

# Proposition de stage : La théorie des graphes universels pour les jeux sur les graphes

Nathanaël Fijalkow

---

**Encadrant** : Nathanaël Fijalkow (CNRS, LaBRI, Bordeaux)

**Localisation** : LaBRI (Bordeaux)

**Sujet du stage** : Ce stage propose de développer la théorie des graphes universels, dans le contexte de la construction d'algorithmes pour résoudre des jeux sur graphes.

**Thèmes** : jeux, automate, algorithme, graphe, logique

---

L'étude algorithmique des jeux sur les graphes est à l'intersection de nombreux domaines de l'informatique : issus des automates et de la logique, elle est motivée par la vérification de programmes et la synthèse de contrôleurs, et développe et met à profit des outils de la complexité, de la théorie des graphes, et de la combinatoire.

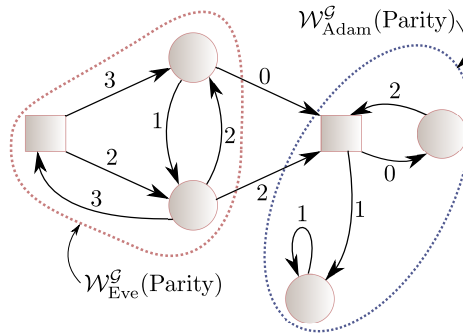


Figure 1: Un exemple d'un jeu de parité

Un exemple central est celui des jeux de partié, joués sur un graphe orienté avec deux types de sommets : les ronds sont contrôlés par Eve, et les carrés par Adam. Une partie est un chemin dans le graphe : quand le sommet courant est un rond, Eve choisit l'arête à suivre, et quand c'est un carré, Adam choisit. La condition de parité spécifie qu'une partie est gagnée par Eve si la plus grande couleur apparaissant un nombre infini de fois est paire.

On note  $\mathcal{W}_{\text{Eve}}^{\mathcal{G}}(\text{Parity})$  pour l'ensemble des sommets depuis lesquels Eve a une stratégie gagnante dans le jeu  $\mathcal{G}$  pour la condition de parité, et  $\mathcal{W}_{\text{Adam}}^{\mathcal{G}}(\text{Parity})$  pour Adam. Dans l'exemple,  $\mathcal{W}_{\text{Eve}}^{\mathcal{G}}(\text{Parity})$  est entouré en rouge, et  $\mathcal{W}_{\text{Adam}}^{\mathcal{G}}(\text{Parity})$  en bleu. Par exemple, une stratégie gagnante pour Eve consiste à jouer de manière à alterner les deux sommets haut et bas, formant une boucle avec priorités 1 et 2, donc gagnante pour Eve.

## Objectifs du stage

Les graphes universels ont été introduits récemment par Colcombet et Fijalkow [?] pour mieux comprendre la structure des récents algorithmes quasipolynomiaux pour les jeux de parité<sup>1</sup>.

L'objectif de ce stage est de développer une théorie des graphes universels, et de la développer dans plusieurs cadres, dépassant les jeux de parité. Plusieurs pistes sont proposées, elles seront explorées selon le goût et l'intérêt du stagiaire.

- Développer une notion de graphe universels pour les jeux stochastiques,
- Étudier la composition et combinaison de graphes universels, en particulier pour les jeux de paiement en moyenne,
- Construire des graphes universels pour plusieurs classes de graphes, par exemple graphes creux, planaires, de hauteur arborescente bornée, etc,
- Obtenir des bornes supérieures et inférieures sur les mesures de progrès paresseuses.

## References

[CF19] Thomas Colcombet and Nathanaël Fijalkow. Universal graphs and good for games automata: New tools for infinite duration games. In *FoSSaCS*, pages 1–26, 2019.

---

<sup>1</sup>Le lecteur intéressé pourra consulter le blog <https://games-automata-play.github.io/>.