Chapitre 2 :
Calcul différentiel – Partie 2

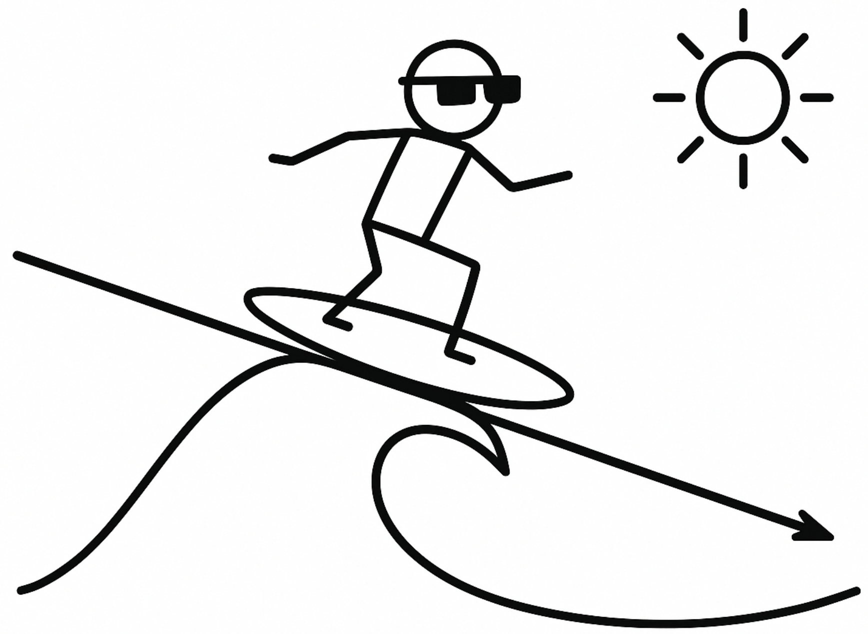


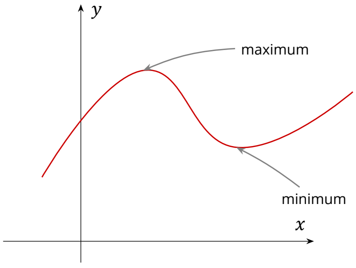
Table des matières

Calcul différentiel SECTION 1

Le théorème des accroissement finis et ses applications

1.1 Le théorème des accroissement finis

Proposition 1 (avec démonstration)



Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $]a;b[$.
Soit $c \in]a;b[$ tel que $f(c)$ soit un maximum de f sur l'intervalle $]a;b[$.
Alors, $f'(c) = 0$.

Preuve. L'image de c est un maximum, donc pour un h assez petit, on a

$$f(c) \geq f(x), \forall x \in]c-h;c+h[.$$

Ce qui est équivalent à

$$f(c) - f(x) \geq 0, \forall x \in]c-h;c+h[. \tag{$\star$}$$

Puisque f est dérivable sur $]a;b[$, on a que

$$f'(c) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}.$$

Calculons le signe de ces deux limites.

$$\begin{aligned} \text{signe}\left(\lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}\right) &= \frac{\text{signe}\left(\lim_{h\to 0^+} f(c+h)-f(c)\right)}{\text{signe}\left(\lim_{h\to 0^+} h\right)} \\ &= \frac{«-»}{«+»} = «-» \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{signe}\left(\lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}\right) &= \frac{\text{signe}\left(\lim_{h\to 0^-} f(c+h)-f(c)\right)}{\text{signe}\left(\lim_{h\to 0^-} h\right)} \\ &= \frac{«-»}{«-»} = «+» \end{aligned}$$

Où le signe du numérateur est positif par ($\star$). Le seul nombre qui est à la fois positif et négatif est 0, donc $f'(c) = 0$. □

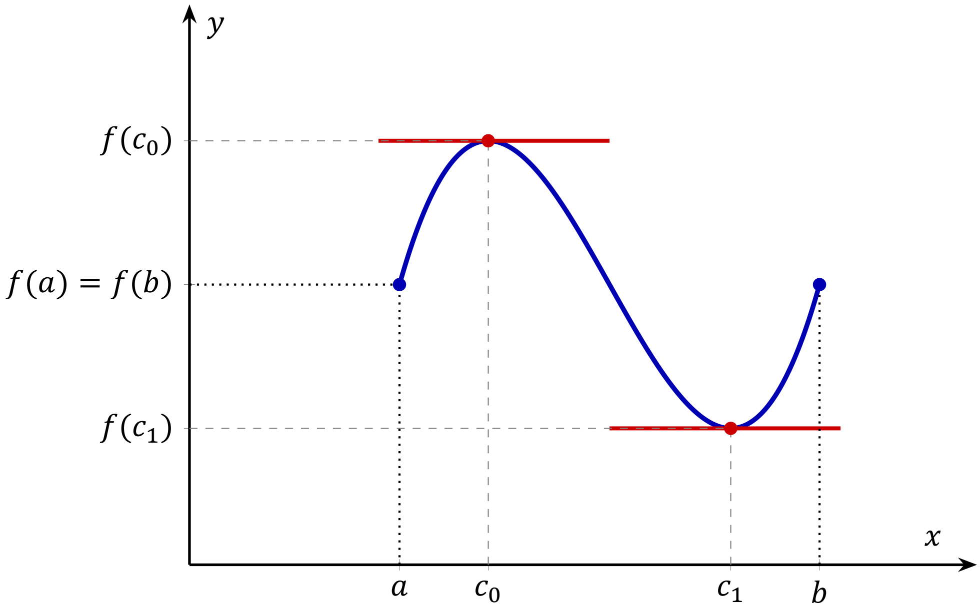
Remarque Un résultat identique est valable pour un minimum (si $f(c)$ est un minimum).

Théorème 1
Thm de Rolle
(avec démonstration)

Soit f une fonction dérivable sur $]a;b[$ et continue sur $[a;b]$.
Si $f(a) = f(b) = 0$, alors il existe (au moins un) $c \in]a;b[$ tel que

$$f'(c) = 0.$$

Preuve.
Si f est constante alors cela est évident.
Autrement, on peut supposer qu'il existe $x \in [a;b]$ tel que $f(x) > 0$ ou $f(x) < 0$. On traite le cas $f(x) > 0$ (le cas $f(x) < 0$ est similaire).
La fonction f est continue sur un fermé, donc par la théorème de la valeur intermédiaire, il existe $c \in [a;b]$ tel que $f(c)$ est un maximum de f sur $[a;b]$.
Dans notre cas, $c \neq a,b$ et donc $f(c)$ est un maximum de f sur $]a;b[$ (pourquoi est-ce que $c \neq a,b$?).
Par la proposition 1, $f'(c) = 0$. □



Théorème 2
Thm des accroissements finis
(avec démonstration)

Soit f une fonction dérivable sur $]a;b[$ et continue sur $[a;b]$, alors il existe (au moins un) $c \in]a;b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Preuve. On définit la fonction affine $s : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$s(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

Notons que $s(a) = f(a)$ et $s(b) = f(b)$ et que $s'(x) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est constante.
On considère la fonction

$$d(x) = f(x) - s(x).$$

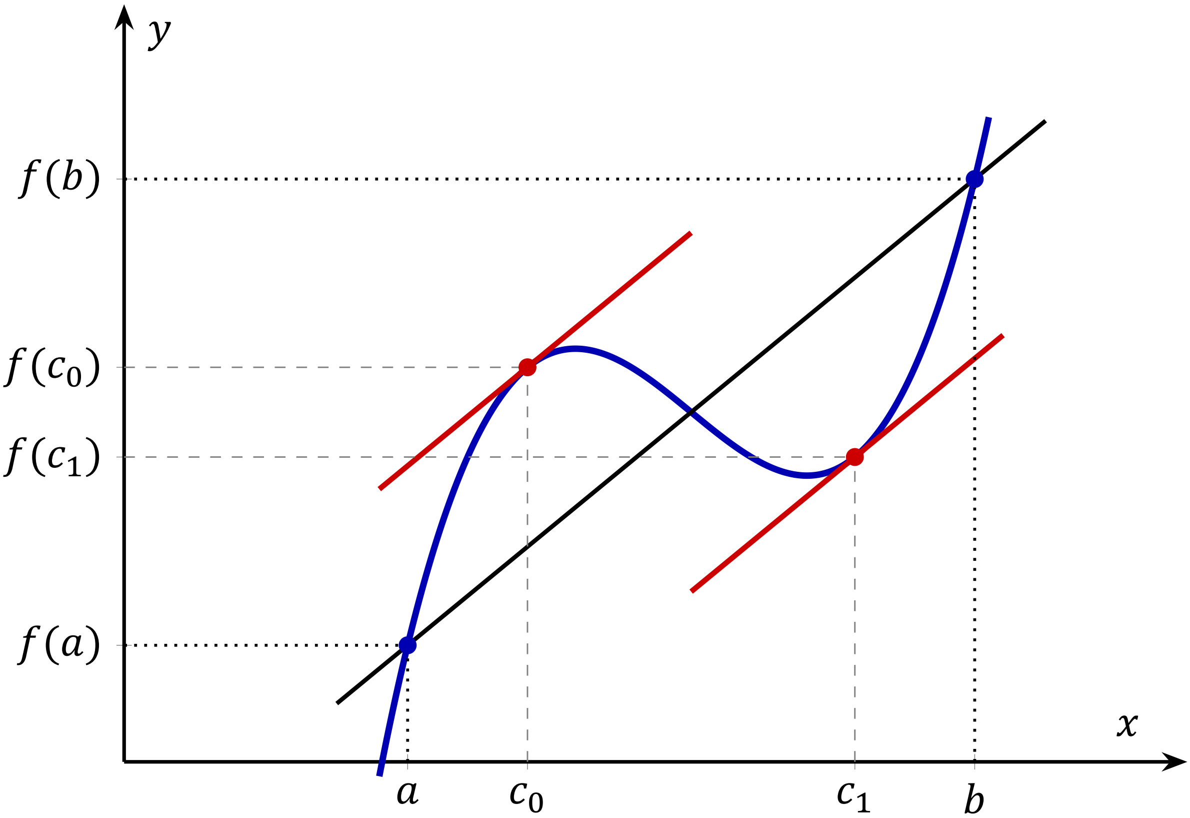
On a que d est continue sur $[a;b]$, car f et s le sont (différence de fonctions continues). De la même manière, elle est dérivable sur $]a;b[$.
Par ailleurs,

$$\begin{aligned} d(a) &= f(a) - s(a) = f(a) - f(a) = 0 \\ d(b) &= f(b) - s(b) = f(b) - f(b) = 0 \end{aligned}$$

La fonction d satisfait toutes les hypothèses du Théorème de Rolle. Ainsi, il existe $c \in]a;b[$ tel que $d'(c) = 0$. On obtient

$$\begin{aligned} d'(c) = 0 &\iff f'(c) - s'(c) = 0 \iff f'(c) = s'(c) \\ &\iff f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \end{aligned}$$

□



1.2 Fonctions croissantes et décroissantes

Maintenant que l'on a une bonne idée de ce que représente la dérivée, on comprend intuitivement que

a) une fonction est « croissante » sur un intervalle sur lequel sa dérivée est positive ;
b) une fonction est « décroissante » sur un intervalle sur lequel sa dérivée est négative ;
c) une fonction est constante sur un intervalle sur lequel sa dérivée est nulle.

Mais que veut dire « croissante » et « décroissante » mathématiquement ?

Définition On dit qu'une fonction est

- **croissante** sur un intervalle I ssi pour tout $x_1, x_2 \in \mathrm{I}$

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$$

- **décroissante** sur un intervalle I ssi pour tout $x_1, x_2 \in \mathrm{I}$

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$$

Exemple 1 La fonction $f(x) = x^2$ est décroissante sur l'intervalle $]-\infty; 0]$ et croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Exemple 2 La fonction

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ x, & x \geq 0, \end{cases}$$

est constante sur l'intervalle $]-\infty; 0]$ et croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Le théorème suivant est une conséquence directe du Théorème des accroissements finis.

Théorème 3 Relation entre la dérivée et la monotonie d'une fonction (avec démonstration)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $\mathrm{I} =]a;b[$, alors

- Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathrm{I}$, alors f est strictement croissante sur I ;
- Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in \mathrm{I}$, alors f est strictement décroissante sur I ;
- Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathrm{I}$, alors f est constante sur I.

Preuve. Soit $x_1, x_2 \in]a;b[$ avec $x_1 < x_2$. Par le théorème des accroissement finis, il existe $c \in]x_1;x_2[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

d'où

$$f'(c) \cdot (x_2 - x_1) = f(x_2) - f(x_1)$$

On note que $(x_2 - x_1)$ est toujours positif (pourquoi ?).

- Dans l'hypothèse d'une dérivée srictement positive sur I,
  on a $0 < f'(c)$, alors
  $$0 < f'(c) \cdot (x_2 - x_1) = f(x_2) - f(x_1),$$
  donc $0 < f(x_2) - f(x_1) \iff f(x_1) < f(x_2)$. On a choisi $x_1 < x_2$ quelconques, donc f est strictement croissante sur I.
- Dans l'hypothèse d'une dérivée srictement négative sur I,
  on a $0 > f'(c)$, alors
  $$0 > f'(c) \cdot (x_2 - x_1) = f(x_2) - f(x_1),$$
  donc $0 > f(x_2) - f(x_1) \iff f(x_1) > f(x_2)$. On a choisi $x_1 < x_2$ quelconques, donc f est strictement décroissante sur I.
- Dans l'hypothèse d'une dérivée nulle sur I, on a $f'(c) = 0$, alors
  $$0 = f'(c) \cdot (x_2 - x_1) = f(x_2) - f(x_1),$$
  donc $f(x_2) - f(x_1) = 0 \iff f(x_2) = f(x_1)$. On a choisi $x_1 < x_2$ quelconques, donc f est constante sur I.

$\square$

Remarque Afin d'étudier la monotonie d'une fonction, on étudie le signe de sa dérivée.

1.3 Maximum et minimum

Nous généralisons à présent un sujet que vous avez déjà survolé les années précédentes : la recherche d'un maximum ou d'un minimum d'une fonction.
Que pouvez-vous dire à ce sujet pour les fonctions affines ou quadratiques ?

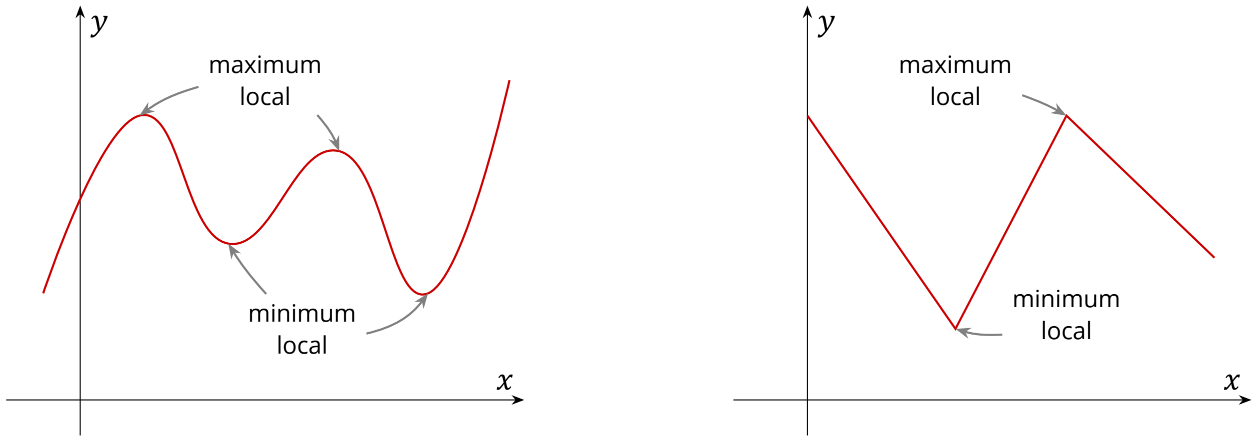
Définition Une fonction admet un maximum local en c ssi

$$f(c) \geq f(x) \text{ pour tout } x \text{ assez proche de } c.$$

Une fonction admet un minimum local en c ssi

$$f(c) \leq f(x) \text{ pour tout } x \text{ assez proche de } c.$$

Figure 1 – Illustration de la notion de maximum et minimum local sur un ouvert



Théorème 4 Si f a un maximum ou un minimum local en c, alors

$$f'(c) = 0 \text{ ou } f'(c) \text{ n'existe pas.}$$

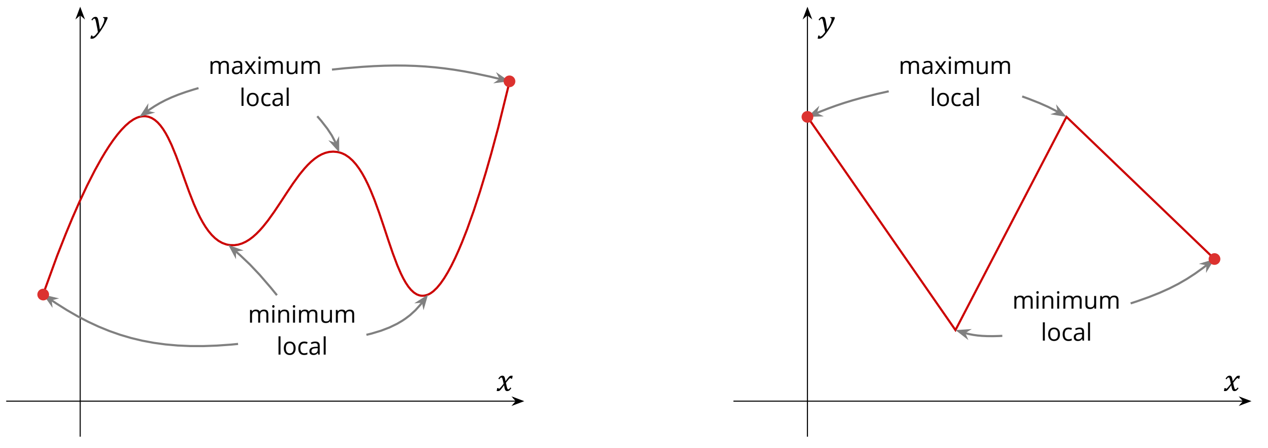
Définition Un point c de l'ensemble de définition de la fonction f est appelé un point critique de f ssi

$$f'(c) = 0 \text{ ou } f'(c) \text{ n'existe pas.}$$

Remarque Si f est définie sur un intervalle $[a; b]$ fermé, alors les bornes de l'intervalle sont des points critiques sur lesquel la fonction peut prendre un maximum ou un minimum local.

Exemple 3 Déterminer les points critiques et les maximums et minimums locaux de $f(x) = 3 - x^2$.

Figure 2 – Illustration de la notion de maximum et minimum local sur un fermé



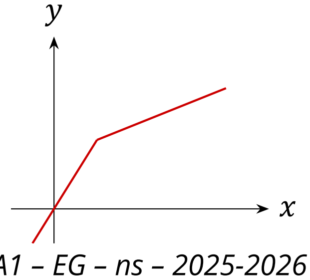
Exemple 4 Déterminer les points critiques et les maximums et minimums locaux de $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$.

Remarque Un point critique n'est pas nécessairement un maximum ou un minimum local !

Exemple 5 Déterminer les points critiques et les maximums et minimums locaux de $f(x) = x^3$.

Exemple 6 Déterminer les points critiques et les maximums et minimums locaux de

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 1 \\ \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}, & x \geq 1 \end{cases}.$$



Méthode

Test de la dérivée première

Soit c un point critique de f et f continue en c (pas nécessairement dérivable en c). S'il existe un voisinage $]c-a;c+a[$ de c tel que

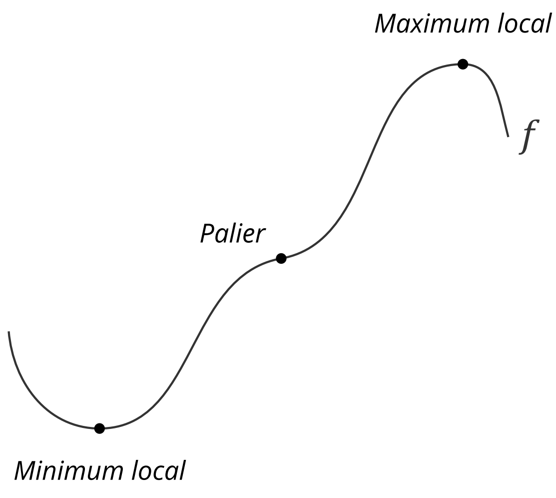
- $f'(x) < 0$ pour tout $x \in]c-a;c[$ et $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]c;c+a[$ alors c est un minimum local.
- $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]c-a;c[$ et $f'(x) < 0$ pour tout $x \in]c;c+a[$ alors c est un maximum local.

Exemple 7 Déterminer à l'aide du test de la dérivée permière si les points critiques de la fonction $f(x) = (x-2)(x-1)^4$ sont des maximums ou minimums locaux.

Définition

Extrema absolus

- Un point $(c;f(c))$ est un maximum absolu de la fonction f ssi $f(c) \geq f(x)$ pour tout $x \in \mathrm{D}_f$.
- Un point $(c;f(c))$ est un minimum absolu de la fonction f ssi $f(c) \leq f(x)$ pour tout $x \in \mathrm{D}_f$.



Méthode

Étude d'une fonction

i) Déterminer le domaine de définition et les intersections avec les axes.

ii) Limites aux bords et équations des asymptotes.

iii) Tableau de monotonie et nature des points critiques

- Déterminer le domaine sur lequel la fonction est dérivable.
- Déterminer la dérivée.
- Déterminer les points critiques, c'est-à-dire tous les points du domaine de définition tel que $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ n'existe pas. **Ne pas oublier les bornes de l'intervalle si la fonction est définie sur un intervalle fermé**.
- Tester les points critiques (hors bornes) avec le test de la dérivée première ;
- Tester toutes les bornes incluses dans l'intervalle en évaluant la fonction et/ou en regardant le comportement de f' dans un voisinage.
- Déterminer si les points critiques sont des extrema locaux ou absolus.

iv) Représentation graphique cohérente avec les points précédents.

Exercice 1

hhksj

Étudier les fonctions suivantes :

a) $f(x) = 2\cos(x) - \cos(2x)$

b) $f(x) = \sin^2(x) - \sin(x)$

c) $f(x) = 2\cos^3(x) - 3$

d) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(2x)}$

e) $f(x) = \dfrac{\tan(2x)}{\tan^2(x)}$

f) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1 - 2\sin^2(x)}}$

1.4 Optimisation

Vous avez déjà rencontré des problèmes d'optimisation dans votre cursus. Ces questions représentent des applications concrètes des outils d'analyse que nous avons étudiés dans les sections précédentes. Il s'agit de déterminer la valeur minimale ou maximale d'une quantité variable dans une situation donnée. La partie la plus complexe dans la résolution d'un problème d'optimisation consiste à exprimer la quantité à optimiser comme une fonction dérivable à une variable. Une fois que cela est fait, il suffit d'étudier les points critiques de la fonction pour déterminer les extrema recherchés.

Méthode

Résoudre un problème d'optimisation

i) Lire attentivement l'énoncé du problème.
ii) Réaliser un schéma si nécessaire.
iii) Assigner des variables aux quantités apparaissants dans le problème.
iv) Écrire les relations entre les différentes quantités qui interviennent dans le problème. S'il y a n variables, trouver au moins $n-1$ équations liant les quantités entre-elles.
v) Exprimer la quantité à optimiser par une fonction à une variable (il se peut qu'il faille substituer plusieurs équations dans une seule afin d'obtenir une seule expression avec une seule variable).
vi) Étudier les points critiques (utiliser la méthode à la page 10).
vii) Interpréter la réponse trouvée et conclure.

Exemple 8 Quelles sont les dimensions du rectangle d'aire maximale qui puisse être inscrit dans un cercle de rayon r ?

a) Réaliser un schéma.
b) Déterminer la fonction à optimiser.
c) Écrire les formules qui lient les variables.
d) Déterminer une fonction à une variable à optimiser.
e) Étudier les points critiques.
f) Conclure.

1.5 Exercices

1.5.1 Le théorème des accroissement finis

Exercice 2 Déterminer si la fonction $f(x) = (1 - x^2)^{1/3} + x^2$ satisfait les conditions du théorème de Rolle sur l'intervalle $[-1; 1]$. Si oui, trouver les valeurs de c prédites par le théorème.

Exercice 3
5hev4

Trouver la ou les valeurs prévues par le théorème des accroissements finis pour la fonction $f(x) = x^2 - x$ sur l'intervalle $[-3; 4]$

Exercice 4
hju27

Trouver la ou les valeurs prévues par le théorème des accroissements finis pour la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{x-7}$$

sur l'intervalle [7,1; 7,2].

Exercice 5 zar8b

Soit la fonction $f(x) = mx^2 + kx + q$ ($m \neq 0$). On considère f dans l'intervalle $[0; 3]$.

a) Poser $m = -1$, $k = 2$ et $q = 3$ et calculer le point $c \in]0; 3[$ annoncé par le théorème des accroissements finis.

b) Représenter graphiquement la situation du point c.

c) Considérer f dans l'intervalle $[1; 5]$ et calculer le point $c \in]1; 5[$ annoncé par le théorème des accroissements finis.

d) Considérer f dans l'intervalle $[2; 8]$ et calculer le point $c \in]2; 8[$ annoncé par le théorème des accroissements finis.

e) Considérer f dans l'intervalle $[a; b]$. Formuler et démontrer une conjecture sur le point $c \in]a; b[$ annoncé par le théorème des accroissements finis.

Exercice 6 x5ny2

La vitesse maximale autorisée sur une route nationale est de 110 km/h. L'indicateur de vitesse d'une voiture marque 80 km/h au moment où elle passe à hauteur d'une borne kilométrique le long d'une route. Quatre minutes plus tard, elle est 8 km plus loin et son compteur marque 88 km/h. Montrer qu'à un moment au moins, entre ces deux repères, la voiture a dépassé la vitesse de 118 km/h.

Exercice 7

Après avoir vérifié que la fonction satisfait les conditions du théorème des accroissements finis sur l'intervalle indiqué, trouver les valeurs prédite pour c par le théorème sur l'intervalle $[a; b]$ donné.

a) $f(x) = x^2 \quad [1; 2]$

b) $f(x) = x^2 \quad [1; 3]$

c) $f(x) = x^3 \quad [0; 1]$

d) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x} \quad [1; 4]$

e) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1} \quad [1; 3]$

f) $f(x) = x^{2/3} \quad [1; 8]$

Exercice 8

Soit $f(x) = x^{-1}$, $a = -1$, $b = 1$. Vérifier qu'il n'existe aucun nombre c tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Expliquer en quoi cela ne contredit pas le théorème des accroissements finis.

Exercice 9

a) Tracer le graphe de la fonction $f(x) = |2x - 1| - 3$ et calculer sa dérivée.

b) Vérifier que $f(-1) = 0 = f(2)$ et pourtant $f'(x)$ n'est jamais nul.

c) Expliquer pourquoi cela ne contredit pas le théorème de Rolle.

Exercice 10 Tracer le graphe de

$$f(x) = \begin{cases} 2 + x^3, & x \leq 1 \\ 3x, & x > 1 \end{cases}$$

et calculer sa dérivée. Déterminer si f satisfait les conditions du théorème des accroissemtns finis sur l'intervalle [1,2] et, si oui, trouver toutes les valeurs de c prédites par le théorème.

Exercice 11 Soit P un polynôme non constant

$$\mathrm{P}(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Montrer que, entre deux racines consécutives de l'équation $\mathrm{P}(x) = 0$, il existe au moins une racine de l'équation $\mathrm{P}'(x) = 0$.

Exercice 12 Montrer que l'équation $6x^4 - 7x + 1 = 0$ n'a pas plus de deux racines réelles. (Utiliser le théorème de Rolle.)

Exercice 13 Montrer que l'équation $x^3 + 9x^2 + 33x - 8 = 0$ a exactement une racine réelle.

Exercice 14 Soit f deux fois dérivable. Montrer que, si l'équation $f(x) = 0$ a n racines réelles, alors l'équation $f'(x) = 0$ a au moins $n - 1$ racines réelles et l'équation $f''(x) = 0$ a au moins $n - 2$ racines réelles.

1.5.2 Fonctions croissantes et décroissantes

Exercice 15 Vrai ou faux ? Justifier.

r9x4h

a) Il n'existe pas de fonction à la fois croissante et décroissante sur un intervalle I.

b) Si f est nulle sur un intervalle ouvert I, alors $f'(x) > 0$ sur I.

c) Si f est strictement croissante sur un intervalle ouvert I, alors $f'(x) > 0$ sur I.

d) Si f est strictement décroissante et dérivable sur un intervalle ouvert I, alors $f'(x) < 0$ sur I.

Exercice 16 Trouver les intervalles sur lesquels f est croissante et ceux sur lesquels elle est décroissante, si $f(x)$ est donnée comme suit.

a) $x^3 - 3x + 2$

b) $x^3 - 3x^2 + 6$

c) $3x + \dfrac{1}{x}$

d) $x^3(1 + x)$

e) $\dfrac{x}{x^2 + 1}$

f) $(x + 1)^4$

g) $\sqrt{x - 2}$

h) $\dfrac{1}{x - 5}$

1.5.3 Maximum et minimum

Exercice 17 Trouver les points critiques et classifier les valeurs extrêmes.

a) $x^3 + 3x - 2$
b) $2x^4 - 4x^2 + 6$
c) $x + \dfrac{1}{x}$
d) $x^{-1}(1 - x)$
e) $x(x + 1)(x + 2)$
f) $(1 - x)^2(1 + x)$
g) $\dfrac{1}{x - 2}$
h) $\dfrac{1 + x}{1 - x}$
i) $\dfrac{2 - 3x}{2 + x}$
j) $\dfrac{2}{x(x + 1)}$
k) $|x^2 - 16|$

Exercice 18 En quels points la fonction f suivante admet-elle un extremum ? (Préciser sa nature)

$$f(x) = \frac{x^3 + 2}{x^2 + 1}.$$

Même question pour la fonction g suivante où a est un nombre réel quelconque :

$$g(x) = x^2(x - a^2)^2$$

Exercice 19 Soit la fonction donnée par

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x + 2}$$

Déterminer a et b de sorte que la fonction ait un extremum local au point $(-4; -10)$. (Préciser s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum).

Exercice 20 Trouver les points critiques et classifier les valeurs extrêmes.

a) $f(x) = \sqrt{x + 2}$
b) $f(x) = (x - 1)(x - 2)$
c) $f(x) = x^2 - 4x + 1,\ x \in [0; 3]$
d) $f(x) = 2x^2 + 5x - 1,\ x \in [-2; 0]$
e) $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$
f) $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$
g) $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x},\ x \in \left[\dfrac{1}{10}; 2\right]$
h) $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2},\ x \in]-1; 0[$
i) $f(x) = (x - 1)(x - 2),\ x \in [0; 2]$
j) $f(x) = (x - 1)^2(x - 2)^2,\ x \in [0; 4]$
k) $f(x) = \dfrac{1 - 3\sqrt{x}}{3 - \sqrt{x}}$
l) $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + x^2},\ x \in [-1; 2]$
m) $f(x) = (x - \sqrt{x})^2$
n) $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$

1.6 Étude de fonctions

Exercice 21 Étudiez de manière complète la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{6x}{x^2 + 1}$$

Exercice 22 Procédez à une étude complète de la fonction polynômiale de degré deux dont l'équation générale est

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad a \neq 0$$

Exercice 23 Étudiez de manière complète la fonction définie par :

$$f(x) = (x + 1)^2(2 - x)^3$$

Exercice 24 Étudiez de manière complète la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{4x^2 - 4x + 1}{4x^2 + 4x + 1}$$

Exercice 25 Étudiez de manière complète la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{(x - 1)^2}$$

1.7 Optimisation

Exercice 26 On veut construire une boîte ouverte à partir d'une feuille de carton rectangulaire de 2 dm sur 3 dm en découpant à chaque coin un carré de côté xdm, et en relevant les quatre bords.

i) Montrez que le volume de cette boîte est donné par $\mathrm{V}(x) = 4x^3 - 10x^2 + 6x$;

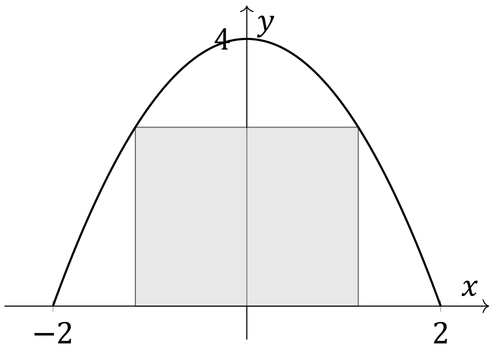
ii) Calculez la valeur de x pour que la boîte ait un volume maximal ;

iii) Calculez ce volume et montrez qu'il s'agit bien d'un maximum ;

iv) Déduisez-en qu'il y a deux valeurs de x pour lesquelles le volume est de un litre et déterminez ces valeurs.

Exercice 27 Parmi tous les rectangles ayant une même aire de valeur a, déterminez les dimensions de celui dont le périmètre est minimal.

Exercice 28 Un rectangle est inscrit entre l'axe des x et l'arc de parabole d'équation $y = 4 - x^2$ (voir l'illustration) Trouvez les dimensions du rectangle d'aire maximale.



Exercice 29 On veut imprimer une affiche à l'aide d'une feuille rectangulaire de hauteur x et de $2m^2$ d'aire. Les marges du haut et du bas seront de 21 cm et celles des côtés verticaux, de 14 cm . Les marges restent vierges, seule la surface comprise entre celles-ci étant imprimée. Déterminez la valeur de x pour laquelle l'aire de la surface à imprimer est maximale.

Exercice 30 Quelles sont les dimensions du vase de volume maximal dont la forme est un cylindre de révolution d'aire totale égal à $1m^2$?

Exercice 31 Une fenêtre a la forme d'un rectangle surmonté d'un demi-cercle. Si le périmètre de la fenêtre est de 6 m , quelles seront les dimensions de la fenêtre laissant passer un maximum de lumière ?

Exercice 32 La somme de deux nombres réels positifs x et y est 20 . Déterminez, s'ils existent, les nombres x et y appartenant à $\mathbb{R}_+$et tels que :

i) xy est maximal ; xy est minimal ;
ii) $x^2 + y^2$ est maximal ; $x^2 + y^2$ est minimal ;
iii) x^2y^3 est maximal ; x^2y^3 est minimal.

Exercice 33 En quel point du premier quadrant la parabole $y = 1 - x^2$ admet-elle une tangente formant avec les axes du repère un triangle d'aire minimale ? .... Et d'aire maximale ?

Exercice 34 Un mur de $2m$ de haut, situé à $1m$ d'une façade, interdit l'accès à celle-ci. Calculez la longueur de l'échelle la plus courte qui s'appuie contre la façade et dont le pied est sur le sol, devant le mur.

Exercice 35 Une cuve métallique, ouverte et ayant la forme d'un parallélépipède rectangle de base carrée, doit avoir une capacité de 100 litres. Quelles doivent être les dimensions de cette cuve pour que la quantité de métal utilisé pour la construire soit minimale ?

Sources du cours

Les sources suivantes ont majoritairement été utilisées pour construire ce cours. Les exercices et activités proviennent également principalement de ces ouvrages. D'autres exercices ont été adaptés ou sont inspirés de ressources partagées par des collègues ou trouvées sur internet. Leur contribution mineure les exclut de cette liste.

[1] Saturnino L. Salas et Einar Hille. **Calculus : One and Several Variables**. 3e éd. Wiley, 1984.

[2] Commission Romande de Mathématiques. **Analyse**. T. Monographies de la Commission Romande de Mathématique 30. CRM Éditions, 2024.

[3] Commission Romande de Mathématiques. **Fundamentum de mathématique Analyse**. T. Monographies de la Commission Romande de Mathématique 25. CRM Éditions, 2018.

[4] Association Sesamath Suisse Romande. **Sésamath – Troisième année de maturité gymnasiale**. 2022. url : `https://sesamath.ch/`.