Exercice 1 Sur l'axe Ox on fixe une première source de lumière en $x = 0$ et une deuxième en $x = 10$. On note I_1 et I_2 les intensités lumineuses des deux sources, L_1 et L_2 les intensités des flux lumineux en un point provenant respectivement de la première source et de la deuxième source. Sachant que $I_2 = 4I_1$, et que l'intensité du flux lumineux en un point est proportionnelle à l'intensité lumineuse de la source considérée et inversement proportionnelle au carré de la distance séparant ce point de la source, déterminer le point de l'intervalle $[0; 10]$ qui reçoit un flux total minimal des deux sources. Calculer le rapport des distances séparant ce point aux deux sources.

Corrigé 1

Correction générée par IA

Plaçons les deux sources sur l'axe $\mathrm{O}x$: la première en $x = 0$ et la deuxième en $x = 10$.
Pour un point situé en position x sur l'intervalle $[0, 10]$:

- La distance à la première source est $d_1 = x$
- La distance à la deuxième source est $d_2 = 10 - x$

Le flux lumineux provenant de chaque source est proportionnel à l'intensité lumineuse et inversement proportionnel au carré de la distance :

$$\mathrm{L}_1 = \frac{k\mathrm{I}_1}{x^2} \quad \text{et} \quad \mathrm{L}_2 = \frac{k\mathrm{I}_2}{(10-x)^2}$$

où k est une constante de proportionnalité.
Sachant que $\mathrm{I}_2 = 4\mathrm{I}_1$, le flux total est :

$$\mathrm{L}(x) = \frac{k\mathrm{I}_1}{x^2} + \frac{4k\mathrm{I}_1}{(10-x)^2} = k\mathrm{I}_1\left(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{(10-x)^2}\right)$$

Pour minimiser $\mathrm{L}(x)$, nous dérivons par rapport à x :

$$\mathrm{L}'(x) = k\mathrm{I}_1\left(-\frac{2}{x^3} + \frac{8}{(10-x)^3}\right)$$

L'annulation de la dérivée donne :

$$\begin{aligned}
-\frac{2}{x^3} + \frac{8}{(10-x)^3} &= 0\\
\frac{8}{(10-x)^3} &= \frac{2}{x^3}\\
\frac{4}{(10-x)^3} &= \frac{1}{x^3}\\
4x^3 &= (10-x)^3\\
\sqrt[3]{4}\cdot x &= 10 - x\\
x(\sqrt[3]{4}+1) &= 10\\
x = \frac{10}{\sqrt[3]{4}+1} &= \frac{10}{1+\sqrt[3]{4}}
\end{aligned}$$

Rationalisons en multipliant par $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}$:

$$x = \frac{10}{1+2^{2/3}} \cdot \frac{2^{1/3}}{2^{1/3}} = \frac{10\cdot 2^{1/3}}{2^{1/3}+2}$$

Numériquement : $\sqrt[3]{4} \approx 1{,}587$, donc $x \approx \frac{10}{2{,}587} \approx 3{,}87$.

Rapport des distances :

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{x}{10-x} = \frac{\frac{10}{1+\sqrt[3]{4}}}{\frac{10\sqrt[3]{4}}{1+\sqrt[3]{4}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} = \frac{1}{2^{2/3}} = 2^{-2/3}$$

Le point qui reçoit un flux minimal est situé à $\boxed{x = \frac{10}{1+\sqrt[3]{4}} \approx 3{,}87}$ de la première source.

Le rapport des distances aux deux sources est $\boxed{\frac{d_1}{d_2} = 2^{-2/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \approx 0{,}63}$.