# 第1章 线性规划

在人们的生产实践中,经常会遇到如何利用现有资源来安排生产,以取得最大经济效益的问题。此类问题构成了运筹学的一个重要分支——数学规划,而线性规划(Linear Programming,LP)则是数学规划的一个重要分支。自从1947年G. B. Dantzig提出求解线性规划的单纯形方法以来,线性规划在理论上趋向成熟,在实用中日益广泛与深入。特别是在计算机能处理成千上万个约束条件和决策变量的线性规划问题之后,线性规划的适用领域更为广泛了,已成为现代管理中经常采用的基本方法之一。

## 1.1 线性规划模型及概念

**1. 引例**

我们来看一个关于线性规划的引例。

**例1.1** 某机床厂生产甲、乙两种机床,每台机床销售后的利润分别为4千元与3千元。生产甲机床需用A、B机器加工,加工时间分别为每台2h和每台1h;生产乙机床需用A、B、C三种机器加工,加工时间均为每台1h。若每天可用于加工的机器时数分别为A机器10h、B机器8h和C机器7h,问该厂应生产甲、乙机床各几台才能使总利润最大?

**问题分析**

该问题是在企业的生产经营中经常面临的一个问题:如何制订一个最优的生产计划?因为加工时间的可用数量是有限的,这就构成了该问题的约束条件,而解决该问题也就是在满足上述约束条件的前提下,确定两种机床的产量,使得产品销售后所获得的利润达到最大值。

**模型假设**

假设该企业的产品不存在积压,即产量等于销量。

**符号说明**:设$x_i(i=1,2)$分别表示甲、乙机床每天的产量。通常称$x_i$为**决策变量**。

**模型建立**

该问题的目标是使得总利润$z=4x_1+3x_2$达到最大值。通常称该利润函数为**目标函数**。

机床的产量受到某些条件的限制。生产甲、乙两种机床所花费的加工时间不能超过A、B、C机器每天的最大可用加工时间,因此有

$$2x_1+x_2\leqslant 10,$$
$$x_1+x_2\leqslant 8,$$
$$x_2\leqslant 7.$$

另外,甲乙两种机床的产量还应该满足非负约束,即$x_i\geqslant 0,i=1,2$。由限制条件所确

定的上述不等式，通常称为**约束条件**。

综上所述，可以建立该问题的数学模型为

$$\max z=4x_1+3x_2,$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}2x_1+x_2\leqslant 10,\\x_1+x_2\leqslant 8,\\x_2\leqslant 7,\\x_1,x_2\geqslant 0.\end{cases}\tag{1.1}$$

这里的 s. t. (subject to)是"受约束于"的意思。

求解该数学模型，便可得到该机床厂的最优生产计划方案。

**2. 建立线性规划模型的一般步骤**

由前面的引例可知，规划问题的数学模型由三个要素组成：①决策变量，是问题中要确定的未知量，用于表明规划问题中用数量表示的方案、措施等，可由决策者决定和控制；②目标函数，是决策变量的函数，优化目标通常是求该函数的最大值或最小值；③约束条件，是决策变量的取值所受到的约束和限制条件，通常用含有决策变量的等式或不等式表示。

建立线性规划模型通常需要以下三个步骤：

第一步，分析问题，找出决策变量。

第二步，根据问题所给条件，找出决策变量必须满足的一组线性等式或者不等式约束，即为约束条件。

第三步，根据问题的目标，构造关于决策变量的一个线性函数，即为目标函数。

有了决策变量、约束条件和目标函数这三个要素之后，一个线性规划模型就建立起来了。

**3. 线性规划模型的形式**

线性规划模型的一般形式为

$$\max(\text{或}\min)\ z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n,$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\leqslant(\text{或}=,\geqslant)b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\leqslant(\text{或}=,\geqslant)b_2,\\\qquad\vdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\leqslant(\text{或}=,\geqslant)b_m,\\x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0.\end{cases}\tag{1.2}$$

或简写为

$$\max(\text{或}\min)\ z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j,$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant(\text{或}=,\geqslant)b_i, & i=1,2,\cdots,m,\\x_j\geqslant 0, & j=1,2,\cdots,n.\end{cases}$$

其向量表示形式为

$$\max(\text{或}\ \min)\ z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x},$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{P}_j x_j \leqslant (\text{或} =, \geqslant)\boldsymbol{b},\\ \boldsymbol{x} \geqslant 0.\end{cases}$$

其矩阵表示形式为

$$\max(\text{或}\ \min)\ z=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x},$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}A\boldsymbol{x}\leqslant(\text{或}=,\geqslant)\boldsymbol{b},\\ \boldsymbol{x}\geqslant 0.\end{cases}$$

式中:$\boldsymbol{c}=[c_1,c_2,\cdots,c_n]^{\mathrm{T}}$ 为目标函数的系数向量,又称为价值向量;$\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}$ 为决策向量;$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$为约束方程组的系数矩阵;$\boldsymbol{P}_j=[a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj}]^{\mathrm{T}},j=1,2,\cdots,n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的列向量,又称为约束方程组的系数向量;$\boldsymbol{b}=[b_1,b_2,\cdots,b_m]^{\mathrm{T}}$ 为约束方程组的常数向量。

**4. 线性规划问题的解的概念**

一般线性规划问题的(数学)标准型为

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \tag{1.3}$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, & i = 1,2,\cdots,m,\\ x_j \geqslant 0, & j = 1,2,\cdots,n.\end{cases} \tag{1.4}$$

式中:$b_i\geqslant 0,i=1,2,\cdots,m$。

**可行解**:满足约束条件(1.4)的解 $\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}$,称为线性规划问题的可行解,而使目标函数(1.3)达到最大值的可行解称为最优解。

**可行域**:所有可行解构成的集合称为问题的可行域,记为 $R'$。

**5. 灵敏度分析**

灵敏度分析是指对系统因周围条件变化显示出来的敏感程度的分析。

在线性规划问题中,都设定 $a_{ij},b_i,c_j$ 是常数,但在许多实际问题中,这些系数往往是估计值或预测值,经常有少许的变动。

例如在模型(1.2)中,如果市场条件发生变化,$c_j$ 值就会随之变化;生产工艺条件发生改变,会引起 $b_i$ 变化;$a_{ij}$也会由于种种原因产生改变。

因此提出以下两个问题:

(1) 如果参数 $a_{ij},b_i,c_j$ 中的一个或者几个发生了变化,现行最优方案会有什么变化?

(2) 将这些参数的变化限制在什么范围内,原最优解仍是最优的?

当然,有一套关于"优化后分析"的理论方法,可以进行灵敏度分析。具体参见有关的运筹学教科书。

但在实际应用中,给定参变量一个步长使其重复求解线性规划问题,以观察最优解的变化情况,不失为一种可用的数值方法,特别是使用计算机求解时。

对于数学规划模型,一定要做灵敏度分析。第 3 章将给出灵敏度分析的一个具体例子。

## 1.2 线性规划模型求解及应用

求解线性规划模型已经有比较成熟的算法。对一般的线性规划模型,常用的求解方法有图解法、单纯形法等;虽然针对线性规划的理论算法已经比较完善,但是当需要求解的模型的决策变量和约束条件数量比较多时,手工求解模型是十分繁杂甚至不可能的,通常需要借助计算机软件来实现。

目前,求解数学规划模型的常用软件有 Matlab、Python、Lingo 等多种,本书中出现的数学规划模型主要使用 Matlab 软件求解。Matlab 求解数学规划问题(包括线性规划、整数规划和非线性规划)采用两种模式:基于求解器的求解方法和基于问题的求解方法。

**1. 线性规划的 Matlab 求解**

1) *Matlab 基于求解器的求解方法*

线性规划的目标函数可以是求最大值,也可以是求最小值,约束条件的不等号可以是小于等于号也可以是大于等于号。为了避免这种形式多样性带来的不便,Matlab 基于求解器的求解方法中规定线性规划的标准形式为

$$\min_{x} \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x},$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{b},\\ \boldsymbol{Aeq}\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{beq},\\ \boldsymbol{lb}\leqslant\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{ub}.\end{cases}$$

式中:$\boldsymbol{f},\boldsymbol{x},\boldsymbol{b},\boldsymbol{beq},\boldsymbol{lb},\boldsymbol{ub}$ 为列向量,其中 $\boldsymbol{f}$ 为价值向量,$\boldsymbol{b}$ 为资源向量;$\boldsymbol{A},\boldsymbol{Aeq}$ 分别为不等式约束和等式约束对应的矩阵。

Matlab 基于求解器的求解线性规划函数调用格式为

```
[x,fval] = linprog(f,A,b)
[x,fval] = linprog(f,A,b,Aeq,beq)
[x,fval] = linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub)
```

其中 x 返回决策向量的取值,fval 返回目标函数的最优值,f 为价值向量,A,b 对应线性不等式约束,Aeq,beq 对应线性等式约束,lb 和 ub 分别对应决策向量的下界向量和上界向量。

例如线性规划

$$\max_{x} \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x},$$

$$\text{s.t.}\quad \boldsymbol{Ax}\geqslant\boldsymbol{b}.$$

的 Matlab 标准型为

$$\min_{x} -\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}x,$$

$$\text{s.t.}\quad -\boldsymbol{Ax}\leqslant-\boldsymbol{b}.$$

2) *Matlab 基于问题的求解方法*

Matlab 基于问题的求解数学规划方法,首先需要用变量和表达式构造优化问题,然后用 solve 函数求解。具体求解步骤可以通过下面例子看出来,或者在命令窗口运行 doc optimproblem,看 Matlab 的详细帮助。

**例 1.2(续例 1.1)** 求解在例 1.1 中建立的线性规划模型。

**解** 利用 Matlab 程序,求得最优解为

$$x_1=2,x_2=6,$$

目标函数的最优值 $z=26$。

基于求解器求解的 Matlab 程序如下:

```
clc, clear
c = [4;3]; b = [10;8;7];
a = [2,1;1,1;0,1]; lb = zeros(2,1);
[x,fval] = linprog(-c,a,b,[],[],lb)     % 没有等号约束
y = -fval                               % 目标函数为最大化
```

基于问题求解的 Matlab 程序如下:

```
clc, clear
prob = optimproblem('ObjectiveSense', 'max')     % 目标函数最大化的优化问题
c = [4;3]; b = [10;8;7];
a = [2,1;1,1;0,1];
x = optimvar('x',2,'LowerBound',0);              % 决策变量
prob.Objective = c' * x;                         % 目标函数
prob.Constraints.con = a * x<=b;                 % 约束条件
[sol, fval, flag, out] = solve(prob)             % fval 返回最优值
sol.x                                            % 显示决策变量的值
```

**例 1.3** 求解下列线性规划问题:

$$\max z=2x_1+3x_2-5x_3,$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}x_1+x_2+x_3=7,\\2x_1-5x_2+x_3\geqslant 10,\\x_1+3x_2+x_3\leqslant 12,\\x_1,x_2,x_3\geqslant 0.\end{cases}$$

**解** 化成的 Matlab 标准型为

$$\min w=-2x_1-3x_2+5x_3,$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}\begin{bmatrix}-2 & 5 & -1\\1 & 3 & 1\end{bmatrix}\cdot[x_1,x_2,x_3]^{\mathrm{T}}\leqslant\begin{bmatrix}-10\\12\end{bmatrix},\\[1,1,1]\cdot[x_1,x_2,x_3]^{\mathrm{T}}=7,\\[x_1,x_2,x_3]^{\mathrm{T}}\geqslant[0,0,0]^{\mathrm{T}}.\end{cases}$$

求得的最优解为 $x_1=6.4286,x_2=0.5714,x_3=0$,对应的最优值 $z=14.5714$。

基于求解器求解的 Matlab 程序如下:

```
clc, clear, f=[-2; -3; 5];
a=[-2,5,-1;1,3,1]; b=[-10;12];
aeq=[1,1,1]; beq=7;
[x,y]=linprog(f,a,b,aeq,beq,zeros(3,1));
x, y=-y                                 % 目标函数最大化
```

基于问题求解的 Matlab 程序如下:

```
clc, clear
prob = optimproblem('ObjectiveSense','max');
x = optimvar('x',3,'LowerBound',0);
prob.Objective = 2 * x(1) + 3 * x(2)-5 * x(3);
prob.Constraints.con1 = x(1)+x(2)+x(3) == 7;
prob.Constraints.con2 = 2 * x(1)-5 * x(2)+x(3) >=10;
prob.Constraints.con3 = x(1)+3 * x(2)+x(3) <=12;
[sol,fval,flag,out]= solve(prob), sol.x
```

**注 1.1** 在 Matlab 基于问题的求解方法中,不能把不同类型的约束条件写在同一个约束集合中。

**2. 线性规划应用举例**

**例 1.4** 捷运公司在下一年度 1~4 月的 4 个月内拟租用仓库堆放物资。已知各月所需仓库面积列于表 1.1。仓库租借费用随合同期而定,期限越长,折扣越大,具体数字见表 1.1。租借仓库的合同每月初都可办理,每份合同具体规定租用面积和期限。因此,该公司可根据需要,在任何一个月初办理租借合同。每次办理时可签一份合同,也可签若干份租用面积和租借期限不同的合同,试确定该公司签订租借合同的最优决策,目的是使所付租借费用最小。

表 1.1 所需仓库面积和租借仓库费用数据

| 月　份 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 所需仓库面积/$100m^2$ | 15 | 10 | 20 | 12 |
| 合同租借期限 | 1 个月 | 2 个月 | 3 个月 | 4 个月 |
| 合同期内的租费/元 | 2800 | 4500 | 6000 | 7300 |

**解** 设变量 $x_{ij}$表示捷运公司在第 $i(i=1,2,3,4)$个月初签订的租借期为$j(j=1,2,3,4)$个月的仓库面积(单位为 $100m^2$)。因 5 月起该公司不需要租借仓库,故 $x_{24},x_{33},x_{34},x_{42},x_{43},x_{44}$均为零。该公司希望总的租借费用最小,故有如下数学模型:

$$\min z=2800(x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41})+4500(x_{12}+x_{22}+x_{32})+6000(x_{13}+x_{23})+7300x_{14},$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}\geqslant 15,\\ x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{21}+x_{22}+x_{23}\geqslant 10,\\ x_{13}+x_{14}+x_{22}+x_{23}+x_{31}+x_{32}\geqslant 20,\\ x_{14}+x_{23}+x_{32}+x_{41}\geqslant 12,\\ x_{ij}\geqslant 0,\quad i=1,2,3,4;j=1,2,3,4.\end{cases}$$

这个模型中的约束条件分别表示当月初签订的租借合同的面积加上该月前签订的未到期的合同的租借面积总和,应不少于该月所需的仓库面积。

求得的最优解为 $x_{11}=3,x_{31}=8,x_{14}=12$,其他变量取值均为零,最优值 $z=118400$。

```
clc, clear
prob = optimproblem    % 默认目标函数最小化
x = optimvar('x',4,4,'LowerBound',0);
prob.Objective = 2800 * sum(x(:,1))+4500 * sum(x(1:3,2))+...
```

```
    6000 * sum(x(1:2,3))+7300 * x(1,4);
prob.Constraints.con = [sum(x(1,:))>=15,
    sum(x(1,2:4))+sum(x(2,1:3))>=10,
    x(1,3)+x(1,4)+x(2,2)+x(2,3)+x(3,1)+x(3,2)>=20,
    x(1,4)+x(2,3)+x(3,2)+x(4,1)>=12];
[sol,fval,flag,out]= solve(prob), sol.x
```

**例 1.5** 使用 Matlab 软件计算 6 个产地到 8 个销地的最小费用运输问题。单位商品运价如表 1.2 所示。

表 1.2 单位商品运价表

| 产地＼单位运价＼销地 | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ | $B_6$ | $B_7$ | $B_8$ | 产量 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 6 | 2 | 6 | 7 | 4 | 2 | 5 | 9 | 60 |
| $A_2$ | 4 | 9 | 5 | 3 | 8 | 5 | 8 | 2 | 55 |
| $A_3$ | 5 | 2 | 1 | 9 | 7 | 4 | 3 | 3 | 51 |
| $A_4$ | 7 | 6 | 7 | 3 | 9 | 2 | 7 | 1 | 43 |
| $A_5$ | 2 | 3 | 9 | 5 | 7 | 2 | 6 | 5 | 41 |
| $A_6$ | 5 | 5 | 2 | 2 | 8 | 1 | 4 | 3 | 52 |
| 需求量 | 35 | 37 | 22 | 32 | 41 | 32 | 43 | 38 | |

**解** 这是一个运输问题,总的产量大于总的需求量,是满足供应的运输问题。

设 $x_{ij}(i=1,2,\cdots,6;j=1,2,\cdots,8)$ 表示产地 $A_i$ 运到销地 $B_j$ 的量,$c_{ij}$表示产地 $A_i$ 到销地 $B_j$ 的单位运价,$d_j$ 表示销地 $B_j$ 的需求量,$e_i$ 表示产地 $A_i$ 的产量。

目标函数是使总的运费最小化,即

$$\min \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{8} c_{ij}x_{ij}.$$

约束条件分为两类。

(1) 需求量约束,$B_j$ 销地的需求量等于所有产地运到 $B_j$ 销地的运量和,即

$$\sum_{i=1}^{6} x_{ij} = d_j, \quad j = 1,2,\cdots,8.$$

(2) 产量约束,$A_i$ 产地运到所有销地的运量和少于等于该地的产量,即

$$\sum_{j=1}^{8} x_{ij} \leqslant e_i, \quad i = 1,2,\cdots,6.$$

综上所述,建立如下线性规划模型:

$$\min \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{8} c_{ij}x_{ij},$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} \sum_{i=1}^{6} x_{ij} = d_j, & j = 1,2,\cdots,8, \\ \sum_{j=1}^{8} x_{ij} \leqslant e_i, & i = 1,2,\cdots,6, \\ x_{ij} \geqslant 0, & i = 1,2,\cdots,6; j = 1,2,\cdots,8. \end{cases}$$

利用 Matlab 软件求得的 6 个产地到 8 个销地的最优运量如表 1.3 所示(该问题的解不唯一),对应的最小运费为 664。

表 1.3　6 个产地到 8 个销地的最优运量数据

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ | $B_6$ | $B_7$ | $B_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 0 | 19 | 0 | 0 | 41 | 0 | 0 | 0 |
| $A_2$ | 1 | 0 | 0 | 32 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $A_3$ | 0 | 11 | 0 | 0 | 0 | 0 | 40 | 0 |
| $A_4$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 | 38 |
| $A_5$ | 34 | 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $A_6$ | 0 | 0 | 22 | 0 | 0 | 27 | 3 | 0 |

把表 1.2 中的数据保存到文本文件 data1_5_1.txt 中,并且在右下角位置添加一个 0。

```
clc, clear, a = load('data1_5_1.txt');
c = a(1:end-1,1:end-1);
e = a(1:end-1,end); d = a(end,1:end-1);
prob = optimproblem;
x = optimvar('x',6,8,'LowerBound',0);
prob.Objective = sum(sum(c. * x));
prob.Constraints.con1 = sum(x,1) == d;
prob.Constraints.con2 = sum(x,2)<= e;
[sol,fval,flag,out]=solve(prob), xx=sol.x
writematrix(xx, 'data1_5_2.xlsx')      % 数据写到 Excel 文件,便于做表使用
```

**3. 可以转化为线性规划的问题**

很多看起来不是线性规划的问题,也可以通过变换转化为线性规划的问题来解决。

**例 1.6**　数学规划问题

$$\min \quad |x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|,$$
$$\text{s.t.} \quad \boldsymbol{Ax}\leqslant\boldsymbol{b}.$$

式中:$\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}$;$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为相应维数的矩阵和向量。

要把上面的问题变换成线性规划问题,只要注意到事实:对任意的 $x_i$,存在 $u_i,v_i\geqslant0$ 满足

$$x_i=u_i-v_i,\quad |x_i|=u_i+v_i,$$

事实上,只要取 $u_i=\dfrac{x_i+|x_i|}{2}$,$v_i=\dfrac{|x_i|-x_i}{2}$就可以满足上面的条件。

这样,记 $\boldsymbol{u}=[u_1,u_2,\cdots,u_n]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{v}=[v_1,v_2,\cdots,v_n]^{\mathrm{T}}$,从而可以把上面的问题变成

$$\min \sum_{i=1}^{n}(u_i+v_i),$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})\leqslant\boldsymbol{b},\\ \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\geqslant0.\end{cases}$$

这里 $\boldsymbol{u}\geqslant0$ 表示向量 $\boldsymbol{u}$ 的每个分量大于等于 0。进一步把模型改写成

$$\min \sum_{i=1}^{n} (u_i + v_i),$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} [\boldsymbol{A}, -\boldsymbol{A}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} \end{bmatrix} \leqslant \boldsymbol{b}, \\ \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \geqslant 0. \end{cases}$$

**例 1.7** 求解下列数学规划问题:

$$\min z = |x_1| + 2|x_2| + 3|x_3| + 4|x_4|,$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \leqslant -2, \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 \leqslant -1, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 \leqslant -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

**解** 做变量变换 $u_i = \dfrac{x_i + |x_i|}{2}, v_i = \dfrac{|x_i| - x_i}{2}, i = 1,2,3,4$,记 $\boldsymbol{u} = [u_1, u_2, u_3, u_4]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{v} = [v_1, v_2, v_3, v_4]^{\mathrm{T}}$,则可把模型变换为线性规划模型

$$\min \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}),$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}) \leqslant \boldsymbol{b}, \\ \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \geqslant 0. \end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{c} = [1,2,3,4]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{b} = \left[-2, -1, -\dfrac{1}{2}\right]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$。

求得最优解 $x_1 = -2, x_2 = x_3 = x_4 = 0$,最优值 $z = 2$。

```
clc, clear
c = [1:4]'; b = [-2,-1,-1/2]';
a = [1,-1,-1,1;1,-1,1,-3;1,-1,-2,3];
prob = optimproblem;
u = optimvar('u',4,'LowerBound',0);
v = optimvar('v',4,'LowerBound',0);
prob.Objective = sum(c' * (u+v));
prob.Constraints.con = a * (u-v)<=b;
[sol,fval,flag,out]=solve(prob)
x = sol.u - sol.v
```

**注 1.2** 对于带有绝对值的非线性规划问题,尽量先手工进行线性化,再使用软件求解,这样可以提高求解效率。

**例 1.8** $\min\limits_{x_i}\{\max\limits_{y_i}|\varepsilon_i|\}$,其中 $\varepsilon_i = x_i - y_i$。

对于这个问题,如果我们取 $v = \max\limits_{y_i}|\varepsilon_i|$,这样,上面的问题就变换成

$$\min v,$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 - y_1 \leqslant v, x_2 - y_2 \leqslant v, \cdots, x_n - y_n \leqslant v, \\ y_1 - x_1 \leqslant v, y_2 - x_2 \leqslant v, \cdots, y_n - x_n \leqslant v. \end{cases}$$

此即通常的线性规划问题。

## 1.3 投资的收益与风险

**例 1.9(本题选自 1998 年全国大学生数学建模竞赛 A 题)** 市场上有 $n$ 种资产(如股票、债券等)$S_i(i=1,2,\cdots,n)$供投资者选择,某公司有数额为 $M$ 的一笔相当大的资金可用作一个时期的投资。公司财务分析人员对这 $n$ 种资产进行了评估,估算出在这一时期内购买资产 $S_i$ 的平均收益率为 $r_i$,并预测出购买 $S_i$ 的风险损失率为 $q_i$。考虑到投资越分散,总的风险越小,公司确定,当用这笔资金购买若干种资产时,总体风险可用所投资的 $S_i$ 中最大的一个风险来度量。

购买 $S_i$ 要付交易费,费率为 $p_i$,并且当购买额不超过给定值 $u_i$ 时,交易费按购买 $u_i$ 计算(不买当然无须付费)。另外,假定同期银行存款利率是 $r_0$($r_0=5\%$),且既无交易费又无风险。

已知 $n=4$ 时的相关数据如表 1.4 所示。

表 1.4 四种资产的相关数据

| $s_i$ | $r_i$/% | $q_i$/% | $p_i$/% | $u_i$/元 |
|---|---|---|---|---|
| $s_1$ | 28 | 2.5 | 1 | 103 |
| $s_2$ | 21 | 1.5 | 2 | 198 |
| $s_3$ | 23 | 5.5 | 4.5 | 52 |
| $s_4$ | 25 | 2.6 | 6.5 | 40 |

试给该公司设计一种投资组合方案,即用给定的资金 $M$,有选择地购买若干种资产或存银行生息,使净收益尽可能大,总体风险尽可能小。

**1. 问题分析**

这是一个组合投资问题:已知市场上可供投资的 $n+1$ 种资产的平均收益率、风险损失率以及购买资产时产生的交易费费率,设计一种投资组合方案,也就是要将可供投资的资金分成数量不等的 $n+1$ 份分别购买 $n+1$ 种资产。不同类型的资产的平均收益率和风险损失率也各不相同,因此在进行投资时,要同时兼顾两个目标:投资的净收益和风险。

**2. 符号说明**

$S_i$:可供投资的第 $i$ 种资产,$i=0,1,\cdots,n$,其中 $S_0$ 表示存入银行;

$x_i$:投资到资产 $S_i$ 的资金数量,$i=0,1,\cdots,n$,其中 $x_0$ 表示存到银行的资金数量;

$r_i$:资产 $S_i$ 的平均收益率,$i=0,1,\cdots,n$;

$q_i$:资产 $S_i$ 的风险损失率,$i=0,1,\cdots,n$,其中 $q_0=0$;

$p_i$:资产 $S_i$ 的交易费费率,$i=0,1,\cdots,n$,其中 $p_0=0$;

$u_i$:资产 $S_i$ 的投资阈值,$i=1,2,\cdots,n$。

**3. 模型假设**

(1) 可供投资的资金数额 $M$ 相当大。

(2) 投资越分散,总的风险越小,总体风险可用所投资的 $S_i$ 中最大的一个风险来度量。

(3) 可供选择的 $n+1$ 种资产(含银行存款)之间是相互独立的。

（4）每种资产可购买的数量为任意值。

（5）在当前投资周期内，$r_i, q_i, p_i, u_i(i=0,1,\cdots,n)$ 固定不变。

（6）不考虑在资产交易过程中产生的其他费用，如股票交易印花税等。

**4. 模型建立**

（1）总体风险用所投资的 $S_i$ 中最大的一个风险来衡量，即

$$\max\{q_i x_i \mid i=1,2,\cdots,n\}.$$

（2）购买 $S_i(i=1,2,\cdots,n)$ 所付交易费是一个分段函数，即

$$\text{交易费}=\begin{cases}p_i x_i, & x_i>u_i,\\ p_i u_i, & 0\leqslant x_i\leqslant u_i.\end{cases}$$

而题目所给的定值 $u_i$(单位:元)相对总投资 $M$ 很少，$p_i u_i$ 更小，这样购买 $S_i$ 的净收益可以简化为 $(r_i-p_i)x_i$。

要使净收益尽可能大，总体风险尽可能小，这是一个多目标规划模型。

目标函数为

$$\begin{cases}\max\sum_{i=0}^{n}(r_i-p_i)x_i,\\ \min\{\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{q_i x_i\}\}.\end{cases}$$

约束条件为

$$\begin{cases}\sum_{i=0}^{n}(1+p_i)x_i=M,\\ x_i\geqslant 0,\quad i=0,1,\cdots,n.\end{cases}$$

模型简化：

① 在实际投资中，投资者承受风险的程度不一样，若给定风险一个界限 $a$，使最大的一个风险 $\frac{q_i x_i}{M}\leqslant a$，则可找到相应的投资方案。这样把多目标规划变成一个目标的线性规划。

**模型一** 固定风险水平，优化收益。

$$\max\sum_{i=0}^{n}(r_i-p_i)x_i,$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\dfrac{q_i x_i}{M}\leqslant a, & i=1,2,\cdots,n,\\ \sum_{i=0}^{n}(1+p_i)x_i=M, & \\ x_i\geqslant 0, & i=0,1,\cdots,n.\end{cases}$$

② 若投资者希望总盈利至少达到水平 $k$ 以上，在风险最小的情况下寻求相应的投资组合。

**模型二** 固定盈利水平，极小化风险。

$$\min\{\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{q_i x_i\}\},$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}\sum_{i=0}^{n}(r_i-p_i)x_i\geqslant kM,\\ \sum_{i=0}^{n}(1+p_i)x_i=M,\\ x_i\geqslant 0,\quad i=0,1,\cdots,n.\end{cases}$$

③ 投资者在权衡资产风险和预期收益两方面时,希望选择一个令自己满意的投资组合。因此对风险、收益分别赋予权重 $w(0\leqslant w\leqslant 1)$ 和 $(1-w)$,$w$ 称为投资偏好系数。

**模型三** 两个目标函数加权求和。

$$\min w\{\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{q_i x_i\}\}-(1-w)\sum_{i=0}^{n}(r_i-p_i)x_i,$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}\sum_{i=0}^{n}(1+p_i)x_i=M,\\ x_i\geqslant 0,\quad i=0,1,\cdots,n.\end{cases}$$

下面求解模型一和模型三,模型二作为习题,求解时不妨取 $M=10000$ 元。

**5. 模型一的求解与分析**

1) 求解

**模型一为**

$$\max f=[0.05,0.27,0.19,0.185,0.185]\cdot[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]^{\mathrm{T}},$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}x_0+1.01x_1+1.02x_2+1.045x_3+1.065x_4=M,\\ 0.025x_1\leqslant aM,\\ 0.015x_2\leqslant aM,\\ 0.055x_3\leqslant aM,\\ 0.026x_4\leqslant aM,\\ x_i\geqslant 0(i=0,1,\cdots,4).\end{cases}$$

$a$ 是任意给定的风险度,没有具体准则,不同的投资者有不同的风险度。我们从 $a=0$ 开始,以步长 $\Delta a=0.001$ 进行循环搜索,编制程序如下:

```
clc, clear, close all
prob = optimproblem('ObjectiveSense','max');
x = optimvar('x',5,1,'LowerBound',0);
c=[0.05,0.27,0.19,0.185,0.185];          % 净收益率
Aeq=[1,1.01,1.02,1.045,1.065];           % 等号约束矩阵
prob.Objective =c*x; M = 10000;
prob.Constraints.con1 = Aeq*x==M;        % 等号约束条件
q=[0.025,0.015,0.055,0.026]';            % 风险损失率
a = 0; aa = []; QQ = []; XX = []; hold on
while a<0.05
    prob.Constraints.con2 =q.*x(2:end)<=a*M;
    [sol,Q,flag,out]= solve(prob);
```

```
    aa = [aa; a]; QQ = [QQ,Q];
    XX = [XX; sol.x']; a=a+0.001;
end
plot(aa, QQ, '*k')
xlabel('$a$','Interpreter','Latex'),
ylabel('$Q$','Interpreter','Latex','Rotation',0)
```

2) 结果分析

风险 $a$ 与收益 $Q$ 之间的关系见图 1.1。从图 1.1 可以看出：

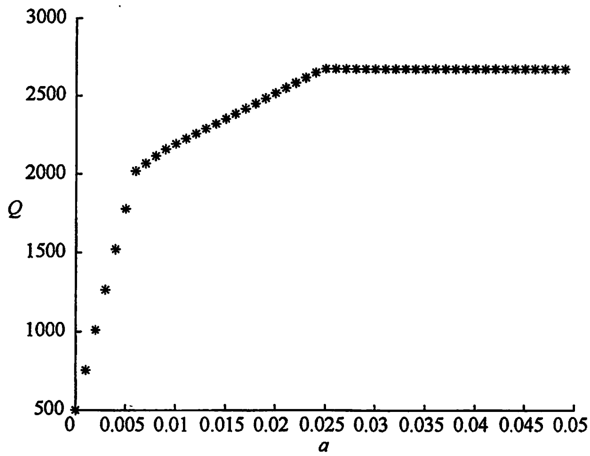


图 1.1 风险与收益的关系图

(1) 风险大，收益也大。

(2) 当投资越分散时，投资者承担的风险越小，这与题意一致。冒险的投资者会出现集中投资的情况，保守的投资者则尽量分散投资。

(3) 在 $a=0.006$ 附近有一个转折点，在这一点的左边，风险增加很少时，利润增长很快；在这一点的右边，风险增加很大时，利润增长很缓慢。所以对于风险和收益没有特殊偏好的投资者来说，应该选择曲线的转折点作为最优投资组合，大约是 $a=0.6\%$，$Q=2000$，所对应投资方案为

风险度 $a=0.006$，收益 $Q=2019$ 元，$x_0=0$ 元，$x_1=2400$ 元，$x_2=4000$ 元，$x_3=1091$ 元，$x_4=2212$ 元。

**6. 模型三的求解及分析**

1) 线性化

具体求解时，我们需要把目标函数线性化，引进变量 $x_{n+1}=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{q_ix_i\}$，则模型可线性化为

$$\min\ wx_{n+1}-(1-w)\sum_{i=0}^{n}(r_i-p_i)x_i,$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}q_ix_i\leqslant x_{n+1}, & i=1,2,\cdots,n,\\ \sum\limits_{i=0}^{n}(1+p_i)x_i=10000, & \\ x_i\geqslant 0, & i=0,1,2,\cdots,n.\end{cases}$$

2）求解及分析

可以得到当 $w$ 取不同值时风险和收益的计算结果如表 1.5 所示。

表 1.5 风险与收益数据表 （单位:元）

| $w$ | 0.0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 风险 | 247.52 | 247.52 | 247.52 | 247.52 | 247.52 | 247.52 | 247.52 | 247.52 | 92.25 | 59.4 | 0 |
| 收益 | 2673.27 | 2673.27 | 2673.27 | 2673.27 | 2673.27 | 2673.27 | 2673.27 | 2673.27 | 2164.82 | 2016.24 | 500 |

从以上数据可以看出，当投资偏好系数 $w\leqslant 0.7$ 时，所对应的收益和风险均达到最大值，此时，收益为 2673.27 元，风险为 247.52 元，全部资金均用来购买资产 $S_1$；当 $w$ 由 0.7 增加到 1.0 时，收益和风险均呈下降趋势；特别地，当 $w=1.0$ 时，收益和风险均达到最小值，收益为 500 元，风险为 0 元，此时应将所有资金全部存入银行。

为更好地描述收益和风险的对应关系，可将 $w$ 的取值进一步细化，重新计算的部分数据如表 1.6 所示，绘制收益和风险的函数关系图像如图 1.2 所示。

表 1.6 风险与收益数据表 （单位:元）

| $w$ | 0.766 | 0.767 | 0.810 | 0.811 | 0.824 | 0.825 | 0.962 | 0.963 | 1.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 风险 | 247.52 | 92.25 | 95.25 | 78.49 | 78.49 | 59.4 | 59.4 | 0 | 0 |
| 收益 | 2673.27 | 2164.82 | 2164.82 | 2105.99 | 2105.99 | 2016.24 | 2016.24 | 500 | 500 |

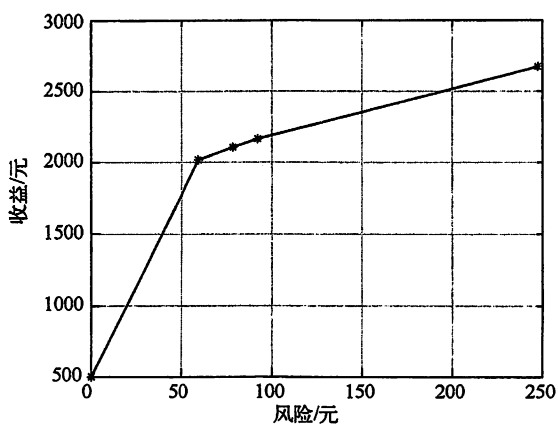


图 1.2 风险与收益对应关系图

从图 1.2 可以看出，投资的收益越大，风险也越大。投资者可以根据自己对风险喜好的不同，选择合适的投资方案。曲线的拐点坐标约为(59.4,2016.24)，此时对应的投资方案是购买资产 $S_1$、$S_2$、$S_3$、$S_4$ 的资金分别为 2375.84 元、3959.73 元、1079.93 元和 2284.46 元，存入银行的资金为 0 元，这对于风险和收益没有明显偏好的投资者是一个比较合适的选择。

```
clc, clear, close all, format long g
M =10000; prob = optimproblem;
x = optimvar('x',6,1,'LowerBound',0);
r=[0.05,0.28,0.21,0.23,0.25];                % 收益率
```

```
p=[0, 0.01, 0.02, 0.045, 0.065];                        % 交易费率
q=[0, 0.025, 0.015, 0.055, 0.026]';                     % 风险损失率
% w = 0:0.1:1
w = [0.766, 0.767, 0.810, 0.811, 0.824, 0.825, 0.962, 0.963, 1.0]
V = [];                                                 % 风险初始化
Q = [];                                                 % 收益初值化
X = [];                                                 % 最优解的初始化
prob.Constraints.con1 = (1+p)*x(1:end-1)==M;
prob.Constraints.con2 = q(2:end).*x(2:end-1)<=x(end);
for i = 1:length(w)
    prob.Objective = w(i)*x(end)-(1-w(i))*(r-p)*x(1:end-1);
    [sol,fval,flag,out]=solve(prob);
    xx = sol.x; V=[V,max(q.*xx(1:end-1))];
    Q=[Q,(r-p)*xx(1:end-1)]; X=[X; xx'];
    plot(V, Q, '*-'); grid on
    xlabel('风险(元)'); ylabel('收益(元)')
end
V, Q, format
```

**拓展阅读材料**


[1] Frederick S. Hillier, Gerald J. Lieberman. Introduction to Operations Research(Nineth Edition). New York: McGraw-Hill Companies, Inc., 2010.

[2] Matlab Optimization Toolbox User's Guide. R2019b(阅读其中的线性规划部分).


## 习 题 1

**1.1** 求解下列线性规划问题：

$$\max z=3x_1-x_2-x_3,$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_1-2x_2+x_3\leqslant 11,\\-4x_1+x_2+2x_3\geqslant 3,\\-2x_1+x_3=1,\\x_1,x_2,x_3\geqslant 0.\end{cases}$$

**1.2** 求解下列规划问题：

$$\min z=|x_1|+2|x_2|+3|x_3|+4|x_4|,$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_1-x_2-x_3+x_4=0,\\x_1-x_2+x_3-3x_4=1,\\x_1-x_2-2x_3+3x_4=-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

**1.3** 某厂生产三种产品Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ。每种产品要经过A、B两道工序加工。设该厂有两种规格的设备能完成A工序，它们以$A_1$,$A_2$表示；有三种规格的设备能完成B工序，它们以$B_1$、$B_2$、$B_3$表示。产品Ⅰ可在A、B任何一种规格设备上加工。产品Ⅱ可在任何规格的A设备上加工，但完成B工序时，只能

在 $B_1$ 设备上加工；产品Ⅲ只能在 $A_2$ 和 $B_2$ 设备上加工。已知在各种机床设备的单件工时、原材料费、产品销售单价、各种设备有效台时以及满负荷操作时机床设备的费用如表 1.7，求最优的生产计划，使该厂利润最大。

表 1.7　生产的相关数据

| 设　备 | 产　品 | | | 设备有效台时 | 满负荷时的设备费用/元 |
|---|---|---|---|---|---|
| | Ⅰ | Ⅱ | Ⅲ | | |
| $A_1$ | 5 | 10 | | 6000 | 300 |
| $A_2$ | 7 | 9 | 12 | 10000 | 321 |
| $B_1$ | 6 | 8 | | 4000 | 250 |
| $B_2$ | 4 | | 11 | 7000 | 783 |
| $B_3$ | 7 | | | 4000 | 200 |
| 原料费/(元/件) | 0.25 | 0.35 | 0.50 | | |
| 单价/(元/件) | 1.25 | 2.00 | 2.80 | | |

**1.4**　一架货机有三个货舱：前舱、中仓和后舱。三个货舱所能装载的货物的最大质量和体积有限制如表 1.8 所示。并且为了飞机的平衡，三个货舱装载的货物质量必须与其最大的容许量成比例。

表 1.8　货舱数据

| | 前　舱 | 中　仓 | 后　舱 |
|---|---|---|---|
| 质量限制/t | 10 | 16 | 8 |
| 体积限制/$m^3$ | 6800 | 8700 | 5300 |

现有四类货物用该货机进行装运，货物的规格以及装运后获得的利润如表 1.9 所示。

表 1.9　货物规格及利润表

| | 质量/t | 空间/($m^3$/t) | 利润/(元/t) |
|---|---|---|---|
| 货物 1 | 18 | 480 | 3100 |
| 货物 2 | 15 | 650 | 3800 |
| 货物 3 | 23 | 580 | 3500 |
| 货物 4 | 12 | 390 | 2850 |

假设：

(1) 每种货物可以无限细分；

(2) 每种货物可以分布在一个或者多个货舱内；

(3) 不同的货物可以放在同一个货舱内，并且可以保证不留空隙。

应如何装运，才能使货机飞行利润最大？

**1.5**　某部门在今后五年内考虑给下列项目投资，已知：

项目 A，从第一年到第四年每年年初需要投资，并于次年末回收本利 115%；

项目 B，从第三年初需要投资，到第五年末能回收本利 125%，但规定最大投资额不超过 4 万元；

项目 C，第二年初需要投资，到第五年末能回收本利 140%，但规定最大投资额不超过 3 万元；

项目 D，五年内每年初可购买公债，于当年末归还，并加利息 6%。

该部门现有资金 10 万元，问它应如何确定给这些项目每年的投资额，使到第五年末拥有的资金的

本利总额为最大？

**1.6** 食品厂用三种原料生产两种糖果，糖果的成分要求和销售价见表 1.10。

表 1.10 糖果有关数据

| | 原料 A | 原料 B | 原料 C | 价格/(元/kg) |
|---|---|---|---|---|
| 高级奶糖 | ≥50% | ≥25% | ≤10% | 24 |
| 水果糖 | ≤40% | ≤40% | ≥15% | 15 |

各种原料的可供量和成本见表 1.11。

表 1.11 各种原料数据

| 原　料 | 可供量/kg | 成本/(元/kg) |
|---|---|---|
| A | 500 | 20 |
| B | 750 | 12 |
| C | 625 | 8 |

该厂根据订单至少需要生产 600kg 高级奶糖、800kg 水果糖，为求最大利润，试建立线性规划模型并求解。

**1.7** 求解下列线性规划问题，其中矩阵 $A=(a_{ij})_{100\times150}$ 中的元素 $a_{ij}$ 为[0,10]上的随机整数。

$$\max v,$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{100} a_{ij}x_i \geqslant v, & j=1,2,\cdots,150,\\ \sum\limits_{i=1}^{100} x_i = 1, & \\ x_i \geqslant 0, & i=1,2,\cdots,100.\end{cases}$$

**1.8** 求解例 1.9 中的模型二。