18. On note $|\sigma|$ le nombre d'arête d'un chemin σ. On commence par montrer un lemme :

Lemme

Soit σ un plus court chemin augmentant pour un couplage C et σ' un plus court chemin augmentant pour $C\Delta\sigma$. Alors $|\sigma| \leqslant |\sigma'|$. De plus, si $|\sigma| = |\sigma'|$, alors σ et σ' n'ont pas de sommet en commun.

Preuve

On pose $C' = (C\Delta\sigma)\Delta\sigma'$. Alors $(S, C\Delta C')$ a des composantes connexes qui sont soit des cycles alternés (entre C et C'), soit des chemins alternés (entre C et C'). Comme $|C'| = |C| + 2$, il existe deux composantes connexes de $(S, C\Delta C')$ qui sont des chemins augmentants pour C, σ_1 et σ_2. De plus, $C\Delta C' = \sigma\Delta\sigma'$, et $|\sigma\Delta\sigma'| \geqslant |C\Delta C'| \geqslant |\sigma_1| + |\sigma_2| \geqslant 2|\sigma|$.

Finalement, sachant que $|\sigma\Delta\sigma'| = |\sigma| + |\sigma'| - |\sigma \cap \sigma'|$, on a $|\sigma'| \geqslant |\sigma| + |\sigma \cap \sigma'|$. On en déduit le résultat voulu.

Notons $E = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_k\}$ un ensemble maximal de plus courts chemins augmentants pour C, tous de longueur ℓ, disjoints deux à deux, lors d'un passage dans la boucle while. Notons $C' = C\Delta\sigma_1\Delta\sigma_2 \ldots \Delta\sigma_k$ le nouveau couplage obtenu à la fin de la boucle. Soit σ un plus court chemin augmentant pour C', de longueur ℓ'.

– Si σ est disjoint de tous les σ_i, alors ce n'était pas un plus court chemin augmentant pour C, sinon on aurait dû le rajouter à E. On a donc $\ell' > \ell$.
– Sinon, par le lemme, on a à nouveau $\ell' > \ell$.

Remarque : sachant que les chemins augmentants sont de longueur impaire, on a en fait $\ell' > \ell + 1$.

19. Après $\sqrt{|S|}$ passages dans la boucle, tous les chemins augmentants sont de longueur impaire. On en déduit que dans $(S, C^*\Delta C)$, il y a au plus $\sqrt{|S|}$ composantes connexes qui sont des chemins augmentants. Or, $|C^*| - |C|$ est exactement le nombre de ces composantes connexes.

20. Comme le cardinal de C augmente d'au moins 1 après chaque itération, il y a au plus $2\sqrt{|S|}$ passages dans la boucle (car il ne reste qu'au plus $\sqrt{|S|}$ passages après les $\sqrt{|S|}$ premiers, d'après la question précédente). Chaque passage dans la boucle fait deux parcours de graphe plus les augmentations, soit une complexité en ‰$(|S| + |A|)$. La complexité totale est en ‰$(\sqrt{|S|}(|S| + |A|))$.