Exercice 1: Permutations triables par pile

Définition

On associe une permutation π de $\mathfrak{S}_n$ à la suite $(\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n))$.

Une **machine à pile** maintient en interne une structure de pile, initialement vide. Elle prend en entrée une permutation $(\pi(1), \ldots, \pi(n))$ et effectue une suite fixée d'opérations empile et dépile.

- empile : lit le premier élément non encore lu de la permutation et l'ajoute à la pile. La i-ème opération empile ajoute donc $\pi(i)$ à la pile ;
- dépile : enlève le dernier élément ajouté à la pile et le renvoie en sortie.

La sortie de la machine est une suite d'élément de $\{1, \ldots, n\}$ renvoyés par les opérations dépile, pris dans l'ordre où ils sont renvoyés.

Exemple : la machine EEDEDD qui effectue (empile, empile, dépile, empile, dépile, dépile) avec en entrée la permutation $(3, 1, 2)$ renvoie $(1, 2, 3)$:

$$\mathsf{EEDEDD}(3, 1, 2) = (1, 2, 3)$$

Une telle suite d'opération est dite une **suite valide** si elle contient exactement n opérations empile et n opérations dépile et si, à tout instant, le nombre d'opérations dépile effectuées est inférieur ou égal au nombre d'opérations empile effectuées. Dans tout le sujet, on ne considère que des machines effectuant des suites valides d'opérations.

Une permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ est dite **triable par pile** s'il existe une machine à pile qui prend en entrée $(\pi(1), \ldots, \pi(n))$ et renvoie $(1, \ldots, n)$.

Exemple : la permutation $(3, 1, 2)$ est triable par pile par la machine à pile EEDEDD plus haut.

1. Montrer que les permutations $(1, 2, 3, 4)$, $(4, 3, 2, 1)$ et $(1, 3, 2, 4)$ sont triables par pile.

Définition

On dit que $\pi \in \mathfrak{S}_n$ **contient le motif** $(2, 3, 1)$ s'il existe $i < j < k$ dans $\{1, \ldots, n\}$ tel que $\pi(k) < \pi(i) < \pi(j)$. Plus informellement, $(\pi(i), \pi(j), \pi(k))$ et $(2, 3, 1)$ sont « dans le même ordre. »

2. Montrer que si π est triable par pile, alors elle ne contient pas le motif $(2, 3, 1)$.
3. Montrer que si π ne contient pas le motif $(2, 3, 1)$, alors elle est triable par pile.
4. L'ensemble des permutations triables par pile est-il clos par composition ? Par inverse ?
5. Proposer un algorithme qui détermine en temps linéaire en n si une permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ est triable par pile.

   On peut utiliser les questions 2 et 3, mais ce n'est pas obligatoire.

Définition

À une permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$, on associe le graphe non orienté $G(\pi) = (S, A)$ de sommets $S = \{1, \ldots, n\}$ et d'arêtes $A = \{\{a, b\} \mid a < b \text{ et } \pi(a) > \pi(b)\}$. Un graphe $G = (S, A)$ avec $S = \{1, \ldots, n\}$ est dit **triable par pile** s'il existe $\pi \in \mathfrak{S}_n$ triable par pile telle que $G = G(\pi)$.

On dit que $G = (S, A)$ est **réalisable** s'il est possible de renommer ses sommets S avec les entiers $\{1, \ldots, n\}$ pour obtenir un graphe triable par pile.

6. Montrer que $\pi \mapsto G(\pi)$ est une injection de $\mathfrak{S}_n$ vers l'ensemble des graphes de sommets $\{1, \ldots, n\}$. Est-ce une bijection ?
7. Donner un exemple de graphe non réalisable.
8. On considère l'ensemble des graphes obtenus en partant du graphe vide $(\emptyset, \emptyset)$ et en utilisant uniquement les deux opérations suivantes : ajout d'un sommet adjacent à tous les autres ou union disjointe de deux graphes de l'ensemble. Montrer que l'ensemble des graphes obtenus est exactement l'ensemble des graphes réalisables.
9. Proposer un algorithme qui détermine si un graphe $G = (S, A)$ est réalisable, en temps $\mathcal{O}(|S|^3)$.

Exercice 2: Modèles de Kripke

On considère $\mathcal{F}$ l'ensemble des formules propositionnelles, sur un ensemble de variables propositionnelles $\mathcal{V} = \{x_1, \ldots, x_n\}$, sur les connecteurs logiques $\wedge$, $\vee$ et $\rightarrow$. On note $\neg\varphi$ la formule propositionnelle $\varphi \rightarrow \bot$.

Définition

On appelle **modèle de Kripke** un triplet $\mathcal{K} = (S, A, \Vdash)$ tel que (S, A) est un graphe orienté acyclique et $\Vdash$ est une relation binaire, appelée « **réalise** », entre les éléments de S et de $\mathcal{V}$ telle que, en notant $a \leqslant b$ l'existence d'un chemin (de longueur éventuellement nulle) entre $a \in S$ et $b \in S$, on ait :

$$\forall a, b \in S^2, \forall x \in \mathcal{V}, \text{ si } a \leqslant b \text{ et } a \Vdash x \text{ alors } b \Vdash x$$

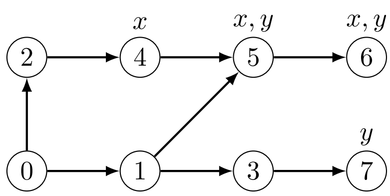
On étend $\Vdash$ à une relation binaire entre les éléments de S et de $\mathcal{F}$ par :

- pour $a \in S$, $a \Vdash \top$ et $a \nVdash \bot$;
- pour $a \in S$ et $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^2$:
  - $a \Vdash \varphi \wedge \psi$ si et seulement si $a \Vdash \varphi$ et $a \Vdash \psi$;
  - $a \Vdash \varphi \vee \psi$ si et seulement si $a \Vdash \varphi$ ou $a \Vdash \psi$;
  - $a \Vdash \varphi \rightarrow \psi$ si et seulement si pour tout $b \in S$, si $a \leqslant b$ et $b \Vdash \varphi$, alors $b \Vdash \psi$.

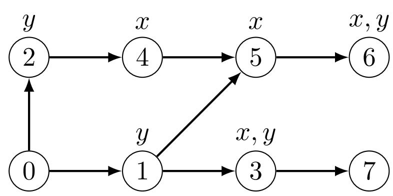
Pour $\varphi \in \mathcal{F}$ et $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$, on note :

- $a \Vdash \Gamma$ si pour tout $\psi \in \Gamma$, $a \Vdash \psi$;
- $\mathcal{K} \Vdash \varphi$ (resp. $\mathcal{K} \Vdash \Gamma$) si pour tout $a \in S$, $a \Vdash \varphi$ (resp. $a \Vdash \Gamma$) ;
- $\Gamma \Vdash \varphi$ si pour tout modèle de Kripke $\mathcal{K} = (S, A, \Vdash)$ et $a \in S$, si $a \Vdash \Gamma$, alors $a \Vdash \varphi$;
- $\Vdash \varphi$ si $\emptyset \Vdash \varphi$ ou si pour tout $\mathcal{K}$, $\mathcal{K} \Vdash \varphi$. On dit alors que φ est **toujours réalisée**.

1. Soit $\mathcal{K} = (S, A, \Vdash)$ un modèle de Kripke, $a \in S$ et $\varphi \in \mathcal{F}$. Reformuler ce que signifie $a \Vdash \neg\varphi$.
2. Pour $\mathcal{V} = \{x, y\}$, déterminer, parmi les deux représentations suivantes, laquelle correspond à un modèle de Kripke (les variables au dessus des sommets sont celles qui sont réalisées par ces sommets). Justifier. Pour le modèle de Kripke correspondant, indiquer quels sommets réalisent la formule $y \vee \neg x$.



$\mathcal{K}_1$



$\mathcal{K}_2$

On rappelle en annexe les règles d'inférence des logiques minimale, intuitionniste et classique. On notera $\Gamma \vdash_m \varphi$, $\Gamma \vdash_i \varphi$ et $\Gamma \vdash_c \varphi$ pour indiquer qu'un séquent $\Gamma \vdash \varphi$ est prouvable en logique minimale, intuitionniste et classique respectivement.

3. Montrer que $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$ est prouvable en logique minimale. Est-ce une formule toujours réalisée ?
4. Montrer que pour $x \in \mathcal{V}$, $x \vee \neg x$ n'est pas une formule toujours réalisée.
5. Soit $\varphi \in \mathcal{F}$, $\mathcal{K} = (S, A, \Vdash)$ un modèle de Kripke et $a, b \in S^2$. Montrer que si $a \Vdash \varphi$ et $a \leqslant b$, alors $b \Vdash \varphi$.
6. Montrer que la logique intuitionniste est **correcte** pour la sémantique de Kripke, c'est-à-dire que si $\Gamma \vdash_i \varphi$, alors $\Gamma \Vdash \varphi$. Que peut-on en déduire sur la logique intuitionniste dans la sémantique booléenne usuelle ?
7. Montrer que $(\neg\varphi \vee \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$ est prouvable en logique intuitionniste. Qu'en est-il de la formule réciproque $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\varphi \vee \psi)$?

On appelle **modèle de Kripke minimal** un modèle de Kripke où on a remplacé la condition $a \nVdash \bot$ pour $a \in S$ par : si $a \Vdash \bot$ et $a \leqslant b$, alors $b \Vdash \bot$. On notera $\Vdash_m$ la relation de réalisation dans un modèle de Kripke minimal.

8. Sans reprendre toute la preuve, justifier que si $\Gamma \vdash_m \varphi$, alors $\Gamma \Vdash_m \varphi$.
9. Montrer que les formules de la question 7 ne sont pas prouvables en logique minimale.

Annexe : règles d'inférence

La logique **minimale** est formée des règles suivantes :

– introduction et élimination de $\wedge$:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi} \wedge_i, \quad \frac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \varphi} \wedge_e^g \quad \text{et} \quad \frac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \psi} \wedge_e^d$$

– introduction et élimination de $\vee$:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi} \vee_i^g, \quad \frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi} \vee_i^d \quad \text{et} \quad \frac{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi \quad \Gamma, \varphi \vdash \sigma \quad \Gamma, \psi \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \sigma} \vee_e$$

– introduction et élimination de $\rightarrow$:

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi} \rightarrow_i \quad \text{et} \quad \frac{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi} \rightarrow_e$$

– axiomes :

$$\frac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi} \text{ax} \quad \text{et} \quad \frac{}{\Gamma \vdash \top} \top_i$$

La logique **intuitionniste** est formée des règles de la logique minimale et de l'élimination de $\perp$:

$$\frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash \varphi} \perp_e$$

La logique **classique** est formée des règles de la logique intuitionniste et du tiers-exclu :

$$\frac{}{\Gamma \vdash \varphi \vee \neg\varphi} \text{te}$$

Exercice 3: Clôture par sur-mots et sous-mots (Ulm)

Définition

Soit Σ un alphabet et $u, v \in \Sigma^*$, $u = a_0 \ldots a_{m-1}$ et $v = b_0 \ldots b_{n-1}$. On dit que u est un **sous-mot** de v, noté $u \preccurlyeq v$, s'il existe une fonction strictement croissante $\varphi : [\![0, m-1]\!] \to [\![0, n-1]\!]$ telle que $\forall i \in [\![0, m-1]\!]$, $a_i = b_{\varphi(i)}$. On dit alors que v est un **sur-mot** de u.

Étant donné un langage L, on note $\widehat{L}$ le langage des sur-mots de mots de L, c'est-à-dire

$$\widehat{L} = \{v \in \Sigma^* | \exists u \in L, u \preccurlyeq v\}$$

1. Soient $L_0 = ab^*a$ et $L_1 = (ab)^*$. Déterminer des expressions régulières pour $\widehat{L_0}$ et $\widehat{L_1}$.
2. Montrer que pour tout langage L, on a $\widehat{\widehat{L}} = \widehat{L}$.
3. Existe-t-il des langage L' pour lesquels il n'existe aucun langage L tel que $\widehat{L} = L'$?
4. Montrer que si L est un langage rationnel, alors $\widehat{L}$ est également rationnel.

On admet le :

Théorème

Pour toute suite $(u_n) \in (\Sigma^*)^{\mathbb{N}}$, il existe $i < j$ tels que $u_i \preccurlyeq u_j$.

5. Montrer que pour tout langage L, il existe un langage fini $F \subseteq L$ tel que $\widehat{F} = \widehat{L}$.

Définition

Un langage L est dit **clos par sur-mots** si, pour $u \in L$ et $v \in \Sigma^*$ tels que $u \preccurlyeq v$, on a $v \in L$.

On définit de même un langage **clos par sous-mots**.

6. Montrer que tout langage clos par sur-mots est rationnel.
7. Montrer que tout langage clos par sous-mots est rationnel.
8. Montrer le théorème précédemment admis.