Exercice 1 Montrer que l'équation $6x^5 + 13x + 1 = 0$ a exactement une racine réelle. (Utiliser le théorème de Rolle et le théorème de la valeur intermédiaire.)

Corrigé 1 *Generated by AI*

Soit $f(x) = 6x^5 + 13x + 1$.

Existence d'au moins une racine (Théorème de la valeur intermédiaire) :

f est un polynôme, donc continue sur $\mathbb{R}$.

Calculons quelques valeurs :

- $f(0) = 1 > 0$
- $f(-1) = -6 - 13 + 1 = -18 < 0$

Puisque f est continue sur $[-1, 0]$ et que $f(-1) < 0 < f(0)$, le théorème de la valeur intermédiaire garantit l'existence d'au moins un $c \in]-1, 0[$ tel que $f(c) = 0$.

Unicité de la racine (Théorème de Rolle) :

Supposons par l'absurde qu'il existe deux racines distinctes a et b avec $a < b$.

Alors $f(a) = f(b) = 0$.

Le théorème de Rolle affirme que si f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, et si $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Calculons $f'(x)$:

$$f'(x) = 30x^4 + 13$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 30x^4 + 13 \geq 13 > 0$$

La dérivée est toujours strictement positive, donc $f'(c) \neq 0$ pour tout c. Ceci contredit le théorème de Rolle. Donc il ne peut pas exister deux racines distinctes.

Conclusion : L'équation $6x^5 + 13x + 1 = 0$ possède exactement une racine réelle (située dans $]-1, 0[$).