Exercice 1 Soit le polynôme $x^6 - 1$.

a) Le factoriser de deux manières différentes (indications : $x^6 = \left(x^3\right)^2 = \left(x^2\right)^3$ et utiliser l'activité 1).

b) En déduire une factorisation pour le polynôme $x^4 + x^2 + 1$.

Corrigé 1 *Correction générée par IA*

a) Nous avons $x^6 - 1$.
Première factorisation : Utilisons $x^6 = (x^3)^2$, ce qui donne une différence de deux carrés :

$$x^6 - 1 = (x^3)^2 - 1^2 = (x^3 - 1)(x^3 + 1)$$

Nous pouvons ensuite factoriser chaque terme en utilisant les identités remarquables :

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$$
$$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$$

D'où :

$$\boxed{x^6 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)}$$

Deuxième factorisation : Utilisons $x^6 = (x^2)^3$, ce qui donne une différence de deux cubes :

$$x^6 - 1 = (x^2)^3 - 1^3 = (x^2 - 1)((x^2)^2 + x^2 + 1) = (x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1)$$

Nous pouvons factoriser $x^2 - 1$:

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

D'où :

$$\boxed{x^6 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^4 + x^2 + 1)}$$

b) En comparant les deux factorisations, nous avons :

$$(x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^4 + x^2 + 1)$$

En simplifiant par $(x - 1)(x + 1)$, nous obtenons :

$$(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) = x^4 + x^2 + 1$$

Développons le membre de gauche pour vérifier :

$$\begin{aligned}(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) &= x^4 - x^3 + x^2 + x^3 - x^2 + x + x^2 - x + 1 \\ &= x^4 + x^2 + 1\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)}$$