Une étude géométrique des classes de similitude de matrices en dimension 2

Nathanaël Fijalkow, Quentin Martin-Laval

9 avril 2008

Résumé

Ce compte-rendu s'appuie sur des notes prises par les sursignés lors d'un exposé de deux heures fait par Rached Mneimné, de l'Université Paris-Diderot, à une classe de spéciales mp* du lycée Louis-le-Grand. Cet exposé vise entre autres à donner une représentation géométrique des classes de similitude des matrices carrées de taille 2 à coefficients réels.

1 Entrée en matière

Les matrices carrées 2×2, bien que particulières, sont souvent l'objet de mathématiques intéressantes et de jolis résultats. Elles sont, bien sûr, le lieu d'expérimentations ou de vérifications d'énoncés sur les matrices carrées générales, mais elles peuvent avoir de l'intérêt pour elles-mêmes. Je vous laisse pour en juger en ce début de séance un exercice qui propose une identité polynomiale pour trois matrices quelonques de taille 2[1].

Montrez que, si A, B et C sont des matrices carrées de taille 2, on a

$$(AB - BA)^2C - C(AB - BA)^2 = 0.$$

Un calcul direct, quoiqu'un peu fastidieux, peut venir à bout de cet énoncé, mais il y a une réelle satisfaction à l'obtenir comme corollaire du théorème de Cayley-Hamilton, dont la mémorisation et la preuve sont relativement simples en dimension 2.

Théorème *(Cayley-Hamilton en dimension 2)* Si $M \in \mathcal{M}(2, \mathbb{K})$, alors

$$M^2 - \mathrm{tr}(M)M + \det(M)I_2 = 0,$$

où le scalaire $\mathrm{tr}(M)$, qui désigne la trace de la matrice M, est la somme des coefficients diagonaux de M, $\det(M)$ désignant le déterminant de M.

[1] Des identités polynomiales existent en toute dimension, et le lecteur intéressé pourrait en chercher une, déjà assez compliquée, pour les matrices 3×3.

Voici cinq exercices qui viennent illustrer d'autres applications de ce brave théorème.

Exercices.– *1) Une matrice N est dite nilpotente si l'une de ses puissances est nulle. Montrer qu'une matrice N de $\mathcal{M}(2,\mathbb{K})$ si, et seulement si,* $\operatorname{tr}(N)=0$ *et* $\det(N)=0$. *De plus, une matrice nilpotente de taille* 2 *est forcément de carré nul.*

2) Montrer qu'une matrice symétrique réelle de taille 2×2 nilpotente est nécessairement nulle. Remarquer par contre que le résultat tombe en défaut sur $\mathbb{C}$, comme le montre l'exemple de la matrice $\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix}$.

3) Montrer que pour deux matrices nilpotentes N et M d'ordre deux, la matrice $NMNM+MNMN$ est une matrice scalaire.

4) a) (Version polarisée en dimension 2 du théorème de Cayley-Hamilton) Montrer que pour deux matrices A et B quelconques

$$AB+BA-(\operatorname{tr}A)B-(\operatorname{tr}B)A=(\operatorname{tr}AB-\operatorname{tr}A\operatorname{tr}B)I_2.$$

b) En déduire que si A et B sont de trace nulle, alors $AB+BA$ est scalaire.

c) En déduire aussi que si A n'a pas de valeurs propres réelles, alors $M=AB+BA-\operatorname{tr}(A)B$ est toujours ou bien nulle ou bien inversible. (On remarquera que l'anneau $\mathbb{R}[A]\simeq\mathbb{R}[X]/(\mu_A(X))$ des polynômes en A est, sous l'hypothèse faite, un corps.)

2 Introduction

On se place dans l'algèbre $\mathcal{M}(2,\mathbb{R})$ des matrices carrées réelles de taille 2. C'est un espace vectoriel de dimension 4. On note $\mathfrak{s}l_2$ l'ensemble des matrices de trace nulle, qui, comme noyau d'une forme linéaire non nulle, est un hyperplan de $\mathcal{M}(2,\mathbb{R})$. Les « événements » dans $\mathcal{M}(2,\mathbb{R})$ qui peuvent être rapportés au cadre de l'espace $\mathfrak{s}l_2$, de dimension 3, présentent l'avantage de pouvoir être « vus » ! Remarquons d'emblée que si le produit de deux matrices A et B de trace nulle est rarement de trace nulle, le crochet $[A,B]:=AB-BA$ l'est par contre toujours. Remarquons aussi que deux matrices A et B sont semblables, c'est-à-dire que $B=PAP^{-1}$ pour P inversible, si, et seulement si, les deux matrices de trace nulle $A-(\operatorname{tr}(A)/2)I_2$ et $B-(\operatorname{tr}(B)/2)I_2$ le sont.

Puisque nous parlerons un peu de topologie, voyons tout de suite pourquoi $\mathfrak{s}l_2$ est un fermé d'intérieur vide dans $\mathcal{M}(2,\mathbb{R})$. Qu'il soit fermé provient de la continuité de la forme linéaire trace qui le définit. D'intérieur vide, cela peut se voir comme une conséquence du fait général qu'un sous-espace vectoriel strict d'un espace vectoriel normé y est d'intérieur vide : en effet, s'il contenait une boule, il contiendrait par translation et homothétie vectorielle l'espace tout entier.

Le groupe $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ agit par conjugaison sur l'espace vectoriel $\mathfrak{s}l_2$:

$$\left\{\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}(2,\mathbb{R}) \times \mathfrak{sl}_2 & \longrightarrow & \mathfrak{s}l_2 \\ (P,M) & \mapsto & PMP^{-1} \end{array}\right.$$

De façon plus précise, nous sommes en présence d'une **opération** (ou **action**) d'un groupe sur un ensemble en cela que, si l'on pose $P \cdot M = PMP^{-1}$, on a $P\cdot(Q\cdot M) = (PQ)\cdot M$ et $I_2 \cdot M = M$. L'action est dans notre cas qualifiée de linéaire puisque les bijections $M \mapsto P \cdot M$ définies par les éléments de notre groupe sont des endomorphismes linéaires.

L'ensemble $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})\cdot \mathrm{M} \overset{\mathrm{def}}{=} \{\mathrm{P}\cdot\mathrm{M}, \mathrm{P} \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})\}$ est appelé **orbite** de M et est noté $\mathcal{O}_M$. C'est tout simplement la classe de similitude de la matrice M.

Pourquoi le mot « orbite » ? Parce que, si l'on considère une autre opération de groupe, l'opération naturelle du groupe orthogonal $\mathcal{O}(E)$ sur le plan vectoriel euclidien E, définie par $g \cdot M = g(M)$, l'orbite de M est un cercle, qui a bien une forme d'orbe. À ce propos, je considère deux points distincts P et P' d'un même cercle de centre O. Combien y a-t-il de rotations planes de centre O envoyant P sur P' ? Une seule ? Deux (le conférencier fait deux mouvements circulaires de sens opposés amenant P sur P') ? Une infinité (le conférencier fait une « infinité » de mouvements circulaires amenant P sur P') ? Allez, votons ! (Une nette majorité se prononce pour deux). Bon, réfléchissez-y.

On note enfin $\mathcal{N}$ le cône nilpotent, ensemble des matrices nilpotentes de taille 2. Notons que $\mathcal{N} \subset \mathfrak{s}l_2$. Cela entraîne que $\mathcal{N}$ est d'intérieur vide dans $\mathcal{M}(2,\mathbb{R})$.

Mais $\mathcal{N}$ est d'intérieur vide aussi dans $\mathfrak{s}l_2$. Cela nous paraîtra manifeste un peu plus loin, mais dès à présent, on peut invoquer le fait général que le déterminant s'annule sur $\mathcal{N}$; or, il est bien connu que si f est une fonction polynomiale *non identiquement nulle* sur un espace vectoriel normé, l'ensemble des points où elle s'annule est d'intérieur vide. Cela résulte par exemple de la formule de Taylor pour un polynôme de plusieurs variables, formule qui correspond à la formule habituelle pour les fonctions C^∞ à ceci près qu'elle devient ici exacte pourvu qu'on la pousse assez loin. On voit bien en effet que, si f s'annule au voisinage d'un point, toutes ses dérivées partielles en ce point sont nulles, donc que f est nulle identiquement[2].

Lorsque le groupe G opère sur l'ensemble X, les orbites des différents éléments forment une partition de X. Quelle est la relation d'équivalence associée à cette partition ?

Dans le cas présent et comme annoncé plus haut, l'orbite de M n'est autre que sa **classe de similitude** (on dit aussi classe de conjugaison).

[2]Notons d'ailleurs que, plus généralement, un polynôme, disons à deux variables, qui s'annule sur le produit de deux ensembles infinis est nul.

On note donc comme convenu

$$\mathcal{O}_M = \{PMP^{-1}, P \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})\} = \mathrm{GL}(2,\mathbb{R}) \cdot \mathrm{M}$$

l'orbite de M.

Notre objectif est de déterminer et décrire de manière géométrique les différentes orbites dans $\mathfrak{sl}_2$.

3 Étude du cône nilpotent

Remarquons que $\mathcal{N} = \mathrm{tr}^{-1}(\{0\}) \cap \det^{-1}(\{0\})$. Une inclusion est évidente : si $M \in \mathcal{N}$, alors sa trace (somme des valeurs propres) et son déterminant (produit des valeurs propres) sont nuls. La réciproque découle du théorème de Cayley-Hamilton, qui s'écrit $M^2 - \mathrm{tr}(M)M + \det(M)I_2 = 0$.

Soit $M \in \mathfrak{sl}_2$, que nous écrivons $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}$.

Alors $M \in \mathcal{N}$ si, et seulement si, $x^2 + yz = 0$. L'équation de $\mathcal{N}$ ainsi obtenue est homogène de degré 2, et $\mathcal{N}$ est un gentil cône isotrope.

En posant $X = x, Y = \frac{y+z}{2}, Z = \frac{y-z}{2}$, nous ramenons l'équation de $\mathcal{N}$ à l'équation familière $X^2 + Y^2 = Z^2$.

En notant $E_{i,j}$ les matrices de la base canonique de $\mathcal{M}(2,\mathbb{R})$, on peut remarquer que $\mathfrak{sl}_2 = \langle E_{1,1} - E_{2,2}, E_{1,2} + E_{2,1}, E_{1,2} - E_{2,1} \rangle$. Ce qui donne la représentation graphique de la figure 1, sur laquelle on a placé le plan (dans $\mathfrak{sl}_2$) des matrices symétriques, noté $S_0(2,\mathbb{R})$, et la droite des matrices anti-symétriques, notée $A(2,\mathbb{R})$. En effet, $S_0(2,\mathbb{R}) = \langle E_{1,1} - E_{2,2}, E_{1,2} + E_{2,1} \rangle$ et $A(2,\mathbb{R}) = \langle E_{1,2} - E_{2,1} \rangle$.

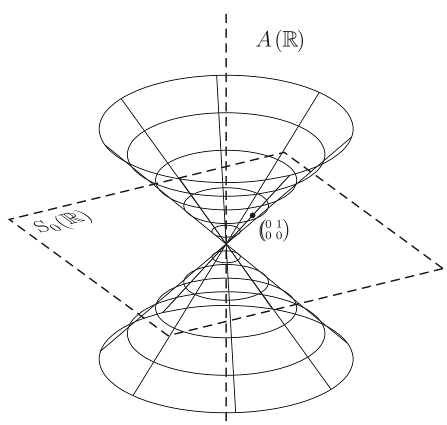


Figure 1: Orbites nilpotentes

Mais voici quelques remarques.

$\triangleright$ Le cône nilpotent épointé forme une orbite. En effet, si l'on pose $N_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors $\mathcal{N} \setminus \{0\} = \mathcal{O}_{N_0}$. Je vous laisse cela en exercice instructif.

$\triangleright$ Cette orbite est non connexe, formée de la réunion de deux demi-cônes. Les matrices N_0 et N_0^T sont bien sûr semblables. Sont-elles sur le même demi-cône ?

Pour mieux saisir la situation, le plan des matrices symétriques de trace nulle sépare les deux morceaux du cône et ne le rencontre qu'au sommet (voir exercices du début). La transposition matricielle est la symétrie par rapport à ce plan parallèlement à la droite des matrices antisymétriques.

$\triangleright$ À propos de connexité : le groupe topologique $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ n'est pas connexe ; il possède deux composantes connexes, notées $\mathrm{GL}^+(2, \mathbb{R})$ (ensemble des matrices inversibles de déterminant strictement positif), et $\mathrm{GL}^-(2, \mathbb{R})$ (ensemble des matrices inversibles de déterminant strictement négatif). Alors

$$\mathcal{O}_N = \mathrm{GL}^+(2, \mathbb{R}) \cdot \mathrm{N} \,\cup\, \mathrm{GL}^+(2, \mathbb{R}) \cdot \mathrm{N}^{\mathrm{T}},$$

les deux ensembles de l'union précédente étant de part et d'autre du plan des matrices symétriques.

Je vous demande de vérifier tout cela.

4 Étude des classes de similitudes

4.1 Des cas simples

Le singleton $\{0\}$ est une classe de similitudes, $\mathcal{O}_N = \mathcal{N} \setminus \{0\}$ en est une autre. L'adhérence de cette dernière est clairement égale à $\mathcal{N}$. Montrez d'ailleurs ce fait général que l'orbite par similitude du bloc de Jordan plein J_n (la matrice dont tous les termes sont nuls sauf ceux situés immédiatement au-dessus de la diagonale, qui valent 1) est dense dans le cône nilpotent. On pourra à cet effet noter qu'une matrice est semblable à J_n si, et seulement si, elle est semblable à une matrice triangulaire strictement supérieure dont tous les termes au-dessus de la diagonale sont non nuls.

4.2 Deux cas particuliers : les matrices symétriques et les matrices antisymétriques

Motivons ces deux cas particuliers. Plaçons-nous dans cette sous-partie à nouveau dans $\mathfrak{sl}_2$. Alors toutes les classes de similitude (dans $\mathfrak{sl}_2$) sauf une coupent soit A_2 soit S_2. Cela ne saute peut-être pas aux yeux mais cela résulte de ce qui suit.

Soit $M \in \mathfrak{sl}_2$. Montrons que M est soit diagonalisable dans $\mathcal{M}(2, \mathbb{C})$, soit nilpotente, donc dans $\mathcal{N}$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $M^2 =$

$-\det M I_2$. Si $\det M = 0$, alors $M \in \mathcal{N}$. Sinon, $X^2 + \det M$ est un polynôme annulateur de M, scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$, donc M diagonalisable dans $M(2, \mathbb{C})$.

Toujours pour $A \in \mathfrak{sl}_2 \setminus \mathcal{N}$, montrons que

$$\mathcal{O}_A = \{M \in \mathcal{M}(2, \mathbb{R}) \; ; \; \operatorname{tr} M = 0 \text{ et } \det M = \det A\}.$$

Une inclusion est évidente, puisque la similitude conserve trace et déterminant. Pour la réciproque : soit M réelle telle que $\operatorname{tr} M = 0$ et $\det M = \det A$. Alors A et M ont les mêmes valeurs propres complexes. Elles sont diagonalisables d'après ce qui précède. Elles sont donc semblables dans $\mathcal{M}(2, \mathbb{C})$ à la même matrice diagonale. Étant toutes deux réelles, il en résulte qu'elles sont semblables via une matrice de passage réelle. Je vous invite à démontrer ce résultat : deux matrices réelles semblables entre elles via une matrice de passage P complexe le sont aussi via une matrice de passage Q réelle. L'idée est d'écrire $P = P_1 + iP_2$, où P_1 et P_2 sont réelles, et de chercher une matrice $Q = P_1 + \lambda P_2$ inversible, avec λ réel.

Finalement, $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_A \Leftrightarrow x^2 + yz = -\det A$. C'est l'équation d'une quadrique. Grâce à un changement de coordonnées identique à celui fait ci-dessus, l'équation prend la forme $X^2 + Y^2 = Z^2 - \det M$. Dans ce nouveau repère, les matrices symétriques sont celles telles que $Z = 0$, les matrices anti-symétriques telles que $X = Y = 0$.

On constate que l'équation $Z = 0$ a une solution dans $\mathcal{O}_M$ si et seulement si $\det M > 0$, et que l'équation $X = Y = 0$ a une solution si et seulement si $\det M \geqslant 0$.
Ceci exprime effectivement que toute classe de similitude rencontre soit A soit S_0.

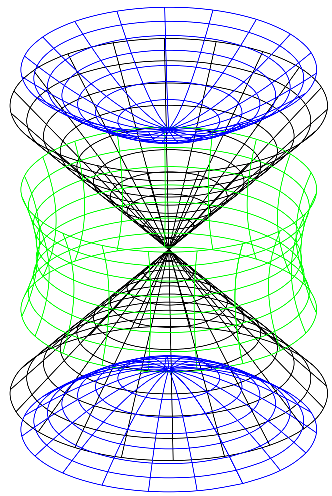
Venons-en donc aux deux cas particuliers. À l'aide du calcul précédent :

L'orbite $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R}) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ admet pour équation $X^2 + Y^2 = Z^2 + 1$: c'est un hyperboloïde à une nappe. Il en va de même dans le cas général d'une matrice symétrique non nulle.

L'orbite $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R}) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ admet pour équation $X^2 + Y^2 = Z^2 - 1$: c'est un hyperboloïde à deux nappes, comme d'ailleurs dans le cas de l'orbite de

$$\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}.$$

D'où la figure 2.



Dans le deuxième cas, il apparaît que l'orbite n'est pas connexe : l'hyperboloïde à deux nappes a, comme son nom l'indique, deux composantes connexes. *Vous vérifierez que ces nappes sont* $\mathrm{GL}^+(2,\mathbb{R})\cdot \mathrm{M}$ *et* $\mathrm{GL}^+(2,\mathbb{R})\cdot \mathrm{M}^{\mathrm{T}}$.

Les hyperboloïdes sont asymptotes au cône nilpotent.

Profitons-en pour énoncer une autre propriété des classes de similitude.

L'orbite de M est fermée exactement dans le cas où M est **semi-simple**, c'est-à-dire diagonalisable dans $M(2,\mathbb{C})$.

Ceci est là aussi un fait général.

Théorème.– La classe de similitude de M dans $M(n,\mathbb{R})$ est fermée si, et seulement si, M est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

La condition suffisante résulte de l'écriture pour A *semi-simple*

$$\mathcal{O}_A = \{M : \chi_M(X) = \chi_A(X)\} \cap \{M : \mu_A(M) = 0\}.$$

Exercices.– *1) Écrire la décomposition de Dunford pour les matrices de* $\mathfrak{s}l_2$. *2) Une classe de similitude peut-elle être ouverte ?*

4.3 Le cas général

Soit $A \in \mathcal{M}(2,\mathbb{R})$, quelconque mais non scalaire. On se rend dans $\mathfrak{s}l_2$ en posant $M = A - \frac{\operatorname{tr} A}{2} I_2$. On cherche la classe de similitude de M, qui est un hyperboloïde ou à une nappe ou à deux nappes, ou enfin un cône épointé. On en déduit celle de A par translation :

$$\mathcal{O}_{A+\lambda I_2} = \mathcal{O}_A + \lambda I_2.$$

Nous pouvons donc décrire les différentes orbites. Prenons un exemple dans $M(2, \mathbb{R})$.

- Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On pose $M = A - I_2$; sa classe de similitude est le cône nilpotent épointé. Donc la classe de similitude de A est un cône épointé de sommet I_2.
- Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. On pose $M = A - \frac{3}{2} I_2$; sa classe de similitude est une hyperboloïde à une nappe, et la classe de similitude de A est cet hyperboloïde, translaté.

5 Exercices

1) Munissons $M(2, \mathbb{R})$ du produit scalaire qui rend la base canonique orthonormée. Il est défini par $\langle M|N \rangle = \mathrm{tr}(M^T N)$. Alors $S(2, \mathbb{R})$ et $A(2, \mathbb{R})$ forment des sous-espaces supplémentaires orthogonaux dans $M(2, \mathbb{R})$. Donnez une base orthonormée de $\mathfrak{sl}_2$ (pour le produit scalaire induit) dans laquelle l'équation de $\mathcal{N}$ ait la forme $X_1^2 + Y_1^2 = k^2 Z_1^2$. Ainsi, $\mathcal{N}$ est un cône de révolution. Quel est son demi-angle au sommet ?

2) Montrez que, dans $M(n, \mathbb{R})$, une classe de similitude est bornée si, et seulement si, c'est celle d'une matrice scalaire (c'est donc un singleton). Vérifiez que la seule classe de similitude d'une matrice de $\mathfrak{sl}_2$ qui soit bornée est celle de la matrice nulle.

3) Montrez que deux matrices 2×2 de trace nulle qui commutent sont proportionnelles.

4) Pour ceux qui connaissent un peu de géométrie quadratique, donnez une interprétation géométrique du crochet de deux éléments de $\mathfrak{sl}(2, R)$. (Indication : la droite qui porte ce crochet (quand il est non nul) est la polaire du plan engendré par A et B par rapport au cône nilpotent.)

Remerciements Nous remercions vivement Jean-Yves Ducloux pour les illustrations de cette note.