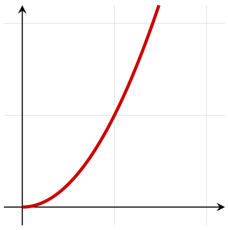
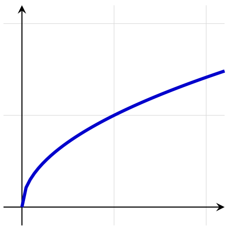
# Chapitre 3 : Fonctions

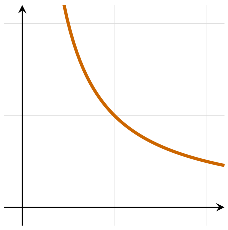
$y = x^2$



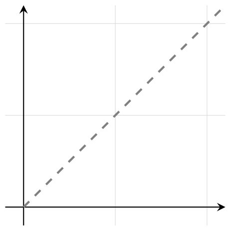
$y = \sqrt{x}$



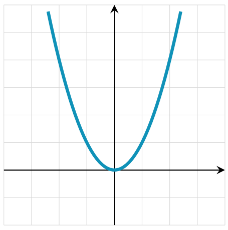
$y = \dfrac{1}{x}$



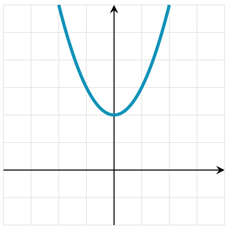
$y = x$



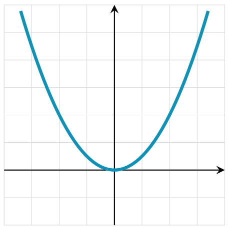
$y = x^2$



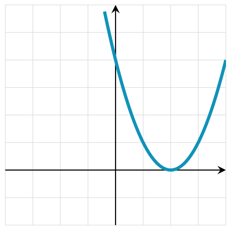
$y = x^2 + 2$



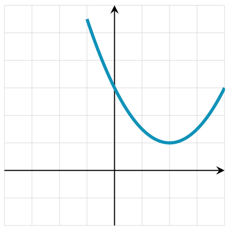
$y = \dfrac{1}{2}x^2$



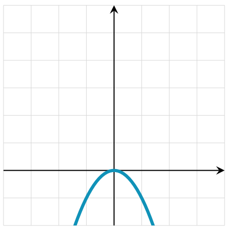
$y = (x-2)^2$



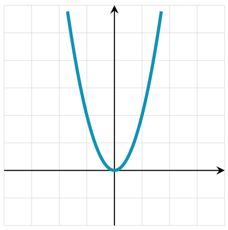
$y = \dfrac{1}{2}(x-2)^2 + 1$



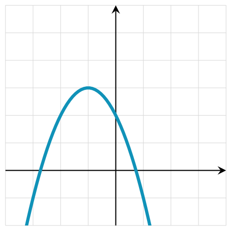
$y = -x^2$



$y = 2x^2$



$y = -(x+1)^2 + 3$



## Table des matières

Ch. 3 : Fonctions SECTION 1

# Généralités sur les fonctions

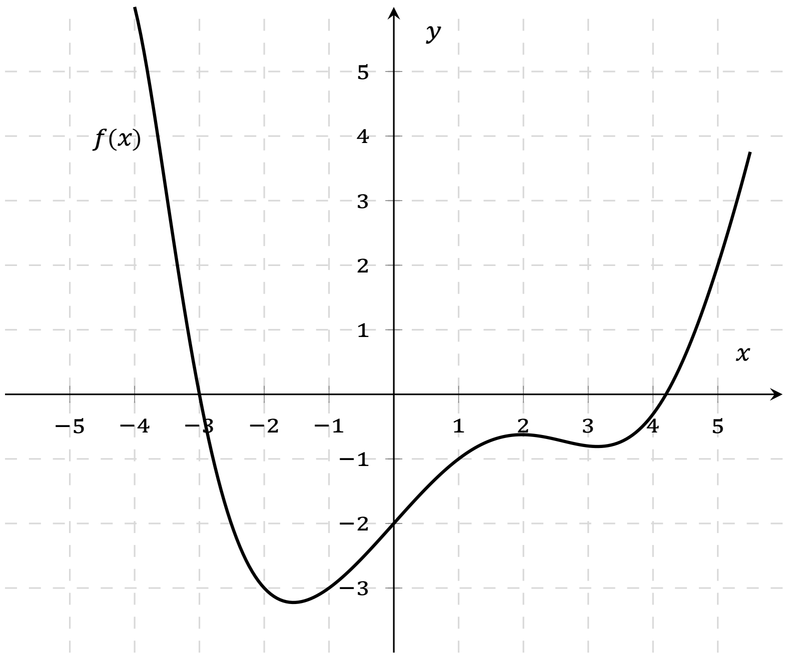
## 1.1 Découverte de quelques fonctions et vocabulaire

**Exercice 1** Soit

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 0 \\ x+1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Calculer $f(-3), f(-0{,}5), f(0), f(5)$.

**Exercice 2**




Estimer en observant le graphe :

a) la valeur de $f(0)$ ;

b) la valeur de $f(-2)$ ;

c) les valeurs de $x$ pour lesquelles $f(x) = 0$ ;

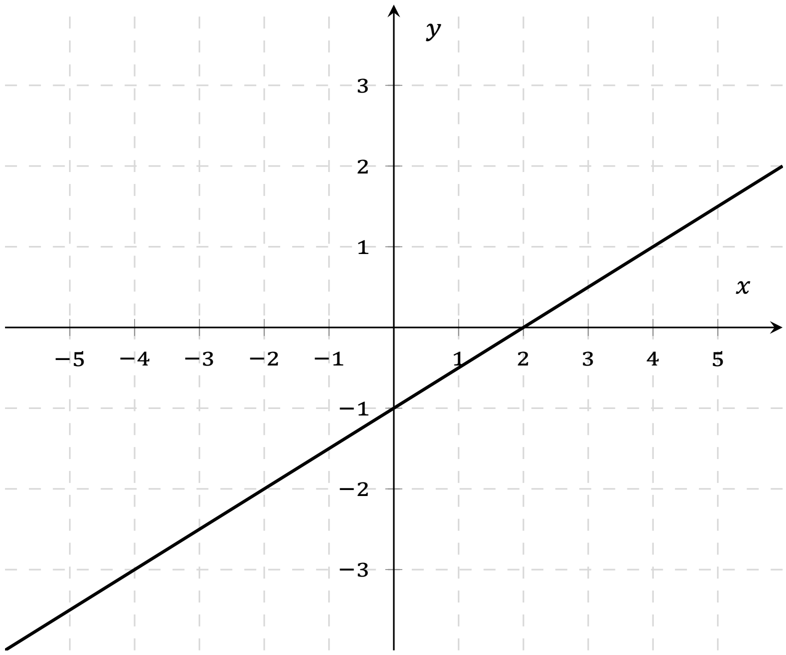
d) la préimage de $2$ ;

e) la valeur de $a$ dans l'équation $f(x) = a$ sachant que cette équation ne possède qu'une ; seule solution. Qu'elle est cette solution ?

f) les valeurs de $x$ tels que $f(x) = x$ ;

g) les valeurs de $x$ tels que $f(x) = -x$.

**Exercice 3** On donne la fonction $f$ par son graphe.




Dessiner Le graphe des fonctions suivantes définies par :

a) $g(x) = -f(x)$

b) $h(x) = f(-x)$

c) $i(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{sinon} \end{cases}$

d) $j(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } -f(x) \geq 0 \\ f(x) & \text{sinon} \end{cases}$

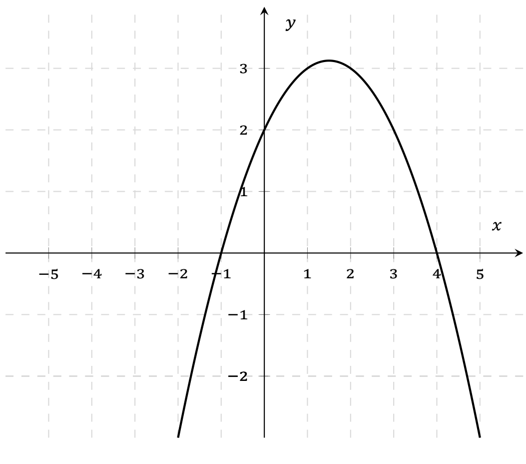
e) $k(x) = f(x+2)$

f) $\ell(x) = f(x) - 2$

g) $m(x) = f(x-1) + 2$

h) $n(x) = 2f(x)$

**Exercice 4** On donne la fonction $f$ par son graphe.




Dessiner le graphe des fonctions définies par :

a) $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$

b) $h(x) = -f(-x)$

c) $i(x) = f(x-2)$

d) $j(x) = f(x) + 2$

e) $k(x) = f(x+1) - 2$

f) $\ell(x) = 2f(x)$

**Exercice 5** Même fonction f que dans l'exercice précédent. Résoudre $f(x) = 4$ (donner toutes les $x$ possibles).

**Exercice 6** Soit $f$ telle que $f(x+1) = f(x)+3$ et $f(0) = 2$. Calculer $f(1), f(2), f(10)$.

**Exercice 7** Soit $g(x) = (x+1)/(x-1)$. Calculer $g(3), g(0)$, puis $g(g(3))$.

**Exercice 8** Soit $f$ définie par $f(1) = 3$ et $f(n+1) = 2 \cdot f(n) - 1$ pour tout entier $n \geq 1$. Calculer $f(2), f(3), f(4)$.

**Exercice 9** Soit $u(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}$. Calculer $u(1)$, puis $u(u(1))$.

**Exercice 10** Calculer les images de $-3$, $0$, $\dfrac{1}{2}$ et $\sqrt{2}$ pour $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$.

**Exercice 11** Déterminer si les points $\mathrm{A}(2;5)$, $\mathrm{B}(-1;0)$ et $\mathrm{C}\left(\dfrac{1}{2};7\right)$ appartiennent au graphe de $f(x) = x^3 + x + 1$.

**Exercice 12** Tracer le plus précisément possible $f(x) = (x-2)^2$ pour $x$ allant de $-2$ à 6. Sur le même graphique, tracer $g(x) = x - 2$. Où les deux courbes se coupent-elles ?

**Exercice 13** Déterminer la préimage de 10 par la fonction $f(x) = 3x - 5$.

**Exercice 14** On donne $g(x) = x^2 - 4x + 3$. Calculer $g(2+h) - g(2)$ et simplifier.

## 1.2 Domaine de définition

**Exercice 15** Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-5}$ b) $g(x) = \sqrt{x+8}$ c) $h(x) = \dfrac{x+1}{2x-6}$

d) $k(x) = \sqrt{10-x}$ e) $m(x) = \dfrac{1}{x^2-9}$ f) $n(x) = \dfrac{3x+4}{x^2+1}$

**Exercice 16** $p(x) = \sqrt{x-1} + 3$. Donner le domaine puis calculer $p(5)$ et $p(10)$.

**Exercice 17** $q(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$. Donner le domaine puis calculer la préimage de 2.

**Exercice 18** $r(x) = \sqrt{2x-4}$. Donner le domaine puis calculer la préimage de 6.

**Exercice 19** $s(x) = \sqrt{x^2-16}$. Donner le domaine et calculer $s(5)$.

**Exercice 20** $t(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$. Donner le domaine de définition.

**Exercice 21** Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes

a) $v(x) = \dfrac{1}{x^2-4x+3}$

b) $w(x) = \sqrt{x-3} + \dfrac{1}{x+2}$

## 1.3 Opérations sur les fonctions

**Exercice 22** Soient $f(x) = 2x+1$, $g(x) = x^2-4$, $h(x) = 5$ et $k(x) = \sqrt{x}$

a) Déterminer $(f+g)(x)$.

b) Déterminer $(f \cdot g)(x)$ sous forme développée.

c) Calculer la valeur exacte de l'image de $\sqrt{3}$ par $(f-g)$.

d) Déterminer $(g/f)(x)$ et préciser le domaine de définition.

e) Déterminer $(f \cdot h)(x)$.

f) Déterminer $(2f+3g)(x)$.

g) Donner le domaine de définition de $(g+k)(x)$.

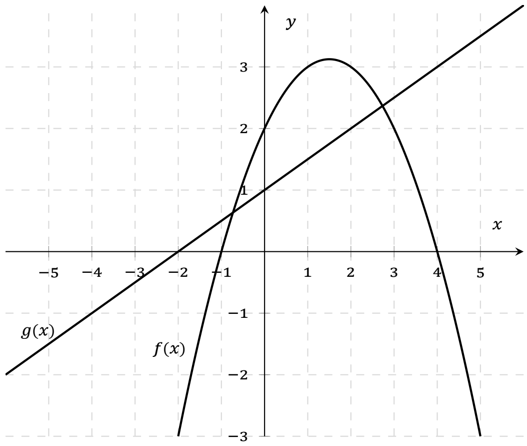
h) Montrer que $(f \cdot f)(x)$ est un trinôme du second degré et donner son expression sous la forme $ax^2+bx+c$.

i) Simplifier $(f^2-g)(x)$.

j) Déterminer $i(x)$ telle que $(f+i)(x) = x^2+5x-2$.

**Exercice 23** Si $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = \dfrac{x}{x+1}$, simplifier $(f+g)(x)$ et donner le domaine.

**Exercice 24** On donne les fonctions $f$ et $g$ par leur graphe.




a) $h(x) = f(x) + g(x)$

b) $i(x) = f(x) \cdot g(x)$

c) $j(x) = g(x) - f(x)$

d) $k(x) = f(x) - g(x)$

## 1.4 Composition de fonctions

**Exercice 25** $f(x) = 3x + 2$, $g(x) = x^2$. Calculer $f(g(x))$ et $g(f(x))$.

**Exercice 26** Décomposer $k(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ en une composition de deux fonctions.

**Exercice 27** $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x + 5$. Calculer $f(g(4))$.

**Exercice 28** Décomposer $h(x) = (2x - 7)^3$ en $u$ et $v$ telles que $h = v \circ u$.

**Exercice 29** Si $f(x) = \frac{1}{x}$, calculer $f(f(x))$ pour $x \neq 0$.

**Exercice 30** Soit $f(x) = x^2$ et $g(x) = x - 10$. Calculer $f(g(5))$ et $g(f(5))$.

**Exercice 31** Déterminer le domaine de $f \circ g$ et de $g \circ f$ si $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x - 3$.

**Exercice 32** Soit $f(x) = 2x$. Calculer $(f \circ f \circ f)(x)$.

**Exercice 33** Soient $f(x) = x+3$ et $g(x) = \frac{1}{x}$. Déterminer l'ensemble des $x$ pour lesquels $f(g(x)) = g(f(x))$.

**Exercice 34** Soit $f(x) = x + 3$ et $g(x) = 2x - 1$. Vérifier que $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$.

**Exercice 35** Trouver $g(x)$ tel que si $f(x) = x + 1$, alors $f(g(x)) = x^2 + 2x + 5$.

**Exercice 36** Soit $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$. Montrer que $f(f(x)) = \dfrac{x}{2x+1}$.

Ch. 3 : Fonctions SECTION 2

# La droite

## 2.1 Représentation

**Exercice 37** Résoudre $f(g(x)) = 0$ avec $f(x) = 2x - 8$ et $g(x) = x^2$.

**Exercice 38** Représenter les droites suivantes dans un même repère.

a) $d_1 : y = 2x - 3.$

b) $d_2 : y = -\dfrac{1}{2}x + 4.$

c) $d_3 : y = -\dfrac{5}{2}x - 1$

d) $d_4 : y = x - \dfrac{1}{2}$

**Exercice 39** Identifier l'ordonnée à l'origine et la pente, puis représenter la droite $3x - y + 2 = 0$.

**Exercice 40** Tracer les droites $x = 3$ et $y = -2$. Expliquer leur particularité.

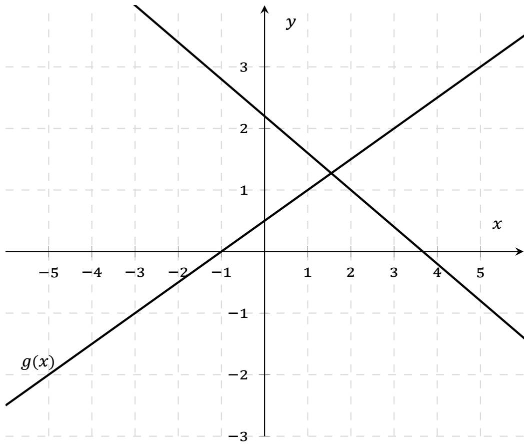
**Exercice 41** Tracer la droite passant par l'origine et $(2; 4)$. Donner également son équation.

**Exercice 42** Déterminer l'équation de la droite de pente $m = 0$ passant par $(1; 3)$. La représenter graphiquement. Comment s'appelle une telle droite ?

**Exercice 43** Déterminer l'équation de la droite passant par les points $\mathrm{A}(1; 2)$ et $\mathrm{B}(3; 6)$.

**Exercice 44** Déterminer l'équation de la droite passant par les points $\mathrm{M}(-1; 5)$ et $\mathrm{N}(2; -1)$.

**Exercice 45**

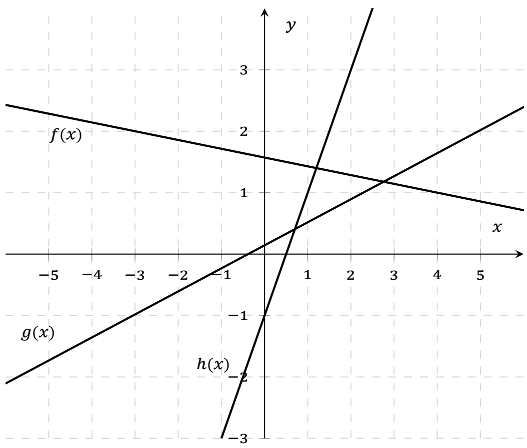



a) Calculer les coordonnées du point d'intersection $\mathrm{I}$ des deux droites représentées ci-dessus.

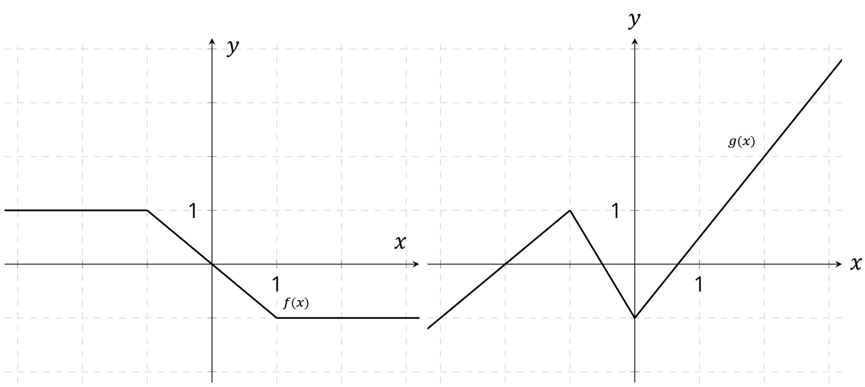
b) Déterminer l'expression de la fonction $h$ qui passe par le point $\mathrm{I}$ et l'origine.

c) Déterminer l'expression de la fonction $i$ qui représente une droite parallèle à $h$ passant par le point $\mathrm{P}(2;-1)$.

**Exercice 46** Déterminer les points d'intersection de ces trois droites.



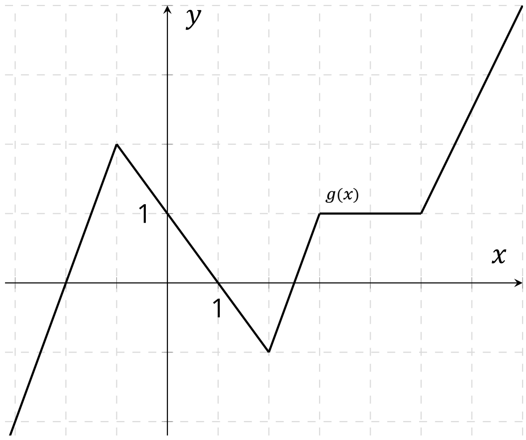

**Exercice 47** Déterminer une expression pour $f(x)$ et $g(x)$ ci-dessous.



**Exercice 48** Déterminer une expression pour $f(x)$, puis résoudre

a) $f(x) = 2$

b) $f(x) > 1$




**Exercice 49** On donne la fonction

$$f(x) = \begin{cases} -x - 2 & \text{si } x \in ]-\infty; -1] \\ 2x & \text{si } x \in ]-1; 2] \\ \dfrac{1}{2}x + 3 & \text{si } x \in ]2; +\infty] \end{cases}$$

a) Représenter graphiquement la fonction $f$.

b) Résoudre les équations $f(x) = 1$ et $f(x) = x$

**Exercice 50** Tracer la droite $y = -2x + 1$. Le point $(5; -9)$ appartient-il à cette droite ? Vérifier algébriquement.

**Exercice 51** Représenter la droite $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 1$.

**Exercice 52** Soit $f(x) = mx + 2$. Pour quelle valeur de $m$ la droite passe-t-elle par $(4; 0)$ ? et par $\left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{7}{8}\right)$ ?

**Exercice 53** Déterminer, s'il existe, le point d'intersection de $y = 3x - 2$ et $y = x + 4$.

## 2.2 Droites parallèles et perpendiculaires

**Exercice 54** Déterminer l'équation de la droite parallèle à $y = 3x - 1$ passant par $\left(\dfrac{2}{5}; 4\right)$.

**Exercice 55** Déterminer l'équation de la droite perpendiculaire à $y = -\frac{1}{2}x + 1$ passant par $(2, 3)$.

**Exercice 56** Vérifier si $(\mathrm{AB})$ et $(\mathrm{CD})$ sont parallèles : $\mathrm{A}(1; -1)$, $\mathrm{B}(3; -5)$, $\mathrm{C}(0; 0)$, $\mathrm{D}(2; -4)$.

**Exercice 57** Déterminer l'équation de la droite parallèle à $d : 2x - y + 3 = 0$ passant par l'origine. Et par le point $\left(\frac{3}{4}; -\frac{2}{7}\right)$ ?

**Exercice 58** Les droites $3x - 2y = 4$ et $2x + 3y = 7$ sont-elles perpendiculaires ?

**Exercice 59** Déterminer les intersections de la droite $y = 2x - 10$ avec les axes $\mathrm{O}x$ et $\mathrm{O}y$.

**Exercice 60** Déterminer la valeur de $k$ pour que $5y = kx + 3$ soit perpendiculaire à $-y = 2x - 1$.

**Exercice 61** Montrer que le triangle $\mathrm{A}(0; 0)$, $\mathrm{B}(4; 0)$, $\mathrm{C}(0; 3)$ est rectangle en calculant les pentes entre les points.

Ch. 3 : Fonctions SECTION 3

# La parabole

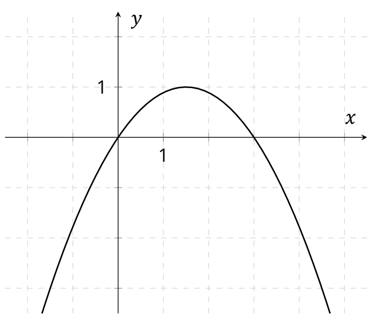
## 3.1 Définitions et différentes formes

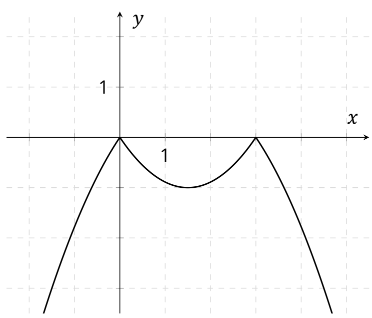
**Exercice 62** Déterminer les intersections avec les axes, le sommet, la forme canonique, la forme factorisée et représenter la fonction suivante : $f(x) = x^2 - 4x$.

**Exercice 63** Soit une fonction $f$ dont les racines valent $-1$ et $3$. Déterminer l'abscisse du sommet, justifier.

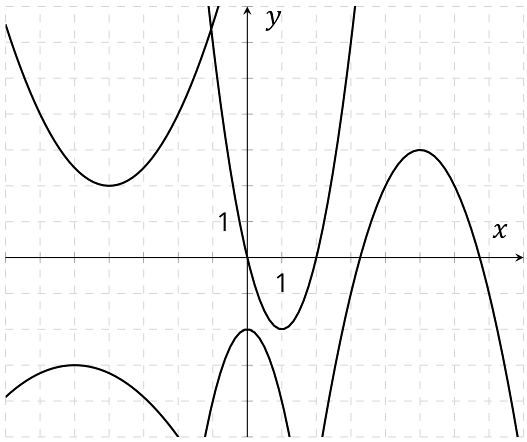
**Exercice 64** Déterminer l'équation de la parabole passant par $(-1; 0)$, $(3; 0)$ et $(0; -3)$.

**Exercice 65** Déterminer l'expression fonctionnelle des deux fonctions ci-dessous à partir des techniques de déplacement de la parabole.



**Exercice 66** Déterminer les expressions fonctionnelles des cinq paraboles dont les graphes sont donnés ci-dessous à l'aide des techniques de déplacement de la parabole.




## 3.2 Extremum

**Exercice 67** Déterminer la valeur de $x$ pour laquelle $f(x) = (x-3)^2 - 4$ prend son minimum. Que vaut-il ?

**Exercice 68** La fonction $f(x) = -3x^2 + 12x + 5$ admet-elle un maximum ou minimum ? Le calculer.

**Exercice 69** Montrer que $x^2 - 4x + 7 \geq 3$ pour tout réel.

**Exercice 70** Déterminer la valeur de $k$ afin que le minium de la fonction $f(x) = x^2 - 2x + k$ vaille 5 ?

**Exercice 71** Quel est le maximum et le minimum de la fonction $f(x) = -x^2 + 4x$ sur l'intervalle $[0; 4]$.

**Exercice 72** Pour chaque fonction, dire si elle admet un minimum ou un maximum, puis déterminer les coordonnées de cet extremum.

a) $f(x) = x^2 - 8x + 10$
b) $g(x) = -x^2 + 6x - 2$
c) $h(x) = 2x^2 + 4x + 5$
d) $i(x) = -3x^2 + 18x - 20$

## 3.3 Intersections

**Exercice 73** Déterminer l'ensemble des points d'intersection des courbes $y = x^2-4x+4$ et $y = -x + 2$.

**Exercice 74** Déterminer l'ensemble des points d'intersection de $y = x^2 - 3x + 1$ et $y = x - 1$.

**Exercice 75**

a) Soit la droite $d_1$ d'équation $y = 9x - 7$ et la droite $d_2$ d'équation $y = -5x - 2$.
Déterminer l'ensemble des points d'intersection de $d_1$ et $d_2$.

b) Soit la droite $d$ d'équation $y = 6x - 9$ et la parabole $\mathcal{C}$ d'équation $y = 8x^2 - 8$.
Déterminer l'ensemble des points d'intersection de $d$ et $\mathcal{C}$.

c) Soit la parabole $\mathcal{C}_1$ d'équation $y = 8x^2 - 5x + 5$ et la parabole $\mathcal{C}_2$ d'équation $y = 10x^2 - 4x + 4$.
Déterminer l'ensemble des points d'intersection de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

**Exercice 76** Trouver $m$ pour que $y = mx$ soit tangente à $y = x^2 + 1$.

## 3.4 Optimisation

**Exercice 77** Un objet est lancé et sa hauteur est décrite en fonction du temps pour l'équation suivante $h(t) = -5t^2 + 20t$. Déterminer sa hauteur maximale. Combien de temps après avoir lancé l'objet atteint-il cette hauteur maximale ?

**Exercice 78** Un enclos rectangulaire est placé contre un mur, de sorte qu'il ne faut clôturer que trois de ses côtés. Si on dispose de 60 m de clôture, quelles doivent être les dimensions de l'enclos afin qu'il ait une aire maximale.

**Exercice 79** Parmi tous les rectangles de périmètre 24 cm, lequel a l'aire maximale ?

**Exercice 80** On souhaite séparer un terrain en deux parties rectangulaires égales. On dispose de 120 m de barrière. Quelles doivent être les dimensions des terrains afin que l'aire de chaque terrain soit maximale ?

**Exercice 81** On dispose d'une feuille de 16 cm de longueur et 10 cm de largeur. On souhaite en faire une boîte sans couvercle en découpant des carrés aux quatre coins et en repliant chacun des bords.

a) Réaliser un schéma.

b) Exprimer le volume de la boîte en fonction de la mesure du côté des carrés découpés.

c) Déterminer la dimension des carrés à découper afin que le volume soit maximisé.

**Exercice 82** Maximiser le produit de deux nombres dont la somme vaut 30.