ADS Informatique

Jeux à objectif compétitif sur les graphes

Source : M. Schmidt, Simon. *Jeux à objectif compétitif sur les graphes.*

Travail demandé

Il vous est demandé d'étudier puis de présenter le texte joint à travers un exposé de synthèse d'une durée comprise entre 15 et 20 minutes.

Si l'étude de la totalité du dossier et la préparation d'un exposé cohérent dans la durée impartie ne vous paraît pas possible, vous pouvez décider de vous limiter à une partie du dossier.

Remarques générales

1. Les textes proposés, quelle que soit leur origine, peuvent présenter des défauts (coquilles typographiques, négligences ou sous-entendus de l'auteur, voire erreurs...) qui, sauf exception, n'ont pas été corrigés.

2. Les textes proposés peuvent contenir des exercices qu'il n'est pas demandé de résoudre. Néanmoins, vous pouvez vous aider des énoncés de ces exercices pour enrichir votre exposé.

C'est-à-dire : pour tout $u, v \in V(G)$, si $uv \in E(G)$ alors $\phi(u)\phi(v) \in E(H)$. Un *isomorphisme* entre G et H est une bijection $\phi : V(G) \to V(H)$, qui préserve l'adjacence et la non-adjacence : pour tout $u, v \in V(G)$, $uv \in E(G)$ si et seulement si $\phi(u)\phi(v) \in E(H)$. Dans ce cas, la bijection réciproque ϕ^{-1} est également un isomorphisme (de H dans G). Un *automorphisme* de G est un isomorphisme de G dans lui-même. L'ensemble des automorphismes de G forme un groupe pour la composition des applications. Nous le notons $\mathrm{Aut}(G)$. L'application identité est notée Id_G ou simplement Id. Le groupe $\mathrm{Aut}(G)$ agit naturellement sur $V(G)$, de manière fidèle. Nous dirons qu'un graphe est *sommet transitif* si cette action est transitive.

Coloration. Une k-coloration des sommets de G est une application $c : V(G) \to \{1, \dots, k\}$. Les éléments de $\{1, \dots, k\}$ seront appelés des couleurs. Nous dirons aussi que c est une coloration des sommets de G avec k couleurs. Une k-coloration de G est propre si pour tout $uv \in E(G)$, $c(u) \neq c(v)$. Le *nombre chromatique* d'un graphe G est le plus petit entier k tel qu'il existe une k-coloration propre de G. Nous le notons $\chi(G)$. Pour $d \geq 0$, une k-coloration est *d-impropre* (d-defective en anglais), si chaque sommet possède au plus d voisins ayant la même couleur que lui. Un sommet colorié avec la couleur a et possédant exactement d voisins ayant la même couleur sera dit *a-saturé*, ou simplement *saturé*, si la couleur n'a pas d'intérêt. Le nombre chromatique d-impropre de G, noté $\chi^{(d)}(G)$, est alors le plus petit entier k tel que G possède une k-coloration d-impropre.

Nous étudierons aussi dans cette thèse le concept de coloration distinguante. Cette coloration se démarque des autres car elle est reliée au groupe d'automorphisme du graphe plutôt que directement à des propriétés d'adjacence. Cette coloration étant moins largement connue, nous la présentons dans le Chapitre 4, accompagnée d'un bref état de l'art.

Domination. Un ensemble dominant d'un graphe G est un sous-ensemble de sommet D tel que $N[D] = V(G)$. La taille d'un plus petit ensemble dominant de G est appelé le *nombre dominant de G*. Il sera noté $\gamma(G)$. Nous obtenons facilement la borne supérieure suivante si G est sans sommet isolé : $\gamma(G) \leq \lfloor \frac{V(G)}{2} \rfloor$. Le concept de domination est très étudié et a connu une multitude de variantes. Nous renvoyons au livre suivant pour une étude approfondie du sujet [46].

1.3 Familles de graphes

Les chemins. Le *chemin* d'ordre n est le graphe à n sommets, $\{u_1, \dots, u_n\}$, dont les arêtes sont exactement les paires (u_i, u_{i+1}), où $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Nous le notons P_n. Le groupe $\mathrm{Aut}(P_n)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Le seul automorphisme non trivial ϕ est défini par $\phi(u_i) = u_{n-i+1}$, avec $i \in \{1, ...n\}$. C'est la symétrie par rapport au centre de la chaîne.

Les cycles. Le *cycle* d'ordre n ($n \geq 3$) est le graphe à n sommets, $\{u_0, \ldots, u_{n-1}\}$, dont les arêtes sont exactement les paires (u_i, u_j), avec $|i - j| \equiv 1[n]$, où $i, j \in \{0, \ldots, n-1\}$. Le cycle d'ordre n est dénoté C_n. Les cycles sont les seuls graphes 2-réguliers connexes. Le groupe $\mathrm{Aut}(C_n)$ est isomorphe au groupe diédral D_{2n}, qui est constitué de n rotations et n symétries (axiales).

Les graphes complets. Le *graphe complet* d'ordre n est le graphe tel que tous les sommets soient voisins deux à deux. Nous notons K_n le graphe complet d'ordre n. Le groupe d'automorphisme de K_n est le groupe symétrique $\mathcal{S}_n$, qui contient toutes les permutations de sommets possibles. Un sous-graphe induit d'un graphe G qui est isomorphe à un graphe complet est appelé une *clique* de G. Un sous graphe induit de G isomorphe au complémentaire d'un graphe complet est un *ensemble indépendant* ou encore un *stable* de G.

Les graphes bipartis. Un graphe G est *biparti* s'il existe une partition de $V(G)$ en deux ensembles disjoints et non vides, S et R, telle que toute arête de G ait l'une de ses extrémités dans S et l'autre dans R. Les ensembles S et R induisent donc des stables, qui sont maximaux s'il n'y a pas de sommets isolés. Nous dirons que G est biparti complet s'il y a de plus un joint entre S et R. Nous noterons $K_{n,m}$ le graphe biparti complet dont les stables sont respectivement de taille n et m. De manière équivalente, un graphe G connexe non trivial est biparti s'il est proprement 2-coloriable ou s'il ne possède pas de cycles impairs comme sous-graphes.

Les arbres et les forêts. Un *arbre* est un graphe connexe dont aucun des sous-graphes n'est un cycle. Un graphe d'ordre n est un arbre si et seulement s'il est connexe et possède exactement $n - 1$ arêtes. Les arbres non triviaux sont des graphes bipartis et donc proprement 2-coloriables.

Une *forêt* est un graphe dont toutes les composantes connexes sont des arbres.

Les chenilles. Une *chenille* est un arbre tel que tous les sommets soient à distance au plus 1 d'un unique chemin. Un tel chemin d'ordre maximum est appelé la *colonne* de la chenille (voir Figure 1.1). Alternativement, une chenille est un arbre à partir duquel nous obtenons un chemin en supprimant toutes les feuilles. Attention, dans ce cas le chemin obtenu n'est pas une colonne, il faut lui ajouter une feuille à chaque extrémité.

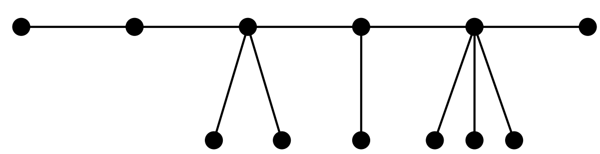


FIGURE 1.1 – Une chenille avec une colonne d'ordre 6.

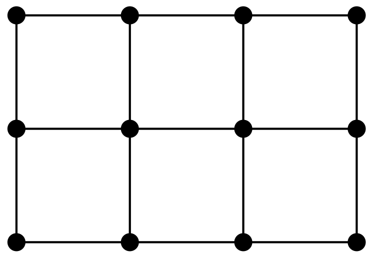


FIGURE 1.5 – La grille $P_4 \Box P_3$.

en couronne $\mathcal{S}_2 \wr \mathcal{S}^n$. Un automorphisme consiste donc en une permutation des n coordonnées d'un sommet, associée, pour chacune d'elles, à un changement ou non de valeur.

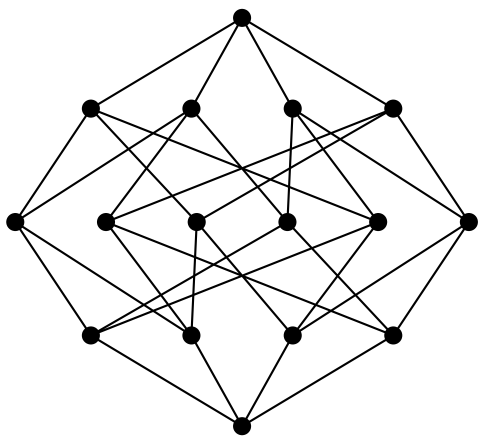


FIGURE 1.6 – L'hypercube de dimension 4.

1.4 Jeux à objectif compétitif sur les graphes

Nous définissons maintenant un cadre général qui englobe les différents jeux sur les graphes que nous étudierons dans les chapitres à venir. Nous commençons d'abord par rappeler ce que sont les jeux combinatoires. Notre présentation sera un peu laminaire et nous renvoyons à [1] pour une très bonne introduction au sujet et à [80] pour une étude approfondie et exhaustive.

Un *jeu combinatoire* est un jeu à deux joueurs, généralement appelés *Droite* et *Gauche*, fini, sans intervention de la chance et sans informations cachées. Les joueurs jouent chacun leur tour et en convention normale, le premier qui ne peut plus jouer perd la partie. Cette condition de victoire peut sembler quelque peut restrictive. Il n'en est rien. Imaginons en effet un jeu ou les joueurs remplissent un plateau avec des jetons à leur couleur. L'un des joueurs gagne si, lorsque le plateau est entièrement rempli, il a créé une certaine forme. L'autre, s'il l'en a empêché. Cette condition de victoire se transforme facilement en le-premier-qui-ne-peut-pas-plus-jouer-a-perdu. Il suffit de rajouter un coup supplémentaire inutile (taper dans ses mains, crier hourra) à chaque joueur en fonction de l'état du jeu au moment ou le plateau est rempli. En général, toute condition de victoire n'impliquant pas le hasard peut se traduire sous la forme le-premier-qui-ne-pas-jouer-a-perdu.

Jeux combinatoires. Donnons maintenant une définition plus formelle de jeu combinatoire. Un *jeu combinatoire* est défini inductivement de la manière suivante :

- Le jeu ou personne ne peut jouer est un jeu combinatoire noté $\{.|.\}$.
- Si $\mathcal{G}_1^D, \cdots, \mathcal{G}_k^D$ et $\mathcal{G}_1^G, \cdots, \mathcal{G}_l^G$ sont des jeux combinatoires, alors $\mathcal{G} = \{\mathcal{G}_1^D, \cdots, \mathcal{G}_k^D | \mathcal{G}_1^G, \cdots, \mathcal{G}_l^G\}$ est le jeu combinatoire, où les $\mathcal{G}_i^D$ et $\mathcal{G}_i^G$ représentent respectivement les positions que Droite et Gauche peuvent atteindre en un coup.

Une autre définition plus visuelle peut être donnée à partir de l'arbre du jeu. Un jeu combinatoire est alors un arbre avec un sommet remarquable, la racine, et des arêtes toutes orientées depuis la racine en direction des feuilles. Chaque arête possède une étiquette Droite ou Gauche. Le jeu consiste alors à déplacer un jeton depuis la racine en suivant les arêtes et leur orientation. Droite n'emprunte que des arêtes étiquetées Droite et similairement pour Gauche.

Un joueur possède une *stratégie gagnante* pour un jeu s'il peut s'assurer la victoire quels que soient les coups joués par son adversaire. Nous dirons que le jeu est *gagnant* pour un joueur si celui-ci possède une stratégie gagnante pour ce jeu. Dans le cas contraire le jeu est *perdant* pour ce joueur. Chaque jeu peut alors se classer dans une des quatre catégories ci-dessous.

- Le jeu est gagnant pour Droite, peu importe qui commence.
- Le jeu est gagnant pour le joueur qui commence.
- Le jeu est gagnant pour le joueur qui joue en second.
- Le jeu est gagnant pour Gauche, peu importe qui commnence.

Pour les lecteurs qui trouveraient un peu floue la définition de stratégie gagnante ci-dessus, nous renvoyons à [80]. La définition est faite dans le sens inverse. Définir les quatres catégories inductivement ; le jeu vide est gagnant pour le second, un jeu est gagnant pour un joueur s'il existe un coup qui mène à une position perdante pour son adversaire, perdant sinon. Ensuite, nous pouvons dire qu'un joueur a une stratégie gagnante pour un jeu si celui-ci se trouve dans l'une ou l'autre des précédentes catégories. Il ne reste plus qu'à se convaincre que la définition de stratégie ainsi obtenue correspond bien à celle intuitive que nous avons énoncée plus haut.

Jeux à objectif compétitif sur les graphes.

Un *jeu à objectif compétitif sur un graphe* G est un jeu combinatoire dont les règles et les conditions de victoire sont reliées à un problème d'optimisation/un invariant du graphe. Pour ces jeux, nous renommons les joueurs le *Gentil* et le *Méchant*. Les raisons justifiant cette terminologie apparaîtront clairement d'ici quelques lignes. Dans cette thèse nous étudions deux types de jeux à objectif compétitif sur les graphes, qui correspondent à deux grandes classes de problèmes d'optimisation.

Jeu de partition. Pour un ensemble X (les sommets d'un graphe G par exemple), un *problème de partition* consiste à trouver le plus petit entier k tel que X se partitionne en k ensembles ayant une certaine propriété. Les problèmes de partition peuvent s'exprimer de manière plus parlante en termes de coloration : trouver le plus petit entier k tel qu'une k-coloration de X possède telle ou telle propriété.

Dans un jeu de partition concernant une propriété $\mathcal{P}$, nous fixons à l'avance un entier k, qui correspond au nombre de couleurs autorisées durant la partie. Le jeu se joue sur un ensemble X et les deux joueurs, Gentil et Méchant, colorient chacun leur tour les sommets de X, en respectant certaines règles additionnelles (typiquement la coloration partielle doit respecter $\mathcal{P}$). Le jeu s'arête lorsqu'un des joueurs ne peut plus jouer (l'ensemble X peut alors être entièrement colorié ou non). Le Gentil est déclaré vainqueur si X est totalement colorié et si la coloration obtenue possède la propriété $\mathcal{P}$.

Nous pouvons alors définir deux invariants qui sont les versions ludiques de l'invariant correspondant au problème de minimisation lié à $\mathcal{P}$. Le premier invariant correspond au nombre minimal de couleurs à fournir pour que Gentil possède une stratégie gagnante avec ces k couleurs lorsqu'il commence. Nous définissons un second invariant de manière identique, mais en considérant que Gentil joue cette fois en second.

Les exemples les plus connus de jeux de partition sont le jeu de coloration et ses variantes, que nous définirons et étudierons dans le Chapitre 2. Dans le Chapitre 4, nous introduirons un nouveau jeu de partition, le jeu de coloration distinguante.

Notons que les études concernant le jeu de coloration s'intéressent essentiellement à l'invariant ludique obtenu lorsque le Gentil commence. Remarquons que pour ce jeu l'écart entre les deux paramètres peut être aussi grand que souhaité. Ce qui ne sera par exemple pas le cas pour le jeu de domination.

Jeu de construction.

Pour un ensemble X un *problème de construction* consiste à trouver un sous-ensemble S de X vérifiant une certaine propriété. Il peut s'agir alors d'un problème de maximisation : couplage, stable, ou clique maximum d'un graphe par exemple, ou d'un problème de minimisation : ensemble dominant ou code identifiant minimum.

Dans un jeu de construction concernant un proplème de construction maximisant et une propriété $\mathcal{P}$, nous fixons à l'avance un entier k, qui correspond à l'objectif à atteindre pour le Gentil. Le jeu se joue sur un ensemble X et les deux joueurs, Gentil et Méchant, construisent un sous-ensemble S en y ajoutant chacun leur tour un sommet de X. Ils doivent respecter certaines règles supplémentaires. Typiquement l'ensemble doit à tout moment respecter la propriété $\mathcal{P}$. Le jeu s'arrête lorsqu'un des joueurs ne peut plus jouer. L'ensemble S construit durant le jeu est alors maximal par rapport à $\mathcal{P}$ et le Gentil est déclaré vainqueur si la taille de S est au moins k.

Pour un problème de construction minimisant, le jeu associé est défini similairement mais l'entier fixé k correspond au nombre de tours maximum de la partie. Les règles du jeu imposent généralement que le sommet rajouté dans S par un joueur "rapproche" cet ensemble de la propriété $\mathcal{P}$. Le jeu s'arrête lorsqu'un des joueurs ne peut plus jouer (les k tours autorisés peuvent alors avoir été tous joués ou non, en effet si S a acquis la propriété $\mathcal{P}$, les joueurs ne peuvent plus jouer car ils ne peuvent pas "rapprocher" S de $\mathcal{P}$). Le Gentil gagne si l'ensemble S construit au cours du jeu vérifie $\mathcal{P}$.

Nous pouvons alors définir deux invariants qui sont les versions ludiques de l'invariant correspondant au problème de maximisation/minimisation lié à $\mathcal{P}$. Le premier invariant correspond au nombre maximal/minimal k pour que le Gentil possède une stratégie gagnante lorsqu'il commence. Nous définissons le second invariant de manière identique, mais en considérant que le Gentil joue cette fois en second.

Le jeu de construction maximisant, où la propriété $\mathcal{P}$ correspondante est l'indépendance, est étudié par Phillips et Slater dans [74]. D'autres jeux de ce type pourraient être intéressants à étudier. Qu'en est il par exemple du jeu ou les joueurs construisent ensemble un couplage ?

Dans notre thèse nous ne nous sommes pas intéressés aux jeux maximisants, mais au jeu de construction minimisant le plus célèbre, le jeu de domination. Nous renvoyons au Chapitre 3, pour une présentation détaillée de ce jeu.

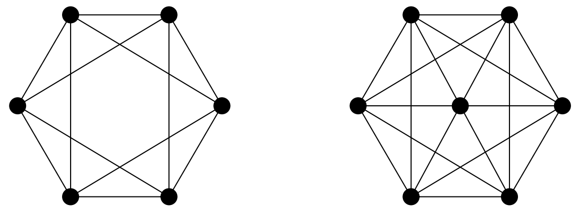
Le *jeu de coloration* est le plus ancien jeu à objectif compétitif sur les graphes. Il s'agit d'un jeu de partition qui a été introduit par Brams vers 1980, comme approche alternative pour une preuve du Théorème des quatre couleurs qui ne fasse pas appel aux ordinateurs. Ce jeu fut publié pour la première fois par Gardner [40], mais resta majoritairement ignoré par la communauté jusqu'à ce qu'il soit redécouvert par Bodlaender en 1991 [8]. Le Gentil et le Méchant prennent ici les noms d'Alice et Bob. Ils s'affrontent sur un graphe G en coloriant tour à tour les sommets du graphe avec une palette de k couleurs fixée au préalable. La coloration qu'ils construisent au cours du jeu doit être une coloration propre. Le jeu s'arrête quand un joueur ne peut plus colorier de sommets. Si le graphe est alors entièrement colorié, Alice est déclarée gagnante, sinon c'est Bob qui l'emporte. Le *nombre chromatique ludique* de G est le plus petit nombre de couleurs à fournir à Alice et Bob pour qu'elle ait une stratégie gagnante sur G lorsqu'elle commence à jouer. Nous notons cet invariant $\chi_g(G)$. Nous obtenons immédiatement l'encadrement suivant : $\chi(G) \leq \chi_g(G) \leq \Delta(G) + 1$. Remarquons que contrairement aux deux jeux que nous étudierons par la suite, le jeu de domination et le jeu distinguant, la communauté ne s'est que rarement intéressée en tant que tel à l'invariant que nous pourrions définir similairement lorsque c'est Bob qui entame la partie. L'étude de cette situation apparaît en fait souvent si nous désirons faire des preuves inductives.

Le nombre chromatique ludique défie l'intuition sur plusieurs points. Citons d'abord la conjecture la plus fameuse du domaine, qui semble à première vue être un truisme, mais qui reste totalement ouverte.

Conjecture. *Pour tout graphe G et tout entier $k \geq \chi_g(G)$, Alice gagne le jeu de coloration sur G avec k couleurs lorsqu'elle commence.*

Le fait que le nombre chromatique ludique ne soit pas héréditaire peut également surprendre. Il existe effectivement des graphes qui possèdent un nombre chromatique ludique plus faible que certains de leurs sous-graphes induits (voir la Figure 2.1 pour un exemple qui se généralise facilement). Cela a directement à voir avec le fait que sur certains graphes il n'est pas avantageux pour Alice de commencer.

Afin d'étudier le jeu de coloration, Zhu [85] a plus tard introduit le *k-jeu de marquage* qui se révèle plus facile à appréhender, notamment car les problèmes cités plus haut n'apparaissent pas pour ce jeu. Dans ce jeu, Alice et Bob marquent chacun leur tour les sommets d'un graphe G. Ils ne peuvent marquer un sommet que s'il possède au plus k voisins déjà marqués. Le jeu s'arrête quand l'un des joueurs ne peut plus marquer de sommets. Alice gagne alors si tous les sommets sont marqués. Le *nombre de marquage ludique* d'un graphe G (en anglais game coloring number), noté $\mathrm{col}_g(G)$, est égal à $1 + k_{min}$, où k_{min} est le plus petit entier k tel qu'Alice possède une stratégie gagnante pour le k-jeu de marquage. Nous vérifions facilement que pour tout graphe G, $\chi_g(G) \leq \mathrm{col}_g(G)$. Cette inégalité peut être stricte. Pire, il n'existe pas de fonction F telle que : $\mathrm{col}_g(G) \leq F(\chi_g(G))$, pour tout graphe G. Pour



$\chi_g(H) = 6$ $\chi_g(G) = 4$

FIGURE 2.1 – χ_g n'est pas héréditaire.

s'en convaincre, il suffit de remarquer que $\chi_g(K_{n,n}) = 3$ et $\mathrm{col}_g(K_{n,n}) = n+1$, pour tout $n \geq 2$. Le nombre de marquage a le bon goût d'être héréditaire : si H est un sous-graphe d'un graphe G, alors $\mathrm{col}_g(H) \leq \mathrm{col}_g(G)$. Cette propriété démontrée par Sidorowicz [79] rend cet invariant plus facile à étudier que le nombre chromatique ludique.

Une direction de recherche privilégiée dans l'étude de χ_g est le calcul, pour une classe de graphes $\mathcal{C}$, de la valeur maximale que peut prendre χ_g parmi les graphes de cette classe. Nous noterons $\chi_g(\mathcal{C})$ pour $\max\{\chi_g(G) \mid G \in \mathcal{C}\}$ et $\mathrm{col}_g(\mathcal{C})$ pour $\max\{\mathrm{col}_g(G) \mid G \in \mathcal{C}\}$. La majeure partie des bornes supérieures obtenues le sont alors en utilisant le jeu de marquage et un ensemble de stratégies souvent regroupées sous le nom de stratégie d'activation. La première stratégie d'activation ayant été introduite par Zhu [85]. Citons quelques uns de ces résultats :

- $\chi_g(\mathcal{F}) = \mathrm{col}_g(\mathcal{F}) = 4$, où $\mathcal{F}$ désigne la classe des forêts (obtenue par Faigle et al. [36]).
- $7 \leq \chi_g(\mathcal{P}) \leq \mathrm{col}_g(\mathcal{P}) \leq 17$, où $\mathcal{P}$ est la classe des graphes planaires (la borne supérieure est due à Zhu [86] et l'inférieure à Kierstead et Trotter [59]).
- $6 \leq \chi_g(\mathcal{PE}) \leq \mathrm{col}_g(\mathcal{PE}) \leq 7$, où $\mathcal{PE}$ est la classe des graphes planaires extérieurs (due à Guan et Zhu [45]).
- $\chi_g(\mathcal{GT}) = \mathrm{col}_g(\mathcal{GT}) = 5$, où $\mathcal{TG}$ désigne les grilles toroïdales (obtenue par Raspaud et Wu [75]).

Attention, même lorsque la valeur exacte est connue pour une classe de graphes, cela n'implique pas que nous soyons capables de calculer exactement χ_g pour chaque membre de cette classe. Par exemple, la valeur exacte de $\chi_g(C_n \square C_m)$ reste inconnue lorsque n et m sont tous deux impairs.

Une autre manière d'attaquer le problème de la coloration ludique est de relier le nombre chromatique ludique à d'autres invariants non-ludiques. Une bonne borne supérieure peut ainsi être obtenue en considérant le *nombre chromatique acyclique*,

χ_a. Il s'agit du plus petit entier k tel qu'il existe une coloration propre n'induisant pas de cycles bichromatiques.

Théorème 2.1. [Dinski et Zhu [29] (1998).] *Pour tout graphe G,* $\chi_g(G) \leq \chi_a(G)(\chi_a(G)+1)$.

De nombreuses variantes du nombre chromatique ludique ont été proposées et étudiées depuis. Citons entre autres le jeu de coloration d'arêtes (introduit par Lam et al. [67]) et le jeu de coloration d'incidences (proposé par Andres [3]). Ces jeux sont considérés comme des jeux à part entière même s'ils peuvent respectivement être vus comme des restrictions du jeu de coloration aux graphes de ligne et aux graphes d'incidence. Au cours de cette thèse, nous nous sommes intéressés à une variante que nous nommons jeu de coloration 1-impropre et qui autorise la coloration construite au cours du jeu à être 1-impropre. Nous avons longtemps pensé qu'il s'agissait d'une nouvelle variante, jusqu'à ce que nous prenions connaissance des travaux de Chu et al. [23]. Dans cet article, les auteurs introduisent le jeu de coloration d-impropre et quelques-uns de leurs résultats recoupent les nôtres. Dans la première partie de ce chapitre, nous définissons le jeu de coloration d-impropre, puis étudions le rapport entre le jeu de coloration et le jeu de coloration 1-impropre. Nous entrons ici dans les détails de certaines remarques énoncées rapidement dans [23]. Dans cette partie, nous calculons également la valeur du nombre chromatique 1-impropre pour les chemins et les cycles. Dans la deuxième partie, nous nous intéressons aux arbres. Chu et al. ont montré, toujours dans [23], que trois couleurs suffisent à Alice pour gagner le jeu de coloration 1-impropre sur les arbres. Ils ont également démontré que pour certains arbres, ces trois couleurs lui sont réellement nécessaires. Notre résultat principal sera de montrer que cela reste vrai si nous nous restreignons aux chenilles. Ces résultats sont les fruits d'une collaboration avec Sylvain Gravier et Victor Lage-Pesoa. Un article sur le sujet est en cours de rédaction.

2.1 Nombre chromatique ludique 1-impropre

2.1.1 Définition

Le *jeu de coloration d-impropre* est une variante du jeu de coloration, pour laquelle nous relâchons la contrainte de propreté de la coloration. Ce jeu a été introduit pour la première fois en 2003, par Chu *et al.* [23] (sous le nom de Relaxed coloring game). Deux joueurs, Alice et Bob, colorient tour à tour les sommets d'un graphe G avec une palette de k couleurs fixée à l'avance. Ils doivent respecter la contrainte que la coloration partielle construite au cours du jeu est d-impropre. Le plus petit entier k tel qu'Alice ait une stratégie gagnante avec k couleurs lorsqu'elle commence est appelé le *nombre chromatique ludique d-impropre* de G. Nous le noterons $\chi_g^{(d)}(G)$. Pour tout graphe G, l'encadrement suivant est évident : $\chi^{(d)}(G) \leq \chi_g^{(d)}(G) \leq \Delta(G) + 1$. Comme pour le jeu de coloration, il n'est pas clair qu'Alice puisse toujours gagner avec k couleurs sur le graphe G, dès lors que $k \geq \chi_g^{(d)}(G)$. Les mêmes problématiques concernant qui commence apparaissent aussi. En d'autres termes, si Alice peut gagner avec k couleurs en commençant, elle ne peut pas forcément le faire si elle joue en second. De même, si H est un sous-graphe induit de G, $\chi_g^{(d)}(H)$ n'est pas toujours plus petit que $\chi_g^{(d)}(G)$.

La plupart des études concernant le jeu de coloration d-impropre s'intéresse pour des classes données, comme celles des arbres, des graphes planaires ou des graphes planaires extérieurs, à trouver la plus petite valeur de d qui permette d'obtenir une bonne borne supérieure (constante) pour le nombre chromatique ludique d-impropre des graphes de cette classe. Nous renvoyons le lecteur intéressé à [23, 31, 32, 47, 84]. Quant à nous, à partir de maintenant nous ne nous intéresserons plus qu'au jeu 1-impropre et à l'invariant correspondant $\chi_g^{(1)}$.

Afin d'analyser le jeu correctement, il sera utile de considérer que celui-ci peut être joué sur un graphe G déjà partiellement colorié, que nous noterons $G|c$, où c désigne la coloration partielle. Nous demanderons toujours que ces colorations partielles soient 1-impropres.

Nous introduisons également les définitions suivantes, où A désigne Alice et B désigne Bob. Nous dirons que le graphe partiellement colorié $G|c$ est :

- une k-X-position si $X \in \{\mathrm{A}, \mathrm{B}\}$ possède une stratégie gagnante avec k couleurs, quel que soit le joueur qui commence,
- une k-X_f-position si $X \in \{\mathrm{A}, \mathrm{B}\}$ possède une stratégie gagnante avec k couleurs quand il commence,
- une k-X_s-position si $X \in \{\mathrm{A}, \mathrm{B}\}$ possède une stratégie gagnante avec k couleurs quand il joue en second.

Le nombre chromatique ludique 1-impropre de G est alors défini alternativement comme le plus petit k tel que G est une k-A_f-position pour le jeu de coloration impropre.

2.1.2 Relation entre χ_g et $\chi_g^{(1)}$

Dans cette sous-partie, nous donnons nos premiers résultats concernant le jeu de coloration 1-impropre. En particulier, nous étudions les relations qui peuvent exister entre le nombre chromatique ludique et son pendant 1-impropre. Une première intuition serait de penser que le jeu de coloration 1-impropre est plus facile pour Alice. De manière surprenante, ce n'est pas le cas. Des contre-exemples simples sont donnés par les graphes bipartis complets, comme le montre le Théorème 2.3 ci-dessous. Cette remarque avait déjà été faite brièvement dans [23], où il était annoncé sans preuve que $\chi_g^{(1)}(K_{n,n}) = n$.

Afin d'étudier le jeu sur les graphes bipartis, nous introduisons le lemme technique suivant.

Lemme 2.2. *Soit $G|c$ un graphe biparti partiellement k-colorié, avec $k \geq 2$, et soient X et Y les deux ensembles partitionnant ses sommets, avec $|X| = n$. Supposons que c soit telle que p sommets de X aient la couleur 1, q autres sommets de X soient coloriés, aucun sommet de Y ne soit colorié avec 1, et chaque sommet non-colorié de Y ait deux voisins coloriés avec la couleur 1, où $q \geq 0$, $n \geq p \geq 2$. Si $k \geq \lceil \frac{n-(q+p)}{2} \rceil + q + 2$, alors $G|c$ est une k-A-position.*

Démonstration. Puisqu'un sommet non-colorié dans Y possède au moins deux voisins coloriés 1, il ne peut pas être lui-même colorié avec 1 au cours du jeu. La couleur 1 n'apparaîtra donc jamais dans Y et sera donc toujours jouable dans X. La stratégie d'Alice consiste à colorier les sommets de X avec la couleur 1, aussi longtemps qu'il y a des sommets non-coloriés dans cet ensemble. Cette stratégie assure que Bob joue au plus $\lceil \frac{n-p-q}{2} \rceil$ fois dans X. Ainsi, n'importe quel sommet v dans Y possède au plus $\lceil \frac{n-(q+p)}{2} \rceil + q + 1$ couleurs distinctes dans son voisinage. Par hypothèse, $k \geq \lceil \frac{n-(q+p)}{2} \rceil + q + 2$, donc de tels sommets pourront toujours être coloriés. Cette stratégie ne dépendant pas de qui commence, nous en déduisons que $G|c$ est une k-A-position. □

Théorème 2.3. *Pour $n, m \geq 1$, vérifiant $n \leq m$, nous avons :*

$$\chi_g^{(1)}(K_{n,m}) = \begin{cases} n & \text{si } n = m, \\ n+1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. Nous notons X et Y les deux stables de $K_{n,m}$, d'ordre respectif n et m. Procédons par induction sur n. Si $n = 1, 2$, le théorème est trivialement vrai. Supposons donc que $n \geq 3$. Nous commençons par montrer qu'Alice a une stratégie gagnante avec le nombre de couleurs annoncé. Elle commence par colorier un sommet dans X avec la couleur 1. Si Bob ne joue pas la couleur 1 sur un sommet de Y, Alice rétorque en coloriant un autre sommet de X avec 1. Ceci est possible car $n \geq 3$. Puisque $n \geq 3$, $n \geq \lceil \frac{n-3}{2} \rceil + 3$. Ainsi, d'après le Lemme 2.2, le graphe partiellement colorié qu'elle obtient est une n-A-position. Si maintenant Bob colorie un sommet de Y avec 1, cette couleur devient interdite pour le restant de la partie. Le jeu est donc maintenant équivalent au jeu sur $K_{n-1,m-1}$. Par hypothèse d'induction, Alice peut gagner ce jeu avec $n-1$ (resp. n) couleurs si $n = m$ (resp. si $n < m$). Pour conclure, elle peut gagner le jeu sur $K_{n,m}$ avec n couleurs (resp. $n+1$).

Il reste a montrer qu'avec moins de couleurs, c'est Bob qui gagne. Sa stratégie est de jouer de telle sorte qu'après son premier coup, exactement un sommet de X et un sommet de Y soient coloriés avec 1. Après cela le jeu est équivalent au jeu sur

$K_{n-1,m-1}$, et nous concluons par induction qu'Alice a réellement besoin de n (resp. $n+1$) couleurs pour gagner sur $K_{n,m}$. □

Il est bien connu et facile de vérifier que $\chi_g(K_{n,m}) = 3$, dès que $n, m \geq 2$. Ainsi, le Théorème 2.3 implique que le nombre chromatique ludique peut être arbitrairement plus petit que celui 1-impropre. Pire, il n'existe pas de fonction F telle que $\chi_g^{(1)}(G) \leq F(\chi_g(G))$ soit vrai pour tout graphe G. Bien que $\chi_g^{(1)}$ ne soit pas borné supérieurement par χ_g, il est clair que $\chi_g^{(1)}(G) \leq \mathrm{col}_g(G)$. Ainsi, toutes les bornes supérieures obtenues pour χ_g en utilisant le jeu de marquage restent vraies pour $\chi_g^{(1)}$. Par exemple $\chi_g^{(1)}(G) \leq \mathrm{col}_g(G) \leq 17$, pour tout graphe planaire G. (voir [86]).

Nous cherchons maintenant des graphes pour lesquels le fait que la coloration requise ne soit que 1-impropre aide réellement Alice à gagner avec moins de couleurs. Nous laissons nos lecteurs vérifier que $\chi_g(K_n) = n$, alors que $\chi_g^{(1)}(K_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Mais ces exemples ne nous convainquent pas vraiment car nous avions déjà que $\chi(K_n) = n$ alors que $\chi^{(1)}(K_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Pour $n, m \geq 1$, nous dénotons par $K^-_{n,m}$ un graphe biparti complet $K_{n,m}$, duquel un couplage maximum a été retiré. Il est facile de voir que $\chi_g(K^-_{n,n}) = n$. D'un autre côté, le théorème à venir énonce que $\chi_g^{(1)}(K^-_{n,n}) \leq \lceil \frac{2n}{3} \rceil$. Pour de tels graphes, Alice a donc besoin de significativement moins de couleurs pour gagner lorsqu'elle joue la version 1-impropre du jeu de coloration, et ce même si $\chi(K^-_{n,n}) = \chi^{(1)}(K^-_{n,n})$.

Théorème 2.4. *Pour $n \geq 1$, nous avons $\chi_g^{(1)}(K^-_{n,n}) \leq \lceil \frac{2n}{3} \rceil$.*

Ce théorème est une application directe du résultat plus fort ci-dessous.

Proposition 2.5. *Soit $n \geq 1$.*

- *Pour $k \geq \lceil \frac{2n}{3} \rceil$, $K^-_{n,n}$ est une k-A_f-position.*
- *Pour $k \geq \lceil \frac{2n+1}{3} \rceil$, $K^-_{n,n+1}$ est une k-A_s-position.*

Démonstration. Nous notons X et Y les deux stables de $K^-_{n,n+l}$, où X est de taille n et Y de taille $n+l$, avec $l \in \{0, 1\}$. Nous écrivons x_i, avec $i \in \{1, \cdots, n\}$, pour les sommets dans X et y_j, avec $j \in \{1, \cdots, n+l\}$ pour ceux dans Y. Nous supposons alors que les arêtes du couplage retiré sont les $x_i y_i$, avec $i \in \{1, \cdots, n\}$.

Nous raisonnons par induction. Clairement, pour $n \leq 2$, la Proposition 2.5 est vraie. Soient $n \geq 3$ et $k \geq 1$.

Nous commençons par $K^-_{n,n}$ et supposons que $k \geq \lceil \frac{2n}{3} \rceil$. Le premier coup d'Alice est de colorier x_1 avec la couleur 1. Soit z le sommet que Bob colorie ensuite. Nous pouvons supposer que $z \neq x_2$.

Cas 1 : Bob colorie z avec 1. Alors, Alice peut soit colorier y_1 avec 1, soit x_2 avec 1. Dans les deux cas, nous pouvons supposer sans perte de généralité que x_1, x_2 et y_1 sont maintenant coloriés avec la couleur 1. La couleur 1 ne peut alors plus être jouée que sur y_2. Considérons trois sous-cas.

Cas 1.1 : Bob colorie y_2 avec la couleur 1. Le jeu est maintenant équivalent au jeu sur $K^-_{n-2,n-2}$ avec $k-1$ couleurs et Alice qui commence. Comme $k-1 \geq \lceil \frac{2(n-2)}{3} \rceil$, nous pouvons conclure par induction que cette position est gagnante pour Alice.

Cas 1.2 : Bob colorie y_2 avec une couleur différente de 1. Le jeu est alors équivalent au jeu sur $K^-_{n-2,n-1}$, avec $k-1$ couleurs et Bob qui vient de faire un premier coup. Comme $k-1 \geq \lceil \frac{2(n-2)+1}{3} \rceil$, nous concluons par induction que le jeu est dans une position gagnante pour Alice.

Cas 1.3 : Bob ne colorie pas y_2, mais un autre sommet z'. Alice répond alors en coloriant y_2 avec la couleur 1. Le jeu est maintenant équivalent au jeu sur $K^-_{n-2,n-2}$ avec $k-1$ couleurs, dans lequel Alice aurait joué z' comme premier coup. Par induction, $K^-_{n-2,n-2}$ est une $(k-1)$-A_f-position. De plus, $K^-_{n-2,n-2}$ étant sommet-transitif, tous les premiers coups sont équivalents. Jouer z' est donc un coup gagnant pour Alice, ce qui nous permet de conclure.

Cas 2 : Bob colorie z avec 2. Alice répond en coloriant x_2 avec 1. Premièrement, supposons que Bob ne réponde pas en coloriant soit y_1 soit y_2 avec 1. Si X est alors complètement colorié, c'est que $n \leq 4$. Dans ce cas, il est aisé de vérifier qu'Alice peut gagner, puisque x_1 et x_2 ont la même couleur. Si $n \geq 5$, nous pouvons supposer que x_3 n'est pas colorié. Alice colorie ce sommet avec la couleur 1. Soit q le nombre de sommets de X coloriés jusqu'à présent par Bob ; nous avons $q \leq 2$. Par hypothèse, $k \geq \lceil \frac{2n}{3} \rceil$. Dès que $n \geq 5$ et $n \neq 6$, cela implique que $k \geq \lceil \frac{n-(q+3)}{2} \rceil + q + 2$. En appliquant le Lemme 2.2, nous obtenons dans ce cas qu'Alice gagne. Si $n = 6$ et $q < 2$, l'inégalité ci-dessus reste vraie. Nous n'avons donc à traiter à part que le cas où $n = 6$ et $q = 2$, c'est-à-dire le cas où Bob joue ses deux premier coups dans X. Si pour ces deux coups Bob a choisi la même couleur, Alice conserve sa stratégie. Sinon, son troisième coup est de répéter dans X la couleur que Bob vient juste de jouer. Le seul cas problématique est si Bob répond en jouant la quatrième couleur dans X. Tous les sommets de X sont alors coloriés et aucun sommet de Y ne l'est. Nous pouvons supposer que x_1, x_2 sont coloriés 1, x_3, x_4 sont coloriés 2, x_5 est colorié 3 et x_6 est colorié 4. La stratégie d'Alice est la suivante : si Bob colorie y_1 ou y_2, elle répond en coloriant l'autre sommet avec 1, de même s'il colorie y_3 ou y_4, elle colorie l'autre sommet avec 2, et s'il colorie y_5 (resp. y_6), elle répond en coloriant y_6 avec la couleur 4 (resp. y_5 avec la couleur 3).

Deuxièmement, supposons que Bob choisisse de colorier y_1 ou y_2 avec 1. Si z est respectivement égal à y_2 ou y_1, alors nous retombons sur le Cas 1.2. Sinon Alice colorie respectivement y_2 ou y_1 avec la couleur 1, ce qui nous ramène au Cas 1.3.

Nous considérons maintenant $K^-_{n,n+1}$ et supposons que $k \geq \lceil \frac{2n+1}{3} \rceil$. Remarquons que y_{n+1} est le seul sommet de Y qui est adjacent à tous ceux de X. Soit z le premier sommet colorié par Bob. Disons que z est colorié avec la couleur 1.

Cas 1 : $z \in Y$. Alice colorie un sommet de Y de sorte que nous puissions maintenant supposer que les sommets y_1 et y_{n+1} sont tous deux coloriés avec la couleur 1. Si

Bob ne colorie pas ensuite x_1, Alice colorie alors celui-ci avec la couleur 1 si cela est possible. La couleur 1 étant maintenant interdite partout, le jeu devient équivalent au jeu sur $K^-_{n-1,n-1}$ avec $k-1$ couleurs dans lequel un coup a déjà été joué. Nous sommes ainsi ramenés au Cas 1.3 de la première partie de la preuve. Si Alice n'a pas pu jouer la couleur 1, c'est que Bob a joué celle-ci dans Y. Dans ce cas, comme pour $n \geq 3$, $k \geq \lceil \frac{n+1-3}{2} \rceil + 2$, nous obtenons qu'Alice gagne en appliquant le Lemme 2.2. Si Bob colorie x_1 avec 1, le jeu devient équivalent au jeu sur $K^-_{n-1,n-1}$ avec $k-1$ couleurs. Par induction, il s'agit d'une $(k-1)$-A_f-position. Finalement, si Bob colorie x_1 avec une couleur différente de 1, alors Alice colorie un sommet y_i avec 1. Cela est toujours possible car $n+1 \geq 3$ et la couleur 1 n'apparaît pas dans X. Comme $k \geq \lceil \frac{n+1-3}{2} \rceil + 2$, nous obtenons, d'après le Lemme 2.2, qu'Alice a une stratégie gagnante avec k couleurs.
Cas 2 : $z \notin Y$. Supposons même que $z = x_1$. Alice colorie x_2 avec 1. Si Bob ne répond pas en coloriant y_1 ou y_2 avec 1, alors Alice colorie l'un des x_i avec 1 (si ce n'est pas possible c'est que $n = 3$ et Alice gagne facilement par tout l'ensemble Y peut être colorié avec la troisième couleur). Notons q le nombre de sommets de X coloriés avec une couleur autre que 1 ; nous avons $q \leq 1$. Comme $n \geq 4$, $k \geq \lceil \frac{n-(q+3)}{2} \rceil + q + 2$, et d'après le Lemme 2.2, Alice possède une stratégie gagnante avec k couleurs. Si Bob colorie y_1 ou y_2 avec 1, Alice répond de manière à ce que y_1 et y_2 soient tous deux coloriés avec la couleur 1. Le jeu devient équivalent au jeu sur $K^-_{n-2,n-1}$ avec $k-1$ couleurs. Par induction, il s'agit d'une $(k-1)$-A_s-position. □

Nous n'avons pas trouvé de graphes pour lesquels le gain apporté à Alice par l'impropreté est meilleur que linéaire. Rappelons que pour la coloration 1-impropre non-ludique, nous avons que $\chi(G) \leq 2\chi^{(1)}(G)$, pour tout graphe G. Existe-t-il une telle borne linéaire dans le cas ludique, ou même, de manière moins ambitieuse, existe-t-il une fonction F telle que pour tout graphe G, $\chi_g(G) \leq F(\chi_g^{(1)}(G))$?

2.1.3 Chemins et cycles

Dans cette partie, nous calculons le nombre chromatique ludique 1-impropre des chemins, puis nous appliquons ce résultat pour obtenir celui des cycles. Rappelons que $\chi_g(P_n) = 3$, dès que $n \geq 4$, et $\chi_g(C_n) = 3$, pour $n \geq 3$. Pour commencer, nous introduisons une version légèrement modifiée du jeu de coloration 1-impropre, ainsi que quelques règles de réduction. Le *jeu de coloration 1-impropre fort* est défini de manière analogue au jeu de coloration 1-impropre, exception faite que nous autorisons Bob à passer son tour aussi souvent qu'il le désire. Il est facile mais important de remarquer que si Alice peut gagner avec k couleurs quand Bob peut passer, alors elle peut aussi gagner avec k couleurs dans le jeu de coloration 1-impropre original. Nous introduisons cette version forte du jeu car elle se comporte bien lorsque nous considérons des graphes avec de multiples composantes connexes. Combiné avec les résultats de réduction que nous énoncerons ensuite, ceci nous sera bien utile pour obtenir des résultats par induction.

Proposition 2.6. *Soient $k \geq 1$ et $G|c$ un graphe partiellement colorié, possédant n composantes connexes, $G_1, \ldots, G_n$, telles que chacune est une k-A-position pour le jeu de coloration 1-impropre fort. Alors $G|c$ est lui aussi une k-A-position pour ce jeu fort.*

Démonstration. Quand Bob joue dans une des composantes, Alice réplique par un coup gagnant dans cette composante si elle n'est pas entièrement coloriée. Sinon, elle joue dans n'importe qu'elle autre composante en faisant comme si Bob venait tout juste de passer son tour dans celle-ci. □

Les règles de réduction suivantes vont nous permettre de diviser le graphe de base en composantes plus petites. Elles sont valables à la fois pour le jeu de coloration 1-impropre et pour sa version forte.

Proposition 2.7. *Soient $k \geq 2$, $G|c$ un graphe partiellement colorié et G' le graphe obtenu à partir de G en supprimant l'arête uv, où $u, v \in V(G)$. Si c est telle que $c(u) \neq c(v)$, alors Alice gagne avec k couleurs sur $G|c$ si et seulement si elle gagne avec k couleurs sur $G'|c$.*

Proposition 2.8. *Soient $k \geq 2$, $G|c$ un graphe partiellement colorié et u un sommet de G de degré 2. Soient v_1 et v_2 les deux voisins de u et G' le graphe obtenu en retirant à G les arêtes uv_1, uv_2. Si c est telle que $c(v_1) = c(v_2)$, alors Alice gagne avec k couleurs sur $G|c$ si et seulement si elle gagne avec k couleurs sur $G'|c$.*

Démonstration. Le sommet u devra forcément être colorié avec une couleur différente de $c(v_1)$. Ainsi, v_1 et v_2 ne pourront pas être saturés en coloriant u, et nous pouvons donc supprimer les arêtes uv_1 et uv_2 sans affecter le comportement du jeu. □

Proposition 2.9. *Soient $k \geq 1$, $G|c$ un graphe partiellement colorié et G' le graphe obtenu en enlevant une arête uv à G, où $u, v \in V(G)$, et en ajoutant un sommet pendant à u et v. Ces sommets sont respectivement dénotés par u' et v'. Si c est telle que $c(u) = c(v) = a$, alors Alice gagne avec k couleurs sur $G|c$ si et seulement si elle gagne avec k couleurs sur $G'|c'$, avec $c' = c$ pour les sommets de G, $c'(u') = c'(u)$ et $c'(v') = c'(v)$.*

Nous pouvons maintenant calculer $\chi_g^{(1)}$ pour une union disjointe de chemins. Nous allons montrer qu'en fait deux couleurs suffisent à Alice. Ainsi, jusqu'à la fin de cette partie, nous ne considérerons que des 2-colorations avec les couleurs 1 et 2. Si $a \in \{1, 2\}$, alors $\overline{a}$ correspond à l'autre couleur. Nous notons $P_{n,a}$, le chemin d'ordre n dont l'une des extrémités est coloriée avec la couleur a (et aucun autre sommet n'est colorié). Similairement, $P_{n,a,b}$ renvoie au chemin d'ordre n dont les deux extrémités sont respectivement coloriées avec la couleur a et la couleur b.

Lemme 2.10. *Pour $n \geq 2$, $P_{n,a}$ et $P_{n,a,b}$ sont tous les deux des 2-A-positions pour le jeu de coloration 1-impropre fort.*

Démonstration. Nous notons v_1 l'extrémité du chemin coloriée avec la couleur a, et v_n celle qui est potentiellement coloriée avec b.

Procédons par induction sur n. Pour $n = 2$, la proposition est trivialement vraie. Supposons donc que $n \geq 3$. Si Alice commence, elle colorie le sommet adjacent à v_1 avec la couleur $\overline{a}$. D'après la réduction de la Proposition 2.7, le jeu est maintenant équivalent au jeu sur $P_{n-1,\overline{a}}$ (resp. sur $P_{n-1,\overline{a},b}$) plus un sommet isolé déjà colorié, que nous pouvons donc ignorer. Par hypothèse d'induction, ce sont des 2-A-positions.

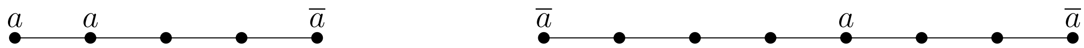
Traitons maintenant le cas où Bob commence. S'il passe son tour, Alice joue comme précédemment et gagne. Sinon, soient u le sommet colorié par Bob et c la couleur qu'il a choisie. Si u est adjacent à la fois à v_1 et v_n, alors $n = 3$ et Alice gagne, soit parce que le chemin est totalement colorié, soit en terminant le jeu en coloriant v_n. Sinon, Alice colorie l'un des voisins non-coloriés de u avec $\overline{c}$. Le jeu est maintenant équivalent au jeu sur deux composantes qui sont des chemins plus petits et dont seuls la ou les extrémités sont coloriées. Par induction, ces deux chemins sont des 2-A-positions pour le jeu de coloration 1-impropre fort. En appliquant la Proposition 2.6, nous concluons que $P_{n,a}$ (resp. $P_{n,a,b}$) est une 2-A-position pour le jeu de coloration 1-impropre fort. $\square$

Puisque $\chi^{(1)}(P_n) = 1$ si et seulement si $n = 1, 2$, nous obtenons directement le théorème suivant.

Théorème 2.11. *Si $n \geq 3$, alors $\chi_g^{(1)}(P_n) = 2$.*

Démonstration. Alice commence en coloriant une extrémité. D'après le Lemme 2.10, elle peut gagner le jeu de coloration 1-impropre avec 2 couleurs sur le chemin obtenu, même si c'est au tour de Bob. Nous en déduisons que deux couleurs suffisent à Alice pour gagner sur P_n. $\square$

Nous nous intéressons maintenant au jeu sur les cycles. À partir des règles de réduction définies précédemment, nous allons pouvoir réduire le jeu sur les cycles au jeu sur des chemins partiellement coloriés comme ceux que nous introduisons maintenant. Pour $n \geq 3$, nous écrivons $P_{n,a,b,c}$ pour un chemin d'ordre n, avec exactement trois sommets coloriés, parmi lesquels les deux extrémités, coloriées respectivement a et c. Le troisième étant colorié avec la couleur b. Rappelons que nous demandons que les colorations partielles soient 1-impropres. Ici, cela veut dire que si $n = 3$, a, b, et c ne sont pas tous les trois de la même couleur. Sauf pour les deux exceptions décrites dans la Figure 2.2, Alice peut gagner le jeu fort sur ces chemins avec seulement 2 couleurs, quel que soit le premier joueur. Pour B_1 et B_2, avec 2 couleurs, c'est le joueur qui commence qui gagne. Sur B_2, un coup optimal d'Alice est de colorier le voisin de l'extrémité de droite avec a, tandis que celui de Bob est de choisir $\overline{a}$ pour le quatrième sommet en partant de la gauche.



(a) Position B_1 (b) Position B_2

FIGURE 2.2 – 2-B_f-positions pour $P_{n,a,b,c}$

Lemme 2.12. *Pour $n \geq 3$, si $P_{n,a,b,c} \neq B_1, B_2$, alors $P_{n,a,b,c}$ est une 2-A-position pour le jeu de coloration 1-impropre fort.*

Démonstration. Nous écrivons $v_1, \cdots, v_n$ pour les sommets de P_n, de sorte que v_1 est colorié a, v_n est colorié c, et un autre sommet, disons v_{i_0} est colorié b. Procédons par induction sur n. Si $n = 3$, il n'y a rien à prouver. Pour $n \geq 4$, nous allons réduire le jeu à plusieurs composantes connexes de plus petites tailles. D'après la Proposition 2.6, nous aurons seulement besoin de nous assurer que toutes ces composantes sont des 2-A-positions pour le jeu fort. Supposons donc que $n \geq 4$ et $P_{n,a,b,c} \neq B_1, B_2$.

Traitons d'abord le cas où Alice commence. Il y a au moins un sommet non-colorié qui est adjacent à v_{i_0}. Sans perte de généralité, supposons que ce sommet est v_{i_0-1}. Alice colorie v_{i_0-1} avec $\bar{b}$. En appliquant la Proposition 2.7, elle laisse deux composantes de la forme, $P_{i_0-1,a,\bar{b}}$ et $P_{n-i_0+1,b,c}$. D'après le Lemme 2.10, les deux sont des 2-A-positions pour le jeu fort.

Considérons maintenant le cas où Bob commence. S'il passe son tour, Alice joue comme ci-dessus et gagne. Sinon, soit u le sommet joué par Bob et d la couleur qu'il utilise. Sans perte de généralité, nous supposons que u est entre v_1 et v_{i_0}. Nous distinguons les cas suivants.

Cas 1 : $u = v_{i_0-1}$. Prenons en compte la couleur choisie pour u.

Cas 1.1 : $d = \bar{b}$. Le jeu est équivalent au jeu sur les deux composantes connexes $P_{i_0-1,a,\bar{b}}$ et $P_{n-i_0+1,b,c}$. Ces deux composantes sont, d'après le Lemme 2.10, des 2-A-positions pour le jeu fort.

Cas 1.2 : $d = b$. D'après la Proposition 2.9, le jeu est équivalent au jeu sur les deux composantes de la forme $P_{i_0,a,b,b}$ et $P_{n-i_0+2,b,b,c}$. Ces positions ne sont pas isomorphes à B_2. Si aucune d'elles n'est isomorphe à B_1, nous concluons par induction que les deux sont des 2-A-positions pour le jeu fort. Sinon, puisque le chemin original $P_{n,a,b,c}$ n'est pas égal à B_2, au plus l'une de ces composantes, disons $P_{i_0,a,b,b}$ est isomorphe à B_1. Dans ce cas, Alice joue dans cette composante et colorie avec $\bar{a}$ le voisin de l'extrémité colorié a. Elle laisse deux composantes de la forme, $P_{4,\bar{a},b,b}$ et $P_{n-i_0+2,b,b,c}$, qui sont, par induction pour la seconde, des 2-A-positions.

Cas 2 : u n'est pas adjacent à v_{i_0}. Nous prenons maintenant en compte la distance entre u et v_{i_0}.

Cas 2.1 : $d(u, v_{i_0}) \neq 3, 4$. Premièrement, si $v_{i_0+1} \neq v_n$, Alice colorie ce sommet avec $\bar{b}$. Le jeu est maintenant équivalent au jeu sur deux composantes de la forme,

$P_{i_0,a,d,b}$ et $P_{n-i_0,\bar{b},c}$. Puisque $d(u, v_{i_0}) \neq 3, 4$, nous avons que $P_{i_0,a,d,b} \neq B_1, B_2$. En utilisant l'hypothèse d'induction pour la première composante et le Lemme 2.10 pour la seconde, nous obtenons que toutes deux sont des 2-A-positions pour le jeu fort. Deuxièmement, si $v_{i_0+1} = v_n$, nous considérons deux possibilités. Si $d(u, v_{i_0}) \neq 2$, Alice peut colorier avec la couleur $\bar{d}$, le sommet adjacent à u qui est entre u et v_{i_0}. Le jeu est maintenant équivalent au jeu sur les deux composantes $P(d(v_1, u)+1, a, d)$ et $P(d(u, v_{i_0}) + 1, \bar{d}, b, c)$. Comme dans cette dernière composante les sommets coloriés b et c sont adjacents et que $d(u, v_{i_0}) + 1 \neq 5$, celle-ci est différente de B_1 et B_2. Nous concluons comme avant. Si $d(u, v_{i_0}) = 2$, Alice choisit de colorier le sommet adjacent à u qui est entre v_1 et u avec la couleur $\bar{d}$ (si un tel sommet n'existe pas, c'est que $n = 5$ et Alice termine alors le jeu en jouant entre u et v_{i_0}). Le jeu est maintenant équivalent au jeu sur les composantes $P(d(v_1, u), a, \bar{d})$ et $P(4, d, b, c)$, ce qui nous permet de conclure.

Cas 2.2 : $d(u, v_{i_0}) = 4$. Alice colorie v_{i_0-2} avec la couleur b. D'après la Proposition 2.8 et la Proposition 2.9, le jeu est maintenant équivalent au jeu sur trois composantes de la forme, $P_{i_0-2,a,d,b}$, $P_{n-i_0+1,b,c}$ et un sommet isolé v_{i_0-1}. Puisque $d(u, v_{i_0-2}) = 2$, nous avons que $P_{i_0-2,a,d,b} \neq B_1, B_2$. Par induction, cette composante est une 2-A-position. Le sommet isolé est bien sûr une 2-A-position, et d'après le Lemme 2.10, c'est aussi le cas de $P_{n-i_0+1,b,c}$.

Case 2.3 : $d(u, v_{i_0}) = 3$. Alice répond en coloriant v_{i_0-1} avec $\bar{b}$. Le jeu est alors équivalent au jeu sur deux composantes de la forme $P_{i_0-1,a,d,\bar{b}}$ et $P_{n-i_0+1,b,c}$. Puisque $d(u, v_{i_0-1}) = 2$, nous avons que $P_{i_0-1,a,d,\bar{b}} \neq B_1, B_2$. Par induction, cette composante est une 2-A-position. D'après le Lemme 2.10, $P_{n-i_0+1,b,c}$ est aussi une telle position pour le jeu fort. □

Nous sommes prêts à démontrer notre résultat concernant les cycles.

Théorème 2.13. *Si $n \geq 3$, alors $\chi_g^{(1)}(C_n) = 2$.*

Démonstration. Pour $n = 3, 4, 5$, une simple analyse de cas donne une stratégie gagnante pour Alice avec deux couleurs, lorsqu'elle commence. Supposons que $n \geq 6$. Alice commence en coloriant un sommet v avec la couleur 1. Soit u le sommet choisi par Bob et b la couleur qu'il utilise. Nous distinguons deux cas.

Cas 1 : u est adjacent à v. Considérons alors la couleur de u.

Cas 1.1 : $b \neq 1$. Le jeu est donc équivalent au jeu sur un chemin de type $P_{n,1,2}$, qui est, d'après le Lemme 2.10, une 2-A-position.

Cas 1.2 : $b = 1$. Alice colorie le voisin non-colorié de u, notons le w, avec la couleur 2. Le jeu est alors équivalent au jeu sur $P_{n,1,1,2}$, qui n'est ni B_1 ni B_2. En effet, $d(u, w) \geq 4$ et $d(u, v) = 1$. D'après le Lemme 2.12, c'est une 2-A-position.

Cas 2 : u n'est pas adjacent à v. Alice répond en coloriant avec 2 un sommet adjacent à v et non-adjacent à u, de sorte que le jeu est maintenant équivalent au jeu sur $P_{n,2,b,1}$. Cette dernière configuration est différente de B_1 et B_2, puisque les deux extrémités ont des couleurs différentes. D'après le Lemme 2.12, nous concluons que nous avons une 2-A-position. □

2.2 Le jeu sur les forêts

Dans cette partie, nous étudions le jeu de coloration 1-impropre sur les arbres. Dans la première sous-partie, nous utilisons la stratégie d'activation de Faigle pour donner une borne supérieure générale valant 3. Puis, nous montrons que cette borne est serrée en exhibant une famille de chenilles de degré maximum 3 pour lesquelles $\chi_g^{(1)} = 3$.

2.2.1 Pour les forêts trois couleurs suffisent

Rappelons que dans [36], Faigle *et al.* ont montré que $\mathrm{col}_g(F) \leq 4$ et donc que $\chi_g(F) \leq 4$, pour n'importe quelle forêt F. De plus certaines forêts nécessitent vraiment 4 couleurs et ce même si nous ne considérons que des forêts de degré maximum 3 [33]. Nous prouvons maintenant, que dans le cas du jeu de coloration 1-impropre, la stratégie d'activation utilisée pour obtenir ce résultat conduit à une borne supérieure de 3, pour les forêts en général. Le même résultat est déjà démontré dans [23], pour le jeu de coloration d-impropre, avec $d \geq 1$. Nous donnons ici notre version de la preuve étendue à la variante forte du jeu de coloration 1-impropre. Ce sera également l'occasion d'expliciter un exemple de stratégie d'activation.

Théorème 2.14. *Tout arbre T est une 3-A-position pour le jeu de coloration 1-impropre fort.*

Démonstration. Supposons d'abord qu'Alice commence. Elle colorie un sommet arbitraire r que nous appelons la *racine*. Chaque autre sommet v de T possède exactement un voisin à distance plus petite que lui de la racine. Comme d'habitude, ce voisin sera appelé le parent de v.

Voici un algorithme définissant la stratégie d'Alice. Nous y définissons récursivement l'ensemble des sommets activés Ac et initialisons tout de suite $Ac := \{r\}$. Lorsque Bob colorie un sommet $u \in V(T)$ durant la partie, Alice considère l'unique chemin P entre r et u et considère w le sommet de P le plus proche de r qui n'est pas activé. L'algorithme procède ensuite comme suit.

i) Alice met à jour Ac, $Ac := Ac \cup P$.

ii) Si w n'est pas colorié, Alice le colorie avec une couleur disponible pour ce sommet.

iii) Si w est colorié et qu'il existe au moins un sommet activé non colorié, elle en colorie un.

iv) Si w est colorié ainsi que tous les autres sommets de Ac, Alice colorie un sommet x adjacent à un sommet de Ac et met à jour $Ac := Ac \cup \{x\}$.

Si Bob passe son tour, Alice joue selon l'item *iii)* ou *iv)* selon s'il y a ou non des sommets non coloriés dans Ac.

Soient $v_1, \dots v_k$ tous les voisins de $v \in V(T)$, sauf son parent. Soient $T_1(v), \dots, T_k(v)$ les sous-arbres maximaux contenant respectivement v_i mais pas v. Nous pouvons vérifier simplement les affirmations suivantes par induction sur le nombre de tours.

a) Pour tout sommet v non activé (et donc non colorié), aucun des $T_i(v)$ ne contient un sommet colorié.

b) Pour n'importe quel sommet v activé et non colorié, au plus un des sous-arbres $T_1(v), \dots, T_k(v)$ contient des sommets coloriés.

L'affirmation a) implique que tant que des sommets non activés existent, le jeu peut continuer. L'affirmation b) implique alors que tant que l'arbre n'est pas totalement colorié, Bob peut jouer. En suivant cette stratégie pour Alice, le jeu ne peut donc s'arrêter qu'au tour de celle-ci, lorsqu'elle a à colorier un sommet de Ac. L'affirmation b) implique qu'au tour d'Alice un sommet non colorié v possède au plus trois voisins coloriés. De plus, au plus deux de ses voisins peuvent être saturés. En effet, si trois voisins de v sont coloriés, cela veut dire que Bob vient de jouer un voisin u dans un des sous-arbres $T_i(v)$ qui ne possédait jusqu'alors aucun sommet colorié. Ce sommet u ne peut donc être saturé. Finalement, avec trois couleurs Alice peut toujours suivre sa stratégie qui est donc gagnante.

Pour finir considérons le cas où Bob commence. Nous avons vu précédemment que tous les premiers coups sont optimaux pour Alice lorsqu'elle commence. Elle n'a donc qu'à prétendre que c'est elle qui a fait le premier coup, puis que Bob a passé. Elle peut maintenant suivre la même stratégie que précédemment. □

D'après la Proposition 2.6, nous en déduisons directement un résultat sur les forêts.

Théorème 2.15. *Si F est une forêt, alors $\chi_g^{(1)}(F) \leq 3$.*

He et al. ont montré dans [47] que pour le jeu de coloration 2-impropre, 2 couleurs suffisent pour les forêts.

Théorème 2.16. [He *et al.* [47] (2003).] *Pour toute forêt F, $\chi_g^{(2)}(F) \leq 2$.*

2.2.2 Les chenilles requièrent trois couleurs

Dans cette sous-partie, nous exhibons une famille de chenilles de degré maximum 3 qui atteignent la borne supérieure du Théorème 2.15. Nous définissons la classe Cat_3 comme étant la classe des chenilles dont tous les sommets sont soit de degré 1 soit de degré 3. Pour une telle chenille, nous dénotons par $\{v_1, \cdots, v_n\}$ l'ensemble des sommets de la colonne ($v_2, \cdots, v_{n-1}$ sont les sommets de degré 3) et par

$\{u_2, \cdots, u_{n-1}\}$ l'ensemble des autres sommets (tous de degré 1). Nous considérons de plus que pour $i \in \{2, \cdots, n-2\}$, u_i est adjacent à v_i. Pour n fixé, il existe une unique chenille de Cat_3 dont la colonne possède n sommets, nous la notons $cat_3(n)$. Notre objectif est de démontrer le résultat principal ci-dessous, qui énonce que la borne du Théorème 2.15 est serrée, même si nous nous restreignons à la classe Cat_3.

Théorème 2.17. *Si $n \geq 86$, la chenille $cat_3(n)$ est une 2-B_f position.*

Avant de démontrer ce résultat, nous devons introduire plusieurs concepts. Dans cette sous-partie, nous considérerons uniquement des 2-colorations. Si $a \in \{1, 2\}$, $\bar{a}$ désigne l'autre couleur. Si $G|c$ est une chenille partiellement coloriée et H est un sous-chenille de G, nous dirons qu'un sommet de H est colorié a_s, avec $a \in \{1, 2\}$, s'il est colorié a et possède un voisin colorié a en dehors de H. Un sommet colorié a_s correspond donc à un sommet a-saturé. Nous dirons qu'une chenille partiellement coloriée $G \in Cat_3$ possède une $Cat_3(n, x, y)$ induite si elle possède une sous-chenille (induite) qui est isomorphe à $cat_3(n)$, et dont les sommets v_1 et v_n sont respectivement coloriés x et y, avec $x, y \in \{1, 2, 1_s, 2_s\}$, et de plus tous les autres sommets de la sous-chenille ne sont pas coloriés. Similairement, G a une $Cat_3(n, x, [y, z])$ induite si elle a une $Cat_3(n, x, z)$ induite, avec la condition additionnelle que u_{n-1} est colorié y. Notons bien que dans ces définitions, v_i et u_i renvoient aux sommets de la sous-chenille et non à ceux de la chenille de base (voir Figure 2.3).

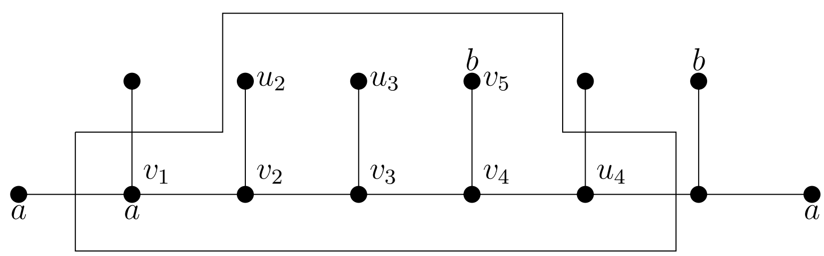


FIGURE 2.3 – $Cat_3(5, a_s, b)$ induit.

Remarquons que toutes les feuilles u_i de la sous-chenille sont aussi des feuilles de la chenille de base, exception faite de u_2 et u_{n-1} qui peuvent potentiellement appartenir à la colonne. De plus, si une extrémité, disons v_1, est saturée, alors u_2 sera forcément une feuille dans la chenille d'origine. Cette remarque est importante pour deux raisons. Premièrement, nous savons que les seuls sommets de la sous-chenille qui ont potentiellement des voisins coloriés en dehors de celle-ci sont v_1, v_n, u_2 et u_{n-1}. Deuxièmement, quand nous prendrons en compte les coups joués à l'extérieur de la sous-chenille, nous saurons qu'ils ne pourront affecter que ces mêmes quatre sommets.

Dans la remarque suivante, nous introduisons une stratégie que Bob peut utiliser dans une chenille Cat_3 pour forcer Alice à saturer un sommet de la colonne. Nous définissons $\mathcal{F}$ comme étant le graphe partiellement colorié de la Figure 2.4.

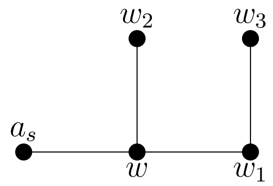


FIGURE 2.4 – Le sous-graphe $\mathcal{F}$

Proposition 2.18. *Soit $G|c$ un graphe partiellement colorié ayant un sous-graphe induit isomorphe à $\mathcal{F}$, de sorte que w_1, w_2, w_3 n'aient pas de voisins coloriés $\bar{a}$. Alors, en coloriant w_1 avec $\bar{a}$, Bob force Alice à répondre immédiatement en coloriant w avec $\bar{a}$.*

Démonstration. Si Alice ne répond pas de la sorte, Bob gagne immédiatement en coloriant w_2 ou w_3 (au moins l'un des deux n'est pas colorié) avec $\bar{a}$. Notons que l'hypothèse que w_1, w_2 et w_3 n'ont pas de voisins coloriés sert à assurer que les coups de Bob sont bien valides. □

Maintenant, nous énonçons plusieurs lemmes, exposant certaines colorations de chenilles Cat_3 qui sont en faveur de Bob.

Lemme 2.19. *Une chenille partiellement coloriée $G \in Cat_3$ qui a une $Cat_3(4, a_s, a_s)$ induite est une 2-B-position.*

Démonstration. Soit G' une $Cat_3(4, a_s, a_s)$ induite de G. Puisque v_1 et v_4 sont saturés, u_2 et u_3 n'ont pas de voisins en dehors de G'. Ainsi, quel que soit le joueur qui commence, Bob peut s'assurer que soit u_2 soit u_3 reçoivent la couleur $\overline{a}$, avant que v_2 et v_3 ne soient tous deux coloriés. Puisque ces deux derniers sommets doivent être coloriés avec $\overline{a}$, Bob gagne. □

Lemme 2.20. *Une chenille partiellement coloriée $G \in Cat_3$ qui possède une $Cat_3(5, a_s, \bar{a}_s)$ induite est une 2-B-position.*

Démonstration. Soit G' une $Cat_3(5, a_s, \bar{a}_s)$ induite de G. Premièrement, supposons que Bob commence. Il colorie u_2 avec $\bar{a}$. Maintenant Alice doit répondre en jouant v_2 ou v_3. Autrement, Bob coloriera v_3 avec $\bar{a}$ et v_2 ne pourra plus être colorié. Si elle choisit v_2, elle doit le colorier avec $\bar{a}$ et nous avons maintenant une $Cat_3(4, a_s, a_s)$ induite. D'après le Lemme 2.19 Bob gagne. Si elle colorie v_3 avec $\bar{a}$, v_2 ne pourra plus être colorié. Ainsi, le seul choix qui lui reste est de colorier v_3 avec a. Bob répond en coloriant u_3 avec a et gagne, car v_4 est maintenant incoloriable.

Deuxièmement, Alice commence. Puisque v_1 et v_5 sont saturés, u_2 et u_4 n'ont pas de voisins hors de G'. Donc, si elle joue en dehors de G', cela n'affecte pas les sommets de G' et comme nous venons de le voir Bob gagne. Si elle joue sur v_2 ou v_4, elle doit respectivement utiliser la couleur $\bar{a}$ et a. Bob répond en coloriant la feuille attachée avec la même couleur. Cela laisse soit une $Cat_3(4, \bar{a}_s, \bar{a}_s)$ induite soit une $Cat_3(4, a_s, a_s)$ induite. Une fois de plus, Bob gagne d'après le Lemme 2.19. Si au contraire Alice décide de jouer sur v_3, Bob joue la même couleur sur u_3 et soit v_2 soit v_4 devient incoloriable. Similairement, quand Alice joue sur u_3, Bob colorie v_3 avec la même couleur. Le dernier cas à considérer est quand elle colorie u_2 ou u_4, disons u_2. Elle doit choisir la couleur a, car sinon Bob gagne en coloriant v_3 avec $\bar{a}$. La réponse de Bob est alors de colorier u_3 avec $\bar{a}$. Si Alice ne répond pas en jouant v_2 ou v_3, Bob coloriera v_3 avec $\bar{a}$ et v_2 sera incoloriable. Pour v_3, elle peut utiliser la couleur a, mais dans ce cas Bob coloriera u_4 avec a et v_4 deviendra incoloriable. Pour v_2, elle peut seulement utiliser la couleur $\bar{a}$. Bob coloriera alors u_4 avec a. Dans cette situation, v_3 et v_4 doivent tous deux être coloriés avec a, ce qui est impossible. □

Lemme 2.21. *Si $n \geq 5$, une chenille partiellement coloriée $G \in Cat_3$ qui possède une $Cat_3(n, a_s, b_s)$ induite est une 2-B_f-position.*

Démonstration. Soit G' une $Cat_3(n, a_s, b_s)$ induite de G. Nous procédons par induction sur n. Considérons le premier cas de base, $n = 5$. Si $a \neq b$, nous concluons directement avec le Lemme 2.20. Si $a = b$, le premier coup de Bob consiste à colorier v_3 avec $\bar{a}$. Les sommets v_2 et v_4 doivent tous deux être coloriés $\bar{a}$, ce qui est maintenant impossible.

Considérons maintenant que $n = 6$. Si $a \neq b$, Bob colorie v_3 avec $\bar{a}$. Cela force Alice à jouer $\bar{a}$ sur v_2, laissant une $Cat_3(4, \bar{a}_s, \bar{a}_s)$ induite. Bob gagne alors d'après le Lemme 2.19. Si $a = b$, Bob colorie u_2 avec $\bar{a}$ et Alice a maintenant deux options pour empêcher Bob de gagner au coup d'après. La première est de colorier v_2 avec $\bar{a}$, ce qui laisse une $Cat_3(5, \bar{a}_s, a_s)$ induite. Dans ce cas, elle perd d'après le Lemme 2.20. La seconde est de colorier v_3 avec a. Dans ce cas, Bob colorie u_3 avec a et laisse une $Cat_3(4, a_s, a_s)$ induite, ce qui est gagnant pour lui quel que soit le joueur qui commence (Lemme 2.19).

Supposons donc que $n \geq 7$. Bob commence en coloriant v_3 avec $\bar{a}$. D'après la Proposition 2.18, Alice doit colorier v_2 avec $\bar{a}$, laissant ainsi une $Cat_3(n-2, \bar{a}_s, b_s)$ induite. Par hypothèse d'induction cela implique que G est une 2-B_f-position. □

Lemme 2.22. *Si $n \geq 4$, une chenille partiellement coloriée $G \in Cat_3$ qui a une $Cat_3(n, a_s, [\bar{a}, a])$ induite est une 2-B_f-position.*

Démonstration. Soit G' une $Cat_3(n, a_s, [\bar{a}, a])$ induite de G. La preuve est par induction sur n. Si $n = 4$, Bob colorie v_3 avec $\bar{a}$, rendant v_2 incoloriable. Si $n = 5$. Bob colorie v_4 avec a et laisse une $Cat_3(4, a_s, a_s)$ induite. D'après le Lemme 2.19, il gagne. Si $n \geq 6$, Bob colorie v_3 avec $\bar{a}$. D'après la Proposition 2.18, Alice doit colorier v_2 avec $\bar{a}$, laissant une $Cat_3(n-2, \bar{a}_s, [\bar{a}, a])$ induite. Nous concluons par induction que G est une 2-B$_f$-position. □

Lemme 2.23. *Si $n \geq 6$, une chenille partiellement coloriée $G \in Cat_3$ qui a une $Cat_3(n, a_s, b)$ induite est une 2-B_f-position.*

Démonstration. Soit G' une $Cat_3(n, a_s, b)$ induite de G. Nous procédons par induction sur n. Commençons avec $n = 6$. Si $a \neq b$, Bob colorie v_5 avec $\bar{a}$ et laisse une $Cat_3(5, a_s, \bar{a}_s)$ induite. D'après le Lemme 2.20, il gagne. Si $a = b$, Bob colorie v_3 avec $\bar{a}$, ce qui force Alice à colorier v_2 avec $\bar{a}$. Bob répond en coloriant v_5 avec a, rendant v_4 incoloriable.

Considérons maintenant que $n = 7$. Si $a \neq b$, Bob colorie v_3 avec $\bar{a}$ et force Alice à jouer la couleur $\bar{a}$ sur v_2. Bob répond en coloriant v_6 avec $\bar{a}$, laissant une $Cat_3(4, \bar{a}_s, \bar{a}_s)$ induite. Il gagne alors d'après le Lemme 2.19. Quand $a = b$, le voisin potentiellement colorié de u_6 a une influence sur la stratégie de Bob. Nous considérons d'abord que u_6 n'a pas de voisins a-saturés en dehors de G'. Bob colorie v_5 avec $\bar{a}$. Si Alice colorie u_5 ou v_6 avec $\overline{a}$, elle laisse une $Cat_3(5, a_s, \overline{a}_s)$ induite, ce qui induit, d'après le Lemme 2.20, que le jeu est maintenant une 2-B-position. Supposons donc qu'elle joue un autre coup. Si ce coup est de colorier v_4 avec $\overline{a}$, alors Bob gagne en coloriant u_6 avec a (ce qui est possible car nous avons supposé que u_6 n'a pas de voisins a-saturés). Supposons donc qu'elle ne joue pas non plus ce coup. Dans ce cas, Bob peut colorier soit u_5 soit v_6 avec $\overline{a}$ et ainsi créer une $Cat_3(5, a_s, \overline{a}_s)$ induite, dans laquelle au plus un coup a été fait par Alice. Il y a alors deux cas à traiter.
Cas 1 : Le premier coup d'Alice était à l'intérieur de $Cat_3(5, a_s, \overline{a}_s)$. Cela implique que v_6 n'est pas colorié. Elle doit jouer soit v_6 soit u_6, car sinon Bob peut gagner en coloriant u_6 (qui n'a pas de voisins a-saturés) avec a. Ainsi, au tour de Bob, nous avons une $Cat_3(5, a_s, \overline{a}_s)$ induite dans laquelle un coup a été joué précédemment. Puisqu'une $Cat_3(5, a_s, \overline{a}_s)$ induite implique d'être une 2-B-position (voir Lemme 2.20), Bob gagne.
Cas 2 : Le premier coup d'Alice était en dehors de $Cat_3(5, a_s, \overline{a}_s)$. Nous avons donc une $Cat_3(5, a_s, \overline{a}_s)$ induite. Le jeu est donc dans une 2-B-position, et Bob gagne même si c'est actuellement le tour d'Alice.

Il reste à analyser le jeu quand u_6 a un voisin a-saturé. Le premier coup de Bob est maintenant de colorier v_6 avec $\overline{a}$. Alice doit empêcher que u_6 ne devienne incoloriable après le prochain coup de Bob. Pour ce faire, soit elle colorie u_6 avec $\bar{a}$, ce qui ne l'empêche pas de perdre car elle laisse une $Cat_3(6, a_s, \bar{a}_s)$ induite (voir Lemme 2.21), soit elle empêche Bob de colorier v_5 avec $\bar{a}$ au prochain tour. Pour cela elle doit absolument choisir l'une des réponses suivantes.
Cas 1 : Alice colorie v_5. Si elle choisit la couleur $\bar{a}$, elle laisse une $Cat_3(5, a_s, \bar{a}_s)$ induite, et perd d'après le Lemme 2.20. Si elle choisit la couleur a, Bob répond en coloriant v_4 avec a et gagne d'après le Lemme 2.19.
Cas 2 : Alice colorie v_4 avec $\bar{a}$. Bob gagne alors en coloriant v_3 avec la même couleur.

Cas 3 : Alice colorie u_5 avec $\bar{a}$. Bob répond en coloriant v_4 avec la couleur a. Alice doit répondre en coloriant v_5 avec a, sinon Bob peut rendre ce sommet incoloriable en jouant la couleur a soit sur u_4 soit sur v_3. Mais en faisant cela, elle laisse une $Cat_3(4, a_s, a_s)$ induite, ce qui est perdant pour elle d'après le Lemme 2.19.

Supposons maintenant que $n \geq 8$. Bob colorie v_3 avec $\bar{a}$. D'après la Proposition 2.18, Alice est obligée de colorier v_2 avec $\bar{a}$. Cela laisse une $Cat_3(n-2, \bar{a}_s, b)$ induite et nous concluons par induction. □

Lemme 2.24. *Soient $x, y, z \in \{1, 1_s, 2, 2_s\}$ tels que sans l'indice s, y et z correspondent à la même couleur. Si $n \geq 8$, une chenille partiellement coloriée $G \in Cat_3$ qui possède une $Cat_3(n, x, [y, z])$ induite est une 2-B_f-position.*

Démonstration. Soit G' une $Cat_3(n, x, [y, z])$ induite de G, où x, y et z sont comme dans l'énoncé. Bob commence en coloriant v_{n-2} avec l'autre couleur que celle correspondant à y et z, disons $a \in \{1, 2\}$. Alice doit ensuite colorier v_{n-1} avec a, car autrement Bob peut colorier u_{n-2} ou v_{n-3} avec a et rendre v_{n-1} incoloriable. Mais en coloriant v_{n-1} avec a, Alice laisse une $Cat_3(n-2, x, a_s)$ induite avec $n-2 \geq 6$. D'après le Lemme 2.23 (si $x \in \{1, 2\}$) ou le Lemme 2.21 (si $x \in \{1_s, 2_s\}$), le jeu est maintenant dans une 2-B$_f$-position. □

Lemme 2.25. *Si $n \geq 8$, une chenille partiellement coloriée $G \in Cat_3$ qui possède une $Cat_3(n, a_s, b)$ induite, avec exactement une feuille $u_i \notin \{u_{n-6}, \ldots, u_{n-1}\}$ coloriée, est une 2-B_f-position.*

Démonstration. Soit G' une $Cat_3(n, a_s, b)$ induite de G, ayant exactement une feuille $u_i \notin \{u_{n-6}, \cdots, u_{n-1}\}$ qui est coloriée. Nous procédons par induction sur n. Pour $n = 8$, il n'y a pas de feuille supplémentaire coloriée et nous concluons donc directement avec le Lemme 2.23. Si $n \geq 9$, le premier coup de Bob est de colorier v_3 avec $\overline{a}$. Si u_2 ou u_3 est colorié avec $\bar{a}$, il gagne immédiatement. Sinon Alice doit répondre en coloriant v_2 avec $\bar{a}$. En effet, quelle que soit la feuille supplémentaire coloriée, si elle ne joue pas ainsi, au moins l'un des sommets u_2, u_3, v_4 pourra être colorié $\bar{a}$ par Bob et v_2 deviendra incoloriable. Si $u_i \in \{u_2, u_3\}$, elle laisse ainsi une $Cat_3(n-2, \overline{a}_s, b)$ induite sans feuille supplémentaire coloriée. Nous concluons grâce au Lemme 2.23. Sinon, elle laisse une $Cat_3(n-2, \overline{a}_s, b)$ induite vérifiant la condition additionnelle sur la feuille coloriée supplémentaire. Notons que dans ce cas $n \geq 10$ et nous pouvons conclure par induction. □

Lemme 2.26. *Si $n \geq 19$, une chenille partiellement coloriée $G \in Cat_3$ qui possède une $Cat_3(n, a, b)$ induite est une 2-B_f-position.*

Démonstration. Soit G' une $Cat_3(n, a, b)$ induite de G. Le premier coup de Bob est de colorier une feuille u_i, où $i \in \{10, \cdots, n-9\}$, avec une couleur arbitraire c. Supposons d'abord qu'Alice réponde en dehors de G'. Alors Bob colorie v_i avec c. Si le coup d'Alice n'a pas saturé l'une des extrémités de G', nous avons maintenant une $Cat_3(i, a, c_s)$ et une $Cat_3(n - i + 1, c_s, b)$ induites. L'un ou l'autre implique que le jeu est dans une 2-B$_f$-position (voir Lemme 2.23). Quel que soit le prochain coup d'Alice, l'une de ces sous-chenilles restera inchangée. Ainsi Bob gagne même si c'est actuellement le tour d'Alice. Si l'une des extrémités de G', disons celle coloriée a, a été saturée par le coup d'Alice, nous avons une $Cat_3(i, a_s, c_s)$ induite et une $Cat_3(n - i + 1, c_s, b)$ induite. La première implique aussi que le jeu est une 2-B$_f$-position (voir Lemme 2.21), et nous concluons comme avant.

Supposons donc qu'Alice joue son premier coup dans $Cat_3(n, a, b)$ en coloriant avec d un sommet w. Par symétrie, nous pouvons considérer que w appartient à $\{u_2, v_2, \cdots, u_{i-1}, v_{i-1}, v_i\}$.

Cas 1 : $w \in \{u_6, v_6, \ldots, u_{i-1}, v_{i-1}, v_i\}$. Si $w \neq v_i$, Bob répond en créant une arête $u_j v_j$ ayant ses deux extrémités d-saturées, où j est la position où Alice a joué. Cela laisse une $Cat_3(m, a, d_s)$ induite, avec $m \geq 6$. D'après le Lemme 2.23 cela implique que le jeu est dans une 2-B$_f$-position. Cela laisse aussi une $Cat_3(l, d_s, b)$ induite, avec $l \geq 8$ et exactement une feuille coloriée respectant la condition du Lemme 2.25. Ceci implique aussi que le jeu est dans une 2-B$_f$-position (voir Lemme 2.25). Comme le prochain coup d'Alice ne pourra pas affecter ces deux sous-chenilles à la fois, Bob gagne même si c'est maintenant au tour de celle-ci.

Supposons maintenant que $w = v_i$. Si $d = c$, nous sommes dans une situation identique à celle obtenue après la réponse de Bob quand Alice a joué en dehors de G'. Si $d \neq c$, Bob colorie un voisin de w avec d et nous concluons comme précédemment.

Cas 2 : $w \in \{u_3, v_3, u_4, v_4, u_5, v_5\}$. Dans ce cas, le coup de Bob consiste à colorier v_i avec c. Maintenant, nous avons une $Cat_3(l, c_s, d)$ induite, avec $l \geq 6$, et une $Cat_3(m, c_s, b)$ induite, avec $m \geq 6$. Les deux impliquent que le jeu est dans une 2-B$_f$-position (voir Lemme 2.23).

Cas 3 : $w \in \{u_2, v_2\}$. Premièrement, considérons que $w = u_2$. Si $d = a$, nous avons une $Cat_3(i+1, c, [a, a])$ induite, ce qui implique que le jeu est dans une 2-B$_f$-position, d'après le Lemme 2.24. Puisque c'est au tour de Bob, il gagne. Si $d = \bar{a}$, Bob colorie v_i avec c, ce qui laisse une $Cat_3(i, c_s, [a, \overline{a}])$ induite et une $Cat_3(n-i+1, c_s, b)$ induite. Les deux impliquent que le jeu est dans une 2-B$_f$-position, d'après les Lemme 2.22 et 2.23. Alice perd donc dans ce cas aussi. Finalement, considérons que $w = v_2$. Si $d = a$, elle laisse une $Cat_3(i, a_s, c)$ induite, donc elle perd (voir Lemme 2.23). D'un autre coté, si $d = \bar{a}$, Bob colorie v_i avec c et nous avons maintenant une $Cat_3(i - 1, c_s, \bar{a})$ induite et une $Cat_3(n - i + 1, c_s, b)$ induite. Une fois encore, le Lemme 2.23 affirme que c'est suffisant pour que Bob gagne. □

Lemme 2.27. *Si $n \geq 23$, une chenille partiellement coloriée $G \in Cat_3$ qui possède une $Cat_3(n, a_s, b)$ induite est une 2-B-position.*

Démonstration. Soit G' une $Cat_3(n, a_s, b)$ induite de G. D'après le Lemme 2.23, G est une 2-B$_f$-position ; nous n'avons donc qu'à considérer le cas où Alice commence. Alice ne peut pas jouer un coup en dehors de G' qui n'affecterait pas les sommets de G'. En effet, sinon comme rappelé au dessus, Bob gagne. Ainsi, si elle joue en dehors de G', elle doit jouer un voisin de v_n, afin de saturer ce sommet. Dans ce cas, elle laisse une $Cat_3(n, a_s, b_s)$ induite, qui implique que le jeu est dans une 2-B_f position, par le Lemme 2.21.

Supposons donc que son premier coup est bien dans $Cat_3(n, a_s, b)$. Nous notons w le sommet qu'elle choisit et c la couleur qu'elle utilise.

Cas 1 : $w \in \{u_3, v_3, \ldots, u_{n-2}, v_{n-2}\}$. Elle va laisser soit une $Cat_3(l, a_s, c)$ induite, avec $l \geq 6$, soit une $Cat_3(k, c, b)$ induite, avec $k \geq 19$. D'après le Lemme 2.23 et 2.26, les deux impliquent que le jeu est dans une 2-B_f-position au début du tour de Bob.

Cas 2 : $w = v_2$. Dans ce cas $c = \bar{a}$, car v_1 est a-saturé. La chenille G a donc maintenant une $Cat_3(n-1, \bar{a}, b)$ induite, il s'agit donc d'une 2-B_f-position (voir Lemme 2.26).

Cas 3 : $w = u_2$. Si $c = \bar{a}$, alors Bob colorie v_3 avec $\bar{a}$ et rend v_2 incoloriable. Si $c = a$, nous avons une $Cat_3(n, b, [a, a_s])$ induite, ce qui prouve que le jeu est dans une 2-B_f-position, par le Lemme 2.24.

Cas 4 : $w = v_{n-1}$. Si $c = b$, Alice perd car elle vient de laisser une $Cat_3(n-1, a_s, b_s)$ induite (Lemme 2.21). Si $c = \bar{b}$, Alice perd aussi car nous avons une $Cat_(n-1, a_s, \bar{b})$ induite (Lemme 2.23).

Cas 5 : $w = u_{n-1}$. Si $c = \bar{b}$, nous appliquons le Lemme 2.22. Sinon nous utilisons le Lemme 2.24.

□

Nous pouvons maintenant démontrer le Théorème 2.17.

Démonstration du Théorème 2.17. Soit v le premier sommet colorié par Alice et a la couleur utilisée. Bob peut toujours trouver un sommet u pour lequel $d(v, u) = 43$. Il colorie ce sommet avec une couleur arbitraire b, laissant une $Cat_3(44, a, b)$ induite, G'.

Supposons d'abord qu'Alice ne réponde pas dans G' ou dans son voisinage. Dans ce cas elle perd par le Lemme 2.26. Si elle colorie un sommet dans le voisinage de G', la seule manière d'interférer avec G' est de saturer l'une des extrémités, disons v. Dans ce cas, G possède maintenant une $Cat_3(44, a_s, b)$ induite. D'après le Lemme 2.23, Bob gagne.

Supposons donc qu'Alice réponde dans G'. Si elle colorie u_2 avec a ou u_{n-1} avec b, elle laisse respectivement une $Cat_3(44, b, [a, a])$ induite ou une $Cat_3(44, a, [b, b])$ induite. Les deux impliquent que le jeu est dans une 2-B_f-position. Si Alice colorie u_2 avec $\bar{a}$ ou u_{n-1} avec $\bar{b}$, Bob colorie respectivement v_2 avec $\bar{a}$ et v_{n-1} avec $\bar{b}$, laissant ainsi une $Cat_3(43, a_s, b)$ induite ou une $Cat_3(43, b_s, a)$ induite. D'après le Lemme 2.27, les deux impliquent que Bob gagne. Pour n'importe quel autre coup d'Alice dans G', disons v_i ou u_i colorié avec c, Bob répond de sorte que l'arête $u_i v_i$ ait ses deux extrémités c-saturées. Maintenant G possède une $Cat_3(i, c_s, a)$ induite et une $Cat_3(44 - i + 1, c_s, b)$ induite. Soit $i \geq 23$, soit $44 - i + 1 \geq 23$, et à chaque fois le Lemme 2.27 permet de conclure que le jeu est dans une 2-B-position.

En conclusion, Bob peut dans tous les cas obtenir la victoire sur G si seules deux couleurs sont autorisées. □

2.3 Conclusion et perspectives du chapitre

Dans ce chapitre nous avons étudié une variante du nombre chromatique ludique, le nombre chromatique ludique 1-impropre, défini de manière analogue excepté que la coloration construite au cours du jeu ne doit être qu'1-impropre.

Nous avons commencé par étudier le lien entre χ_g et $\chi_g^{(1)}$. Il se trouve que de manière contre-intuitive, $\chi_g^{(1)}$ ne peut être borné supérieurement par aucune fonction de χ_g. En particulier, pour les graphes bipartis $K_{n,n}$ ($n \geq 2$), $\chi_g(K_{n,n}) = 3$, tandis que $\chi_g^{(1)}(K_{n,n}) = n$. De la même manière, nous pourrions montrer que $\chi_g^{(d)}(K_{n,n}) = \lceil \frac{2n}{d} \rceil$, pour tout $d \geq 1$. Il serait intéressant d'étudier le lien entre $\chi_g^{(1)}$ et $\chi_g^{(d)}$, pour des valeurs de d strictement plus grandes que 1. Nous ne voyons *a priori* aucune raison pour que $\chi_g^{(d)}$ soit toujours inférieur à $\chi_g^{(1)}$. Nous posons en particulier la question suivante.

Question ouverte. *Pouvons-nous trouver des graphes G pour lesquels $\chi_g^{(2)}(G)$ est significativement plus grand que $\chi_g^{(1)}(G)$?*

Il serait intéressant de chercher de manière réciproque, s'il existe une fonction F telle que $\chi_g(G) \leq F(\chi_g^{(1)}(G))$, pour tout graphe G. Cette question est motivée par le résultat suivant, issu du folklore : $\chi(G) \leq 2\chi^{(1)}(G)$ et par le fait que nous n'avons pas d'exemples de graphes pour lesquels $\chi_g(G)$ n'est pas du même ordre que $\chi_g^{(1)}(G)$.

Ensuite nous avons montré que $\chi_g^{(1)}(P_n) = \chi_g^{(1)}(C_n) = 2$, pour $n \geq 3$. Le nombre chromatique ludique des grilles en général est encore inconnu, tandis que pour les grilles toroïdales, nous savons que $\chi_g(C_{2n} \square C_m) = 5$, pour $n \geq 3$ et $m \geq 7$ (voir les travaux de Raspaud et Wu [75]). Il serait intéressant de voir ce qu'il en est pour le jeu de coloration 1-impropre. Peut-être est-ce plus facile d'obtenir la valeur exacte ?

Pour finir nous nous sommes consacrés aux forêts. Il était déjà connu que $\chi_g(F) \leq 3$, pour toute forêts F et que cette borne est serrée. Notre travail a consisté à montrer que la borne reste optimale même si nous nous restreignons aux chenilles de degré maximum 3. Rappelons que pour une forêt F, $\chi_g(F) = 3, 4$, sauf si F ne contient que des composantes d'ordre inférieur ou égal à 3 et dans ce cas $\chi_g(F) \leq 2$. Dunn et al. proposent dans [33] un algorithme polynomial pour déterminer si le nombre chromatique ludique d'une forêt n'ayant pas de sommets de degré 3 est égal à 3 ou 4. Cependant la complexité du problème sur les arbres reste ouverte lorsque des sommets de degré 3 sont autorisés. De la même manière, nous savons que pour une forêt F, $\chi_g^{(1)}(F) = 2, 3$, sauf si toutes les composantes de F sont de taille inférieure ou égale à 2 et dans ce cas $\chi_g^{(1)}(F) = 1$. Nous posons donc la question suivante, qui sous-entend une caractérisation des forêts pour lesquelles $\chi_g^{(1)} = 2$.

Question ouverte. *Existe-t-il un algorithme polynomial pour le calcul du nombre chromatique ludique* 1*-impropre d'une forêt ?*

Pour les forêts, la stratégie d'activation utilisée pour le nombre chromatique ludique s'adapte immédiatement au jeu 1-impropre et donne une meilleure borne supérieure. De manière similaire, Chu et al. [23] démontrent que $\chi_g^{(1)}(G) \leq 6$, dès lors que G est un graphe planaire extérieur (alors que pour cette classe la meilleure borne supérieure connue sur χ_g est 7). Pour d'autres classes de graphes où de telles stratégies sont utilisées, nous pourrions peut-être obtenir de meilleurs résultats pour le jeu de coloration 1-impropre. Par exemple, la borne supérieure de 17 pour les graphes planaires peut-elle être descendue si nous considérons la version 1-impropre ?

Pour terminer, nous soulevons une question qui nous semble pouvoir servir de fil rouge dans l'étude de ce jeu. Remarquons que pour tout graphe G, $\chi^{(1)}(G) \leq \Delta(G)$. Nous ne pouvons donc pas trouver trivialement d'exemple de graphes pour lesquels $\chi_g^{(1)} = \Delta + 1$. Par exemple, il n'est pas difficile de se convaincre que $\chi_g^{(1)}(K_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Question ouverte. *Existe-t-il des graphes G pour lesquels $\chi_g^{(1)}(G) = \Delta(G) + 1$?*

Pour répondre à cette question, il serait intéressant de regarder des exemples non-triviaux de graphes pour lesquels $\chi_g = \Delta + 1$. Par exemple, les grilles toroïdales $\chi_g(C_{2n} \square C_m)$, pour $n \geq 3$ et $m \geq 7$, que nous avons déjà citées, ou encore les hypercubes, pour lesquels il est conjecturé que $\chi_g(\mathcal{H}_n) = n + 1$, conjecture qui est vérifiée pour $n \leq 4$ [5].