Devoir maison n°6

Corrigé

⋆⋆⋆

1 Non prouvabilité en logique intuitionniste

Question 1 On remarque qu'avec ces hypothèses, cela correspondrait à la sémantique booléenne usuelle, en associant 0 à $\emptyset$ et 1 à $\mathbb{R}$. On vérifie que l'évaluation se comporte bien de la même façon sur chaque opérateur.

Question 2 On pose $C = (A \vee B) \wedge \neg A$. On obtient l'arbre de preuve :

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$C \vdash (A \vee B) \wedge \neg A$}
\RightLabel{$\wedge_e$}
\UnaryInfC{$C \vdash A \vee B$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$C, A \vdash A$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$C, A \vdash (A \vee B) \wedge \neg A$}
\RightLabel{$\wedge_e$}
\UnaryInfC{$C, A \vdash \neg A$}
\RightLabel{$\neg_e$}
\BinaryInfC{$C, A \vdash \bot$}
\RightLabel{$\bot_e$}
\UnaryInfC{$C, A \vdash B$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$C, B \vdash B$}
\RightLabel{$\vee_e$}
\TrinaryInfC{$C \vdash B$}
\RightLabel{$\rightarrow_i$}
\UnaryInfC{$\vdash ((A \vee B) \wedge \neg A) \rightarrow B$}
\end{prooftree}
$$

Question 3 Montrer que le séquent est valide revient à montrer que $\mu(((A \vee B) \wedge \neg A) \rightarrow B) = \mathbb{R}$, pour tout A, B formules. On a en effet :

- $\mu(\neg A) = \overbrace{\mu(A)^\complement}^{\circ}$;
- $\mu((A \vee B) \wedge \neg A) = \mu(B) \cap \overbrace{\mu(A)^\complement}^{\circ}$ (car $\overbrace{\mu(A)^\complement}^{\circ} \subseteq \mu(A)^\complement$ donc son intersection avec $\mu(A)$ est vide) ;
- $\mu(((A \vee B) \wedge \neg A) \rightarrow B) = \overbrace{\left(\mu(B) \cap \overbrace{\mu(A)^\complement}^{\circ}\right)^\complement \cup \mu(B)}^{\circ} = \mathbb{R}$. En effet, $\mu(B) \cap \overbrace{\mu(A)^\complement}^{\circ} \subseteq \mu(B)$, donc $\mu(B)^\complement \subseteq \left(\mu(B) \cap \overbrace{\mu(A)^\complement}^{\circ}\right)^\complement$, et donc l'union de ce dernier avec $\mu(B)$ donne bien $\mathbb{R}$, qui est égal à son intérieur.

Question 4 On obtient l'arbre suivant :

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{te}
\UnaryInfC{$A \rightarrow B \vdash A \vee \neg A$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$A \rightarrow B, A \vdash A$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$A \rightarrow B, A \vdash A \rightarrow B$}
\RightLabel{$\rightarrow_e$}
\BinaryInfC{$A \rightarrow B, A \vdash B$}
\RightLabel{$\vee_i$}
\UnaryInfC{$A \rightarrow B, A \vdash \neg A \vee B$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$A \rightarrow B, \neg A \vdash \neg A$}
\RightLabel{$\vee_i$}
\UnaryInfC{$A \rightarrow B, \neg A \vdash \neg A \vee B$}
\RightLabel{$\vee_e$}
\TrinaryInfC{$A \rightarrow B \vdash \neg A \vee B$}
\RightLabel{$\rightarrow_i$}
\UnaryInfC{$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \vee B)$}
\end{prooftree}
$$

Question 5 Ce séquent n'est pas valide. En effet, si on considère la formule $(x \rightarrow y) \rightarrow (\neg x \vee y)$, avec $\mu(x) = \mu(y) = \mathbb{R}^*$, on a :

- $\mu(x \to y) = \overset{\circ}{\overbrace{\mu(x)^{\complement} \cup \mu(y)}} = \mathbb{R}$;
- $\mu(\neg x \lor y) = \overset{\circ}{\overbrace{\mu(x)^{\complement}}} \cup \mu(y) = \mathbb{R}^*$;
- $\mu((x \to y) \to (\neg x \lor y)) = \overset{\circ}{\overbrace{\mu(x \to y)^{\complement} \cup \mu(\neg x \lor y)}} = \overset{\circ}{\overbrace{\mathbb{R}^*}} = \mathbb{R}^* \neq \mathbb{R}$.

Question 6 Pour les règles concernées :

- règle $(\to_i)$: supposons $\mu(\Gamma, A) \subseteq \mu(B)$, soit $\mu(\Gamma) \cap \mu(A) \subseteq \mu(B)$. Alors $\mu(\Gamma) = (\mu(\Gamma) \cap \mu(A)) \cup (\mu(\Gamma) \cap \mu(A)^{\complement})$. Alors :
  - $\mu(\Gamma) \cap \mu(A) \subseteq \mu(B) \subseteq \mu(A)^{\complement} \cup \mu(B)$,
  - $\mu(\Gamma) \cap \mu(A)^{\complement} \subseteq \mu(A)^{\complement} \subseteq \mu(A)^{\complement} \cup \mu(B)$.

  On en déduit $\mu(\Gamma) \subseteq \mu(A)^{\complement} \cup \mu(B)$, soit, $\mu(\Gamma)$ étant ouvert, $\mu(\Gamma) = \overset{\circ}{\mu(\Gamma)} \subseteq \overset{\circ}{\overbrace{\mu(A)^{\complement} \cup \mu(B)}} = \mu(A \to B)$;
- règle $(\to_e)$: supposons $\mu(\Gamma) \subseteq \mu(A)$ et $\mu(\Gamma) \subseteq \mu(A \to B)$. Montrons que $\mu(\Gamma) \subseteq \mu(B)$. En effet, comme l'intersection de deux intérieurs est égale à l'intérieur de l'intersection, on a :

$$\mu(\Gamma) \subseteq \mu(A) \cap \overset{\circ}{\overbrace{\mu(A)^{\complement} \cup \mu(B)}} = \overset{\circ}{\mu(A)} \cap \overset{\circ}{\overbrace{\mu(A)^{\complement} \cup \mu(B)}} = \overset{\circ}{\overbrace{\mu(A) \cap (\mu(A)^{\complement} \cup \mu(B))}} = \overset{\circ}{\overbrace{\mu(A) \cap \mu(B)}} \subseteq \mu(B)$$

- règle $(\lor_e)$: supposons $\mu(\Gamma) \subseteq \mu(A \lor B)$, $\mu(\Gamma, A) \subseteq \mu(C)$ et $\mu(\Gamma, B) \subseteq \mu(C)$. Alors :

$$\mu(\Gamma) = (\mu(\Gamma) \cap \mu(A)) \cup (\mu(\Gamma) \cap \mu(B)) \subseteq \mu(C)$$

- règle $(\perp_e)$: supposons $\mu(\Gamma) \subseteq \mu(\perp)$. Alors $\mu(\Gamma) = \emptyset$, donc $\mu(\Gamma) \subseteq \mu(A)$, pour tout A.

Question 7 On montre ce résultat par induction sur l'arbre de preuve d'un séquent $\Gamma \vdash A$ prouvable en logique intuitionniste :

- si ce séquent est un axiome, par validité de la règle (ax), ce séquent est valide ;
- supposons que toutes les prémisses de la dernière règle appliquée sont valides. Alors par validité de la règle, la conclusion est valide.

On conclut par induction que $\Gamma \vdash A$ est valide, donc que la logique intuitionniste est correcte pour la sémantique de Heyting.

Question 8 On pose $A = x \lor \neg x$, et $\mu(x) = \mathbb{R}^*$. Alors $\mu(A) = \mu(x) \cup \overset{\circ}{\overbrace{\mu(x)^{\complement}}} = \mathbb{R}^* \cup \overset{\circ}{\{0\}} = \mathbb{R}^* \neq \mathbb{R}$.

On en déduit que la règle (te) n'est pas valide, donc dans le cas général, $A \lor \neg A$ n'est pas prouvable en logique intuitionniste d'après la question précédente. Or, $A \lor \neg A$ est une tautologie pour la sémantique booléenne usuelle, qui ne rend donc pas complète la logique intuitionniste.

2 Réductions entre problèmes de prouvabilité

2.1 Transformation de Gödel

Question 9 On a $g(x \lor \neg x) = \neg\neg(\neg\neg x \lor \neg\neg\neg x)$.

Question 10 Supposons $\vdash_m g(A)$. Alors $\vdash_c g(A)$. Par correction de la logique classique pour la sémantique booléenne, $\vDash g(A)$. Or, on peut montrer par une induction rapide que $A \equiv g(A)$. On en déduit que $\vDash A$, puis par complétude de la logique classique pour la sémantique booléenne, $\vdash_c A$.

Question 11 On a l'arbre de preuve suivant :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A,\neg A\vdash A}\,\text{ax}\quad\dfrac{}{A,\neg A\vdash\neg A}\,\text{ax}}{A,\neg A\vdash\bot}\,\neg_e}{A\vdash\neg\neg A}\,\neg_i}{\vdash A\to\neg\neg A}\,\to_i$$

Question 12 D'après la question précédente et par $\wedge_i$, cela revient à montrer que $\vdash_m \neg\neg\neg A\to\neg A$ pour toute formule A :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{Preuve précédente}}{A\vdash\neg\neg A}}{\neg\neg\neg A,A\vdash\neg\neg A}\,\text{aff}\quad\dfrac{}{\neg\neg\neg A,A\vdash\neg\neg\neg A}\,\text{ax}}{\neg\neg\neg A,A\vdash\bot}\,\neg_e}{\neg\neg\neg A\vdash\neg A}\,\neg_i}{\vdash\neg\neg\neg A\to\neg A}\,\to_i$$

Question 13 On montre ce résultat par induction sur la formule A.

- $g(\bot)=\bot$ est stable. En effet, $\vdash_m \neg\neg\bot\to\bot$, par l'arbre :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg\neg\bot,\bot\vdash\bot}\,\text{ax}}{\neg\neg\bot\vdash\neg\bot}\,\neg_i\quad\dfrac{}{\neg\neg\bot\vdash\neg\neg\bot}\,\text{ax}}{\neg\neg\bot\vdash\bot}\,\neg_e}{\vdash\neg\neg\bot\to\bot}\,\to_i$$

- si $A=x$ est une variable, alors $g(A)=\neg\neg x$ est stable par la question précédente ;
- supposons que $g(B)$ et $g(C)$ sont stables. On a donc $\vdash_m \neg\neg g(B)\to g(B)$ et $\vdash_m \neg\neg g(C)\to g(C)$. Distinguons :
  - si $A=B\vee C$, alors $g(A)$ est stable par la question précédente ;
  - si $A=B\wedge C$, alors $g(A)=g(B)\wedge g(C)$. Montrons dans un premier temps, en posant $\Gamma=\{\neg\neg(g(B)\wedge g(C)),\neg g(B)\}$, que $\neg\neg(g(B)\wedge g(C))\vdash_m\neg\neg g(B)$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma,g(B)\wedge g(C)\vdash g(B)\wedge g(C)}\,\text{ax}}{\Gamma,g(B)\wedge g(C)\vdash g(B)}\,\wedge_e\quad\dfrac{}{\Gamma,g(B)\wedge g(C)\vdash\neg g(B)}\,\text{ax}}{\Gamma,g(B)\wedge g(C)\vdash\bot}\,\neg_e}{\Gamma\vdash\neg(g(B)\wedge g(C))}\,\neg_i\quad\dfrac{}{\Gamma\vdash\neg\neg(g(B)\wedge g(C))}\,\text{ax}}{\Gamma\vdash\bot}\,\neg_e}{\neg\neg(g(B)\wedge g(C))\vdash\neg\neg g(B)}\,\neg_i$$

  Dès lors, on obtient :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{Preuve précédente}}{\neg\neg(g(B)\wedge g(C))\vdash\neg\neg g(B)}\quad\dfrac{\text{Hypothèse d'induction}}{\neg\neg(g(B)\wedge g(C))\vdash\neg\neg g(B)\to g(B)}}{\neg\neg(g(B)\wedge g(C))\vdash g(B)}\,\to_e\quad\dfrac{\text{idem}}{\neg\neg(g(B)\wedge g(C))\vdash g(C)}}{\neg\neg(g(B)\wedge g(C))\vdash g(B)\wedge g(C)}\,\wedge_i}{\vdash\neg\neg(g(B)\wedge g(C))\to g(B)\wedge g(C)}\,\to_i$$

  - si $A=B\to C$, alors $g(A)=g(B)\to g(C)$. On pose $\Gamma=\{\neg\neg(g(B)\to g(C)),g(B),\neg g(C)\}$. Montrons dans un premier temps que $\Gamma\vdash_m\neg(g(B)\to g(C))$.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma, g(B) \to g(C) \vdash g(B)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma, g(B) \to g(C) \vdash g(B) \to g(C)$}
\RightLabel{$\to_e$}
\BinaryInfC{$\Gamma, g(B) \to g(C) \vdash g(C)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma, g(B) \to g(C) \vdash \neg g(C)$}
\RightLabel{$\neg_e$}
\BinaryInfC{$\Gamma, g(B) \to g(C) \vdash \bot$}
\RightLabel{$\neg_i$}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash \neg(g(B) \to g(C))$}
\end{prooftree}
$$

On obtient alors, en posant $\Delta = \{\neg\neg(g(B) \to g(C)), g(B)\}$:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{Preuve précédente}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash \neg(g(B) \to g(C))$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash \neg\neg(g(B) \to g(C))$}
\RightLabel{$\neg_e$}
\BinaryInfC{$\Gamma \vdash \bot$}
\RightLabel{$\neg_i$}
\UnaryInfC{$\Delta \vdash \neg\neg g(C)$}
\AxiomC{Hypothèse d'induction}
\UnaryInfC{$\Delta \vdash \neg\neg g(C) \to g(C)$}
\RightLabel{$\to_e$}
\BinaryInfC{$\Delta \vdash g(C)$}
\RightLabel{$\to_i \times 2$}
\UnaryInfC{$\vdash \neg\neg(g(B) \to g(C)) \to (g(B) \to g(C))$}
\end{prooftree}
$$

On conclut par induction.

Question 14 Soit $\Gamma \vdash A$ un séquent prouvable en logique classique. Montrons que $g(\Gamma) \vdash_m g(A)$:

- si la dernière règle de la preuve est (ax) ou (aff), le résultat est immédiat ;
- si la dernière règle de la preuve est une règle de l'opérateur $\wedge$ ou $\to$, on obtient le résultat en appliquant g au prémisses et à la conclusion de la règle (les prémisses modifiées étant prouvables par hypothèse d'induction) ;
- si la dernière règle est $\vee_i$, on obtient une preuve de la forme :

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{Hypothèse d'induction}
\UnaryInfC{$g(\Gamma) \vdash g(B)$}
\RightLabel{$\vee_i$}
\UnaryInfC{$g(\Gamma) \vdash g(B) \vee g(C)$}
\UnaryInfC{$g(\Gamma) \vdash \neg\neg(g(B) \vee g(C))$}
\end{prooftree}
$$

  La dernière règle correspondant à un résultat montré précédemment.
- si la dernière règle est $\vee_e$, le résultat est un peu plus compliqué à montrer. Supposons que $A = B \vee C$ et que, par hypothèse d'induction, $g(\Gamma) \vdash_m g(B \vee C)$, $g(\Gamma), g(B) \vdash_m g(A)$ et $g(\Gamma), g(C) \vdash_m g(A)$. Montrons dans un premier temps, en posant $\Delta = g(\Gamma) \cup \{\neg g(A), g(B) \vee g(C)\}$, que $\Delta \vdash \bot$.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Delta \vdash g(B) \vee g(C)$}
\AxiomC{Hypothèse d'induction}
\UnaryInfC{$g(\Gamma), g(B) \vdash g(A)$}
\RightLabel{aff}
\UnaryInfC{$\Delta, g(B) \vdash g(A)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Delta, g(B) \vdash \neg g(A)$}
\RightLabel{$\neg_e$}
\BinaryInfC{$\Delta, g(B) \vdash \bot$}
\AxiomC{Idem}
\UnaryInfC{$\Delta, g(C) \vdash \bot$}
\RightLabel{$\vee_e$}
\TrinaryInfC{$\Delta \vdash \bot$}
\end{prooftree}
$$

  On obtient alors :

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{Hypothèse d'induction}
\UnaryInfC{$g(\Gamma) \vdash g(B \vee C)$}
\RightLabel{aff}
\UnaryInfC{$g(\Gamma), \neg g(A) \vdash \neg\neg(g(B) \vee g(C))$}
\AxiomC{Preuve précédente}
\UnaryInfC{$\Delta \vdash \bot$}
\RightLabel{$\neg_i$}
\UnaryInfC{$g(\Gamma), \neg g(A) \vdash \neg(g(B) \vee g(C))$}
\RightLabel{$\neg_e$}
\BinaryInfC{$g(\Gamma), \neg g(A) \vdash \bot$}
\RightLabel{$\neg_i$}
\UnaryInfC{$g(\Gamma) \vdash \neg\neg g(A)$}
\UnaryInfC{$g(\Gamma) \vdash g(A)$}
\end{prooftree}
$$

La dernière règle correspondant à la question précédente.

– si la dernière règle est (raa), on obtient, en se limitant à la fin de l'arbre précédent :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{Hypothèse d'induction}}{g(\Gamma), \neg g(A) \vdash \bot}}{g(\Gamma) \vdash \neg\neg g(A)}\ \neg_i}{g(\Gamma) \vdash g(A))}$$

On conclut par induction, et en se limitant ensuite à un séquent sans contexte (le résultat montré est en fait plus fort).

2.2 Lien avec la logique intuitionniste

Question 15 Par induction sur A :

– si $A = \bot$, alors $g(A) = \bot$, et on a déjà montré précédemment que $\bot$ est stable ;
– si $A = x$, une variable, alors $g(A) = \neg\neg A$;
– supposons que $\vdash_i g(B) \rightarrow \neg\neg B$ et $\vdash_i g(C) \rightarrow \neg\neg C$. Distinguons :
  - ⋆ si $A = B \wedge C$, alors $g(A) = g(B) \wedge g(C)$. On obtient donc $\vdash_i g(A) \rightarrow (\neg\neg B \wedge \neg\neg C)$ en utilisant les hypothèses d'induction, puis par la propriété admise, $\vdash_i g(A) \rightarrow \neg\neg(B \wedge C)$ ce qui est le résultat voulu ;
  - ⋆ si $A = B \rightarrow C$, alors $g(A) = g(B) \rightarrow g(C)$. Par les hypothèses d'induction, on obtient $\vdash_i g(A) \rightarrow (\neg\neg B \rightarrow \neg\neg C)$, puis par la propriété admise $\vdash_i g(A) \rightarrow \neg\neg(B \rightarrow C)$;
  - ⋆ si $A = B \vee C$, alors $g(A) = \neg\neg(g(B) \vee g(C)$. Par hypothèse d'induction, on obtient (avec ($\neg_i$ et $\neg_e$) : $\vdash_i g(A) \rightarrow \neg\neg(\neg\neg B \vee \neg\neg C)$, puis par la propriété admise $\vdash_i g(A) \rightarrow \neg(\neg\neg\neg B \wedge \neg\neg\neg C)$, puis $\vdash_i g(A) \rightarrow \neg(\neg B \wedge \neg C)$ et enfin $\vdash_i g(A) \rightarrow \neg\neg(B \vee C)$.

On conclut par induction.

Question 16 Le sens réciproque se fait de la même manière que le sens réciproque du théorème précédent. Pour le sens direct, supposons que $\vdash_c A$. Alors par le théorème précédent, $\vdash_m g(A)$, donc $\vdash_i g(A)$, et par l'implication de la question précédente, $\vdash_i \neg\neg A$.

⋆ ⋆ ⋆