MTH6412B
Implémentation d'algorithmes de recherche opérationnelle
Arbres de recouvrement minimaux

Dominique Orban
dominique.orban@polymtl.ca

Mathématiques et Génie Industriel
École Polytechnique de Montréal

Définitions

Rappel :

- Un *arbre* est un graphe non-orienté *acyclique* et *connexe*.

Définitions

Rappel :

- Un *arbre* est un graphe non-orienté *acyclique* et *connexe*.

Définition (Arbre de recouvrement)

Un sous-graphe de $G = (S,A)$ qui possède le même ensemble de sommets S et qui constitue un arbre est un arbre de recouvrement. Parmi tous les arbres de recouvrement de G, un de ceux qui est de poids minimal est un arbre de recouvrement minimal.

Définitions

Rappel :

- Un *arbre* est un graphe non-orienté *acyclique* et *connexe*.

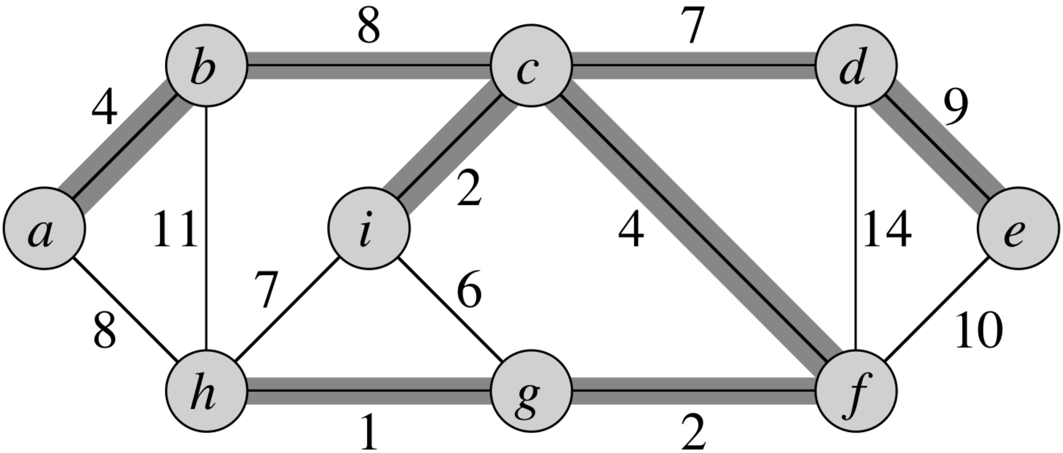
Définition (Arbre de recouvrement)

Un sous-graphe de $G = (S,A)$ qui possède le même ensemble de sommets S et qui constitue un arbre est un arbre de recouvrement. Parmi tous les arbres de recouvrement de G, un de ceux qui est de poids minimal est un arbre de recouvrement minimal.

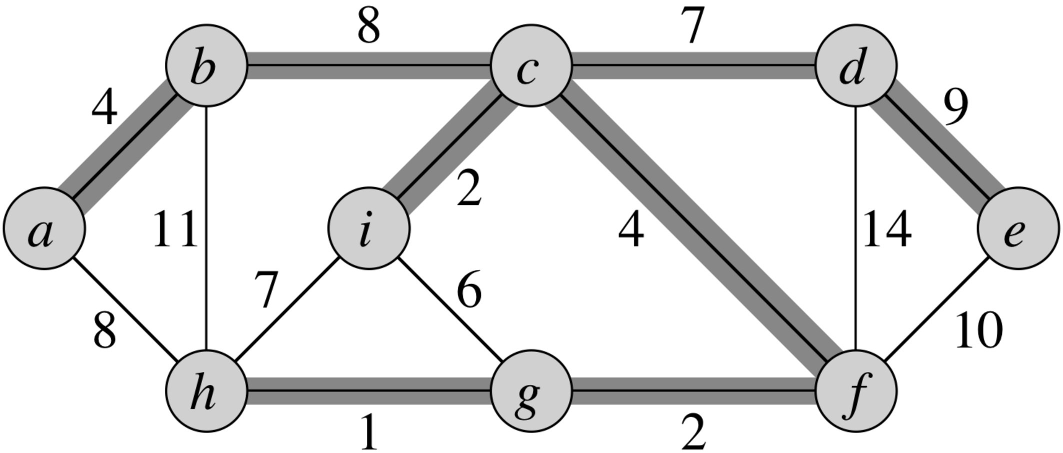
Théorème

Si G est connexe, il admet un arbre de recouvrement. Plus généralement, tout graphe admet une forêt de recouvrement.

Arbre de recouvrement minimal : exemple



Arbre de recouvrement minimal : exemple



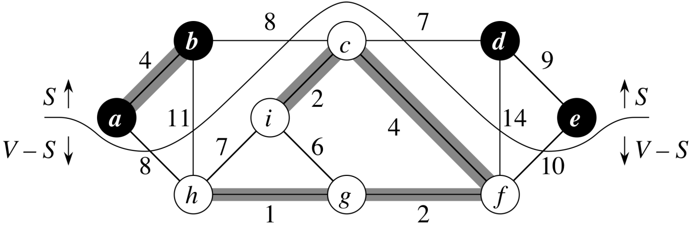
Arbre de poids 37. On en obtient un autre en remplaçant l'arête [b,c] par [a,h].

Quelques définitions

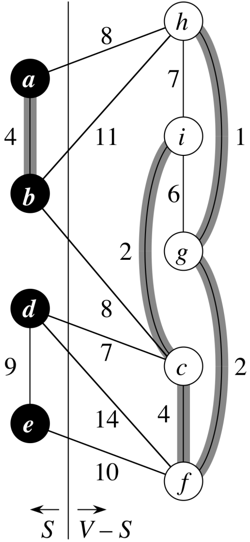
Définition

- Une coupe $(S', S \setminus S')$ du graphe non orienté $G = (S, A)$ est une partition de S ;
- l'arête $[s_i, s_j]$ traverse la coupe si $s_i \in S'$ et $s_j \in S \setminus S'$;
- une coupe respecte un sous-ensemble $A' \subseteq A$ d'arêtes si aucune arête de A' ne traverse la coupe ;
- une arête traversant une coupe est légère si elle est de poids minimal parmi toutes les arêtes traversant cette coupe.

Exemple


a
b
c
d
e
f
g
h
i
4
8
11
7
2
6
1
2
4
7
14
9
10
8
S
V – S

(a)


a
b
d
e
h
i
g
c
f
8
4
11
7
6
1
2
8
7
9
14
4
2
10
S
V – S

(b)

Comment faire pousser un arbre : méthode générique

Idée : à chaque étape, on a un ensemble d'arêtes qui forment un sous-ensemble d'un arbre de recouvrement minimal. Chaque itération ajoute une arête de façon à satisfaire cette propriété.

Comment faire pousser un arbre : méthode générique

Idée : à chaque étape, on a un ensemble d'arêtes qui forment un sous-ensemble d'un arbre de recouvrement minimal. Chaque itération ajoute une arête de façon à satisfaire cette propriété.

Théorème

Supposons que $G = (S,A)$ *est connexe. Soit* $A' \subseteq A$ *un sous-ensemble d'arêtes qui fait partie d'un arbre de recouvrement minimal et* $C = (S',S \setminus S')$ *une coupe qui respecte* A'*. Soit* $[s_i,s_j]$ *une arête légère traversant la coupe* C*. Alors* $A' \cup [s_i,s_j]$ *fait encore partie d'une arbre de recouvrement minimal.*

Comment faire pousser un arbre : méthode générique

Idée : à chaque étape, on a un ensemble d'arêtes qui forment un sous-ensemble d'un arbre de recouvrement minimal. Chaque itération ajoute une arête de façon à satisfaire cette propriété.

Théorème

Supposons que $G = (S,A)$ *est connexe. Soit* $A' \subseteq A$ *un sous-ensemble d'arêtes qui fait partie d'un arbre de recouvrement minimal et* $C = (S',S \setminus S')$ *une coupe qui respecte* A'*. Soit* $[s_i,s_j]$ *une arête légère traversant la coupe* C*. Alors* $A' \cup [s_i,s_j]$ *fait encore partie d'une arbre de recouvrement minimal.*

Exercice

L'arête de poids minimal dans G *fait nécessairement partie d'un arbre de recouvrement minimal.*

Idées principales de la construction

Notons A_k le sous-ensemble d'arêtes identifié après k itérations et $G_k = (S,A_k)$ le sous-graphe de G déterminé par A_k.

Idées principales de la construction

Notons A_k le sous-ensemble d'arêtes identifié après k itérations et $G_k = (S,A_k)$ le sous-graphe de G déterminé par A_k.

- G_k n'a jamais de cycle ;

Idées principales de la construction

Notons A_k le sous-ensemble d'arêtes identifié après k itérations et $G_k = (S,A_k)$ le sous-graphe de G déterminé par A_k.

- G_k n'a jamais de cycle ;
- G_k est une forêt et chacune de ses composantes connexes est un arbre (certains peuvent ne contenir qu'un seul sommet — c'est le cas quand $k = 0$) ;

Idées principales de la construction

Notons A_k le sous-ensemble d'arêtes identifié après k itérations et $G_k = (S, A_k)$ le sous-graphe de G déterminé par A_k.

- G_k n'a jamais de cycle ;
- G_k est une forêt et chacune de ses composantes connexes est un arbre (certains peuvent ne contenir qu'un seul sommet — c'est le cas quand $k = 0$) ;
- chaque arête ajoutée connecte deux composantes connexes de G_k — G_{k+1} a donc une composante connexe de moins que G_k ;

Idées principales de la construction

Notons A_k le sous-ensemble d'arêtes identifié après k itérations et $G_k = (S, A_k)$ le sous-graphe de G déterminé par A_k.

- G_k n'a jamais de cycle ;
- G_k est une forêt et chacune de ses composantes connexes est un arbre (certains peuvent ne contenir qu'un seul sommet — c'est le cas quand $k = 0$) ;
- chaque arête ajoutée connecte deux composantes connexes de G_k — G_{k+1} a donc une composante connexe de moins que G_k ;
- la méthode s'arrête quand G_k est connexe.

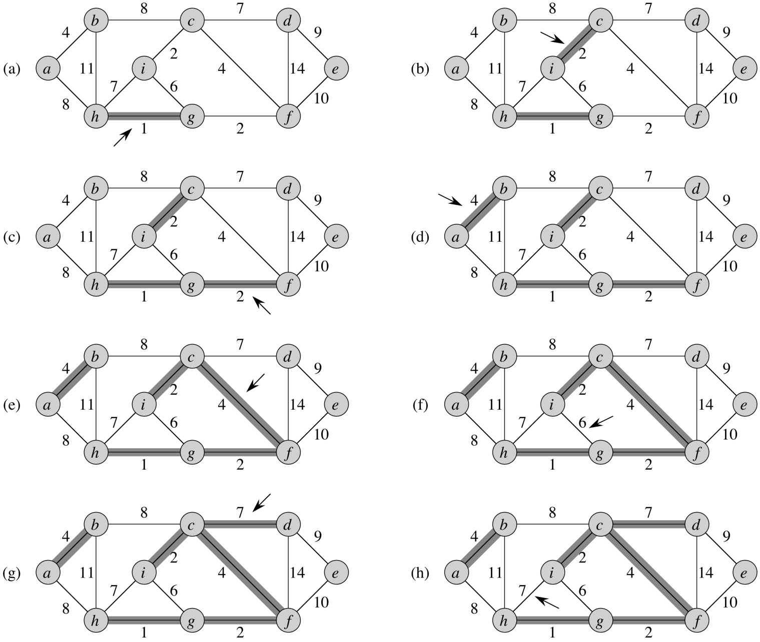
Résultat de base

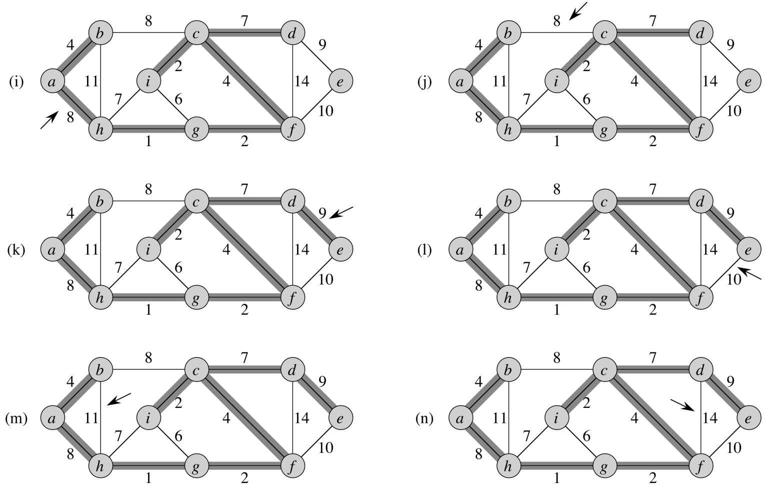
Corollaire

Supposons que $G = (S,A)$ *est connexe. Soit* $A' \subseteq A$ *un sous-ensemble d'arêtes qui fait partie d'un arbre de recouvrement minimal et* C *une composante connexe de* $G' := (S,A')$ *(*C *est un arbre dans la forêt* G'*). Si* $[s_i,s_j]$ *est une arête légère connectant* C *à une autre composante de* G'*, alors* $A' \cup [s_i,s_j]$ *fait encore partie d'une arbre de recouvrement minimal.*

L'algorithme de Kruskal

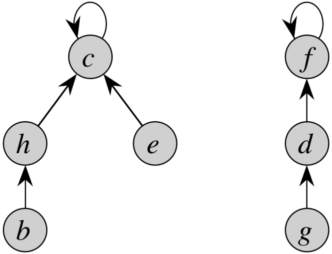
- On débute avec $A_0 = \emptyset$, $k = 0$. Chaque $s \in S$ forme une composante connexe.
- Trier les arêtes de A en ordre croissant de poids ;
- pour chaque arête $[s_i, s_j] \in A$, si s_i et s_j font partie de composantes connexes distinctes,
  - $A_{k+1} = A_k \cup [s_i, s_j]$;
  - réunir les composantes connexes contenant s_i et s_j ;
  - $k \leftarrow k + 1$.


(a)
(b)
(c)
(d)
(e)
(f)
(g)
(h)

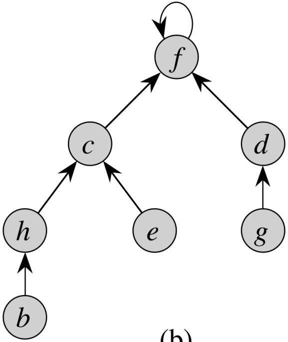

(i)
(j)
(k)
(l)
(m)
(n)
a
b
c
d
e
f
g
h
i
4
8
7
9
11
2
14
4
7
6
10
8
1
2

Forêt d'ensembles disjoints

- Pour représenter les composantes connexes d'un graphe ;
- chaque nœud « pointe » vers son parent ;
- la racine est son propre parent ;
- deux nœuds se trouvent dans le même ensemble s'ils ont la même racine ;
- l'union se fait en réaffectant le parent d'une racine.



(a)



(b)

Première partie de ce laboratoire

1. Implémenter une structure de données pour les composantes connexes ;
2. implémenter l'algorithme de Kruskal et le tester sur l'exemple des notes de laboratoire ;
3. tester votre implémentation sur diverses instances de TSP symétrique.