Exercices – Premier semestre (suite)

Table des matières

Exercices pour le premier semestre SECTION 4

Equations

4.2 Théorème du produit nul

Exercice 1

a) Écrire une équation du troisième degré dont la solution est : $S = \{-3; 5; 6\}$.

b) Écrire toutes les équations du troisième degré ayant comme solution : $S = \{0; 5\}$, et dont le coefficient du terme de degré 3 est 4 .

c) Écrire une équation du plus petit degré possible et ayant comme solution : $S = \left\{0; -2; \frac{1}{2}; 5\right\}$.

d) Écrire une équation du deuxième degré dont la solution est : $S = \emptyset$.

Corrigé 1 À vérifier individuellement, car plusieurs réponses possibles.

Exercice 2 Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

a) $(x-2)(x-5) = 0$

b) $(x+4)(x+6) = 0$

c) $(x-3)(7x-21) = 0$

d) $\left(x - \frac{1}{4}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{2x}{5} - 2\right) = 0$

e) $2x(2x-1)(3x+3) = 0$

f) $3(2x-3)\left(5x - \frac{1}{2}\right) = 0$

Corrigé 2 Solutions : $\{2; 5\}$; $\{-4; -6\}$; $\{3\}$; $\left\{\frac{1}{4}; -\frac{1}{3}; 5\right\}$; $\left\{0; \frac{1}{2}; -1\right\}$; $\left\{\frac{3}{2}; \frac{1}{10}\right\}$.

4.3 Complétion du carré

Exercice 3 En utilisant la méthode de complétion du carré, résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $x^2 - 4x - 1 = 0$

b) $4x^2 + 12x + 5 = 0$

c) $x^2 - 6x - 11 = 0$

d) $x^2 + 4x + 6 = 0$

e) $x^2 + x - 1 = 0$

f) $25x^2 + 30x + 2 = 0$

Corrigé 3

a) $S = \{2 - \sqrt{5}; 2 + \sqrt{5}\}$

b) $S = \left\{-\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}\right\}$

c) $S = \{3 - 2\sqrt{5}; 3 + 2\sqrt{5}\}$

d) $S = \emptyset$

e) $S = \left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$

f) $S = \left\{\frac{-3-\sqrt{7}}{5}; \frac{-3+\sqrt{7}}{5}\right\}$

4.4 Formule du discriminant

Exercice 4 Résoudre dans $\mathbb{R}$.

a) $3x^2 + 26x - 9 = 0$ b) $64 = -x^2$ c) $x^2 + 5x - 5 = 0$
d) $2x^2 = x - 1$ e) $x^2 - 10x + 63 = 0$ f) $4x^2 - 20x + 25 = 0$
g) $7x^2 + 25x - 12 = 0$ h) $x^2 = 2x$ i) $9x^2 + 42x + 49 = 0$
j) $6x^2 - 13x + 6 = 0$ k) $x^2 - 6x + 4 = 0$ l) $4x(1 + x) = -1$

Corrigé 4

a) $S = \left\{-9; \frac{1}{3}\right\}$ b) $S = \emptyset$ c) $S = \left\{\frac{-5 - 3\sqrt{5}}{2}; \frac{-5 + 3\sqrt{5}}{2}\right\}$

d) $S = \emptyset$ e) $S = \emptyset$ f) $S = \left\{\frac{5}{2}\right\}$

g) $S = \left\{-4; \frac{3}{7}\right\}$ h) $S = \{0; 2\}$ i) $S = \left\{-\frac{7}{3}\right\}$

j) $S = \left\{\frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right\}$ k) $S = \left\{3 - \sqrt{5}; 3 + \sqrt{5}\right\}$ l) $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

Exercice 5 Former une équation du second degré ayant pour solutions :

a) 7 et -3 b) 3 et $\frac{1}{2}$

c) $2 + \sqrt{6}$ et $2 - \sqrt{6}$ d) $\frac{-1 - \sqrt{3}}{3}$ et $\frac{-1 + \sqrt{3}}{3}$

Exprimer la réponse sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$, où a, b et c sont des nombres entiers.

Corrigé 5 $x^2 - 4x - 21 = 0$; $2x^2 - 7x + 3 = 0$; $x^2 - 4x - 2 = 0$; $9x^2 + 6x - 2 = 0$

4.5 Résolutions générales d'équations

Exercice 6 Factoriser les polynômes suivants dans $\mathbb{R}$ lorsque c'est possible :

a) $10x^2 + 9x - 9$ b) $-4x^2 + 12x - 7$
c) $5x^2 - 40x + 76$ d) $x^2 - x + 2$

Corrigé 6

a) $10\left(x + \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{3}{5}\right) (= (2x + 3)(5x - 3))$

b) $-4\left(x - \frac{3 - \sqrt{2}}{2}\right)\left(x - \frac{3 + \sqrt{2}}{2}\right) (= -(2x - 3 + \sqrt{2})(2x - 3 - \sqrt{2}))$

c) $5\left(x - \frac{20 - 2\sqrt{5}}{5}\right)\left(x - \frac{20 - 2\sqrt{5}}{5}\right)$

d) non factorisable dans $\mathbb{R}$

Exercice 7 Soit le polynôme $x^6 - 1$.

a) Le factoriser de deux manières différentes (indications : $x^6 = \left(x^3\right)^2 = \left(x^2\right)^3$ et utiliser l'activité 1).

b) En déduire une factorisation pour le polynôme $x^4 + x^2 + 1$.

Corrigé 7 *Correction générée par IA*

a) Nous avons $x^6 - 1$.
Première factorisation : Utilisons $x^6 = (x^3)^2$, ce qui donne une différence de deux carrés :

$$x^6 - 1 = (x^3)^2 - 1^2 = (x^3 - 1)(x^3 + 1)$$

ensuite factoriser chaque terme ce qui donne une différence de deux cubes :

$$x^6 - 1 = (x^2)^3 - 1^3 = (x^2 - 1)((x^2)^2 + x^2 + 1) = (x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1)$$

factoriser $x^2 - 1$:

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

$$\boxed{x^6 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^4 + x^2 + 1)}$$

b) En comparant les deux factorisations, nous avons :

$$(x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^4 + x^2 + 1)$$

$$(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) = x^4 + x^2 + 1$$

Développons le membre de gauche pour vérifier :

$$\begin{aligned}(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) &= x^4 - x^3 + x^2 + x^3 - x^2 + x + x^2 - x + 1\\ &= x^4 + x^2 + 1\end{aligned}$$

$$\boxed{x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)}$$

Exercice 8 Résoudre les équations dans $\mathbb{R}$:

a) $x^3 - 6x^2 - 5x + 30 = 0$

b) $\left(x^2 + 4\right)\left(x^2 - x + 1\right) = 0$

c) $(2x - 1)\left(x^2 - 4x - 2\right) = 0$

d) $x^4 - 11x^2 + 30 = 0$

Corrigé 8

a) $S = \{6; -\sqrt{5}; \sqrt{5}\}$;

b) $S = \emptyset$;

c) $S = \left\{\frac{1}{2}; 2 + \sqrt{6}; 2 - \sqrt{6}\right\}$;

d) $S = \{-\sqrt{5}; \sqrt{5}; -\sqrt{6}; \sqrt{6}\}$.

Exercice 9 Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

a) $x^2 - 10x + 16 = 0$

b) $7x^3 + 9 = 3x^2 + 21x$

c) $(x - 4)(x + 5) - 2x(x + 5) = 0$

d) $x^2 = 8x$

e) $(x + 1)(x + 2) = (x + 2)(x + 3)$

f) $(x - 8)(4x - 3) + x^2 - 8x = 0$

g) $(2x + 3)^2 = 8 - x(2 - 3x)$

h) $(x - 3)^2 - 2x = 3x^2 - 1$

i) $-(-1 - 4x)^2 = 1 - (5x - 1)^2$

j) $4x^2 + 8x + 1 = 6$

Corrigé 9

a) $S = \{2; 8\}$

b) $S = \left\{\frac{3}{7}; -\sqrt{3}; \sqrt{3}\right\}$

c) $S = \{-5; -4\}$

d) $S = \{0; 8\}$

e) $S = \{-2\}$

f) $S = \left\{8; \frac{3}{5}\right\}$

g) $S = \{-7 + 4\sqrt{3}; -7 - 4\sqrt{3}\}$

h) $S = \{-5; 1\}$

i) $S = \left\{\frac{3 - \sqrt{10}}{3}; \frac{3 + \sqrt{10}}{3}\right\}$

j) $S = \left\{-\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right\}$

Exercice 10 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $5x^2 - 8x = 0$

b) $4x^3 = 9x$

c) $2x^3 = 98x$

d) $3(x + 2) = x(x + 2)$

e) $4x^2 + 4x + 1 = 0$

f) $(2x - 6)(x + 6) - (4x + 2)(x + 6) = 0$

Corrigé 10 Solutions : $\left\{0; \frac{8}{5}\right\}$; $\left\{-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; 0\right\}$; $\{0; -7; 7\}$; $\{-2; 3\}$; $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$; $\{-6; -4\}$

Exercice 11 Résoudre dans $\mathbb{R}$.

a) $(x + 1)(x + 2) + (x + 3)(x + 4) = 42$

b) $(x - 6)(x + 1) - (2x + 3)(x - 5) = 0$

c) $(3x - 5)^2 - 12x = 1$

d) $(2x + 1)^2 + 3x = 1$

e) $(x - 3)^2 + (x + 4)^2 = x(x + 1)$

f) $(x + 1)^2 - (x - 1)^2 = (x - 8)^2$

g) $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{4x}{5} - 19 = \dfrac{76}{5}$

h) $\dfrac{(x - 2)^2}{5} - \dfrac{(x - 3)^2}{4} = 0$

i) $x = \dfrac{2}{5} + \dfrac{5x^2}{16}$

j) $18x^3 - 5 = 2x - 45x^2$

Corrigé 11

a) $S = \{-7; 2\}$

b) $S = \{1 - \sqrt{10}; 1 + \sqrt{10}\}$;

c) $S = \left\{\frac{2}{3}; 4\right\}$;

d) $S = \left\{-\frac{7}{4}; 0\right\}$;

e) $S = \emptyset$

f) $S = \{4; 16\}$;

g) $S = \left\{-\frac{57}{5}; 9\right\}$;

h) $S = \{7 - 2\sqrt{5}; 7 + 2\sqrt{5}\}$;

i) $S = \left\{\frac{8-4\sqrt{2}}{5}; \frac{8+4\sqrt{2}}{5}\right\}$

j) $S = \left\{-\frac{5}{2}; \frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right\}$

Exercice 12 On considère l'équation : $x^3 - 4 = 15x$.

a) Un entier naturel est solution de cette équation ; trouver lequel et justifier à l'aide de la définition du mot solution.

b) Montrer que le nombre irrationnel $\sqrt{3} - 2$ est aussi solution de cette équation.

Corrigé 12 a) 4 b) à vérifier

Exercice 13 Résoudre les équations dans $\mathbb{R}$.

a) $(2x-3)^2=(7x+3)^2$
b) $12x-9x^2=4$
c) $4x(x+1)=-1$
d) $9x^2-27=0$
e) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(5x-7)=\sqrt{2}x+\sqrt{18}$
f) $x^2+4x=32$
g) $4(x-7)=x^2(x-7)$
h) $x^3-2=x(2x-1)$

Corrigé 13 $S=\left\{0;-\frac{6}{5}\right\}$ $S=\left\{\frac{2}{3}\right\}$ $S=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ $S=\{-\sqrt{3};\sqrt{3}\}$ $S=\left\{\frac{13}{3}\right\}$ $S=\{-8;4\}$ $S=\{-2;2;7\}$ $S=\{2\}$

Exercice 14 Résoudre les équations dans $\mathbb{R}$.

a) $x^2-5=8(2x+6)-(x-5)^2$
b) $x^3+2x^2=3x+6$
c) $x^3+9x^2-2x-18=0$
d) $\left(x^2-2x\right)^2-1=0$

Corrigé 14 $\{-1;14\}$ $\{-9;-\sqrt{2};\sqrt{2}\}$ $\{-\sqrt{3};\sqrt{3};2\}$ $\{1;1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}\}$

4.6 Résolution de problèmes

Exercice 15 Trouver trois nombres entiers consécutifs tels que leur produit vaut le quintuple de leur somme.
(Indication : prendre l'entier intermédiaire comme inconnue x.)

Corrigé 15 Il s'agit de $-5, -4$ et -3 ou de $-1, 0$ et 1 ou de $3, 4$ et 5.

Exercice 16 Trouver deux nombres dont la différence et le produit valent 1.

Corrigé 16 Deux possibilités : $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$; $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 17 Un terrain rectangulaire a un périmètre de 150 m. Si l'on augmente sa largeur de 5 m et si l'on diminue sa longueur de 3 m, alors son aire augmente de 120 m^2. Quelles sont les dimensions de ce rectangle ?

Corrigé 17 On pose les inconnues

$x =$ La largeur du rectangle $\qquad y =$ La longueur du rectangle

On obtient le système $\begin{cases} 2x + 2y = 150 \\ (x+5)(y-3) = xy + 120 \end{cases}$ On résout le système après avoir simplifié au maximum la deuxième équation

$$(x+5)(y-3) = xy + 120 \iff xy - 3x + 5y - 15 = xy + 120 \iff -3x + 5y = 135.$$

On obtient que $x = 30$cm et $y = 45$cm. Le rectangle mesure 30cm sur 45cm.

Exercice 18 Les deux côtés d'un rectangle ont 6 mètres de différence. Trouver ses dimensions sachant que son aire est de 9 m^2.

Corrigé 18 Il mesure $-3 + 3\sqrt{2}$ m sur $3 + 3\sqrt{2}$ m.

Exercice 19 Une agence de voyage organise une excursion. Le prix du billet a été fixé à 60 CHF, mais la compagnie a consenti, dans le cas où plus de 100 personnes feraient le voyage, à baisser le prix de chaque billet de 25 cts par personne additionnelle. Sachant qu'il en coûte 1000 CHF à l'agence pour transporter les 100 premiers passagers et 15 CHF par passager additionnel, trouver le nombre de passagers pour lequel le bénéfice net de la compagnie est maximal. Interpréter graphiquement.

Corrigé 19

$$\text{Pour } \mathrm{N} < 100 : \quad \text{Bénéfice} = 60\,\mathrm{N} - 1000.$$

Cette fonction est linéaire croissante en N. Donc son maximum dans cette plage est atteint en $\mathrm{N} = 100$. À $\mathrm{N} = 100$, on obtient

$$\mathrm{B}(100) = 60 \times 100 - 1000 = 5000.$$

$$\text{Pour } \mathrm{N} \geq 100 : \quad x = \mathrm{N} - 100, \quad \text{Prix par billet} = 60 - 0{,}25\,x,$$

$$\text{Coût total} = 1000 + 15\,x, \quad \text{Revenu} = (100 + x)\big(60 - 0{,}25\,x\big).$$

$$\text{Bénéfice} = (100 + x)\big(60 - 0{,}25\,x\big) - \big(1000 + 15\,x\big) = 5000 + 20\,x - 0{,}25\,x^2.$$

Le sommet de cette parabole (coefficient dominant $-0{,}25 < 0$) est :

$$x_{\text{max}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{20}{2 \cdot (-0{,}25)} = 40.$$

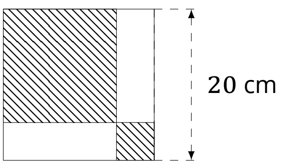
Soit $\mathrm{N} = 100 + 40 = 140$. Le bénéfice maximum alors :

$$\mathrm{B}(140) = 5000 + 20 \times 40 - 0{,}25 \times 40^2 = 5400.$$

Comme $5400 > 5000$, le bénéfice maximal **n'est pas atteint en dessous de 100 passagers** mais bien en $\mathrm{N} = 140$.

Exercice 20 La figure ci-dessous est formée de trois carrés.

Que doit mesurer le côté du petit carré pour que la partie ombrée ait une surface triple de la partie blanche ?



Corrigé 20 $5(2 - \sqrt{2})$ cm (la deuxième solution est la mesure du côté du grand carré).

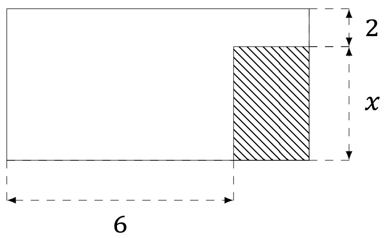
Exercice 21 Un nombre est le produit de trois entiers consécutifs. Si l'on divise ce nombre successivement par chacun des trois entiers, la somme des quotients ainsi obtenus est de 767. De quel nombre s'agit-il ?

Corrigé 21 4080 ou -4080.

Exercice 22 La somme des carrés de trois nombres entiers consécutifs dépasse de 288 la somme des carrés des deux nombres entiers précédents. Quels sont ces cinq nombres ?

Corrigé 22 $\{10,11,12,13,14\}$ ou $\{-26,-25,-24,-23,-22\}$

Exercice 23 Sur le dessin ci-dessous, la figure ombrée est un carré, et le grand quadrilatère, un rectangle.
(Toutes les longueurs sont en cm.)



Déterminer x pour que l'aire de la partie blanche soit égale à 38 cm^2.

Corrigé 23 $\frac{13}{4}$

4.7 Équations bicarrées

Exercice 24 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

b) $x^2\left(x^2+1\right) = 12$

c) $2x^4 + x^2 - 3 = 0$

d) $4x^4 - 6x^2 + 1 = 0$

(Indication : utiliser la factorisation ou le changement de variable $y = x^2$)

Corrigé 24 $S = \{-3;-2;2;3\}$; $S = \{-1;1\}$; $S = \{-\sqrt{3};\sqrt{3}\}$; $S = \left\{-\frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{2};\frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{2};-\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{2};\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{2}\right\}$

Exercice 25 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $x^6 + 4x^3 - 32 = 0$, de deux façons :

a) par un changement de variable approprié ;

b) par factorisation directe (identités remarquables).

Corrigé 25 $S = \{-2;\sqrt[3]{4}\}$

4.8 Équations irrationnelles

Exercice 26 Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$

a) $\sqrt{(x-1)(3x-6)} = x-2$

b) $\sqrt{2x+7} = \sqrt{x}+2$

c) $4x-1 = \sqrt{7x^2-2x+8}$

d) $\sqrt{x+8}-\sqrt{x+3} = 5\sqrt{x}$

e) $\sqrt{x+8}+\sqrt{x+3} = 5\sqrt{x}$

f) $\sqrt{7x-27} = \sqrt{2x+1}+\sqrt{3x+4}$

Corrigé 26 $S=\{2\}$; $S=\{1;9\}$; $S=\left\{\frac{1+2\sqrt{2}}{3}\right\}$; $S=\left\{\frac{1}{21}\right\}$; $S=\{1\}$; $S=\emptyset$

4.9 Systèmes d'équations

Exercice 27 Résoudre les systèmes d'équations suivants dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

a) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2} = \dfrac{7x-5y}{6} + \dfrac{x+4}{4} \\ \dfrac{x-6y}{2} = \dfrac{x-2y}{7} + 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{x-3}{y-5} = \dfrac{4}{3} \\ \dfrac{x+5}{y+2} = \dfrac{6}{5} \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x-y = x-3y-2 \\ 5-x+\dfrac{3}{2}(x+y) = x+2y+\dfrac{13}{2} \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4x+3y+6z = 41 \\ 8x+5y = 31 \\ 7y = 21 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 6x+4y+8z = 6 \\ 3x+y-2z = 1 \\ 3x+2y-4z = 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x-y-z = 6 \\ x-2y-3z = 10 \\ 5x+6y+z = 2 \end{cases}$

Corrigé 27

a) $\{(-4;-2)\}$

b) $\{(7;8)\}$

c) $\{(-4;1)\}$

d) $\{(2;3;4)\}$

e) $\left\{\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)\right\}$

f) $\{(3;-2;-1)\}$

Exercice 28 Le couple $\left(3;\dfrac{3}{2}\right)$ est-il solution du système $\begin{cases} 7x-12y = 3 \\ -5x+8y = 31 \end{cases}$?

Corrigé 28 Non, le couple n'est pas solution du système.

Exercice 29 Le couple donné est-il solution du système d'équations ?

a) $S=(3;4)$ pour $\begin{cases} x-y=-1 \\ 9x+5y=19 \end{cases}$ b) $S=(-4;-4)$ pour $\begin{cases} -2x+2y=0 \\ -6x-10y=64 \end{cases}$

c) $S=(2;5)$ pour $\begin{cases} 4x-2y=-2 \\ 8x-6y=-14 \end{cases}$ d) $S=(1;-1)$ pour $\begin{cases} 8x+2y=6 \\ 16x+10y=6 \end{cases}$

Corrigé 29

a) Non
b) Oui
c) Oui
d) Oui

Exercice 30 Résoudre les systèmes d'équations suivants en utilisant la méthode de combinaison linéaire.

a) $\begin{cases} 3x+5y=17 \\ 2x+3y=11 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x+2y=24 \\ 4x+3y=29 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4x-5y=-19 \\ 3x+7y=18 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 6x-5y=28 \\ 4x+9y=-6 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 6a-7b=12 \\ 5a-4b=10 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 8r-3s=15 \\ 7r-4s=20 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x+9y=12{,}5 \\ 6x+5y=8{,}9 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 3x+5y=4{,}7 \\ 6x+2y=6{,}2 \end{cases}$ i) $\begin{cases} 7u+8v=23 \\ 3u-2v=-1 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 7c+10d=-13 \\ 3c-2d=7 \end{cases}$ k) $\begin{cases} 4x-3y=2{,}7 \\ 8x+5y=13{,}1 \end{cases}$ l) $\begin{cases} 5x-6y=2{,}7 \\ 10x+7y=1{,}6 \end{cases}$

m) $\begin{cases} 3x-5y=-29 \\ 2x-10y=-42 \end{cases}$ n) $\begin{cases} 7x-2y=-26 \\ 5x-12y=-45 \end{cases}$ o) $\begin{cases} 4x+y=42 \\ 6x-5y=50 \end{cases}$

p) $\begin{cases} 2x+9y=39 \\ 5x-y=-20 \end{cases}$ q) $\begin{cases} x+12y=-8 \\ 8x-5y=37 \end{cases}$ r) $\begin{cases} 7x-8y=51 \\ x+10y=-15 \end{cases}$

s) $\begin{cases} 5x+7y=18{,}9 \\ 2x-3y=-8{,}1 \end{cases}$ t) $\begin{cases} 6x+5y=5{,}1 \\ 4x-2y=-1{,}4 \end{cases}$

Corrigé 30

a) $(4;1)$ b) $(2;7)$ c) $(-1;3)$ d) $(3;-2)$ e) $(2;0)$
f) $(0;-5)$ g) $(0{,}4;1{,}3)$ h) $(0{,}9;0{,}4)$ i) $(1;2)$ j) $(1;-2)$
k) $(1{,}2;0{,}7)$ l) $(0{,}3;-0{,}2)$ m) $(-4;3{,}4)$ n) $(-3;2{,}5)$ o) $(10;2)$
p) $(-3;5)$ q) $(4;-1)$ r) $(5;-2)$ s) $(0;2{,}7)$ t) $(0{,}1;0{,}9)$

Exercice 31 Résoudre les systèmes d'équations suivants en utilisant la méthode de combinaison linéaire.

a) $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ 2x + y = 15 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x + y = 10 \\ 6x - y = 20 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 4y = 17 \\ -x + 7y = 38 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -x + 5y = 6 \\ x + 3y = 18 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 8x + y = 21 \\ 3x + y = 13 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 7x + y = 47 \\ 2x + y = 19 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x - 4y = 23 \\ x + 5y = -4 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x - 6y = 13 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$ i) $\begin{cases} 5x + 3y = 27 \\ 7x - 3y = 45 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 2x + 5y = 14 \\ 7x - 5y = -41 \end{cases}$ k) $\begin{cases} -2x + 7y = 8{,}7 \\ 2x + 3y = 18{,}3 \end{cases}$ l) $\begin{cases} -4x + 8y = -3{,}6 \\ 4x - 3y = 13{,}1 \end{cases}$

m) $\begin{cases} 10x + 7y = -30 \\ 8x + 7y = -24 \end{cases}$ n) $\begin{cases} 6x + 11y = -48 \\ x + 11y = -8 \end{cases}$ o) $\begin{cases} 5x - y = 22 \\ 5x + 4y = -63 \end{cases}$

p) $\begin{cases} 3x - 5y = 61 \\ 3x - y = 17 \end{cases}$ q) $\begin{cases} 2{,}3x - 1{,}7y = 3{,}5 \\ 4{,}7x - 1{,}7y = 10{,}7 \end{cases}$ r) $\begin{cases} 4{,}1x - 1{,}3y = 7{,}1 \\ 2{,}9x - 1{,}3y = 3{,}5 \end{cases}$

s) $\begin{cases} 10x - 4y = 35 \\ 3x + 4y = 21 \end{cases}$ t) $\begin{cases} 9x + 2y = 59 \\ -2x - 2y = -8 \end{cases}$

Corrigé 31

a) $(4; 7)$ b) $(3; -2)$ c) $(-3; 5)$ d) $(9; 3)$ e) $(1{,}6; 8{,}2)$
f) $(5{,}6; 7{,}8)$ g) $(11; -3)$ h) $(7; -1)$ i) $(6; -1)$ j) $(-3; 4)$
k) $(5{,}1; 2{,}7)$ l) $(4{,}7; 1{,}9)$ m) $(-3; 0)$ n) $(-8; 0)$ o) $(1; -17)$
p) $(2; -11)$ q) $(3; 2)$ r) $(3; 4)$ s) $\left(\frac{56}{13}; \frac{105}{52}\right)$ t) $\left(\frac{51}{7}; -\frac{23}{7}\right)$

Exercice 32 Résoudre les systèmes d'équations suivants avec la méthode de votre choix.

a) $\begin{cases} x - 2y = -5 \\ 7x + 10y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + 5y = 5 \\ 3x - 7y = -2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x + 6y = -2 \\ 10x + 3y = -7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5x + 4y = 13 \\ 2x - 7y = 31 \end{cases}$ e) $\begin{cases} \dfrac{x+5}{2} - \dfrac{3-y}{5} = \dfrac{5}{2} \\ x + 7 + \dfrac{y-6}{4} = 7 \cdot \dfrac{5}{2} \end{cases}$

f) $\begin{cases} \dfrac{x-3}{2} - \dfrac{5}{2} = \dfrac{2y-21}{2} + 1 \\ \dfrac{x+2}{3} + 3 = \dfrac{3-y}{5} - \dfrac{10}{3} \end{cases}$

Corrigé 32

a) $S = \left\{-2; \frac{3}{2}\right\}$ b) $S = \left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$ c) $S = \left\{-\frac{4}{5}; \frac{1}{3}\right\}$
d) $S = \{5; -3\}$ e) $S = \{30; -72\}$ f) $S = \left\{-\frac{225}{13}; -\frac{41}{13}\right\}$

Exercice 33 Résoudre les systèmes suivants en utilisant la méthode de la substitution.

a) $\begin{cases} y = 2x \\ 3x + y = 10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = 3x \\ 2x - y = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = 3x \\ 5x - 2y = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = 2x \\ 4x + 3y = 30 \end{cases}$ e) $\begin{cases} y = x + 4 \\ 3x + y = 16 \end{cases}$ f) $\begin{cases} y = x - 3 \\ 4x + y = 32 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x = y - 5 \\ 3x + 2y = 3 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x = y + 8 \\ 5x + 3y = 12 \end{cases}$ i) $\begin{cases} 4x + 3y = 31 \\ y = 2x + 7 \end{cases}$

Corrigé 33

a) $(2; 4)$ b) $(-2; -6)$ c) $(-1; -3)$ d) $(3; 6)$ e) $(3; 7)$
f) $(7; 4)$ g) $(-1{,}4; 3{,}6)$ h) $(1{,}8; -1{,}4)$ i) $(1; 9)$

Exercice 34

- Pour chaque système d'équations, donner l'opération à effectuer pour élimer la variable x.

Exemple : $\begin{cases} 8x + 3y = 1 & (1) \\ 3x + 5y = 9 & (2) \end{cases}$

$\mathrm{E1} \cdot 3 + \mathrm{E2} \cdot (-8)$ c'est-à-dire on multiplie (1) par 3 et (2) par -8 puis on addition (1) et (2).

a) $\begin{cases} 2x + 5y = 7 & (1) \\ 3x + 4y = 9 & (2) \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x - 3y = 2 & (1) \\ -5x + 8y = 1 & (2) \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + 10y = 9 & (1) \\ 8x + 5y = 7 & (2) \end{cases}$

- Pour chaque système d'équations, donner l'opération à effectuer pour élimer la variable y.

a) $\begin{cases} 2x + 5y = 7 & (1) \\ 3x + 4y = 9 & (2) \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x - 3y = 2 & (1) \\ -5x + 8y = 1 & (2) \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + 10y = 9 & (1) \\ 8x + 5y = 7 & (2) \end{cases}$

Corrigé 34

Par exemple, pour éliminer x :

a) $\mathrm{E1} \cdot 3 - \mathrm{E2} \cdot 2$ b) $\mathrm{E1} \cdot 5 + \mathrm{E2} \cdot 4$ c) $\mathrm{E1} \cdot 4 - \mathrm{E2}$

Par exemple, pour éliminer y :

a) $\mathrm{E1} \cdot 4 - \mathrm{E2} \cdot 5$ b) $\mathrm{E1} \cdot 8 + \mathrm{E2} \cdot 3$ c) $\mathrm{E1} - \mathrm{E2} \cdot 2$

Exercice 35 Résoudre les systèmes d'équations suivants dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

a) $\begin{cases} \dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{2} \\ 12x + 3y + 14 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 4 \\ 3x + y - 4z = 7 \\ x + 2y - 5z = 1 \end{cases}$

Corrigé 35

a) $\left\{\left(-1; -\frac{2}{3}\right)\right\}$ b) $\{(2; -3; -1)\}$

Exercice 36 Pour chaque système d'équations, donner l'équation obtenue après avoir élimé une des variables.

Exemple : $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ -3x - 4y = 8 \end{cases}$

On élimine x en additionnant la première équation à la deuxième équation. On obtient

$$\begin{array}{rrcr} & 3x - 2y & = & 5 \\ + & & & \\ & -3x - 4y & = & 8 \\ \hline & 0x + 2y & = & 13 \end{array}$$

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 4x - 3y = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 7x - 4y = 9 \\ 2x + 4y = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + 8y = -3 \\ -2x + 5y = 10 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x + 4y = 8 \\ -3x + 5y = -1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 4x - 5y = 9 \\ -3x + 5y = -7 \end{cases}$ f) $\begin{cases} -4x - 3y = -1 \\ 4x + 8y = 5 \end{cases}$

Corrigé 36 On remarque que dans tous ces systèmes, une des variables de la première équation apparaît avec un coefficient opposé dans l'autre équation. On additionne donc à chaque fois la première équation à la deuxième pour éliminer une des variables.

a) $6x = 12$ b) $9x = 12$ c) $13y = 7$

d) $9y = 7$ e) $x = 2$ f) $5y = 4$

Exercice 37 Donner un système de deux équations à deux inconnues dont l'ensemble des solutions est

$$S = \{(-2; 3)\}.$$

Corrigé 37 Réponse à vérifier individuellement.

Exercice 38 Résoudre les systèmes suivants en utilisant la méthode de la substitution.

a) $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 5x - 3y = -29 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + y = 13 \\ 2x - 4y = 18 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 6x - y = 31 \\ 4x + 3y = 17 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - 7y = -22 \\ 5x + 2y = 1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 7x - 6y = -30 \\ x - 4y = -20 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2x - 9y = 14 \\ 6x - y = 42 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x + y = 23 \\ 9x - 8y = 27 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x - y = 6 \\ 10x + 11y = 149 \end{cases}$ i) $\begin{cases} x - 3y = 13 \\ 5x + 3y = 2 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 7x - 3y = -23 \\ x + 5y = 32 \end{cases}$ k) $\begin{cases} 3(x + y - 2) = -4 \\ 4x - 7y = 36 \end{cases}$ l) $\begin{cases} 4(x + y - 3) = -11 \\ 6x - 2y = -16 \end{cases}$

m) $\begin{cases} x + 6y = 19 \\ 5(x + 2y - 7) = -24 \end{cases}$ n) $\begin{cases} x + 5y = 22 \\ 3(x + 4y - 9) = -5 \end{cases}$ o) $\begin{cases} 2(x - y + 3) = 7 \\ 7x - 3(y - 1) = 9 \end{cases}$

Corrigé 38

a) $(-4;3)$ b) $(5;-2)$ c) $(5;-1)$ d) $(-1;3)$ e) $(0;5)$

f) $(7;0)$ g) $\left(\frac{211}{17};\frac{180}{17}\right)$ h) $\left(\frac{215}{21};\frac{89}{21}\right)$ i) $(2{,}5;-3{,}5)$ j) $(-0{,}5;6{,}5)$

k) $\left(\frac{122}{33};-\frac{100}{33}\right)$ l) $\left(\frac{-31}{16};\frac{35}{16}\right)$ m) $(-6{,}2;4{,}2)$ n) $\left(\frac{-154}{3};\frac{44}{3}\right)$ o) $\left(\frac{9}{8};\frac{5}{8}\right)$

4.10 Résolution de problèmes

Exercice 39 Céline regarde avec envie un pull et une robe présentés dans la vitrine d'une boutique. Malheureusement, le prix total de ces deux vêtements est de 137.50 francs et dépasse son budget. Quelques temps après, le prix du pull baisse de 20% et celui de la robe de 30%. Céline calcule rapidement la dépense totale et constate que le prix total a baissé de 35 francs, ce qui lui permet d'acheter ces deux vêtements. Quels étaient les prix du pull et de la robe avant la baisse ?

Corrigé 39 On pose les inconnues

$x =$ Le prix du pull avant rabais $\qquad y =$ Le prix de la robe avant rabais

On obtient le système $\begin{cases} x+y=137{,}50 \\ x-\frac{20}{100}x+y-\frac{30}{100}y=137{,}50-35 \end{cases}$ On réduit au maximum la deuxième équation :

$$x-\frac{20}{100}x+y-\frac{30}{100}y=137{,}50-32{,}50 \iff \frac{8}{10}x+\frac{7}{10}y=102{,}50 \iff 8x+7y=1025$$

Puis on résout le système $\begin{cases} x+y=137{,}50 \\ 8x+7y=1025 \end{cases}$ (par exemple par combinaison) et on obtient que $x=62{,}5$ et $y=75$, ainsi le prix du pull avant le rabais est de 62,50 francs et le prix de la robe avant le rabais était de 75 francs.

Exercice 40 Traduire chacune des ces situations par un système de deux équations et déterminer les solutions.

i) La somme de deux nombrres est 100. La différence de ces deux nombres est 68. Quels sont ces nombres ?

ii) Entendu de bon matin à la terrasse d'un café :
- ”Deux chocolats et trois croissants : Fr. 8,90.”
- ”Trois chocolats et cinq croissants : Fr. 13,80.”

Quel est le prix d'un chocolat ? Et celui d'un croissant ?

iii) 350 spectateurs ont assisté à un spectacle. Au parterre, la place revient à Fr. 20.–; à la galerie, elle revient à Fr. 30.–.
Le montant de la recette des entrées est de Fr. 7850.–.
Combien y avait-il de spectateurs au parterre ? Et à la galerie ?

Corrigé 40

a) On pose les inconnues

$x =$ le premier nombre $\qquad y =$ le deuxième nombre

On obtient le système $\begin{cases} x + y = 100 \\ x - y = 68 \end{cases}$ On résout le système (par exemple par combinaison) et on obtient $x = 84$ et $y = 16$. Le premier nombre vaut 84 et le deuxième 16.

b) On pose les inconnues

$x =$ Le prix d'un chocolat $\qquad y =$ Le prix d'un croissant

On obtient le système $\begin{cases} 2x + 3y = 8{,}90 \\ 3x + 5y = 13{,}80 \end{cases}$ On résout le système (par exemple par combinaison) et on obtient que $x = 3{,}10$ et $y = 0{,}90$. Donc un chocolat coûte CHF 3,10 et un croissant coûte CHF 0,90.

c) On pose les inconnues

$x =$ Le nombre de spectateurs au parterre $\qquad y =$ Le nombre de spectateurs à la gallerie

On obtient le système $\begin{cases} x + y = 350 \\ 20x + 30y = 7850 \end{cases}$ On résout le système (par exemple par combinaison) et on obtient que $x = 265$ et $y = 85$. Il y avait donc 265 spectateurs au parterre et 85 dans la gallerie.

Exercice 41 Ecrire un système d'équations permettant de résoudre chacun des problèmes.

a) Un nombre de trois chiffres est tel que le produit de ses chiffres divisé par leur somme donne 32 tiers ; le nombre lui-même divisé par la même somme donne 48 ; enfin, le chiffre des dizaines dépasse celui des unités d'autant qu'il est dépassé par celui des centaines. Quel est ce nombre ?

b) Si d'un nombre de quatre chiffres on soustrait le nombre qu'on obtient en écrivant les chiffres dans l'ordre inverse, on trouve 4725. Le produit des chiffres est 672, le produit des chiffres du milieu 28 et le chiffre des milliers est supérieur de 5 à celui des unités. Quel est ce nombre ?

Corrigé 41

a) 864 $\qquad$ b) 8473

Exercice 42 Pour organiser une sortie de fin d'année, un collège loue des cars. Il y a des grands cars de 56 places et des petits cars de 44 places. Il y a quatre grands cars de plus que de petits. 624 élèves participent à la sortie et tous les cars sont remplis. Combien le collège a-t-il loué de cars de chaque catégorie ?

Corrigé 42

On pose les inconnues

$x =$ Nombre de cars à 44 places $\qquad y =$ Nombre de cars à 56 places

On obtient le système $\begin{cases} y - x = 4 \\ 56y + 44x = 624 \end{cases}$ On résout le système (par exemple par substitution) et on obtient que $x = 4$ et $y = 8$. Le cycle a donc loué 4 petits cars et 8 grands cars.

Exercice 43 On a payé une somme globale de $29'280$ francs pour l'achat des trois séries de meubles suivantes :

- 20 canapés, copie Directoire ;
- 18 fauteuils, copie Louis XV ;
- 16 chaises, copie Empire.

Sachant que 13 canapés valent autant que 21 fauteuils et que 3 fauteuils ont la même valeur que 8 chaises, on demande les prix d'un canapé d'un fauteuil et d'une chaise.

Corrigé 43 CHF 840 le canapé, CHF 520 le fauteuil, CHF 195 la chaise.

Exercice 44 Un groupe de vingt-quatre personnes fait un stage de deux jours dans une école de voile. Deux activités sont au programme : la planche à voile ou le catamaran. Le premier jour, dix personnes choisissent la planche à voile et les autres le catamaran. La facture totale de ce premier jour s'élève à 560 francs. Le deuxième jour, ils sont douze à choisir la planche à voile et les autres font du catamaran. La facture du deuxième jour s'élèves à 540 francs.
Quel est le prix par personne d'une journée de planche à voile et celui d'une journée de catamaran ?

Corrigé 44 On pose les inconnues

$x =$ le prix d'une journée en planche à voile $\qquad y =$ le prix d'une journée en catamaran

On obtient le système $\begin{cases} 10x + 14y = 560 \\ 12x + 12y = 540 \end{cases}$ On résout le système (par exemple par combinaison) et on obtient que $x = 17{,}50$ et $y = 27{,}50$. Une journée en planche à voile coûte CHF $17{,}50$ et une journée en catamaran CHF $27{,}50$.

Exercice 45 Un confiseur répartit des truffes dans des cornets de 200 g. S'il avait réparti ses truffes dans des cornets de 150 g, il y aurait eu 12 cornets de plus.
Quelle quantité de truffes a-t-il préparée ?

Corrigé 45 On pose les inconnues

$x =$ Le nombre de sachet de 200g $\qquad y =$ Le nombre de sachet de 150g

On obtient le système $\begin{cases} y - x = 12 \\ 200x = 150y \end{cases}$ On résout le système (par exemple par substitution) et on obtient que $x = 36$ et $y = 48$. Le confiseur a donc préparé $36 \cdot 200 = 7{,}2$kg de truffes.