MTH6412B - Projet Phase 3

Victor Darleguy - Nathan Allaire

Notre code peut être retrouvé en ligne sur GitHub : https://github.com/nathanemac/Projet-Darleguy-Allaire/tree/victor_p3

```
include("../Phase 1/node.jl")
include("../Phase 1/edge.jl")
include("../Phase 1/graph.jl")
include("../Phase 1/read_stsp.jl")

plot_graph

include("../Phase 1/main.jl")

build_graph

include("../Phase 2/utils.jl")
include("../Phase 2/PriorityQueue.jl")
include("utils.jl")

WARNING: using LinearAlgebra.rank in module Main conflicts with an
existing identifier.

tracer_graphe (generic function with 1 method)

import Pkg; Pkg.add("BenchmarkTools")

    Updating registry at `~/.julia/registries/General.toml`
   Resolving package versions...
  No Changes to `~/.julia/environments/v1.7/Project.toml`
  No Changes to `~/.julia/environments/v1.7/Manifest.toml`
```

Les fonctions suivantes sont utilisées pour tracer les graphiques associés à nos résultats

```
"""
    calculate_tour_weight(tour, graph::ExtendedGraph) -> Float64

Calcule le poids total d'un circuit dans un graphe étendu.

# Arguments
- `tour` : Un vecteur des noms des nœuds représentant le circuit à
évaluer.
- `graph::ExtendedGraph` : Une instance de la structure
`ExtendedGraph` qui contient un ensemble d'arêtes avec des poids
associés.

# Retourne
- `total_weight::Float64` : Le poids total du circuit donné.
```

```
# Exemple
```julia
tour = ["A", "B", "C", "A"]  # Un exemple de circuit
graph = ExtendedGraph(...)    # Une instance de graphe étendu
total_weight = calculate_tour_weight(tour, graph)
"""

function calculate_tour_weight(tour, graph::ExtendedGraph)
    edge_weights = Dict()
    for edge in graph.edges
        edge_weights[(edge.start_node.name, edge.end_node.name)] =
edge.weight
        # Si le graphe est non orienté et que le poids est le même
dans les deux sens:
        edge_weights[(edge.end_node.name, edge.start_node.name)] =
edge.weight
    end

    total_weight = 0.0
    for i in 1:length(tour)-1
        start_node = tour[i]
        end_node = tour[i+1]
        # Vérifier si l'arête dans le sens inverse est également dans
le dictionnaire
        weight = get(edge_weights, (start_node, end_node),
get(edge_weights, (end_node, start_node), NaN))
        if isnan(weight)
            error("Le poids de l'arête entre $start_node et $end_node
est introuvable.")
        end
        total_weight += weight
    end
    return total_weight
  end
```

```
calculate_tour_weight (generic function with 1 method)
```

```
"""
tracer_graphe(tour, graph::ExtendedGraph; offset_x=0, offset_y=0,
poids_opti=1, placement_erreur=:topleft)

Trace un graphe étendu en visualisant le circuit donné.

# Arguments
- `tour` : Un vecteur des noms des nœuds représentant le circuit à
tracer.
- `graph::ExtendedGraph` : Une instance de la structure ExtendedGraph
qui contient un ensemble de nœuds avec des données de position.
```
```

```
# Options
- `offset_x` : Le décalage horizontal à appliquer aux annotations des nœuds (par défaut 0).
- `offset_y` : Le décalage vertical à appliquer aux annotations des nœuds (par défaut 0).
- `poids_opti` : Le poids optimal pour le calcul de l'erreur relative (par défaut 1).
- `placement_erreur` : La position de l'annotation de l'erreur relative (par défaut :topleft).

# Exemple
``` julia
tour = ["A", "B", "C", "A"]      # Un exemple de circuit
graph = ExtendedGraph(...)        # Une instance de graphe étendu
tracer_graphe(tour, graph)        # Tracé du circuit sur le graphe
"""
  function tracer_graphe(tour, graph::ExtendedGraph; offset_x=0, offset_y = 0, poids_opti = 1, placement_erreur = :topleft)
    dict_nodes_data = Dict(node.name => node.data for node in graph.nodes)
    xs = []
    ys = []

    weight_tour = calculate_tour_weight(tour, graph)

    for node in tour
      push!(xs, dict_nodes_data[node][1])
      push!(ys, dict_nodes_data[node][2])
    end

    plot(legend = false, title=graph.name, left_margin = 5Plots.mm, right_margin = 5Plots.mm, top_margin = 5Plots.mm, bottom_margin = 5Plots.mm)
    for i in 1:length(xs)-1
      plot!([xs[i], xs[i+1]], [ys[i], ys[i+1]], arrow=true)
    end

    scatter!(xs, ys, label="Nodes", color="blue")

    for (i, (x, y)) in enumerate(zip(xs, ys))
      annotate!(x + offset_x, y + offset_y, text(tour[i], 8))
    end
    rel = 100*round(weight_tour/poids_opti - 1, digits=2)
    annotate!(placement_erreur, text("erreur relative : $(rel)%", 9))

    display(plot!())
  end

tracer_graphe
```
```

1. Implémentation de l’algorithme de Rosenkrantz, Stearns et Lewis

a. Fonction de recherche des noeuds voisins d'un noeud

```
"""
    neighbours(graph::ExtendedGraph, node::Node) -> Array

Retourne un tableau des arêtes voisines d'un nœud spécifique dans un
graphe.

# Arguments
- `graph::ExtendedGraph`: Le graphe dans lequel rechercher les
voisins. `ExtendedGraph` doit être
  une structure définie par l'utilisateur ou une partie d'une
bibliothèque graphique, contenant
  un champ `edges` représentant les arêtes du graphe.
- `node::Node`: Le nœud pour lequel les arêtes voisines sont
recherchées. `Node` est une structure
  définissant un nœud dans le graphe.

# Exemple
g = ExtendedGraph(...)  # Création ou initialisation d'un
ExtendedGraph
n = Node(...)  # Création ou sélection d'un Node
voisins = neighbours(g, n)

Chaque arête dans graph.edges est vérifiée pour déterminer si elle est
connectée au node donné.
"""

function neighbours(graph::ExtendedGraph, node::Node)
# Initialisation d'un tableau vide pour stocker les arêtes voisines du
nœud
    edges_voisins = Edge[]
    # Parcours de toutes les arêtes dans le graphe
    for e in graph.edges
        # Vérification si l'arête courante est connectée au nœud
spécifié
        if node == e.start_node || node == e.end_node
            # Ajout de l'arête au tableau si elle est connectée au
nœud
            push!(edges_voisins, e)
        end
    end
    # Retour du tableau des arêtes voisines
    return edges_voisins
end
```

```
neighbours (generic function with 1 method)
```

b. Implementation récursive de l'algorithme de Rosenkrantz, Stearns et Lewis

```
"""
    RSL!(graph::ExtendedGraph, racine::Node, root_node::Node,
visited::Set{Node{T}}=Set{Node{T}}(),
path::Vector{Node{T}}=Vector{Node{T}}()) where T

Effectue une recherche récursive à partir d'une racine donnée dans un
graphe étendu, enregistrant le chemin parcouru.

Cette fonction modifie les ensembles `visited` et `path` en place, en
ajoutant respectivement les nœuds visités et le chemin parcouru.

# Arguments
- `graph::ExtendedGraph` : Le graphe dans lequel la recherche est
effectuée.
- `racine::Node` : Le nœud actuel à partir duquel la recherche
continue.
- `root_node::Node` : Le nœud racine à partir duquel la recherche a
commencé.
- `visited::Set{Node{T}}` : Un ensemble des nœuds déjà visités.
- `path::Vector{Node{T}}` : Un vecteur représentant le chemin
parcouru.

# Valeur de retour
- `path::Vector{Node{T}}` : Le chemin parcouru mis à jour.

# Exemple
```julia
g = ExtendedGraph(...)  # Initialiser un ExtendedGraph
root = Node(...)        # Définir un nœud racine
visited = Set{Node{T}}()
path = Vector{Node{T}}()
result_path = RSL!(g, root, root, visited, path)
"""

function RSL!(graph::ExtendedGraph, racine::Node, root_node::Node,
visited::Set{Node{T}}=Set{Node{T}}(),
path::Vector{String}=Vector{String}()) where T
    # Marquer le nœud racine comme visité
    push!(visited, racine)
    # Ajouter le nom du nœud racine au chemin
    push!(path, racine.name)
    # Obtenir les arêtes voisines du nœud racine
    edges = neighbours(graph, racine)

    # Itérer sur chaque arête voisine
    for e in edges
```
```

```
        # Déterminer le prochain nœud à visiter
        next_node = e.start_node == racine ? e.end_node : e.start_node
        # Si le prochain nœud n'a pas été visité
        if !(next_node in visited)
            # Définir le parent du prochain nœud
            next_node.parent = racine
            # Continuer la recherche récursive à partir du prochain
nœud
            RSL!(graph, next_node, root_node, visited, path)
        end
    end

    # Vérifier si tous les nœuds ont été visités
    all_visited = all(node -> node in visited, nodes(graph))

    # Si tous les nœuds ont été visités et que le dernier nœud n'est
pas le nœud racine
    if all_visited && path[end] != root_node.name
        # Ajouter le nom du nœud racine au chemin
        push!(path, root_node.name)
    end

    # Retourner le chemin parcouru
    return path
end
```

```
RSL! (generic function with 5 methods)
```

```
"""
    RSL(tsp::ExtendedGraph; kruskal_or_prim=Kruskal)

Effectue une recherche en profondeur récursive dans un arbre couvrant
minimum (MST) d'un graphe.
Le graphe MST est généré en utilisant l'algorithme de Kruskal ou de
Prim selon le paramètre.

# Arguments
- `tsp::ExtendedGraph` : Une instance de la structure de données
`ExtendedGraph`, qui représente le graphe complet à partir duquel
l'MST est construit.
- `kruskal_or_prim` : La fonction utilisée pour générer l'MST, avec
Kruskal comme valeur par défaut.

# Valeur de retour
- Un vecteur représentant le chemin parcouru en effectuant la
recherche en profondeur à partir du nœud racine dans l'MST.

# Exemple
```julia
tsp = ExtendedGraph(...)  # Initialiser un ExtendedGraph
```
```

```
path = RSL(tsp)  # Appeler la fonction RSL pour effectuer la recherche dans l'MST
"""

function RSL(tsp::ExtendedGraph; kruskal_or_prim=Kruskal)
    # Copier profondément le graphe pour ne pas modifier le graphe original pendant la création de l'MST
    graph = deepcopy(tsp)
    # Générer l'arbre couvrant minimum en utilisant l'algorithme spécifié (Kruskal ou Prim)
    mst = kruskal_or_prim(graph)
    # Sélectionner le deuxième nœud de l'MST comme nœud racine pour la recherche
    root_node = mst.nodes[2]
    # Initialiser un ensemble vide pour garder une trace des nœuds visités
    visited_nodes = Set{Node}()
    # Appeler la fonction RSL! avec l'MST, le nœud racine, et l'ensemble des nœuds visités
    return RSL!(mst, root_node, root_node, visited_nodes)
  end
```

```
RSL (generic function with 1 method)
```

c. Exemple trivial d'utilisation

```
using Plots

function create_graph()
    # 3 : exemple du cours
    a, b, c, d, e, f, g, h, i = Node("a", [0., 1.]), Node("b", [1., 2.]), Node("c", [2., 2.]), Node("d", [3., 2.]), Node("e", [4., 1.]), Node("f", [3., 0.]), Node("g", [2., 0.]), Node("h", [1., 0.]), Node("i", [1.5, 1.])
    e1 = Edge(a, b, 4.)
    e2 = Edge(b, c, 8.)
    e3 = Edge(c, d, 7.)
    e4 = Edge(d, e, 9.)
    e5 = Edge(e, f, 10.)
    e6 = Edge(d, f, 14.)
    e7 = Edge(f, c, 4.)
    e8 = Edge(f, g, 2.)
    e9 = Edge(g, i, 6.)
    e10 = Edge(g, h, 1.)
    e11 = Edge(a, h, 8.)
    e12 = Edge(h, i, 7.)
    e13 = Edge(i, c, 2.)
    e14 = Edge(b, h, 11.)
    G_cours = ExtendedGraph("graphe du cours", [a, b, c, d, e, f, g,
```

```
h, i], [e1, e2, e3, e4, e5, e6, e7, e8, e9, e10, e11, e12, e13, e14])


    graph_cours_kruskal = Kruskal(G_cours)
    graph_cours_prim = Prim(G_cours, st_node = a)

    return graph_cours_kruskal, graph_cours_prim, G_cours
  end
  kruskal, prim, cours = create_graph()
```

```
(ExtendedGraph{Vector{Float64}, Float64}("res Kruskal",
Node{Vector{Float64}}[Node{Vector{Float64}}("a", [0.0, 1.0], nothing,
0), Node{Vector{Float64}}("b", [1.0, 2.0], nothing, 0),
Node{Vector{Float64}}("c", [2.0, 2.0], nothing, 0),
Node{Vector{Float64}}("d", [3.0, 2.0], nothing, 0),
Node{Vector{Float64}}("e", [4.0, 1.0], nothing, 0),
Node{Vector{Float64}}("f", [3.0, 0.0], nothing, 0),
Node{Vector{Float64}}("g", [2.0, 0.0], nothing, 0),
Node{Vector{Float64}}("h", [1.0, 0.0], nothing, 0),
Node{Vector{Float64}}("i", [1.5, 1.0], nothing, 0)],
Edge{Vector{Float64}, Float64}[Edge{Vector{Float64}, Float64}
(Node{Vector{Float64}}("g", [2.0, 0.0], nothing, 0),
Node{Vector{Float64}}("h", [1.0, 0.0], nothing, 0), 1.0),
Edge{Vector{Float64}, Float64}(Node{Vector{Float64}}("f", [3.0, 0.0],
nothing, 0), Node{Vector{Float64}}("g", [2.0, 0.0], nothing, 0), 2.0),
Edge{Vector{Float64}, Float64}(Node{Vector{Float64}}("i", [1.5, 1.0],
nothing, 0), Node{Vector{Float64}}("c", [2.0, 2.0], nothing, 0), 2.0),
Edge{Vector{Float64}, Float64}(Node{Vector{Float64}}("a", [0.0, 1.0],
nothing, 0), Node{Vector{Float64}}("b", [1.0, 2.0], nothing, 0), 4.0),
Edge{Vector{Float64}, Float64}(Node{Vector{Float64}}("f", [3.0, 0.0],
nothing, 0), Node{Vector{Float64}}("c", [2.0, 2.0], nothing, 0), 4.0),
Edge{Vector{Float64}, Float64}(Node{Vector{Float64}}("c", [2.0, 2.0],
nothing, 0), Node{Vector{Float64}}("d", [3.0, 2.0], nothing, 0), 7.0),
Edge{Vector{Float64}, Float64}(Node{Vector{Float64}}("b", [1.0, 2.0],
nothing, 0), Node{Vector{Float64}}("c", [2.0, 2.0], nothing, 0), 8.0),
Edge{Vector{Float64}, Float64}(Node{Vector{Float64}}("d", [3.0, 2.0],
nothing, 0), Node{Vector{Float64}}("e", [4.0, 1.0], nothing, 0),
9.0)]), ExtendedGraph{Vector{Float64}, Float64}("res Prim",
Node{Vector{Float64}}[Node{Vector{Float64}}("a", [0.0, 1.0], nothing,
0), Node{Vector{Float64}}("b", [1.0, 2.0], nothing, 0),
Node{Vector{Float64}}("c", [2.0, 2.0], nothing, 0),
Node{Vector{Float64}}("d", [3.0, 2.0], nothing, 0),
Node{Vector{Float64}}("e", [4.0, 1.0], nothing, 0),
Node{Vector{Float64}}("f", [3.0, 0.0], nothing, 0),
Node{Vector{Float64}}("g", [2.0, 0.0], nothing, 0),
Node{Vector{Float64}}("h", [1.0, 0.0], nothing, 0),
Node{Vector{Float64}}("i", [1.5, 1.0], nothing, 0)],
Edge{Vector{Float64}, Float64}[Edge{Vector{Float64}, Float64}
(Node{Vector{Float64}}("a", [0.0, 1.0], nothing, 0),
Node{Vector{Float64}}("b", [1.0, 2.0], nothing, 0), 4.0),
```

Edge{Vector{Float64}, Float64}(Node{Vector{Float64}}("b", [1.0, 2.0], nothing, 0), Node{Vector{Float64}}("c", [2.0, 2.0], nothing, 0), 8.0), Edge{Vector{Float64}, Float64}(Node{Vector{Float64}}("i", [1.5, 1.0], nothing, 0), Node{Vector{Float64}}("c", [2.0, 2.0], nothing, 0), 2.0), Edge{Vector{Float64}, Float64}(Node{Vector{Float64}}("f", [3.0, 0.0], nothing, 0), Node{Vector{Float64}}("c", [2.0, 2.0], nothing, 0), 4.0), Edge{Vector{Float64}, Float64}(Node{Vector{Float64}}("f", [3.0, 0.0], nothing, 0), Node{Vector{Float64}}("g", [2.0, 0.0], nothing, 0), 2.0), Edge{Vector{Float64}, Float64}(Node{Vector{Float64}}("g", [2.0, 0.0], nothing, 0), Node{Vector{Float64}}("h", [1.0, 0.0], nothing, 0), 1.0), Edge{Vector{Float64}, Float64}(Node{Vector{Float64}}("c", [2.0, 2.0], nothing, 0), Node{Vector{Float64}}("d", [3.0, 2.0], nothing, 0), 7.0), Edge{Vector{Float64}, Float64}(Node{Vector{Float64}}("d", [3.0, 2.0], nothing, 0), Node{Vector{Float64}}("e", [4.0, 1.0], nothing, 0), 9.0)]), ExtendedGraph{Vector{Float64}, Float64}("graphe du cours", Node{Vector{Float64}}[Node{Vector{Float64}}("a", [0.0, 1.0], nothing, 0), Node{Vector{Float64}}("b", [1.0, 2.0], nothing, 0), Node{Vector{Float64}}("c", [2.0, 2.0], nothing, 0), Node{Vector{Float64}}("d", [3.0, 2.0], nothing, 0), Node{Vector{Float64}}("e", [4.0, 1.0], nothing, 0), Node{Vector{Float64}}("f", [3.0, 0.0], nothing, 0), Node{Vector{Float64}}("g", [2.0, 0.0], nothing, 0), Node{Vector{Float64}}("h", [1.0, 0.0], nothing, 0), Node{Vector{Float64}}("i", [1.5, 1.0], nothing, 0)], Edge{Vector{Float64}, Float64}[Edge{Vector{Float64}, Float64}(Node{Vector{Float64}}("a", [0.0, 1.0], nothing, 0), Node{Vector{Float64}}("b", [1.0, 2.0], nothing, 0), 4.0), Edge{Vector{Float64}, Float64}(Node{Vector{Float64}}("b", [1.0, 2.0], nothing, 0), Node{Vector{Float64}}("c", [2.0, 2.0], nothing, 0), 8.0), Edge{Vector{Float64}, Float64}(Node{Vector{Float64}}("c", [2.0, 2.0], nothing, 0), Node{Vector{Float64}}("d", [3.0, 2.0], nothing, 0), 7.0), Edge{Vector{Float64}, Float64}(Node{Vector{Float64}}("d", [3.0, 2.0], nothing, 0), Node{Vector{Float64}}("e", [4.0, 1.0], nothing, 0), 9.0), Edge{Vector{Float64}, Float64}(Node{Vector{Float64}}("e", [4.0, 1.0], nothing, 0), Node{Vector{Float64}}("f", [3.0, 0.0], nothing, 0), 10.0), Edge{Vector{Float64}, Float64}(Node{Vector{Float64}}("d", [3.0, 2.0], nothing, 0), Node{Vector{Float64}}("f", [3.0, 0.0], nothing, 0), 14.0), Edge{Vector{Float64}, Float64}(Node{Vector{Float64}}("f", [3.0, 0.0], nothing, 0), Node{Vector{Float64}}("c", [2.0, 2.0], nothing, 0), 4.0), Edge{Vector{Float64}, Float64}(Node{Vector{Float64}}("f", [3.0, 0.0], nothing, 0), Node{Vector{Float64}}("g", [2.0, 0.0], nothing, 0), 2.0), Edge{Vector{Float64}, Float64}(Node{Vector{Float64}}("g", [2.0, 0.0], nothing, 0), Node{Vector{Float64}}("i", [1.5, 1.0], nothing, 0), 6.0), Edge{Vector{Float64}, Float64}(Node{Vector{Float64}}("g", [2.0, 0.0], nothing, 0), Node{Vector{Float64}}("h", [1.0, 0.0], nothing, 0), 1.0), Edge{Vector{Float64}, Float64}(Node{Vector{Float64}}("a", [0.0, 1.0], nothing, 0), Node{Vector{Float64}}("h", [1.0, 0.0], nothing, 0), 8.0), Edge{Vector{Float64}, Float64}(Node{Vector{Float64}}("h", [1.0, 0.0], nothing, 0), Node{Vector{Float64}}("i", [1.5, 1.0], nothing, 0),

```
7.0), Edge{Vector{Float64}, Float64}(Node{Vector{Float64}}("i", [1.5,
1.0], nothing, 0), Node{Vector{Float64}}("c", [2.0, 2.0], nothing, 0),
2.0), Edge{Vector{Float64}, Float64}(Node{Vector{Float64}}("b", [1.0,
2.0], nothing, 0), Node{Vector{Float64}}("h", [1.0, 0.0], nothing, 0),
11.0)]))
```

```
# Pour cet exemple, nous utilisons l'algorithme de Kruskal sur le
graphe du cours
tour = RSL(cours)
```

```
9-element Vector{String}:
 "b"
 "a"
 "c"
 "i"
 "f"
 "g"
 "h"
 "d"
 "e"
```

```
using BenchmarkTools
_, _, g = create_graph()
benchmark_result = @benchmark RSL($g)
```

```
BenchmarkTools.Trial: 10000 samples with 1 evaluation.
 Range (min … max):  50.916 µs …  6.153 ms  ┊ GC (min … max): 0.00% …
98.70%
 Time  (median):     53.125 µs              ┊ GC (median):    0.00%
 Time  (mean ± σ):   54.207 µs ± 61.044 µs  ┊ GC (mean ± σ):  1.12% ±
0.99%
```

```
  50.9 µs         Histogram: frequency by time        61.5 µs <

 Memory estimate: 9.59 KiB, allocs estimate: 153.
```

```
println(benchmark_result)
```

```
Trial(50.916 µs)
```

d. Essayons maintenant la fonction 'RSL' sur un fichier tsp

```
# Les plots des tsp des villes :
g1 = build_graph("../Phase 1/instances/stsp/bays29.tsp", "bays29")
g2 = build_graph("../Phase 1/instances/stsp/dantzig42.tsp",
"dantzig42")
g3 = build_graph("../Phase 1/instances/stsp/gr120.tsp", "gr120")
```

```
ExtendedGraph{Vector{Float64}, Float64}("gr120", Node{Vector{Float64}}
[Node{Vector{Float64}}("1", [8.0, 124.0], nothing, 0),
Node{Vector{Float64}}("2", [125.0, 80.0], nothing, 0),
Node{Vector{Float64}}("3", [97.0, 74.0], nothing, 0),
Node{Vector{Float64}}("4", [69.0, 96.0], nothing, 0),
Node{Vector{Float64}}("5", [106.0, 46.0], nothing, 0),
Node{Vector{Float64}}("6", [49.0, 57.0], nothing, 0),
Node{Vector{Float64}}("7", [80.0, 125.0], nothing, 0),
Node{Vector{Float64}}("8", [42.0, 93.0], nothing, 0),
Node{Vector{Float64}}("9", [104.0, 94.0], nothing, 0),
Node{Vector{Float64}}("10", [35.0, 17.0], nothing, 0)  …
Node{Vector{Float64}}("111", [16.0, 89.0], nothing, 0),
Node{Vector{Float64}}("112", [66.0, 50.0], nothing, 0),
Node{Vector{Float64}}("113", [98.0, 194.0], nothing, 0),
Node{Vector{Float64}}("114", [87.0, 45.0], nothing, 0),
Node{Vector{Float64}}("115", [132.0, 87.0], nothing, 0),
Node{Vector{Float64}}("116", [52.0, 99.0], nothing, 0),
Node{Vector{Float64}}("117", [50.0, 212.0], nothing, 0),
Node{Vector{Float64}}("118", [103.0, 176.0], nothing, 0),
Node{Vector{Float64}}("119", [84.0, 91.0], nothing, 0),
Node{Vector{Float64}}("120", [31.0, 140.0], nothing, 0)],
Edge{Vector{Float64}, Float64}[Edge{Vector{Float64}, Float64}
(Node{Vector{Float64}}("1", [8.0, 124.0], nothing, 0),
Node{Vector{Float64}}("1", [8.0, 124.0], nothing, 0), 0.0),
Edge{Vector{Float64}, Float64}(Node{Vector{Float64}}("1", [8.0,
124.0], nothing, 0), Node{Vector{Float64}}("2", [125.0, 80.0],
nothing, 0), 534.0), Edge{Vector{Float64}, Float64}
(Node{Vector{Float64}}("2", [125.0, 80.0], nothing, 0),
Node{Vector{Float64}}("2", [125.0, 80.0], nothing, 0), 0.0),
Edge{Vector{Float64}, Float64}(Node{Vector{Float64}}("1", [8.0,
124.0], nothing, 0), Node{Vector{Float64}}("3", [97.0, 74.0], nothing,
0), 434.0), Edge{Vector{Float64}, Float64}(Node{Vector{Float64}}("2",
[125.0, 80.0], nothing, 0), Node{Vector{Float64}}("3", [97.0, 74.0],
nothing, 0), 107.0), Edge{Vector{Float64}, Float64}
(Node{Vector{Float64}}("3", [97.0, 74.0], nothing, 0),
Node{Vector{Float64}}("3", [97.0, 74.0], nothing, 0), 0.0),
Edge{Vector{Float64}, Float64}(Node{Vector{Float64}}("1", [8.0,
124.0], nothing, 0), Node{Vector{Float64}}("4", [69.0, 96.0], nothing,
0), 294.0), Edge{Vector{Float64}, Float64}(Node{Vector{Float64}}("2",
[125.0, 80.0], nothing, 0), Node{Vector{Float64}}("4", [69.0, 96.0],
nothing, 0), 241.0), Edge{Vector{Float64}, Float64}
(Node{Vector{Float64}}("3", [97.0, 74.0], nothing, 0),
Node{Vector{Float64}}("4", [69.0, 96.0], nothing, 0), 148.0),
Edge{Vector{Float64}, Float64}(Node{Vector{Float64}}("4", [69.0,
96.0], nothing, 0), Node{Vector{Float64}}("4", [69.0, 96.0], nothing,
0), 0.0)  …  Edge{Vector{Float64}, Float64}(Node{Vector{Float64}}
("111", [16.0, 89.0], nothing, 0), Node{Vector{Float64}}("120", [31.0,
140.0], nothing, 0), 299.0), Edge{Vector{Float64}, Float64}
(Node{Vector{Float64}}("112", [66.0, 50.0], nothing, 0),
Node{Vector{Float64}}("120", [31.0, 140.0], nothing, 0), 448.0),
```

```
Edge{Vector{Float64}, Float64}(Node{Vector{Float64}}("113", [98.0,
194.0], nothing, 0), Node{Vector{Float64}}("120", [31.0, 140.0],
nothing, 0), 327.0), Edge{Vector{Float64}, Float64}
(Node{Vector{Float64}}("114", [87.0, 45.0], nothing, 0),
Node{Vector{Float64}}("120", [31.0, 140.0], nothing, 0), 500.0),
Edge{Vector{Float64}, Float64}(Node{Vector{Float64}}("115", [132.0,
87.0], nothing, 0), Node{Vector{Float64}}("120", [31.0, 140.0],
nothing, 0), 543.0), Edge{Vector{Float64}, Float64}
(Node{Vector{Float64}}("116", [52.0, 99.0], nothing, 0),
Node{Vector{Float64}}("120", [31.0, 140.0], nothing, 0), 212.0),
Edge{Vector{Float64}, Float64}(Node{Vector{Float64}}("117", [50.0,
212.0], nothing, 0), Node{Vector{Float64}}("120", [31.0, 140.0],
nothing, 0), 317.0), Edge{Vector{Float64}, Float64}
(Node{Vector{Float64}}("118", [103.0, 176.0], nothing, 0),
Node{Vector{Float64}}("120", [31.0, 140.0], nothing, 0), 320.0),
Edge{Vector{Float64}, Float64}(Node{Vector{Float64}}("119", [84.0,
91.0], nothing, 0), Node{Vector{Float64}}("120", [31.0, 140.0],
nothing, 0), 347.0), Edge{Vector{Float64}, Float64}
(Node{Vector{Float64}}("120", [31.0, 140.0], nothing, 0),
Node{Vector{Float64}}("120", [31.0, 140.0], nothing, 0), 0.0)])
```

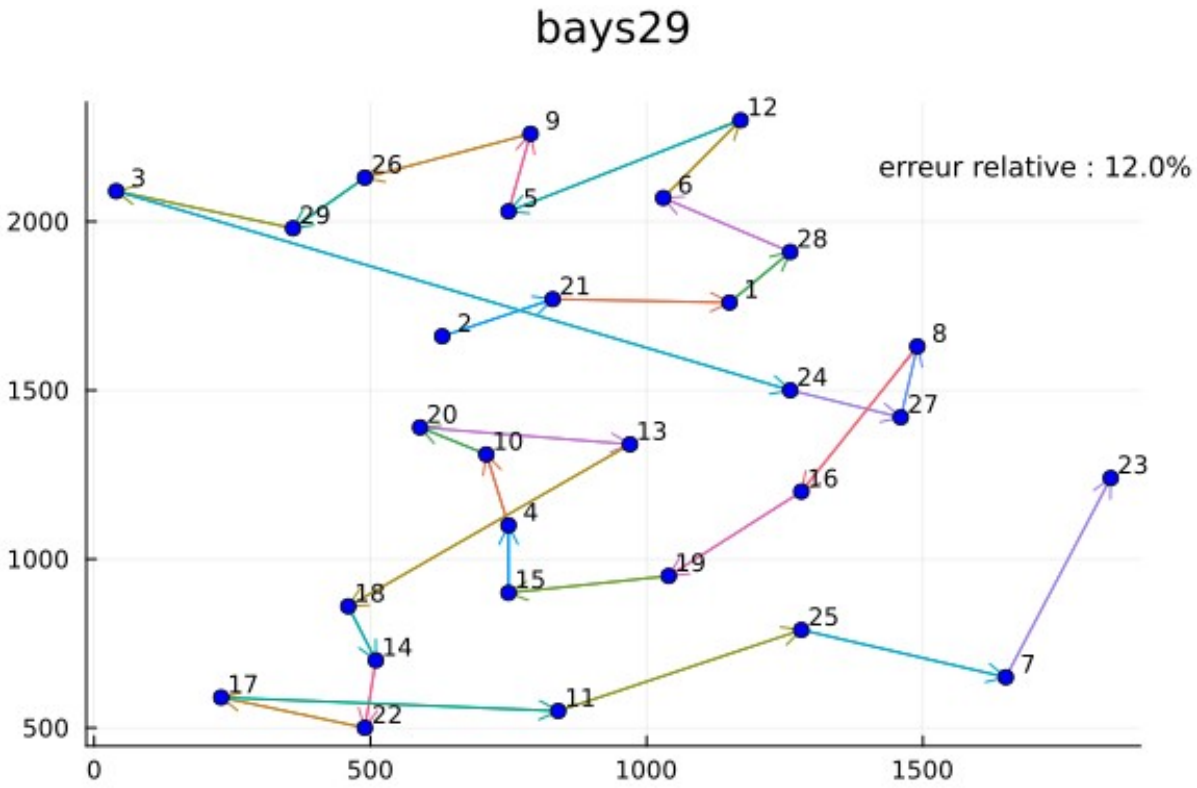
```
rg1 = RSL(g1)
rg2 = RSL(g2)
rg3 = RSL(g3)
```

```
120-element Vector{String}:
 "2"
 "115"
 "11"
 "51"
 "9"
 "23"
 "103"
 "119"
 "82"
 "3"
 ⋮
 "15"
 "59"
 "120"
 "76"
 "1"
 "4"
 "40"
 "72"
 "105"
```

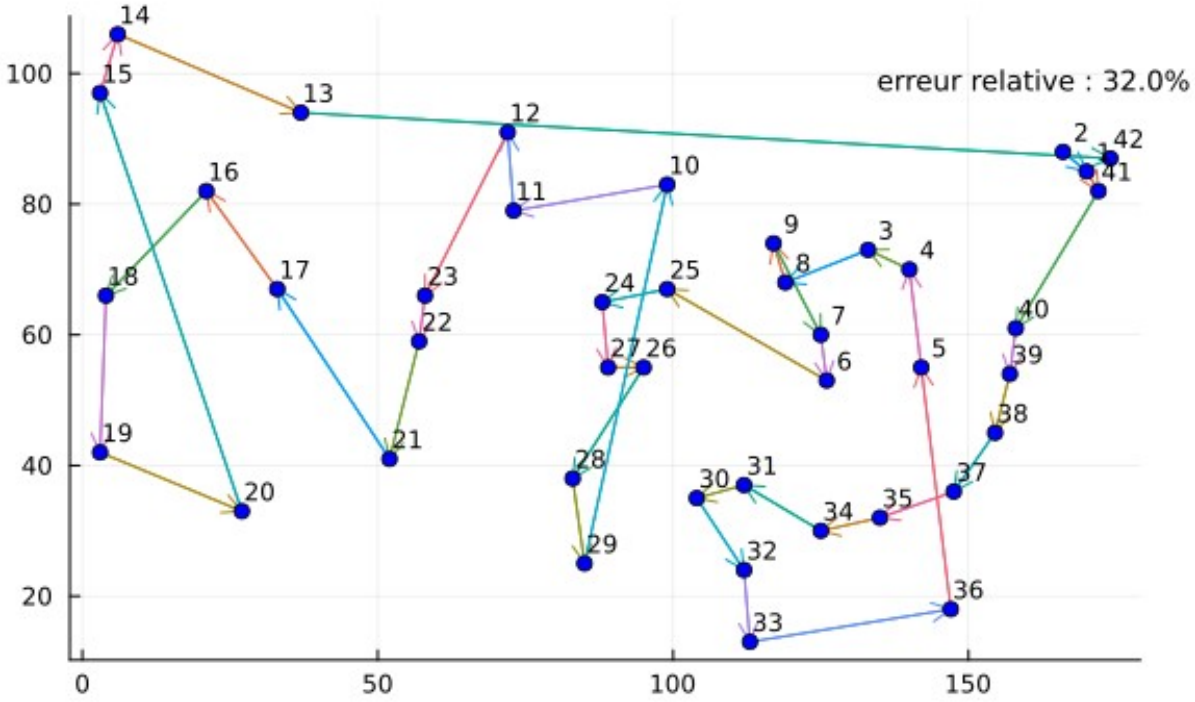
e. Traçons les tournées obtenues :

Dans les graphes suivants, l'erreur relative représente l'écart à la tournée optimale. Le numéro associé à chaque point est le nom du noeud ayant été tracé avec ses coordonnées dans son champs `data`. Les flèches indiquent le sens du parcours.

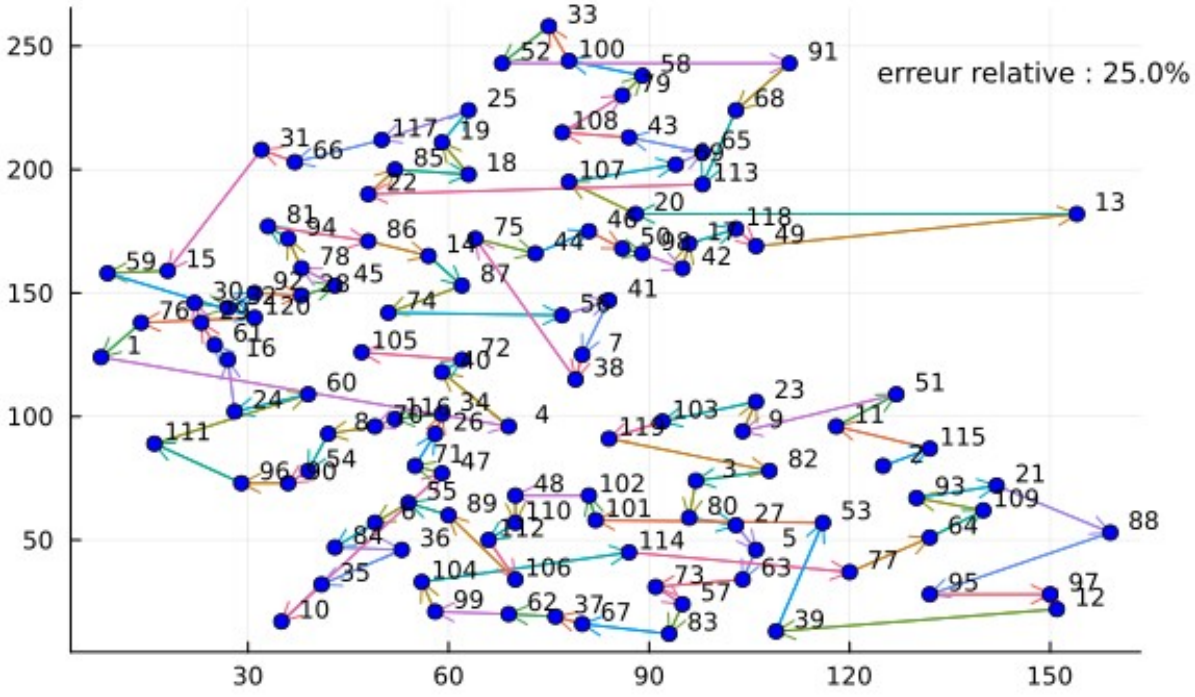
```
tracer_graphe(rg1, g1, offset_x = 40, offset_y = 40, poids_opti=2020,
placement_erreur=:topright)
tracer_graphe(rg2, g2, offset_x = 3, offset_y=3, poids_opti=699,
placement_erreur=:topright)
tracer_graphe(rg3, g3, offset_x = 5, offset_y=5, poids_opti=6942,
placement_erreur=:topright)
```



dantzig42



gr120



```
g1 = build_graph("../Phase 1/instances/stsp/bays29.tsp", "bays29")
g2 = build_graph("../Phase 1/instances/stsp/dantzig42.tsp",
"dantzig42")
g3 = build_graph("../Phase 1/instances/stsp/gr120.tsp", "gr120")
benchmark_result_g1 = @benchmark RSL($g1)
benchmark_result_g2 = @benchmark RSL($g2)
benchmark_result_g3 = @benchmark RSL($g3)
```

```
BenchmarkTools.Trial: 270 samples with 1 evaluation.
 Range (min … max):  18.357 ms …  23.169 ms  ┊ GC (min … max): 0.00% …
19.16%
 Time  (median):     18.451 ms               ┊ GC (median):    0.00%
 Time  (mean ± σ):   18.528 ms ± 492.223 µs  ┊ GC (mean ± σ):  0.27% ±
2.02%
```

```
  18.4 ms         Histogram: frequency by time         18.8 ms <

 Memory estimate: 923.72 KiB, allocs estimate: 15977.
```

Pour RSL, nous avons essayé de changer de noeud racine, mais cela a très peu voir pas d'impact sur le poids de la tournée optimale trouvée. Une autre heuristique pourrait être de parcourir le graphe en post-ordre plutôt qu'en pré-ordre, mais nous n'avons pas eu le temps de l'implémenter.

```
benchmark_result_g2
```

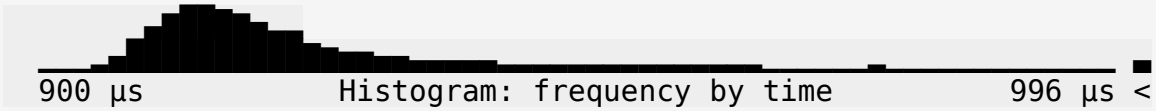
```
BenchmarkTools.Trial: 2468 samples with 1 evaluation.
 Range (min … max):  1.934 ms …   7.170 ms  ┊ GC (min … max): 0.00% …
71.93%
 Time  (median):     1.988 ms               ┊ GC (median):    0.00%
 Time  (mean ± σ):   2.023 ms ± 259.334 µs  ┊ GC (mean ± σ):  0.60% ±
3.48%
```

```
  1.93 ms         Histogram: frequency by time        2.35 ms <

 Memory estimate: 179.77 KiB, allocs estimate: 2329.
```

```
benchmark_result_g1
```

```
BenchmarkTools.Trial: 5359 samples with 1 evaluation.
 Range (min … max):  899.916 µs …   7.875 ms  ┊ GC (min … max): 0.00%
… 87.33%
 Time  (median):     918.500 µs               ┊ GC (median):    0.00%
 Time  (mean ± σ):   931.475 µs ± 221.741 µs  ┊ GC (mean ± σ):  0.79%
±  2.91%
```




```
 Memory estimate: 74.02 KiB, allocs estimate: 1240.
```

2. Implémentation l'algorithme de montée de Held et Karp (HK)

a. Définissons une fonction permettant de supprimer un nœud et ses arêtes incidentes d'un graphe :

```
using LinearAlgebra
using Printf

"""
    remove_node_and_edges(graph::ExtendedGraph, special_node::Node) ::
ExtendedGraph

Enlève un nœud spécifique et toutes les arêtes incidentes à ce nœud
d'un graphe étendu, et retourne le nouveau graphe.

# Arguments
- `graph::ExtendedGraph` : Le graphe original à partir duquel le nœud
et les arêtes seront enlevés.
- `special_node::Node` : Le nœud à enlever du graphe.

# Retour
- `ExtendedGraph` : Une nouvelle instance de `ExtendedGraph` qui est
une copie du graphe original avec le nœud spécifique et toutes ses
arêtes incidentes enlevés.

# Exemples
```julia
graph = ExtendedGraph(...)  # Un graphe étendu original
special_node = Node(...)    # Le nœud à enlever
new_graph = remove_node_and_edges(graph, special_node)
Cette fonction est utile pour manipuler des graphes lorsque vous avez
besoin d'évaluer les conséquences de la suppression d'un nœud et de
ses arêtes connectées, par exemple, dans des scénarios de résilience
de réseau ou d'optimisation de graphe.
"""
function remove_node_and_edges(graph::ExtendedGraph,
special_node::Node) :: ExtendedGraph
  # Copie le graphe
  new_graph = deepcopy(graph)

  # Supprime les arêtes incidentes au nœud spécial
```
```

```
  new_graph.edges = filter(e -> e.start_node != special_node &&
e.end_node != special_node, new_graph.edges)

  # Supprime également le nœud spécial
  new_graph.nodes = filter(n -> n != special_node, new_graph.nodes)

  return new_graph
end
```

`remove_node_and_edges`

b. Fonction permettant de trouver un 1-arbre minimum à partir d'un nœud spécifié

```
"""
    find_minimum_1tree(graph::ExtendedGraph;
special_node::Node=graph.nodes[1], kruskal_or_prim=Kruskal) ->
ExtendedGraph

Trouve un 1-arbre minimum dans un graphe étendu à partir de
`special_node``

# Arguments
- `graph::ExtendedGraph` : Le graphe dans lequel trouver le 1-arbre
minimum.
- `special_node::Node` : Le nœud spécial pour lequel le 1-arbre est
construit (par défaut le premier nœud du graphe).

# Keyword Arguments
- `kruskal_or_prim` : La fonction de génération de MST à utiliser;
Kruskal est utilisée par défaut.

# Retour
- `ExtendedGraph` : Le graphe étendu contenant le 1-arbre minimum.

# Exemples
```julia
graph = ExtendedGraph(...)  # Un graphe étendu original
special_node = graph.nodes[1]  # Un nœud spécial
one_tree = find_minimum_1tree(graph, special_node=special_node)
Cette fonction est utile pour les problèmes d'optimisation de graphe,
comme le problème du voyageur de commerce (TSP), où le 1-arbre minimum
peut servir d'approximation initiale ou de borne inférieure pour le
chemin le plus court.
"""
function find_minimum_1tree(graph::ExtendedGraph;
special_node::Node=graph.nodes[1], kruskal_or_prim = Kruskal)
  # Retire le nœud spécial et toutes ses arêtes incidentes du graphe
  subgraph = remove_node_and_edges(graph, special_node)

  # Trouve un mst pour subgraph
```
```

```
  if kruskal_or_prim == Prim
    mst = Prim(subgraph, st_node = subgraph.nodes[1])
  else
    mst = Kruskal(subgraph)
  end

  # Récupère les arêtes incidentes du nœud spécial dans le graphe
d'origine
  special_node_edges = filter(e -> e.start_node == special_node ||
e.end_node == special_node, graph.edges)

  # Trie ces arêtes par poids
  sorted_edges = sort(special_node_edges, by = e -> e.weight)

  # Sélectionne les deux arêtes les moins chères
  cheapest_edges = sorted_edges[1:2]

  # Ajoute ces arêtes à l'arbre couvrant minimum pour former un 1-
arbre
  for edge in cheapest_edges
      push!(mst.edges, edge)
  end

  # Ajoute special_node à subgraph
  push!(subgraph.nodes, special_node)
  sort!(mst.nodes, by = node -> node.name)
  mst
end

find_minimum_1tree
```

c. Fonction par défaut permettant de calculer tk pour l'algorithme Held-Karp. Cette fonction peut être remplacée par une autre propre à l'utilisateur dans les paramètres de HK. Nous avons souhaité ne pas implémenter le 1/k de base de l'article pour accélérer la convergence. Cela a eu pour effet de faire converger l'algorithme en 15 itérations au lieu de 17 pour le graphe du cours.

```
"""
    compute_tk(k::Int; div::Int=100) -> Float64

Calculer la valeur de tk dans une séquence, où tk est l'inverse de
l'élément à la position `k` modulo `div` dans une séquence de 1 à
`div`.

# Arguments
- `k::Int` : L'indice de la séquence pour lequel calculer la valeur
tk.
- `div::Int=100` : Le diviseur et la taille de la séquence, par défaut
à 100.

# Retour
```

```
- `Float64` : La valeur de tk.

# Exemples
```julia
tk_value = compute_tk(256)  # Cela retournera l'inverse de 57, car 256
% 100 + 1 = 57
Cette fonction est utile pour générer des valeurs inverses dans une
séquence prédéterminée. Elle peut être utilisée dans des simulations
ou des calculs nécessitant une série d'inverses basée sur des indices
modulaires.
"""
function compute_tk(k::Int; div::Int=100)
  K = [i for i = 1:div]
  return 1/K[k%div + 1]
end

compute_tk
```

e. Et voici notre implémentation de l'algorithme Held-Karp qui renvoie une tournée optimale pour un graphe connecté non orienté donné.

Les agruments optionnels laissent une grande liberté à l'utilisateur. PS : le paramètre epsilon est assez pauvre de sens car vk est un vecteur d'entiers. Une amélioration possible serait de simplement vérifier si vk est composé uniquemment de zéros. Nous éviterions alors le calcul d'une norme ou de potentiels problèmes de convergence (exemple si vk est très grand, et qu'une seule valeur est à 1, il est possible que le critère d'arrêt avec epsilon soit respecté même si l'algorithme n'a pas convergé à une solution optimale).

```
"""
    `HK(graph; kwargs...)`

Implémente une partie de l'algorithme de HK renvoyant une tournée
optimale d'un graphe connexe non-orienté.

# Argument :
- `graph::ExtendedGraph` est le graphe dont on doit trouver une
tournée

# Arguments optionnels
- `kruskal_or_prim` = Kruskal : fonction au choix (Prim ou Kruskal)
pour déterminer un arbre de recouvrement minimal
- `special_node::Node` = graph.nodes[1] : noeud spécial pour
déterminer un 1-tree minimal
- `maxIter::Int = 1000` : nombre maximal d'itérations
- `ϵ::Real = 1e-3` : lorsque chaque noeud a exactement deux voisins,
vk = zeros(length(graph.nodes)) donc sa norme est proche de 0
- `verbose::Int=-1` : si > 0, affiche des détails de l'itération
courante toutes les `verbose` itérations
- `compute_tk::Function = compute_tk` : fonction de calcul par défaut
de tk, voir `compute_tk` pour davantage d'informations. Cet argument
```
```

```
peut être modifié afin d'implémenter une méthode de calcul de tk
propre à l'utilisateur.

# Sortie :
`Tk::ExtendedGraph` : graphe dont les arêtes forment une tournée
optimale si le critère sur ϵ a été atteint. Sinon, s'arrête en maxIter
itérations.

"""
function HK(graph::ExtendedGraph; kruskal_or_prim = Kruskal,
                                  special_node::Node = graph.nodes[1],

                                  maxIter::Int = 1000,
                                  ϵ::Real = 1e-3,
                                  verbose::Int=-1,
                                  compute_tk::Function = compute_tk,
                                  )

  graph_copy = deepcopy(graph)
  ### Initialisation ###
  n = length(graph_copy.nodes)
  k = 0
  πk = zeros(n)
  Tk = find_minimum_1tree(graph_copy, special_node = special_node,
kruskal_or_prim = kruskal_or_prim)
  weights = map(edge -> edge.weight, Tk.edges)
  total_weight = sum(weights)
  tk = 1

  # calcul de dk :
  dk = []
  V = []
  for node in Tk.nodes
    voisins = neighbours(Tk, node)
    push!(V, voisins)
    push!(dk, length(voisins))
  end

  # calcul de vk :
  vk = dk .- 2
  nvk = norm(vk)

  if verbose > 0 && mod(k, verbose) == 0
    @info @sprintf "%5s  %9s  %7s  %7s " "iter" "tk" "‖vk‖"
"weight_graph"
    infoline = @sprintf "%5d  %9.2e  %7.1e  %7.1e" k tk nvk
total_weight
  end

  while nvk > ϵ && k < maxIter # vk tend vers 0 composante par
```

```
composante, donc sa norme tend vers 0
    # On met à jour πk avec vk
    πk .= πk .+ tk .* vk

    # On met à jour le poids des arêtes
    for i=1:n
      current_node = graph_copy.nodes[i]
      for e in graph_copy.edges
        if (e.start_node == current_node || e.end_node ==
current_node)
          e.weight += πk[i]
        end
      end
    end

    # On cherche le 1-arbre minimal correspondant au graphe mis à jour
    Tk = find_minimum_1tree(graph_copy)
    weights = map(edge -> edge.weight, Tk.edges)
    total_weight = sum(weights)
    total_weight
    k += 1
    tk = compute_tk(k)

    dk = []
    V = []
    for node in Tk.nodes
      voisins = neighbours(Tk, node)
      push!(V, voisins)
      push!(dk, length(voisins))
    end

    # Calcul de vk pour le graphe mis à jour :
    vk = dk .- 2
    nvk = norm(vk)

    if verbose > 0 && mod(k, verbose) == 0
      @info infoline
      infoline = @sprintf "%5d  %9.2e  %7.1e  %7.1e" k tk nvk
total_weight
    end

    if k == maxIter && verbose > 0
      println("maximum iteration criterion reached at k = $k")
    elseif nvk ≤ ϵ && verbose > 0
      println("algorithm converged to a optimal tour at k = $k")
    end
  end
  Tk.name = "Optimal tour"

  # Enfin, on stocke les arêtes formant la tournée (optimale ou non)
```

```
dans le graphe.
  final_edges = []
  for e_tk in Tk.edges
    for e in graph.edges
      if e_tk.start_node == e.start_node && e_tk.end_node ==
e.end_node
        push!(final_edges, e)
      end
    end
  end
  Tk.edges = final_edges

  weights = map(edge -> edge.weight, Tk.edges)
  total_weight = sum(weights)

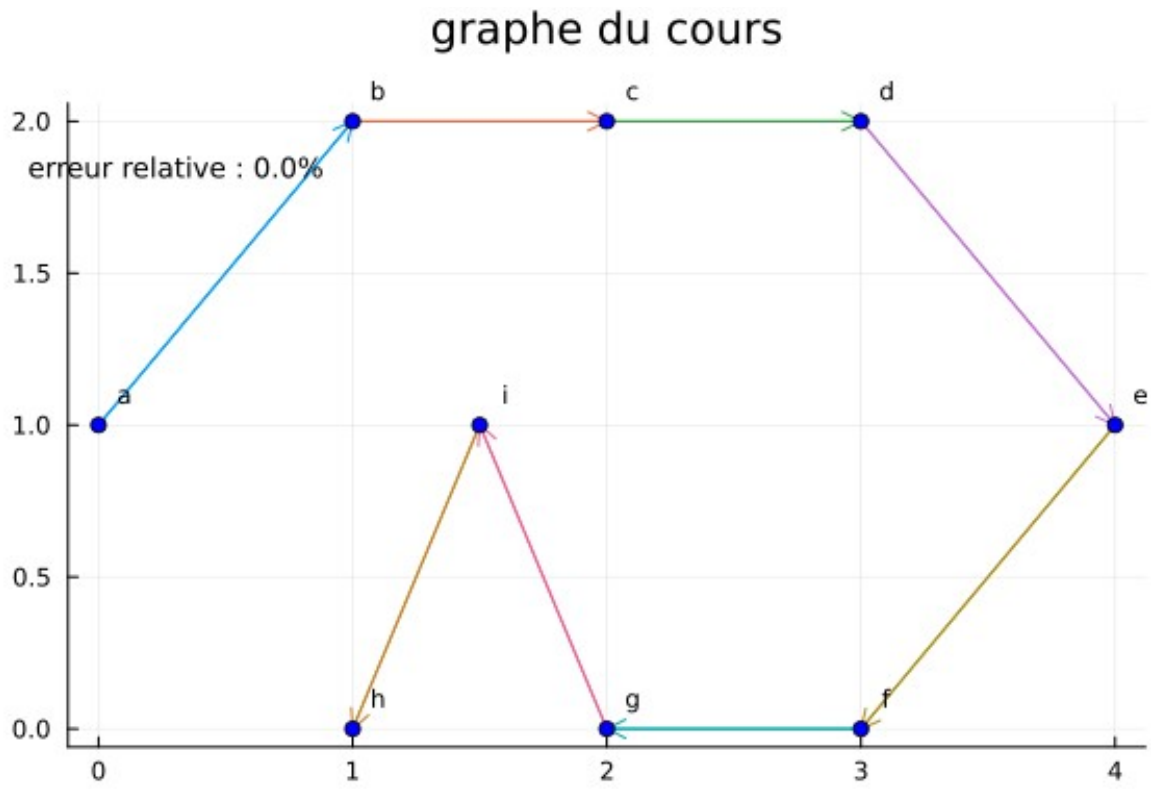
  if verbose > 0
    @info infoline
    infoline = @sprintf "%5d  %9.2e  %7.1e  %7.1e" k tk nvk
total_weight
  end
  return Tk
end
```

```
HK
```

f. Exemple trivial d'utilisation.

```
r = HK(cours, verbose=2) # converge en 15 itérations pour le noeud 1
tour_cours = ["a", "b", "c", "d", "e", "f", "g", "i", "h"]
tracer_graphe(tour_cours, cours, offset_x = 0.1, offset_y = 0.1,
poids_opti=53)
```

```
Excessive output truncated after 524436 bytes.
```

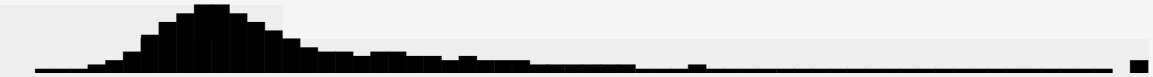



```
┌ Info:  iter         tk     ||vk||  weight_graph
└ @ Main
/Users/nathanallaire/Desktop/PhD/Cours/A23/MTH6412B/Projet_backup/
Projet-Darleguy-Allaire/Phase 3/Rapport-Phase_3.ipynb:53
┌ Info:     0   1.00e+00  2.4e+00  4.5e+01
└ @ Main
/Users/nathanallaire/Desktop/PhD/Cours/A23/MTH6412B/Projet_backup/
Projet-Darleguy-Allaire/Phase 3/Rapport-Phase_3.ipynb:92
┌ Info:     2   3.33e-01  2.0e+00  4.9e+01
└ @ Main
/Users/nathanallaire/Desktop/PhD/Cours/A23/MTH6412B/Projet_backup/
Projet-Darleguy-Allaire/Phase 3/Rapport-Phase_3.ipynb:92
┌ Info:     4   2.00e-01  2.4e+00  4.8e+01
└ @ Main
/Users/nathanallaire/Desktop/PhD/Cours/A23/MTH6412B/Projet_backup/
Projet-Darleguy-Allaire/Phase 3/Rapport-Phase_3.ipynb:92
```

Notre algorithme de HK n'a convergé que pour le graphe du cours. Nous n'avons pas d'explication quant à ce comportement sur de plus grands graphes. Le poids des arêtes est bien mis à jour à chaque itération mais passé un stade, le 1-tree calculé reste le même donc l'algorithme n'avance plus.

```
using BenchmarkTools
r = @benchmark HK($cours) # converge en 15 itérations pour le noeud 1
```

```
BenchmarkTools.Trial: 5834 samples with 1 evaluation.
 Range (min … max):  814.875 μs …   8.095 ms  ┊ GC (min … max): 0.00%
… 88.59%
 Time  (median):     832.833 μs               ┊ GC (median):    0.00%
 Time  (mean ± σ):   855.693 μs ± 358.022 μs  ┊ GC (mean ± σ):  2.10%
±  4.48%
```




```
 Memory estimate: 180.97 KiB, allocs estimate: 2454.
```

g. Application aux fichiers `.tsp`

```
graph_bays29 = build_graph("../Phase 1/instances/stsp/bays29.tsp",
"Graph_Test")
r2 = HK(graph_bays29, verbose=4000, maxIter=20000)

ExtendedGraph{Vector{Float64}, Float64}("Optimal tour",
Node{Vector{Float64}}[Node{Vector{Float64}}("1", [1150.0, 1760.0],
nothing, 0), Node{Vector{Float64}}("10", [710.0, 1310.0], nothing, 0),
Node{Vector{Float64}}("11", [840.0, 550.0], nothing, 0),
Node{Vector{Float64}}("12", [1170.0, 2300.0], nothing, 0),
Node{Vector{Float64}}("13", [970.0, 1340.0], nothing, 0),
Node{Vector{Float64}}("14", [510.0, 700.0], nothing, 0),
Node{Vector{Float64}}("15", [750.0, 900.0], nothing, 0),
Node{Vector{Float64}}("16", [1280.0, 1200.0], nothing, 0),
Node{Vector{Float64}}("17", [230.0, 590.0], nothing, 0),
Node{Vector{Float64}}("18", [460.0, 860.0], nothing, 0)  …
Node{Vector{Float64}}("27", [1460.0, 1420.0], nothing, 0),
Node{Vector{Float64}}("28", [1260.0, 1910.0], nothing, 0),
Node{Vector{Float64}}("29", [360.0, 1980.0], nothing, 0),
Node{Vector{Float64}}("3", [40.0, 2090.0], nothing, 0),
Node{Vector{Float64}}("4", [750.0, 1100.0], nothing, 0),
Node{Vector{Float64}}("5", [750.0, 2030.0], nothing, 0),
Node{Vector{Float64}}("6", [1030.0, 2070.0], nothing, 0),
Node{Vector{Float64}}("7", [1650.0, 650.0], nothing, 0),
Node{Vector{Float64}}("8", [1490.0, 1630.0], nothing, 0),
Node{Vector{Float64}}("9", [790.0, 2260.0], nothing, 0)],
Edge{Vector{Float64}, Float64}[Edge{Vector{Float64}, Float64}
(Node{Vector{Float64}}("4", [750.0, 1100.0], nothing, 0),
Node{Vector{Float64}}("15", [750.0, 900.0], nothing, 0), 38.0),
Edge{Vector{Float64}, Float64}(Node{Vector{Float64}}("15", [750.0,
900.0], nothing, 0), Node{Vector{Float64}}("17", [230.0, 590.0],
nothing, 0), 122.0), Edge{Vector{Float64}, Float64}
(Node{Vector{Float64}}("4", [750.0, 1100.0], nothing, 0),
Node{Vector{Float64}}("27", [1460.0, 1420.0], nothing, 0), 165.0),
Edge{Vector{Float64}, Float64}(Node{Vector{Float64}}("3", [40.0,
```

```
2090.0], nothing, 0), Node{Vector{Float64}}("27", [1460.0, 1420.0],
nothing, 0), 337.0), Edge{Vector{Float64}, Float64}
(Node{Vector{Float64}}("3", [40.0, 2090.0], nothing, 0),
Node{Vector{Float64}}("5", [750.0, 2030.0], nothing, 0), 171.0),
Edge{Vector{Float64}, Float64}(Node{Vector{Float64}}("3", [40.0,
2090.0], nothing, 0), Node{Vector{Float64}}("29", [360.0, 1980.0],
nothing, 0), 77.0), Edge{Vector{Float64}, Float64}
(Node{Vector{Float64}}("27", [1460.0, 1420.0], nothing, 0),
Node{Vector{Float64}}("28", [1260.0, 1910.0], nothing, 0), 124.0),
Edge{Vector{Float64}, Float64}(Node{Vector{Float64}}("4", [750.0,
1100.0], nothing, 0), Node{Vector{Float64}}("13", [970.0, 1340.0],
nothing, 0), 79.0), Edge{Vector{Float64}, Float64}
(Node{Vector{Float64}}("12", [1170.0, 2300.0], nothing, 0),
Node{Vector{Float64}}("27", [1460.0, 1420.0], nothing, 0), 241.0),
Edge{Vector{Float64}, Float64}(Node{Vector{Float64}}("15", [750.0,
900.0], nothing, 0), Node{Vector{Float64}}("19", [1040.0, 950.0],
nothing, 0), 56.0)  …  Edge{Vector{Float64}, Float64}
(Node{Vector{Float64}}("17", [230.0, 590.0], nothing, 0),
Node{Vector{Float64}}("22", [490.0, 500.0], nothing, 0), 77.0),
Edge{Vector{Float64}, Float64}(Node{Vector{Float64}}("4", [750.0,
1100.0], nothing, 0), Node{Vector{Float64}}("21", [830.0, 1770.0],
nothing, 0), 137.0), Edge{Vector{Float64}, Float64}
(Node{Vector{Float64}}("15", [750.0, 900.0], nothing, 0),
Node{Vector{Float64}}("25", [1280.0, 790.0], nothing, 0), 125.0),
Edge{Vector{Float64}, Float64}(Node{Vector{Float64}}("3", [40.0,
2090.0], nothing, 0), Node{Vector{Float64}}("9", [790.0, 2260.0],
nothing, 0), 217.0), Edge{Vector{Float64}, Float64}
(Node{Vector{Float64}}("23", [1840.0, 1240.0], nothing, 0),
Node{Vector{Float64}}("27", [1460.0, 1420.0], nothing, 0), 80.0),
Edge{Vector{Float64}, Float64}(Node{Vector{Float64}}("7", [1650.0,
650.0], nothing, 0), Node{Vector{Float64}}("27", [1460.0, 1420.0],
nothing, 0), 190.0), Edge{Vector{Float64}, Float64}
(Node{Vector{Float64}}("24", [1260.0, 1500.0], nothing, 0),
Node{Vector{Float64}}("27", [1460.0, 1420.0], nothing, 0), 41.0),
Edge{Vector{Float64}, Float64}(Node{Vector{Float64}}("4", [750.0,
1100.0], nothing, 0), Node{Vector{Float64}}("20", [590.0, 1390.0],
nothing, 0), 70.0), Edge{Vector{Float64}, Float64}
(Node{Vector{Float64}}("1", [1150.0, 1760.0], nothing, 0),
Node{Vector{Float64}}("27", [1460.0, 1420.0], nothing, 0), 108.0),
Edge{Vector{Float64}, Float64}(Node{Vector{Float64}}("1", [1150.0,
1760.0], nothing, 0), Node{Vector{Float64}}("4", [750.0, 1100.0],
nothing, 0), 190.0)])
```

Le résultat de l'exécution de l'algorithme de Held-Karp sur le graphe graph_bays29 ne semble pas converger vers une solution optimale. En effet, malgré un grand nombre d'itérations (`maxIter=20000`), la norme du vecteur vk reste constante à 1.3e+01, indiquant que l'algorithme ne parvient pas à réduire les écarts par rapport à la contrainte de degré souhaitée pour chaque nœud (qui est de deux pour un cycle hamiltonien).

```
poids_tour_bays29 = sum(map(edge -> edge.weight, r2.edges))
```

```
3420.0
```

```
graph_swiss42 = build_graph("../Phase 1/instances/stsp/swiss42.tsp",
"Graph_Test")
r3 = HK(graph_swiss42, verbose=1000, maxIter=20000) # ne converge pas
poids_tour_swiss42 = sum(map(edge -> edge.weight, r3.edges))
```

```
2906.0
```

L'algorithme ne converge pas pour `swiss42.tsp`.

```
graph_gr17 = build_graph("../Phase 1/instances/stsp/gr17.tsp",
"Graph_Test")
r4 = HK(graph_gr17, verbose=1000, maxIter=20000) # ne converge pas
poids_tour_gr17 = sum(map(edge -> edge.weight, r4.edges))
```

```
2743.0
```

L'algorithme ne converge pas pour `gr17.tsp`.