

Complément : asymptotes obliques

Définition

Asymptote oblique

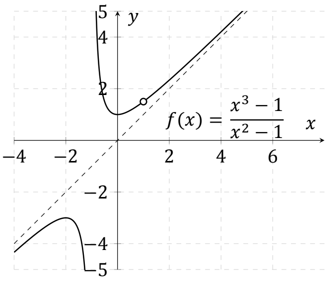
Une droite d d'équation $d(x) = ax + b$ avec $a \neq 0$ est appelée **asymptote oblique** de la fonction f ssi au moins l'une des conditions suivantes est satisfaite :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - d(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) - d(x) = 0$$

Exemple 1

Asymptote oblique

La fonction ci-contre admet $y = x$ comme asymptote oblique à $\pm\infty$.



Méthode

Asymptote oblique

Soit f une fonction rationnelle définie par

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + b_{m-2} x^{m-2} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

telle que $n = m + 1$, alors f admet une asymptote oblique à $\pm\infty$.
La **division polynomiale** du numérateur par le dénominateur de f permet de faire apparaître cette asymptote.

Exemple 2

Asymptote oblique de $f(x) = \dfrac{x^2}{x+2}$

Déterminer l'asymptote oblique de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2}{x+2}$
On commence par la division polynomiale comme indiqué dans la méthode :

$$\begin{array}{r|l}
x^2 & x + 2 \\ \cline{2-2}
-\, x^2 - 2x & x - 2 \\ \cline{1-1}
-\, 2x & \\
2x + 4 & \\ \cline{1-1}
4 &
\end{array}$$

d'où on obtient : $x^2 = (x+2)(x-2) + 4$. Ainsi,

$$f(x) = \frac{x^2}{x+2} = \frac{(x+2)(x-2)+4}{x+2} = \frac{(x+2)(x-2)}{x+2} + \frac{4}{x+2} = x - 2 + \frac{4}{x+2}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to \pm\infty} f(x) &= \lim_{x \to \pm\infty} \left(x - 2 + \frac{4}{x+2} \right) \\
&= \lim_{x \to \pm\infty} (x-2) + \lim_{x \to \pm\infty} \frac{4}{x+2} \\
&= \lim_{x \to \pm\infty} (x-2) + 0
\end{aligned}$$

puis $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - \lim_{x \to \pm\infty} (x-2) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - (x-2) = 0$, c'est-à-dire que $y = x - 2$ est une asymptote oblique de f à $\pm\infty$

Théorème 1
Caractérisation des asymptotes obliques (sans démonstration)

La droite d définie par $d(x) = ax + b$ est une asymptote oblique de la fonction f à $\pm\infty$ ssi $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x) - ax) = b$.

Remarque

Le théorème précédent fournit une deuxième méthode pour déterminer des asymptotes obliques.

Exemple 3
Asymptote oblique de $f(x) = \dfrac{x^2}{x+2}$

Déterminer l'asymptote oblique de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2}{x+2}$ en utilisant le théorème 1
On commence par déterminer le coefficient a du théorème :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x+2} \cdot \frac{1}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} \cdot \frac{1}{x+2} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2(1+\frac{2}{x})} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{2}{x}} \\
&= \frac{1}{1+0} \\
&= 1
\end{aligned}$$

puis le coefficient b

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}(f(x) - ax) &= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2}{x+2} - 1\cdot x\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x(x+2)}{x+2} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x^2 - 2x}{x+2} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x}{x+2} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x(-2)}{x(1+\frac{2}{x})} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2}{1+\frac{2}{x}} \\
&= \frac{-2}{1+0} \\
&= -2
\end{aligned}$$

donc $y = x - 2$ est une asymptote oblique de f à $\pm\infty$

Exercice 1 Représenter graphiquement une fonction qui ait une asymptote horizontale à 0 et une asymptote oblique à $+\infty$.

Exercice 2 Déterminer les asymptotes obliques des fonctions f définies par :

a) $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x - 3}{x^2 + 2x + 1}$ b) $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 2}{x - 2}$

Pourquoi parle-t-on d'asymptotes obliques dans ces cas ?

Exercice 3 Déterminer, dans chacun des cas suivants, l'expression algébrique d'une fonction rationnelle avec une asymptote :

a) oblique d'équation $y = 3x - 5$
b) horizontale d'équation $y = -2$
c) verticale d'équation $x = 7$.
d) horizontale d'équation $y = 0$, deux verticales d'équations $x = 3$ et $x = -10$.
e) Une asymptote verticale d'équation $x = 5$ et une asymptote oblique d'équation $y = 2x + 5$

Justifier vos réponses en montrant que les conditions sont bien vérifiées.

Exercice 4 Déterminer l'expression algébrique d'une fonction f telle que $x = -2$ et $x = 4$ soient des asymptotes verticales, et que $y = -1$ soit une asymptote horizontale à $+\infty$. Justifier que la fonction donnée remplie bien les conditions demandées.

Exercice 5 Déterminer les coefficients réels a, b, c et d de la fonction rationnelle définie par $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x + d}$ dont le graphe passe par le point $\mathrm{A}(2; -2)$ et qui admet pour asymptotes les droites d'équation $x = -3$ et $y = -2x + 1$

Exercice 6 Déterminer l'expression algébrique d'une fonction rationnelle f qui admette les droites $x = 5, x = 0$ et $y = 3x - 5$ comme asymptotes.

Exercice 7 Déterminer l'expression algébrique d'une fonction rationnelle f dont le graphe passe par le point $\mathrm{A} = (-5; 5)$ et qui admet pour asymptotes les droites d'équations $x = -2, x = 1$ et $y = -x - 1$.