Devoir maison n°6

Facultatif

⋆⋆⋆

Différences et similitudes entre systèmes déductifs

On considère $\mathcal{F}$ l'ensemble des formules propositionnelles, sur un ensemble de variables propositionnelles $\mathcal{V} = \{x_1, \ldots, x_n\}$, sur les connecteurs logiques $\bot$, $\wedge$, $\vee$ et $\rightarrow$. On note $\neg A$ la formule propositionnelle $A \rightarrow \bot$.

Pour un séquent $\Gamma \vdash A$, on note $\Gamma \vdash_m A$ (resp. $\Gamma \vdash_i A$, $\Gamma \vdash_c A$) si le séquent est prouvable en logique minimale (resp. intuitionniste, classique).

1 Non prouvabilité en logique intuitionniste

Dans cette partie, on souhaite montrer qu'il existe des séquents prouvables en logique classique mais pas en logique intuitionniste.

On considère la sémantique suivante, dite **sémantique de Heyting**, définie sur $\mathcal{F}$: on note $\mathcal{O}(\mathbb{R})$ l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$ et on définit une **valuation** comme une fonction $\mu : \mathcal{V} \to \mathcal{O}(\mathbb{R})$. On étend la définition d'une valuation μ à $\mathcal{F}$ tout entier par :

- $\mu(\bot) = \emptyset$;
- $\mu(A \wedge B) = \mu(A) \cap \mu(B)$;
- $\mu(A \vee B) = \mu(A) \cup \mu(B)$;
- $\mu(A \rightarrow B) = \overset{\circ}{\overbrace{\mu(A)^{\complement} \cup \mu(B)}}$ où $X^{\complement}$ et $\overset{\circ}{X}$ représentent le complémentaire et l'intérieur de X respectivement.

Pour $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$, on note $\mu(\Gamma) = \bigcap\limits_{A \in \Gamma} \mu(A)$. Par convention, $\mu(\emptyset) = \mathbb{R}$.

Un séquent $\Gamma \vdash A$ est dit **valide** si pour toute valuation μ, $\mu(\Gamma) \subseteq \mu(A)$. Une règle d'inférence est dite **valide** si lorsque ses prémisses sont valides, alors sa conclusion est valide.

Question 1 Quelle sémantique obtient-on si on considère des valuations à valeur dans $\{\emptyset, \mathbb{R}\}$ au lieu de $\mathcal{O}(\mathbb{R})$?

Question 2 Montrer que $\vdash_i ((A \vee B) \wedge \neg A) \rightarrow B$.

Question 3 Le séquent $\vdash ((A \vee B) \wedge \neg A) \rightarrow B$ est-il valide pour la sémantique de Heyting ? Justifier.

Question 4 Montrer que $\vdash_c (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \vee B)$.

Question 5 Le séquent $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \vee B)$ est-il valide pour la sémantique de Heyting ? Justifier.

Question 6 Montrer que les règles de déduction $(\rightarrow_i)$, $(\rightarrow_e)$, $(\vee_e)$ et $(\bot_e)$ sont valides.

Question 7 On admet que les autres règles de la logique **intuitionniste** sont valides. En déduire que la logique intuitionniste est **correcte** pour la sémantique de Heyting.

Question 8 Montrer que la règle de tiers exclu n'est pas valide. Que peut-on déduire concernant la complétude de la logique intuitionniste pour la sémantique booléenne usuelle ?

2 Réductions entre problèmes de prouvabilité

Dans cette partie, on souhaite montrer que même si une formule A n'est un théorème qu'en logique classique, on peut la transformer en une formule qui est un théorème en logique minimale ou intuitionniste.

2.1 Transformation de Gödel

On définit la **transformation de Gödel** d'une formule A, notée $g(A)$, par induction par :

- $g(\perp) = \perp$;
- pour $x \in \mathcal{V}$, $g(x) = \neg\neg x$;
- pour $A, B \in \mathcal{F}$:
  - $g(A \wedge B) = g(A) \wedge g(B)$;
  - $g(A \to B) = g(A) \to g(B)$;
  - $g(A \vee B) = \neg\neg(g(A) \vee g(B))$.

Question 9 Déterminer $g(x \vee \neg x)$ pour $x \in \mathcal{V}$.

Dans la suite de cette sous-partie, on souhaite montrer le théorème suivant : « Pour $A \in \mathcal{F}$, $\vdash_c A$ si et seulement si $\vdash_m g(A)$. »

Question 10 Montrer le sens réciproque du théorème.

Une formule A est dite **stable** si $\vdash_m A \leftrightarrow \neg\neg A$, où $B \leftrightarrow C = (B \to C) \wedge (C \to B)$.

Question 11 Montrer que $\vdash A \to \neg\neg A$ est toujours prouvable en logique minimale.

Question 12 Montrer que pour $A \in \mathcal{F}$, $\neg A$ est stable.

Question 13 Montrer que pour $A \in \mathcal{F}$, $g(A)$ est stable.

Question 14 Montrer, par induction sur les arbres de preuve, le sens direct de la propriété énoncé précédemment.

On se contentera de ne donner les détails que pour certaines règles bien choisies.

2.2 Lien avec la logique intuitionniste

L'ajout inductif de doubles négations dans une formule prouvable en logique classique permet d'obtenir une formule prouvable en logique minimale. On montre dans cette partie un résultat plus fort pour la logique intuitionniste.

Pour la question suivante, on admet les trois résultats :

- $\vdash_m (\neg\neg A \wedge \neg\neg B) \to \neg\neg(A \wedge B)$;
- $\vdash_m \neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$;
- $\vdash_i (\neg\neg A \to \neg\neg B) \to \neg\neg(A \to B)$.

Question 15 Montrer que pour $A \in \mathcal{F}$, $\vdash_i g(A) \to \neg\neg A$.

Question 16 En déduire que $\vdash_c A$ si et seulement si $\vdash_i \neg\neg A$.

⋆⋆⋆