

Fonctions

Table des matières

1	Généralités sur les fonctions	2
1.1	Découverte de quelques fonctions et vocabulaire	2
1.2	Domaine de définition	3
1.3	Opérations sur les fonctions	4
1.4	Composition de fonctions	4
2	Les droites	8
3	Les paraboles	8

Généralités sur les fonctions

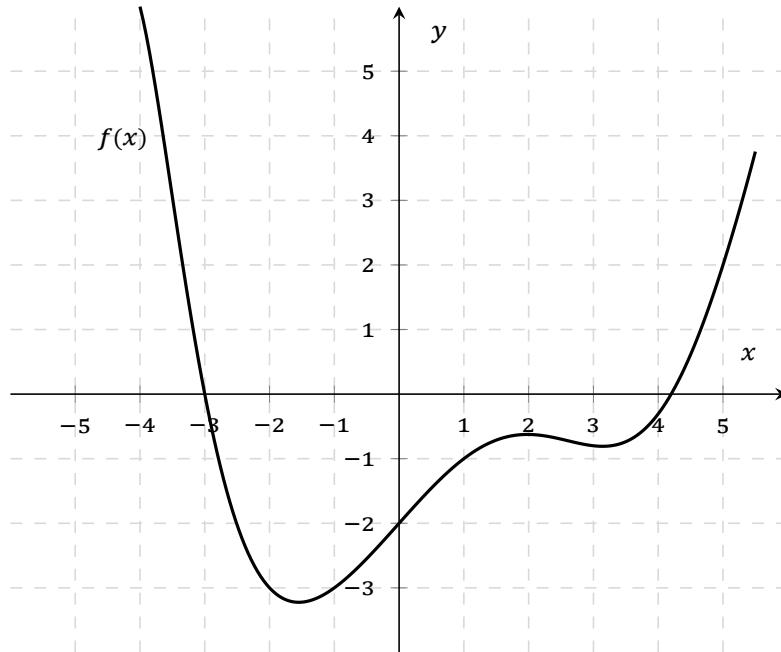
1.1 Découverte de quelques fonctions et vocabulaire

Exercice 1

Soit

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Calculer $f(-3), f(-0,5), f(0), f(5)$.



Exercice 2

Même fonction f que dans l'exercice précédent. Résoudre $f(x) = 4$ (donner toutes les x possibles).

Exercice 3

Soit f telle que $f(x+1) = f(x) + 3$ et $f(0) = 2$. Calculer $f(1), f(2), f(10)$.

Exercice 4

Soit $g(x) = (x+1)/(x-1)$. Calculer $g(3), g(0)$, puis $g(g(3))$.

Exercice 5

Soit f définie par $f(1) = 3$ et $f(n+1) = 2 \cdot f(n) - 1$ pour tout entier $n \geq 1$. Calculer $f(2), f(3), f(4)$.

Exercice 6

Soit $u(x) = \frac{2x-1}{x+2}$. Calculer $u(1)$, puis $u(u(1))$.

Exercice 7

Calculer les images de $-3, 0, \frac{1}{2}$ et $\sqrt{2}$ pour $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$.

Exercice 8

Déterminer si les points $A(2; 5)$, $B(-1; 0)$ et $C\left(\frac{1}{2}; 7\right)$ appartiennent au graphe de $f(x) = x^3 + x + 1$.

Exercice 9

Tracer le plus précisément possible $f(x) = (x - 2)^2$ pour x allant de -2 à 6 . Sur le même graphique, tracer $g(x) = x - 2$. Où les deux courbes se coupent-elles?

Exercice 10

Déterminer la préimage de 10 par la fonction $f(x) = 3x - 5$.

Exercice 11

On donne $g(x) = x^2 - 4x + 3$. Calculer $g(2 + h) - g(2)$ et simplifier.

1.2 Domaine de définition

Exercice 12

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes

a) $f(x) = \frac{1}{x - 5}$

b) $g(x) = \sqrt{x + 8}$

c) $h(x) = \frac{x + 1}{2x - 6}$

d) $k(x) = \sqrt{10 - x}$

e) $m(x) = \frac{1}{x^2 - 9}$

f) $n(x) = \frac{3x + 4}{x^2 + 1}$

Exercice 13

$p(x) = \sqrt{x - 1} + 3$. Donner le domaine puis calculer $p(5)$ et $p(10)$.

Exercice 14

$q(x) = \frac{x + 2}{x - 3}$. Donner le domaine puis calculer la préimage de 2 .

Exercice 15

$r(x) = \sqrt{2x - 4}$. Donner le domaine puis calculer la préimage de 6 .

Exercice 16

$s(x) = \sqrt{x^2 - 16}$. Donner le domaine et calculer $s(5)$.

Exercice 17

$t(x) = \frac{1}{\sqrt{x - 1}}$. Donner le domaine de définition.

Exercice 18

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes

a) $v(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 3}$

b) $w(x) = \sqrt{x - 3} + \frac{1}{x + 2}$

1.3 Opérations sur les fonctions

Exercice 19 Soient $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x^2 - 4$, $h(x) = 5$ et $k(x) = \sqrt{x}$

- Déterminer $(f + g)(x)$.
- Déterminer $(f \cdot g)(x)$ sous forme développée.
- Calculer la valeur exacte de l'image de $\sqrt{3}$ par $(f - g)$.
- Déterminer $(g/f)(x)$ et préciser le domaine de définition.
- Déterminer $(f \cdot h)(x)$.
- Déterminer $(2f + 3g)(x)$.
- Donner le domaine de définition de $(g + k)(x)$.
- Montrer que $(f \cdot f)(x)$ est un trinôme du second degré et donner son expression sous la forme $ax^2 + bx + c$.
- Simplifier $(f^2 - g)(x)$.
- Déterminer $i(x)$ telle que $(f + i)(x) = x^2 + 5x - 2$.

Exercice 20 Si $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = \frac{x}{x+1}$, simplifier $(f + g)(x)$ et donner le domaine.

1.4 Composition de fonctions

Exercice 21 $f(x) = 3x + 2$, $g(x) = x^2$. Calculer $f(g(x))$ et $g(f(x))$.

Exercice 22 Décomposer $k(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ en une composition de deux fonctions.

Exercice 23 $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x + 5$. Calculer $f(g(4))$.

Exercice 24 Décomposer $h(x) = (2x - 7)^3$ en u et v telles que $h = v \circ u$.

Exercice 25 Si $f(x) = \frac{1}{x}$, calculer $f(f(x))$ pour $x \neq 0$.

Exercice 26 Soit $f(x) = x^2$ et $g(x) = x - 10$. Calculer $f(g(5))$ et $g(f(5))$.

Exercice 27 Déterminer le domaine de $f \circ g$ et de $g \circ f$ si $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x - 3$.

Exercice 28 Soit $f(x) = 2x$. Calculer $(f \circ f \circ f)(x)$.

Exercice 29 Soient $f(x) = x + 3$ et $g(x) = \frac{1}{x}$. Déterminer l'ensemble des x pour lesquels $f(g(x)) = g(f(x))$.

Exercice 30 Soit $f(x) = x + 3$ et $g(x) = 2x - 1$. Vérifier que $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$.

Exercice 31 Trouver $g(x)$ tel que si $f(x) = x + 1$, alors $f(g(x)) = x^2 + 2x + 5$.

Exercice 32 Soit $f(x) = \frac{x}{x+1}$. Montrer que $f(f(x)) = \frac{x}{2x+1}$.

Exercice 33 Résoudre $f(g(x)) = 0$ avec $f(x) = 2x - 8$ et $g(x) = x^2$.

Exercice 34 Représenter les droites suivantes dans un même repère.

a) $d_1 : y = 2x - 3$. b) $d_2 : y = -\frac{1}{2}x + 4$.
c) $d_3 : y = -\frac{5}{2}x - 1$. d) $d_4 : y = x - \frac{1}{2}$

Exercice 35 Identifier l'ordonnée à l'origine et la pente, puis représenter la droite $3x - y + 2 = 0$.

Exercice 36 Tracer les droites $x = 3$ et $y = -2$. Expliquer leur particularité.

Exercice 37 Tracer la droite passant par l'origine et $(2; 4)$. Donner également son équation.

Exercice 38 Déterminer l'équation de la droite de pente $m = 0$ passant par $(1; 3)$. La représenter graphiquement. Comment s'appelle une telle droite?

Déterminer l'équation de la droite passant par les points A(1; 2) et B(3; 6).

Exercice 40 Déterminer l'équation de la droite passant par les points M(-1; 5) et N(2; -1).

Exercice 41 Tracer la droite $y = -2x + 1$. Le point $(5; -9)$ appartient-il à cette droite ? Vérifier algébriquement.

Exercice 42 Représenter la droite $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$.

Exercice 43 Soit $f(x) = mx + 2$. Pour quelle valeur de m la droite passe-t-elle par $(4; 0)$? et par $\left(\frac{1}{3}; \frac{7}{8}\right)$?

Exercice 44 Déterminer l'équation de la droite parallèle à $y = 3x - 1$ passant par $\left(\frac{2}{5}; 4\right)$.

Exercice 45 Déterminer l'équation de la droite perpendiculaire à $y = -\frac{1}{2}x + 1$ passant par $(2, 3)$.

Exercice 46 Vérifier si (AB) et (CD) sont parallèles : A(1; -1), B(3; -5), C(0; 0), D(2; -4).

Exercice 47 Déterminer, s'il existe, le point d'intersection de $y = 3x - 2$ et $y = x + 4$.

Exercice 48 Déterminer l'équation de la droite parallèle à $d : 2x - y + 3 = 0$ passant par l'origine. Et par le point $\left(\frac{3}{4}; -\frac{2}{7}\right)$?

Exercice 49 Les droites $3x - 2y = 4$ et $2x + 3y = 7$ sont-elles perpendiculaires ?

Exercice 50 Déterminer les intersections de la droite $y = 2x - 10$ avec les axes O x et O y .

Exercice 51 Déterminer la valeur de k pour que $5y = kx + 3$ soit perpendiculaire à $-y = 2x - 1$.

Exercice 52 Montrer que le triangle A(0; 0), B(4; 0), C(0; 3) est rectangle en calculant les pentes entre les points.

Exercice 53 Pour chacune des fonctions suivantes, donner l'intersection avec les axes, le sommet, la forme canonique, la forme factorisée, le sens de variation et esquisser le plus précisément possible la représentation graphique.

a) $x^2 - 4x + 3$ b) $x^2 - 9$ c) $-x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{5}$
d) $x^2 - 2x - 8$ e) $2x^2 + \frac{1}{4}x - 6$

Exercice 54 Déterminer les intersections avec les axes, le sommet, la forme canonique, la forme factorisée et représenter la fonction suivante : $f(x) = x^2 - 4x$.

Exercice 55 Soit une fonction f dont les racines valent -1 et 3. Déterminer l'abscisse du sommet, justifier.

Exercice 56 Déterminer l'équation de la parabole passant par (-1; 0), (3; 0) et (0; -3).

Exercice 57 Déterminer la valeur de x pour laquelle $f(x) = (x - 3)^2 - 4$ prend son minimum. Que vaut-il ?

Exercice 58 La fonction $f(x) = -3x^2 + 12x + 5$ admet-elle un maximum ou minimum ? Le calculer.

Exercice 59 Montrer que $x^2 - 4x + 7 \geq 3$ pour tout réel.

Exercice 60 Déterminer la valeur de k afin que le minimum de la fonction $f(x) = x^2 - 2x + k$ vaille 5 ?

Exercice 61

Quel est le maximum et le minimum de la fonction $f(x) = -x^2 + 4x$ sur l'intervalle $[0; 4]$.

Intersections

Exercice 62

Déterminer l'ensemble des points d'intersection des courbes $y = x^2 - 4x + 4$ et $y = -x + 2$.

Exercice 63

Déterminer l'ensemble des points d'intersection de $y = x^2 - 3x + 1$ et $y = x - 1$.

Exercice 64

Pour chaque fonction, dire si elle admet un minimum ou un maximum, puis déterminer les coordonnées de cet extremum.

a) $f(x) = x^2 - 8x + 10$

b) $g(x) = -x^2 + 6x - 2$

c) $h(x) = 2x^2 + 4x + 5$

d) $i(x) = -3x^2 + 18x - 20$

Exercice 65

Trouver m pour que $y = mx$ soit tangente à $y = x^2 + 1$.

Problèmes d'optimisation**Exercice 66**

Un objet est lancé et sa hauteur est décrite en fonction du temps par l'équation suivante $h(t) = -5t^2 + 20t$. Déterminer sa hauteur maximale. Combien de temps après avoir lancé l'objet atteint-il cette hauteur maximale?

Exercice 67

Un enclos rectangulaire est placé contre un mur, de sorte qu'il ne faut clôturer que trois de ses côtés. Si on dispose de 60 m de clôture, quelles doivent être les dimensions de l'enclos afin qu'il ait une aire maximale.

Exercice 68

Parmi tous les rectangles de périmètre 24 cm, lequel a l'aire maximale ?

Exercice 69

On souhaite séparer un terrain en deux parties rectangulaires égales. On dispose de 120 m de barrière. Quelles doivent être les dimensions des terrains afin que l'aire de chaque terrain soit maximale ?

Exercice 70

On dispose d'une feuille de 16 cm de longueur et 10 cm de largeur. On souhaite en faire une boîte sans couvercle en découpant des carrés aux quatre coins et en repliant chacun des bords.

a) Réaliser un schéma.

b) Exprimer le volume de la boîte en fonction de la mesure du côté des carrés découpés.

c) Déterminer la dimension des carrés à découper afin que le volume soit maximisé.

Exercice 71

Maximiser le produit de deux nombres dont la somme vaut 30.

Fonctions SECTION 2

Les droites

Fonctions SECTION 3

Les paraboles