Exercice 1 On désire fabriquer une tente en forme de pyramide régulière de base carrée. On dispose de S m^2 de toile pour fabriquer les quatre faces. On désigne par V le volume de la tente, par x le côté du carré de la base et par h la hauteur de la tente. Montrer que V est maximum lorsque $\dfrac{x}{h} = \sqrt{2}$.

Corrigé 1

Correction générée par IA

Considérons une pyramide régulière de base carrée avec :

- x : côté du carré de base
- h : hauteur de la tente
- S : surface totale des quatre faces latérales

Calcul de l'aire d'une face latérale :

Chaque face latérale est un triangle isocèle. Notons a l'apothème (hauteur d'une face latérale).
Par le théorème de Pythagore dans le triangle formé par la hauteur h, la demi-base $\frac{x}{2}$, et l'apothème a :

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = h^2 + \frac{x^2}{4}$$

L'aire d'une face latérale est $\frac{1}{2} \cdot x \cdot a$, donc l'aire totale des quatre faces est :

$$\mathrm{S} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot a = 2xa = 2x\sqrt{h^2 + \frac{x^2}{4}}$$

D'où :

$$\mathrm{S}^2 = 4x^2\left(h^2 + \frac{x^2}{4}\right) = 4x^2h^2 + x^4$$

$$x^4 + 4x^2h^2 = \mathrm{S}^2$$

On peut exprimer h en fonction de x :

$$h^2 = \frac{\mathrm{S}^2 - x^4}{4x^2}$$

Volume de la pyramide :

$$\mathrm{V} = \frac{1}{3}x^2h = \frac{1}{3}x^2\sqrt{\frac{\mathrm{S}^2 - x^4}{4x^2}} = \frac{x}{6}\sqrt{\mathrm{S}^2 - x^4}$$

Pour maximiser V, posons $u = x^2$ et étudions :

$$\mathrm{V}(u) = \frac{\sqrt{u}}{6}\sqrt{\mathrm{S}^2 - u^2} = \frac{1}{6}\sqrt{u(\mathrm{S}^2 - u^2)} = \frac{1}{6}\sqrt{\mathrm{S}^2u - u^3}$$

Pour maximiser V, il suffit de maximiser $f(u) = \mathrm{S}^2u - u^3$.
Dérivons :

$$f'(u) = \mathrm{S}^2 - 3u^2$$

L'annulation de la dérivée donne :

$$\mathrm{S}^2 - 3u^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad u^2 = \frac{\mathrm{S}^2}{3} \quad \Rightarrow \quad u = \frac{\mathrm{S}}{\sqrt{3}}$$

Donc $x^2 = \frac{\mathrm{S}}{\sqrt{3}}$, et :

$$h^2 = \frac{\mathrm{S}^2 - x^4}{4x^2} = \frac{\mathrm{S}^2 - \frac{\mathrm{S}^2}{3}}{4 \cdot \frac{\mathrm{S}}{\sqrt{3}}} = \frac{\frac{2\mathrm{S}^2}{3}}{\frac{4\mathrm{S}}{\sqrt{3}}} = \frac{2\mathrm{S}^2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4\mathrm{S}} = \frac{\mathrm{S}\sqrt{3}}{6}$$

Calculons le rapport :

$$\frac{x^2}{h^2} = \frac{\frac{\mathrm{S}}{\sqrt{3}}}{\frac{\mathrm{S}\sqrt{3}}{6}} = \frac{\mathrm{S}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{6}{\mathrm{S}\sqrt{3}} = \frac{6}{3} = 2$$

Donc $\frac{x}{h} = \sqrt{2}$, ce qui est bien le résultat demandé. $\boxed{\frac{x}{h} = \sqrt{2}}$