x = 12$

b) $9x = 12$

c) $13y = 7$

d) $9y = 7$

e) $x = 2$

f) $5y = 4$

Exercice 129

1M-q43t

Donner un système de deux équations à deux inconnues dont l'ensemble des solutions est

$$S = \{(-2; 3)\}.$$

Corrigé 128

Réponse à vérifier individuellement.

Exercice 130

1M-qad4

Résoudre les systèmes suivants en utilisant la méthode de la substitution.

a) $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 5x - 3y = -29 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + y = 13 \\ 2x - 4y = 18 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 6x - y = 31 \\ 4x + 3y = 17 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - 7y = -22 \\ 5x + 2y = 1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 7x - 6y = -30 \\ x - 4y = -20 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2x - 9y = 14 \\ 6x - y = 42 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x + y = 23 \\ 9x - 8y = 27 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x - y = 6 \\ 10x + 11y = 149 \end{cases}$ i) $\begin{cases} x - 3y = 13 \\ 5x + 3y = 2 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 7x - 3y = -23 \\ x + 5y = 32 \end{cases}$ k) $\begin{cases} 3(x + y - 2) = -4 \\ 4x - 7y = 36 \end{cases}$ l) $\begin{cases} 4(x + y - 3) = -11 \\ 6x - 2y = -16 \end{cases}$

m) $\begin{cases} x + 6y = 19 \\ 5(x + 2y - 7) = -24 \end{cases}$ n) $\begin{cases} x + 5y = 22 \\ 3(x + 4y - 9) = -5 \end{cases}$ o) $\begin{cases} 2(x - y + 3) = 7 \\ 7x - 3(y - 1) = 9 \end{cases}$

Corrigé 129

- a) $(-4; 3)$ b) $(5; -2)$ c) $(5; -1)$ d) $(-1; 3)$ e) $(0; 5)$
 f) $(7; 0)$ g) $\left(\frac{211}{17}; \frac{180}{17}\right)$ h) $\left(\frac{215}{21}; \frac{89}{21}\right)$ i) $(2,5; -3,5)$ j) $(-0,5; 6,5)$
 k) $\left(\frac{122}{33}; -\frac{100}{33}\right)$ l) $\left(\frac{-31}{16}; \frac{35}{16}\right)$ m) $(-6,2; 4,2)$ n) $\left(\frac{-154}{3}; \frac{44}{3}\right)$ o) $\left(\frac{9}{8}; \frac{5}{8}\right)$

4.10 Résolution de problèmes**Exercice 131**

Traduire chacune des ces situations par un système de deux équations et déterminer les solutions.

1M-a24q

i) La somme de deux nombres est 100. La différence de ces deux nombres est 68. Quels sont ces nombres?

ii) Entendu de bon matin à la terrasse d'un café:

- "Deux chocolats et trois croissants: Fr. 8,90."
- "Trois chocolats et cinq croissants: Fr. 13,80."

Quel est le prix d'un chocolat? Et celui d'un croissant?

iii) 350 spectateurs ont assisté à un spectacle. Au parterre, la place revient à Fr. 20.—; à la galerie, elle revient à Fr. 30.—.

Le montant de la recette des entrées est de Fr. 7850.—.

Combien y avait-il de spectateurs au parterre? Et à la galerie?

Corrigé 130

a) On pose les inconnues

x = le premier nombre

y = le deuxième nombre

On obtient le système $\begin{cases} x + y = 100 \\ x - y = 68 \end{cases}$

On résout le système (par exemple par combinaison) et on obtient $x = 84$ et $y = 16$. Le premier nombre vaut 84 et le deuxième 16.

b) On pose les inconnues

x = Le prix d'un chocolat

y = Le prix d'un croissant

On obtient le système $\begin{cases} 2x + 3y = 8,90 \\ 3x + 5y = 13,80 \end{cases}$

On résout le système (par exemple par combinaison) et on obtient que $x = 3,10$ et $y = 0,90$. Donc un chocolat coûte CHF 3,10 et un croissant coûte CHF 0,90.

c) On pose les inconnues

x = Le nombre de spectateurs au parterre

y = Le nombre de spectateurs à la galerie

On obtient le système $\begin{cases} x + y = 350 \\ 20x + 30y = 7850 \end{cases}$

On résout le système (par exemple par combinaison) et on obtient que $x = 265$ et $y = 85$. Il y avait donc 265 spectateurs au parterre et 85 dans la galerie.

Exercice 132

1M-dv8m

Ecrire un système d'équations permettant de résoudre chacun des problèmes.

- a) Un nombre de trois chiffres est tel que le produit de ses chiffres divisé par leur somme donne 32 tiers; le nombre lui-même divisé par la même somme donne 48; enfin, le chiffre des dizaines dépasse celui des unités d'autant qu'il est dépassé par celui des centaines. Quel est ce nombre ?
- b) Si d'un nombre de quatre chiffres on soustrait le nombre qu'on obtient en écrivant les chiffres dans l'ordre inverse, on trouve 4725. Le produit des chiffres est 672, le produit des chiffres du milieu 28 et le chiffre des milliers est supérieur de 5 à celui des unités. Quel est ce nombre?

Corrigé 131

a) 864

b) 8473

Exercice 133

1M-v3z1

Pour organiser une sortie de fin d'année, un collège loue des cars. Il y a des grands cars de 56 places et des petits cars de 44 places. Il y a quatre grands cars de plus que de petits. 624 élèves participent à la sortie et tous les cars sont remplis. Combien le collège a-t-il loué de cars de chaque catégorie?

Corrigé 132

On pose les inconnues

 x = Nombre de cars à 44 places y = Nombre de cars à 56 places

On obtient le système $\begin{cases} y - x = 4 \\ 56y + 44x = 624 \end{cases}$ On résout le système (par exemple par substitution) et on obtient que $x = 4$ et $y = 8$. Le collège a donc loué 4 petits cars et 8 grands cars.

Exercice 134

1M-wy6v

On a payé une somme globale de 29'280 francs pour l'achat des trois séries de meubles suivantes:

- 20 canapés, copie Directoire;
- 18 fauteuils, copie Louis XV;
- 16 chaises, copie Empire.

Sachant que 13 canapés valent autant que 21 fauteuils et que 3 fauteuils ont la même valeur que 8 chaises, on demande les prix d'un canapé d'un fauteuil et d'une chaise.

Corrigé 133

CHF 840 le canapé, CHF 520 le fauteuil, CHF 195 la chaise.

Exercice 135

1M-6vjf

Un groupe de vingt-quatre personnes fait un stage de deux jours dans une école de voile. Deux activités sont au programme: la planche à voile ou le catamaran. Le premier jour, dix personnes choisissent la planche à voile et les autres le catamaran. La facture totale de ce premier jour s'élève à 560 francs. Le deuxième jour, ils sont douze à choisir la planche à voile et les autres font du catamaran. La facture du deuxième jour s'élève à 540 francs.

Quel est le prix par personne d'une journée de planche à voile et celui d'une journée de catamaran?

Corrigé 134

On pose les inconnues

 x = le prix d'une journée en planche à voile y = le prix d'une journée en catamaran

On obtient le système $\begin{cases} 10x + 14y = 560 \\ 12x + 12y = 540 \end{cases}$ On résout le système (par exemple par combinaison) et on obtient que $x = 17,50$ et $y = 27,50$. Une journée en planche à voile coûte CHF 17,50 et une journée en catamaran CHF 27,50.

Exercice 136

1M-936c

Un confiseur répartit des truffes dans des cornets de 200 g. S'il avait réparti ses truffes dans des cornets de 150 g, il y aurait eu 12 cornets de plus. Quelle quantité de truffes a-t-il préparée?

Corrigé 135

On pose les inconnues

 x = Le nombre de sachet de 200g y = Le nombre de sachet de 150g

On obtient le système $\begin{cases} y - x = 12 \\ 200x = 150y \end{cases}$ On résout le système (par exemple par substitution) et on obtient que $x = 36$ et $y = 48$. Le confiseur a donc préparé $36 \cdot 200 = 7,2\text{kg}$ de truffes.