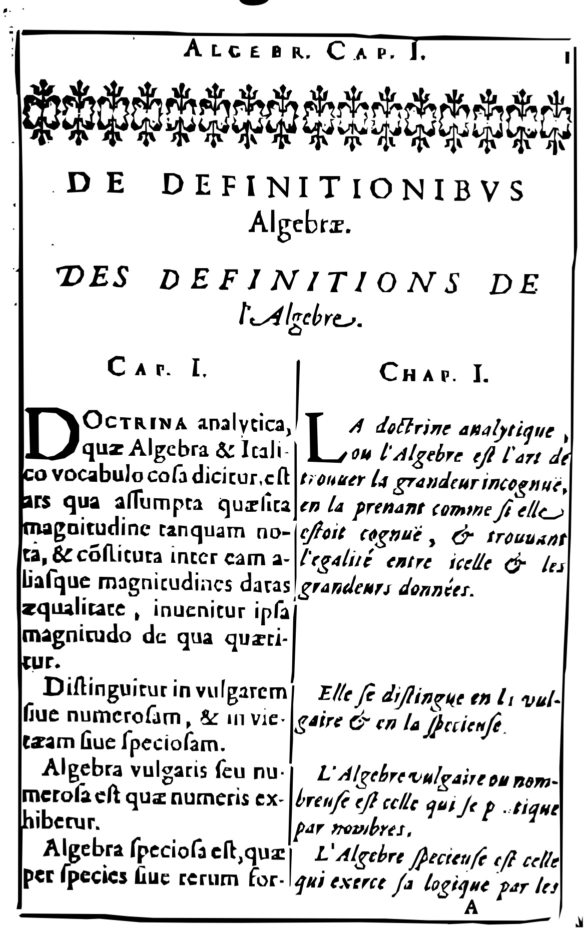


Algèbre



ALGEBR. CAP. I. 1

DE DEFINITIONIBVS Algebræ.

DES DEFINITIONS DE l'Algebre.

CAP. I.

DOCTRINA analytica, quæ Algebra & Italico vocabulo coſa dicitur, eſt ars qua aſſumpta quæſita magnitudine tanquam nota, & cōſtituta inter eam aliaſque magnitudines datas æqualitate, inuenitur ipſa magnitudo de qua quæritur.

Diſtinguitur in vulgarem ſiue numeroſam, & in vietæam ſiue ſpecioſam.

Algebra vulgaris ſeu numeroſa eſt quæ numeris exhibetur.

Algebra ſpecioſa eſt, quæ per ſpecies ſiue rerum for-

CHAP. I.

LA doctrine analytique, ou l'Algebre eſt l'art de trouuer la grandeur incognuë, en la prenant comme ſi elle eſtoit cognuë, & trouuant l'egalité entre icelle & les grandeurs données.

Elle ſe diſtingue en la vulgaire & en la ſpecieuſe.

L'Algebre vulgaire ou nombreuſe eſt celle qui ſe p..tique par nombres.

L'Algebre ſpecieuſe eſt celle qui exerce ſa logique par les

A

Hérigone, Pierre. Cours mathématique. Vol. 1. Paris, 1634, p. A1.

Table des matières

Algèbre SECTION 1

Calcul littéral

1.1 Techniques de factorisation

Pour factoriser il faut

i) mettre en évidence le plus grand facteur possible ;
ii) vérifier si on se trouve face à une identité remaquable ;
iii) appliquer la technique des groupements pour révéler une factorisation plus poussée ;
iv) réduire les expressions obtenues ;
v) recommencer les étapes ci-dessus.

Factoriser une expression est un problème difficile, il n'y a pas de marche à suivre précise, mais il faut maîtriser les techniques suivantes afin reconnaître les situations dans lesquelles il est nécessaire de les appliquer.

Mise en évidence On détermine le pgcd des coefficients et la partie littérale commune de chacun des termes.

Identités remarquables On applique les schémas vus dans la théorie pour nous aider à choisir de quelle identité il s'agit.

Technique des groupements On essaye de faire apparaître un facteur commun à plusieurs termes, mais pas à tous en même temps.

Exemple 1

Exemple de factorisation avec groupements

$(2x-3)(7x-2)-(x-1)(2x-3) =$

Les groupements peuvent être égaux au signe près. On multiplie par $1=(-1)^2$ pour obtenir un changement de signe du groupement.

Exemple 2

Retrouver un groupement au signe près

$3(x-y)+(y-x)(3x-4) =$

Les techniques s'enchaînent. Voici quelques exemples.

Exemple 3

Identité remarquable avec groupements

$(3x+1)^2 - (x-5)^2 =$

Exemple 4

Identité remarquable pour faire apparaître un groupement

$-x^2 + 1 + (x-1)(3x+2) =$

Exemple 5

Groupement pour faire apparaître une identité

$(x-y) - (a+b)^2(x-y) =$

Exercice 1

Factoriser le plus possible les expressions suivantes.

a) $(7x-1)^2 - (5x+2)^2$

b) $(4x-1)^2 - 9(3-x)^2$

c) $2x^2 - 4x + 2 - 3(x-1)(2x+1)$

d) $25x^2 + (5x-3)(2x+7) - 9 + (6-10x)(x-3)$

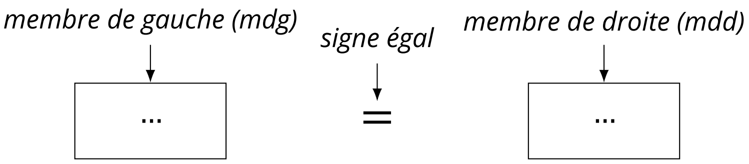
Algèbre SECTION 2

Équations du premier degré

2.1 Généralités

Définition
équation

Une **équation** est une expression mathématique avec un membre de gauche, un signe égalité et un membre de droite. Les membres de gauche et de droite sont des expressions littérales contenant des inconnues.



Définition
degré

Le **degré** d'une équation est le plus haut degré d'un monôme apparaissant dans l'équation.

Définition
solution d'une équation

Une **solution d'une équation** est un nombre ou un tuple de nombres qui satisfait l'égalité lorsqu'on substitue à la place de l'inconnue ou des inconnues.

Exemple 6
Solution d'une équation

Est-ce que 2 est solution de l'équation $x^3 - 4 = 15x$?

On note avec un ensemble l'ensemble de toutes les solution d'une équation $\mathrm{S} = \{...\}$

Définition
équations équivalentes

Deux équations sont appelées **équivalentes** si elles ont le même ensemble de solutions.

Exemple 7
Équations équivalentes

Les équations $x^2 + x - 12 = 0$ et $2x^2 + 2x - 24 = 0$ sont-elles équivalentes ?

Résoudre une équation c'est déterminer une équation équivalente dans laquelle la solution peut être lue facilement. Par exemple, l'équation $2x + 3 = 4x - 1$ est équivalente à l'équation $x = 2$. La deuxième

équation permet de déduire la solution.
Deux principes permettent de passer d'une équation à une équation équivalente.

[PE1] : Le premier principe d'équivalence

On peut ajouter une même expression aux deux membres d'une équation sans changer ses solutions.

$$[\mathrm{G}] = [\mathrm{D}] \iff [\mathrm{G}] + a = [\mathrm{D}] + a$$

Exemple 8
Principe d'équivalence 1 [PE1]

$2x^2 - 12x + 17 = 2x^2 - 28x + 5$

[PE2] : Le deuxième principe d'équivalence

On peut multiplier les deux membres d'une équation par un même nombre non nul sans changer ses solutions.

$$[\mathrm{G}] = [\mathrm{D}] \iff [\mathrm{G}] \cdot r = [\mathrm{D}] \cdot r, \text{ pour } r \in \mathbb{R}^*$$

Exemple 9
Principe d'équivalence 2 [PE2]

$16x = -12$

2.2 Équations du premier degré

Une équation du premier degré à une inconnue est de la forme $ax + b = cx + d$ avec $a,b,c,d \in \mathbb{R}$.

Exemple 10

Résolution d'une équation du premier degré

$ax + b = cx + d$, $a,b,c,d \in \mathbb{R}$

Ce type d'équation peut avoir une unique solution, aucune solution ou une infinité de solutions :

si $a \neq c$ alors l'équation admet une unique solution ;

si $a = c$ est $b \neq d$ alors $S = \emptyset$;

si $a = c$ et $b = d$ alors $S = \mathbb{R}$.

Exemple 11

Les trois types d'ensemble de solutions

a) $2x - 3 = 8x + 2$ b) $3x + 8 = 3x - 2$ c) $3x + 8 = 3x + 8$

On résout, comme exemple, quelques équations.

Exemple 12

Équation avec des fractions

$$\frac{x+2}{4}-\frac{x-1}{8}=\frac{2x}{3}+1$$

Exemple 13

Équation avec de la distributivité

$$(x+1)^2-x=(x-2)(x-4)$$

2.3 Équation contenant un paramètre

Exemple 14 $kx + 2 = 6$

Une première équation avec un paramètre (discussion)

Remarque C'est une équation qui a plusieurs lettres. Une ou plusieurs des lettres sont des paramètres. Il faut exprimer la ou les inconnues en fonction de ces paramètres.
Il faut commencer par clarifier qu'elle est l'inconnue pour laquelle il faut résoudre l'équation.
Attention lors de l'application de [PE2]. On ne peut jamais diviser ni multiplier par 0.

Exemple 15

$(k + 2)x = 8$

Exemple 16

$a(x-3)=5a$

Exemple 17

$(p-1)x+3=3x$

Exemple 18

$(m+3)x+7=mx+10$

Exercice 2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ pour x.

a) $4mx-8-11m=3+2m$

b) $5x-3p=2x-7$

c) $9r^2x+2r=4x-5$

2.4 Résolution d'un problème du premier degré

Les équations sont l'outil principal de résolution de problème en mathématiques.
Voici les étapes à suivre pour résoudre un problème à l'aide d'une équation.

Partie 1 : Déterminer l'équation

1) Lire le problème autant de fois que nécessaire pour bien comprendre et interpréter la situation. **Faire un schéma si besoin**;
2) déterminer les deux quantités à comparer, elles deviendront les deux membres de l'équation;
3) poser une inconnue qui permet d'exprimer les quantités à égaliser;
4) écrire les deux membres de l'équation en fonction de l'inconnue. L'inconnue devrait apparaître dans au moins un des deux membres.

Partie 2 : Résoudre l'équation

5) Résoudre l'équation avec les principes d'équivalence.

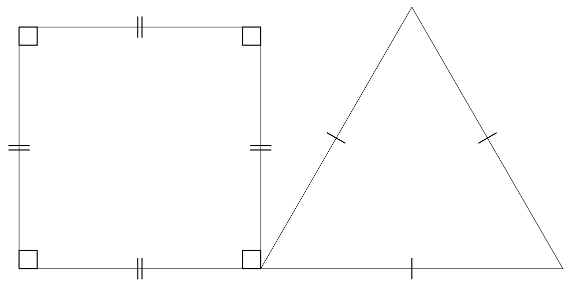
Partie 3 : Interpréter le résultat et conclure

6) Vérifier la cohérence du résultat avec le choix de l'inconnue;
7) Interpréter la valeur obtenue et répondre à la question posée dans l'énoncé.

Exemple 19 La longueur d'un rectangle mesure 2,5m de plus que sa largeur. Déterminer les dimension de ce rectangle sachant que si on augmente sa longueur de 2m, l'aire du rectangle augmente de $25\,\text{m}^2$.

Exemple 20 Déterminer une fraction équivalente à $\frac{4}{5}$ dont la somme du numérateur et du dénominateur vaut 11619.

Exemple 21 Déterminer la mesure du côté du carré afin que les périmètres du carré et du triangle soient égaux.



Algèbre SECTION 3

Équations du second degré

3.1 Théorème du produit nul

Théorème du produit nul

Grâce à la factorisation et au théorème du produit nul, on peut résoudre une équation de dégré supérieur en résolvant plusieurs équations de dégré inférieur.

Exemple 22

Résoudre
$x^3(x+2)^2 = x^2(x+2)^2$

Exemple 23

Résoudre
$x^2 + 2x - 1 = 0$

En appliquant les étapes suivantes :

a) $[\mathrm{PE}_1]$: +2

b) factoriser le membre de gauche

c) $[\mathrm{PE}_1]$: -2

d) factoriser le membre de gauche

e) $[\mathrm{PN}]$

Exemple 24

Résoudre
$(8x+1)^2 - (2x-3)^2 = 0$

3.2 Complétion du carré

La complétion du carré est une technique qui permet de résoudre une équation du second en se ramenant aux techniques de factorisation connues.

Exemple 25

$x^2 - 8x + 4 = 0$

Exemple 26

$2x^2 + 3x - 2 = 0$

Voici les étapes à suivre pour l'appliquer sur l'équation générale

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

En suivant ces étapes, on remarque que l'on vient de démontrer la formule de résolution d'équation du second degré. On appellera cette formule dans le cours la **formule du deuxième degré**. Résoudre les équations suivantes à l'aide de la méthode de complétion du carré.

a) $3x^2 + 24x + 48 = 0$

b) $6x^2 + 7x - 20 = 0$

c) $2x^2 - 6x + 2 = 0$

d) $-x^2 + 4x - 2 = 0$

3.3 Utilisation de la formule du deuxième degré

On a démontré la formule suivante pour résoudre une équation du second degré.

Exemple 27

$2x^2 - x + 3 = 0$

Exemple 28

$2x^2 - x - 6 = 0$

Exemple 29

$2x^2 - x + 3 = 3x^2 + x + 2$

Exercice 3 Résoudre les équations dans $\mathbb{R}$, à l'aide de la formule du deuxième degré :

a) $3x^2 - 4x - 2 = 0$

b) $6 - 3x + x^2 = 2 + 3x$

c) $2x^2 - x + 3 = 2$

3.4 Factoriser en résolvant une équation

Le théorème du produit nul nous a permis d'expliciter les liens entre les solutions d'une équation et sa forme factorisée. Jusqu'à maintenant, nous avons utilisé la forme factorisée d'une équation pour déduire les solutions de cette équation. Nous allons maintenant passer par la résolution d'une équation pour déterminer la forme factorisée d'un trinôme.

Rappels

Connaître les racines d'un trinôme n'est pas suffisant pour le factoriser.

Exemple 30

Deux trinômes différents avec des mêmes racines

$\mathrm{P}(x) = x^2 + 6x + 8$ $\mathrm{S}(x) = 3x^2 + 18x + 24$

On doit également fixer un des coefficients pour assurer l'unicité de l'expression.

Exemple 31

Racines et coefficient dominant

Déterminer l'expression réduite du polynôme ayant r_1 et r_2 pour racines et dont le coefficient dominant vaut 4.

Si besoin, on commence par déterminer les racines $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ d'un polynôme puis on multiplie le produit $(x - r_1) \cdots (x - r_n)$ par le coefficient nécessaire pour obtenir le polynôme souhaité.

Exemple 32

Factoriser $2x^2 - 3x + 1$

Exercice 4 Déterminer tous les polynômes de degré 2 ayant -3 et 4 comme racines.

Exercice 5 Déterminer tous les polynômes de degré 2 ayant comme racines $1 + \sqrt{3}$ et $1 - \sqrt{3}$.

Exercice 6 Déterminer tous les polynômes de degré 3 ayant

a) comme racines 0 et -1.

b) comme racines 0 et -1, mais aucun autre nombre.

3.5 Résolution de problèmes du deuxième degré

Pour résoudre un problème du second degré, on procède de la même manière que pour résoudre un problème du premier degré.

a) Lire et relire autant de fois que nécessaire la consigne.
b) Déterminer l'inconnue ou les inconnues à poser.
c) Écrire l'équation ou les équations qui permettent de mettre en relation les inconnues et les données.
d) Résoudre les équations en appliquant la méthode de résolution adaptée.
e) Interpréter le résultat et répondre à la question.
f) Vérifier la cohérence du résultat.

Exemple 33

Le périmètre d'un rectangle vaut 96 m et son aire 540 m^2. Déterminer les mesures du rectangle.

3.6 Équations bicarrées

Nous allons étudier comment résoudre une équation de la forme

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

On commence par remarquer que

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \iff a(x^2)^2 + bx^2 + c = 0 \iff ay^2 + by + c = 0 \text{ avec } y = x^2$$

On applique la formule du deuxième degré à l'équation en y. L'équation aura

0 solution réelle ; 1 solution réelle ; 2 solutions réelle.

On détermine ensuite les solutions de l'équation en déterminant les valeurs de $x = \pm\sqrt{y}$ pour $y \geq 0$.

Seulement les solutions positives pour l'équation en y donneront des solutions pour l'équation en x, car la racine carrée n'est pas définie sur les nombres négatifs.

Exemple 34

$x^4 - 20x^2 + 91 = 0$

Exemple 35

$x^4 + 2x^2 - 1 = 0$

Exercice 7 Résoudre à l'aide de la méthode présentée les équations suivantes (calculatrice autorisée).

a) $9x^4 - 37x^2 + 4 = 0$

b) $4x^4 + 91x^2 - 225 = 0$

c) $16x^4 + 40x^2 + 9 = 0$

d) $x^4 - 2x^2 - 6 = 0$

3.7 Équations irrationnelles

L'équation $x = -1$ a une solution évidente -1. Lorsque l'on élève l'équation au carré, on obtient $x^2 = 1$ qui a deux solutions, les nombres -1 et 1.
Remarque :

Ainsi, l'opération « élever au carré » n'est pas une opération d'équivalence. On n'écrit pas « $\Leftrightarrow$ », mais « $\Longrightarrow$ », car la nouvelle équation n'a pas le même ensemble de solutions.

$$x = -1 \implies \quad x^2 = 1 \quad (\text{ et non pas } \Leftrightarrow)$$

L'opération « élever à une puissance » est utile pour résoudre des équations qui contiennent des inconnues sous des radicaux ($\sqrt[n]{\quad}$).

Inconnue sous un radical	Pas d'inconnue sous un radical
$\sqrt{x+1} = x+2$	$\sqrt{3}x = 1 + x$

Une équation du premier degré avec une inconnue sous un radical peut avoir une infinité de solution, deux, une ou aucune solution. **Toutes les solutions de l'équation initiale sont des solutions de l'équation élevée au carré, mais toutes les solutions de l'équations élevée au carré ne sont pas des solutions de l'équations initiales.** Il faut vérifier chaque solution.

$$1 = -x + \sqrt{4x+16}$$

On résout ce type d'équation de la manière suivante :

$1 = -x + \sqrt{4x+16}$	isoler la racine carrée
$\Leftrightarrow \ x + 1 = \sqrt{4x+16}$	élever au carré
$\Longrightarrow \ (x+1)^2 = 4x + 16$	développer
$\Leftrightarrow \ x^2 + 2x + 1 = 4x + 16$	comparer à zéro
$\Leftrightarrow \ x^2 - 2x - 15 = 0$	résoudre l'équation (ici par factorisation)
$\Leftrightarrow \ (x+3)(x-5) = 0$	appliquer le théorème du produit nul
$\Leftrightarrow \ x + 3 = 0 \quad \text{ou} \quad x - 5 = 0$	résoudre les équations
$\Leftrightarrow \ x = -3 \quad \text{ou} \quad x = 5$	

On vérifie à présent les solutions obtenues.
Pour $x = -3$

$$1 \stackrel{?}{=} -(-3) + \sqrt{4 \cdot (-3) + 16}$$
$$1 \neq 5$$

donc -3 n'est pas solution de l'équation.
Pour $x = 5$

$$1 \stackrel{?}{=} -(5) + \sqrt{4 \cdot (5) + 16}$$
$$1 = 1$$

donc 5 est solution de l'équation.
Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation est $S = \{5\}$.

Exemple 36

$x = 6 + \sqrt{-7x + 30}$

Algèbre SECTION 4

Systèmes d'équations

4.1 Systèmes d'équations – généralités

- Un système d'équations est un ensemble d'équations portant sur les mêmes inconnues qui doivent être résolues simultanément. Un **système d'équations linéaires** est un système dont toutes les équations sont du premier degré.
- Une solution d'un système d'équations à deux inconnues $x,y \in \mathbb{R}$ est un couple noté $(x_0; y_0)$ qui vérifie les deux équations simultanément .
- Une solution d'un système d'équations à trois inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$ est un triplet noté $(x_0; y_0; z_0)$ qui vérifie les trois équations simultanément.

Voici deux exemples :
Le triplet $(1; 3; 1)$ est solution du système

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = -3 \\ 3x + 2y + 5z = 14 \end{cases},$$

car $1 - 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = -3$ et $3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 5 \cdot 1 = 14$.
Mais le triplet $(0; 2; 1)$ n'est pas solution même si $1 \cdot 0 - 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = -3$, car $3 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = 9 \neq 14$.

Remarque Afin qu'un tuple soit solution d'un système, toutes les équations du système doivent être vérifiées simultanément.

Résoudre une système c'est déterminer l'ensemble de toutes ses solutions.
Pour résoudre un système d'équations, on cherche à « éliminer une ou plusieurs inconnues » pour se ramener à un système avec moins d'inconnues.

Définition Deux systèmes sont dits équivalents s'ils ont le même ensemble de solutions.

En plus des deux principes d'équivalence déjà rencontrés lors de la résolution d'équations du premier degré, nous pouvons également appliquer le principe d'équivalence suivant :

PE3 : en additionnant à une équation d'un système un multiple non nul d'une autre équation du même système, on obtient un système équivalent.

Exemple 37

$$\begin{cases} 3x + y = 4 \\ -2x + 3y = 10 \end{cases}$$

4.2 Systèmes d'équations – résolution

Par substitution

Pour résoudre un système d'équations par subsitution, on **isole une inconnue dans une équation du système** puis on **substitue l'expression obtenue dans une autre équation du système** afin « d'éliminer » l'inconnue en question de l'équation. Afin d'appliquer cette méthode, on n'utilise pas **PE3**.

Exemple 38

$$\begin{cases} -3x + y = 9 \\ 4x - 3y = -17 \end{cases}$$

Par combinaison linéaire

Pour résoudre un système d'équations par combinaison linéaire, on applique **PE3** pour éliminer une inconnue dans une équation du système.

Exemple 39

$$\begin{cases} 5x - 4y = 8 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases}$$

Remarque On réécrit toutes les équations à chaque étape.

Algèbre SECTION 5

Exercices aléatoirisés

Identités remarquables	**Factorisation avec identités**	**Groupements**	**Complétion du carré**
Formule deuxième degré	**Résoudre pour factoriser**	**Équations bicarrées**	**Équations irrationnelles**
Solutions d'un système	**Résolution par substitution**	**Résolution par comb. lin.**	**Problèmes**