Chapitre 1 :
Fonctions continues et calcul de limites

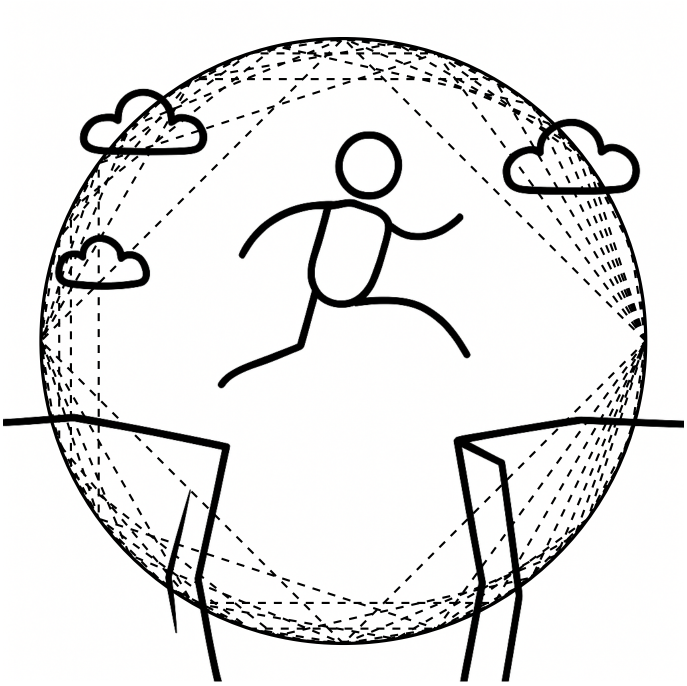


Table des matières

Version du 24 septembre 2025

Prérequis

Avant de commencer ce chapitre, je m'assure d'être capable de

Catégorie	Compétence	QR Code	Validation
Calcul numérique	Calculer avec des fractions		☐
	Calculer avec des racines et les conjugués		☐
Algèbre	Factoriser un polynôme en déterminant ses racines		☐
	Effectuer la division polynomiale		☐
Fonctions	Déterminer le domaine de définition d'une fonction		☐
	« Étudier » une fonction du second degré		☐

Note : Scannez les codes QR pour accéder aux ressources d'apprentissage correspondantes.

Limites et continuité SECTION 1

Continuité

1.1 Définition intuitive et exemples

Définition Un **voisinage** d'un nombre réel a est un intervalle ouvert qui contient a.

Exemple 1 Les intervalles ouverts $]1\,;4[$ et $]2{,}9999\,;3{,}000000001[$ sont des voisinages de 3.

Remarque Par définition, un voisinage d'un nombre réel a contient une infinité de nombres plus petit et plus grand que a.

Définition On dit qu'une fonction est **définie au voisinage** d'un nombre réel a ssi il existe un voisinage de a sur lequel la fonction est définie, sauf peut-être en a.

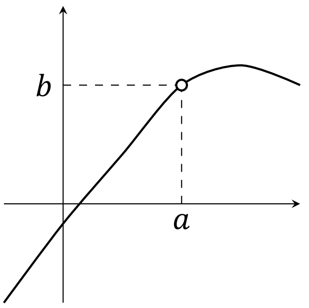
Définition Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle (donc $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$) et $a \in \mathrm{I}$. On dit que f est continue en a ssi il existe un voisinage de a tel que « une représentation graphique de f dans ce voisinage peut être dessinée sans lever le crayon ».

Remarque Cette définition n'est pas formelle. Un des objectifs de ce chapitre est d'étudier l'outil « limite » qui permet de caractériser la continuité.

Définition f est continue sur I un intervalle $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$ ssi f est continue en tout point de I.

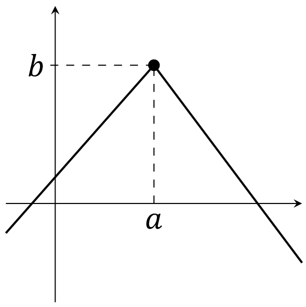
Exemple 2

a)



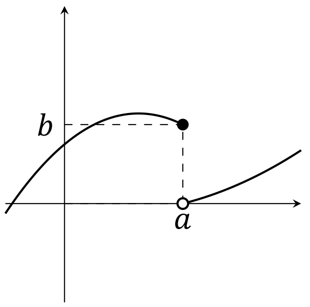
f n'est pas continue en a, car f n'est pas définie en a.

b)



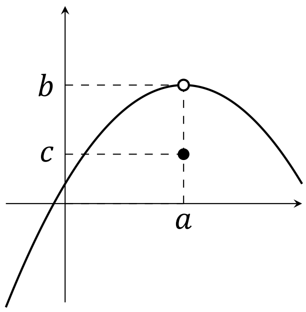
f est continue en a.

c)



f n'est pas continue en a.

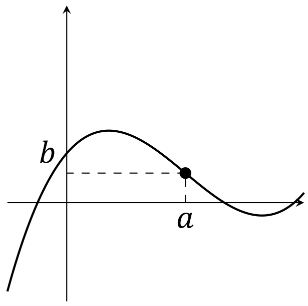
d)



f n'est pas continue en a.

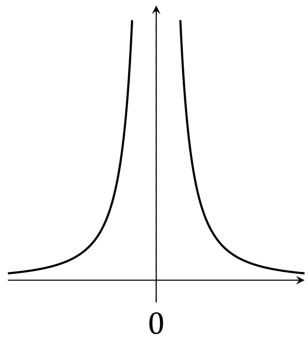
Exemple 2 (suite)

e)



f est continue en a.

f)



f n'est pas continue en 0, car f n'est pas définie en 0.

1.2 Théorème de la valeur intermédiaire

Théorème 1
Théorème de la valeur intermédiaire

Si $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur $[a; b]$, alors la fonction f

— est bornée sur $[a; b]$

— possède un minimum m et un maximum M sur $[a; b]$

— prend au moins une fois toutes les valeurs comprises entre m et M.

En d'autres termes, $f([a; b]) = [m; \mathrm{M}]$

Exemple 3 Soit $f : [0; 1] \to [0; 1]$ une fonction continue. Montrer qu'il existe $a \in [0; 1]$ tel que $f(a) = a$.

Corollaire 1 Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ si

$$f(a) \geq 0 \text{ et } f(b) \leq 0 \textbf{ ou } f(a) \leq 0 \text{ et } f(b) \geq 0,$$

alors f s'annule sur $[a; b]$, c'est-à-dire qu'il existe $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = 0$.

Remarque Si l'hypothèse de continuité n'est pas vérifiée, ces deux résultats ne sont plus vrais!

Limites et continuité SECTION 2

Limites en un nombre

2.1 Un exemple introductif

Exemple 4 **Exemple introductif** – Considérons la fonction définie par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+ \setminus \{1; 4\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{3(1-x)}{(\sqrt{x}-1)(x-4)} \end{aligned}$$

Nous allons étudier le comportement de cette fonction aux bords de son ensemble de définition, c'est-à-dire en

— en $x = 1$ puis $x = 4$ (valeurs interdites)

— en $x = 0$ et finalement en $x \to +\infty$

a) Si on évalue la fonction f pour les deux premières valeurs, on risque d'obtenir des réponses peu concluantes :

$$f(1) = \_\_\_\_\_ \quad f(4) = \_\_\_\_\_$$

b) Utilisons des tableaux de valeurs :

— S'approcher de la valeur 1 en venant depuis la gauche ($x \to 1^-$) et depuis la droite ($x \to 1^+$)

	gauche →			← droite	
x	0,9	0,99	1	1,01	1,1
$f(x)$	1,886	1,989	???	2,012	2,12

Ainsi, il semblerait que la limite de $f(x)$ quand x tend vers 1 vaut ______

— S'approcher de la valeur 4 en venant depuis la gauche ($x \to 4^-$) et depuis la droite ($x \to 4^+$)

	gauche →			← droite	
x	3,9	3,99	4	4,01	4,1
$f(x)$	89,25	899,3	???	−900,7	−90,75

Exemple 4 (suite)

Ainsi, il semblerait que la limite de $f(x)$ quand :

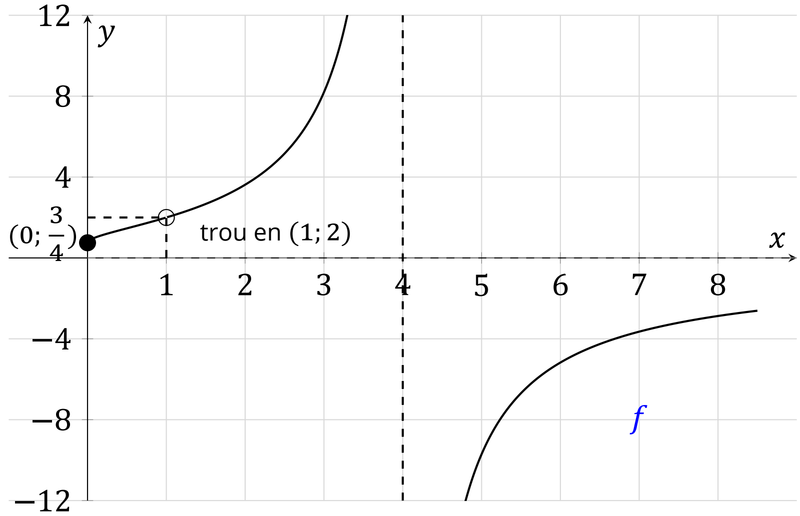
- x tend vers 4 depuis la gauche vaut ______
- x tend vers 4 depuis la droite vaut ______

— Prendre des valeurs de plus en plus grandes ($x \to +\infty$)

	$\to +\infty$		
x	1000	10000	100000
$f(x)$	$-0{,}098$	$-0{,}030$	$-0{,}0095$

Ainsi, il semblerait que la fonction plafonne à ______ lorsque x tend vers $+\infty$

c) Observons ceci sur la représentation graphique de f



d) Pour décrire le comportement de la fonction f, nous utiliserons les terminologies et notations suivantes qui seront définies en temps voulu dans le suite du cours.

0	$\frac{3}{4}$ défini	$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0{,}75$	un **point limite** en $\left(0;\frac{3}{4}\right)$
1	« $\frac{0}{0}$ » indéterminé	$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$ $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$	un **trou** en $(1;2)$
4	« $\frac{-9}{0}$ » non défini	$\lim_{x\to 4^-} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to 4^+} f(x) = -\infty$	une **asymptote verticale** en $x = 4$
$\to +\infty$	« $\frac{+\infty}{+\infty}$ »	$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$	une **asymptote horizontale** à droite en $y = 0$

Le but de ce chapitre sera de présenter les méthodes pour réussir à mener ce type d'étude sur diverses fonctions.

2.2 Définitions et exemples

Définition $x \to a^-$

Soit a nombre réel. Lorsqu'on écrit **« x tend vers a par la gauche »** cela signifie que x s'approche autant qu'on veut de a par des valeurs inférieures à a, tout en restant toujours différent de a.
On note $x \to a^-$.

Définition $x \to a^+$

Soit a nombre réel. Lorsqu'on écrit **« x tend vers a par la droite »** cela signifie que x s'approche autant qu'on veut de a par des valeurs supérieures à a, tout en restant toujours différent de a.
On note $x \to a^+$.

Définition $x \to a$

Soit a nombre réel. Lorsqu'on écrit **« x tend vers a »** cela signifie que x s'approche autant qu'on veut de a par des valeurs inférieures ou supérieures à a, tout en restant toujours différent de a.
On note $x \to a$.

Définition $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \ell$

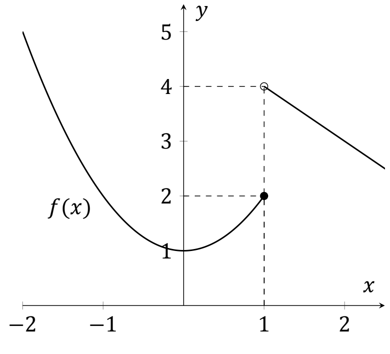
Soit f une fonction définie au voisinage d'un nombre a et soit ℓ un nombre réel ou le symbole $-\infty$, $+\infty$. On dit que **« la limite à gauche de $f(x)$ quand x tend vers a vaut ℓ »** si $f(x)$ s'approche « aussi près qu'on veut » de ℓ lorsque $x \to a^-$.
On écrit $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \ell$.

Définition $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \ell$

Soit f une fonction définie au voisinage d'un nombre a et soit ℓ un nombre réel ou le symbole $-\infty$, $+\infty$. On dit que **« la limite à droite de $f(x)$ quand x tend vers a vaut ℓ »** si $f(x)$ s'approche « aussi près qu'on veut » de ℓ lorsque $x \to a^+$.
On écrit $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \ell$.

Exemple 5

Soit la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & \text{si } x > 1 \\ 5-x, & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$. Déterminer graphiquement $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$.



On observe que $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) =$ ______ et que $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) =$ ______ .
Pour rappel, ce type de fonction est une fonction *définie par morceaux.*

Définition $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$

Soient une fonction f, un nombre a et ℓ un nombre ou le symbole $-\infty$, $+\infty$. On dit que **« la limite de $f(x)$ quand x tend vers a existe et vaut ℓ »** ssi $f(x)$ s'approche « aussi près qu'on veut » de ℓ lorsque $x \to a$.
On écrit $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.

Théorème 2 Unicité de la limite

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ existe, alors elle est unique.

Théorème 3 Existence de la limite

Une limite existe ssi les limites à gauche et à droite sont égales, i.e.

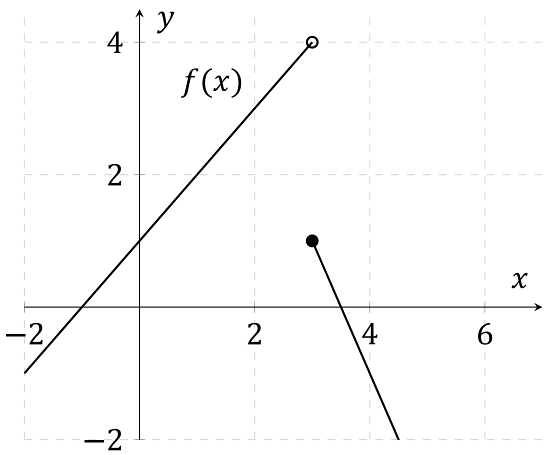
$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \iff \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \ell.$$

Exemple 6 Dans l'exemple 5, la fonction f n'admet pas de limite en 1 par la contraposée du théorème 3, car la limite à gauche et la limite à droite ne sont pas égales.

Exemple 7 Soit f définie par

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 3 \\ -2x+7 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

Déterminer $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.



On observe que

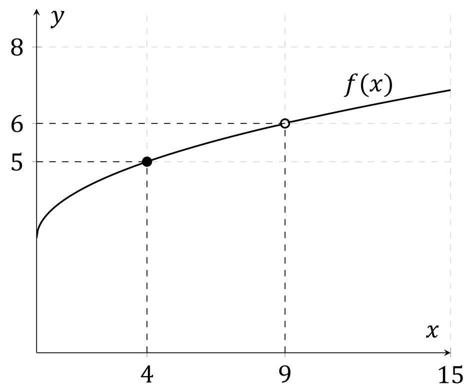
$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \_\_\_\_\_\_ \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 3^-} f(x) = \_\_\_\_\_\_$$

donc la limite $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ ________________ .

Exemple 8

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{9-x}{3-\sqrt{x}}$. Étudier graphiquement $\lim\limits_{x\to 9} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$.

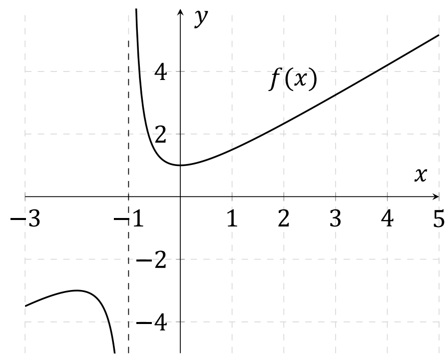
Le domaine de définition de f est $\mathrm{D}_f =$ ______________________ .



On a $\lim\limits_{x\to 9} f(x) =$______ même si f n'est pas définie en 9 (indiqué par le rond vide). De plus $\lim\limits_{x\to 4} f(x) =$______ . On a calculé les deux limites et on a montré qu'elles ___________ .

Exemple 9

Soit f définie par $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$. Déterminer $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$.
On a $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.



On observe que

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \frac{3}{2}$$

donc $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ existe et vaut $\dfrac{3}{2}$. Toutefois, $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) =$______ et $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) =$______ donc $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$________________ .

Il existe une définition plus formelle de la limite, mais elle sort du cadre de ce cours. Nous verrons dès la section 2.4 des outils pour calculer plus rigoureusement des limites. Certains des résultats seront démontrés et d'autres seront acceptés sans démonstration.

2.3 Lien avec la continuité

On peut à présent donner une caractérisation plus formelle de la continuité.

Théorème 4 Continuité

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle (donc $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$) et $a \in \mathrm{I}$.

f est continue en a ssi

i) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe dans $\mathbb{R}$;

ii) $f(a)$ existe dans $\mathbb{R}$;

iii) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Pour être plus concis, on écrira simplement :

$$f \text{ est continue en } a \iff \lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

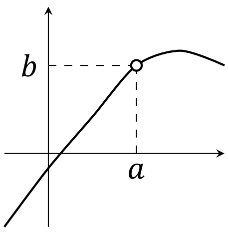
Remarque On peut également écrire

$$f \text{ est continue en } x \iff \lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x).$$

Reprenons l'exemple 2 avec ce résultat.

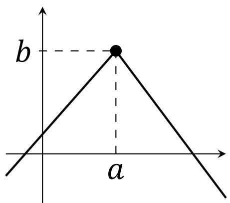
Exemple 10

a)



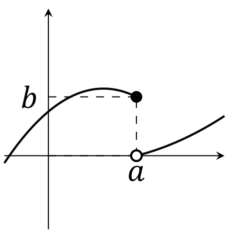
f n'est pas continue en a, car f n'est pas définie en a.

b)



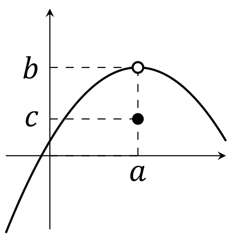
f est continue en a, car $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a) = b$

c)



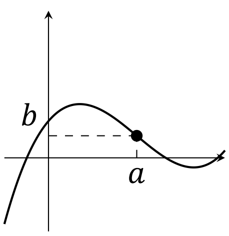
f n'est pas continue en a, car $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ n'existe pas.

d)



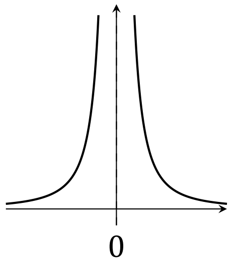
f n'est pas continue en a, car $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \neq f(a) = c$.

e)



f est continue en a, car $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a) = b$.

f)



f n'est pas continue en 0, car $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

Définition
continuité à gauche
continuité à droite

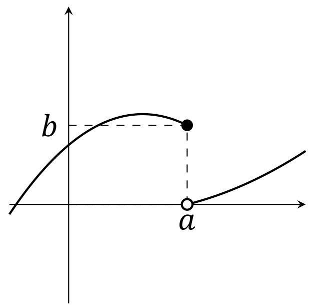
Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle et $a \in \mathrm{I}$.

$$f \text{ est continue à gauche en } a \text{ ssi } \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$$
$$f \text{ est continue à droite en } a \text{ ssi } \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$

Exemple 11

f est continue à gauche, car $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a) = b$

f n'est pas continue à droite, car $\lim_{x\to a^+} f(x) \neq f(a) = b$.



2.4 Limite de fonctions élémentaires

Théorème 5
Limites de fonctions élémentaires
(sans démonstration)

L1 Si $k \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{x\to a} k = k$, $\forall a \in \mathbb{R}$

L2 Si $x \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{x\to a} x = a$, $\forall a \in \mathbb{R}$

L3 Si $x \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{x\to a} \sin(x) = \sin(a)$ et $\lim_{x\to a} \cos(x) = \cos(a), \forall a \in \mathbb{R}$

L4 Si $f(x) = \sqrt[n]{x}$ et D_f est son domaine de définition,
alors $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$, $\forall a \in \mathrm{D}_f$

L5 Si $b \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}$, alors $\lim_{x\to a} \log_b(x) = \log_b(a)$, $\forall a \in \mathbb{R}_{>0}$ et
$\lim_{x\to a} \exp_b(x) = \exp_b(a), \forall a \in \mathbb{R}$

Exemple 12

$\lim_{x\to -3} 14 \overset{\textbf{L1}}{=} 14$, par la première assertion du théorème 5.

Exemple 13

$\lim_{x\to 5} x \overset{\textbf{L2}}{=} 5$

Exemple 14

$\lim_{x\to \pi/2} \sin(x) \overset{\textbf{L3}}{=} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

Exemple 15

$\lim_{x\to 8} \sqrt[3]{x} \overset{\textbf{L4}}{=} \sqrt[3]{8} = 2$

Corollaire 2
Fonctions continues

C1 Les fonctions constantes sont continues sur $\mathbb{R}$.

C2 La fonction f définie par $f(x) = x$ est continue sur $\mathbb{R}$.

C3 Les fonctions sin et cos sont continues sur $\mathbb{R}$.

C4 Les fonctions racines-n-ièmes sont continues sur leur domaine de définition.

C5 Les fonctions exponentielles et logarithmes sont continues sur leur domaine de définition.

2.5 Propriétés des limites

Les propriétés suivantes nous permettent de calculer des limites plus compliquées du type $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-5}{x}$.

Théorème 6 Propriétés des limites (sans démonstration)	Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existent et sont finies, alors on a **P0** $\lim\limits_{x\to a} k\cdot f(x) = k\cdot \lim\limits_{x\to a} f(x), \forall k\in\mathbb{R}$ **P1** $\lim\limits_{x\to a} (f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$ **P2** $\lim\limits_{x\to a} (f(x)-g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} g(x)$ **P3** $\lim\limits_{x\to a} (f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$ **P4** $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$

Théorème 7 Limite d'une composition (sans démonstration)	Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{t\to b} g(t) = g(b)$ existent et sont finies, alors on a : $$\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(\lim_{x\to a} f(x)) = g(b).$$

Corollaire 3 Opérations de fonctions continues	**PC1** Si f est g sont continues en a, alors $f+g$ est continue en a. **PC2** Si f est g sont continues en a, alors $f-g$ est continue en a. **PC3** Si f est g sont continues en a, alors $f\cdot g$ est continue en a. **PC4** Si f est g sont continues en a et $g(a)\neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue en a. **PC5** Si f est continue en a et g est continue en $f(a)$, alors $g\circ f$ est continue en a.

Corollaire 4 Limites de fonctions polynômiales (avec démonstration)	Si f est une fonction polynomiale, i.e. $$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x_1 + a_0,$$ alors, pour $b\in\mathbb{R}$, on a : $$\lim_{x\to b} f(x) = f(b) = a_nb^n + \ldots + a_1b + a_0.$$ **Preuve.** On a $\lim\limits_{x\to b} x \overset{\textbf{L2}}{=} b$. De plus, pour tout $m\in\mathbb{N}$, $$\lim_{x\to b} x^m \overset{\textbf{P3}}{=} \left(\lim_{x\to b} x\right)^m = b^m.$$ Ainsi, $$\begin{aligned} \lim_{x\to b} (a_nx^n + \ldots + a_1x_1 + a_0) &\overset{\textbf{P1}}{=} \lim_{x\to b} a_nx^n + \ldots + \lim_{x\to b} a_1x + \lim_{x\to b} a_0 \\ &\overset{\textbf{P0}}{=} a_n \lim_{x\to b} x^n + \ldots + a_1\cdot \lim_{x\to b} x + a_0 \\ &\overset{\textbf{P3 et L2}}{=} a_nb^n + \ldots + a_1b + a_0. \end{aligned}$$ □

Exemple 16 On peut maintenant calculer la limite considérée en introduction en justifiant le calcul :

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x-5}{x}\right) \overset{\textbf{P4}}{=} \frac{\lim\limits_{x\to 2}(x-5)}{\lim\limits_{x\to 2} x} \overset{\textbf{P2}}{=} \frac{\lim\limits_{x\to 2} x - \lim\limits_{x\to 2} 5}{\lim\limits_{x\to 2} x} \overset{\textbf{L2,L1}}{=} \frac{2-5}{2} = -\frac{3}{2}$$

Exemple 17 Calculer en justifiant

a)

$$\lim_{x\to -4}(x+3) \overset{\textbf{P1}}{=} \lim_{x\to -4} x + \lim_{x\to -4} 3 \overset{\textbf{L2,L1}}{=} -4+3=-1$$

ou plus directement :

$$\lim_{x\to -4}(x+3) \overset{\textbf{thm 4}}{=} -4+3=-1$$

b)

$$\lim_{x\to 1} 2x^2 \overset{\textbf{P0}}{=} 2\cdot\lim_{x\to 1} x^2 \overset{\textbf{P3}}{=} 2\cdot\lim_{x\to 1} x\cdot\lim_{x\to 1} x \overset{\textbf{L2,L1}}{=} 2\cdot 1\cdot 1 = 2$$

ou plus directement :

$$\lim_{x\to 1} 2x^2 \overset{\textbf{thm 4}}{=} 2\cdot 1\cdot 1 = 2$$

Exemple 17 (suite)

c)

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+5}{x} \overset{\textbf{P4}}{=} \frac{\lim_{x\to 2}(x+5)}{\lim_{x\to 2} x} \overset{\textbf{thm. 4}}{=} \frac{2+5}{2} = \frac{7}{2}$$

d)

$$\lim_{x\to 0}\cos(x^4) \overset{\textbf{L3 et thm 7}}{=} \cos\left(\lim_{x\to 0} x^4\right) \overset{\textbf{thm 4}}{=} \cos(0^4) = \cos(0) = 1$$

Théorème 8 (sans démonstration) Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage I de $a\in\mathbb{R}$ telles que

a) $f(x)\leq g(x), \forall x\in \mathrm{I}$

b) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existent

alors

$$\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x), \forall a\in\mathrm{I}$$

Théorème 9 Théorème des gendarmes (sans démonstration)	Soient f, g et h des fonctions définies sur un voisinage I de $a \in \mathbb{R}$ telles que a) $f(x) \leq g(x) \leq h(x), \forall x \in \mathrm{I} \setminus \{a\}$ b) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$ alors $$\lim_{x\to a} g(x) = \ell.$$

Corollaire 5 (avec démonstration)	La fonction $f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ est continue. **Preuve.** Voir les exercices. □

2.6 Limites infinies – types « $\frac{1}{0}$ » et « $\frac{0}{0}$ »

Définition
Type « $\frac{1}{0}$ »

Une limite du type quotient $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ pour laquelle on a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ mais où $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq 0$ est appelée limite de type « $\frac{1}{0}$ ».

Remarque

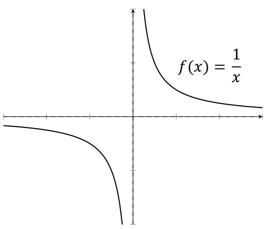
Il y a deux cas pour les limites « $\frac{1}{0}$ » :

Cas 1 La limite existe et vaut $-\infty$ ou $+\infty$.

Cas 2 La limite n'existe pas, (par exemple, limite à gauche vaut $-\infty$ et limite à droite vaut $+\infty$.).

Conclusion : Il faut calculer la limite à gauche et à droite en s'aidant, si besoin, de la factorisation.

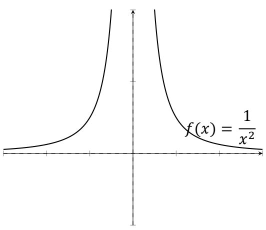
Exemple 18



Soit f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$: $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x}$ = «$\dfrac{1}{0^-}$» = ______ ,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = «\frac{1}{0^+}» = \_\_\_\_\_\_ \text{, donc } \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Exemple 19



Soit f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$:$\lim_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^2}$ = «$\dfrac{1}{(0^-)^2}$» = ______ ,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = «\frac{1}{(0^+)^2}» = \_\_\_\_\_\_ \text{, donc } \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \_\_\_\_\_\_ .$$

Exemple 20

Calculer $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{-2}{2x+4}$ et interpréter graphiquement.

$$\lim_{x\to -2} \frac{-2}{2x+4} = « \frac{-2}{0} » \text{ : c'est un type } « \frac{1}{0} »;$$

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{-2}{2x+4} = \lim_{x\to -2^+} \frac{-2}{2(x+2)} = \lim_{x\to -2^+} \frac{-1}{x+2} = « \frac{-1}{0^+} » = \underline{\hspace{1.5cm}},$$

et

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{-2}{2x+4} = « \frac{-1}{0^-} » = \underline{\hspace{1.5cm}} \quad \text{d'où } \lim_{x\to -2} \frac{-2}{2x+4} \underline{\hspace{4cm}}.$$

Exemple 21

Calculer $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{-2}{(x+2)^2}$ et interpréter graphiquement.

$$\lim_{x\to -2} \frac{-2}{(x+2)^2} = « \frac{-2}{0} » \text{ : c'est un type } « \frac{1}{0} »;$$

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{-2}{(x+2)^2} = « \frac{-2}{(0^-)^2} » = \underline{\hspace{1.5cm}} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to -2^+} \frac{-2}{(x+2)^2} = « \frac{-2}{(0^+)^2} » = \underline{\hspace{1.5cm}},$$

donc $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{-2}{(x+2)^2} \underline{\hspace{3cm}}$.

Exemple 22

Calculer $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-2}{x^2+3x-4}$ et interpréter graphiquement.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-2}{x^2+3x-4} = « \frac{-1}{0} » \text{ : c'est un type } « \frac{1}{0} »;$$

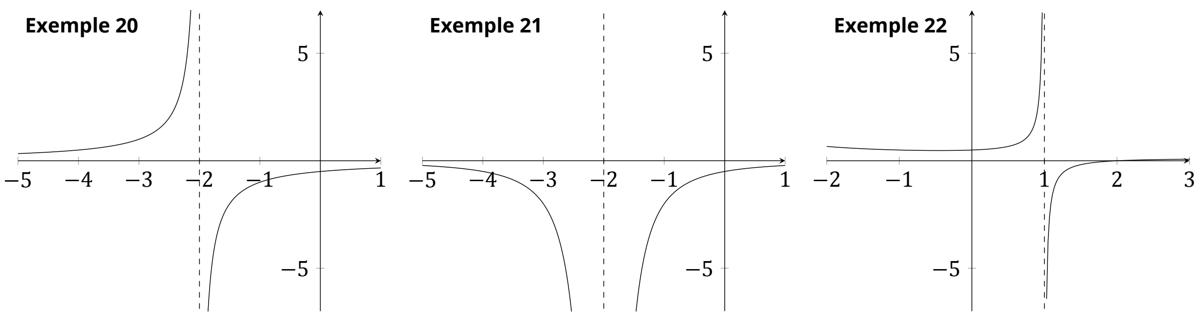
$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x-2}{x^2+3x-4} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-2}{(x-1)(x+4)} = « \frac{-1}{0^+\cdot 5} » = \underline{\hspace{1.5cm}}$$

et

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x-2}{x^2+3x-4} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x-2}{(x-1)(x+4)} = « \frac{-1}{0^-\cdot 5} » = \underline{\hspace{1.5cm}},$$

donc $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-2}{x^2+3x-4} \underline{\hspace{4cm}}$.

Interprétations graphiques :



Définition

Type « $\frac{0}{0}$ »

Une limite du type quotient $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ pour laquelle on a $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ est appelée limite de type « $\frac{0}{0}$ ».

Remarque

Il y a trois cas pour les limites « $\frac{0}{0}$ » :

Cas 1 La limite existe et est finie.

Cas 2 La limite existe est est infinie.

Cas 3 La limite n'existe pas.

Il faut donc calculer la limite à droite et la limite à gauche à l'aide d'outils algébriques pour pouvoir **lever l'indétermination**.

Méthode
Type « $\frac{0}{0}$ » polynomial

Une limite $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ de type $\frac{0}{0}$ où $f(x)$ et $g(x)$ sont des polynômes peut se calculer ainsi :

a) factoriser le numérateur et le dénominateur ;
b) simplifier ;
c) si la nouvelle limite n'est plus du type « $\frac{0}{0}$ », la déterminer avec les outils connus.

Exemple 23

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4} = « \frac{0}{0} »$$

est du type « $\frac{0}{0}$ » avec polynômes au numérateur et au dénominateur. On procède de la sorte :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4} &\overset{\textbf{factoriser}}{=} \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)} \\
&\overset{x\neq 2}{=} \lim_{x\to 2} \frac{x-1}{x+2} \\
&\overset{\textbf{P4}}{=} \frac{\lim\limits_{x\to 2}(x-1)}{\lim\limits_{x\to 2}(x+2)} \\
&\overset{\textbf{thm 4}}{=} \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Méthode
Type « $\frac{0}{0}$ » racine carrée

Une limite $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ de type $\frac{0}{0}$ où $f(x)$ et/ou $g(x)$ contient une racine carrée peut se calculer ainsi :

a) multiplier par le conjugué ;
b) développer l'expression $(a-b)(a+b)$ en a^2-b^2 avec la 3e identité remarquable ;
c) simplifier ;
d) si la nouvelle limite n'est plus du type $\frac{0}{0}$, la déterminer avec les outils connus.

Exemple 24

$$\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9} = « \frac{0}{0} »$$

est du type « $\frac{0}{0}$ » avec une racine carrée.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9} &\overset{\textbf{mult. conj.}}{=} \lim_{x\to 9}\frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{(x-9)(\sqrt{x}+3)} \\
&\overset{x\neq 9}{=} \lim_{x\to 9}\frac{x-9}{(x-9)(\sqrt{x}+3)} \\
&\overset{\textbf{P4 et thm 7}}{=} \lim_{x\to 9}\frac{1}{\sqrt{x}+3} \\
&= \frac{1}{\sqrt{9}+3} \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

2.7 Asymptotes verticales

Définition

asymptote verticale

On dit qu'une droite verticale d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** de la fonction f ssi au moins l'une des conditions suivantes est satisfaite :
$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$.

Méthode

Déterminer des asymptotes verticales

Pour déterminer les asymptotes verticales dans le cas des fonctions rationnelles on suit la méthode suivante :
On analyse les limites $\lim_{x\to a} f(x)$ pour les a qui ont été exclus du D_f :

— si la limite est du type $\frac{1}{0}$, il y a une asymptote verticale ; on calcule les limites à gauche $\lim_{x\to a^-} f(x)$ et à droite $\lim_{x\to a^+} f(x)$;

— si la limite est du type $\frac{0}{0}$, on ne peut encore rien dire ; on calcule la limite $\lim_{x\to a} f(x)$ qui peut conduire autant à une situation sans asymptote verticale qu'avec.

Exemple 25

asymptotes verticales de $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^2 + 3x - 4}$

Déterminer les asymptotes verticales de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 + 3x - 4}.$$

On étudie le domaine de définition de la fonction

$f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^2 + 3x - 4} = \dfrac{x(x-1)}{(x+4)(x-1)}$, d'où $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-4; 1\}$

On remarque que $f(x) \overset{\text{si } x \neq 1}{=} \dfrac{x}{x+4}$

— Pour $x \to -4$ on a

$\lim\limits_{x \to -4} f(x) = \dfrac{-4}{0}$ de type $\dfrac{1}{0}$

$\lim\limits_{x \to -4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -4^-} \dfrac{x}{x+4} = \dfrac{-4}{0^-} = +\infty$ et

$\lim\limits_{x \to -4^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -4^+} \dfrac{x}{x+4} = \dfrac{-4}{0^+} = -\infty$

$x = -4$ est une asymptote verticale de f

— Pour $x \to 1$:

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \dfrac{1}{1+5} = \dfrac{1}{5}$

f n'a pas d'asymptote verticale en $x = 1$

Limites et continuité SECTION 3

Limites en l'infini

3.1 Définition et exemples

Définition

Limite en l'infini

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
On dit que la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ est égale à L ssi $f(x)$ s'approche « aussi près qu'on veut » de L lorsque x devient infiniment grand (avec signe positif). On note $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \mathrm{L}$.
On dit que la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$ est égale à L ssi $f(x)$ s'approche « aussi près qu'on veut » de L lorsque x devient infiniment grand (avec signe négatif). On note $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \mathrm{L}$.

Remarque

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$ signifie qu'on considère simultanément les deux cas $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

3.2 Algèbre de l'infini

Formule

Algèbre de l'infini

$$(+\infty) + (+\infty) = \_\_\_\_\_ \quad \text{et } (-\infty) + (-\infty) = \_\_\_\_\_$$

$$(\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = \_\_\_\_\_ \text{ , signe selon la règle des signes}$$

$$(+\infty) \pm a = \_\_\_\_\_ \quad \text{et } (-\infty) \pm a = \_\_\_\_\_ \quad \text{pour } a \in \mathbb{R}$$

$$(\pm a) \cdot (\pm\infty) = \_\_\_\_\_ \text{ , signe selon la règle des signes pour } a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\frac{\pm a}{\pm\infty} = \_\_\_\_\_ \quad \text{pour } a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Remarque Une limite $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \ell$ s'approche dans un premier temps à l'aide des formules de l'algèbre de l'infini des théorèmes des sections 2.4 et 2.5 qui restent valable dans cette situation. Si le calcul ne peut pas être traité avec ces outils, on verra plus loin que d'autres techniques peuvent être appliquées.

Exemple 26

$$\begin{aligned}\lim_{x \to +\infty} (5x^2 + x + 2) &\overset{\textbf{thm 4}}{=} \lim_{x \to +\infty} 5x^2 + \lim_{x \to +\infty} x + \lim_{x \to +\infty} 2 \\ &\overset{\textbf{thm 5}}{=} 5 \cdot (+\infty)^2 + \infty + 2 \\ &\overset{\textbf{alg. infini}}{=} +\infty.\end{aligned}$$

Exemple 27

$$\begin{aligned}\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x-3} &\overset{\textbf{thms 6 et 5}}{=} \frac{1}{+\infty - 3} \\ &\overset{\textbf{alg. infini}}{=} \frac{1}{+\infty} \\ &\overset{\textbf{alg. infini}}{=} 0\end{aligned}$$

Exemple 28

$$\begin{aligned}\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} &\overset{\textbf{thms 6 et 5}}{=} \frac{1}{(-\infty)^2} \\ &\overset{\textbf{alg. infini}}{=} 0\end{aligned}$$

3.3 Indéterminations avec de l'infini

Nous avons déjà traité l'indétermination du type « $\frac{0}{0}$ ». Dans cette section, nous traitons les indéterminations qui font intervenir l'infini. Il faut recourir à des manipulations algébriques pour se ramener à des cas déterminés que nous savons traiter.
Voici une liste non exhaustive des différents types d'**indéterminations** faisant intervenir l'infini que nous rencontrerons.

$$\text{« } \frac{+\infty}{+\infty} \text{ »}, \quad \text{« } 0 \cdot \infty \text{ »}, \quad \text{« } \infty - \infty \text{ »}, \quad \text{« } \infty^0 \text{ »}, \quad \text{« } 0^\infty \text{ »}, \quad \text{« } 1^\infty \text{ »}.$$

Remarque Une calcul de limite est dit de type indéterminé si on ne peut pas prévoir à l'avance comment va se comporter le résultat. On a vu que « $\frac{1}{0}$ » donne toujours un résultat infini ou n'existe pas. Par contre, une indétermination peut parfois donner un résultat infini, parfois un résultat fini, parfois ne pas exister !
Utiliser l'algèbre : **mise en évidence, factorisation, division polynomiale, etc.** pour lever les indéterminations.

Exemple 29 Voici trois exemples qui illustrent des écueils dans les calculs de limites.

Type « $\frac{\infty}{\infty}$ »

$$\lim_{x\to+\infty} ax\frac{1}{x} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ , \forall a \in \mathbb{R}$$

Type « $\infty \cdot 0$ »

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\frac{1}{x} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\frac{1}{x^2} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Chaque cas, fait apparaître l'indétermination du type « $\frac{\infty}{\infty}$ » ou du type « $\infty \cdot 0$ » dépendant dans la manière dont on transforme la limite.

Exemple 30

Type « $\infty - \infty$ »

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x - x = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - x = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

Méthode

Type « $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ »

Type « $0 \cdot (\pm\infty)$ »

Type « $\infty - \infty$ »

Une limite $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ ou $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ de type $\pm\infty/\pm\infty$, $0 \cdot (\pm\infty)$, $\infty - \infty$ où $f(x)$ et/ou $g(x)$ sont des polynômes peut se calculer ainsi :

a) effectuer une/des mise(s) en évidence « forcée(s) » (m.ev.f.);
b) si la nouvelle limite n'est plus indéterminée, utiliser l'algèbre de l'infini.

Exemple 31

$$\lim_{x\to+\infty}(5x^2 - x + 2) = +\infty - \infty + 2 = « +\infty - \infty »$$

est une indétermination de type « $\infty - \infty$ ». On procède de la manière suivante :

$$\lim_{x\to+\infty}(5x^2 - x + 2) \overset{\text{m.ev.f.}}{=} \lim_{x\to+\infty}\Big(x^2\big(5 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\big)\Big)$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \cdot \lim_{x\to+\infty}\big(5 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\big)$$

$$\overset{\text{alg.inf.}}{=} (+\infty)^2 \cdot \big(5 + \frac{1}{+\infty} + \frac{2}{(+\infty)^2}\big)$$

$$\overset{\text{alg.inf.}}{=} +\infty$$

Exemple 32

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^3+x+2}{2x^3-1} = \text{« } \frac{+\infty}{+\infty} \text{ »}$$

est une indétermination de type « $\pm\infty/\pm\infty$ ». On la traite de la manière suivante :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^3+x+2}{2x^3-1} \overset{\text{m.ev.f.}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\left(3+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)}{x^3\left(2-\frac{1}{x^3}\right)}$$

$$\overset{\text{simpl.}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{3+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{2-\frac{1}{x^3}}$$

$$\overset{\text{alg.inf.}}{=} \frac{3+\frac{1}{(+\infty)^2}+\frac{2}{(+\infty)^3}}{2-\frac{1}{(+\infty)^3}} = \overset{\text{alg.inf.}}{=} \frac{3}{2}$$

Exemple 33

Soit la fonction réelle f déterminée par $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-1}$. Il s'agit d'essayer de comprendre le mieux possible son comportement pour des valeurs de x pour lesquelles il est intéressant d'utiliser « l'outil limite » ; ici, pour $x \to -1$, $x \to 1$ et $x \to \pm\infty$.

Pour $x \to -1$: $\lim\limits_{x\to-1} \frac{x^3-1}{x^2-1} = \text{« } -\frac{2}{0} \text{ »}$ est du type « $\frac{1}{0}$ ».

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-1^-} \frac{x^3-1}{x^2-1} &= \lim_{x\to-1^-} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} \\
&= \lim_{x\to-1^-} \frac{x^2+x+1}{x+1} \\
&= \text{«}\frac{(-1)^2+(-1)+1}{0^-}\text{»} \\
&= \text{«}\frac{+1}{0^-}\text{»} \\
&= -\infty,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-1^+} \frac{x^3-1}{x^2-1} &= \lim_{x\to-1^+} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} \\
&= \lim_{x\to-1^+} \frac{x^2+x+1}{x+1} \\
&= \text{«}\frac{(-1)^2+(-1)+1}{0^+}\text{»} \\
&= \text{«}\frac{+1}{0^+}\text{»} = +\infty.
\end{aligned}$$

Donc ____

____

Exemple 33 (suite)

Pour $x \to 1$: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$ est du type « $\dfrac{0}{0}$ » avec polynômes.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1} &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}\\ &= \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x+1}{x+1}\\ &= \frac{1^2+1+1}{1+1} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Pour $x \to \pm\infty$: $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3-1}{x^2-1} = \dfrac{(+\infty)^3-1}{(+\infty)^2-1} =$ « $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ » est du type « $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ » avec polynômes. On obtient :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3-1}{x^2-1} &= \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3\left(1-\frac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}\\ &= \lim_{x\to +\infty} \frac{x\left(1-\frac{1}{x^3}\right)}{1-\frac{1}{x^2}}\\ &= +\infty \cdot \frac{1-\frac{1}{(+\infty)^3}}{1-\frac{1}{(+\infty)^2}}\\ &= +\infty \cdot \frac{1-0}{1-0} = +\infty.\end{aligned}$$

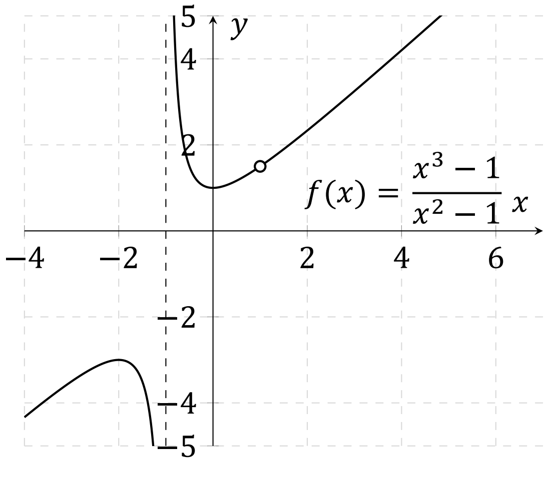
Le même calcul pour $x \to -\infty$ donne :

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^3-1}{x^2-1} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3\left(1-\frac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = \cdots = -\infty \cdot \frac{1-\frac{1}{+\infty}}{1-\frac{1}{+\infty}} = -\infty \cdot \frac{1-0}{1-0} = -\infty$$

Donc ____

____

On interprète graphiquement les résultats obtenus :



3.4 Asymptotes horizontales

Définition Asymptote horizontale

On dit qu'une doite horizontale d'équation $y = b$ est une **asymptote horizontale** de la fonction f ssi au moins des conditions suivantes est satisfaite : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$.

Remarque $\frac{\sin(x)}{x}$

Le graphe d'une fonction peut intersecter une de ses asymptotes horizontales. Par exemple, $y = 0$ est une asymptote horizontale de la fonction la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$

Méthode Déterminer des asymptotes horizontales

Pour déterminer les asymptotes horizontales dans le cas des fonctions rationnelles on suit la méthode suivante.
Soit f une fonction rationnelle définie par

$$f(x) = \frac{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x^2 + a_1x + a_0}{b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} + \dots + b_2x^2 + b_1x + b_0}$$

— si $n = m$, alors $y = \dfrac{a_n}{b_n}$ est une asymptote horizontale de f à $\pm\infty$;
— si $n < m$, alors $y = 0$ est une asymptote horizontale de f à $\pm\infty$;
— si $n > m$, alors f n'a pas d'asymptote horizontale à $\pm\infty$.

Exemple 34

Déterminer les asymptotes horizontales de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 + 3x - 4}$$

Comme $n = m = 1$, on sait déjà que $y = 1$ est une asymptote horizontale de f à $\pm\infty$; confirmons par un calcul :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x}{x^2 + 3x - 4} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}} \\
&= \frac{1 - 0}{1 + 0 - 0} = \frac{1}{1} = 1
\end{aligned}$$

ce qui confirme que $y = 1$ est une asymptote horizontale de f à $\pm\infty$.
Comme on peut aussi aussi écrire $f(x) = \dfrac{x}{x + 4}$ (voir l'exemple 25), on aurait pu faire le calcul (plus simple) suivant :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x + 4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x\left(1 + \frac{4}{x}\right)} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1 + \frac{4}{x}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = \frac{1}{1} = 1
\end{aligned}$$

Limites et continuité SECTION 4

Limites de fonctions trigonométriques

Le théorème suivant est important et sa démonstration est faite en activité.

Théorème 10 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$

On a

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Méthode Pour lever une indétermination trigonométrique, on se ramène au cas du théorème 10 afin d'utiliser la formule $\lim_{\star\to 0} \frac{\sin(\star)}{\star} = 1$ où $\star$ peut être une expression quelconque.

Exemple 35 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(-20x)}{x}$

Calculer $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(-20x)}{x}$

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(-20x)}{x} =$ « $\frac{0}{0}$ »	on substitue x par 0 et on constate un « type $\frac{0}{0}$ »
$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(-20x)}{x}$	on observe que l'expression qui « pilote » le calcul est $-20x$
$= \lim_{-20x\to 0} \frac{-20\sin(-20x)}{-20x}$	on fait apparaître cette expression au dénominateur et comme le terme de la limite
$= -20 \lim_{-20x\to 0} \frac{\sin(-20x)}{-20x}$	on utilise le théorème 10
$= -20 \cdot 1$	on utilise $\lim_{\star\to 0} \frac{\sin(\star)}{\star} = 1$
$= -20$	

Remarque On est parfois amené à devoir utiliser des propriétés trigonométriques ou des idées plus subtiles …

Exemple 36

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{3x}$

Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{3x}$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{3x}$	on substitue x par 0 et on constate un « type $\dfrac{0}{0}$ »
$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{3x^2} \cdot \dfrac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)}$	on multiplie par le conjugué
$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos(x))(1+\cos(x))}{3x^2(1+\cos(x))}$	on effectue la multiplication des fractions
$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^2(x)}{3x^2(1+\cos(x))}$	on utilise la 3e identité remarquable
$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2(x)}{3x^2(1+\cos(x))}$	on utilise la propriété trigonométrique $\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$
$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{\sin^2(x)}{x^2} \cdot \dfrac{1}{1+\cos(x)}$	on sépare en produit de fractions
$= \dfrac{1}{3} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{1+\cos(x)}$	on utilise les propriétés des limites, ce qu'on peut faire si les deux limites existent
$= \dfrac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dfrac{1}{1+\cos(0)}$	on utilise $\lim\limits_{\star\to 0} \dfrac{\sin(\star)}{\star} = 1$ et on calcule la 3e limite facilement
$= \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6}$	

Limites et continuité SECTION 5

Activités

Activité 1
Continuité

a) Illustrer la notion de continuité en un point, continuité sur un intervalle.

b) Peut-on en donner une définition mathématique ?

c) Donner des exemples de fonctions connues continues et discontinues.

d) Déterminer si la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - 1, & \text{si } x < 2 \\ 0, & \text{si } x = 2 \\ -x + 2, & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

est continue en $a = 2$. Justifier la réponse et esquisser une représentation graphique de f.

e) Déterminer l'expression algébrique d'une fonction g définie sur $\mathbb{R}$, telle que g soit continue partout sauf pour $x = 2$.

Activité 2
Théorème de la valeur intermédiaire

On considère le théorème suivant : « Si $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur $[a,b]$, alors il existe m et M deux nombres réels tels que $f([a,b]) = [m; \mathrm{M}]$ »

a) Faire un schéma pour interpréter graphiquement ce résultat.

b) Expliquer pourquoi on l'appelle le théorème « de la valeur intermédiaire ».

c) Illustrer (représentation graphique, qui sont a, b, m et M ?) ce théorème dans les cas suivants :
   i) $f : [-1; 1] \to \mathbb{R}$ déterminée par $f(x) = x^2$
   ii) $f : [1; 100] \to \mathbb{R}$ déterminée par $f(x) = 2$
   iii) $f : [0; 2] \to \mathbb{R}$ déterminée par $f(x) = x(x-2)^2$

d) Que penser de la conjecture suivante : « Si $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est une fonction sur $[a,b]$, alors il existe m et M deux nombres réels tels que $f([a,b]) = [m; \mathrm{M}]$ ». Qu'en déduire ?

Activité 3
Introduction géométrique à la notion de limite

Soit le carré ABCD ci-contre de côté 10 cm. On note P et Q les milieux des côtés BC et CD. Soient M un point de AD et N un point de AB tels que $\overline{\mathrm{AN}} = \overline{\mathrm{AM}} = x$.

a) Quelle est la nature du quadrilatère MNPQ ?

b) Tracer MNPQ pour $x = 6$ cm, $x = 4$ cm, $x = 1$ cm, $x = 0{,}5$ cm.

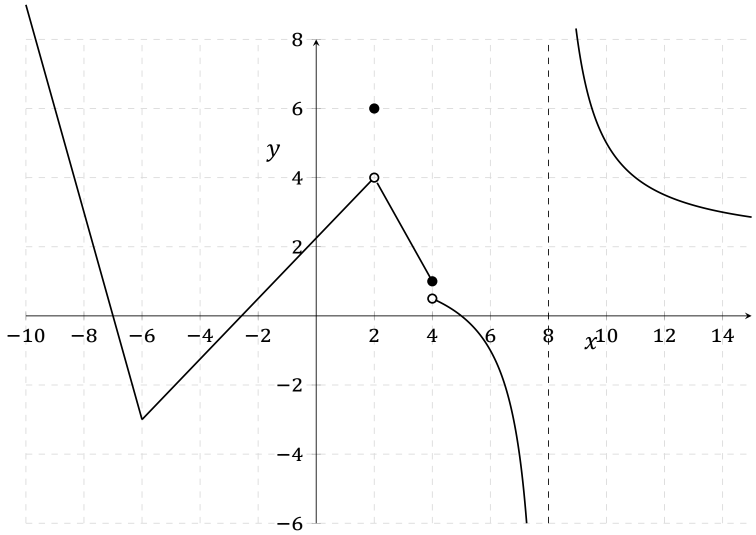
c) Que remarquez-vous lorsque x se rapproche de 0 ?

d) On note $\mathrm{A}(x)$ l'aire du quadrilatère MNPQ. Donner une formule pour le calcul de cette aire en fonction de x (vous devrez utiliser trois fois le théorème de Pythagore).

e) Que peut-on dire de $A(x)$ quand x se rapproche de 0 ? Est-ce que votre conjecture est cohérente avec la formule déterminée au point précédent ?

Activité 4

Approche graphique de la notion de limite



a) Déterminer graphiquement

i) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$
ii) $f(1)$
iii) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$
iv) $\lim\limits_{x\to -\frac{13}{2}} f(x)$
v) $f(4)$
vi) $f(8)$

b) Représenter graphiquement une fonction f satisfaisant toutes les conditions suivantes :

i) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 3$
ii) $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = -\infty$
iii) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -2$
iv) $f(-3) = 2$
v) $f(0) = 4$
vi) $\lim\limits_{c\to +\infty} f(x) = 2$

Activité 5

Limite à gauche et limite à droite

On considère à nouveau la représentation graphique de l'activité 4. Déterminer :

a) $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)$
b) $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)$
c) $\lim\limits_{x\to 8^+} f(x)$
d) $\lim\limits_{x\to 8^-} f(x)$
e) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$
f) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$
g) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$
h) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

Activité 6

Limite infinie du type « $\frac{1}{0}$ »

Soit f la fonction réelle définie par

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 9}.$$

a) Déterminer le domaine de définition de f.

b) Étudier ce qui se passe numériquement pour des valeurs de x proches de 3. Pour cela, calculer les images de $2{,}9$; $2{,}99$; $2{,}999$; $2{,}9999$ puis de $3{,}1$; $3{,}01$; $3{,}001$ et $3{,}0001$.

   i) Que constate-t-on ?
   ii) Que peut-on dire de l'image de 3 ?
   iii) Quelle notation utiliser ?
   iv) Interpréter graphiquement.

c) Esquisser une représentation graphique de f (à l'aide de geogebra par exemple).

d) Calculer « directement », sans passer par des étapes intermédiaires, $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-9}$.

e) Calculer, si elles existent, les limites à gauche et à droite des fonctions suivantes lorsque x tend vers a et interpréter graphiquement les résultats :

   i) $f(x) = \dfrac{3x-7}{x-2}$ et $a = 2$
   ii) $f(x) = \dfrac{-3x+2}{x+2}$ et $a = -2$
   iii) $f(x) = \dfrac{3}{(x-1)^2}$ et $a = 1$
   iv) $f(x) = \dfrac{5x}{(x+3)^3}$ et $a = -3$

Activité 7
Indétermination « $\dfrac{0}{0}$ »

On considère à nouveau la fonction réelle f définie par $f(x) = \dfrac{x^2+x-6}{x^2-9}$.

a) Étudier ce qui se passe numériquement pour des valeurs de x proches de -3. Pour cela, calculer les images de $-3{,}1$; $-3{,}01$; $-3{,}001$; $-3{,}0001$ puis de $-2{,}9$; $-2{,}99$; $-2{,}999$; $-2{,}9999$.
b) Que constate-t-on ?
c) Que peut-on dire de l'image de -3 ?
d) Quelle notation utiliser ?
e) Interpréter graphiquement.

Reprendre la représentation graphique de f obtenue à l'aide de GeoGebra. Cette représentation graphique précédente n'est pas totalement correcte… Pourquoi ?

Calculer « directement », sans passer par des étapes intermédiaires $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-9}$ et interpréter graphiquement.
Calculer si possible les limites suivantes et interpréter graphiquement :

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x^2-7x}{x}$
b) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+x}{x+1}$

Pourquoi parle-t-on d'indéterminations ?

Activité 8
Indéterminations avec des racines

a) On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$. Calculer $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$ et interpréter graphiquement.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ et interpréter graphiquement.

Activité 9
Asymptotes verticales

a) Définir et illustrer les notions d'asymptote verticale.
b) Vrai ou faux ? Justifier.
   i) Une fonction peut avoir plusieurs asymptotes verticales ?
   ii) La courbe représentative d'une fonction ne coupe jamais son asymptote verticale.
c) Déterminer toutes les asymptotes verticales de la fonction f déterminée par

$$f(x) = \frac{x^2-x}{2x^2+2x-4}$$

   et interpréter graphiquement.

Activité 10
Limites à l'infini

a) On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2+x-6$.
   i) Quel sens donner à $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$?
   ii) Comment calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$?
   iii) Et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$?
b) Énoncer et discuter ce qu'on entend par « limites à l'infini ».
c) Calculer (si possible) les limites à l'infini suivantes en utilisant l'aglèbre de l'infini.
   i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^3+5x+3\right)$
   ii) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^3+5x+10^{100}\right)$
   iii) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{3x^2-4}$

Activité 11
Indéterminations avec l'infini

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2+x-6}{x^2-9}$.
Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-9}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-9}$ et interpréter graphiquement.
Calculer si possible les limites suivantes et interpréter graphiquement :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2-9x}{3x^2-5x-4}$
b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2-x+1}{x+3}$
c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2-x}{5x+2}$
d) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2+x)$
e) $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x-x^2)$

Activité 12
Asymptotes horizontales

a) Définir et illustrer les notions d'asymptote horizontale.
b) Vrai ou faux ? Justifier.
    i) Une fonction peut avoir plusieurs asymptotes horizontales ?
    ii) La courbe représentative d'une fonction ne coupe jamais son asymptote horizontale.
c) Déterminer les asymptotes horizontales de la fonction f déterminée par

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{2x^2 + 2x - 4}$$

et interpréter graphiquement.

Activité 13
Tout en un

a) Déterminer toutes les asymptotes de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{2x^3 + 4x^2 - 2x}{-x^3 + x^2 + x - 1}$$

et interpréter graphiquement.

Activité 14
Double asymptote

a) Déterminer toutes les asymptotes de la fonction f définie par

$$f(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}$$

et interpréter graphiquement.

Activité 15
Graphiquement

Représenter graphiquement une (unique) fonction f de votre choix qui vérifie simultanément toutes les conditions suivantes :

a) L'ensemble D_f des zéros de f est $\{-2; 4\}$
b) L'image de 0 est -2
c) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\infty$
d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
e) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 4$
f) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$ et $f(-4) = -2$

Activité 16
Une limite trigonométrique importante

a) On considère la fonction f déterminée par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$

  i) Déterminer D_f et Z_f.

  ii) D'après votre intuition, et/ou à l'aide de la calculatrice :

  iii) Que pensez-vous de $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et de ? $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

  iv) Existe-t-il une asymptote horizontale pour cette fonction ?

  v) Pouvez-vous justifier ces réponses ?

b) On s'intéresse maintenant à $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

  i) Conjecturer une valeur pour cette limite, à partir d'essais numériques avec la calculatrice.

  ii) Proposer une représentation graphique de f sur la base des informations recueillies jusqu'à présent.

c) Que penser de $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\sin(y^2)}{y^2}$, de $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\sin(z)}{-z}$, de $\lim\limits_{x-a\to 0} \dfrac{\sin(x-a)}{x-a}$, de $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin(x-a)}{x-a}$?

d) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(x)}{x}$

Activité 17

Indéterminations trigonométriques de type « $\dfrac{0}{0}$ »

a) Calculer :

  i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(12x)}{6x}$

  ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(8x)}{10x^2}$

  iii) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sin(x-2)}{3x-6}$

  iv) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(12x)}{6x}$

  v) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{6-3x}{\sin(x-2)}$

  vi) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\cos(x-2)}{3x-6}$

Limites et continuité SECTION 6

Exercices

Dans les corrigés vous trouverez seulement des éléments de réponses. **Une réponse détaillée et justifiée** à l'aide des résultats du cours est attendue. L'enseignant est là pour valider votre réponse et vérifier votre rédaction. **En évaluation, une réponse qui n'est pas justifiée selon les attentes ne recueillera pas de point.**

6.1 Continuité

Exercice 1 Déterminer, à l'aide de votre calculatrice, si les fonctions suivantes sont continues en $a = 1$:

$$f(x) = \frac{1}{x-1}, \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & x \neq 1, \\ 3 & x = 1 \end{cases}, \qquad h(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x} & x \neq 1, \\ \dfrac{1}{2} & x = 1. \end{cases}$$

Corrigé 1 a) non b) non c) oui

Exercice 2 Déterminer, à l'aide de votre calculatrice, si la fonction g définie dans $\mathbb{R}_+$ par

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}, & \text{si } x \neq 9, \\ 6, & \text{si } x = 9. \end{cases}$$

est continue en 9.

Corrigé 2 oui, utiliser la troisième identité remarquable pour le prouver.

Exercice 3 Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x+k, & \text{si } x < 4, \\ -x+3, & \text{si } x \geq 4. \end{cases}$$

Pour quelle(s) valeur(s) de k la fonction f est-elle continue ?

Corrigé 3
Pour $k = -5$.

Exercice 4 Soit P un polynôme de degré 3 à coefficients réels. Montrer que le poylnôme P possède au moins une racine réelle.
On admet pour cet exercice que les fonctions définies par des polynômes sont continues.

Corrigé 4 On écrit $\mathrm{P}(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$. On a que pour un nombre n assez petit, signe$(\mathrm{P}(n)) = -$signe(a) et que pour un nombre m assez grand, signe$(\mathrm{P}(m)) =$ signe(a). La fonction $x \mapsto \mathrm{P}(x)$ est continue sur tout $\mathbb{R}$, donc aussi sur $[n;m]$. Ainsi, par la corollaire du théorème de la valeur intermédiaire, il existe $r \in [n;m]$ tel que $\mathrm{P}(r) = 0$.

6.2 Limites en un nombre

Exercice 5 Déterminer, si possible :

a) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)$

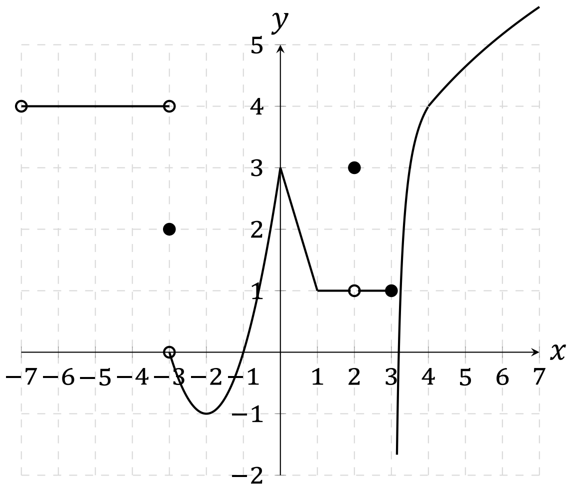
c) $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)$ d) $f(-3)$

e) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ f) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$

g) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ h) $f(3)$

i) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ j) $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$

k) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ l) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$



Corrigé 5

a) 1	b) 4	c) 0	d) 2	e) 1	f) $-\infty$
g) n'existe pas	h) 1	i) 0	j) 4	k) 1	l) 1

Exercice 6 Esquisser une fonction f qui vérifie chaque fois les conditions données :

a) $\lim\limits_{x\to 3} f(x) \to 2$ et $f(3) = 2$.

b) $\lim\limits_{x\to 3} f(x) \to 2$ et $f(3) = 1$.

c) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 4$ et $f(3) = 2$.

d) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 4$ et $f(3) = 4$.

e) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 4$ et $f(3) \neq 4$.

f) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ n'existe pas et $f(3) = 1$.

g) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$ et $2 \notin \mathrm{D}_f$.

h) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = -1$, $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 1$ et $f(3) = 2$.

Corrigé 6 Vérifier la réponse avec l'enseignant.

Exercice 7 Montrer que l'équation

$$2^x = x^2$$

admet une solution sur l'intervalle $[-1; 0]$.

Corrigé 7

— On considère la fonction $f(x) = 2^x - x^2$, continue sur $\mathbb{R}$ car somme de fonctions continues.

— On calcule :

$$f(-1) = 2^{-1} - (-1)^2 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$
$$f(0) = 2^0 - 0^2 = 1 - 0 = 1$$

— On a $f(-1) < 0$ et $f(0) > 0$, donc $f(-1) \cdot f(0) < 0$.

— D'après le corollaire du théorème de la valeur intermédiaire, il existe $c \in [-1; 0]$ tel que $f(c) = 0$.

Exercice 8 Calculer les limites suivantes en justifiant chaque étape.

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-6x+8}{x^2+5x+4}$. b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2-4x+16}}{3}$. c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \cos(2x)$.

Corrigé 8

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-6x+8}{x^2+5x+4} \overset{\text{P4}}{=} \dfrac{\lim_{x\to 1}(x^2-6x+8)}{\lim_{x\to 1}(x^2+5x+4)} \overset{\text{Cor. 4}}{=} \dfrac{1^2-6\cdot 1+8}{1^2+5\cdot 1+4} = \dfrac{3}{10}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2-4x+16}}{3} \overset{\text{P0}}{=} \dfrac{1}{3}\cdot \lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2-4x+16} \overset{\text{thm. 7 + L4 + cor. 4}}{=} \dfrac{1}{3}\cdot\sqrt{0^2-4\cdot 0+16} = \dfrac{1}{3}\cdot 4 = \dfrac{4}{3}$

c) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}} \cos(2x) \overset{\text{thm. 7 + L4}}{=} \cos\left(\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}} 2x\right) \overset{\text{P0}}{=} \cos(-\pi) = -1$

Exercice 9 Calculer les limites suivantes en justifiant chaque étape.

a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3-5x+1}{1}$ b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2}{x^2+3x+5}$ c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2}{2x+4}$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2-x}{x^2-16}$ e) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{5x}{(x+3)^2}$ f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x+2}$

g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^2+3x+5}$ h) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x^2-2x+4+2x}$ i) $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{x^2-2x+4+x}$

j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+\sqrt{x+6}}{x+\sqrt{2-x}}$

Corrigé 9

a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3-5x+1}{1} \overset{\text{P4}}{=} \dfrac{\lim_{x\to -1}(x^3-5x+1)}{1} \overset{\text{cor. 4}}{=} \dfrac{(-1)^3-5(-1)+1}{1} = \dfrac{-1+5+1}{1} = \dfrac{5}{1} = 5$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2}{x^2+3x+5} \overset{\text{P4}}{=} \dfrac{\lim_{x\to 1}(x^2-2)}{\lim_{x\to 1}(x^2+3x+5)} \overset{\text{cor. 4}}{=} \dfrac{1-2}{1+3+5} = \dfrac{-1}{9} = -\dfrac{1}{9}$

c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2}{2x+4} \overset{\text{P4}}{=} \dfrac{2}{\lim_{x\to 2}(2x+4)} \overset{\text{cor. 4}}{=} \dfrac{2}{2\cdot 2+4} = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2-x}{x^2-16} = \dfrac{2-1}{1^2-16} = \dfrac{1}{-15} = -\dfrac{1}{15}$ (idem)

e) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{5x}{(x+3)^2} = \dfrac{15}{36} = \dfrac{5}{12}$ P4 + P3 + cor. 4

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x+2} = \dfrac{0}{2} = 0$ P4+cor. 4

g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^2+3x+5} \overset{\text{P4+cor. 4}}{=} \dfrac{1-1}{1+3+5} = \dfrac{0}{9} = 0$

h) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x^2-2x+4+2x} = \lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x^2+2x+4} = \sqrt{4} = 2$ thm. 7+L4+ cor. 4

i) $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{x^2-2x+4+x} = \lim\limits_{x\to 2} \sqrt{x^2-x+4} = \sqrt{6}$ P4 + thm. 7+L4+ cor. 4

j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+\sqrt{x+6}}{x+\sqrt{2-x}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+\sqrt{x+6}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}$P4 + P1 + thm. 7+L4+ cor. 4

Exercice 10 Dans chaque cas, déterminer l'expression algébrique d'une fonction f, sur $\mathbb{R}$, satisfaisant aux conditions données :

a) f est continue partout sauf pour $x = 2$ et $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ n'existe pas.

b) f admet une limite à gauche et une limite à droite au point $x = 2$ mais elle est non continue en ce point.

Corrigé 10

a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 2 \\ -1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$. La fonction n'est pas définie en $x = 2$, et la limite en $x = 2$ n'existe pas car les limites à gauche et à droite sont différentes.

b) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 2 \\ 5 & \text{si } x = 2 \\ x & \text{si } x > 2 \end{cases}$. La limite en $x = 2$ existe et vaut 2, mais $f(2) = 5 \neq 2$, donc f est discontinue en ce point.

Exercice 11 Déterminer si la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2, \\ 4, & x = 2 \end{cases}$$

est continue en $a = 2$. Justifier.

Corrigé 11

— Pour $x \neq 2$, on a $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \dfrac{(x-2)(x+2)}{x - 2} = x + 2$

— Donc $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}(x + 2) = 4$

— Or $f(2) = 4$, donc $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$

— Ainsi, f est continue en $a = 2$

Exercice 12 Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x - 1}{3 - 2x^2}.$$

a) Donner les limites à droite et à gauche de $f(x)$ lorsque $x \to 0$ et lorsque $x \to 2$, et déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

b) Trouver un polynôme $g(x)$ tel que $\lim\limits_{x\to 0}\big(f(x) \cdot g(x)\big) = 3$.

c) Cette question admet-elle plusieurs réponses ? Si oui, en donner au moins une autre.

d) Trouver un polynôme $h(x)$ tel que $\lim\limits_{x\to 0}\big(f(x) \cdot h(x)\big)$ soit non nul, et calculer cette limite. Cette question admet-elle plusieurs réponses ? Si oui, en donner au moins une autre.

e) Trouver un polynôme $k(x)$ tel que $\lim\limits_{x\to 0}\big(f(x) \cdot k(x)\big) = 0$.

Corrigé 12

a) On a : $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \dfrac{-1}{3}$ et $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \dfrac{-1}{3}$, donc $\lim_{x\to 0} f(x) = -\dfrac{1}{3}$ par le théorème 3. De le même manière, $\lim_{x\to 2} f(x) = \dfrac{2-1}{3-2\cdot 4} = \dfrac{1}{-5} = -\dfrac{1}{5}$.

b) On a $\lim_{x\to 0} f(x) = -\dfrac{1}{3}$. On cherche $g(x)$ tel que $\lim_{x\to 0} f(x)\cdot g(x) = 3$. Par la propriété P3 (produit), il suffit que $\lim_{x\to 0} g(x) = -9$. Exemple : $g(x) = -9$.

c) Oui, car toute fonction g telle que $\lim_{x\to 0} g(x) = -9$ convient. Par exemple : $g(x) = -9 + x$. La limite du produit est assurée par P3.

d) Il suffit que $\lim_{x\to 0} h(x) \neq 0$ pour que $\lim f(x)\cdot h(x) \neq 0$, car $\lim f(x) = -\dfrac{1}{3}$. Par exemple : $h(x) = 1$ convient. Alors $\lim_{x\to 0} f(x)\cdot h(x) = -\dfrac{1}{3} \neq 0$ par P3.

e) Il suffit que $\lim_{x\to 0} k(x) = 0$, car alors $\lim f(x)\cdot k(x) = -\dfrac{1}{3}\cdot 0 = 0$ (propriété P3). Exemple : $k(x) = x$.

Exercice 13 Déterminer si la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

est continue en $a = 0$. Justifier et esquisser une représentation graphique de f.

Corrigé 13

— Pour $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

— Donc $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$

— Les limites à gauche et à droite sont différentes, donc $\lim_{x\to 0} f(x)$ n'existe pas

— Ainsi, f n'est pas continue en $a = 0$

Exercice 14 Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 2 + k, & x < 2, \\ x^2 - 2, & x \geq 2. \end{cases}$$

Pour quelle(s) valeur(s) de k la fonction f est-elle continue ?

Corrigé 14

— Chaque expression définissant f est polynomiale, donc continue sur son domaine.

— Le seul point critique est $x = 2$, où les deux morceaux se rejoignent.

— $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2 + k$, $\quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = 2^2 - 2 = 2$

— Pour que f soit continue en 2, on doit avoir $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$. On impose $2 + k = 2$, donc $k = 0$.

Exercice 15 Soit la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Z}, \\ 1, & x \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

a) Quel est le domaine de définition de f ?

b) Donner un point a où f est continue. Justifier.

c) Donner un point b où f n'est pas continue. Justifier.

Corrigé 15

a) Le domaine de définition est $\mathbb{R}$ (car f attribue une valeur à tout réel selon qu'il est entier ou non).

b) f est continue en tout point $a \notin \mathbb{Z}$, car dans un voisinage de a, $f(x) = 1$ sauf en un nombre isolé de points (les entiers), donc $\lim_{x\to a} f(x) = 1 = f(a)$. Pensez-y, pour tout nombre $a \notin \mathbb{Z}$, on peut trouver un voisinage de a qui n'intersecte pas $\mathbb{Z}$.

c) f n'est pas continue en un entier b, par exemple $b = 0$, car dans tout voisinage de 0, il y a des $x \notin \mathbb{Z}$ tels que $f(x) = 1$, alors que $f(0) = 0$, donc $\lim_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$.

Exercice 16 (*) Soit la fonction réelle définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Que penser de la continuité de cette fonction ?

Corrigé 16 À discuter avec l'enseignant si intéressé.e.

Exercice 17 Montrer que la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

est continue en $a = 1$ et qu'elle n'est pas continue en $a = 0$.

Corrigé 17

— $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

— En $a = 1$: $\lim_{x\to 1} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{\lim_{x\to 1} x} = \dfrac{1}{1} = 1$ (L2, P4) et $f(1) = 1$, donc $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$, donc f est continue en 1.

— En $a = 0$, f n'est pas définie, donc pas continue.

Exercice 18 Application du théorème des deux gendarmes.

a) Montrer que si $\lim_{x\to a} |f(x)| = 0$ alors $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

b) Montrer que $\lim_{x\to 0} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$.

c) En déduire que la fonction $f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ est continue en $x = 0$.

Corrigé 18

a) On a que $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|, \forall x \in \mathbb{R}$, donc par le théorème des deux gendarmes, $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

b) On a $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$,$\forall x \in \mathbb{R}^*$ et donc $0 \leq |\sin\left(\frac{1}{x}\right)| \leq 1$. On multiplie l'inégalité par $|x|$ et on obtient

$0 \leq |x| \cdot |\sin\left(\frac{1}{x}\right)| \leq |x|$

$0 \leq |x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)| \leq |x|$

Par le théorème des deux gendarme, $\lim_{x\to 0} |\sin\left(\frac{1}{x}\right)| = 0$ et par le point précédent $\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

c) On a bien $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$, donc la fonction f est continue en 0.

Exercice 19 Montrer que l'équation

$$x^5 - 3x - 1 = 0$$

admet une solution sur l'intervalle $[1; 2]$.

Corrigé 19

— La fonction $f(x) = x^5 - 3x - 1$ est un polynôme, donc continue sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $[1; 2]$.

— On a :

$$f(1) = 1^5 - 3 \cdot 1 - 1 = -3$$
$$f(2) = 2^5 - 3 \cdot 2 - 1 = 32 - 6 - 1 = 25$$

— Or $f(1) < 0$ et $f(2) > 0$, donc $f(1) \cdot f(2) < 0$.

— Par le corollaire du théorème de la valeur intermédiaire, il existe $c \in [1; 2]$ tel que $f(c) = 0$.

6.2.1 Limites infinies « $\frac{1}{0}$ » et indétermination du type « $\frac{0}{0}$ »

Exercice 20 Soit une fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x^4 + x^3 - x^2 - x}{1 - x}.$$

a) Déterminer son domaine de définition et ses zéros.

b) Calculer les images de 1,9; 1,99; 1,999 puis de 2,1; 2,01 et 2,001.

c) Que penser de $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$?

d) Calculer les images de 0,9; 0,99; 0,999 puis de 1,1; 1,01 et 1,001.

e) Que penser de $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$?

f) Interpréter graphiquement avec un grapheur.

Corrigé 20 Utiliser la calculatrice.

Exercice 21 Représenter graphiquement pour chaque cas deux fonctions f différentes telles que :

a) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ n'existe pas b) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = +\infty$ c) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -\infty$

Corrigé 21 À vérifier avec l'enseignant.

Exercice 22 Calculer, si elles existent, les limites à gauche et à droite des fonctions suivantes lorsque x tend vers a.

a) $f(x) = \dfrac{3x-7}{x-2}, \quad a = 2$

b) $f(x) = \dfrac{5x}{(x+3)^3}, \quad a = -3$

c) $f(x) = \dfrac{-3x+2}{x+2}, \quad a = -2$

d) $f(x) = \dfrac{3x}{|1-x|}, \quad a = 1$

e) $f(x) = \dfrac{-x^2+3x+5}{x^2}, \quad a = 0$

f) $f(x) = \dfrac{x^2+3x+5}{x^2+2x}, \quad a = -2$

g) $f(x) = |2x-10|, \quad a = 5$

h) $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x^2-1}, \quad a = -1$

Corrigé 22

a) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$

e) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

f) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$

g) $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = 0$ $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = 0$

h) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$

Exercice 23 Calculer les limites suivantes et interpréter graphiquement les résultats :

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x^2-7x}{x}$

c) $\lim\limits_{u\to 2} \dfrac{u^2-4}{u^2-5u+6}$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+3x^2-2x-2}{x^2-1}$

e) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-27}{x-3}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{x^2}$

Corrigé 23

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{x} = «\dfrac{0}{0}»$

On simplifie : $\dfrac{2x}{x} = 2$ pour $x \neq 0, \lim_{x\to 0} 2 = 2$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x^2-7x}{x} = «\dfrac{0-0}{0}» = «\dfrac{0}{0}»$ On factorise $\dfrac{x(5x-7)}{x} = 5x-7 \Rightarrow \lim_{x\to 0} 5x-7 = -7$

c) type $«\dfrac{0}{0}»$

$$\lim_{u\to 2} \frac{u^2-4}{u^2-5u+6} = \lim_{u\to 2} \frac{(u-2)(u+2)}{(u-2)(u-3)} \overset{x\neq 2}{=} \lim_{u\to 2} \frac{u+2}{u-3} = \frac{4}{-1} = -4$$

d) type $«\dfrac{0}{0}»$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+3x^2-2x-2}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)} \overset{x\neq 1,-1}{=} \lim_{x\to 1} (x+2) = 3$$

e) type $«\dfrac{0}{0}»$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3-27}{x-3} = \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{x-3} \overset{x\neq 3}{=} \lim_{x\to 3} x^2+3x+9 = 27$$

f) type $«\dfrac{0}{0}»$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2} \overset{x\neq 0}{=} \lim_{x\to 0} x = 0$$

Exercice 24 Calculer les limites suivantes en justifiant chaque étape.

a) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{-2}{2x+4}$ b) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x-2}{x^2-2x+1}$ c) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{3x-7}{x-2}$

d) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{-3x+2}{x+2}$ e) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{3x}{1-x^2}$ f) $\lim\limits_{x\to-3} \dfrac{5x}{x+3}$

Corrigé 24

a) Type «$\frac{1}{0}$» :

$$\lim_{x\to-2} \frac{-2}{2x+4} \overset{P4}{=} \frac{-2}{\lim_{x\to-2}(2x+4)} \overset{\text{cor. 4}}{=} \frac{-2}{2\cdot(-2)+4} = \frac{-2}{-4+4} = «\frac{-2}{0}»$$

$\lim\limits_{x\to-2^-} \dfrac{-2}{2x+4} = «\dfrac{-2}{0^-}» = +\infty$,

$\lim\limits_{x\to-2^+} \dfrac{-2}{2x+4} = «\dfrac{-2}{0^+}» = -\infty$ donc la limite n'existe pas.

b) Même justification que ci-dessus :

$\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x-2}{x^2-2x+1} = \dfrac{1-2}{1^2-2\cdot1+1} = «\dfrac{-1}{0}»$

Type «$\frac{1}{0}$» : on factorise : $x^2+2x-1=(x-1)^2$

$\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{x-2}{(x-1)^2} = «\dfrac{-1}{(0^-)^2}» = «\dfrac{-1}{0^+}» = -\infty$,

$\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{x-2}{(x-1)^2} = «\dfrac{-1}{(0^+)}» = -\infty$

donc $\lim_{x\to1} f(x) = -\infty$

c) Type «$\frac{1}{0}$» : $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{3x-7}{x-2} = «\dfrac{6-7}{0}» = «\dfrac{-1}{0}»$

$\lim\limits_{x\to2^-} \dfrac{3x-7}{x-2} = «\dfrac{-1}{0^-}» = +\infty$,

$\lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{3x-7}{x-2} = «\dfrac{-1}{0^+}» = -\infty$

donc la limite n'existe pas.

d) Type «$\frac{1}{0}$» : $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{-3x+2}{x+2} = \dfrac{6+2}{0} = «\dfrac{8}{0}»$

$\lim\limits_{x\to-2^-} \dfrac{-3x+2}{x+2} = «\dfrac{8}{0^-}» = -\infty$,

$\lim\limits_{x\to-2^+} \dfrac{-3x+2}{x+2} = «\dfrac{8}{0^+}» = +\infty$

donc la limite n'existe pas.

e) Type «$\frac{1}{0}$» : $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{3x}{1-x^2} = \dfrac{3}{1-1} = «\dfrac{3}{0}»$

$1-x^2 = -(x-1)(x+1)$, donc :

$\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{3x}{1-x^2} = «\dfrac{3}{-(0^-)(2)}» = -\infty$,

$\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{3x}{1-x^2} = «\dfrac{3}{-(0^+)(2)}» = +\infty$

donc la limite n'existe pas.

f) Type «$\frac{1}{0}$» : $\lim\limits_{x\to-3} \dfrac{5x}{x+3} = «\dfrac{-15}{0}»$

$\lim\limits_{x\to-3^-} \dfrac{5x}{x+3} = «\dfrac{-15}{0^-}» = +\infty$,

$\lim\limits_{x\to-3^+} \dfrac{5x}{x+3} = «\dfrac{-15}{0^+}» = -\infty$

donc la limite n'existe pas.

Exercice 25 Les fonctions

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x+1} \text{ et } g(x) = \frac{x^2-1}{(x+1)^2}$$

ne sont pas définies en $x=-1$. Peut-on attribuer une valeur à l'image de -1 pour que ces fonctions ainsi prolongées soient continue en $x=-1$. Esquissez les graphes de f et g.

Corrigé 25

— On factorise le numérateur : $x^2-1=(x-1)(x+1)$

— Donc :

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = x-1 \quad \text{pour } x \neq -1$$
$$g(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{x-1}{x+1} \quad \text{pour } x \neq -1$$

— Pour f : $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = (-1)-1=-2$, donc on peut définir $f(-1)=-2$ pour la rendre continue.

— Pour g : $\lim\limits_{x\to-1^-} g(x) = «\dfrac{-2}{0^-}» = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-1^+} g(x) = «\dfrac{-2}{0^+}» = -\infty$, donc la limite n'existe pas.

— Ainsi, seule f peut être prolongée continûment en $x=-1$. Si on appelle cette nouvelle fonction $\tilde{f}$ on doit poser $\tilde{f}(-1)=-2$.

Exercice 26 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2} & \text{si } x \neq 2, \\ c & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

pour $c \in \mathbb{R}$

a) Expliquez pourquoi cette fonction est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

b) Pour quelles valeurs de c la fonction est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Corrigé 26

a) Si $x \neq 2$, alors on peut simplifier l'expression de la fonction (division polynomiale) $f(x) = x^2 + 2x + 4$ qui est une expression polynomiale, donc continue.

b) f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Il faut à présent faire en sorte qu'elle soit continue en $x = 2$. Pour cela, on doit avoir $\lim_{x\to 2} f(x) = c$. On calcule la limite $\lim_{x\to 2} f(x) = 12$, donc pour $c = 12$.

Exercice 27 On s'intéresse à des fonctions telles que $f(3)$ n'existe pas et $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 5$.

a) Représenter graphiquement trois fonctions distinctes qui vérifient ces deux conditions.

b) Donner l'expression $f(x)$ d'une fonction f qui vérifie ces deux conditions.

Corrigé 27

a) À vérifier avec l'enseignant.

b) par exemple $x \mapsto \dfrac{5(x-2)(x-3)}{(x-3)}$.

Exercice 28 Calculer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2 - \sqrt{x}}{4 - x}$

b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x - 3}{\sqrt{x+6} - 3}$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1 - x}{\sqrt{12 - 3x} - 3}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2 - x + 1}}{x}$

e) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x - \sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1} - 3}$

Corrigé 28

a) Type « $\frac{0}{0}$ » :

$$\lim_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{x}}{4-x}$$
$$=\lim_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{x}}{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})}$$
$$\overset{x\neq 4}{=}\lim_{x\to 4}\frac{1}{2+\sqrt{x}}=\frac{1}{4}$$

b) Type « $\frac{0}{0}$ » :

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x+6}-3}$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)}{x+6-9}$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)}{x-3}$$
$$\overset{x\neq 3}{=}\lim_{x\to 3}\sqrt{x+6}+3=6$$

c) Type « $\frac{0}{0}$ » :

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\sqrt{12-3x}-3}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(\sqrt{12-3x}+3)}{12-3x-9}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(\sqrt{12-3x}+3)}{3(1-x)}$$
$$\overset{x\neq 1}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{12-3x}+3}{3}=4$$

d) Type « $\frac{0}{0}$ » :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2-x+1}}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)-(x^2-x+1)}{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2-x+1})}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2+2x}{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2-x+1})}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x+2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}=1$$

e) Type « $\frac{0}{0}$ » :

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}$$
$$=\lim\frac{(x-\sqrt{x+2})(\sqrt{4x+1}+3)}{4x+1-9}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-\sqrt{x+2})(\sqrt{4x+1}+3)}{4(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-x-2)(\sqrt{4x+1}+3)}{4(x-2)(x+\sqrt{x+2})}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)(\sqrt{4x+1}+3)}{4(x-2)(x+\sqrt{x+2})}$$
$$\overset{x\neq 2}{=}\lim_{x\to 2}\frac{(x+1)(\sqrt{4x+1}+3)}{4(x+\sqrt{x+2})}$$
$$=\frac{3(\sqrt{9}+3)}{4(2+\sqrt{4})}=\frac{9}{8}$$

Exercice 29 Calculer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x-1}$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4+x^3-x-3}{\sqrt{x-1}}$

Corrigé 29

a) Type « $\frac{0}{0}$ » :

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2+x-1}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+1)}{x-1}$$
$$\overset{x\neq 1}{=}\lim_{x\to 1}x^2+1=2$$

b) Type « $\frac{0}{0}$ » :

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^4+x^3+x-3}{\sqrt{x-1}}$$
$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x-1}(x^4+x^3+x-3)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x-1}(x-1)(x^3+2x^2+2x+3)}{x-1}$$
$$\overset{x\neq 1^+}{=}\lim_{x\to 1}\sqrt{x-1}(x^3+2x^2+2x+3)=0$$

Exercice 30 Calculer les limites suivantes.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 3^+} \frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x-3}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{2}}{x-1}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{x-1}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}-1}$ e) $\lim_{x\to -2^-} \dfrac{x+\sqrt{2-x}}{x+2}$

Corrigé 30

a) Type « $\frac{0}{0}$ » :

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x-3}$$
$$= \lim_{x\to 3^+} \frac{\sqrt{(x-1)(x-3)}}{x-3}$$
$$= \lim_{x\to 3^+} \frac{\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x-3}}{x-3}$$
$$\overset{x\neq 3}{=} \lim_{x\to 3^+} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-3}^2}\cdot\sqrt{x-3}$$
$$= \lim_{x\to 3^+} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-3}}$$
$$= +\infty$$

b) Type « $\frac{0}{0}$ » :

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{2}}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{(x-1)(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{2})}$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{2})}$$
$$\overset{x\neq 1}{=} \lim_{x\to 1} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{2}}$$
$$= \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

c) Type « $\frac{0}{0}$ » :

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x+3)-(3x+1)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1})}$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{-2(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1})}$$
$$\overset{x\neq 1}{=} \lim_{x\to 1} \frac{-2}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}}$$
$$= \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

d) Type « $\frac{0}{0}$ » :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}-1}$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x(\sqrt{1+x^2}+1)}{1+x^2-1}$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x(\sqrt{1+x^2}+1)}{x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+x^2}+1}{x}$$
$$= +\infty$$

e) Type « $\frac{0}{0}$ » :

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{x+\sqrt{2-x}}{x+2}$$
$$= \lim_{x\to -2^-} \frac{x+\sqrt{2-x}}{x+2}\cdot\frac{x-\sqrt{2-x}}{x-\sqrt{2-x}}$$
$$= \lim_{x\to -2^-} \frac{x^2-(2-x)}{(x+2)(x-\sqrt{2-x})}$$
$$= \lim_{x\to -2^-} \frac{x^2+x-2}{(x+2)(x-\sqrt{2-x})}$$
$$= \lim_{x\to -2^-} \frac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x-\sqrt{2-x})}$$
$$\overset{x\neq -2}{=} \lim_{x\to -2^-} \frac{x-1}{x-\sqrt{2-x}}$$
$$= \frac{-3}{-2-2} = \frac{3}{4}$$

Exercice 31 Calculer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\left(1+\dfrac{x}{2}\right)}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x^2-x}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$

Corrigé 31

a) Type « $\frac{0}{0}$ » :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\left(1+\frac{x}{2}\right)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}-\frac{1}{2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$$

b) Type « $\frac{0}{0}$ » :

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x^2-x}-\frac{2}{x^2-1}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x(x-1)}-\frac{2}{(x-1)(x+1)}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{(x+1)-2x}{x(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{-x+1}{x(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{-(x-1)}{x(x-1)(x+1)} \overset{x\neq 1}{=} \lim_{x\to 1}\frac{-1}{x(x+1)} = \frac{-1}{1\cdot 2} = -\frac{1}{2}$$

Exercice 32 Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2+1}}{x^2-1}$

c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-9x}{(4-x^2)^3}$ d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{(x^2-1)^2}$ e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-a}{x-a}$

f) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$ g) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-a^2}{x-a}$ h) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^3-a^3}{x-a}$

i) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1-\frac{1}{x}}{x-a}$ j) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+4}$ k) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{2x^2-6x}$

l) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-1)^2}{x^2+3x}$ m) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{2}}{x-1}$ n) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+2x-15}{x^2+8x+15}$

o) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+1}{(x+3)^2}$

Corrigé 32

a) Type « $\frac{0}{0}$ » :

$$\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3}$$
$$=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(\sqrt{2x-1}+3)}{(2x-1)-9}$$
$$=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(\sqrt{2x-1}+3)}{2(x-5)}$$
$$\overset{x\neq 5}{=}\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{2x-1}+3}{2}=\frac{3+3}{2}=3$$

b) Forme déterminée

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2+1}}{x^2-1}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{-1}$$
$$=1-\sqrt{3}$$

c) Type « $\frac{1}{0}$ » :

$+\infty$

d) Type « $\frac{0}{0}$ » :

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)^2}$$
$$\overset{x\neq 1}{=}\lim_{x\to 1}\frac{x-2}{x-1}$$
$$=\pm\infty \implies \nexists.$$

e) Type « forme déterminée » :

$$\lim_{x\to a}\frac{x-a}{x-a}=1$$

f) Type « $\frac{0}{0}$ » :

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

g) Type « $\frac{0}{0}$ » :

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x+a)}{x-a}$$
$$\overset{x\neq a}{=}\lim_{x\to a}x+a=2a$$

h) Type « $\frac{0}{0}$ » :

$$\lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{x-a}=\lim_{x\to a}x^2+ax+a^2=3a^2$$

i) Type « $\frac{0}{0}$ » :

$$\lim_{x\to a}\frac{1-\frac{1}{x}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x-1}{x(x-a)}$$

Si $a=0$, alors $-\infty$, si $a=1$, alors 1, autrement, non définie.

j) Type « $\frac{0}{0}$ » :

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)^2}$$
$$\overset{x\neq 2}{=}\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x-2}$$
$$=\pm\infty \implies \nexists$$

k) Type « $\frac{0}{0}$ » :

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{2x^2-6x}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-2)(x-3)}{2x(x-3)}$$
$$\overset{x\neq 3}{=}\lim_{x\to 3}\frac{x-2}{2x}=\frac{1}{6}$$

l) Type « forme déterminée » :

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x-1)^2}{x^2+3x}=\frac{4}{18}=\frac{2}{9}$$

m) Type « $\frac{0}{0}$ » :

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+2x-15}{x^2+8x+15}=\frac{(x-3)(x+5)}{(x+3)(x+5)}$$
$$\overset{x\neq 3}{=}\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x+3}=\frac{0}{6}=0$$

n) Type « $\frac{-2}{0^+}$ » :

$$\lim_{x\to -3}\frac{x+1}{(x+3)^2}$$
$$=-\infty$$

o) Type « $\frac{1}{0}$ » :

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+x-\sqrt{2}}}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-\sqrt{2}}{(x-1)\cdot\sqrt{x^2+x-\sqrt{2}}}$$
$$=\pm \implies \nexists$$

Exercice 33 Calculer les limites suivantes et justifier les résultats obtenus.

a) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{|x-2|}{x^2-4}$ b) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{|x-2|}{x^2-4}$

Corrigé 33 a) $\nexists \quad (\pm\infty)$ b) $-\dfrac{1}{4}$

Exercice 34 Déterminer pour chaque cas l'expression algébrique $f(x)$ une fonction telle que :

a) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ n'existe pas b) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = +\infty$ c) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -\infty$

Justifier votre réponse. Y a-t-il plusieurs réponses possibles dans tous ces cas ?

Corrigé 34 * Oui, il y a plusieurs cas possibles. Sans justification.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ b) $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ c) $f(x) = -\dfrac{1}{(x-2)^2}$

6.2.2 Asymptotes verticales

Exercice 35 Déterminer les asymptotes verticales des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \dfrac{3x^4-5x}{x^2-1}$ b) $f(x) = \dfrac{5x^2-5x}{x^2-1}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{2x^2-4x}$ d) $f(x) = \dfrac{x^2+2x+3}{4-x^2}$

Corrigé 35 *

a) $x = 1$ et $x = -1$ b) $x = -1$ c) $x = 0$ d) $x = 2$ et $x = -2$

Exercice 36 Tracer le graphe d'une fonction réelle f satisfaisant simultanément toutes les conditions suivantes :

a) $f(2) = -4$
b) l'ensemble des antécédents de 1 est $\{5; 8\}$
c) l'ensemble des zéros de f est $\{-4; 7\}$
d) $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\infty$
e) f n'est pas définie en $x = -3$ et $\lim\limits_{x\to -3} f(x) = -2$
f) $f(1) = -5$ et $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ n'existe pas
g) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 3$

Corrigé 36 À vérifier avec l'enseignant.

6.3 Limites en l'infini

Exercice 37 Déterminer graphiquement :

a) $\lim\limits_{x\to -4} f(x)$

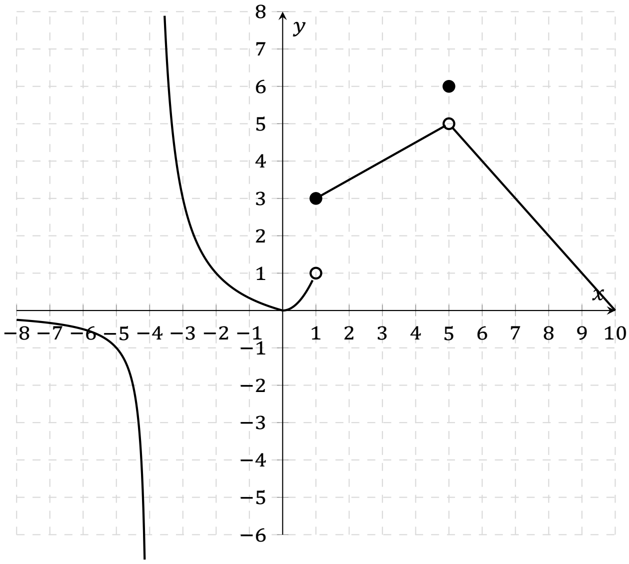
b) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

d) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

e) $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$

f) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$



Exercice 38 Calculer les limites suivantes et interpréter graphiquement les résultats :

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^3 - 2x^2 + 5)$ b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2}{x^3}$ c) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^4 + 2x)$

d) $\lim\limits_{x\to -\infty} (x^3 - x^4)$ e) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-3}{x^2+5}$ f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^2+5}{1-3x^2}$

Exercice 39 Calculer les limites suivantes en justifiant les résultats obtenus. Interpréter graphiquement.

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^3 + 2x + 5)$ b) $\lim\limits_{x\to -\infty} (x^4 - 2x)$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-3}{x^2+5}$ d) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{2x^4}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to 0} (x^3 + 2x + 5)$ f) $\lim\limits_{x\to -\infty} (x^4 + 2x)$

g) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^3 - x^4)$ h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2+5}{1-3x^2}$

i) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+x+1}{x}$ j) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3-x^2}{x^3}$

k) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(3x - \sqrt{x^2-x+1}\right)$

Exercice 40 Soient les fonctions f et g définies par

$$f(x) = x^2 + 2x + 1, \quad g(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2.$$

Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{g(x)}{f(x)}$ c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{g(x)}{f(x)}$ e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \big(f(x) - g(x)\big)$ f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)^3$

Exercice 41 Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier :

a) Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x) + g(x)\big) = 0$.

b) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{h\to 0} f(2 + h)$.

c) Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ avec $g(x) > 0$, alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.

Exercice 42 Esquisser la représentation graphique d'une fonction f qui satisfait simultanément toutes les conditions ci-dessous :

a) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1$

b) $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = +\infty$

c) $f(0) = 2$ d) $-1 \notin \mathrm{D}_f$ et $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 2$

e) $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = +\infty$

Exercice 43 Esquisser la représentation graphique d'une unique fonction f qui vérifie toutes les conditions ci-dessous :

a) $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-8; 1; 7\}$ b) $\mathrm{Z}_f = \{-2; 0; \pi\}$

c) $\lim\limits_{x\to -8} f(x) = 4$ d) $\lim\limits_{x\to 7^-} f(x) = -\infty$

e) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$ f) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 2$

g) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$ h) $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = -5$

Exercice 44 Représenter graphiquement une unique fonction f de votre choix qui vérifie toutes les conditions suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 3$ b) $f(-3) = -2$ c) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\infty$

d) $f(0) = 4$ e) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2$ f) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 2$

Exercice 45 Représenter graphiquement une unique fonction f de votre choix qui vérifie toutes les conditions suivantes :

a) $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2; 3\}$

b) $\mathrm{Z}_f = \{-3; 1; 5; 6\}$

c) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$

f) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 4$

Exercice 46 Déterminer les asymptotes horizontales des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \dfrac{3x^4 - 5x}{x^2 + 1}$

b) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 5x}{x^2 + 1}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 - 4x}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 3}{4 - x^2}$

Pourquoi parle-t-on d'asymptotes horizontales dans ces cas ?

Exercice 47 Représenter graphiquement une fonction qui ait 3 asymptotes verticales et une asymptote horizontale à $\pm\infty$.

Exercice 48 Représenter graphiquement une fonction qui ait 2 asymptotes verticales, une asymptote horizontale à $-\infty$ et une autre asymptote horizontale à $+\infty$.

Exercice 49 Déterminer les asymptotes de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^n + 3}{x^n - 1}$ pour $n = 0$, 1, 2, 3 et esquisser dans chaque cas un graphe de f cohérent avec les calculs effectués.

Exercice 50 Dans chacun des cas suivants, déterminer l'expression d'une fonction rationnelle répondant aux conditions données.

a) Une fonction rationnelle passant par le point $(0; 9)$ et ayant une asymptote horizontale en $y = 4$ et deux asymptotes verticales en $x = -1$ et $x = 2$.

b) Une fonction rationnelle passant par les points $(-3; 1)$ et $(-1; 0)$ et ayant une asymptote horizontale en $y = -3$ et trois asymptotes verticales en $x = 0$, $x = -4$ et $x = 5$.

Exercice 51 Déterminer, dans chacun des cas suivants, l'expression algébrique d'une fonction rationnelle avec une asymptote :

a) horizontale d'équation $y = -2$

b) verticale d'équation $x = 7$.

c) horizontale d'équation $y = 0$, deux verticales d'équations $x = 3$ et $x = -10$.

Justifier vos réponses en montrant que les conditions sont bien vérifiées.

Exercice 52 Étudier la fonction rationnelle $f : x \mapsto \dfrac{-2x^2 - 19x - 44}{2x^2 + 14x + 24}$.
Déterminer son domaine de définition, les limites aux bornes de son domaine, ses asymptotes éventuelles, puis esquisser son graphe.

6.4 Limites de fonctions trigonométriques

Exercice 53 Calculer :

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{3x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(8x)}{10x}$ c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sin(2x-4)}{8x-16}$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(3x-3)}{9-9x}$ e) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sin(x^2-1)}{x^4-1}$

Exercice 54 Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(ax)}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(ax)}{\sin(bx)}, a,b \in \mathbb{R}, b \neq 0$

Exercice 55 Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos^2(x)+\sin(2x)-1}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin(x)}{\cos^2(x)}$ d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^2(x)}{x\tan(x)}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin(x)}{1-\cos(x)}$ f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin(x)}{1-\cos(x)}$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)}{x}$

Limites et continuité SECTION 7

Pistes pour réviser

- Quelles sont les trois conditions qu'une fonction doit satisfaire **simultanément** pour être continue en un point ? Donner des exemples de fonctions qui satisfont seulement deux des trois conditions.
- Quelle est la première étape à effectuer dans tout calcul de limite ?
- Une limite peut être déterminée ou indéterminée, en un nombre ou en l'infini. Donner des exemples de chacun de ces cas.
- Qu'est-ce qu'une indétermination ? Quels sont les différents cas, leurs particularités et les différentes manières de les lever ? Donner des exemples.
- Quelle technique a-t-on à diposition pour calculer une limite qui contient une expression littérale avec une racine ?
- Donner des conditions pour l'existence d'asymptotes verticales. Exemples.
- Donner des conditions pour l'existence d'asymptotes horizontales. Exemples.
- Quelles sont les deux façons qui ont étudiées pour calculer une limite trigonométrique ? Exemples.

Sources du cours

Les sources suivantes ont majoritairement été utilisées pour construire ce cours. Les exercices et activités proviennent également principalement de ces ouvrages. D'autres exercices ont été adaptés ou sont inspirés de ressources partagées par des collègues ou trouvées sur internet. Leur contribution mineure les exclut de cette liste.

[1] Saturnino L. Salas et Einar Hille. **Calculus : One and Several Variables**. 3^{e} éd. Wiley, 1984. isbn : 9780471316596.

[2] Commission romande de mathématiques. **Fundamentum de mathématique Analyse**. CRM Éditions, 2018. isbn : 9782940621026.

[3] Association Sesamath Suisse Romande. **Sésamath – Troisième année de maturité gymnasiale**. 2022. url : `https://sesamath.ch/`.