Activités – Premier semestre

Table des matières

Activités – première partie SECTION 1

Calcul numérique

Activité 1

Déterminer le millième chiffre des unités de 8^{2025}. (*) Et celui des dizaines ?

Activité 2

Effectuer la division $1 : 7$, par écrit, assez longtemps pour...

i) Trouver l'écriture décimale complète de $\frac{1}{7}$.

ii) Expliquer pourquoi la longueur de la période de $\frac{1}{7}$ ne peut pas dépasser 6 chiffres.

iii) Expliquer pourquoi l'écriture décimale de $\frac{1}{n}$ est finie ou infinie périodique et que sa partie périodique ne peut jamais dépasser $(n-1)$ chiffres.

Activité 3

Quelle est la millième décimale de chacun des nombres rationnels suivants ? i) $\frac{1}{7}$ ii) $\frac{17}{41}$

Activité 4

Calculer et donner la réponse sous forme d'une fraction irréductible :

a) $0,\overline{72} \cdot 0,\overline{810}$

b) $(0{,}297297297\ ...) \cdot (3{,}3636363\ ...)$

Activité 5

a) Vrai ou faux ? Justifier.

i) $\sqrt{4} = \pm 2$

ii) $\sqrt{a^2} = a$

b) Calculer et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible :

i) $\sqrt{\frac{27}{25}}$ ii) $\sqrt{125} \cdot \sqrt{5}$ iii) $\frac{\sqrt{0{,}64^2 347}}{\sqrt{0{,}64^2 247}}$ iv) $\sqrt{1{,}\overline{7}}$

c) En utilisant des décompositions en produits de facteurs premiers, extraire la racine carrée de $\sqrt{324}$.

d) Réduire la somme $\sqrt{12} + \sqrt{3} - 2\sqrt{9} + (\sqrt{3})^2$.

e) Transformer pour obtenir une expression sans racine au dénomimateur, puis simplifier au maximum :

i) $\frac{9}{\sqrt{27}}$ ii) $\frac{-4}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ iii) $\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{4}}$ iv) $\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \sqrt{18} - 3\sqrt{8} + 2\sqrt{2} - 4\sqrt{4}$

f) Que dire de $\sqrt{-1}$? De $\sqrt[3]{-1}$? De $\sqrt[n]{-1}$ plus généralement ?

Activités – première partie SECTION 2

Ensembles et intervalles

Activité 6

a) Citer les différents ensembles de nombres rencontrés dans votre scolarité.

b) Représenter ces ensembles à l'aide de diagrammes de Venn.

c) Donner pour chaque ensemble de nombre un élément qui appartient à l'ensemble en question, mais pas à un ensemble de nombre plus petit.

d) Placer au bon endroit les nombres suivants. Justifier.

$a_1 = 3{,}14$; $a_2 = \dfrac{5}{7}$; $a_3 = -8$; $a_4 = 5$; $a_5 = -1{,}4$; $a_6 = -\dfrac{7}{5}$; $a_7 = \sqrt{8}$;

$a_8 = -\sqrt{9}$; $a_9 = \sqrt{1000}$; $a_{10} = 1,\overline{7}$; $a_{11} = 1{,}020220222022220\ldots$;

$a_{12} = \dfrac{169}{13}$; $a_{13} = 1{,}231 \cdot 10^8$; $a_{14} = \dfrac{\pi}{2}$; $a_{15} = 2 + \sqrt{3}$.

Activité 7

a) Écrire avec des notations ensemblistes :

i) L'ensemble comprenant les nombres $2, 5, 11, -2$ et 1.

ii) L'ensemble comprenant les nombres entiers compris entre 22 et 2222.

iii) L'ensemble des entiers relatifs négatifs.

iv) L'ensemble des nombres rationnels strictement positifs

b) Compléter par le symboles adéquat :

i) $\mathbb{N}$______ $\mathbb{Z}$ ii) -33______ $\mathbb{N}$ iii) $\{33\}$______ $\mathbb{N}$

c) Transcrire les phrases suivantes à l'aide des notations ensemblistes :

i) « L'ensemble des nombres rationnels est inclus dans l'ensemble des nombres réels »

ii) « Moins trois quarts n'appartient pas à l'ensemble des nombres entiers relatifs »

d) Quelles sont les significations des différentes notations suivantes : 0 ; $\{0\}$; $\emptyset$; $\{\emptyset\}$?

Activité 8

a) Dans une classe de 24 élèves, 10 élèves font du ski, 7 élèves font du snowboard. Parmi ces élèves, 2 élèves font du ski et du snowboard.

i) Représenter cette situation à l'aide d'un diagramme de Venn.

ii) Repérer sur le diagramme les élèves qui ...

- font du ski, mais pas du snowboard;
- font du snowboard, mais pas du ski;
- font du ski et du snowboard;
- font aucun des deux.

b) Compléter avec le symbole qui convient.

i) $\mathbb{N}$ ______ $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$

ii) $\{3; 4; 5\} \cup \{5\} =$ ____________

iii) $\{3; 4; 5\} \cap \{5\} =$ ____________

iv) $\{3; 4; 5\} \setminus \{5\} =$ ____________

v) $\{3; 4; 5; 6; 7\}$ ____________ $\{6; 7; 8; 9\} = \{6; 7\}$

vi) $\{3; 4; 5; 6; 7\}$ ____________ $\{5; 6; 7; 8; 9\} = \{3; 4\}$

Activité 9

a) Soient A et B les deux ensembles suivants : $A = \{-5; 3; 4; 6; 8; 9\}$ et $B = \{2; 3; 4; 8; 10\}$.
Déterminer $A \cup B$, $A \cap B$, $B \setminus A$ et $A \setminus B$.

b) Trouver les ensembles C et D sachant que :

i) $C \cup D = \{1; 2; 3; 4; 5\}$, $C \cap D = \{2; 3; 4\}$, $1 \notin D \setminus C$ et $5 \notin C \setminus D$.

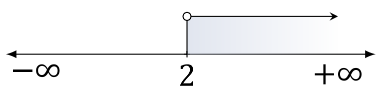
ii) $C \cup D = \{2; 3; 4; 5\}$ et $C \cap D = \{2; 4\}$. Donner toutes les possibilités.

Activité 10

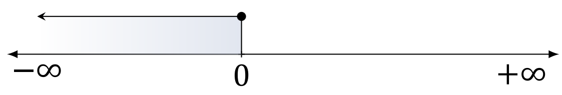
a) Combien de solutions l'inéquation $0 < x < 1$ a-t-elle ? et l'inéquation $0 \leq x < 1$?

b) Représenter graphiquement sur une droite réelle les solutions de ces deux inéquations.

c) Pour chaque droite ci-dessous, donner **une inéquation et un ensemble** qui permettent de décrire l'ensemble des nombres représentés. Que signifient les symboles aux bornes (aux extrémités) ?

i) 

ii) 

iii) 

d) Représenter sur une droite réelle les ensembles et les inéquations suivants.

i) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$

ii) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 4\}$

iii) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 3\}$

iv) $\{x \in \mathbb{R}\}$

v) $x > 4$ ou $x < 0$

vi) $1 \geq x \geq -1$

Activité 11

a) Vrai ou faux ? Justifier.

i) $[1; 4] = \{1; 2; 3; 4\}$ ii) $4{,}1 \in [3; 5]$ iii) $4 \in]2; 4[$ iv) $\emptyset =]0; 1[$ v) $]-\infty; +\infty[= \mathbb{Z}$

b) Passer de l'écriture ensembliste à l'écriture en intervalle et vice versa.

i) $[4; +\infty[$

ii) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 2\}$

iii) $]3; 4[$

iv) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$

c) Donner sous la forme d'un intervalle lorsque c'est possible ou de l'opération spécifiée.

i) $[3;5]\cap]4;6[$

ii) $]-\infty;-1[\cup]-2;0[$

iii) $[0;3[\setminus]1;2[$ comme une union.

iv) $[-4;0]\setminus]0;1]$

v) $]-1;3]\cap]3;+\infty[$

vi) $]0;2[\cup]1;3]$

Activités – première partie SECTION 3

Un peu de logique

Activité 12

Que penser de l'énoncé suivant :

« Dans un village, le barbier rase tous ceux et seulement ceux qui ne se rasent pas eux-mêmes. Qui rase le barbier ? »

Activité 13

On considère quatre cartes recto-verso, chacune comportant une lettre d'un côté et un chiffre de l'autre. On voit ceci :

A	**R**	**2**	**5**
Carte 1	Carte 2	Carte 3	Carte 4

Alexandre affirme : « S'il y a une voyelle d'un côté d'une carte, alors il y a un chiffre pair de l'autre. » Question : Quelles cartes faut-il retourner au minimum pour pouvoir vérifier si cette affirmation est vraie ?

Activités – première partie SECTION 4

Calcul littéral

Activité 14

Traduire en expressions algébriques les données suivantes. La variable x représente un nombre entier.

a) le carré d'un nombre impair;

b) un multiple de n;

c) trois nombres consécutifs quelconques;

d) trois multiples de 17 consécutifs;

e) le carré de la somme du produit de 2 par x et de 3;

f) la différence des carrés de la différence du double de x et de 5 et de la somme de x et de 3;

g) le quadruple de la somme du centuple de l'unité et d'un nombre pair.

Activité 15

a) On considère les conjectures suivantes où n désigne un nombre entier naturel. Sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

i) **Conjecture :** Si n est un multiple de 9, alors n est un multiple de 3.

ii) **Conjecture :** Si n est un multiple de 3, alors n est un multiple de 9.

iii) **Conjecture :** Le carré d'un nombre pair est toujours un nombre pair.

iv) **Conjecture :** Si n^2 est pair, alors n est pair.

v) **Conjecture :** n^2 est pair $\Leftrightarrow n$ est pair.

vi) **Conjecture :** La somme de deux carrés est un carré.

b) Démontrer les assertions suivantes (qui sont toujours vraies).

i) La somme de d'un nombre pairs et d'un nombre impair est un nombre impair.

ii) Le produit de deux nombres impairs est un nombre impair.

iii) La somme de trois entiers consécutifs est un multiple de trois.

Activité 16

Activité 17

a) Résoudre les équations suivantes

i) $2x + 1 = 3$ ii) $3x + 1 = 3$

b) Résoudre l'équation avec paramètre a pour l'inconnue x

$$ax + 1 = 3.$$

c) Résoudre l'équation avec paramètre a pour l'inconnue x :

$$x + 3a = 2x + 1$$

d) Résoudre l'équation avec paramètre a pour l'inconnue x :

$$2x - 4 = ax + 3.$$

e) Que remarquez-vous ?

Activités – première partie SECTION 5

Équations

Activité 18

Voici neuf énoncés et onze équations. Chaque énoncé correspond à une des équations proposées. Retrouver laquelle et justifier. Poser à chaque fois l'inconnue x.

1	Une balance à deux plateaux est en équilibre lorsque l'on place 10 cubes et une masse de 2 kg sur l'un des plateaux et 2 cubes et une masse de 30 kg sur l'autre. Quelle est la masse d'un cube?	
2	Une troupe théâtrale donne une représentation au collège. Pour payer le cachet des acteurs, chaque élève doit payer 30 Fr. Le jour de la représentation, 10 élèves sont absents, et chaque élève doit payer 2 Fr. de plus que prévu. Combien d'élèves assistent à cette représentation?	
3	Un père a 30 ans et son fils a 10 ans. Dans combien d'années l'âge du père sera-t-il le double de celui du fils?	
4	Pour aller de Grenoble au col du Lautaret, un touriste à vélo roule à la vitesse de 10 km/h. Il se repose 2 heures au col du Lautaret. Au retour, il roule à la vitesse de 30 km/h. Sachant que cet entraînement a duré 10 heures, quelle est la distance séparant Grenoble du col du Lautaret?	
5	Un rectangle est tel que sa longueur est le double de sa largeur. Si on augmente sa longueur de 30 m et si on diminue sa largeur de 10 m , son aire est multipliée par 2. Quelle est la largeur initiale du rectangle?	
6	Un pavé droit a une hauteur de 30 cm ; sa largeur est le dixième de sa longueur et lorsque l'on calcule l'aire totale et le volume de ce pavé, on trouve les mêmes nombres (l'un en cm^2 et l'autre en cm^3). Quelle est la largeur de ce pavé?	
7	L'eau de Javel est utilisée diluée. Une solution diluée à 2% contient 2 cl d'eau de Javel et 98 cl d'eau pour former un litre (100 cl) de solution. Une solution diluée à 30% contient 30 cl d'eau de Javel pour former un litre (100 cl) de solution. Quelle quantité de solution à 30% faut-il ajouter à 1 litre d'une solution à 2% pour obtenir une solution à 10% ?	
8	On dispose d'une plaque de carton carrée de 10 cm de côté. On découpe quatre carrés (un dans chaque coin) et on plie de façon à obtenir une boîte sans couvercle. Quelle est la dimension des carrés à découper pour que le volume de la boîte soit égal à 30 cm^3 ?	
9	Un arbre haut de 10 m et un poteau haut de 2 m sont situés en face l'un de l'autre sur chacune des rives d'une rivière large de 30 m . Au sommet de chacun d'eux est perché un oiseau. Ils se lancent tous deux à la même vitesse et au même instant sur une pauvre mouche qui les nargue à la surface de l'eau. Par un effet magique de Dame Nature, ils l'atteignent au même moment et se fracassent le bec dans un contact plus que vigoureux, et de ce fait se retrouvent bredouilles. A quelle distance du pied de l'arbre se trouvait cette mouche miraculée?	

a) $\dfrac{x}{10}+2+\dfrac{x}{30}=10$

b) $10(x+2)=30x$

c) $x(10-2x)(10-2x)=30$

d) $(30+x)=2(10+x)$

e) $30(x+10)=x(30+2)$

f) $\dfrac{30x}{2}+\dfrac{10x}{2}=\dfrac{1}{2}(x+10)30$

g) $10x+2=2x+30$

h) $x^2+10^2=(30-x)^2+2^2$

i) $(2x+30)(x-10)=2x(2x)$

j) $\dfrac{30}{100}x+\dfrac{2}{100}=(x+1)\dfrac{10}{100}$

k) $2(30x+x\cdot 10x+30\cdot 10x)=x\cdot 10x\cdot 30$

Activité 19

a) Un magasin de vêtements faisant les soldes annonce que tous les prix ont été baissés de 20%. Si le prix d'une chemise soldée est 28.- quel était son prix de vente ?

b) Le sixième d'un piquet est enfoncé dans la terre, les deux cinquièmes dans la neige et le reste, qui est en dehors, mesure 3,25m. La température de l'air est de 4°C. Trouver la hauteur du piquet.

c) Une société d'investissement a 100'000.- à investir pour un client et décide d'investir dans deux fonds, A et B. L'intérêt annuel attendu pour le fonds A est de 15%, mais il y a un certain risque et le client ne veut pas investir plus de 50'000.- dans ce fonds. Pour le fonds B, plus solide, l'intérêt est de 10%. Déterminer s'il y a une façon d'investir l'argent pour que l'intérêt annuel soit :

i) 12'000.- ii) 13'000.-

Activité 20

Il s'agit, avec la calculatrice, d'être le plus efficace et précis possible pour effectuer les calculs demandés (en utilisant si besoin des parenthèses ou si nécessaire). Pour chaque calcul, donnez être capable de décrire précisément (par exemple en donnant la suite de touches utilisée) la façon dont la calculatrice a été utilisée.

a) Calculer à l'aide de la calculatrice la valeur arrondie au millième de :

i) $4 \cdot (2+3)$
ii) $3 \cdot \pi$
iii) le quart de la réponse précédente
iv) 4π au carré
v) $2 : 5$
vi) $0{,}25 \cdot 0{,}5$
vii) $-325{,}201569 - 2{,}82589$
viii) $5 \cdot \sqrt{4}$
ix) $\dfrac{4{,}7 : (6{,}76 - 0{,}95)}{5{,}001}$

b) Effectuer les calculs suivants en utilisant l'écriture scientifique de la calculatrice :

i) $(7{,}28 \cdot 10^{13}) \cdot 10^{5}$ ii) $(-7{,}28 \cdot 10^{-8}) : 3 \cdot 10^{4}$

c) Simplifier le plus possible $\dfrac{49005}{6030}$ à l'aide de la calculatrice.

d) Calculer $\dfrac{2}{35}$ puis $\dfrac{2}{3} \cdot 5$