Cours 4 - Jeux, contôle et synthèse

Notes par Faiz Abderrahmane

Propriété

Si dimVC($\mathcal{H}$) $= \infty \implies \mathcal{H}$ n'est pas apprenable au sens PAC

Preuve

Rappelons la définition de $\mathcal{H}$ est PAC apprenable :
$\forall\ \epsilon\ , \forall\ \delta\ , \exists\ algorithm\ , \exists\ M \in \mathbb{N}\ , \forall\ m \geq M\ , \forall\ c \in \mathcal{H}\ , \forall\ \mathcal{D}\ distribution\ sur\ X,$

$$\mathbb{P}_{S \sim \mathcal{D}^m}(err_c(h) \leq \epsilon)\ \geq\ 1 - \delta$$

Avec h la fonction retourné par l'algorithme avec l'entrée $S = \{(x_i, c(x_i))\}$
Montrons que si dimVC($\mathcal{H}$) $= \infty$ alors $\mathcal{H}$ n'est pas apprenable au sens PAC.
Soit $m \in \mathbb{N} : dimVC(\mathcal{H} \geq 2m$
$\exists Z \subseteq X : |Z| = 2m$ explosé par $\mathcal{H}$
Choisissons $\mathcal{D} = \mathcal{U}_Z$ distribution uniforme sur Z
Claim :
Etant donné un sample de taille m, n'importe quel algorithem a une erreur $\geq 1/8$ avec probabilité $\geq 1/7$

$$\mathbb{P}_{S \sim \mathcal{U}_Z^m}(err_c(h) \leq 1/8)\ \geq\ 6/7$$

Lemme 1:
Fixons A algo

$$\mathbb{E}_{c \sim \mathcal{U}_Z^m}[\mathbb{E}_{S \sim \mathcal{U}_Z^m}[err_c(h)]] \geq 1/4$$

Avec $h = A(S)$

Soient alors $\mathcal{H} \subseteq X \to \{0, 1\}$ et $\mathcal{H}_Z \subseteq Z \to \{0, 1\}$
Admettons le lemme on a donc $\forall\ A\ algo\ , \exists\ c\ \in\ \mathcal{H}_Z$

$$\mathbb{E}_{S \sim \mathcal{U}_Z^m}[err_c(h)] \geq 1/4$$

Lemme 2:
Soit V variable aléatoire à valeurs dans $[0, 1]$
Si $\mathbb{E}[V] \geq 1/4$ alors $\mathbb{P}(V \geq 1/8) \geq 1/7$

Montrons le lemme 2, pour cela on appliquera l'inégalité de Markov
Inégalité de Markov:
Soit V variable aléatoire à valeurs ≥ 0

$$\mathbb{E}[V]/a \geq \mathbb{P}(V \geq a)$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(V \geq 1/8) = 1 - \mathbb{P}(V \leq 1/8) &= 1 - \mathbb{P}(1 - V \geq 7/8) \\
&\geq 1 - 8/7 \times \mathbb{E}[1 - V] = 1 - 8/7 \times (1 - \mathbb{E}[V]) \\
&\geq 8/7 \times \mathbb{E}[V] - 1/7 \\
&\geq 8/7 \times 1/4 - 1/7 = 1/7
\end{aligned}$$

Montons le lemme 1 :
$err_c(h) = \mathbb{P}_{x \sim \mathcal{U}_Z}(h(x) \neq c(x)) = \underbrace{\mathbb{P}_{x \sim \mathcal{U}_Z}(x \notin S)\mathbb{E}_{x \sim \mathcal{U}_Z}[h(x) \neq c(x) | x \notin S]}_{?} + \underbrace{\mathbb{P}_{x \sim \mathcal{U}_Z}(x \in S)\mathbb{E}_{x \sim \mathcal{U}_Z}[h(x) \neq c(x) | x \in S]}_{\geq 0}$

Donc
$err_c(h) \geq \mathbb{P}_{x \sim \mathcal{U}_Z}(x \notin S)\mathbb{E}_{x \sim \mathcal{U}_Z}[h(x) \neq c(x) | x \notin S]$
Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_c[\mathbb{E}_S[err_c(h)]] &\geq \mathbb{E}_c[\mathbb{E}_S[\underbrace{\mathbb{P}_{x \sim \mathcal{U}_Z}(x \notin S)}_{\geq 1/2}\mathbb{E}_{x \sim \mathcal{U}_Z}[h(x) \neq c(x) | x \notin S]]] \\
&\geq 1/2 \times \underbrace{\mathbb{E}_c[\mathbb{E}_S[\mathbb{E}_{x \sim \mathcal{U}_Z}[h(x) \neq c(x) | x \notin S]]]}_{\geq 1/2} \\
&\geq 1/4
\end{aligned}$$