Chapitre 2 :
Calcul différentiel, partie 1 – Corrgigés

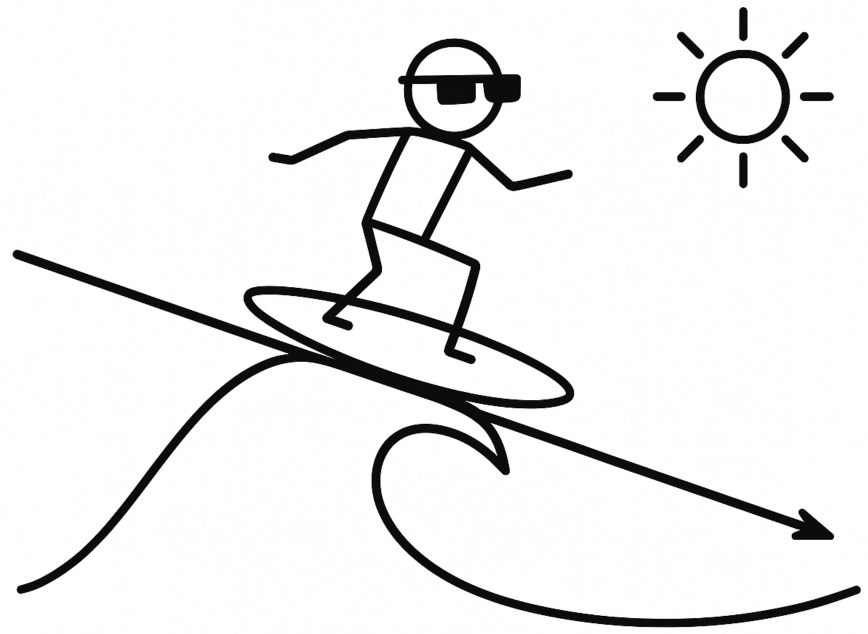


Table des matières

Calcul différentiel SECTION 1

La dérivée

1.1 Introduction : La tangente à une courbe en un point

Exercice 1
j2esz

Calculer le taux de variation de la fonction (la pente donnée de la droite entre deux points du graphe de la fonction) f donnée entre les deux points donnés et interpréter graphiquement :

a) $f(x) = x^2$, $\mathrm{A} = (1; f(1))$, $\mathrm{P} = (2; f(2))$.
b) $f(x) = x^2$, $\mathrm{A} = (1; f(1))$, $\mathrm{P} = (1{,}5; f(1{,}5))$.
c) $f(x) = x^2$, $\mathrm{A} = (-2; f(-2))$, $\mathrm{P} = (2; f(2))$.
d) $f(x) = x^3$, $\mathrm{A} = (1; f(1))$, $\mathrm{P} = (2; f(2))$.

Corrigé 1
j2esz

On calcule le rapport $\dfrac{\mathrm{A}_y - \mathrm{P}_y}{\mathrm{A}_x - \mathrm{P}_x}$.

a) $f(x) = x^2$, $\mathrm{A} = (1; 1)$, $\mathrm{P} = (2; 4)$ $\frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{4-1}{1} = 3$
b) $f(x) = x^2$, $\mathrm{A} = (1; 1)$, $\mathrm{P} = (1{,}5; 2{,}25)$ $\frac{f(1{,}5)-f(1)}{1{,}5-1} = \frac{2{,}25-1}{0{,}5} = 2{,}5$
c) $f(x) = x^2$, $\mathrm{A} = (-2; 4)$, $\mathrm{P} = (2; 4)$ $\frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)} = \frac{4-4}{4} = 0$
d) $f(x) = x^3$, $\mathrm{A} = (1; 1)$, $\mathrm{P} = (2; 8)$ $\frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{8-1}{1} = 7$

Exercice 2
uhfwb

Un mobile se déplace sur un axe selon la loi $p(t) = 4t - \dfrac{t^2}{2}$, où $p(t)$ représente la position du mobile au temps t.

a) Calculer la vitesse moyenne du mobile entre les instants :

i) $t_1 = 2$ et $t_2 = 3$.
ii) $t_1 = 2$ et $t_2 = t$.
iii) $t_1 = a$ et $t_2 = t$.
iv) $t_1 = 2$ et $t_2 = 2 + h$.
v) $t_1 = t$ et $t_2 = t + h$.

b) Calculer la vitesse instantanée du mobile :

i) à l'instant $t = 2$.
ii) à l'instant t.

Corrigé 2
uhfwb

a) Calculer la vitesse moyenne du mobile entre les instants :

i) $v_m = \dfrac{p(3) - p(2)}{3 - 2} = \dfrac{3}{2}$.

ii) $v_m = \dfrac{p(t) - p(2)}{t - 2} = \dfrac{4t - \frac{t^2}{2} - 6}{t - 2}$.

iii) $v_m = \dfrac{p(t) - p(a)}{t - a} = \dfrac{4t - \frac{t^2}{2} - (4a - \frac{a^2}{2})}{t - a}$.

iv) $v_m = \dfrac{p(2 + h) - p(2)}{h} = 2 - \dfrac{h}{2}$.

v) $v_m = \dfrac{p(t + h) - p(t)}{h} = 4 - t - \dfrac{h}{2}$.

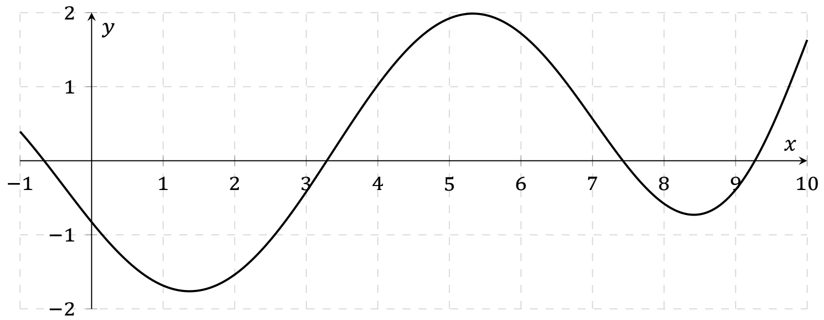
b) Calculer la vitesse instantanée du mobile : Correspond à la limite $h \to 0$ de $4 - t - \dfrac{h}{2}$, donc $v(t) = 4 - t$.

i) $v(2) = 2$.

ii) $v(t) = 4 - t$.

Exercice 3
ivj7s

Une fonction f admet le graphe suivant pour $x \in [-1; 11]$.



a) Pour chaque $a \in \{0; 1{,}5; 3; 4; 6; 8\}$, tracer la tangente au graphe de f en son point d'abscisse a puis estimer $f(a)$ et $f'(a)$.

b) Estimer graphiquement les solutions des équations suivantes.

i) $f(x) = 0$

ii) $f'(x) = 0$

iii) $f(x) = 1$

iv) $f'(x) = 1$

v) $f(x) = -1$

vi) $f'(x) = -1$

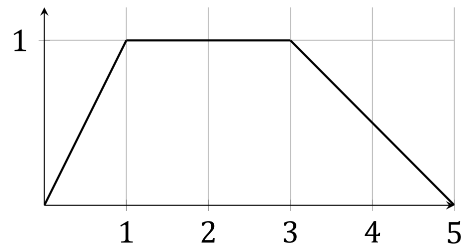
Corrigé 3
ivj7s

Corrigé en classe.

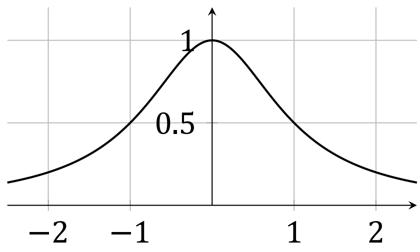
Exercice 4 On donne le graphe d'une fonction f. Esquisser le graphe de f'.

sgsgp

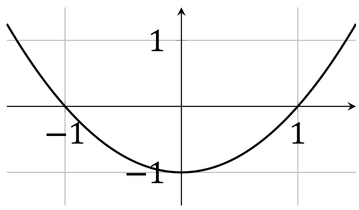
a)



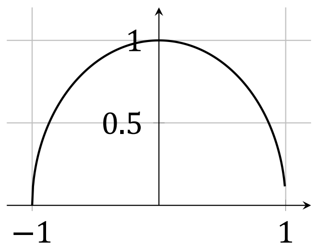
b)



c)



d)



Corrigé 4 Corrigé en classe.

sgsgp

1.2 Définitions et exemples

Exercice 5 Expliquer intuitivement pourquoi si une fonction est constante sur un intervalle, alors sa dérivée est nulle sur tout l'intervalle.

h2mu9

Corrigé 5 La dérivée en un point correspond à la pente de la tangente en ce point. Si la droite est constante, la pente en tout point est nulle.

h2mu9

Exercice 6 Calculer la dérivée d'une fonction constante $f(x) = c$ pour $c \in \mathbb{R}$.

wdzr4

Corrigé 6 Par la définition

wdzr4

$$\lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

Exercice 7 Calculer la dérivée de la fonction identité $f(x) = x$.

9ghy8

Corrigé 7 On a

9ghy8

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)-x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$$

Exercice 8

g75hx **Entraînement individuel**

Calculer, à partir de la définition de la fonction dérivée, la dérivée des fonctions réelles ci-dessous ; représenter f et f' dans un même repère et interpréter graphiquement le résultat (sauf pour les points d) et f)) :

a) $f(x) = 7$.

b) $f(x) = x$.

c) $f(x) = 3x$.

d) $f(x) = x^2$.

e) $f(x) = ax^2 + bx + c,\ a,b,c \in \mathbb{R}$.

f) $f(x) = x^3$.

g) $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Corrigé 8

g75hx

a) $f(x) = 7.\ f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{7-7}{h} = 0.$

b) $f(x) = x.\ f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)-x}{h} = 1.$

c) $f(x) = 3x.\ f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3(x+h)-3x}{h} = 3.$

d) $f(x) = x^2 \quad f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(2x+h) = 2x.$

e) $f(x) = ax^2 + bx + c, a,b,c \in \mathbb{R}.$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{a(x+h)^2 + b(x+h) + c - \left(ax^2+bx+c\right)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{a(x^2+2xh+h^2) + bx + bh + c - ax^2 - bx - c}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2axh + ah^2 + bh}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left(2ax + ah + b\right)\\
&= 2ax + b.
\end{aligned}$$

f) $f(x) = x^3.\ f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^3-x^3}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2) = 3x^2.$

g) $f(x) = \dfrac{1}{x}, x \neq 0.$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}.$$

Exercice 9

v911h

On considère la fonction $f(x) = \sqrt{x}$. A l'aide de la définition de la dérivée :

a) montrer que $f'(0)$ n'existe pas ;

b) calculer $f'(a)$, pour a, un réel strictement positif ($a > 0$).

Corrigé 9

v911h

a) Par définition de la fonction racine, la limite à gauche en 0 n'est pas calculable, ainsi la dérivée en 0 n'existe pas.

b) $f(x) = \sqrt{x}, x > 0.$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} \cdot \frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

1.3 Le nombre dérivé

Exercice 10
rqd6n

À partir de la définition de la dérivée de f en a, calculer les dérivées $f'(a)$ et interpréter graphiquement :

a) $f(x) = x^2$ avec $a = 1$ puis $a = 3$. b) $f(x) = x^3$ avec $a = 2$.
c) $f(x) = x$ avec $a = 2$ puis $a = 5$. d) $f(x) = 3$ avec $a = 2$ puis $a = 7$.

Corrigé 10
rqd6n

a) Pour $f(x) = x^2$:
$a = 1 : f'(1) = \lim_{h\to 0} \dfrac{(1+h)^2 - 1}{h} = \lim_{h\to 0}(2+h) = 2$. Pente de la tangente vaut 2 en $(1; 1)$.
$a = 3 : f'(3) = \lim_{h\to 0} \dfrac{(3+h)^2 - 9}{h} = \lim_{h\to 0}(6+h) = 6$. Pente de la tangente vaut 6 en $(3; 9)$.

b) Pour $f(x) = x^3$ avec $a = 2$:

$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^3 - 8}{h} = \lim_{h\to 0}(12 + 6h + h^2) = 12$$

Pente de la tangente vaut 12 en $(2; 8)$.

c) Pour $f(x) = x : f'(a) = 1$ pour tout a. Tangente a une pente constante de 1.

d) Pour $f(x) = 3 : f'(a) = 0$ pour tout a. Tangente est horizontale.

Exercice 11
pajju **Entraînement individuel**

En utilisant la définition de la dérivée en un point, calculer les nombres suivants :

a) $f'(2)$, si $f(x) = -3x^2 + 1$; b) $f'(1)$, si $f(x) = \sqrt{3x+1}$;
c) $f'(0)$, si $f(x) = \frac{x-5}{2x+1}$; d) $f'(-2)$, si $f(x) = x^3 - 2x + 3$;
e) $f'(0)$, si $f(x) = \sin(x)$;

Corrigé 11
pajju

a) -12 b) $\dfrac{3}{4}$ c) 11 d) 10 e) 1

Exercice 12
mmztw

Déterminer la pente de la tangente à la parabole d'équation $y = x^2$ au point $(-1; 1)$.

Corrigé 12
mmztw

$$\begin{aligned} f'(-1) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(-1+h)^2 - 1}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1 - 2h + h^2 - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2h + h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(-2+h) = -2 \end{aligned}$$

Exercice 13
hb4kv

Déterminer le nombre dérivé de la fonction réelle $f(t) = t^2 - 7t + 3$ en $t = -1$.

Corrigé 13
hb4kv

$f'(-1) = -9$.

1.4 Relation avec la continuité

Exercice 14
3mumb

Soit la fonction f définie par morceaux ci-dessous.

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1, & \text{si } x < 2 \\ 3, & \text{si } x = 2 \\ -x^2+3x+1, & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

a) En utilisant la définition de la dérivée, déterminer si f est dérivable en $a = 2$.

b) Même question pour g pour $a = -1$:

$$g(x) = \begin{cases} 3x^2+1, & \text{si } x < -1 \\ 4, & \text{si } x = -1 \\ x^2-4x-1, & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

Corrigé 14
3mumb

a) Pour que f soit dérivable en $a = 2$, il faut que les dérivées à gauche et à droite existent et soient égales.
Calculons la dérivée à gauche :

$$f'_g(2) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(2(2+h)-1)-3}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{4+2h-1-3}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{2h}{h} = 2$$

Calculons la dérivée à droite :

$$f'_d(2) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(-(2+h)^2+3(2+h)+1)-3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{-(4+4h+h^2)+6+3h+1-3}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-4-4h-h^2+6+3h+1-3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{-h^2-h}{h} = \lim_{h\to 0^+} (-h-1) = -1$$

Puisque $f'_g(2) = 2 \neq -1 = f'_d(2)$, la fonction f n'est pas dérivable en $a = 2$.

b) Pour g en $a = -1$:
Dérivée à gauche :

$$g'_g(-1) = \lim_{h\to 0^-} \frac{g(-1+h)-g(-1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(3(-1+h)^2+1)-4}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{3(1-2h+h^2)+1-4}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{3-6h+3h^2+1-4}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{3h^2-6h}{h} = \lim_{h\to 0^-} (3h-6) = -6$$

Dérivée à droite :

$$g'_d(-1) = \lim_{h\to 0^+} \frac{g(-1+h)-g(-1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{((-1+h)^2-4(-1+h)-1)-4}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{(1-2h+h^2)+4-4h-1-4}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^2-6h}{h} = \lim_{h\to 0^+} (h-6) = -6$$

Puisque $g'_g(-1) = -6 = g'_d(-1)$, la fonction g est dérivable en $a = -1$ et $g'(-1) = -6$.

Exercice 15
sjs2h

Que penser de la dérivée de la fonction réelle $f(x) = |x^2-1|$ en $x = 0$, $x = 1$ et $x = 2$?

Corrigé 15
sjs2h

Elle existe et vaut $2x$ en $x = 0$ et $x = 2$. Toutefois, elle n'existe pas en $x = 1$, car les limites à gauche et à droite sont distinctes. Ainsi, $f'(0) = 0$ et $f'(2) = 4$, mais la fonction n'est pas dérivable en $x = 1$.

Exercice 16
atf6t

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - 1, \text{ si } x \leq 1 \\ 3x - 1, \text{ si } x > 1 \end{cases}$

a) Lorsque a vaut 1, la fonction f est-elle continue en 1 ? (Illustrer graphiquement.)

b) Pour quelles valeurs du paramètre a cette fonction sera-t-elle continue en 1 ? (Idem.)

c) Pour la valeur de a trouvée en b), la fonction f est-elle dérivable en 1 ?

Corrigé 16
atf6t

a) Non ;

b) 2 ;

c) limite à gauche vaut 4 et limite à droite vaut 3.

Exercice 17
6ekwp

a) Donner un exemple d'une fonction continue en $x = 2$, mais pas dérivable en $x = 2$. Justifier.

b) Démontrer qu'une fonction f définie dans un voisinage de $x \in \mathbb{R}$ qui est dérivable en x est continue en x.

c) Donner un critère visuel sur le graphe d'une fonction continue pour déterminer si elle est dérivable.

Corrigé 17
6ekwp

a) Par exemple, $|x - 2|$ (pourquoi ?)

b) Démonstration faite en classe.

c) Par exemple, si la représentation graphique contient un point anguleux en $(x; f(x))$, la fonction est continue en x, mais pas dérivable.

1.5 Règles de dérivation

Exercice 18
5mcny

Dériver les fonctions en x suivantes, à l'aide des propriétés de la dérivée (a, b, c, d et π sont des nombres réels) :

a) $f(x) = 2x - 3$

b) $f(x) = \pi x^2$

c) $f(x) = 4x^2 - 5x + 6$

d) $f(x) = ax^2 + bx + c$

e) $f(x) = (2x - 3)^2$

f) $f(x) = 2x - \frac{1}{x^2 - 1}$

g) $f(x) = \frac{x+5}{x-1}$

h) $f(x) = \frac{a}{x^2}$

i) $f(x) = \frac{1}{x^4}$

j) $f(x) = (2x - 1)(3 - 4x)$

k) $f(x) = \frac{10}{x^3 - 4x^2 - 2}$

l) $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$

Corrigé 18
5mcny

a) $f'(x) = 2$

b) $f'(x) = 2\pi x$

c) $f'(x) = 8x - 5$

d) $f'(x) = 2ax + b$

e) $f'(x) = (2x-3)' \cdot 2(2x-3) = 2 \cdot 2(2x-3) = 8x - 12$

f) $f'(x) = 2 + \dfrac{(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} = 2 + \dfrac{2x}{(x^2-1)^2}$

g) $f'(x) = \dfrac{1 \cdot (x-1) - (x+5) \cdot 1}{(x-1)^2} = \dfrac{x-1-x-5}{(x-1)^2} = \dfrac{-6}{(x-1)^2}$

h) $f'(x) = -\dfrac{2a}{x^3}$

i) $f'(x) = -\dfrac{4}{x^5}$

j) $f'(x) = 2(3-4x) + (2x-1)(-4) = 6 - 8x - 8x + 4 = 10 - 16x$

k) $f'(x) = -\dfrac{10(3x^2-8x)}{(x^3-4x^2-2)^2}$

l) $f'(x) = \dfrac{a(cx+d)-(ax+b)c}{(cx+d)^2} = \dfrac{acx+ad-acx-bc}{(cx+d)^2} = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

Exercice 19
5fsdv

Montrer que si f est dérivable en x, alors $\big(f(x)^2\big)' = 2f(x)f'(x)$.

Corrigé 19
5fsdv

Puisque f est dérivable f^2 l'est également (car un produit de fonction dérivable l'est). On applique la formule de dérivation d'un produit.

$$\begin{aligned}(f(x)^2)' &= (f(x) \cdot f(x))' \\ &= f'(x)f(x) + f(x)f'(x) \\ &= 2f'(x)f(x).\end{aligned}$$

Exercice 20
raguk

On considère le théorème « Dérivée de la différence de deux fonctions »

a) L'énoncer en identifiant clairement hypothèses et conclusions.

b) Illustrer son utilité par des exemples.

c) On donne ci-dessous une démonstration :

Démonstration :

$$\begin{aligned}(f-g)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(f-g)(x+h)-(f-g)(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h)-g(x+h))-(f(x)-g(x))}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)-g(x+h)+g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)-(g(x+h)-g(x))}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\ &= f'(x) - g'(x)\end{aligned}$$

Justifier chaque étape de la démonstration.

Corrigé 20
raguk

Discuté en cours

Exercice 21 uc9rv

Montrer que si f, g, h sont dérivable, alors

$$(fgh)'(x) = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

Corrigé 21 uc9rv

Puisque f, g, h sont dérivable, gh est dérivable et donc fgh l'est également.
En appliquant la formule du produit à f et au produit gh, on obtient

$$\begin{aligned}(fgh)'(x) &= f'(x)(gh)(x) + f(x)(gh)'(x)\\ &= f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)\end{aligned}$$

Exercice 22 auu1q

Dériver la fonction h, donnée par $h(x) = \left(x^2+1\right)^3$, de deux façons différentes :

a) après avoir d'abord distribué et réduit ;

b) directement à l'aide de la formule pour la dérivée d'une fonction composée.

Corrigé 22 auu1q

Première méthode : après distribution et réduction
Développons d'abord $(x^2+1)^3$:

$$\begin{aligned}(x^2+1)^3 &= (x^2+1)(x^2+1)^2\\ &= (x^2+1)(x^4+2x^2+1)\\ &= x^6+2x^4+x^2+x^4+2x^2+1\\ &= x^6+3x^4+3x^2+1\end{aligned}$$

Donc $h(x) = x^6+3x^4+3x^2+1$.
En dérivant terme à terme :

$$h'(x) = 6x^5+12x^3+6x$$

Deuxième méthode : avec la formule de la fonction composée
Posons $u(x) = x^2+1$ et $v(u) = u^3$, de sorte que $h(x) = v(u(x))$.
On a :

- $u'(x) = 2x$
- $v'(u) = 3u^2$

D'après la formule de dérivation d'une fonction composée :

$$h'(x) = v'(u(x)) \cdot u'(x) = 3(x^2+1)^2 \cdot 2x = 6x(x^2+1)^2$$

On peut vérifier que les deux expressions sont équivalentes en développant la deuxième forme :

$$6x(x^2+1)^2 = 6x(x^4+2x^2+1) = 6x^5+12x^3+6x$$

Exercice 23 972y4

Soient f et g des fonctions dérivables en x et $g(x) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en x et $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$.
Indication : $f/g = f \cdot 1/g$.

Corrigé 23
972y4

Nous devons démontrer que $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$.

L'indication nous suggère d'écrire $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$.

Par la formule de dérivation de l'inverse, on a $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$.

Puisque $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$, en appliquant la règle du produit :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x) \\
&= f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \left(\frac{1}{g}\right)'(x) \\
&= \frac{f'(x)}{g(x)} + f(x) \cdot \left(-\frac{g'(x)}{g(x)^2}\right) \\
&= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{g(x)^2} \\
&= \frac{f'(x)g(x)}{g(x)^2} - \frac{f(x)g'(x)}{g(x)^2} \\
&= \boxed{\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}}
\end{aligned}$$

Exercice 24
bgaa8 **Entraînement individuel**

Utiliser les formules de dérivation pour déterminer (donner des réponses sans exposant négatif ou fractionnaire) :

a) $\left(\frac{4}{x}\right)'$ b) $\left(\frac{-18}{x}\right)'$ c) $\left(\frac{1}{x^2}\right)'$

d) $\left(\frac{1}{3x^3}\right)'$ e) $\left(\frac{24}{x^2}\right)'$ f) $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'$

g) $\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)'$ h) $\left(x^2 - \frac{1}{2x}\right)'$ i) $\left(\frac{x^2}{x^3+1}\right)'$

j) $\left(\frac{1+2u^3}{2u}\right)'$ k) $((2x+3)(3x-7))'$ l) $\left(x^2(1+\sqrt{x})\right)'$

m) $((x^3-x)(x^2-9))'$ n) $\left(\frac{x^2+1}{4x}\right)'$

Corrigé 24
bgaa8

a) $-\dfrac{4}{x^2}$

b) $\dfrac{18}{x^2}$

c) $-\dfrac{2}{x^3}$

d) $-\dfrac{1}{x^4}$

e) $-\dfrac{48}{x^3}$

f) $-\dfrac{1}{2x^{\frac{3}{2}}} = -\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$

g) $-\dfrac{3}{2x^{\frac{5}{2}}} = -\dfrac{3}{2x^2\sqrt{x}}$

h) $2x + \dfrac{1}{2x^2}$

i) $\dfrac{2x(x^3+1) - x^2 \cdot 3x^2}{(x^3+1)^2} = \dfrac{2x^4 + 2x - 3x^4}{(x^3+1)^2} = \dfrac{-x^4 + 2x}{(x^3+1)^2}$

j) $\dfrac{6u^2 \cdot 2u - (1+2u^3) \cdot 2}{4u^2} = \dfrac{12u^3 - 2 - 4u^3}{4u^2} = \dfrac{8u^3 - 2}{4u^2} = \dfrac{4u^3 - 1}{2u^2}$

k) $(2)(3x-7) + (2x+3)(3) = 6x - 14 + 6x + 9 = 12x - 5$

l) $2x(1+\sqrt{x}) + x^2 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 2x + 2x\sqrt{x} + \dfrac{x^2}{2\sqrt{x}} = 2x + 2x\sqrt{x} + \dfrac{x\sqrt{x}}{2}$

m) $(3x^2-1)(x^2-9) + (x^3-x)(2x) = 3x^4 - 27x^2 - x^2 + 9 + 2x^4 - 2x^2 = 5x^4 - 30x^2 + 9$

n) $\dfrac{2x \cdot 4x - (x^2+1) \cdot 4}{16x^2} = \dfrac{8x^2 - 4x^2 - 4}{16x^2} = \dfrac{4x^2 - 4}{16x^2} = \dfrac{x^2 - 1}{4x^2}$

Exercice 25
4pfpm

Utiliser les formules de dérivation pour déterminer les dérivées suivantes en justifiant toutes les étapes, et en donnant des réponses sans exposant négatif ou fractionnaire :

a) $(x^2 - 3)'$ b) $\left(\dfrac{2}{x^5}\right)'$ c) $\left(\sqrt{2x^3 - 3}\right)'$ d) $\left(\sqrt[3]{x^3 + 1}\right)'$

Corrigé 25
4pfpm

a) $(x^2-3)'$ Utilisons la formule $(u+v)'=u'+v'$ et $(x^n)'=nx^{n-1}$:

$$\begin{aligned}(x^2-3)' &= (x^2)'-(3)'\\ &= 2x^{2-1}-0\\ &= \boxed{2x}\end{aligned}$$

b) $\left(\dfrac{2}{x^5}\right)'$ Réécrivons d'abord avec un exposant négatif : $\dfrac{2}{x^5}=2x^{-5}$.
Utilisons les formules $(cu)'=cu'$ et $(x^n)'=nx^{n-1}$:

$$\begin{aligned}\left(\frac{2}{x^5}\right)' &= (2x^{-5})'\\ &= 2\cdot(-5)x^{-5-1}\\ &= -10x^{-6}\end{aligned}$$

Sans exposant négatif :

$$\boxed{-\frac{10}{x^6}}$$

c) $\left(\sqrt{2x^3-3}\right)'$ Réécrivons avec un exposant fractionnaire : $\sqrt{2x^3-3}=(2x^3-3)^{1/2}$.
Utilisons la formule de dérivation composée $(u^n)'=nu^{n-1}\cdot u'$:

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{2x^3-3}\right)' &= \left[(2x^3-3)^{1/2}\right]'\\ &= \frac{1}{2}(2x^3-3)^{1/2-1}\cdot(2x^3-3)'\\ &= \frac{1}{2}(2x^3-3)^{-1/2}\cdot 6x^2\\ &= \frac{6x^2}{2(2x^3-3)^{1/2}}\\ &= \frac{3x^2}{(2x^3-3)^{1/2}}\end{aligned}$$

Sans exposant fractionnaire :

$$\boxed{\frac{3x^2}{\sqrt{2x^3-3}}}$$

d) $\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)'$ Réécrivons avec un exposant fractionnaire : $\sqrt[3]{x^3+1}=(x^3+1)^{1/3}$.
Utilisons la formule de dérivation composée :

$$\begin{aligned}\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)' &= \left[(x^3+1)^{1/3}\right]'\\ &= \frac{1}{3}(x^3+1)^{1/3-1}\cdot(x^3+1)'\\ &= \frac{1}{3}(x^3+1)^{-2/3}\cdot 3x^2\\ &= \frac{3x^2}{3(x^3+1)^{2/3}}\\ &= \frac{x^2}{(x^3+1)^{2/3}}\end{aligned}$$

Sans exposant fractionnaire :

$$\boxed{\frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}}}$$

Ou encore, en utilisant $\sqrt[3]{a^2}=(\sqrt[3]{a})^2$:

$$\boxed{\left(\frac{x}{\sqrt[3]{x^3+1}}\right)^2}$$

Exercice 26
b6sz1

On considère les fonctions données par : $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sin(x)$ et $h(x) = 4x^3 + 3$. *Indice :* $\sin(x)' = \cos(x)$.

a) Donner l'image de x pour les fonctions suivantes :

i) $(f \circ h)(x)$;
ii) $(g \circ f)(x)$;
iii) $(g \circ h)(x)$;
iv) $(h \circ g)(x)$;
v) $(f \circ g \circ h)(x)$

b) Calculer la dérivée des fonctions $f \circ h, g \circ f, g \circ h, h \circ g$ et $f \circ g \circ h$.

Corrigé 26
b6sz1

On a $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sin(x)$ et $h(x) = 4x^3 + 3$.

a) Images des fonctions composées :

i) $(f \circ h)(x) = f(h(x)) = f(4x^3 + 3) = \sqrt{4x^3 + 3}$
ii) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sin(\sqrt{x})$
iii) $(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(4x^3 + 3) = \sin(4x^3 + 3)$
iv) $(h \circ g)(x) = h(g(x)) = h(\sin(x)) = 4\sin^3(x) + 3$
v) $(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x))) = f(g(4x^3 + 3)) = f(\sin(4x^3 + 3)) = \sqrt{\sin(4x^3 + 3)}$

b) Dérivées des fonctions composées (en utilisant la règle de dérivation en chaîne $(u \circ v)' = (u' \circ v) \cdot v'$) :

Pour $f \circ h$:

$$\begin{aligned}(f \circ h)'(x) &= f'(h(x)) \cdot h'(x)\\ &= \frac{1}{2\sqrt{4x^3 + 3}} \cdot 12x^2\\ &= \frac{12x^2}{2\sqrt{4x^3 + 3}}\\ &= \frac{6x^2}{\sqrt{4x^3 + 3}}\end{aligned}$$

Pour $g \circ f$:

$$\begin{aligned}(g \circ f)'(x) &= g'(f(x)) \cdot f'(x)\\ &= \cos(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\\ &= \frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

Pour $g \circ h$:

$$\begin{aligned}(g \circ h)'(x) &= g'(h(x)) \cdot h'(x)\\ &= \cos(4x^3 + 3) \cdot 12x^2\\ &= 12x^2 \cos(4x^3 + 3)\end{aligned}$$

Pour $h \circ g$:

$$\begin{aligned}(h \circ g)'(x) &= h'(g(x)) \cdot g'(x)\\ &= 12\sin^2(x) \cdot \cos(x)\\ &= 12\sin^2(x)\cos(x)\end{aligned}$$

Pour $f \circ g \circ h$:

$$\begin{aligned}(f \circ g \circ h)'(x) &= f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)\\ &= \frac{1}{2\sqrt{\sin(4x^3 + 3)}} \cdot \cos(4x^3 + 3) \cdot 12x^2\\ &= \frac{12x^2\cos(4x^3 + 3)}{2\sqrt{\sin(4x^3 + 3)}}\\ &= \frac{6x^2\cos(4x^3 + 3)}{\sqrt{\sin(4x^3 + 3)}}\end{aligned}$$

Exercice 27 hrm6y

Utiliser les formules de dérivation pour déterminer (donner des réponses sans exposant négatif ou fractionnaire) :

a) $(x^5 - 10x)'$ b) $(x^{100} + 100x)'$ c) $(x^2 + 3)'$

d) $(x^2 + \pi x^3)'$ e) $\left(x^3 - 3x^2 + 9\right)'$ f) $\left(\dfrac{x^5}{5} + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x}{7}\right)'$

g) $(t^3 + t^2 + t + 1)'$ h) $(x^{895})'$ i) $(x^{-45})'$

j) $(3\sqrt{x})'$ k) $(\sqrt{3}x)'$ l) $(\sqrt[3]{x})'$

m) $(\sqrt{x^3})'$ n) $(\sqrt{2x^3})'$ o) $\left(x^{\frac{4}{3}}\right)'$

p) $(x\sqrt{x})'$

Corrigé 27 hrm6y

a) $5x^4 - 10$ b) $100x^{99} + 100$ c) $2x$

d) $2x + 3\pi x^2$ e) $3x^2 - 6x$ f) $x^4 + x^2 + \dfrac{1}{7}$

g) $3t^2 + 2t + 1$ h) $895x^{894}$ i) $-45x^{-46} = -\dfrac{45}{x^{46}}$

j) $3 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{3}{2\sqrt{x}}$ k) $\sqrt{3}$ l) $x^{-\frac{2}{3}} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

m) $\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \dfrac{3\sqrt{x}}{2}$ n) $\sqrt{2} \cdot \dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \dfrac{3\sqrt{2x}}{2}$ o) $\dfrac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} = \dfrac{4}{3\sqrt[3]{x}}$

p) $\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \dfrac{3\sqrt{x}}{2}$

Exercice 28 4pmjf **Entraînement individuel**

Dériver les fonctions.

a) $f(x) = (1 - x)^{20}$ b) $f(x) = \left(x^2 + 1\right)^4$

c) $f(x) = \left(x^2 + 1\right)^3 \left(2 - x^3\right)^2$ d) $f(x) = \left(7x^2 - \frac{4}{x} + 6\right)^6$

e) $f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{2x}}$ f) $f(x) = \frac{2}{\left(x^2-x+1\right)^2}$

g) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ h) $f(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2$

i) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}$

Corrigé 28
4pmjf

(Sans le développement complet)

a) $f'(x) = 20(1-x)^{19} \cdot (-1) = -20(1-x)^{19}$

b) $f'(x) = 4(x^2+1)^3 \cdot 2x = 8x(x^2+1)^3$

c)
$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(x^2+1)^2 \cdot 2x \cdot (2-x^3)^2 + (x^2+1)^3 \cdot 2(2-x^3) \cdot (-3x^2) \\ &= 6x(x^2+1)^2(2-x^3)^2 - 6x^2(x^2+1)^3(2-x^3) \end{aligned}$$

d) $f'(x) = 6\left(7x^2 - \dfrac{4}{x} + 6\right)^5 \cdot \left(14x + \dfrac{4}{x^2}\right)$

e)
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(1+\sqrt{2x}) - (1+\sqrt{x}) \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2x}}}{(1+\sqrt{2x})^2} \\ &= \frac{\dfrac{1+\sqrt{2x}}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{2x}}}{(1+\sqrt{2x})^2} \end{aligned}$$

f) $f'(x) = -\dfrac{2 \cdot 2(x^2-x+1) \cdot (2x-1)}{(x^2-x+1)^4} = -\dfrac{4(2x-1)}{(x^2-x+1)^3}$

g) $f'(x) = -\dfrac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2x) = \dfrac{x}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}}$

h)
$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \cdot \frac{1 \cdot (1-x) - (1+x) \cdot (-1)}{(1-x)^2} \\ &= 2\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \cdot \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} \\ &= 2\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \cdot \frac{2}{(1-x)^2} \\ &= \frac{4(1+x)}{(1-x)^3} \end{aligned}$$

i)
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x\sqrt{x^2+a^2} - x^2 \cdot \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}}}{x^2+a^2} \\ &= \frac{2x\sqrt{x^2+a^2} - \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+a^2}}}{x^2+a^2} \\ &= \frac{2x(x^2+a^2) - x^3}{(x^2+a^2)\sqrt{x^2+a^2}} \\ &= \frac{2x^3 + 2a^2x - x^3}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{x^3 + 2a^2x}{(x^2+a^2)\sqrt{x^2+a^2}} \end{aligned}$$