Chapitre 2 :
Calcul différentiel

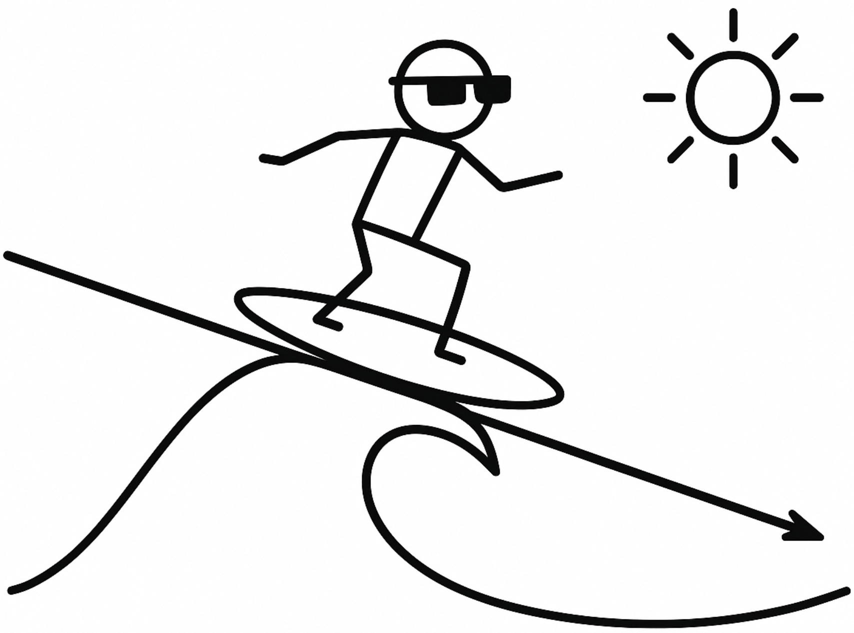


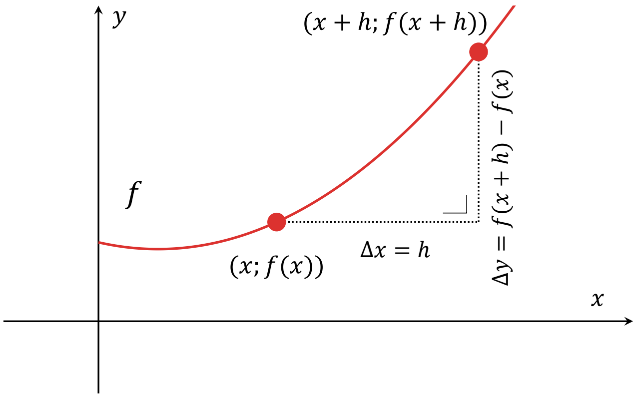
Table des matières

Calcul différentiel SECTION 1

La dérivée

1.1 Introduction : La tangente à une courbe en un point

Nous commençons avec une fonction f, et sur le graphique nous choisissons un point $(x, f(x))$ (c.f. Figure 1). Quelle droite, s'il y en a une, devrait être appelée tangente au graphique en ce point ? Et comment déterminer son équation ?



(a) Un point sur le graphe de f

(b) Une appliquette pour visualiser différentes situations

Figure 1 – Introduction à notion de dérivée

Pour répondre à cette question, nous choisissons un petit nombre $h \neq 0$ et sur le graphique marquons le point $(x+h, f(x+h))$. Maintenant nous traçons la droite sécante qui passe par ces deux points. La situation est illustrée dans la Figure 3.1.2 en prenant des valeurs de $h > 0$.

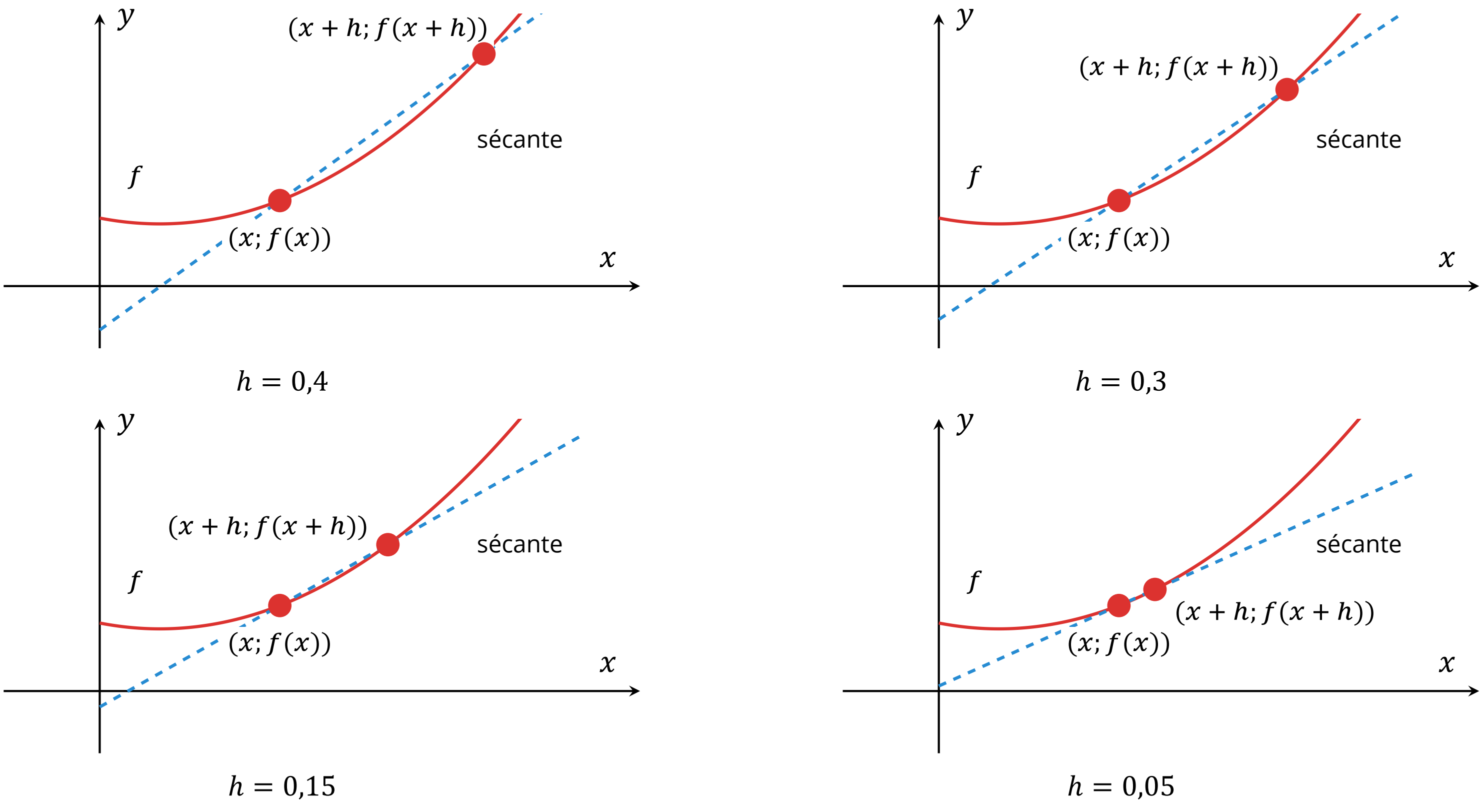


Figure 2 – Construction de la dérivée

Lorsque h tend vers zéro (une limite !), la droite sécante tend (si la limite existe) vers « la tangente de f au point $(x, f(x))$ ».
Puisque les droites sécantes ont une pente de la forme

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \tag{1}$$

nous admettons que la position limite de ces sécantes ont une pente

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}. \tag{2}$$

Nous commençons l'étude systématique de telles limites, ce que les mathématiciens appellent le calcul différentiel.

Voyage au pays de maths – Flâneries infinitésimales

1.2 Définitions et exemples

Définition Une fonction est dite dérivable en x ssi la limite

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \text{ existe et est finie.} \tag{$\star$}$$

Si cette limite existe, on l'appelle la dérivée de f en x et on la note $f'(x)$.

Définition On interprète $f'(x)$ comme la pente de la courbe f au point $(x; f(x))$. La droite qui passe par ce point et qui a cette pente s'appelle la tangente à f au point $(x; f(x))$.

Remarque Certaines fonctions sont dérivable sur $\mathbb{R}$, d'autres seulement sur un intervalle donné ou en certains points.

Remarque On parle de dérivée à droite ou dérivée à gauche si au lieu de prendre la limite birectionnelle dans ($\star$), on prend la limite à droite ou à gauche.

Commençons par calculer quelques dérivées à l'aide de la définition.

Exemple 1 Calcul de la dérivée de $f(x) = x^2$.
On part de la définition de la dérivée, on a

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\ &= \frac{2xh + h^2}{h} \\ &= 2x + h\end{aligned}$$

On prend la limite quand $h \to 0$ et on a

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x.$$

Exemple 2 Calcul de la dérivée de $f(x) = ax + b$. On part de la définition

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\qquad\qquad\qquad\qquad}{h} \\ &= \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ &= \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\end{aligned}$$

On prend la limite évidente et on obtient

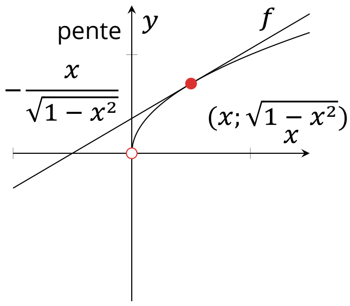
Remarque Remarquons que

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

est une limite à droite et à gauche. Par conséquent, elle ne peut pas être prise en un point d'extrémité du domaine (on doit être sur un ouvert). Dans notre prochain exemple, nous traitons le cas de la fonction racine carrée. Bien que cette fonction soit définie pour tout $x \geq 0$, nous ne pouvons avoir une dérivée que pour $x > 0$.

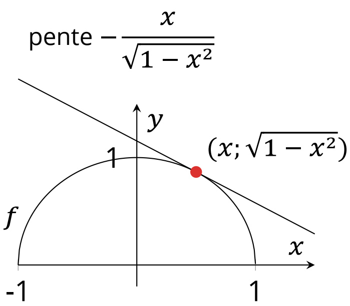
Exemple 3

Calcul de la dérivée de $f(x) = \sqrt{x}$ pour $x > 0$.



Exemple 4

Calcul de la dérivée de $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ pour $x \in]-1;1[$.



1.3 Le nombre dérivé

Parfois on s'intéresse à calculer la dérivée seulement en un point. Pour un a donné, on appelle $f'(a)$ le nombre dérivé de f en a. C'est la valeur de la dérivée évaluée en a.

Exemple 5 Calculer $f'(-2)$ pour $f(x) = 1 - x^2$.
On a deux possibilités.

Calculer $f'(x)$ Nous pouvons d'abord trouver $f'(x)$ en général :

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[1-(x+h)^2] - [1-x^2]}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2xh - h^2}{h} = \lim_{h\to 0} -2x-h = -2x.$$

et ensuite substituer -2 pour x :

$$f'(-2) = -2(-2) = 4.$$

Calculer $f'(-2)$ Nous pouvons aussi évaluer $f'(-2)$ plus directement :

$$f'(-2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[1-(-2+h)^2] - [1-(-2)^2]}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4h - h^2}{h} = \lim_{h\to 0} 4-h = 4.$$

Exemple 6 Calculer $f'(0)$ si

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1, & x \leq 0 \\ x^3 + 1, & 0 < x \end{cases}.$$

1.4 Relation avec la continuité

Une fonction peut être continue en un certain nombre x sans y être dérivable.

Exemple 7 La fonction valeur absolue

$$f(x) = |x|$$

est continue en 0 (elle est partout continue), mais elle n'est pas dérivable en 0 :

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|0+h| - |0|}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} -1, & h < 0 \\ 1, & h > 0 \end{cases}.$$

de sorte que

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = -1, \quad \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = 1.$$

et

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \quad \text{n'existe pas.}$$

L'échec de la fonction valeur absolue à être dérivable en 0 est reflété par son graphe. En $(0, 0)$, le graphe change brusquement de direction et il n'y a pas de tangente en ce point.

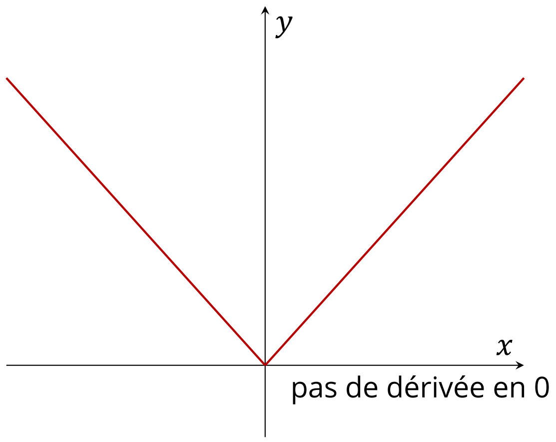


Figure 3 – La fonction valeur absolue

Exemple 8 On observe un changement de direction soudain similaire dans le graphe de

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ x, & x > 1 \end{cases}.$$

au point $(1, 1)$. Encore une fois, f est partout continue (vérifiez-le !), mais elle n'est pas dérivable en 1 :

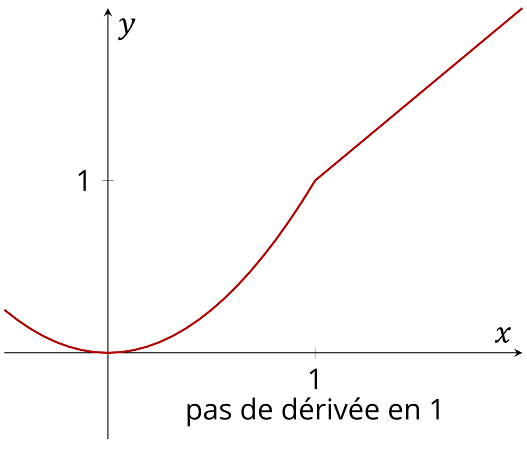


Figure 4 – Une fonction avec un point anguleux

Définition Soit une fonction $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$. Soit $a \in \mathrm{I}$. On dit que a est un **point anguleux** de f ssi

- f est continue en a ;
- au moins une des deux dérivée (à droite ou à gauche) est finie et les deux dérivées sont distinctes.

Théorème 1 Si f est dérivable en x alors f est continue en x.

Preuve. On a

$$\lim_{h\to 0}(f(x)+h)-f(x)) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot h\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot \lim_{h\to 0} h$$ limites ∃ et finies

$$= f'(x)\cdot 0 = 0$$ car $\lim_{h\to 0} h = 0$

donc f est bien continue en x. □

Remarque La réciproque de ce théorème n'est pas valable comme nous l'avons vu aux exemples 7 et 8.

1.5 Règles de dérivation

Calculer les dérivées de fonction comme

$$f(x) = (x^3-2)(4x+1) \quad \text{ou encore} \quad f(x) = \frac{6x^2-1}{x^4+5x+1}$$

peut vite devenir laborieux à l'aide de la définition de la dérivée. Dans cette sous-section, nous énonçons et démontrons des règles de dérivation qui permettent de faciliter le calcul de dérivées.
Pour rappel, on a démontré les deux résultats suivants en exercices

Proposition 1 On a

- Si $f(x) = c, c \in \mathbb{R}$, alors $f'(x) = 0$.
- Si $f(x) = x$, alors $f'(x) = 1$.

Voici un résumé des formules (démontrées plus bas ou en exercices).

Formules Soient f et g des fonctions dérivables en x. Alors

Produit constante $(c\cdot f)'(x) = c\cdot f'(x), c\in\mathbb{R}$

Somme $(f+g)'(x) = f'(x)+g'(x)$

Produit $(f\cdot g)'(x) = f(x)\cdot g'(x) + f'(x)\cdot g(x)$

Inverse $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$, si $g(x)\neq 0$

Quotient $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = -\frac{f(x)\cdot g'(x) - f'(x)\cdot g(x)}{g(x)^2}$

Proposition 2 Soit f une fonction dérivable en x et $c \in \mathbb{R}$ une constante, alors $c \cdot f$ est dérivable en x et $(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$.

Preuve. Il faut montrer que

$$\lim_{h \to 0} \frac{(cf)(x+h) - (cf)(x)}{h} = cf'(x).$$

Ceci découle directement du fait que

$$\frac{(cf)(x+h) - (cf)(x)}{h} = \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} = c\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right].$$

□

Proposition 3 Soient f et g des fonctions dérivables en x, alors $f + g$ est dérivable en x et $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Preuve. On a

$$\begin{aligned}\frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} &= \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h} \\ &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.\end{aligned}$$

Par définition,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x), \quad \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x).$$

Ainsi

$$\lim_{h \to 0} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} = f'(x) + g'(x),$$

ce qui signifie que $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$. □

Proposition 4 Soient f et g des fonctions dérivables en x, alors fg est dérivable en x et $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

Preuve. On a

$$\frac{(fg)(x+h) - (fg)(x)}{h} = \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$
$$= \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h}$$
$$= f(x+h)\left[\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right] + g(x)\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right].$$

Puisque f est dérivable en x, nous savons que f est continue en x et ainsi

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x).$$

Puisque

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x) \quad \text{et} \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x),$$

nous obtenons

$$\lim_{h\to 0} \frac{(fg)(x+h) - (fg)(x)}{h} = f(x)g'(x) + g(x)f'(x).$$

□

Corollaire 1 Si $f(x) = x^n$ pour $n \in \mathbb{N}$, alors $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

Preuve. Nous procédons par induction sur n. Si $n = 1$,

$$p(x) = x,$$

dont nous savons qu'elle satisfait

$$p'(x) = 1 = 1 \cdot x^0.$$

Nous supposons maintenant que le résultat est valable pour $n = k$ et montrons qu'il tient pour $n = k + 1$. Nous posons

$$p(x) = x^{k+1}$$

et notons que

$$p(x) = x \cdot x^k.$$

En appliquant la règle du produit et notre hypothèse d'induction, on a

$$p'(x) = x \cdot kx^{k-1} + 1 \cdot x^k = (k+1)x^k.$$

Ceci montre que la formule tient pour $k + 1$. □

Exemple 9 $p(x) = x$ a pour dérivée $p'(x) = 1$,
$p(x) = x^2$ a pour dérivée $p'(x) = 2x$,
$p(x) = x^3$ a pour dérivée $p'(x) = 3x^2$,
$p(x) = x^4$ a pour dérivée $p'(x) = 4x^3$,
et ainsi de suite.

Proposition 5 Soit g une fonction dérivable en x et $g(x) \neq 0$, alors $\frac{1}{g}$ est dérivable en x et $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$.

Preuve. g est dérivable en x, donc g est continue en x. Puisque $g(x) \neq 0$, nous savons que $1/g$ est continue en x, et ainsi que

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x+h)} = \frac{1}{g(x)}.$$

Pour h différent de zéro et suffisamment petit, $g(x+h) \neq 0$ et

$$\frac{1}{h}\left[\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}\right] = -\left[\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]\frac{1}{g(x+h)g(x)}.$$

En prenant la limite quand h tend vers zéro, nous voyons que le membre de droite (et donc celui de gauche) tend vers

$$-\frac{g'(x)}{g(x)^2}.$$

□

Corollaire 2 Si $f(x) = x^k$ pour $k \in \mathbb{Z}$, alors $f'(x) = k \cdot x^{k-1}$.

Preuve. Soit k un nombre négatif. Notons que

$$p(x) = \frac{1}{g(x)} \text{ où } g(x) = x^{-k} \text{ et } -k \text{ est un entier positif.}$$

Par la proposition 5, on a

$$p'(x) = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2} = -\frac{(-k)x^{-k-1}}{x^{-2k}} = kx^{k-1},$$

où on a appliqué le corollaire 1 à $g(x)$ pour calculer $g'(x)$. □

Exemple 10 $p(x) = x^{-1}$ a pour dérivée $p'(x) = (-1)x^{-2} = -x^{-2}$,
$p(x) = x^{-2}$ a pour dérivée $p'(x) = -2x^{-3}$,
$p(x) = x^{-3}$ a pour dérivée $p'(x) = -3x^{-4}$,
et ainsi de suite.

Exemple 11 Dériver

$$f(x) = 5x^2 - \frac{6}{x}$$

et déterminer le nombre dérivé $f'\left(\frac{1}{2}\right)$.

$f(x) = 5x^2 - 6x^{-1}$ donc

$$f'(x) = 10x + 6x^{-2},$$

ce qui, si vous n'aimez pas les exposants négatifs, peut être réécrit comme

$$f'(x) = 10x + \frac{6}{x^2}.$$

On calcule le nombre dérivé en substituant

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + \frac{6}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 5 + 24 = 29$$

Exemple 12 Dériver

$$f(x) = \frac{1}{ax^2 + bx + c}$$

Proposition 6 Soient f et g des fonctions dérivables en x et $g(x) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en x et $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$.

Preuve. La preuve est laissée en exercice (exercice **??**). □

Exemple 13 Dériver

$$\mathrm{F}(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

Nous avons un quotient $\mathrm{F}(x) = f(x)/g(x)$. La règle du quotient donne

$$\mathrm{F}'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2},$$

ce qui donne

$$\mathrm{F}'(x) = \frac{(cx+d)\cdot a - (ax+b)\cdot c}{(cx+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}.$$

Exemple 14 Dériver

$$\mathrm{F}(x) = \frac{6x^2-1}{x^4+5x+1}$$

Nous avons un quotient $\mathrm{F}(x) = f(x)/g(x)$. La règle du quotient donne

$$\mathrm{F}'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2},$$

d'où

$$\mathrm{F}'(x) = \frac{(x^4+5x+1)(12x) - (6x^2-1)(4x^3+5)}{(x^4+5x+1)^2}.$$

Exemple 15 Calculer $f'(0)$, $f'(1)$, et $f'(2)$ pour $f(x) = \dfrac{5x}{1+x}$.

Exemple 16 Calculer $f'(-1)$ pour $f(x) = \dfrac{x^2}{ax^2+b}$.

Théorème 2 (sans démonstration)

Si g est dérivable en x et f est dérivable en $g(x)$, alors la fonction composée $f \circ g$ est dérivable en x et

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Corollaire 3

Si $f(x) = x^r$ pour $r \in \mathbb{Q}$, alors $f'(x) = r \cdot x^{r-1}$.

Preuve. On sait déjà que pour $k \in \mathbb{Z}$, $(x^k)' = kx^{k-1}$. Soit $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$. On pose $f(x) = x^m$ et $g(x) = x^{\frac{1}{n}} = x^{-n}$. On a alors que $(f \circ g)(x) = x^{\frac{m}{n}}$. On applique le théorème 2 à $f \circ g$. On a

$$\begin{aligned}
\left(x^{\frac{m}{n}}\right)' &= \left(\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m\right)' \\
&= m \cdot \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1} \cdot \frac{1}{n} \cdot x^{\left(\frac{1}{n}-1\right)} \\
&= \frac{m}{n} x^{\frac{m-1}{n}} \cdot x^{\frac{1-n}{n}} \\
&= \frac{m}{n} x^{\left(\frac{m-1}{n}+\frac{1-n}{n}\right)} \\
&= \frac{m}{n} x^{\frac{m-n}{n}} \\
&= \frac{m}{n} x^{\left(\frac{m}{n}-1\right)}
\end{aligned}$$

□

1.6 L'équation de la tangente

Formule

Soient f une fonction dérivable et $(x_0; y_0)$ un point du graphe de f. La tangente à f en ce point a pour pente $f'(x_0)$. Pour obtenir l'équation de la tangente, on utilise la formule de la pente

$$f'(x_0) = \frac{y - y_0}{x - x_0} \iff y = f'(x_0) \cdot x - f'(x_0) \cdot x_0 + y_0$$

ou encore

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + y_0$$

Exemple 17

Déterminer l'équation de la tangente de

$$f(x) = \frac{2x + 1}{3 - x}$$

au point $(2; 5)$.

Exemple 18 Déterminer l'équation de la tangente de

$$x^2 + y^2 = 25$$

au point $(3; 4)$.

1.7 Dérivées des fonctions trigonométriques

Théorème 3
Dérivées des fonctions trigonométriques (avec démonstration)

On a

- $[\sin(x)]' = \cos(x)$
- $[\cos(x)]' = -\sin(x)$
- $[\tan(x)]' = 1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$

Preuve de $[\sin(x)]' = \cos(x)$. On a l'identité trigonométrique suivante

$$\sin(a) - \sin(x) = 2\sin\left(\frac{a-x}{2}\right)\cos\left(\frac{a+x}{2}\right)$$

On procède au changement de variable $a = x + h$. On obtient
$\sin(x+h) - \sin(x) = 2\sin\left(\dfrac{h}{2}\right)\cos\left(x + \dfrac{h}{2}\right)$
On calcule la dérivée avec cette identité :

$$\begin{aligned}
[\sin(x)'] &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\left(\frac{h}{2}\right)\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \cos\left(x+\frac{h}{2}\right) \\
&= \lim_{\frac{h}{2}\to 0} \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \lim_{h\to 0} \cos\left(x+\frac{h}{2}\right) \\
&= 1\cdot\cos(x) \\
&= \cos(x).
\end{aligned}$$

□

Preuve de $[\cos(x)]' = -\sin(x)$.
On utilise les relations

$$\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \text{et} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$$

On a par la formule de dérivation d'une fonction composée et la dérivée du sinus :
$\cos'(x) = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cdot(-1) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin(x)$
□

Preuve de $[\tan(x)]'$. À faire en exercice. □

Notation De même que qu'on écrit $[\sin(x)]^2 = \sin^2(x)$, on note plus simplement $[\sin(x)]' = \sin'(x)$, $[\cos(x)]' = \cos'(x)$ et $[\tan(x)]' = \tan'(x)$.

Exemple 19
$[\sin(-20x^3+x)]'$

On utilise la formule de dérivation de la composition de fonctions.
$\sin(-20x^3+x) = g(f(x))$ avec $f(x) = -20x^3+x$ et $g(x) = \sin(x)$
$[\sin(-20x^3+x)]' = \cos(-20x^3+x)\cdot(-20x^3+x)'$
$= \cos(-20x^3+x)\cdot(-60x^2+1)$

Exemple 20
$[\cos^5(x)]'$

On utilise la formule de dérivation de la composition de fonctions.
$\cos^5(x) = [\cos(x)]^5 = g(f(x))$ avec $f(x) = \cos(x)$ et $g(x) = x^5$
$$\begin{aligned}[\cos^5(x)]' &= [[\cos(x)]^5]' \\ &= 5[\cos(x)]^4\cdot[\cos(x)]' \\ &= 5[\cos(x)]^4\cdot[-\sin(x)] \\ &= -5\cos^4(x)\sin(x)\end{aligned}$$

Exemple 21
$[\sin^3(x^2-1)]'$

On utilise la formule de dérivation de la composition de fonctions.
$\sin^3(x^2-1) = [\sin(x^2-1)]^3 = g(f(x))$ avec $f(x) = \sin(x^2-1)$ et $g(x) = x^3$
On a
$[[\sin(x^2-1)]^3]' = 3[\sin(x^2-1)]^2\cdot[\sin(x^2-1)]'$
et on doit recommencer pour dériver $[\sin(x^2-1)]'$:
$[\sin(x^2-1)]' = \cos(x^2-1)\cdot(x^2-1)' = \cos(x^2-1)\cdot(2x)$
d'où enfin :
$$\begin{aligned}[[\sin(x^2-1)]^3]' &= 3[\sin(x^2-1)]^2\cos(x^2-1)\cdot 2x \\ &= 6x\sin^2(x^2-1)\cos(x^2-1)\end{aligned}$$

1.8 Angle entre deux courbes

Définition L'angle entre deux courbes est l'angle aigu formé par les droites tangentes des deux courbes en un de leurs points d'intersection.

Formule L'angle entre les graphes de deux fonctions f et g en un point d'intersection d'abscisse $x = a$ est

$$\alpha = |\arctan(f'(a)) - \arctan(g'(a))|$$

Exemple 22

Les graphes des fonctions f et f données par $f(x) = x^2$ et $g(x) = \dfrac{8}{x}$ se coupent en un point d'abscisse $x = 2$. On a $f'(x) = 2x$ et $g'(x) = -\dfrac{8}{x^2}$, donc $f'(2) = 4$ et $g'(2) = -2$. L'angle entre les deux graphes en donc

$$|\arctan(4) - \arctan(2)| \simeq 139{,}4°$$

1.9 Exercices

1.9.1 Introduction : La tangente à une courbe en un point

1.9.2 Définitions et exemples

Exercice 1 j2esz

Calculer le taux de variation de la fonction (la pente donnée de la droite entre deux points du graphe de la fonction) f donnée entre les deux points donnés et interpréter graphiquement :

a) $f(x) = x^2$, $\mathrm{A} = (1; f(1))$, $\mathrm{P} = (2; f(2))$.
b) $f(x) = x^2$, $\mathrm{A} = (1; f(1))$, $\mathrm{P} = (1{,}5; f(1{,}5))$.
c) $f(x) = x^2$, $\mathrm{A} = (-2; f(-2))$, $\mathrm{P} = (2; f(2))$.
d) $f(x) = x^3$, $\mathrm{A} = (1; f(1))$, $\mathrm{P} = (2; f(2))$.

Corrigé 1 j2esz

On calcule le rapport $\dfrac{\mathrm{A}_y - \mathrm{P}_y}{\mathrm{A}_x - \mathrm{P}_x}$.

a) $f(x) = x^2$, $\mathrm{A} = (1; 1)$, $\mathrm{P} = (2; 4)$ $\frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{4-1}{1} = 3$
b) $f(x) = x^2$, $\mathrm{A} = (1; 1)$, $\mathrm{P} = (1{,}5; 2{,}25)$ $\frac{f(1{,}5)-f(1)}{1{,}5-1} = \frac{2{,}25-1}{0{,}5} = 2{,}5$
c) $f(x) = x^2$, $\mathrm{A} = (-2; 4)$, $\mathrm{P} = (2; 4)$ $\frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)} = \frac{4-4}{4} = 0$
d) $f(x) = x^3$, $\mathrm{A} = (1; 1)$, $\mathrm{P} = (2; 8)$ $\frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{8-1}{1} = 7$

Exercice 2 mmztw

Trouver la pente de la tangente à la parabole d'équation $y = x^2$ au point $(-1; 1)$.

Corrigé 2 mmztw

$$\begin{aligned} f'(-1) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(-1+h)^2 - 1}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1 - 2h + h^2 - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2h + h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(-2 + h) = -2 \end{aligned}$$

Exercice 3 h2mu9

Expliquer intuitivement pourquoi si une fonction est constante sur un intervalle, alors sa dérivée est nulle sur tout l'intervalle.

Corrigé 3 h2mu9

La dérivée en un point correspond à la pente de la tangente en ce point. Si la droite est constante, la pente en tout point est nulle.

Exercice 4 wdzr4

Calculer la dérivée d'une fonction constante $f(x) = c$ pour $c \in \mathbb{R}$.

Corrigé 4 wdzr4

Par la définition

$$\lim_{h\to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

Exercice 5 9ghy8

Calculer la dérivée de la fonction identité $f(x) = x$.

Corrigé 5
9ghy8

On a

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)-x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$$

Exercice 6
uhfwb

Un mobile se déplace sur un axe selon la loi $p(t) = 4t - \dfrac{t^2}{2}$, où $p(t)$ représente la position du mobile au temps t.

a) Calculer la vitesse moyenne du mobile entre les instants :

i) $t_1 = 2$ et $t_2 = 3$.
ii) $t_1 = 2$ et $t_2 = t$.
iii) $t_1 = a$ et $t_2 = t$.
iv) $t_1 = 2$ et $t_2 = 2 + h$.
v) $t_1 = t$ et $t_2 = t + h$.

b) Calculer la vitesse instantanée du mobile :

i) à l'instant $t = 2$.
ii) à l'instant t.

Corrigé 6
uhfwb

a)

-
-
-
-
-

b)

-
-

Exercice 7
sjs2h

Que penser de la dérivée de la fonction réelle $f(x) = |x^2 - 1|$ en $x = 0$, $x = 1$ et $x = 2$?

Corrigé 7
sjs2h

Exercice 8
hb4kv

Déterminer le nombre dérivé de la fonction réelle $f(t) = t^2 - 7t + 3$ en $t = -1$.

Corrigé 8
hb4kv

Exercice 9
g75hx

Calculer, à partir de la définition de la fonction dérivée, la dérivée des fonctions réelles ci-dessous ; représenter f et f' dans un même repère et interpréter graphiquement le résultat (sauf pour les points d) et f)) :

a) $f(x) = 7$.
b) $f(x) = x$.
c) $f(x) = 3x$.
d) $f(x) = ax + b,\ \ a,b \in \mathbb{R}$.
e) $f(x) = x^2$.
f) $f(x) = ax^2 + bx + c,\ \ a,b,c \in \mathbb{R}$.
g) $f(x) = x^3$.
h) $f(x) = \sqrt{x}$.
i) $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
j) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

Corrigé 9
g75hx

Exercice 10

On considère la fonction $f(x) = \sqrt{x}$. A l'aide de la définition de la dérivée :

a) montrer que $f'(0)$ n'existe pas ;
b) calculer $f'(a)$, pour a, un réel strictement positif ($a > 0$).

Corrigé 10

a) Par définition de la fonction racine, la limite à gauche en 0 n'est pas calculable, ainsi la dérivée en 0 n'existe pas.
b) Fait en cours.

Exercice 11

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - 1, \text{ si } x \leq 1 \\ 3x - 1, \text{ si } x > 1 \end{cases}$

a) Lorsque a vaut 1 , la fonction f est-elle continue en 1 ? (Illustrer graphiquement.)
b) Pour quelles valeurs du paramètre a cette fonction sera-t-elle continue en 1 ? (Idem.)
c) Pour la valeur de a trouvée en (b), la fonction f est-elle dérivable en 1 ?

Corrigé 11

a) Non ;
b) 2 ;
c) limite à gauche vaut 4 et limite à droite vaut 3.

1.9.3 Le nombre dérivé

Exercice 12
rqd6n

À partir de la définition de la dérivée de f en a, calculer les dérivées $f'(a)$ et interpréter graphiquement :

a) $f(x) = x^2$ avec $a = 1$ puis $a = 3$.
b) $f(x) = x^3$ avec $a = 2$.
c) $f(x) = x$ avec $a = 2$ puis $a = 5$.
d) $f(x) = 3$ avec $a = 2$ puis $a = 7$.

Corrigé 12
rqd6n

Exercice 13 En utilisant la définition de la dérivée en un point, calculer les nombres suivants :

a) $f'(2)$, si $f(x) = -3x^2 + 1$;
b) $f'(1)$, si $f(x) = \sqrt{3x+1}$;
c) $f'(0)$, si $f(x) = \frac{x-5}{2x+1}$;
d) $f'(-2)$, si $f(x) = x^3 - 2x + 3$;
e) $f'(0)$, si $f(x) = \sin(x)$;
f) $f'(0)$, si $f(x) = \cos(x)$.

Corrigé 13
a) -12
b) $\frac{3}{4}$
c) 11
d) 10
e) 1
f) 0

1.9.4 Relation avec la continuité

Exercice 14

a) Donner un exemple d'une fonction continue en $x = 2$, mais pas dérivable en $x = 2$. Justifier.
b) Démontrer qu'une fonction f définie dans un voisinage de $x \in \mathbb{R}$ qui est dérivable en x est continue en x.
c) Donner un critère visuel sur le graphe d'une fonction continue pour déterminer si elle est dérivable.

Corrigé 14
a) Par exemple, $|x - 2|$ (pourquoi ?)
b) Démonstration faite en classe.
c) Par exemple, si la représentation graphique contient un point anguleux en $(x; f(x))$.

1.9.5 Règles de dérivation

Exercice 15 raguk

On considère le théorème « Dérivée de la différence de deux fonctions »

a) L'énoncer en identifiant clairement hypothèses et conclusions.
b) Illustrer son utilité par des exemples.
c) On donne ci-dessous une démonstration :

Démonstration :

$$\begin{aligned}(f-g)'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{(f-g)(x+h)-(f-g)(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)-g(x+h))-(f(x)-g(x))}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)-g(x+h)+g(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)-(g(x+h)-g(x))}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\ &= f'(x)-g'(x)\end{aligned}$$

Justifier chaque étape de la démonstration.

Corrigé 15 raguk

Exercice 16 uc9rv

Montrer que si f, g, h sont dérivable, alors

$$(fgh)'(x) = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

Corrigé 16 uc9rv

Puisque f, g, h sont dérivable, gh est dérivable et donc fgh l'est également.
En appliquant la formule du produit à f et au produit gh, on obtient

$$\begin{aligned}(fgh)'(x) &= f'(x)(gh)(x) + f(x)(gh)'(x)\\ &= f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)\end{aligned}$$

Exercice 17 5fsdv

Montrer que si f est dérivable en x, alors $\left(f(x)^2\right)' = 2f(x)f'(x)$.

Corrigé 17 5fsdv

Puisque f est dérivable l'est également.

$$\begin{aligned}\left(f(x)^2\right)' &= (f(x)\cdot f(x))'\\ &= f'(x)f(x) + f(x)f'(x)\\ &= 2f'(x)f(x).\end{aligned}$$

Exercice 18 3mgs5

Montrer que si f est dérivable, alors $(f(x)^n)' = nf(x)^{n-1}f'(x)$.

Corrigé 18 3mgs5

Exercice 19
972y4

Soient f et g des fonctions dérivables en x et $g(x) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en x et $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$.
Indication : $f/g = f \cdot 1/g$.

Corrigé 19
972y4

Exercice 20
4pfpm

Utiliser les formules de dérivation pour déterminer les dérivées suivantes en justifiant toutes les étapes, et en donnant des réponses sans exposant négatif ou fractionnaire :

a) $(x^2 - 3)'$ b) $\left(\dfrac{2}{x^5}\right)'$ c) $\left(\sqrt{2x^3 - 3}\right)'$ d) $\left(\sqrt[3]{x^3 + 1}\right)'$

Corrigé 20
4pfpm

Exercice 21
bgaa8

Utiliser les formules de dérivation pour déterminer (donner des réponses sans exposant négatif ou fractionnaire) :

a) $(x^5 - 10x)'$ b) $(x^{100} + 100x)'$ c) $(x^2 + 3)'$

d) $(x^2 + \pi x^3)'$ e) $\left(x^3 - 3x^2 + 9\right)'$ f) $\left(\dfrac{x^5}{5} + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x}{7}\right)'$

g) $(t^3 + t^2 + t + 1)'$ h) $(3\sqrt{x})'$ i) $(\sqrt{3}{,}x)'$

j) $(\sqrt[3]{x})'$ k) $(\sqrt{x^3})'$ l) $(\sqrt{2x^3})'$

m) $(x\sqrt{x})'$ n) $(x^{895})'$ o) $(x^{-45})'$

p) $\left(x^{\frac{4}{3}}\right)'$ q) $\left(x^{\sqrt{2}}\right)'$ r) $\left(\dfrac{4}{x}\right)'$

s) $\left(\dfrac{-18}{x}\right)'$ t) $\left(\dfrac{1}{x^2}\right)'$ u) $\left(\dfrac{1}{3x^3}\right)'$

v) $\left(\dfrac{24}{x^2}\right)'$ w) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)'$ x) $\left(\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\right)'$

y) $\left(x^2 - \dfrac{1}{2x}\right)'$ z) $\left(\dfrac{x^2}{x^3 + 1}\right)'$ aa) $\left(\dfrac{1 + 2u^3}{2u}\right)'$

ab) $((2x + 3)(3x - 7))'$ ac) $\left(x^2(1 + \sqrt{x})\right)'$ ad) $((x^3 - x)(x^2 - 9))'$

ae) $\left(\dfrac{x^2 + 1}{4x}\right)'$

Corrigé 21
bgaa8

1.9.6 L'équation de la tangente

Exercice 22
ayg94

Trouver l'équation de la droite tangente à la parabole $y = x^2$ au point $(-1; 1)$.

Corrigé 22
ayg94

Exercice 23
pbjwq

Déterminer l'équation de la tangente à $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ au point $\left(2\,;\,\dfrac{1}{4}\right)$.

Corrigé 23
pbjwq

Exercice 24
5tfx9

Soit f définie par $f(x) = x^3 - x$.

a) Déterminer l'équation de la tangente sachant que 2 est l'abscisse du point de tangence.

b) Déterminer l'équation de la tangente sachant que la pente vaut 2.

c) Déterminer les x pour lesquels les tangentes sont horizontales.

Corrigé 24
5tfx9

Exercice 25
ddnv1

Vrai ou faux ? Justifier soigneusement :

a) Si une droite est tangente à une courbe en un point, alors elle ne rencontre la courbe qu'à ce point.

b) Si une droite rencontre une courbe en un seul point, alors elle est tangente à la courbe en ce point.

Corrigé 25
ddnv1

Exercice 26
nj1k9

Montrer que la pente de la tangente à la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $\mathrm{A}(a; f(a))$ est $-\dfrac{1}{a^2}$, puis calculer l'équation de la tangente au point $\mathrm{A}(4; f(4))$ et la représenter graphiquement avec f.

Corrigé 26
nj1k9

Exercice 27
p9k57

Les courbes $f(x) = x^2$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$ ont-elles une tangente commune ? Si oui, déterminer son équation. Si non, le prouver.

Corrigé 27
p9k57

Exercice 28 22t18

On considère la fonction f définie par $f(x) = x(3-x)(x-1)^2$ pour $x \in [0;3]$. La courbe représentative de cette fonction modélise la vue en coupe de deux sommets des Alpes, qu'on désire relier par un téléphérique.

a) Déterminer l'équation de la tangente en deux points distincts de cette courbe (les deux points de tangence représentent les stations du téléphérique et le segment de droite compris entre ces deux points représente le câble).

b) Calculer la longueur du câble.

Indication : utiliser un outil de calcul formel pour résoudre le système !

Corrigé 28
22t18

1.9.7 Dérivation de fonctions trigonométriques

Exercice 29 aef2y

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\sin(x) + \cos(x)}{1 + \cos}$. Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, f' s'annule au moins une fois sur l'intervalle $]a,a + 2\pi[$.

Corrigé 29
aef2y

Exercice 30 u68mh

Déterminer les dérivées des fonctions f suivantes :

a) $f(x) = \sin(x) + 2\cos(x)$

b) $f(x) = \sin(x)\cos(x)$

c) $f(x) = (\sin(x)+2\cos(x))\cos(x)$

d) $f(x) = \dfrac{\sin(x) + 1}{\sin(x) - 1}$

e) $f(x) = \dfrac{\cos(x) + 2}{\cos(x) + 3}$

f) $f(x) = \dfrac{\sin(3x)}{\cos(5x)}$

g) $f(x) = 2\cos(x) - \cos(2x)$

h) $f(x) = 2\sin^2(x) + 5\sin(x) - 3$

i) $f(x) = 3\sin^4(x) + \cos^3(x) - 1$

j) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\sin(x) + \cos(x)}$

k) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(2x)}$

l) $f(x) = \sqrt{\cos(2x)} + 3\sin^2(x)$

m) $f(x) = x - \sin(x)\cos(x)$

n) $f(x) = \cos(x)(\sin^2(x) + 2)$

o) $f(x) = \dfrac{\sin(x) - x\cos(x)}{x\sin(x) + \cos(x)}$

p) $f(x) = \dfrac{x\sin(x) + \cos(x)}{\sin(x) - x\cos(x)}$

q) $f(x) = 2x\cos(x)+(x^2-2)\sin(x)$

Corrigé 30
u68mh

Exercice 31
areny

Déterminer les dérivées suivantes et donner la réponse sans exposant négatif ou fractionnaire :

a) $(\sin(x^4 - \frac{1}{x}))$
b) $(\cos(5\sqrt{x}))$
c) $(\tan(\cos(x)))$
d) $(\sin^3(x))$
e) $(\sqrt{\cos(x)})$
f) $(\sin^{-1}(2x))$

Corrigé 31
areny

Exercice 32
hhksj

Étudier les fonctions suivantes :

a) $f(x) = 2\cos(x) - \cos(2x)$
b) $f(x) = \sin^2(x) - \sin(x)$
c) $f(x) = 2\cos^3(x) - 3$
d) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(2x)}$
e) $f(x) = \dfrac{\tan(2x)}{\tan^2(x)}$
f) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1 - 2\sin^2(x)}}$

Corrigé 32
hhksj

1.9.8 Angle entre deux courbes

Exercice 33
5bbkd

Déterminer l'angle entre le graphe de f et l'axe $\mathrm{O}x$ en chaque point d'intersection.

a) $f(x) = x + 17$
b) $f(x) = x^2 - 1$
c) $f(x) = x^3 - 3x$
d) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$
e) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$
f) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 1}$

Corrigé 33
5bbkd

a) 45° pour $x = -17$
b) 63.43° pour $x = \pm 1$
c) 71,57° pour $x = 0$ et 80,54° pour $x = \pm\sqrt{3}$
d) 85,24° pour $x = \pm 2$ et 80,54° pour $x = \pm 1$
e) 45° pour $x = 0$
f) 38,66° pour $x = \pm 2$

Exercice 34
kfy9s

Déterminer l'angle entre les graphes de f et g en chacun de leurs points d'intersection.

a) $f(x) = x^3 - 4x$ et $g(x) = x^3 - 2x^2$
b) $f(x) = 2x^2 - 1$ et $g(x) = x^2 + 2x + 2$
c) $f(x) = \sqrt{3x^2 + 1}$ et $g(x) = x + 1$
d) $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = \cos(x)$
e) $f(x) = \sin(2x)$ et $g(x) = \tan(x)$

Corrigé 34
kfy9s

a) $75{,}96°$ pour $x = 0$ et $6{,}91°$ pour $x = 2$
b) $75{,}96°$ pour $x = -1$ et $2{,}36°$ pour $x = 3$
c) $45°$ pour $x = 0$ et $11{,}31°$ pour $x = 1$
d) $70{,}53°$ pour $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$
e) $18{,}43°$ pour $x = k \cdot \pi$ et $63{,}43°$ pour $x = \pm\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$

Exercice 35
mxwa2

Déterminer l'équation de la droite d qui passe par l'origine et qui coupe orthogonalement la courbe γ d'équation $y = \dfrac{x^2 + 1}{x}$. Montrer que cette droite est une bissectrice des asymptotes de la courbe γ.

Corrigé 35
mxwa2

$y = (1 + \sqrt{2})x$ (asymptotes : A.O. $y = x$, A.V. $x = 0$)

Exercice 36
91jqx

Déterminer les valeurs de a pour que les graphes des fonctions f et g se coupent à angle droit.

a) $f(x) = x^2$ et $g(x) = 1 - ax^2$
b) $f(x) = ax^2$ et $g(x) = \frac{1-x^2}{a}$
c) $f(x) = 2x^2 - a$ et $g(x) = \frac{x^2}{a}$

Corrigé 36
91jqx

a) $a = \frac{1}{3}$ b) $a = \pm\sqrt{3}$ c) impossible

Calcul différentiel SECTION 2

Le théorème des accroissement finis et ses applications

2.1 Le théorème des accroissement finis

Nous allons étudier dans ce chapitre un théorème qui peut paraître évident, mais qui est très utile : le théorème des accroissements finis.

Proposition 7 (avec démonstration)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $]a;b[$. Soit $c \in]a;b[$ tel que $f(c)$ soit un maximum de f sur l'interval $]a;b[$. Alors, $f'(c) = 0$.

Preuve. Puisque l'image de c est un maximum, pour un h assez petit, on a

$$f(c) \geq f(x), \forall x \in]c-h;c+h[.$$

Ce qui est équivalent à

$$f(c) - f(x) \geq 0, \forall x \in]c-h;c+h[. \qquad (\star)$$

Puisque f est dérivable sur $]a;b[$, on a que

$$f'(c) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}.$$

Calculons le signe de ces deux limites.

$$\begin{aligned}\text{signe}\left(\lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}\right) &= \frac{\text{signe}\left(\lim_{h\to 0^+} f(c+h)-f(c)\right)}{\text{signe}\left(\lim_{h\to 0^+} h\right)}\\ &= \frac{\text{« + »}}{\text{« + »}} = \text{« + »}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{signe}\left(\lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}\right) &= \frac{\text{signe}\left(\lim_{h\to 0^-} f(c+h)-f(c)\right)}{\text{signe}\left(\lim_{h\to 0^-} h\right)}\\ &= \frac{\text{« + »}}{\text{« − »}} = \text{« − »}\end{aligned}$$

Où le signe du numérateur est positif par $(\star)$. Le seul nombre qui est à la fois positif et négatif est 0, donc $f'(c) = 0$. □

Remarque Un résultat identique est valable pour un minimum, il sera démontré en exercice.

Théorème 4 Thm de Rolle (avec démonstration)

Soit f une fonction dérivable sur $]a;b[$ et continue sur $[a;b]$.
Si $f(a) = f(b) = 0$, alors il existe (au moins un) $c \in]a;b[$ tel que

$$f'(c) = 0.$$

Preuve. Si f est constante alors cela est évident.
Autrement, on peut supposer qu'il existe $x \in [a;b]$ tel que $f(x) > 0$ ou $f(x) < 0$. On traite le cas $f(x) > 0$ (le cas $f(x) < 0$ est laissé en exercice).
Par la théorème de la valeur intermédiaire, il existe $c \in [a;b]$ tel que $f(c)$ est un maximum de f sur $[a;b]$.
Dans notre cas, $c \neq a,b$ et donc $f(c)$ est un maximum de f sur $]a;b[$ (pourquoi est-ce que $c \neq a,b$?).
Par la proposition 7, $f'(c) = 0$. □

Théorème 5
Thm des accroissements finis
(avec démonstration)

Soit f une fonction dérivable sur $]a;b[$ et continue sur $[a;b]$, alors il existe (au moins un) $c \in]a;b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Preuve. On définit la fonction affine (une droite !) $s : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$s(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

Notons que $s(a) = f(a)$ et $s(b) = f(b)$ et que $s'(x) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(\diamond)$.
On considère la fonction

$$d(x) = f(x) - s(x).$$

On a que d est continue sur $[a;b]$, car f et s le sont (différence de fonctions continues). De la même manière, elle est dérivable sur $]a;b[$.
Par ailleurs,

$$\begin{aligned} d(a) &= f(a) - s(a) = f(a) - f(a) = 0 \\ d(b) &= f(b) - s(b) = f(b) - f(b) = 0 \end{aligned}$$

La fonction d satisfait toutes les hypothèses du Théorème de Rolle. Ainsi, il existe $c \in]a;b[$ tel que $d'(c) = 0$. On obtient

$$\begin{aligned} d'(c) = 0 \iff f'(c) - s'(c) = 0 \iff f'(c) = s'(c) \\ \iff f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \end{aligned}$$

□

2.2 Fonctions croissantes et décroissantes

Maintenant que l'on a une bonne idée de ce que représente la dérivée, on comprend intuitivement que

a) une fonction est « croissante » sur un intervalle sur lequel sa dérivée est positive ;
b) une fonction est « décroissante » sur un intervalle sur lequel sa dérivée est négative ;
c) une fonction est constante sur un intervalle sur lequel sa dérivée est nulle.

Mais que veut dire « croissante » et « décroissante » mathématiquement ?

Définition

On dit qu'une fonction est

- **croissante** sur un intervalle I ssi pour tout $x_1, x_2 \in \mathrm{I}$

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$$

- **décroissante** sur un intervalle I ssi pour tout $x_1, x_2 \in \mathrm{I}$

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$$

Exemple 23

La fonction $f(x) = x^2$ est décroissante sur l'intervalle $]-\infty;0]$ et croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

Exemple 24 La fonction

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ x, & x \geq 0, \end{cases}$$

est constante sur l'intervalle $]-\infty; 0]$ et croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Exemple 25 La fonction $f(x) = x^3$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

Le théorème suivant est une conséquence directe du Théorème des accroissements finis.

Théorème 6
Relation entre la dérivée et la monotonie d'une fonction
(avec démonstration)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $\mathrm{I} =]a; b[$, alors

- Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathrm{I}$, alors f est strictement croissante sur I ;
- Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in \mathrm{I}$, alors f est strictement décroissante sur I ;
- Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathrm{I}$, alors f est constante sur I.

Preuve. Soit $x_1, x_2 \in]a; b[$ avec $x_1 < x_2$. Par le théorème des accroissement finis, il existe $c \in]x_1; x_2[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

d'où

$$f'(c) \cdot (x_2 - x_1) = f(x_2) - f(x_1)$$

On note que $(x_2 - x_1)$ est toujours positif (pourquoi ?).

- Dans l'hypothèse d'une dérivée srictement positive sur I,
  on a $0 < f'(c)$, alors
  $$0 < f'(c) \cdot (x_2 - x_1) = f(x_2) - f(x_1),$$
  donc $0 < f(x_2) - f(x_1) \iff f(x_1) < f(x_2)$. On a choisi $x_1 < x_2$ quelconques, donc f est strictement croissante sur I.
- Dans l'hypothèse d'une dérivée srictement négative sur I,
  on a $0 > f'(c)$, alors
  $$0 > f'(c) \cdot (x_2 - x_1) = f(x_2) - f(x_1),$$
  donc $0 > f(x_2) - f(x_1) \iff f(x_1) > f(x_2)$. On a choisi $x_1 < x_2$ quelconques, donc f est strictement décroissante sur I.
- Dans l'hypothèse d'une dérivée nulle sur I, on a $f'(c) = 0$, alors
  $$0 = f'(c) \cdot (x_2 - x_1) = f(x_2) - f(x_1),$$
  donc $f(x_2) - f(x_1) = 0 \iff f(x_2) = f(x_1)$. On a choisi $x_1 < x_2$ quelconques, donc f est constante sur I.

$\square$

Formule Cela nous donne le critère suivant

Exemple 26 Étude de la monotonie de $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

Exemple 27 Étude de la monotonie de $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Exemple 28 Étude de la monotonie de $f(x) = 4x^5 - 15x^4 - 20x^3 + 110x^2 - 120x + 40$

2.3 Maximum et minimum

Discussion Nous généralisons à présent un sujet que vous avez déjà survolé les années précédentes : la recherche d'un maximum ou d'un minimum d'une fonction. Que pouvez-vous dire à ce sujet pour les fonctions affines ou quadratiques ?

Définition Une fonction admet un maximum local en c ssi

$$f(c) \geq f(x) \text{ pour tout } x \text{ assez proche de } c.$$

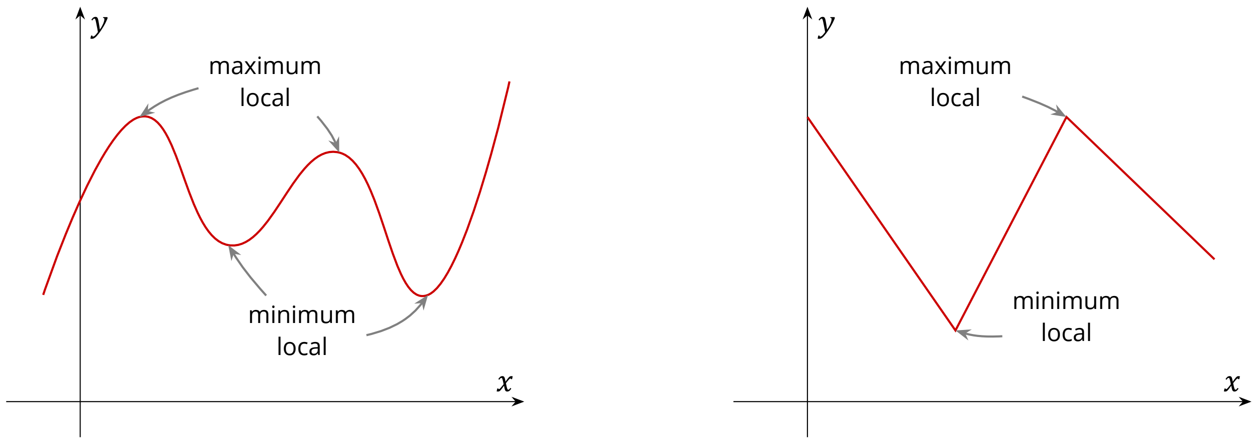
Une fonction admet un minimum local en c ssi

$$f(c) \leq f(x) \text{ pour tout } x \text{ assez proche de } c.$$

Théorème 7 Si f a un maximum ou un minimum local en c, alors

$$f'(c) = 0 \text{ ou } f'(c) \text{ n'existe pas.}$$

Figure 5 – Illustration de la notion de maximum et minimum local sur un ouvert

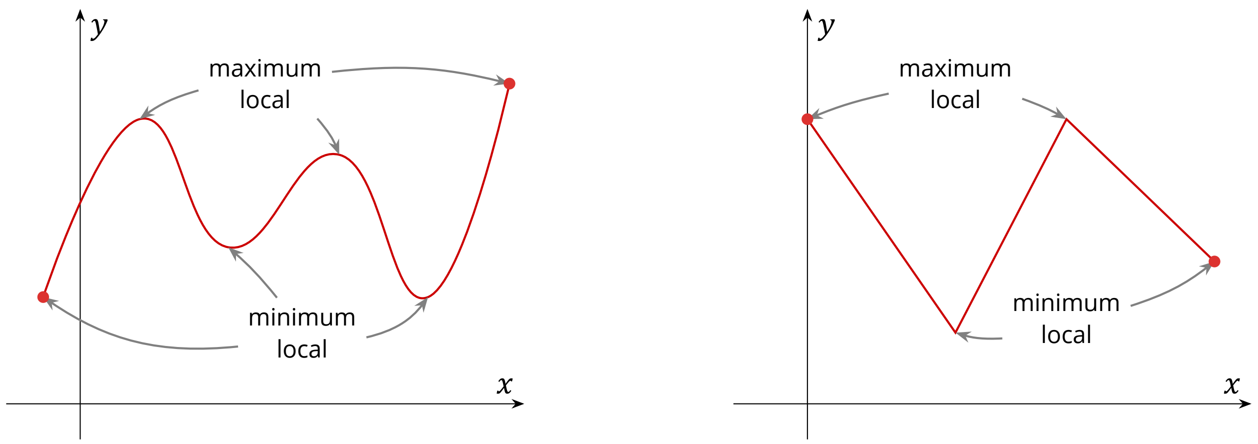


Définition Un point c de l'ensemble de définition de la fonction f est appelé un point critique de f ssi

$$f'(c) = 0 \text{ ou } f'(c) \text{ n'existe pas.}$$

Remarque Si f est définie sur un intervalle $[a; b]$ fermé, alors les bornes de l'intervalle sont des points critiques sur lesquel la fonction peut prendre un maximum ou un minimum local.

Figure 6 – Illustration de la notion de maximum et minimum local sur un fermé



Exemple 29 Déterminer les points critiques et les maximums et minimums locaux de $f(x) = 3 - x^2$.

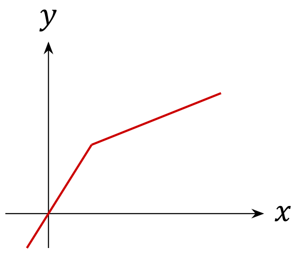
Exemple 30 Déterminer les points critiques et les maximums et minimums locaux de $f(x) = |x+1| + 2$.

Exemple 31 Déterminer les points critiques et les maximums et minimums locaux de $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$.

Remarque Un point critique n'est pas nécessairement un maximum ou un minimum local !

Exemple 32 Déterminer les points critiques et les maximums et minimums locaux de $f(x) = x^3$.

Exemple 33 Déterminer les points critiques et les maximums et minimums locaux de $f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 1 \\ \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}, & x \geq 1 \end{cases}$.



Méthode

Test de la dérivée première

Soit c un point critique de f et f continue en c (pas nécessairement dérivable en c). S'il existe un voisinage $]c-a; c+a[$ de c tel que

- $f'(x) < 0$ pour tout $x \in]c-a; c[$ et $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]c; c+a[$ alors c est un minimum local.
- $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]c-a; c[$ et $f'(x) < 0$ pour tout $x \in]c; c+a[$ alors c est un maximum local.

Exemple 34 Déterminer à l'aide du test de la dérivée première si les points critiques de la fonction $f(x) = |x^2 - 1|$ sont des maximums ou minimums locaux.

Exemple 35 Déterminer à l'aide du test de la dérivée permière si les points critiques de la fonction $f(x) = (x-2)(x-1)^4$ sont des maximums ou minimums locaux.

Méthode

Test de la dérivée seconde

Soit f une fonction deux fois dérivable en c. Soit c tel que $f'(c) = 0$.

- Si $f''(c) > 0$, alors $f(c)$ est un minimum local.
- Si $f''(c) < 0$, alors $f(c)$ est un maximum local.

Exemple 36 Utiliser le test de la dérivée seconde afin de déterminer si les points critique de $f(x) = x^3 - x$ sont des extremums.

Activité 1

Soient $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$ et $g(x) = x^4$.

a) Appliquer le test de la dérivée première pour étudier les points critiques de f et de g.

b) Appliquer le test de la dérivée seconde pour étudier les points critiques de f et de g.

Quelle conclusion en tirer ?

Définition

Extrema absolus

- Un point $(c; f(c))$ est un maximum absolu de la fonction f ssi $f(c) \geq f(x)$ pour tout $x \in \mathrm{D}_f$.
- Un point $(c; f(c))$ est un minimum absolu de la fonction f ssi $f(c) \leq f(x)$ pour tout $x \in \mathrm{D}_f$.

Méthode

Étudier les points critiques

i) Déterminer le domaine de définition si cela n'est pas donné.

ii) Déterminer le domaine sur lequel la fonction est dérivable.

iii) Déterminer les points critiques, c'est-à-dire tous les points du domaine de définition tel que $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ n'existe pas. **Ne pas oublier les bornes de l'intervalle si la fonction est définie sur un intervalle fermé**.

iv) Tester les points critiques (hors bornes)

   i) avec le test de la dérivée première ;

   ii) si $f''(c)$ existe et est différent de 0, alors avec le test de la dérivée seconde.

v) Tester toutes les bornes incluses dans l'intervalle en évaluant la fonction et/ou en regardant le comportement de f' dans un voisinage.

vi) Déterminer si les points critiques sont des extrema locaux ou absolus.

Activité 2

Étudier les points critiques de

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}$$

2.4 Optimisation

Vous avez déjà rencontré des problèmes d'optimisation dans votre cursus. Ces questions représentent des applications concrètes des outils d'analyse que nous avons étudiés dans les sections précédentes. Il s'agit de déterminer la valeur minimale ou maximale d'une quantité variable dans une situation donnée.

La partie la plus complexe dans la résolution d'un problème d'optimisation consiste à exprimer la quantité à optimiser comme une fonction dérivable à une variable. Une fois que cela est fait, il suffit d'étudier les points critiques de la fonction pour déterminer les extrema recherchés.

Méthode

Résoudre un problème d'optimisation

i) Lire attentivement l'énoncé du problème.
ii) Réaliser un schéma si nécessaire.
iii) Assigner des variables aux quantités apparaissants dans le problème.
iv) Écrire les relations entre les différentes quantités qui interviennent dans le problème. S'il y a n variables, trouver au moins $n-1$ équations liant les quantités entre-elles.
v) Exprimer la quantité à optimiser par une fonction à une variable (il se peut qu'il faille substituer plusieurs équations dans une seule afin d'obtenir une seule expression avec une seule variable).
vi) Étudier les points critiques (utiliser la méthode à la page 38).
vii) Interpréter la réponse trouvée et conclure.

Activité 3
Quelles sont les dimensions du rectangle d'aire maximale qui puisse être inscrit dans un cercle de rayon r ?

a) Réaliser un schéma.
b) Déterminer la fonction à optimiser.
c) Écrire les formules qui lient les variables.
d) Déterminer une fonction à une variable à optimiser.
e) Étudier les points critiques.
f) Conclure.

Activité 4
Quelles doivent être les dimensions d'une boîte de base carrée (pas un cube !) sans couvercle de contenance un litre pour que sa construction demande un minimum de matériau ?

Sources du cours

Les sources suivantes ont majoritairement été utilisées pour construire ce cours. Les exercices et activités proviennent également principalement de ces ouvrages. D'autres exercices ont été adaptés ou sont inspirés de ressources partagées par des collègues ou trouvées sur internet. Leur contribution mineure les exclut de cette liste.

[1] Saturnino L. Salas et Einar Hille. **Calculus : One and Several Variables**. 3e éd. Wiley, 1984.

[2] Commission Romande de Mathématiques. **Analyse**. T. Monographies de la Commission Romande de Mathématique 30. CRM Éditions, 2024.

[3] Commission Romande de Mathématiques. **Fundamentum de mathématique Analyse**. T. Monographies de la Commission Romande de Mathématique 25. CRM Éditions, 2018.

[4] Association Sesamath Suisse Romande. **Sésamath – Troisième année de maturité gymnasiale**. 2022. url : `https://sesamath.ch/`.