Exercice 1 Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\sin(x) + \cos(x)}{1 + \cos(x)}$. Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, f' s'annule au moins une fois sur l'intervalle $]a,a + 2\pi[$.

Corrigé 1

Correction générée par IA

On a $f(x) = \dfrac{\sin(x) + \cos(x)}{1 + \cos(x)}$.

Périodicité : Puisque sin et cos sont périodiques de période 2π, il suffit de montrer que f' s'annule au moins une fois sur $]a, a + 2\pi[$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Valeurs particulières : Calculons f en deux points espacés de 2π :

- $f(0) = \dfrac{\sin(0) + \cos(0)}{1 + \cos(0)} = \dfrac{0 + 1}{1 + 1} = \dfrac{1}{2}$
- $f(2\pi) = \dfrac{\sin(2\pi) + \cos(2\pi)}{1 + \cos(2\pi)} = \dfrac{0 + 1}{1 + 1} = \dfrac{1}{2}$

On a donc $f(0) = f(2\pi)$.

Application du théorème de Rolle : La fonction f est continue et dérivable sur $[0, 2\pi]$ (le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle car $\cos(x) \neq -1$ pour $x \in]0, 2\pi[$), et $f(0) = f(2\pi)$.

D'après le théorème de Rolle, il existe au moins un point $c \in]0, 2\pi[$ tel que $f'(c) = 0$.

Généralisation : Pour tout $a \in \mathbb{R}$, en considérant l'intervalle $[a, a + 2\pi]$, on a de même $f(a) = f(a + 2\pi)$ par périodicité. Le théorème de Rolle s'applique donc sur $[a, a + 2\pi]$, ce qui montre que f' s'annule au moins une fois sur $]a, a + 2\pi[$.