Universidade Federal da Paraíba
Centro de Informática
Curso: Matemática Computacional
Disciplina: Probabilidade II

CÁLCULO DAS PROBABILIDADES II

LEI DOS GRANDES NÚMEROS

Grupo:

Nathan Carlos, Thomas Ribeiro

Professora:

Andrea Rocha

Resumo

O objetivo deste trabalho é mostrar a lei dos grandes números (LGN) com uma aplicação simples em python de um problema de simulação de jogadas de dados utilizando a aleatoriedade do python. Com uma amostragem de n jogadas, é calculado a esperança e comparado o resultado da média pelas jogadas.

Sumário

1 INTRODUÇÃO

A LGN tem aplicações práticas na ciência de modo geral, tal como na agricultura e na economia, dentre outras áreas importantes. É possível descobrir por meio de numerosas observações e de experiências suficientes a probabilidade de um evento natural acontecer (por exemplo, a probabilidade de chover) ou de uma fração de uma população satisfazer a uma condição (por exemplo, a probabilidade de ser produzida uma determinada quantidade de peças defeituosas em uma linha de montagem).

1.1 Lei dos grandes números (LGN)

A lei dos grandes números (LGN) é um teorema fundamental da teoria da probabilidade, que descreve o resultado da realização da mesma experiência repetidas vezes. De acordo com a LGN, a média aritmética dos resultados da realização da mesma experiência repetidas vezes tende a se aproximar do valor esperado à medida que mais tentativas se sucederem. Em outras palavras, quanto mais tentativas são realizadas, mais a probabilidade da média aritmética dos resultados observados irá se aproximar da probabilidade real.

Definição: Seja ε um experimento e A um evento associado a ε. Considerando-se n repetições independentes de ε, seja n_A o número de vezes em que A ocorra nas n repetições, e fazendo $f_A = n_A / n$. Seja $P(A) = p$

Então, para todo número positivo ε, temos :

Prob

$$\left[|f_A - p| \geqslant \varepsilon\right] \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$$

À medida que $n \to \infty$, o segundo membro da desigualdade acima tende para a unidade. É neste sentido que a média aritmética “converge” para $E(x)$.

1.2 Lei Fraca

- Lei Fraca de Chebyshev

  Sejam X_i uma sequência enumerável de variáveis aleatórias independentes dois a dois. Se a sequência X_i tem variância finita e uniformemente limitada, ou seja, existe uma constante $c \in R$ tal que $\mathrm{Var}[X_i] \leq c$. Então a sequência X_i satisfaz a Lei Fraca dos Grandes Números:

  $$\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{n} \xrightarrow{P} 0$$

  em que $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

- Lei Fraca de Khintchine

  Sejam X_i uma sequência enumerável de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas e integráveis com média μ. Então $X_i,\ i \in \mathbb{N}$ satisfazem a Lei Fraca do Grandes Números:

  $$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} \mu$$

- Lei Fraca de Bernoulli

  Seja X_i uma sequência de ensaios de bernoulli independentes, com mesma probabilidade de sucesso. Então

  $$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} p$$

  em que $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

a versão fraca da LGN (Lei Geral dos Grandes Números) determina que a média da amostra converge em probabilidade para o valor esperado. A lei fraca determina que qualquer margem diferente de 0 especificada (não importa o quão pequena ela seja), com uma amostra suficientemente grande haverá uma probabilidade muito alta que a média das observações se aproximará do valor esperado. Isto é, dentro da margem.

A variância pode ser diferente para cada variável aleatória, mantendo o valor esperado constante. Se as variâncias são limitadas, a lei fraca é aplicada. Podemos simplesmente aplicar a lei fraca para o desvio médio dos respectivos valores esperados. Então, a lei fraca determina que isso converge para probabilidade 0.

O nome "lei fraca" deve–se ao fato de as variáveis aleatórias convergem de maneira fraca ou em probabilidade.

1.3 Lei Forte

- Lei Forte de Kolmogorov

    Seja $\{X_i\}_{i\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e integráveis, e suponha que:

    $$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Var}[X_i]}{i^2} < \infty, \quad (7.1.2.1)$$ (condição de Kolmogorov)

    então

    $$\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i - \mathbb{E}[X_i]}{n} \to 0, \quad \text{quase certamente.}$$

A lei de Kolmogorov só é aplicada quando o valor esperado for diferente de infinito, pois o valor esperado implica na variância infinita.

De fato, seja X uma variável aleatória tal que $\mathbb{E}[X] = \infty$. Por definição, temos que $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[X]$. Mas, $\mathbb{E}[X] = \infty$ e $\mathbb{E}[X^2] \geq \mathbb{E}^2[X]$. Portanto, $\mathrm{Var}(X) = \infty$

Kolmogorov mostrou que se as variáveis são independentes e identicamente distribuídas, para a média convergir quase certamente para algo (o que pode ser considerado outra afirmação da Lei Forte) é necessário que elas tenham um valor esperado então, a média irá convergir quase certamente no valor esperado.

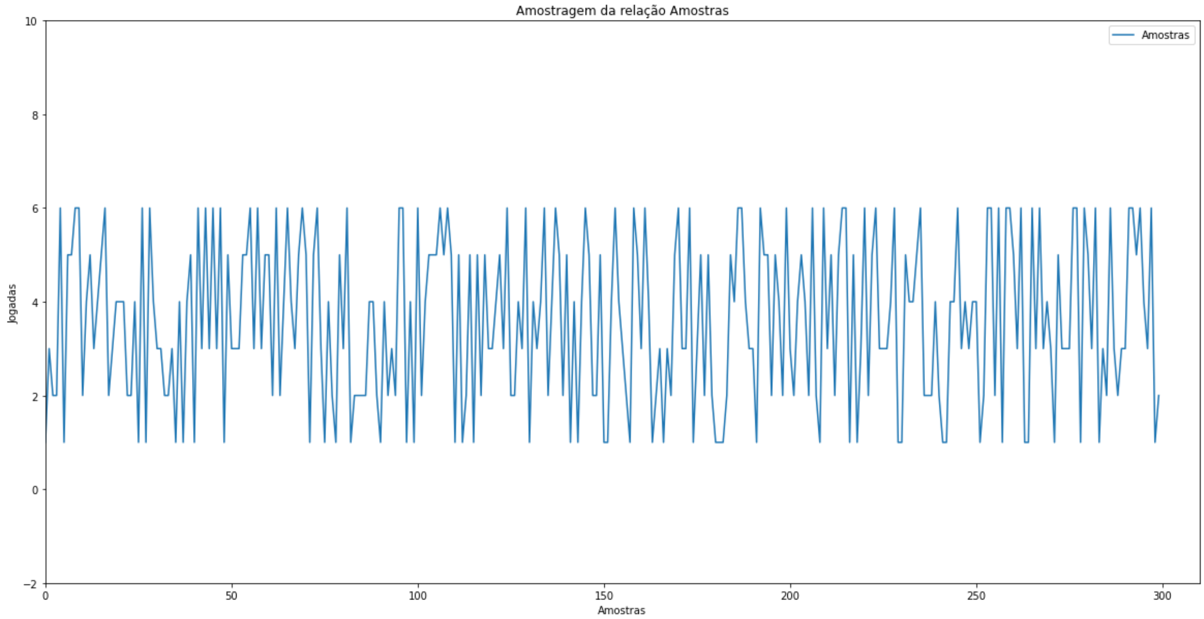
A LGN é importante porque garante resultados estáveis a longo prazo para médias de eventos aleatórios. Considere um caso particular de um jogo de roleta em um cassino. Embora o cassino possa perder dinheiro em uma única rodada de uma roleta, os seus ganhos tenderão a se aproximar de uma probabilidade da média aritmética dos resultados observados depois de um grande número de rodadas. De outra forma, qualquer série de vitórias de um apostador será superada pelos parâmetros do jogo depois de algumas rodadas.

Entretanto, a LGN se aplica apenas para um grande número de observações. Não há princípio para que um pequeno número de observações coincida com o valor esperado ou para que a sequência de um valor seja superada por outro valor imediatamente.

4 RESULTADOS

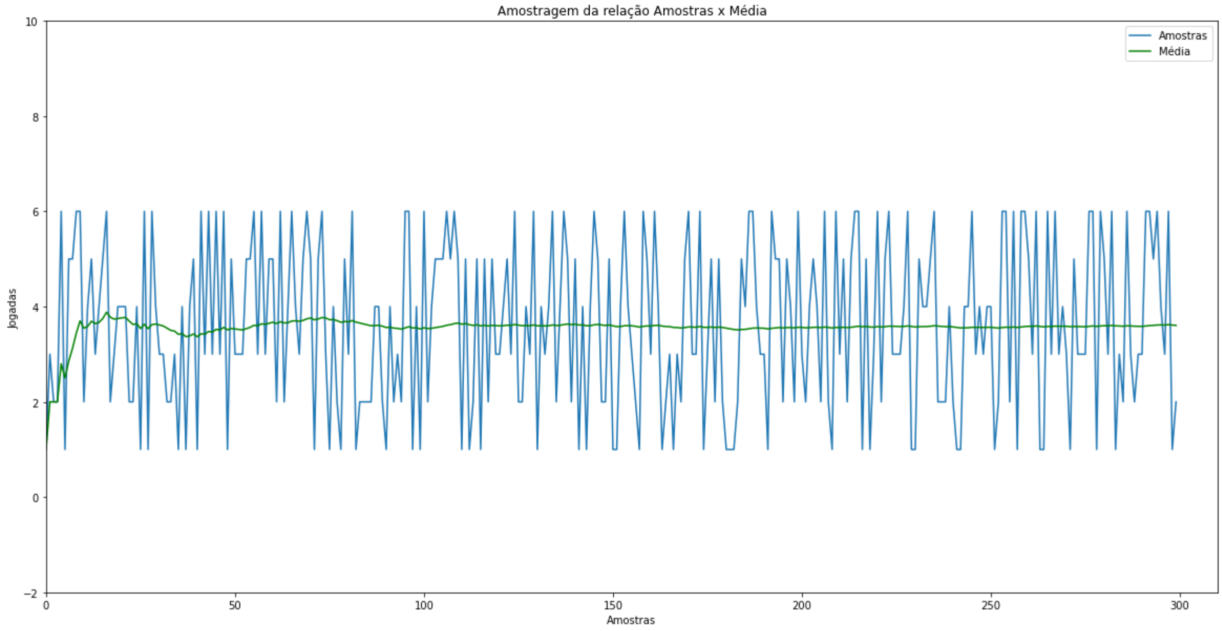
O resultado dos testes feitos com os lançamentos dos dados foi que, a medida que é aumentada a amostragem, a média vai “diminuindo” se distanciando um pouco da esperança. Porém continuando na mesma faixa de variação comprovando a lei dos grandes números em questão

Figura-1



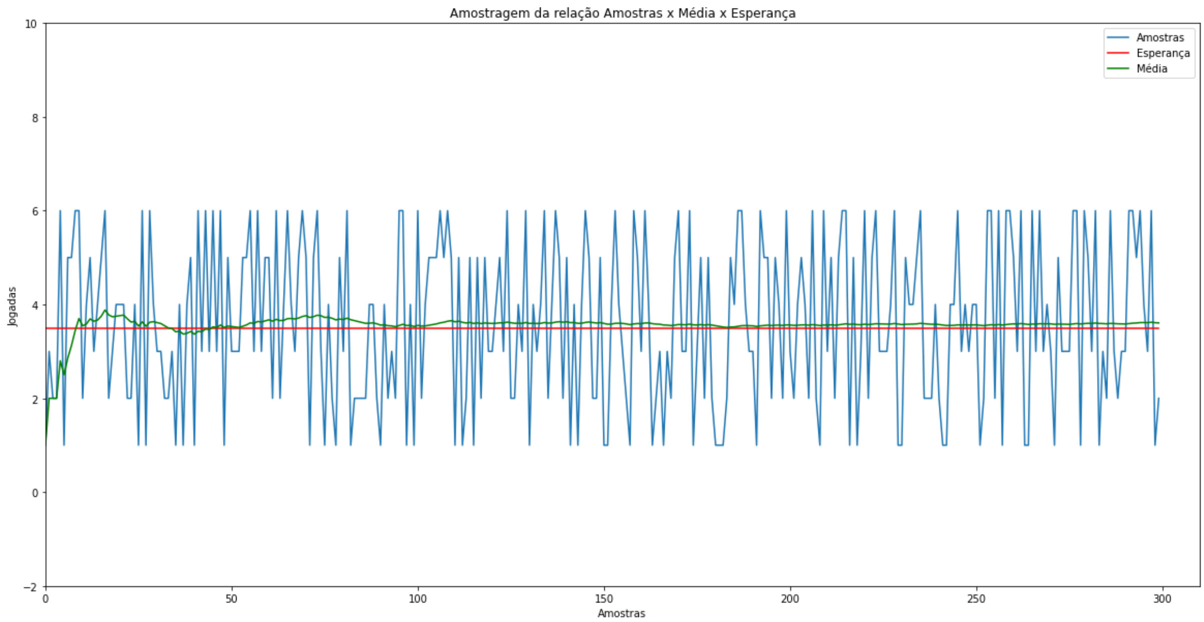
Na figura 1 mostra através do meio randômico a jogada de 300 dados aleatórios, variando entre 1 e 6. Com isso observamos que as jogadas vão convergindo lentamente para sua esperança de acordo com o número de ensaios.

Figura-2



Na figura 2 fica mais visível a convergência da sua média de acordo com o número de amostras.

Figura-3



Na figura 3 vemos que o valor da sua média converge para o valor esperado. Mostrando assim que a Lei dos grandes números é aplicada nesse cálculo.

3 REFERÊNCIAS

- *Paul L Meyer; Probabilidade Aplicações Estatística pg. 284 Teoria dos grandes números.*
- *Portal Action.**LEI FORTE DOS GRANDES NÚMEROS.** Disponivel em :<http://www.portalaction.com.br/probabilidades/722-lei-forte-dos-grandes-numeros>Acessado em: 24 de março de 2020*
- *Portal Action**.LEI FRACA DOS GRANDES NÚMEROS.** Disponivel em :<http://www.portalaction.com.br/probabilidades/721-lei-fraca-dos-grandes-numeros>Acessado em: 24 de março de 2020*
- *Wikipédia**.LEI DOS GRANDES NÚMEROS.** Disponível em :<https://pt.wikipedia.org/wiki/Lei_dos_grandes_n%C3%BAmeros> Acessado em: 23 de março de 2020.*