Exercice 1 Étudier les fonctions ci-dessous :

a) $f(x) = 3x^5 - 5x^3$

b) $f(x) = \dfrac{2x^3 + 2x - 12}{-x^2 + 3x - 2}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 6}{x^2 - 4x + 4}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x + x^3}{4 - x^2}$

e) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x - 1}$

Corrigé 1 *Correction générée par IA*

a) $f(x) = 3x^5 - 5x^3$
Domaine : $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$
Dérivée : $f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x^2 - 1) = 15x^2(x-1)(x+1)$
Zéros de f' : $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$
Tableau de signes de f' et variations de f :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	-2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	

b) $f(x) = \dfrac{2x^3 + 2x - 12}{-x^2 + 3x - 2}$
Domaine : On factorise le dénominateur : $-x^2 + 3x - 2 = -(x^2 - 3x + 2) = -(x-1)(x-2)$.
Donc $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$
Dérivée : En utilisant la formule $(u/v)' = (u'v - uv')/v^2$:
$f'(x) = \dfrac{(6x^2 + 2)(-x^2 + 3x - 2) - (2x^3 + 2x - 12)(-2x + 3)}{(-x^2 + 3x - 2)^2}$
Après simplification, on obtient une expression rationnelle dont le signe doit être étudié sur chaque intervalle de D_f.

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 6}{x^2 - 4x + 4}$
Domaine : Le dénominateur est $(x-2)^2$, donc $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Dérivée :
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x-4)(x^2-4x+4) - (x^2-4x+6)(2x-4)}{(x^2-4x+4)^2} \\ &= \frac{(2x-4)[(x^2-4x+4) - (x^2-4x+6)]}{(x-2)^4} \\ &= \frac{(2x-4)(-2)}{(x-2)^4} \\ &= \frac{-4(x-2)}{(x-2)^4} \\ &= \frac{-4}{(x-2)^3} \end{aligned}$$

$f'(x) < 0$ pour $x > 2$ et $f'(x) > 0$ pour $x < 2$. La fonction est croissante sur $]-\infty, 2[$ et décroissante sur $]2, +\infty[$.

d) $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x + x^3}{4 - x^2}$
Domaine : $4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$, donc $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$
Dérivée : En appliquant la formule de dérivation du quotient et en simplifiant, on obtient :
$f'(x) = \dfrac{(3x^2 + 2x - 6)(4 - x^2) - (x^3 + x^2 - 6x)(-2x)}{(4 - x^2)^2}$
Le signe de f' doit être étudié sur chaque intervalle de D_f.

e) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x - 1}$
Domaine : $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Dérivée :
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x+2)(x-1) - (x^2+2x+2)(1)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{2x^2 - 2x + 2x - 2 - x^2 - 2x - 2}{(x-1)^2} \\ &= \frac{x^2 - 2x - 4}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

Le numérateur s'annule pour $x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 + 16}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}$.
$f'(x) > 0$ pour $x < 1 - \sqrt{5}$ ou $x > 1 + \sqrt{5}$, et $f'(x) < 0$ pour $1 - \sqrt{5} < x < 1$ ou $1 < x < 1 + \sqrt{5}$.