Exercice 1 Parmi toutes les boîtes cylindriques d'aire totale donnée, caractériser celle dont le volume est maximal.

Corrigé 1

Correction générée par IA

Soit r le rayon et h la hauteur du cylindre. L'aire totale donnée est :

$$\mathrm{A} = 2\pi r^2 + 2\pi r h = \mathrm{A}_0$$

D'où :

$$h = \frac{\mathrm{A}_0 - 2\pi r^2}{2\pi r} = \frac{\mathrm{A}_0}{2\pi r} - r$$

Le volume du cylindre est :

$$\mathrm{V} = \pi r^2 h = \pi r^2 \left(\frac{\mathrm{A}_0}{2\pi r} - r \right) = \pi r^2 \cdot \frac{\mathrm{A}_0}{2\pi r} - \pi r^3 = \frac{\mathrm{A}_0 r}{2} - \pi r^3$$

Pour maximiser le volume, dérivons :

$$\mathrm{V}'(r) = \frac{\mathrm{A}_0}{2} - 3\pi r^2$$

Annulation :

$$\frac{\mathrm{A}_0}{2} - 3\pi r^2 = 0 \implies r^2 = \frac{\mathrm{A}_0}{6\pi} \implies r = \sqrt{\frac{\mathrm{A}_0}{6\pi}}$$

Calculons la hauteur correspondante :

$$h = \frac{\mathrm{A}_0}{2\pi r} - r = \frac{\mathrm{A}_0}{2\pi\sqrt{\frac{\mathrm{A}_0}{6\pi}}} - \sqrt{\frac{\mathrm{A}_0}{6\pi}}$$

Simplifions le premier terme :

$$\frac{\mathrm{A}_0}{2\pi\sqrt{\frac{\mathrm{A}_0}{6\pi}}} = \frac{\mathrm{A}_0}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{6\pi}{\mathrm{A}_0}} = \frac{\mathrm{A}_0}{2\pi} \cdot \frac{\sqrt{6\pi}}{\sqrt{\mathrm{A}_0}} = \frac{\sqrt{\mathrm{A}_0} \cdot \sqrt{6\pi}}{2\pi} = \frac{\sqrt{6\pi \mathrm{A}_0}}{2\pi}$$

Posons $r = \sqrt{\frac{\mathrm{A}_0}{6\pi}}$. Vérifions le rapport $\frac{h}{r}$:

$$h = \frac{\mathrm{A}_0}{2\pi r} - r$$

Multiplions par $\frac{1}{r}$:

$$\frac{h}{r} = \frac{\mathrm{A}_0}{2\pi r^2} - 1 = \frac{\mathrm{A}_0}{2\pi \cdot \frac{\mathrm{A}_0}{6\pi}} - 1 = \frac{\mathrm{A}_0 \cdot 6\pi}{2\pi \mathrm{A}_0} - 1 = 3 - 1 = 2$$

Donc $h = 2r$.

La boîte cylindrique de volume maximal pour une aire totale donnée a $\boxed{h = 2r}$ (la hauteur est égale au diamètre).