Exercice 1 Un navire doit parcourir 40 km contre un courant de 10 km/h. Il consomme par heure une quantité de carburant proportionnelle au carré de sa vitesse. En supposant qu'il navigue à vitesse constante, quelle doit être sa vitesse pour minimiser la quantité de carburant consommée ?

Corrigé 1

Correction générée par IA

Notons v la vitesse du navire par rapport à l'eau (en km/h). La vitesse effective contre le courant est $v - 10$ km/h.

Le temps nécessaire pour parcourir 40 km contre le courant est :

$$t = \frac{40}{v - 10} \text{ heures}$$

La consommation de carburant par heure est proportionnelle à v^2, soit kv^2 pour une constante $k > 0$.

La consommation totale de carburant est donc :

$$\mathrm{C}(v) = kv^2 \cdot t = kv^2 \cdot \frac{40}{v - 10} = \frac{40kv^2}{v - 10}$$

Pour minimiser la consommation, nous dérivons par rapport à v :

$$\mathrm{C}'(v) = 40k \cdot \frac{2v(v - 10) - v^2 \cdot 1}{(v - 10)^2} = 40k \cdot \frac{2v^2 - 20v - v^2}{(v - 10)^2} = 40k \cdot \frac{v^2 - 20v}{(v - 10)^2}$$

L'annulation de la dérivée donne :

$$v^2 - 20v = 0$$

$$v(v - 20) = 0$$

Puisque $v > 10$ (le navire doit avancer contre le courant), nous avons :

$$v = 20 \text{ km/h}$$

Vérifions qu'il s'agit bien d'un minimum en étudiant le signe de $\mathrm{C}'(v)$:

- Pour $10 < v < 20$: $v^2 - 20v < 0$, donc $\mathrm{C}'(v) < 0$ (décroissant)
- Pour $v > 20$: $v^2 - 20v > 0$, donc $\mathrm{C}'(v) > 0$ (croissant)

Donc $v = 20$ km/h correspond bien à un minimum.

La vitesse optimale du navire est $\boxed{20 \text{ km/h}}$ par rapport à l'eau.

Remarque : La vitesse effective contre le courant est alors $20 - 10 = 10$ km/h.