Programme de colle période 3 : P, NP, stratégies algorithmiques

1 Programme

1.1 P et NP

- Définition d'un algorithme et de sa complexité
- Transformation d'un problème d'optimisation en problème de décision au seuil
- Définition de P
- Définition de NP par certificat
- Réduction many-one polynomiale, NP-difficulté, NP-complétude
- Connaître la définition et la NP-complétude (mais pas nécessairement leurs preuves) des problèmes de décision suivants : `SAT`, `3SAT`, `Stable`, `Clique`, `Couverture des arêtes par les sommets`, `Cycle/chemin hamiltonien`, `Somme partielle`.

1.2 Stratégies algorithmiques

- Algorithmes d'approximation
- Branch and Bound, heuristique d'évaluation, heuristique de branchement
- Algorithmes Monte Carlo, Las Vegas
- Définition de faux positif, faux négatif

2 Questions de cours

1. Donner la définition complète de la classe NP, et montrer que $\texttt{SAT} \in \mathsf{NP}$.
2. On suppose que `Clique` est NP-complet. Montrer que `Couverture des arêtes par les sommets` est NP-complet.
3. Montrer que `Cycle hamiltonien orienté` $\leqslant_{\mathsf{m}}^{\mathsf{p}}$ `Cycle hamiltonien non orienté`.
4. Montrer que si $A \leqslant_{\mathsf{m}}^{\mathsf{p}} B$ et $B \in \mathsf{P}$ (resp. $B \in \mathsf{NP}$), alors $A \in \mathsf{P}$ (resp. $A \in \mathsf{NP}$).
5. Décrire, en français ou pseudo-code, le fonctionnement d'un algorithme de type Branch and Bound pour résoudre le problème du voyageur de commerce, en rappelant les hypothèses sur les heuristiques.
6. Expliquer comment construire un algorithme Las Vegas à partir d'un algorithme Monte Carlo et d'un vérificateur. Donner, en justifiant, l'espérance de la nouvelle complexité.
7. Expliquer comment construire un algorithme Monte Carlo de complexité polynomiale, sans faux positif, et avec $\mathbb{P}(\text{faux négatif}) \leqslant \frac{1}{2}$ à partir d'un algorithme Las Vegas de complexité d'espérance polynomiale qui résout un problème de décision (autrement dit, prouver $\mathsf{ZPP} \subseteq \mathsf{RP}$).
8. Expliquer comment construire un algorithme Las Vegas de complexité d'espérance polynomiale à partir de deux algorithmes Monte Carlo de complexité polynomiale, respectivement sans faux positif et sans faux négatif, qui résolvent un problème de décision (autrement dit, prouver $\mathsf{RP} \cap \text{co}\mathsf{RP} \subseteq \mathsf{ZPP}$).