Exercice 1 Soit la fonction $f(x) = \frac{x^2}{5}$.

a) Déterminer l'équation des tangentes à f qui passent par le point $\mathrm{A} = (-1; -3)$.

b) Représenter la situation proposée sur un repère.

Corrigé 1

Correction générée par IA

a) La tangente au graphe de f en un point $(a; f(a))$ a pour équation :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Le point $\mathrm{A} = (-1; -3)$ appartient à la tangente, donc :

$$-3 = f'(a)((-1) - a) + f(a)$$

On a $f(x) = \frac{x^2}{5}$, donc $f'(x) = \frac{2x}{5}$.
Ainsi $f(a) = \frac{a^2}{5}$ et $f'(a) = \frac{2a}{5}$.
L'équation devient :

$$-3 = \frac{2a}{5}(-1 - a) + \frac{a^2}{5}$$

Multiplions par 5 :

$$-15 = 2a(-1 - a) + a^2 = -2a - 2a^2 + a^2 = -2a - a^2$$

D'où :

$$a^2 + 2a - 15 = 0$$

En résolvant cette équation du second degré :

$$\Delta = 4 + 60 = 64 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{-2 \pm 8}{2}$$

On obtient $a_1 = 3$ ou $a_2 = -5$.
Pour $a = 3$:

- $f(3) = \frac{9}{5}$
- $f'(3) = \frac{6}{5}$

L'équation de la tangente est :

$$y = \frac{6}{5}(x - 3) + \frac{9}{5} = \frac{6}{5}x - \frac{18}{5} + \frac{9}{5} = \frac{6}{5}x - \frac{9}{5}$$

Pour $a = -5$:

- $f(-5) = \frac{25}{5} = 5$
- $f'(-5) = \frac{-10}{5} = -2$

L'équation de la tangente est :

$$y = -2(x - (-5)) + 5 = -2(x + 5) + 5 = -2x - 10 + 5 = -2x - 5$$

Les deux tangentes ont pour équations $y = \frac{6}{5}x - \frac{9}{5}$ et $y = -2x - 5$.

b) La représentation graphique montrerait la parabole $f(x) = \frac{x^2}{5}$, le point $\mathrm{A} = (-1; -3)$, et les deux tangentes passant par A et touchant la parabole aux points $(3; \frac{9}{5})$ et $(-5; 5)$.