Exercice 1 Soit la fonction f définie par morceaux ci-dessous.

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1, & \text{si } x < 2 \\ 3, & \text{si } x = 2 \\ -x^2+3x+1, & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

a) En utilisant la définition de la dérivée, déterminer si f est dérivable en $a = 2$.

b) Même question pour g pour $a = -1$:

$$g(x) = \begin{cases} 3x^2+1, & \text{si } x < -1 \\ 4, & \text{si } x = -1 \\ x^2-4x-1, & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

Corrigé 1

a) Pour que f soit dérivable en $a = 2$, il faut que les dérivées à gauche et à droite existent et soient égales.

Calculons la dérivée à gauche :

$$f'_g(2) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(2(2+h)-1)-3}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{4+2h-1-3}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{2h}{h} = 2$$

Calculons la dérivée à droite :

$$f'_d(2) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(-(2+h)^2+3(2+h)+1)-3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{-(4+4h+h^2)+6+3h+1-3}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-4-4h-h^2+6+3h+1-3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{-h^2-h}{h} = \lim_{h\to 0^+} (-h-1) = -1$$

Puisque $f'_g(2) = 2 \neq -1 = f'_d(2)$, la fonction f n'est pas dérivable en $a = 2$.

b) Pour g en $a = -1$:

Dérivée à gauche :

$$g'_g(-1) = \lim_{h\to 0^-} \frac{g(-1+h)-g(-1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(3(-1+h)^2+1)-4}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{3(1-2h+h^2)+1-4}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{3-6h+3h^2+1-4}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{3h^2-6h}{h} = \lim_{h\to 0^-} (3h-6) = -6$$

Dérivée à droite :

$$g'_d(-1) = \lim_{h\to 0^+} \frac{g(-1+h)-g(-1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{((-1+h)^2-4(-1+h)-1)-4}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{(1-2h+h^2)+4-4h-1-4}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^2-6h}{h} = \lim_{h\to 0^+} (h-6) = -6$$

Puisque $g'_g(-1) = -6 = g'_d(-1)$, la fonction g est dérivable en $a = -1$ et $g'(-1) = -6$.