

# ADS Informatique

## Jeux à objectif compétitif sur les graphes

Source : M. Schmidt, Simon. *Jeux à objectif compétitif sur les graphes*.

### Travail demandé

Il vous est demandé d'étudier puis de présenter le texte joint à travers un exposé de synthèse d'une durée comprise entre 15 et 20 minutes.

Si l'étude de la totalité du dossier et la préparation d'un exposé cohérent dans la durée impartie ne vous paraît pas possible, vous pouvez décider de vous limiter à une partie du dossier.

### Remarques générales

1. Les textes proposés, quelle que soit leur origine, peuvent présenter des défauts (coquilles typographiques, négligences ou sous-entendus de l'auteur, voire erreurs. . .) qui, sauf exception, n'ont pas été corrigés.
2. Les textes proposés peuvent contenir des exercices qu'il n'est pas demandé de résoudre. Néanmoins, vous pouvez vous aider des énoncés de ces exercices pour enrichir votre exposé.

**Les cycles.** Le *cycle* d'ordre  $n$  ( $n \geq 3$ ) est le graphe à  $n$  sommets,  $\{u_0, \dots, u_{n-1}\}$ , dont les arêtes sont exactement les paires  $(u_i, u_j)$ , avec  $|i - j| \equiv 1[n]$ , où  $i, j \in \{0, \dots, n - 1\}$ . Le cycle d'ordre  $n$  est dénoté  $C_n$ . Les cycles sont les seuls graphes 2-réguliers connexes. Le groupe  $\text{Aut}(C_n)$  est isomorphe au groupe diédral  $D_{2n}$ , qui est constitué de  $n$  rotations et  $n$  symétries (axiales).

**Les graphes complets.** Le *graphe complet* d'ordre  $n$  est le graphe tel que tous les sommets soient voisins deux à deux. Nous notons  $K_n$  le graphe complet d'ordre  $n$ . Le groupe d'automorphisme de  $K_n$  est le groupe symétrique  $\mathcal{S}_n$ , qui contient toutes les permutations de sommets possibles. Un sous-graphe induit d'un graphe  $G$  qui est isomorphe à un graphe complet est appelé une *clique* de  $G$ . Un sous graphe induit de  $G$  isomorphe au complémentaire d'un graphe complet est un *ensemble indépendant* ou encore un *stable* de  $G$ .

**Les graphes bipartis.** Un graphe  $G$  est *biparti* s'il existe une partition de  $V(G)$  en deux ensembles disjoints et non vides,  $S$  et  $R$ , telle que toute arête de  $G$  ait l'une de ses extrémités dans  $S$  et l'autre dans  $R$ . Les ensembles  $S$  et  $R$  induisent donc des stables, qui sont maximaux s'il n'y a pas de sommets isolés. Nous dirons que  $G$  est biparti complet s'il y a de plus un joint entre  $S$  et  $R$ . Nous noterons  $K_{n,m}$  le graphe biparti complet dont les stables sont respectivement de taille  $n$  et  $m$ . De manière équivalente, un graphe  $G$  connexe non trivial est biparti s'il est proprement 2-coloriable ou s'il ne possède pas de cycles impairs comme sous-graphes.

**Les arbres et les forêts.** Un *arbre* est un graphe connexe dont aucun des sous-graphes n'est un cycle. Un graphe d'ordre  $n$  est un arbre si et seulement s'il est connexe et possède exactement  $n - 1$  arêtes. Les arbres non triviaux sont des graphes bipartis et donc proprement 2-coloriables.

Une *forêt* est un graphe dont toutes les composantes connexes sont des arbres.

**Les chenilles.** Une *chenille* est un arbre tel que tous les sommets soient à distance au plus 1 d'un unique chemin. Un tel chemin d'ordre maximum est appelé la *colonne* de la chenille (voir Figure 1.1). Alternativement, une chenille est un arbre à partir duquel nous obtenons un chemin en supprimant toutes les feuilles. Attention, dans ce cas le chemin obtenu n'est pas une colonne, il faut lui ajouter une feuille à chaque extrémité.

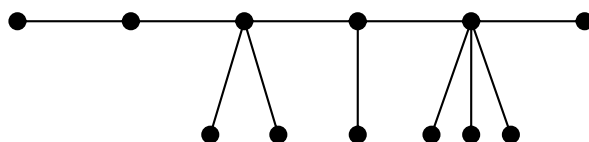
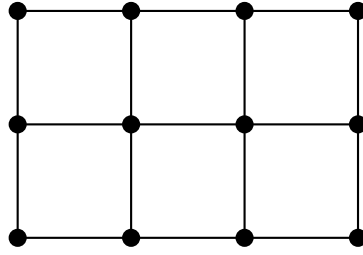


FIGURE 1.1 – Une chenille avec une colonne d'ordre 6.

FIGURE 1.5 – La grille  $P_4 \square P_3$ .

en couronne  $\mathcal{S}_2 \wr \mathcal{S}^n$ . Un automorphisme consiste donc en une permutation des  $n$  coordonnées d'un sommet, associée, pour chacune d'elles, à un changement ou non de valeur.

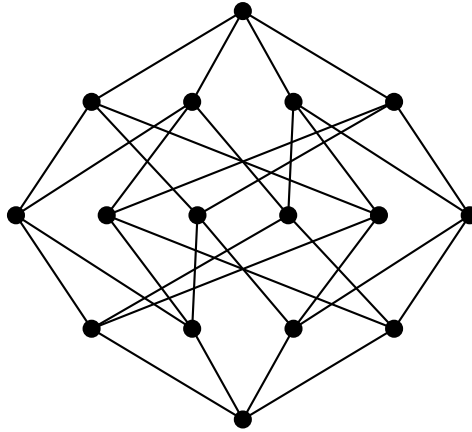


FIGURE 1.6 – L'hypercube de dimension 4.

## 1.4 Jeux à objectif compétitif sur les graphes

Nous définissons maintenant un cadre général qui englobe les différents jeux sur les graphes que nous étudierons dans les chapitres à venir. Nous commençons d'abord par rappeler ce que sont les jeux combinatoires. Notre présentation sera un peu laminaire et nous renvoyons à [1] pour une très bonne introduction au sujet et à [80] pour une étude approfondie et exhaustive.

Un *jeu combinatoire* est un jeu à deux joueurs, généralement appelés *Droite* et *Gauche*, fini, sans intervention de la chance et sans informations cachées. Les joueurs jouent chacun leur tour et en convention normale, le premier qui ne peut plus jouer

perd la partie. Cette condition de victoire peut sembler quelque peu restrictive. Il n'en est rien. Imaginons en effet un jeu où les joueurs remplissent un plateau avec des jetons à leur couleur. L'un des joueurs gagne si, lorsque le plateau est entièrement rempli, il a créé une certaine forme. L'autre, s'il l'en a empêché. Cette condition de victoire se transforme facilement en le-premier-qui-ne-peut-pas-plus-jouer-a-perdu. Il suffit de rajouter un coup supplémentaire inutile (taper dans ses mains, crier hurra) à chaque joueur en fonction de l'état du jeu au moment où le plateau est rempli. En général, toute condition de victoire n'impliquant pas le hasard peut se traduire sous la forme le-premier-qui-ne-pas-jouer-a-perdu.

**Jeux combinatoires.** Donnons maintenant une définition plus formelle de jeu combinatoire. Un *jeu combinatoire* est défini inductivement de la manière suivante :

- Le jeu où personne ne peut jouer est un jeu combinatoire noté  $\{.\}.$
- Si  $\mathcal{G}_1^D, \dots, \mathcal{G}_k^D$  et  $\mathcal{G}_1^G, \dots, \mathcal{G}_l^G$  sont des jeux combinatoires, alors  $\mathcal{G} = \{\mathcal{G}_1^D, \dots, \mathcal{G}_k^D | \mathcal{G}_1^G, \dots, \mathcal{G}_l^G\}$  est le jeu combinatoire, où les  $\mathcal{G}_i^D$  et  $\mathcal{G}_i^G$  représentent respectivement les positions que Droite et Gauche peuvent atteindre en un coup.

Une autre définition plus visuelle peut être donnée à partir de l'arbre du jeu. Un jeu combinatoire est alors un arbre avec un sommet remarquable, la racine, et des arêtes toutes orientées depuis la racine en direction des feuilles. Chaque arête possède une étiquette Droite ou Gauche. Le jeu consiste alors à déplacer un jeton depuis la racine en suivant les arêtes et leur orientation. Droite n'emprunte que des arêtes étiquetées Droite et similairement pour Gauche.

Un joueur possède une *stratégie gagnante* pour un jeu s'il peut s'assurer la victoire quels que soient les coups joués par son adversaire. Nous dirons que le jeu est *gagnant* pour un joueur si celui-ci possède une stratégie gagnante pour ce jeu. Dans le cas contraire le jeu est *perdant* pour ce joueur. Chaque jeu peut alors se classer dans une des quatre catégories ci-dessous.

- Le jeu est gagnant pour Droite, peu importe qui commence.
- Le jeu est gagnant pour le joueur qui commence.
- Le jeu est gagnant pour le joueur qui joue en second.
- Le jeu est gagnant pour Gauche, peu importe qui commence.

Pour les lecteurs qui trouveraient un peu floue la définition de stratégie gagnante ci-dessus, nous renvoyons à [80]. La définition est faite dans le sens inverse. Définir les quatre catégories inductivement ; le jeu vide est gagnant pour le second, un jeu est gagnant pour un joueur s'il existe un coup qui mène à une position perdante pour son adversaire, perdant sinon. Ensuite, nous pouvons dire qu'un joueur a une stratégie gagnante pour un jeu si celui-ci se trouve dans l'une ou l'autre des précédentes catégories. Il ne reste plus qu'à se convaincre que la définition de stratégie ainsi obtenue correspond bien à celle intuitive que nous avons énoncée plus haut.

**Jeux à objectif compétitif sur les graphes.**

Un *jeu à objectif compétitif sur un graphe*  $G$  est un jeu combinatoire dont les règles et les conditions de victoire sont reliées à un problème d'optimisation/un invariant du graphe. Pour ces jeux, nous renommons les joueurs le *Gentil* et le *Méchant*. Les raisons justifiant cette terminologie apparaîtront clairement d'ici quelques lignes. Dans cette thèse nous étudions deux types de jeux à objectif compétitif sur les graphes, qui correspondent à deux grandes classes de problèmes d'optimisation.

**Jeu de partition.** Pour un ensemble  $X$  (les sommets d'un graphe  $G$  par exemple), un *problème de partition* consiste à trouver le plus petit entier  $k$  tel que  $X$  se partitionne en  $k$  ensembles ayant une certaine propriété. Les problèmes de partition peuvent s'exprimer de manière plus parlante en termes de coloration : trouver le plus petit entier  $k$  tel qu'une  $k$ -coloration de  $X$  possède telle ou telle propriété.

Dans un jeu de partition concernant une propriété  $\mathcal{P}$ , nous fixons à l'avance un entier  $k$ , qui correspond au nombre de couleurs autorisées durant la partie. Le jeu se joue sur un ensemble  $X$  et les deux joueurs, Gentil et Méchant, colorient chacun leur tour les sommets de  $X$ , en respectant certaines règles additionnelles (typiquement la coloration partielle doit respecter  $\mathcal{P}$ ). Le jeu s'arrête lorsqu'un des joueurs ne peut plus jouer (l'ensemble  $X$  peut alors être entièrement colorié ou non). Le Gentil est déclaré vainqueur si  $X$  est totalement colorié et si la coloration obtenue possède la propriété  $\mathcal{P}$ .

Nous pouvons alors définir deux invariants qui sont les versions ludiques de l'invariant correspondant au problème de minimisation lié à  $\mathcal{P}$ . Le premier invariant correspond au nombre minimal de couleurs à fournir pour que Gentil possède une stratégie gagnante avec ces  $k$  couleurs lorsqu'il commence. Nous définissons un second invariant de manière identique, mais en considérant que Gentil joue cette fois en second.

Les exemples les plus connus de jeux de partition sont le jeu de coloration et ses variantes, que nous définirons et étudierons dans le Chapitre 2. Dans le Chapitre 4, nous introduirons un nouveau jeu de partition, le jeu de coloration distinguante.

Notons que les études concernant le jeu de coloration s'intéressent essentiellement à l'invariant ludique obtenu lorsque le Gentil commence. Remarquons que pour ce jeu l'écart entre les deux paramètres peut être aussi grand que souhaité. Ce qui ne sera par exemple pas le cas pour le jeu de domination.

**Jeu de construction.**

Pour un ensemble  $X$  un *problème de construction* consiste à trouver un sous-ensemble  $S$  de  $X$  vérifiant une certaine propriété. Il peut s'agir alors d'un problème de maximisation : couplage, stable, ou clique maximum d'un graphe par exemple, ou d'un problème de minimisation : ensemble dominant ou code identifiant minimum.

Dans un jeu de construction concernant un problème de construction maximisant et une propriété  $\mathcal{P}$ , nous fixons à l'avance un entier  $k$ , qui correspond à l'objectif à

atteindre pour le Gentil. Le jeu se joue sur un ensemble  $X$  et les deux joueurs, Gentil et Méchant, construisent un sous-ensemble  $S$  en y ajoutant chacun leur tour un sommet de  $X$ . Ils doivent respecter certaines règles supplémentaires. Typiquement l'ensemble doit à tout moment respecter la propriété  $\mathcal{P}$ . Le jeu s'arrête lorsqu'un des joueurs ne peut plus jouer. L'ensemble  $S$  construit durant le jeu est alors maximal par rapport à  $\mathcal{P}$  et le Gentil est déclaré vainqueur si la taille de  $S$  est au moins  $k$ .

Pour un problème de construction minimisant, le jeu associé est défini similairement mais l'entier fixé  $k$  correspond au nombre de tours maximum de la partie. Les règles du jeu imposent généralement que le sommet rajouté dans  $S$  par un joueur "rapproche" cet ensemble de la propriété  $\mathcal{P}$ . Le jeu s'arrête lorsqu'un des joueurs ne peut plus jouer (les  $k$  tours autorisés peuvent alors avoir été tous joués ou non, en effet si  $S$  a acquis la propriété  $\mathcal{P}$ , les joueurs ne peuvent plus jouer car ils ne peuvent pas "rapprocher"  $S$  de  $\mathcal{P}$ ). Le Gentil gagne si l'ensemble  $S$  construit au cours du jeu vérifie  $\mathcal{P}$ .

Nous pouvons alors définir deux invariants qui sont les versions ludiques de l'invariant correspondant au problème de maximisation/minimisation lié à  $\mathcal{P}$ . Le premier invariant correspond au nombre maximal/minimal  $k$  pour que le Gentil possède une stratégie gagnante lorsqu'il commence. Nous définissons le second invariant de manière identique, mais en considérant que le Gentil joue cette fois en second.

Le jeu de construction maximisant, où la propriété  $\mathcal{P}$  correspondante est l'indépendance, est étudié par Phillips et Slater dans [74]. D'autres jeux de ce type pourraient être intéressants à étudier. Qu'en est-il par exemple du jeu où les joueurs construisent ensemble un couplage ?

Dans notre thèse nous ne nous sommes pas intéressés aux jeux maximisants, mais au jeu de construction minimisant le plus célèbre, le jeu de domination. Nous renvoyons au Chapitre 3, pour une présentation détaillée de ce jeu.

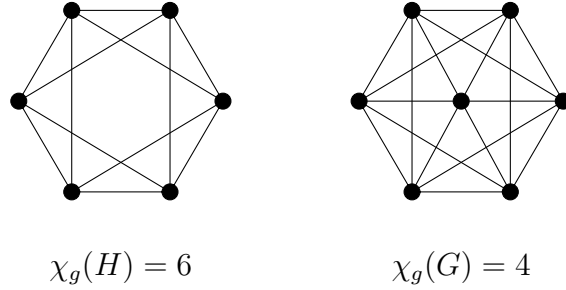
Le *jeu de coloration* est le plus ancien jeu à objectif compétitif sur les graphes. Il s'agit d'un jeu de partition qui a été introduit par Brams vers 1980, comme approche alternative pour une preuve du Théorème des quatre couleurs qui ne fasse pas appel aux ordinateurs. Ce jeu fut publié pour la première fois par Gardner [40], mais resta majoritairement ignoré par la communauté jusqu'à ce qu'il soit redécouvert par Bodlaender en 1991 [8]. Le Gentil et le Méchant prennent ici les noms d'Alice et Bob. Ils s'affrontent sur un graphe  $G$  en coloriant tour à tour les sommets du graphe avec une palette de  $k$  couleurs fixée au préalable. La coloration qu'ils construisent au cours du jeu doit être une coloration propre. Le jeu s'arrête quand un joueur ne peut plus colorier de sommets. Si le graphe est alors entièrement colorié, Alice est déclarée gagnante, sinon c'est Bob qui l'emporte. Le *nombre chromatique ludique* de  $G$  est le plus petit nombre de couleurs à fournir à Alice et Bob pour qu'elle ait une stratégie gagnante sur  $G$  lorsqu'elle commence à jouer. Nous notons cet invariant  $\chi_g(G)$ . Nous obtenons immédiatement l'encadrement suivant :  $\chi(G) \leq \chi_g(G) \leq \Delta(G) + 1$ . Remarquons que contrairement aux deux jeux que nous étudierons par la suite, le jeu de domination et le jeu distinguant, la communauté ne s'est que rarement intéressée en tant que tel à l'invariant que nous pourrions définir similairement lorsque c'est Bob qui entame la partie. L'étude de cette situation apparaît en fait souvent si nous désirons faire des preuves inductives.

Le nombre chromatique ludique défie l'intuition sur plusieurs points. Citons d'abord la conjecture la plus fameuse du domaine, qui semble à première vue être un truisme, mais qui reste totalement ouverte.

**Conjecture.** *Pour tout graphe  $G$  et tout entier  $k \geq \chi_g(G)$ , Alice gagne le jeu de coloration sur  $G$  avec  $k$  couleurs lorsqu'elle commence.*

Le fait que le nombre chromatique ludique ne soit pas héréditaire peut également surprendre. Il existe effectivement des graphes qui possèdent un nombre chromatique ludique plus faible que certains de leurs sous-graphes induits (voir la Figure 2.1 pour un exemple qui se généralise facilement). Cela a directement à voir avec le fait que sur certains graphes il n'est pas avantageux pour Alice de commencer.

Afin d'étudier le jeu de coloration, Zhu [85] a plus tard introduit le  *$k$ -jeu de marquage* qui se révèle plus facile à appréhender, notamment car les problèmes cités plus haut n'apparaissent pas pour ce jeu. Dans ce jeu, Alice et Bob marquent chacun leur tour les sommets d'un graphe  $G$ . Ils ne peuvent marquer un sommet que s'il possède au plus  $k$  voisins déjà marqués. Le jeu s'arrête quand l'un des joueurs ne peut plus marquer de sommets. Alice gagne alors si tous les sommets sont marqués. Le *nombre de marquage ludique* d'un graphe  $G$  (en anglais game coloring number), noté  $\text{col}_g(G)$ , est égal à  $1 + k_{\min}$ , où  $k_{\min}$  est le plus petit entier  $k$  tel qu'Alice possède une stratégie gagnante pour le  $k$ -jeu de marquage. Nous vérifions facilement que pour tout graphe  $G$ ,  $\chi_g(G) \leq \text{col}_g(G)$ . Cette inégalité peut être stricte. Pire, il n'existe pas de fonction  $F$  telle que :  $\text{col}_g(G) \leq F(\chi_g(G))$ , pour tout graphe  $G$ . Pour

FIGURE 2.1 –  $\chi_g$  n'est pas héréditaire.

s'en convaincre, il suffit de remarquer que  $\chi_g(K_{n,n}) = 3$  et  $\text{col}_g(K_{n,n}) = n + 1$ , pour tout  $n \geq 2$ . Le nombre de marquage a le bon goût d'être héréditaire : si  $H$  est un sous-graphe d'un graphe  $G$ , alors  $\text{col}_g(H) \leq \text{col}_g(G)$ . Cette propriété démontrée par Sidorowicz [79] rend cet invariant plus facile à étudier que le nombre chromatique ludique.

Une direction de recherche privilégiée dans l'étude de  $\chi_g$  est le calcul, pour une classe de graphes  $\mathcal{C}$ , de la valeur maximale que peut prendre  $\chi_g$  parmi les graphes de cette classe. Nous noterons  $\chi_g(\mathcal{C})$  pour  $\max\{\chi_g(G) \mid G \in \mathcal{C}\}$  et  $\text{col}_g(\mathcal{C})$  pour  $\max\{\text{col}_g(G) \mid G \in \mathcal{C}\}$ . La majeure partie des bornes supérieures obtenues le sont alors en utilisant le jeu de marquage et un ensemble de stratégies souvent regroupées sous le nom de stratégie d'activation. La première stratégie d'activation ayant été introduite par Zhu [85]. Citons quelques uns de ces résultats :

- $\chi_g(\mathcal{F}) = \text{col}_g(\mathcal{F}) = 4$ , où  $\mathcal{F}$  désigne la classe des forêts (obtenue par Faigle et al. [36]).
- $7 \leq \chi_g(\mathcal{P}) \leq \text{col}_g(\mathcal{P}) \leq 17$ , où  $\mathcal{P}$  est la classe des graphes planaires (la borne supérieure est due à Zhu [86] et l'inférieure à Kierstead et Trotter [59]).
- $6 \leq \chi_g(\mathcal{PE}) \leq \text{col}_g(\mathcal{PE}) \leq 7$ , où  $\mathcal{PE}$  est la classe des graphes planaires extérieurs (due à Guan et Zhu [45]).
- $\chi_g(\mathcal{GT}) = \text{col}_g(\mathcal{GT}) = 5$ , où  $\mathcal{TG}$  désigne les grilles toroïdales (obtenue par Raspaud et Wu [75]).

Attention, même lorsque la valeur exacte est connue pour une classe de graphes, cela n'implique pas que nous soyons capables de calculer exactement  $\chi_g$  pour chaque membre de cette classe. Par exemple, la valeur exacte de  $\chi_g(C_n \square C_m)$  reste inconnue lorsque  $n$  et  $m$  sont tous deux impairs.

Une autre manière d'attaquer le problème de la coloration ludique est de relier le nombre chromatique ludique à d'autres invariants non-ludiques. Une bonne borne supérieure peut ainsi être obtenue en considérant le *nombre chromatique acyclique*,



$\chi_a$ . Il s'agit du plus petit entier  $k$  tel qu'il existe une coloration propre n'induisant pas de cycles bichromatiques.

**Théorème 2.1.** [Dinski et Zhu [29] (1998).] *Pour tout graphe  $G$ ,*  
 $\chi_g(G) \leq \chi_a(G)(\chi_a(G) + 1)$ .

De nombreuses variantes du nombre chromatique ludique ont été proposées et étudiées depuis. Citons entre autres le jeu de coloration d'arêtes (introduit par Lam et al. [67]) et le jeu de coloration d'incidences (proposé par Andres [3]). Ces jeux sont considérés comme des jeux à part entière même s'ils peuvent respectivement être vus comme des restrictions du jeu de coloration aux graphes de ligne et aux graphes d'incidence. Au cours de cette thèse, nous nous sommes intéressés à une variante que nous nommons jeu de coloration 1-impropre et qui autorise la coloration construite au cours du jeu à être 1-impropre. Nous avons longtemps pensé qu'il s'agissait d'une nouvelle variante, jusqu'à ce que nous prenions connaissance des travaux de Chu et al. [23]. Dans cet article, les auteurs introduisent le jeu de coloration  $d$ -impropre et quelques-uns de leurs résultats recoupent les nôtres. Dans la première partie de ce chapitre, nous définissons le jeu de coloration  $d$ -impropre, puis étudions le rapport entre le jeu de coloration et le jeu de coloration 1-impropre. Nous entrons ici dans les détails de certaines remarques énoncées rapidement dans [23]. Dans cette partie, nous calculons également la valeur du nombre chromatique 1-impropre pour les chemins et les cycles. Dans la deuxième partie, nous nous intéressons aux arbres. Chu et al. ont montré, toujours dans [23], que trois couleurs suffisent à Alice pour gagner le jeu de coloration 1-impropre sur les arbres. Ils ont également démontré que pour certains arbres, ces trois couleurs lui sont réellement nécessaires. Notre résultat principal sera de montrer que cela reste vrai si nous nous restreignons aux chenilles. Ces résultats sont les fruits d'une collaboration avec Sylvain Gravier et Victor Lage-Pesoa. Un article sur le sujet est en cours de rédaction.

## 2.1 Nombre chromatique ludique 1-impropre

### 2.1.1 Définition

Le *jeu de coloration  $d$ -impropre* est une variante du jeu de coloration, pour laquelle nous relâchons la contrainte de propriété de la coloration. Ce jeu a été introduit pour la première fois en 2003, par Chu *et al.* [23] (sous le nom de Relaxed coloring game). Deux joueurs, Alice et Bob, colorient tour à tour les sommets d'un graphe  $G$  avec une palette de  $k$  couleurs fixée à l'avance. Ils doivent respecter la contrainte que la coloration partielle construite au cours du jeu est  $d$ -impropre. Le plus petit entier  $k$  tel qu'Alice ait une stratégie gagnante avec  $k$  couleurs lorsqu'elle commence est appelé le *nombre chromatique ludique  $d$ -impropre* de  $G$ . Nous le noterons  $\chi_g^{(d)}(G)$ . Pour

tout graphe  $G$ , l'encadrement suivant est évident :  $\chi^{(d)}(G) \leq \chi_g^{(d)}(G) \leq \Delta(G) + 1$ . Comme pour le jeu de coloration, il n'est pas clair qu'Alice puisse toujours gagner avec  $k$  couleurs sur le graphe  $G$ , dès lors que  $k \geq \chi_g^{(d)}(G)$ . Les mêmes problématiques concernant qui commence apparaissent aussi. En d'autres termes, si Alice peut gagner avec  $k$  couleurs en commençant, elle ne peut pas forcément le faire si elle joue en second. De même, si  $H$  est un sous-graphe induit de  $G$ ,  $\chi_g^{(d)}(H)$  n'est pas toujours plus petit que  $\chi_g^{(d)}(G)$ .

La plupart des études concernant le jeu de coloration  $d$ -impropre s'intéresse pour des classes données, comme celles des arbres, des graphes planaires ou des graphes planaires extérieurs, à trouver la plus petite valeur de  $d$  qui permette d'obtenir une bonne borne supérieure (constante) pour le nombre chromatique ludique  $d$ -impropre des graphes de cette classe. Nous renvoyons le lecteur intéressé à [23, 31, 32, 47, 84]. Quant à nous, à partir de maintenant nous ne nous intéresserons plus qu'au jeu 1-impropre et à l'invariant correspondant  $\chi_g^{(1)}$ .

Afin d'analyser le jeu correctement, il sera utile de considérer que celui-ci peut être joué sur un graphe  $G$  déjà partiellement colorié, que nous noterons  $G|c$ , où  $c$  désigne la coloration partielle. Nous demanderons toujours que ces colorations partielles soient 1-impropres.

Nous introduisons également les définitions suivantes, où  $A$  désigne Alice et  $B$  désigne Bob. Nous dirons que le graphe partiellement colorié  $G|c$  est :

- une  $k$ - $X$ -position si  $X \in \{A, B\}$  possède une stratégie gagnante avec  $k$  couleurs, quel que soit le joueur qui commence,
- une  $k$ - $X_f$ -position si  $X \in \{A, B\}$  possède une stratégie gagnante avec  $k$  couleurs quand il commence,
- une  $k$ - $X_s$ -position si  $X \in \{A, B\}$  possède une stratégie gagnante avec  $k$  couleurs quand il joue en second.

Le nombre chromatique ludique 1-impropre de  $G$  est alors défini alternativement comme le plus petit  $k$  tel que  $G$  est une  $k$ - $A_f$ -position pour le jeu de coloration impropre.

### 2.1.2 Relation entre $\chi_g$ et $\chi_g^{(1)}$

Dans cette sous-partie, nous donnons nos premiers résultats concernant le jeu de coloration 1-impropre. En particulier, nous étudions les relations qui peuvent exister entre le nombre chromatique ludique et son pendant 1-impropre. Une première intuition serait de penser que le jeu de coloration 1-impropre est plus facile pour Alice. De manière surprenante, ce n'est pas le cas. Des contre-exemples simples sont donnés par les graphes bipartis complets, comme le montre le Théorème 2.3 ci-dessous. Cette remarque avait déjà été faite brièvement dans [23], où il était annoncé sans preuve que  $\chi_g^{(1)}(K_{n,n}) = n$ .

Afin d'étudier le jeu sur les graphes bipartis, nous introduisons le lemme technique suivant.

**Lemme 2.2.** *Soit  $G|c$  un graphe biparti partiellement  $k$ -colorié, avec  $k \geq 2$ , et soient  $X$  et  $Y$  les deux ensembles partitionnant ses sommets, avec  $|X| = n$ . Supposons que  $c$  soit telle que  $p$  sommets de  $X$  aient la couleur 1,  $q$  autres sommets de  $X$  soient coloriés, aucun sommet de  $Y$  ne soit colorié avec 1, et chaque sommet non-colorié de  $Y$  ait deux voisins coloriés avec la couleur 1, où  $q \geq 0$ ,  $n \geq p \geq 2$ . Si  $k \geq \lceil \frac{n-(q+p)}{2} \rceil + q + 2$ , alors  $G|c$  est une  $k$ -A-position.*

*Démonstration.* Puisqu'un sommet non-colorié dans  $Y$  possède au moins deux voisins coloriés 1, il ne peut pas être lui-même colorié avec 1 au cours du jeu. La couleur 1 n'apparaîtra donc jamais dans  $Y$  et sera donc toujours jouable dans  $X$ . La stratégie d'Alice consiste à colorier les sommets de  $X$  avec la couleur 1, aussi longtemps qu'il y a des sommets non-coloriés dans cet ensemble. Cette stratégie assure que Bob joue au plus  $\lceil \frac{n-p-q}{2} \rceil$  fois dans  $X$ . Ainsi, n'importe quel sommet  $v$  dans  $Y$  possède au plus  $\lceil \frac{n-(q+p)}{2} \rceil + q + 1$  couleurs distinctes dans son voisinage. Par hypothèse,  $k \geq \lceil \frac{n-(q+p)}{2} \rceil + q + 2$ , donc de tels sommets pourront toujours être coloriés. Cette stratégie ne dépendant pas de qui commence, nous en déduisons que  $G|c$  est une  $k$ -A-position.  $\square$

**Théorème 2.3.** *Pour  $n, m \geq 1$ , vérifiant  $n \leq m$ , nous avons :*

$$\chi_g^{(1)}(K_{n,m}) = \begin{cases} n & \text{si } n = m, \\ n + 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

*Démonstration.* Nous notons  $X$  et  $Y$  les deux stables de  $K_{n,m}$ , d'ordre respectif  $n$  et  $m$ . Procédons par induction sur  $n$ . Si  $n = 1, 2$ , le théorème est trivialement vrai. Supposons donc que  $n \geq 3$ . Nous commençons par montrer qu'Alice a une stratégie gagnante avec le nombre de couleurs annoncé. Elle commence par colorier un sommet dans  $X$  avec la couleur 1. Si Bob ne joue pas la couleur 1 sur un sommet de  $Y$ , Alice rétorque en coloriant un autre sommet de  $X$  avec 1. Ceci est possible car  $n \geq 3$ . Puisque  $n \geq 3$ ,  $n \geq \lceil \frac{n-3}{2} \rceil + 3$ . Ainsi, d'après le Lemme 2.2, le graphe partiellement colorié qu'elle obtient est une  $n$ -A-position. Si maintenant Bob colorie un sommet de  $Y$  avec 1, cette couleur devient interdite pour le restant de la partie. Le jeu est donc maintenant équivalent au jeu sur  $K_{n-1,m-1}$ . Par hypothèse d'induction, Alice peut gagner ce jeu avec  $n - 1$  (resp.  $n$ ) couleurs si  $n = m$  (resp. si  $n < m$ ). Pour conclure, elle peut gagner le jeu sur  $K_{n,m}$  avec  $n$  couleurs (resp.  $n + 1$ ).

Il reste à montrer qu'avec moins de couleurs, c'est Bob qui gagne. Sa stratégie est de jouer de telle sorte qu'après son premier coup, exactement un sommet de  $X$  et un sommet de  $Y$  soient coloriés avec 1. Après cela le jeu est équivalent au jeu sur

$K_{n-1,m-1}$ , et nous concluons par induction qu'Alice a réellement besoin de  $n$  (resp.  $n+1$ ) couleurs pour gagner sur  $K_{n,m}$ .  $\square$

Il est bien connu et facile de vérifier que  $\chi_g(K_{n,m}) = 3$ , dès que  $n, m \geq 2$ . Ainsi, le Théorème 2.3 implique que le nombre chromatique ludique peut être arbitrairement plus petit que celui 1-impropre. Pire, il n'existe pas de fonction  $F$  telle que  $\chi_g^{(1)}(G) \leq F(\chi_g(G))$  soit vrai pour tout graphe  $G$ . Bien que  $\chi_g^{(1)}$  ne soit pas borné supérieurement par  $\chi_g$ , il est clair que  $\chi_g^{(1)}(G) \leq \text{col}_g(G)$ . Ainsi, toutes les bornes supérieures obtenues pour  $\chi_g$  en utilisant le jeu de marquage restent vraies pour  $\chi_g^{(1)}$ . Par exemple  $\chi_g^{(1)}(G) \leq \text{col}_g(G) \leq 17$ , pour tout graphe planaire  $G$ . (voir [86]).

Nous cherchons maintenant des graphes pour lesquels le fait que la coloration requise ne soit que 1-impropre aide réellement Alice à gagner avec moins de couleurs. Nous laissons nos lecteurs vérifier que  $\chi_g(K_n) = n$ , alors que  $\chi_g^{(1)}(K_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ . Mais ces exemples ne nous convainquent pas vraiment car nous avons déjà que  $\chi(K_n) = n$  alors que  $\chi^{(1)}(K_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ . Pour  $n, m \geq 1$ , nous dénotons par  $K_{n,m}^-$  un graphe biparti complet  $K_{n,m}$ , duquel un couplage maximum a été retiré. Il est facile de voir que  $\chi_g(K_{n,n}^-) = n$ . D'un autre côté, le théorème à venir énonce que  $\chi_g^{(1)}(K_{n,n}^-) \leq \lceil \frac{2n}{3} \rceil$ . Pour de tels graphes, Alice a donc besoin de significativement moins de couleurs pour gagner lorsqu'elle joue la version 1-impropre du jeu de coloration, et ce même si  $\chi(K_{n,n}^-) = \chi^{(1)}(K_{n,n}^-)$ .

**Théorème 2.4.** *Pour  $n \geq 1$ , nous avons  $\chi_g^{(1)}(K_{n,n}^-) \leq \lceil \frac{2n}{3} \rceil$ .*

Ce théorème est une application directe du résultat plus fort ci-dessous.

**Proposition 2.5.** *Soit  $n \geq 1$ .*

- *Pour  $k \geq \lceil \frac{2n}{3} \rceil$ ,  $K_{n,n}^-$  est une  $k$ - $A_f$ -position.*
- *Pour  $k \geq \lceil \frac{2n+1}{3} \rceil$ ,  $K_{n,n+1}^-$  est une  $k$ - $A_s$ -position.*

*Démonstration.* Nous notons  $X$  et  $Y$  les deux stables de  $K_{n,n+l}^-$ , où  $X$  est de taille  $n$  et  $Y$  de taille  $n+l$ , avec  $l \in \{0, 1\}$ . Nous écrivons  $x_i$ , avec  $i \in \{1, \dots, n\}$ , pour les sommets dans  $X$  et  $y_j$ , avec  $j \in \{1, \dots, n+l\}$  pour ceux dans  $Y$ . Nous supposons alors que les arêtes du couplage retiré sont les  $x_i y_i$ , avec  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Nous raisonnons par induction. Clairement, pour  $n \leq 2$ , la Proposition 2.5 est vraie. Soient  $n \geq 3$  et  $k \geq 1$ .

Nous commençons par  $K_{n,n}^-$  et supposons que  $k \geq \lceil \frac{2n}{3} \rceil$ . Le premier coup d'Alice est de colorier  $x_1$  avec la couleur 1. Soit  $z$  le sommet que Bob colorie ensuite. Nous pouvons supposer que  $z \neq x_2$ .

**Cas 1 :** Bob colorie  $z$  avec 1. Alors, Alice peut soit colorier  $y_1$  avec 1, soit  $x_2$  avec 1. Dans les deux cas, nous pouvons supposer sans perte de généralité que  $x_1, x_2$  et  $y_1$  sont maintenant coloriés avec la couleur 1. La couleur 1 ne peut alors plus être jouée que sur  $y_2$ . Considérons trois sous-cas.

**Cas 1.1 :** Bob colorie  $y_2$  avec la couleur 1. Le jeu est maintenant équivalent au jeu sur  $K_{n-2,n-2}^-$  avec  $k-1$  couleurs et Alice qui commence. Comme  $k-1 \geq \lceil \frac{2(n-2)}{3} \rceil$ , nous pouvons conclure par induction que cette position est gagnante pour Alice.

**Cas 1.2 :** Bob colorie  $y_2$  avec une couleur différente de 1. Le jeu est alors équivalent au jeu sur  $K_{n-2,n-1}^-$ , avec  $k-1$  couleurs et Bob qui vient de faire un premier coup. Comme  $k-1 \geq \lceil \frac{2(n-2)+1}{3} \rceil$ , nous concluons par induction que le jeu est dans une position gagnante pour Alice.

**Cas 1.3 :** Bob ne colorie pas  $y_2$ , mais un autre sommet  $z'$ . Alice répond alors en coloriant  $y_2$  avec la couleur 1. Le jeu est maintenant équivalent au jeu sur  $K_{n-2,n-2}^-$  avec  $k-1$  couleurs, dans lequel Alice aurait joué  $z'$  comme premier coup. Par induction,  $K_{n-2,n-2}^-$  est une  $(k-1)$ - $A_f$ -position. De plus,  $K_{n-2,n-2}^-$  étant sommet-transitif, tous les premiers coups sont équivalents. Jouer  $z'$  est donc un coup gagnant pour Alice, ce qui nous permet de conclure.

**Cas 2 :** Bob colorie  $z$  avec 2. Alice répond en coloriant  $x_2$  avec 1. Premièrement, supposons que Bob ne réponde pas en coloriant soit  $y_1$  soit  $y_2$  avec 1. Si  $X$  est alors complètement colorié, c'est que  $n \leq 4$ . Dans ce cas, il est aisé de vérifier qu'Alice peut gagner, puisque  $x_1$  et  $x_2$  ont la même couleur. Si  $n \geq 5$ , nous pouvons supposer que  $x_3$  n'est pas colorié. Alice colorie ce sommet avec la couleur 1. Soit  $q$  le nombre de sommets de  $X$  coloriés jusqu'à présent par Bob ; nous avons  $q \leq 2$ . Par hypothèse,  $k \geq \lceil \frac{2n}{3} \rceil$ . Dès que  $n \geq 5$  et  $n \neq 6$ , cela implique que  $k \geq \lceil \frac{n-(q+3)}{2} \rceil + q + 2$ . En appliquant le Lemme 2.2, nous obtenons dans ce cas qu'Alice gagne. Si  $n = 6$  et  $q < 2$ , l'inégalité ci-dessus reste vraie. Nous n'avons donc à traiter à part que le cas où  $n = 6$  et  $q = 2$ , c'est-à-dire le cas où Bob joue ses deux premiers coups dans  $X$ . Si pour ces deux coups Bob a choisi la même couleur, Alice conserve sa stratégie. Sinon, son troisième coup est de répéter dans  $X$  la couleur que Bob vient juste de jouer. Le seul cas problématique est si Bob répond en jouant la quatrième couleur dans  $X$ . Tous les sommets de  $X$  sont alors coloriés et aucun sommet de  $Y$  ne l'est. Nous pouvons supposer que  $x_1, x_2$  sont coloriés 1,  $x_3, x_4$  sont coloriés 2,  $x_5$  est colorié 3 et  $x_6$  est colorié 4. La stratégie d'Alice est la suivante : si Bob colorie  $y_1$  ou  $y_2$ , elle répond en coloriant l'autre sommet avec 1, de même s'il colorie  $y_3$  ou  $y_4$ , elle colorie l'autre sommet avec 2, et s'il colorie  $y_5$  (resp.  $y_6$ ), elle répond en coloriant  $y_6$  avec la couleur 4 (resp.  $y_5$  avec la couleur 3).

Deuxièmement, supposons que Bob choisisse de colorier  $y_1$  ou  $y_2$  avec 1. Si  $z$  est respectivement égal à  $y_2$  ou  $y_1$ , alors nous retombons sur le Cas 1.2. Sinon Alice colorie respectivement  $y_2$  ou  $y_1$  avec la couleur 1, ce qui nous ramène au Cas 1.3.

Nous considérons maintenant  $K_{n,n+1}^-$  et supposons que  $k \geq \lceil \frac{2n+1}{3} \rceil$ . Remarquons que  $y_{n+1}$  est le seul sommet de  $Y$  qui est adjacent à tous ceux de  $X$ . Soit  $z$  le premier sommet colorié par Bob. Disons que  $z$  est colorié avec la couleur 1.

**Cas 1 :**  $z \in Y$ . Alice colorie un sommet de  $Y$  de sorte que nous puissions maintenant supposer que les sommets  $y_1$  et  $y_{n+1}$  sont tous deux coloriés avec la couleur 1. Si

Bob ne colorie pas ensuite  $x_1$ , Alice colorie alors celui-ci avec la couleur 1 si cela est possible. La couleur 1 étant maintenant interdite partout, le jeu devient équivalent au jeu sur  $K_{n-1,n-1}^-$  avec  $k-1$  couleurs dans lequel un coup a déjà été joué. Nous sommes ainsi ramenés au Cas 1.3 de la première partie de la preuve. Si Alice n'a pas pu jouer la couleur 1, c'est que Bob a joué celle-ci dans  $Y$ . Dans ce cas, comme pour  $n \geq 3$ ,  $k \geq \lceil \frac{n+1-3}{2} \rceil + 2$ , nous obtenons qu'Alice gagne en appliquant le Lemme 2.2. Si Bob colorie  $x_1$  avec 1, le jeu devient équivalent au jeu sur  $K_{n-1,n-1}^-$  avec  $k-1$  couleurs. Par induction, il s'agit d'une  $(k-1)$ - $A_f$ -position. Finalement, si Bob colorie  $x_1$  avec une couleur différente de 1, alors Alice colorie un sommet  $y_i$  avec 1. Cela est toujours possible car  $n+1 \geq 3$  et la couleur 1 n'apparaît pas dans  $X$ . Comme  $k \geq \lceil \frac{n+1-3}{2} \rceil + 2$ , nous obtenons, d'après le Lemme 2.2, qu'Alice a une stratégie gagnante avec  $k$  couleurs.

**Cas 2 :**  $z \notin Y$ . Supposons même que  $z = x_1$ . Alice colorie  $x_2$  avec 1. Si Bob ne répond pas en coloriant  $y_1$  ou  $y_2$  avec 1, alors Alice colorie l'un des  $x_i$  avec 1 (si ce n'est pas possible c'est que  $n = 3$  et Alice gagne facilement par tout l'ensemble  $Y$  peut être colorié avec la troisième couleur). Notons  $q$  le nombre de sommets de  $X$  coloriés avec une couleur autre que 1 ; nous avons  $q \leq 1$ . Comme  $n \geq 4$ ,  $k \geq \lceil \frac{n-(q+3)}{2} \rceil + q + 2$ , et d'après le Lemme 2.2, Alice possède une stratégie gagnante avec  $k$  couleurs. Si Bob colorie  $y_1$  ou  $y_2$  avec 1, Alice répond de manière à ce que  $y_1$  et  $y_2$  soient tous deux coloriés avec la couleur 1. Le jeu devient équivalent au jeu sur  $K_{n-2,n-1}^-$  avec  $k-1$  couleurs. Par induction, il s'agit d'une  $(k-1)$ - $A_s$ -position.  $\square$

Nous n'avons pas trouvé de graphes pour lesquels le gain apporté à Alice par l'impropreté est meilleur que linéaire. Rappelons que pour la coloration 1-impropre non-ludique, nous avons que  $\chi(G) \leq 2\chi^{(1)}(G)$ , pour tout graphe  $G$ . Existe-t-il une telle borne linéaire dans le cas ludique, ou même, de manière moins ambitieuse, existe-t-il une fonction  $F$  telle que pour tout graphe  $G$ ,  $\chi_g(G) \leq F(\chi_g^{(1)}(G))$  ?

### 2.1.3 Chemins et cycles

Dans cette partie, nous calculons le nombre chromatique ludique 1-impropre des chemins, puis nous appliquons ce résultat pour obtenir celui des cycles. Rappelons que  $\chi_g(P_n) = 3$ , dès que  $n \geq 4$ , et  $\chi_g(C_n) = 3$ , pour  $n \geq 3$ . Pour commencer, nous introduisons une version légèrement modifiée du jeu de coloration 1-impropre, ainsi que quelques règles de réduction. Le *jeu de coloration 1-impropre fort* est défini de manière analogue au jeu de coloration 1-impropre, exception faite que nous autorisons Bob à passer son tour aussi souvent qu'il le désire. Il est facile mais important de remarquer que si Alice peut gagner avec  $k$  couleurs quand Bob peut passer, alors elle peut aussi gagner avec  $k$  couleurs dans le jeu de coloration 1-impropre original. Nous introduisons cette version forte du jeu car elle se comporte bien lorsque nous considérons des graphes avec de multiples composantes connexes. Combiné avec les résultats de réduction que nous énoncerons ensuite, ceci nous sera

bien utile pour obtenir des résultats par induction.

**Proposition 2.6.** *Soient  $k \geq 1$  et  $G|c$  un graphe partiellement colorié, possédant  $n$  composantes connexes,  $G_1, \dots, G_n$ , telles que chacune est une  $k$ -A-position pour le jeu de coloration 1-impropre fort. Alors  $G|c$  est lui aussi une  $k$ -A-position pour ce jeu fort.*

*Démonstration.* Quand Bob joue dans une des composantes, Alice réplique par un coup gagnant dans cette composante si elle n'est pas entièrement coloriée. Sinon, elle joue dans n'importe quelle autre composante en faisant comme si Bob venait tout juste de passer son tour dans celle-ci.  $\square$

Les règles de réduction suivantes vont nous permettre de diviser le graphe de base en composantes plus petites. Elles sont valables à la fois pour le jeu de coloration 1-impropre et pour sa version forte.

**Proposition 2.7.** *Soient  $k \geq 2$ ,  $G|c$  un graphe partiellement colorié et  $G'$  le graphe obtenu à partir de  $G$  en supprimant l'arête  $uv$ , où  $u, v \in V(G)$ . Si  $c$  est telle que  $c(u) \neq c(v)$ , alors Alice gagne avec  $k$  couleurs sur  $G|c$  si et seulement si elle gagne avec  $k$  couleurs sur  $G'|c$ .*

**Proposition 2.8.** *Soient  $k \geq 2$ ,  $G|c$  un graphe partiellement colorié et  $u$  un sommet de  $G$  de degré 2. Soient  $v_1$  et  $v_2$  les deux voisins de  $u$  et  $G'$  le graphe obtenu en retirant à  $G$  les arêtes  $uv_1$ ,  $uv_2$ . Si  $c$  est telle que  $c(v_1) = c(v_2)$ , alors Alice gagne avec  $k$  couleurs sur  $G|c$  si et seulement si elle gagne avec  $k$  couleurs sur  $G'|c$ .*

*Démonstration.* Le sommet  $u$  devra forcément être colorié avec une couleur différente de  $c(v_1)$ . Ainsi,  $v_1$  et  $v_2$  ne pourront pas être saturés en coloriant  $u$ , et nous pouvons donc supprimer les arêtes  $uv_1$  et  $uv_2$  sans affecter le comportement du jeu.  $\square$

**Proposition 2.9.** *Soient  $k \geq 1$ ,  $G|c$  un graphe partiellement colorié et  $G'$  le graphe obtenu en enlevant une arête  $uv$  à  $G$ , où  $u, v \in V(G)$ , et en ajoutant un sommet pendant à  $u$  et  $v$ . Ces sommets sont respectivement dénotés par  $u'$  et  $v'$ . Si  $c$  est telle que  $c(u) = c(v) = a$ , alors Alice gagne avec  $k$  couleurs sur  $G|c$  si et seulement si elle gagne avec  $k$  couleurs sur  $G'|c'$ , avec  $c' = c$  pour les sommets de  $G$ ,  $c'(u') = c'(u)$  et  $c'(v') = c'(v)$ .*

Nous pouvons maintenant calculer  $\chi_g^{(1)}$  pour une union disjointe de chemins. Nous allons montrer qu'en fait deux couleurs suffisent à Alice. Ainsi, jusqu'à la fin de cette partie, nous ne considérerons que des 2-colorations avec les couleurs 1 et 2. Si  $a \in \{1, 2\}$ , alors  $\bar{a}$  correspond à l'autre couleur. Nous notons  $P_{n,a}$ , le chemin d'ordre  $n$  dont l'une des extrémités est coloriée avec la couleur  $a$  (et aucun autre sommet n'est colorié). Similairement,  $P_{n,a,b}$  renvoie au chemin d'ordre  $n$  dont les deux extrémités sont respectivement coloriées avec la couleur  $a$  et la couleur  $b$ .

**Lemme 2.10.** *Pour  $n \geq 2$ ,  $P_{n,a}$  et  $P_{n,a,b}$  sont tous les deux des 2-A-positions pour le jeu de coloration 1-impropre fort.*

*Démonstration.* Nous notons  $v_1$  l'extrémité du chemin coloriée avec la couleur  $a$ , et  $v_n$  celle qui est potentiellement coloriée avec  $b$ .

Procédons par induction sur  $n$ . Pour  $n = 2$ , la proposition est trivialement vraie. Supposons donc que  $n \geq 3$ . Si Alice commence, elle colorie le sommet adjacent à  $v_1$  avec la couleur  $\bar{a}$ . D'après la réduction de la Proposition 2.7, le jeu est maintenant équivalent au jeu sur  $P_{n-1,\bar{a}}$  (resp. sur  $P_{n-1,\bar{a},b}$ ) plus un sommet isolé déjà colorié, que nous pouvons donc ignorer. Par hypothèse d'induction, ce sont des 2-A-positions.

Traisons maintenant le cas où Bob commence. S'il passe son tour, Alice joue comme précédemment et gagne. Sinon, soient  $u$  le sommet colorié par Bob et  $c$  la couleur qu'il a choisie. Si  $u$  est adjacent à la fois à  $v_1$  et  $v_n$ , alors  $n = 3$  et Alice gagne, soit parce que le chemin est totalement colorié, soit en terminant le jeu en coloriant  $v_n$ . Sinon, Alice colorie l'un des voisins non-coloriés de  $u$  avec  $\bar{c}$ . Le jeu est maintenant équivalent au jeu sur deux composantes qui sont des chemins plus petits et dont seuls la ou les extrémités sont coloriées. Par induction, ces deux chemins sont des 2-A-positions pour le jeu de coloration 1-impropre fort. En appliquant la Proposition 2.6, nous concluons que  $P_{n,a}$  (resp.  $P_{n,a,b}$ ) est une 2-A-position pour le jeu de coloration 1-impropre fort.  $\square$

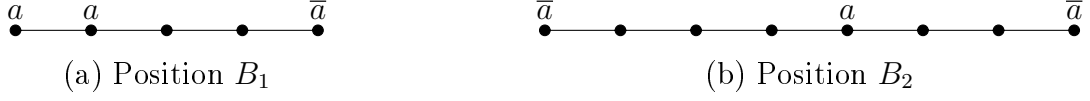
Puisque  $\chi^{(1)}(P_n) = 1$  si et seulement si  $n = 1, 2$ , nous obtenons directement le théorème suivant.

**Théorème 2.11.** *Si  $n \geq 3$ , alors  $\chi_g^{(1)}(P_n) = 2$ .*

*Démonstration.* Alice commence en coloriant une extrémité. D'après le Lemme 2.10, elle peut gagner le jeu de coloration 1-impropre avec 2 couleurs sur le chemin obtenu, même si c'est au tour de Bob. Nous en déduisons que deux couleurs suffisent à Alice pour gagner sur  $P_n$ .  $\square$

Nous nous intéressons maintenant au jeu sur les cycles. À partir des règles de réduction définies précédemment, nous allons pouvoir réduire le jeu sur les cycles au jeu sur des chemins partiellement coloriés comme ceux que nous introduisons maintenant. Pour  $n \geq 3$ , nous écrivons  $P_{n,a,b,c}$  pour un chemin d'ordre  $n$ , avec exactement trois sommets coloriés, parmi lesquels les deux extrémités, coloriées respectivement  $a$  et  $c$ . Le troisième étant colorié avec la couleur  $b$ . Rappelons que nous demandons que les colorations partielles soient 1-impropres. Ici, cela veut dire que si  $n = 3$ ,  $a$ ,  $b$ , et  $c$  ne sont pas tous les trois de la même couleur. Sauf pour les deux exceptions décrites dans la Figure 2.2, Alice peut gagner le jeu fort sur ces chemins avec seulement 2 couleurs, quel que soit le premier joueur. Pour  $B_1$  et  $B_2$ , avec 2 couleurs, c'est le joueur qui commence qui gagne. Sur  $B_2$ , un coup optimal d'Alice est de colorier le voisin de l'extrémité de droite avec  $a$ , tandis que celui de Bob est de choisir  $\bar{a}$  pour le quatrième sommet en partant de la gauche.



FIGURE 2.2 –  $2-B_f$ -positions pour  $P_{n,a,b,c}$ 

**Lemme 2.12.** *Pour  $n \geq 3$ , si  $P_{n,a,b,c} \neq B_1, B_2$ , alors  $P_{n,a,b,c}$  est une 2-A-position pour le jeu de coloration 1-impropre fort.*

*Démonstration.* Nous écrivons  $v_1, \dots, v_n$  pour les sommets de  $P_n$ , de sorte que  $v_1$  est colorié  $a$ ,  $v_n$  est colorié  $c$ , et un autre sommet, disons  $v_{i_0}$  est colorié  $b$ . Procédons par induction sur  $n$ . Si  $n = 3$ , il n'y a rien à prouver. Pour  $n \geq 4$ , nous allons réduire le jeu à plusieurs composantes connexes de plus petites tailles. D'après la Proposition 2.6, nous aurons seulement besoin de nous assurer que toutes ces composantes sont des 2-A-positions pour le jeu fort. Supposons donc que  $n \geq 4$  et  $P_{n,a,b,c} \neq B_1, B_2$ .

Traitons d'abord le cas où Alice commence. Il y a au moins un sommet non-colorié qui est adjacent à  $v_{i_0}$ . Sans perte de généralité, supposons que ce sommet est  $v_{i_0-1}$ . Alice colorie  $v_{i_0-1}$  avec  $\bar{b}$ . En appliquant la Proposition 2.7, elle laisse deux composantes de la forme,  $P_{i_0-1,a,\bar{b}}$  et  $P_{n-i_0+1,b,c}$ . D'après le Lemme 2.10, les deux sont des 2-A-positions pour le jeu fort.

Considérons maintenant le cas où Bob commence. S'il passe son tour, Alice joue comme ci-dessus et gagne. Sinon, soit  $u$  le sommet joué par Bob et  $d$  la couleur qu'il utilise. Sans perte de généralité, nous supposons que  $u$  est entre  $v_1$  et  $v_{i_0}$ . Nous distinguons les cas suivants.

**Cas 1 :**  $u = v_{i_0-1}$ . Prenons en compte la couleur choisie pour  $u$ .

**Cas 1.1 :**  $d = \bar{b}$ . Le jeu est équivalent au jeu sur les deux composantes connexes  $P_{i_0-1,a,\bar{b}}$  et  $P_{n-i_0+1,b,c}$ . Ces deux composantes sont, d'après le Lemme 2.10, des 2-A-positions pour le jeu fort.

**Cas 1.2 :**  $d = b$ . D'après la Proposition 2.9, le jeu est équivalent au jeu sur les deux composantes de la forme  $P_{i_0,a,b,b}$  et  $P_{n-i_0+2,b,b,c}$ . Ces positions ne sont pas isomorphes à  $B_2$ . Si aucune d'elles n'est isomorphe à  $B_1$ , nous concluons par induction que les deux sont des 2-A-positions pour le jeu fort. Sinon, puisque le chemin original  $P_{n,a,b,c}$  n'est pas égal à  $B_2$ , au plus l'une de ces composantes, disons  $P_{i_0,a,b,b}$  est isomorphe à  $B_1$ . Dans ce cas, Alice joue dans cette composante et colorie avec  $\bar{a}$  le voisin de l'extrémité colorié  $a$ . Elle laisse deux composantes de la forme,  $P_{4,\bar{a},b,b}$  et  $P_{n-i_0+2,b,b,c}$ , qui sont, par induction pour la seconde, des 2-A-positions.

**Cas 2 :**  $u$  n'est pas adjacent à  $v_{i_0}$ . Nous prenons maintenant en compte la distance entre  $u$  et  $v_{i_0}$ .

**Cas 2.1 :**  $d(u, v_{i_0}) \neq 3, 4$ . Premièrement, si  $v_{i_0+1} \neq v_n$ , Alice colorie ce sommet avec  $\bar{b}$ . Le jeu est maintenant équivalent au jeu sur deux composantes de la forme,

$P_{i_0,a,d,b}$  et  $P_{n-i_0,\bar{b},c}$ . Puisque  $d(u, v_{i_0}) \neq 3, 4$ , nous avons que  $P_{i_0,a,d,b} \neq B_1, B_2$ . En utilisant l'hypothèse d'induction pour la première composante et le Lemme 2.10 pour la seconde, nous obtenons que toutes deux sont des 2-A-positions pour le jeu fort. Deuxièmement, si  $v_{i_0+1} = v_n$ , nous considérons deux possibilités. Si  $d(u, v_{i_0}) \neq 2$ , Alice peut colorier avec la couleur  $\bar{d}$ , le sommet adjacent à  $u$  qui est entre  $u$  et  $v_{i_0}$ . Le jeu est maintenant équivalent au jeu sur les deux composantes  $P(d(v_1, u) + 1, a, d)$  et  $P(d(u, v_{i_0}) + 1, \bar{d}, b, c)$ . Comme dans cette dernière composante les sommets coloriés  $b$  et  $c$  sont adjacents et que  $d(u, v_{i_0}) + 1 \neq 5$ , celle-ci est différente de  $B_1$  et  $B_2$ . Nous concluons comme avant. Si  $d(u, v_{i_0}) = 2$ , Alice choisit de colorier le sommet adjacent à  $u$  qui est entre  $v_1$  et  $u$  avec la couleur  $\bar{d}$  (si un tel sommet n'existe pas, c'est que  $n = 5$  et Alice termine alors le jeu en jouant entre  $u$  et  $v_{i_0}$ ). Le jeu est maintenant équivalent au jeu sur les composantes  $P(d(v_1, u), a, \bar{d})$  et  $P(4, d, b, c)$ , ce qui nous permet de conclure.

**Cas 2.2 :**  $d(u, v_{i_0}) = 4$ . Alice colorie  $v_{i_0-2}$  avec la couleur  $b$ . D'après la Proposition 2.8 et la Proposition 2.9, le jeu est maintenant équivalent au jeu sur trois composantes de la forme,  $P_{i_0-2,a,d,b}$ ,  $P_{n-i_0+1,b,c}$  et un sommet isolé  $v_{i_0-1}$ . Puisque  $d(u, v_{i_0-2}) = 2$ , nous avons que  $P_{i_0-2,a,d,b} \neq B_1, B_2$ . Par induction, cette composante est une 2-A-position. Le sommet isolé est bien sûr une 2-A-position, et d'après le Lemme 2.10, c'est aussi le cas de  $P_{n-i_0+1,b,c}$ .

**Case 2.3 :**  $d(u, v_{i_0}) = 3$ . Alice répond en coloriant  $v_{i_0-1}$  avec  $\bar{b}$ . Le jeu est alors équivalent au jeu sur deux composantes de la forme  $P_{i_0-1,a,d,\bar{b}}$  et  $P_{n-i_0+1,b,c}$ . Puisque  $d(u, v_{i_0-1}) = 2$ , nous avons que  $P_{i_0-1,a,d,\bar{b}} \neq B_1, B_2$ . Par induction, cette composante est une 2-A-position. D'après le Lemme 2.10,  $P_{n-i_0+1,b,c}$  est aussi une telle position pour le jeu fort.  $\square$

Nous sommes prêts à démontrer notre résultat concernant les cycles.

**Théorème 2.13.** *Si  $n \geq 3$ , alors  $\chi_g^{(1)}(C_n) = 2$ .*

*Démonstration.* Pour  $n = 3, 4, 5$ , une simple analyse de cas donne une stratégie gagnante pour Alice avec deux couleurs, lorsqu'elle commence. Supposons que  $n \geq 6$ . Alice commence en coloriant un sommet  $v$  avec la couleur 1. Soit  $u$  le sommet choisi par Bob et  $b$  la couleur qu'il utilise. Nous distinguons deux cas.

**Cas 1 :**  $u$  est adjacent à  $v$ . Considérons alors la couleur de  $u$ .

**Cas 1.1 :**  $b \neq 1$ . Le jeu est donc équivalent au jeu sur un chemin de type  $P_{n,1,2}$ , qui est, d'après le Lemme 2.10, une 2-A-position.

**Cas 1.2 :**  $b = 1$ . Alice colorie le voisin non-colorié de  $u$ , notons le  $w$ , avec la couleur 2. Le jeu est alors équivalent au jeu sur  $P_{n,1,1,2}$ , qui n'est ni  $B_1$  ni  $B_2$ . En effet,  $d(u, w) \geq 4$  et  $d(u, v) = 1$ . D'après le Lemme 2.12, c'est une 2-A-position.

**Cas 2 :**  $u$  n'est pas adjacent à  $v$ . Alice répond en coloriant avec 2 un sommet adjacent à  $v$  et non-adjacent à  $u$ , de sorte que le jeu est maintenant équivalent au jeu sur  $P_{n,2,b,1}$ . Cette dernière configuration est différente de  $B_1$  et  $B_2$ , puisque les

deux extrémités ont des couleurs différentes. D'après le Lemme 2.12, nous concluons que nous avons une 2-A-position.  $\square$

## 2.2 Le jeu sur les forêts

Dans cette partie, nous étudions le jeu de coloration 1-impropre sur les arbres. Dans la première sous-partie, nous utilisons la stratégie d'activation de Faigle pour donner une borne supérieure générale valant 3. Puis, nous montrons que cette borne est serrée en exhibant une famille de chenilles de degré maximum 3 pour lesquelles  $\chi_g^{(1)} = 3$ .

### 2.2.1 Pour les forêts trois couleurs suffisent

Rappelons que dans [36], Faigle *et al.* ont montré que  $\text{col}_g(F) \leq 4$  et donc que  $\chi_g(F) \leq 4$ , pour n'importe quelle forêt  $F$ . De plus certaines forêts nécessitent vraiment 4 couleurs et ce même si nous ne considérons que des forêts de degré maximum 3 [33]. Nous prouvons maintenant, que dans le cas du jeu de coloration 1-impropre, la stratégie d'activation utilisée pour obtenir ce résultat conduit à une borne supérieure de 3, pour les forêts en général. Le même résultat est déjà démontré dans [23], pour le jeu de coloration  $d$ -impropre, avec  $d \geq 1$ . Nous donnons ici notre version de la preuve étendue à la variante forte du jeu de coloration 1-impropre. Ce sera également l'occasion d'explicitier un exemple de stratégie d'activation.

**Théorème 2.14.** *Tout arbre  $T$  est une 3-A-position pour le jeu de coloration 1-impropre fort.*

*Démonstration.* Supposons d'abord qu'Alice commence. Elle colorie un sommet arbitraire  $r$  que nous appelons la *racine*. Chaque autre sommet  $v$  de  $T$  possède exactement un voisin à distance plus petite que lui de la racine. Comme d'habitude, ce voisin sera appelé le parent de  $v$ .

Voici un algorithme définissant la stratégie d'Alice. Nous y définissons récursivement l'ensemble des sommets activés  $Ac$  et initialisons tout de suite  $Ac := \{r\}$ . Lorsque Bob colorie un sommet  $u \in V(T)$  durant la partie, Alice considère l'unique chemin  $P$  entre  $r$  et  $u$  et considère  $w$  le sommet de  $P$  le plus proche de  $r$  qui n'est pas activé. L'algorithme procède ensuite comme suit.

- i) Alice met à jour  $Ac$ ,  $Ac := Ac \cup P$ .
- ii) Si  $w$  n'est pas colorié, Alice le colorie avec une couleur disponible pour ce sommet.
- iii) Si  $w$  est colorié et qu'il existe au moins un sommet activé non colorié, elle en colorie un.

- iv) Si  $w$  est colorié ainsi que tous les autres sommets de  $Ac$ , Alice colorie un sommet  $x$  adjacent à un sommet de  $Ac$  et met à jour  $Ac := Ac \cup \{x\}$ .

Si Bob passe son tour, Alice joue selon l'item *iii*) ou *iv*) selon s'il y a ou non des sommets non coloriés dans  $Ac$ .

Soient  $v_1, \dots, v_k$  tous les voisins de  $v \in V(T)$ , sauf son parent. Soient  $T_1(v), \dots, T_k(v)$  les sous-arbres maximaux contenant respectivement  $v_i$  mais pas  $v$ . Nous pouvons vérifier simplement les affirmations suivantes par induction sur le nombre de tours.

- a) Pour tout sommet  $v$  non activé (et donc non colorié), aucun des  $T_i(v)$  ne contient un sommet colorié.
- b) Pour n'importe quel sommet  $v$  activé et non colorié, au plus un des sous-arbres  $T_1(v), \dots, T_k(v)$  contient des sommets coloriés.

L'affirmation a) implique que tant que des sommets non activés existent, le jeu peut continuer. L'affirmation b) implique alors que tant que l'arbre n'est pas totalement colorié, Bob peut jouer. En suivant cette stratégie pour Alice, le jeu ne peut donc s'arrêter qu'au tour de celle-ci, lorsqu'elle a à colorier un sommet de  $Ac$ . L'affirmation b) implique qu'au tour d'Alice un sommet non colorié  $v$  possède au plus trois voisins coloriés. De plus, au plus deux de ses voisins peuvent être saturés. En effet, si trois voisins de  $v$  sont coloriés, cela veut dire que Bob vient de jouer un voisin  $u$  dans un des sous-arbres  $T_i(v)$  qui ne possédait jusqu'alors aucun sommet colorié. Ce sommet  $u$  ne peut donc être saturé. Finalement, avec trois couleurs Alice peut toujours suivre sa stratégie qui est donc gagnante.

Pour finir considérons le cas où Bob commence. Nous avons vu précédemment que tous les premiers coups sont optimaux pour Alice lorsqu'elle commence. Elle n'a donc qu'à prétendre que c'est elle qui a fait le premier coup, puis que Bob a passé. Elle peut maintenant suivre la même stratégie que précédemment.  $\square$

D'après la Proposition 2.6, nous en déduisons directement un résultat sur les forêts.

**Théorème 2.15.** *Si  $F$  est une forêt, alors  $\chi_g^{(1)}(F) \leq 3$ .*

He et al. ont montré dans [47] que pour le jeu de coloration 2-impropre, 2 couleurs suffisent pour les forêts.

**Théorème 2.16.** [He et al. [47] (2003).] *Pour toute forêt  $F$ ,  $\chi_g^{(2)}(F) \leq 2$ .*

### 2.2.2 Les chenilles requièrent trois couleurs

Dans cette sous-partie, nous exhibons une famille de chenilles de degré maximum 3 qui atteignent la borne supérieure du Théorème 2.15. Nous définissons la classe  $Cat_3$  comme étant la classe des chenilles dont tous les sommets sont soit de degré 1 soit de degré 3. Pour une telle chenille, nous dénotons par  $\{v_1, \dots, v_n\}$  l'ensemble des sommets de la colonne ( $v_2, \dots, v_{n-1}$  sont les sommets de degré 3) et par

$\{u_2, \dots, u_{n-1}\}$  l'ensemble des autres sommets (tous de degré 1). Nous considérons de plus que pour  $i \in \{2, \dots, n-2\}$ ,  $u_i$  est adjacent à  $v_i$ . Pour  $n$  fixé, il existe une unique chenille de  $Cat_3$  dont la colonne possède  $n$  sommets, nous la notons  $cat_3(n)$ . Notre objectif est de démontrer le résultat principal ci-dessous, qui énonce que la borne du Théorème 2.15 est serrée, même si nous nous restreignons à la classe  $Cat_3$ .

**Théorème 2.17.** *Si  $n \geq 86$ , la chenille  $cat_3(n)$  est une 2- $B_f$  position.*

Avant de démontrer ce résultat, nous devons introduire plusieurs concepts. Dans cette sous-partie, nous considérerons uniquement des 2-colorations. Si  $a \in \{1, 2\}$ ,  $\bar{a}$  désigne l'autre couleur. Si  $G|c$  est une chenille partiellement coloriée et  $H$  est un sous-chenille de  $G$ , nous dirons qu'un sommet de  $H$  est colorié  $a_s$ , avec  $a \in \{1, 2\}$ , s'il est colorié  $a$  et possède un voisin colorié  $a$  en dehors de  $H$ . Un sommet colorié  $a_s$  correspond donc à un sommet  $a$ -saturé. Nous dirons qu'une chenille partiellement coloriée  $G \in Cat_3$  possède une  $Cat_3(n, x, y)$  induite si elle possède une sous-chenille (induite) qui est isomorphe à  $cat_3(n)$ , et dont les sommets  $v_1$  et  $v_n$  sont respectivement coloriés  $x$  et  $y$ , avec  $x, y \in \{1, 2, 1_s, 2_s\}$ , et de plus tous les autres sommets de la sous-chenille ne sont pas coloriés. Similairement,  $G$  a une  $Cat_3(n, x, [y, z])$  induite si elle a une  $Cat_3(n, x, z)$  induite, avec la condition additionnelle que  $u_{n-1}$  est colorié  $y$ . Notons bien que dans ces définitions,  $v_i$  et  $u_i$  renvoient aux sommets de la sous-chenille et non à ceux de la chenille de base (voir Figure 2.3).

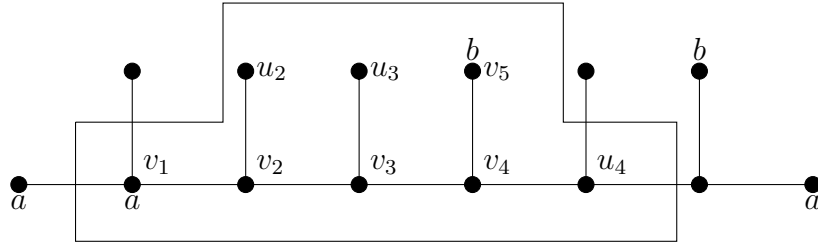


FIGURE 2.3 –  $Cat_3(5, a_s, b)$  induit.

Remarquons que toutes les feuilles  $u_i$  de la sous-chenille sont aussi des feuilles de la chenille de base, exception faite de  $u_2$  et  $u_{n-1}$  qui peuvent potentiellement appartenir à la colonne. De plus, si une extrémité, disons  $v_1$ , est saturée, alors  $u_2$  sera forcément une feuille dans la chenille d'origine. Cette remarque est importante pour deux raisons. Premièrement, nous savons que les seuls sommets de la sous-chenille qui ont potentiellement des voisins coloriés en dehors de celle-ci sont  $v_1$ ,  $v_n$ ,  $u_2$  et  $u_{n-1}$ . Deuxièmement, quand nous prendrons en compte les coups joués à l'extérieur de la sous-chenille, nous saurons qu'ils ne pourront affecter que ces mêmes quatre sommets.

Dans la remarque suivante, nous introduisons une stratégie que Bob peut utiliser dans une chenille  $Cat_3$  pour forcer Alice à saturer un sommet de la colonne. Nous définissons  $\mathcal{F}$  comme étant le graphe partiellement colorié de la Figure 2.4.

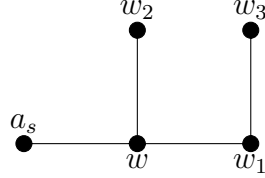


FIGURE 2.4 – Le sous-graphe  $\mathcal{F}$

**Proposition 2.18.** *Soit  $G|c$  un graphe partiellement colorié ayant un sous-graphe induit isomorphe à  $\mathcal{F}$ , de sorte que  $w_1, w_2, w_3$  n'aient pas de voisins coloriés  $\bar{a}$ . Alors, en coloriant  $w_1$  avec  $\bar{a}$ , Bob force Alice à répondre immédiatement en coloriant  $w$  avec  $\bar{a}$ .*

*Démonstration.* Si Alice ne répond pas de la sorte, Bob gagne immédiatement en coloriant  $w_2$  ou  $w_3$  (au moins l'un des deux n'est pas colorié) avec  $\bar{a}$ . Notons que l'hypothèse que  $w_1, w_2$  et  $w_3$  n'ont pas de voisins coloriés sert à assurer que les coups de Bob sont bien valides.  $\square$

Maintenant, nous énonçons plusieurs lemmes, exposant certaines colorations de chenilles  $Cat_3$  qui sont en faveur de Bob.

**Lemme 2.19.** *Une chenille partiellement coloriée  $G \in Cat_3$  qui a une  $Cat_3(4, a_s, a_s)$  induite est une 2-B-position.*

*Démonstration.* Soit  $G'$  une  $Cat_3(4, a_s, a_s)$  induite de  $G$ . Puisque  $v_1$  et  $v_4$  sont saturés,  $u_2$  et  $u_3$  n'ont pas de voisins en dehors de  $G'$ . Ainsi, quel que soit le joueur qui commence, Bob peut s'assurer que soit  $u_2$  soit  $u_3$  reçoivent la couleur  $\bar{a}$ , avant que  $v_2$  et  $v_3$  ne soient tous deux coloriés. Puisque ces deux derniers sommets doivent être coloriés avec  $\bar{a}$ , Bob gagne.  $\square$

**Lemme 2.20.** *Une chenille partiellement coloriée  $G \in Cat_3$  qui possède une  $Cat_3(5, a_s, \bar{a}_s)$  induite est une 2-B-position.*

*Démonstration.* Soit  $G'$  une  $Cat_3(5, a_s, \bar{a}_s)$  induite de  $G$ . Premièrement, supposons que Bob commence. Il colorie  $u_2$  avec  $\bar{a}$ . Maintenant Alice doit répondre en jouant  $v_2$  ou  $v_3$ . Autrement, Bob coloriera  $v_3$  avec  $\bar{a}$  et  $v_2$  ne pourra plus être colorié. Si elle choisit  $v_2$ , elle doit le colorier avec  $\bar{a}$  et nous avons maintenant une  $Cat_3(4, a_s, a_s)$  induite. D'après le Lemme 2.19 Bob gagne. Si elle colorie  $v_3$  avec  $\bar{a}$ ,  $v_2$  ne pourra plus être colorié. Ainsi, le seul choix qui lui reste est de colorier  $v_3$  avec  $a$ . Bob répond en coloriant  $u_3$  avec  $a$  et gagne, car  $v_4$  est maintenant incolorable.

Deuxièmement, Alice commence. Puisque  $v_1$  et  $v_5$  sont saturés,  $u_2$  et  $u_4$  n'ont pas de voisins hors de  $G'$ . Donc, si elle joue en dehors de  $G'$ , cela n'affecte pas les sommets de  $G'$  et comme nous venons de le voir Bob gagne. Si elle joue sur  $v_2$  ou  $v_4$ , elle doit respectivement utiliser la couleur  $\bar{a}$  et  $a$ . Bob répond en coloriant la feuille attachée avec la même couleur. Cela laisse soit une  $Cat_3(4, \bar{a}_s, \bar{a}_s)$  induite soit une  $Cat_3(4, a_s, a_s)$  induite. Une fois de plus, Bob gagne d'après le Lemme 2.19. Si au contraire Alice décide de jouer sur  $v_3$ , Bob joue la même couleur sur  $u_3$  et soit  $v_2$  soit  $v_4$  devient incolore. Similairement, quand Alice joue sur  $u_3$ , Bob colorie  $v_3$  avec la même couleur. Le dernier cas à considérer est quand elle colorie  $u_2$  ou  $u_4$ , disons  $u_2$ . Elle doit choisir la couleur  $a$ , car sinon Bob gagne en coloriant  $v_3$  avec  $\bar{a}$ . La réponse de Bob est alors de colorier  $u_3$  avec  $\bar{a}$ . Si Alice ne répond pas en jouant  $v_2$  ou  $v_3$ , Bob coloriera  $v_3$  avec  $\bar{a}$  et  $v_2$  sera incolore. Pour  $v_3$ , elle peut utiliser la couleur  $a$ , mais dans ce cas Bob coloriera  $u_4$  avec  $a$  et  $v_4$  deviendra incolore. Pour  $v_2$ , elle peut seulement utiliser la couleur  $\bar{a}$ . Bob coloriera alors  $u_4$  avec  $a$ . Dans cette situation,  $v_3$  et  $v_4$  doivent tous deux être coloriés avec  $a$ , ce qui est impossible.  $\square$

**Lemme 2.21.** *Si  $n \geq 5$ , une chenille partiellement coloriée  $G \in Cat_3$  qui possède une  $Cat_3(n, a_s, b_s)$  induite est une 2- $B_f$ -position.*

*Démonstration.* Soit  $G'$  une  $Cat_3(n, a_s, b_s)$  induite de  $G$ . Nous procédons par induction sur  $n$ . Considérons le premier cas de base,  $n = 5$ . Si  $a \neq b$ , nous concluons directement avec le Lemme 2.20. Si  $a = b$ , le premier coup de Bob consiste à colorier  $v_3$  avec  $\bar{a}$ . Les sommets  $v_2$  et  $v_4$  doivent tous deux être coloriés  $\bar{a}$ , ce qui est maintenant impossible.

Considérons maintenant que  $n = 6$ . Si  $a \neq b$ , Bob colorie  $v_3$  avec  $\bar{a}$ . Cela force Alice à jouer  $\bar{a}$  sur  $v_2$ , laissant une  $Cat_3(4, \bar{a}_s, \bar{a}_s)$  induite. Bob gagne alors d'après le Lemme 2.19. Si  $a = b$ , Bob colorie  $u_2$  avec  $\bar{a}$  et Alice a maintenant deux options pour empêcher Bob de gagner au coup d'après. La première est de colorier  $v_2$  avec  $\bar{a}$ , ce qui laisse une  $Cat_3(5, \bar{a}_s, a_s)$  induite. Dans ce cas, elle perd d'après le Lemme 2.20. La seconde est de colorier  $v_3$  avec  $a$ . Dans ce cas, Bob colorie  $u_3$  avec  $a$  et laisse une  $Cat_3(4, a_s, a_s)$  induite, ce qui est gagnant pour lui quel que soit le joueur qui commence (Lemme 2.19).

Supposons donc que  $n \geq 7$ . Bob commence en coloriant  $v_3$  avec  $\bar{a}$ . D'après la Proposition 2.18, Alice doit colorier  $v_2$  avec  $\bar{a}$ , laissant ainsi une  $Cat_3(n-2, \bar{a}_s, b_s)$  induite. Par hypothèse d'induction cela implique que  $G$  est une 2- $B_f$ -position.  $\square$

**Lemme 2.22.** *Si  $n \geq 4$ , une chenille partiellement coloriée  $G \in Cat_3$  qui a une  $Cat_3(n, a_s, [\bar{a}, a])$  induite est une 2- $B_f$ -position.*

*Démonstration.* Soit  $G'$  une  $Cat_3(n, a_s, [\bar{a}, a])$  induite de  $G$ . La preuve est par induction sur  $n$ . Si  $n = 4$ , Bob colorie  $v_3$  avec  $\bar{a}$ , rendant  $v_2$  incolore. Si  $n = 5$ , Bob colorie  $v_4$  avec  $a$  et laisse une  $Cat_3(4, a_s, a_s)$  induite. D'après le Lemme 2.19, il gagne. Si  $n \geq 6$ , Bob colorie  $v_3$  avec  $\bar{a}$ . D'après la Proposition 2.18, Alice doit

colorier  $v_2$  avec  $\bar{a}$ , laissant une  $Cat_3(n-2, \bar{a}_s, [\bar{a}, a])$  induite. Nous concluons par induction que  $G$  est une 2- $B_f$ -position.  $\square$

**Lemme 2.23.** *Si  $n \geq 6$ , une chenille partiellement coloriée  $G \in Cat_3$  qui a une  $Cat_3(n, a_s, b)$  induite est une 2- $B_f$ -position.*

*Démonstration.* Soit  $G'$  une  $Cat_3(n, a_s, b)$  induite de  $G$ . Nous procédons par induction sur  $n$ . Commençons avec  $n = 6$ . Si  $a \neq b$ , Bob colorie  $v_5$  avec  $\bar{a}$  et laisse une  $Cat_3(5, a_s, \bar{a}_s)$  induite. D'après le Lemme 2.20, il gagne. Si  $a = b$ , Bob colorie  $v_3$  avec  $\bar{a}$ , ce qui force Alice à colorier  $v_2$  avec  $\bar{a}$ . Bob répond en coloriant  $v_5$  avec  $a$ , rendant  $v_4$  incolorable.

Considérons maintenant que  $n = 7$ . Si  $a \neq b$ , Bob colorie  $v_3$  avec  $\bar{a}$  et force Alice à jouer la couleur  $\bar{a}$  sur  $v_2$ . Bob répond en coloriant  $v_6$  avec  $\bar{a}$ , laissant une  $Cat_3(4, \bar{a}_s, \bar{a}_s)$  induite. Il gagne alors d'après le Lemme 2.19. Quand  $a = b$ , le voisin potentiellement colorié de  $u_6$  a une influence sur la stratégie de Bob. Nous considérons d'abord que  $u_6$  n'a pas de voisins  $a$ -saturés en dehors de  $G'$ . Bob colorie  $v_5$  avec  $\bar{a}$ . Si Alice colorie  $u_5$  ou  $v_6$  avec  $\bar{a}$ , elle laisse une  $Cat_3(5, a_s, \bar{a}_s)$  induite, ce qui induit, d'après le Lemme 2.20, que le jeu est maintenant une 2-B-position. Supposons donc qu'elle joue un autre coup. Si ce coup est de colorier  $v_4$  avec  $\bar{a}$ , alors Bob gagne en coloriant  $u_6$  avec  $a$  (ce qui est possible car nous avons supposé que  $u_6$  n'a pas de voisins  $a$ -saturés). Supposons donc qu'elle ne joue pas non plus ce coup. Dans ce cas, Bob peut colorier soit  $u_5$  soit  $v_6$  avec  $\bar{a}$  et ainsi créer une  $Cat_3(5, a_s, \bar{a}_s)$  induite, dans laquelle au plus un coup a été fait par Alice. Il y a alors deux cas à traiter.

**Cas 1 :** Le premier coup d'Alice était à l'intérieur de  $Cat_3(5, a_s, \bar{a}_s)$ . Cela implique que  $v_6$  n'est pas colorié. Elle doit jouer soit  $v_6$  soit  $u_6$ , car sinon Bob peut gagner en coloriant  $u_6$  (qui n'a pas de voisins  $a$ -saturés) avec  $a$ . Ainsi, au tour de Bob, nous avons une  $Cat_3(5, a_s, \bar{a}_s)$  induite dans laquelle un coup a été joué précédemment. Puisqu'une  $Cat_3(5, a_s, \bar{a}_s)$  induite implique d'être une 2-B-position (voir Lemme 2.20), Bob gagne.

**Cas 2 :** Le premier coup d'Alice était en dehors de  $Cat_3(5, a_s, \bar{a}_s)$ . Nous avons donc une  $Cat_3(5, a_s, \bar{a}_s)$  induite. Le jeu est donc dans une 2-B-position, et Bob gagne même si c'est actuellement le tour d'Alice.

Il reste à analyser le jeu quand  $u_6$  a un voisin  $a$ -saturé. Le premier coup de Bob est maintenant de colorier  $v_6$  avec  $\bar{a}$ . Alice doit empêcher que  $u_6$  ne devienne incolorable après le prochain coup de Bob. Pour ce faire, soit elle colorie  $u_6$  avec  $\bar{a}$ , ce qui ne l'empêche pas de perdre car elle laisse une  $Cat_3(6, a_s, \bar{a}_s)$  induite (voir Lemme 2.21), soit elle empêche Bob de colorier  $v_5$  avec  $\bar{a}$  au prochain tour. Pour cela elle doit absolument choisir l'une des réponses suivantes.

**Cas 1 :** Alice colorie  $v_5$ . Si elle choisit la couleur  $\bar{a}$ , elle laisse une  $Cat_3(5, a_s, \bar{a}_s)$  induite, et perd d'après le Lemme 2.20. Si elle choisit la couleur  $a$ , Bob répond en coloriant  $v_4$  avec  $a$  et gagne d'après le Lemme 2.19.

**Cas 2 :** Alice colorie  $v_4$  avec  $\bar{a}$ . Bob gagne alors en coloriant  $v_3$  avec la même couleur.



**Cas 3 :** Alice colorie  $u_5$  avec  $\bar{a}$ . Bob répond en coloriant  $v_4$  avec la couleur  $a$ . Alice doit répondre en coloriant  $v_5$  avec  $a$ , sinon Bob peut rendre ce sommet incolorable en jouant la couleur  $a$  soit sur  $u_4$  soit sur  $v_3$ . Mais en faisant cela, elle laisse une  $Cat_3(4, a_s, a_s)$  induite, ce qui est perdant pour elle d'après le Lemme 2.19.

Supposons maintenant que  $n \geq 8$ . Bob colorie  $v_3$  avec  $\bar{a}$ . D'après la Proposition 2.18, Alice est obligée de colorier  $v_2$  avec  $\bar{a}$ . Cela laisse une  $Cat_3(n-2, \bar{a}_s, b)$  induite et nous concluons par induction.  $\square$

**Lemme 2.24.** *Soient  $x, y, z \in \{1, 1_s, 2, 2_s\}$  tels que sans l'indice  $s$ ,  $y$  et  $z$  correspondent à la même couleur. Si  $n \geq 8$ , une chenille partiellement coloriée  $G \in Cat_3$  qui possède une  $Cat_3(n, x, [y, z])$  induite est une 2- $B_f$ -position.*

*Démonstration.* Soit  $G'$  une  $Cat_3(n, x, [y, z])$  induite de  $G$ , où  $x, y$  et  $z$  sont comme dans l'énoncé. Bob commence en coloriant  $v_{n-2}$  avec l'autre couleur que celle correspondant à  $y$  et  $z$ , disons  $a \in \{1, 2\}$ . Alice doit ensuite colorier  $v_{n-1}$  avec  $a$ , car autrement Bob peut colorier  $u_{n-2}$  ou  $v_{n-3}$  avec  $a$  et rendre  $v_{n-1}$  incolorable. Mais en coloriant  $v_{n-1}$  avec  $a$ , Alice laisse une  $Cat_3(n-2, x, a_s)$  induite avec  $n-2 \geq 6$ . D'après le Lemme 2.23 (si  $x \in \{1, 2\}$ ) ou le Lemme 2.21 (si  $x \in \{1_s, 2_s\}$ ), le jeu est maintenant dans une 2- $B_f$ -position.  $\square$

**Lemme 2.25.** *Si  $n \geq 8$ , une chenille partiellement coloriée  $G \in Cat_3$  qui possède une  $Cat_3(n, a_s, b)$  induite, avec exactement une feuille  $u_i \notin \{u_{n-6}, \dots, u_{n-1}\}$  coloriée, est une 2- $B_f$ -position.*

*Démonstration.* Soit  $G'$  une  $Cat_3(n, a_s, b)$  induite de  $G$ , ayant exactement une feuille  $u_i \notin \{u_{n-6}, \dots, u_{n-1}\}$  qui est coloriée. Nous procédons par induction sur  $n$ . Pour  $n = 8$ , il n'y a pas de feuille supplémentaire coloriée et nous concluons donc directement avec le Lemme 2.23. Si  $n \geq 9$ , le premier coup de Bob est de colorier  $v_3$  avec  $\bar{a}$ . Si  $u_2$  ou  $u_3$  est colorié avec  $\bar{a}$ , il gagne immédiatement. Sinon Alice doit répondre en coloriant  $v_2$  avec  $\bar{a}$ . En effet, quelle que soit la feuille supplémentaire coloriée, si elle ne joue pas ainsi, au moins l'un des sommets  $u_2, u_3, v_4$  pourra être colorié  $\bar{a}$  par Bob et  $v_2$  deviendra incolorable. Si  $u_i \in \{u_2, u_3\}$ , elle laisse ainsi une  $Cat_3(n-2, \bar{a}_s, b)$  induite sans feuille supplémentaire coloriée. Nous concluons grâce au Lemme 2.23. Sinon, elle laisse une  $Cat_3(n-2, \bar{a}_s, b)$  induite vérifiant la condition additionnelle sur la feuille coloriée supplémentaire. Notons que dans ce cas  $n \geq 10$  et nous pouvons conclure par induction.  $\square$

**Lemme 2.26.** *Si  $n \geq 19$ , une chenille partiellement coloriée  $G \in Cat_3$  qui possède une  $Cat_3(n, a, b)$  induite est une 2- $B_f$ -position.*

*Démonstration.* Soit  $G'$  une  $Cat_3(n, a, b)$  induite de  $G$ . Le premier coup de Bob est de colorier une feuille  $u_i$ , où  $i \in \{10, \dots, n-9\}$ , avec une couleur arbitraire  $c$ . Supposons d'abord qu'Alice réponde en dehors de  $G'$ . Alors Bob colorie  $v_i$  avec  $c$ . Si le coup d'Alice n'a pas saturé l'une des extrémités de  $G'$ , nous avons maintenant

une  $Cat_3(i, a, c_s)$  et une  $Cat_3(n - i + 1, c_s, b)$  induites. L'un ou l'autre implique que le jeu est dans une 2-B<sub>f</sub>-position (voir Lemme 2.23). Quel que soit le prochain coup d'Alice, l'une de ces sous-chenilles restera inchangée. Ainsi Bob gagne même si c'est actuellement le tour d'Alice. Si l'une des extrémités de  $G'$ , disons celle coloriée  $a$ , a été saturée par le coup d'Alice, nous avons une  $Cat_3(i, a_s, c_s)$  induite et une  $Cat_3(n - i + 1, c_s, b)$  induite. La première implique aussi que le jeu est une 2-B<sub>f</sub>-position (voir Lemme 2.21), et nous concluons comme avant.

Supposons donc qu'Alice joue son premier coup dans  $Cat_3(n, a, b)$  en coloriant avec  $d$  un sommet  $w$ . Par symétrie, nous pouvons considérer que  $w$  appartient à  $\{u_2, v_2, \dots, u_{i-1}, v_{i-1}, v_i\}$ .

**Cas 1 :**  $w \in \{u_6, v_6, \dots, u_{i-1}, v_{i-1}, v_i\}$ . Si  $w \neq v_i$ , Bob répond en créant une arête  $u_j v_j$  ayant ses deux extrémités  $d$ -saturées, où  $j$  est la position où Alice a joué. Cela laisse une  $Cat_3(m, a, d_s)$  induite, avec  $m \geq 6$ . D'après le Lemme 2.23 cela implique que le jeu est dans une 2-B<sub>f</sub>-position. Cela laisse aussi une  $Cat_3(l, d_s, b)$  induite, avec  $l \geq 8$  et exactement une feuille coloriée respectant la condition du Lemme 2.25. Ceci implique aussi que le jeu est dans une 2-B<sub>f</sub>-position (voir Lemme 2.25). Comme le prochain coup d'Alice ne pourra pas affecter ces deux sous-chenilles à la fois, Bob gagne même si c'est maintenant au tour de celle-ci.

Supposons maintenant que  $w = v_i$ . Si  $d = c$ , nous sommes dans une situation identique à celle obtenue après la réponse de Bob quand Alice a joué en dehors de  $G'$ . Si  $d \neq c$ , Bob colorie un voisin de  $w$  avec  $d$  et nous concluons comme précédemment.

**Cas 2 :**  $w \in \{u_3, v_3, u_4, v_4, u_5, v_5\}$ . Dans ce cas, le coup de Bob consiste à colorier  $v_i$  avec  $c$ . Maintenant, nous avons une  $Cat_3(l, c_s, d)$  induite, avec  $l \geq 6$ , et une  $Cat_3(m, c_s, b)$  induite, avec  $m \geq 6$ . Les deux impliquent que le jeu est dans une 2-B<sub>f</sub>-position (voir Lemme 2.23).

**Cas 3 :**  $w \in \{u_2, v_2\}$ . Premièrement, considérons que  $w = u_2$ . Si  $d = a$ , nous avons une  $Cat_3(i+1, c, [a, a])$  induite, ce qui implique que le jeu est dans une 2-B<sub>f</sub>-position, d'après le Lemme 2.24. Puisque c'est au tour de Bob, il gagne. Si  $d = \bar{a}$ , Bob colorie  $v_i$  avec  $c$ , ce qui laisse une  $Cat_3(i, c_s, [a, \bar{a}])$  induite et une  $Cat_3(n-i+1, c_s, b)$  induite. Les deux impliquent que le jeu est dans une 2-B<sub>f</sub>-position, d'après les Lemme 2.22 et 2.23. Alice perd donc dans ce cas aussi. Finalement, considérons que  $w = v_2$ . Si  $d = a$ , elle laisse une  $Cat_3(i, a_s, c)$  induite, donc elle perd (voir Lemme 2.23). D'un autre côté, si  $d = \bar{a}$ , Bob colorie  $v_i$  avec  $c$  et nous avons maintenant une  $Cat_3(i-1, c_s, \bar{a})$  induite et une  $Cat_3(n-i+1, c_s, b)$  induite. Une fois encore, le Lemme 2.23 affirme que c'est suffisant pour que Bob gagne.  $\square$

**Lemme 2.27.** *Si  $n \geq 23$ , une chenille partiellement coloriée  $G \in Cat_3$  qui possède une  $Cat_3(n, a_s, b)$  induite est une 2-B-position.*

*Démonstration.* Soit  $G'$  une  $Cat_3(n, a_s, b)$  induite de  $G$ . D'après le Lemme 2.23,  $G$  est une 2-B<sub>f</sub>-position; nous n'avons donc qu'à considérer le cas où Alice commence. Alice ne peut pas jouer un coup en dehors de  $G'$  qui n'affecterait pas les sommets

de  $G'$ . En effet, sinon comme rappelé au dessus, Bob gagne. Ainsi, si elle joue en dehors de  $G'$ , elle doit jouer un voisin de  $v_n$ , afin de saturer ce sommet. Dans ce cas, elle laisse une  $Cat_3(n, a_s, b_s)$  induite, qui implique que le jeu est dans une 2-B $_f$  position, par le Lemme 2.21.

Supposons donc que son premier coup est bien dans  $Cat_3(n, a_s, b)$ . Nous notons  $w$  le sommet qu'elle choisit et  $c$  la couleur qu'elle utilise.

**Cas 1 :**  $w \in \{u_3, v_3, \dots, u_{n-2}, v_{n-2}\}$ . Elle va laisser soit une  $Cat_3(l, a_s, c)$  induite, avec  $l \geq 6$ , soit une  $Cat_3(k, c, b)$  induite, avec  $k \geq 19$ . D'après le Lemme 2.23 et 2.26, les deux impliquent que le jeu est dans une 2-B $_f$ -position au début du tour de Bob.

**Cas 2 :**  $w = v_2$ . Dans ce cas  $c = \bar{a}$ , car  $v_1$  est  $a$ -saturé. La chenille  $G$  a donc maintenant une  $Cat_3(n-1, \bar{a}, b)$  induite, il s'agit donc d'une 2-B $_f$ -position (voir Lemme 2.26).

**Cas 3 :**  $w = u_2$ . Si  $c = \bar{a}$ , alors Bob colorie  $v_3$  avec  $\bar{a}$  et rend  $v_2$  incolorable. Si  $c = a$ , nous avons une  $Cat_3(n, b, [a, a_s])$  induite, ce qui prouve que le jeu est dans une 2-B $_f$ -position, par le Lemme 2.24.

**Cas 4 :**  $w = v_{n-1}$ . Si  $c = b$ , Alice perd car elle vient de laisser une  $Cat_3(n-1, a_s, b_s)$  induite (Lemme 2.21). Si  $c = \bar{b}$ , Alice perd aussi car nous avons une  $Cat_3(n-1, a_s, \bar{b})$  induite (Lemme 2.23).

**Cas 5 :**  $w = u_{n-1}$ . Si  $c = \bar{b}$ , nous appliquons le Lemme 2.22. Sinon nous utilisons le Lemme 2.24.

□

Nous pouvons maintenant démontrer le Théorème 2.17.

*Démonstration du Théorème 2.17.* Soit  $v$  le premier sommet colorié par Alice et  $a$  la couleur utilisée. Bob peut toujours trouver un sommet  $u$  pour lequel  $d(v, u) = 43$ . Il colorie ce sommet avec une couleur arbitraire  $b$ , laissant une  $Cat_3(44, a, b)$  induite,  $G'$ .

Supposons d'abord qu'Alice ne réponde pas dans  $G'$  ou dans son voisinage. Dans ce cas elle perd par le Lemme 2.26. Si elle colorie un sommet dans le voisinage de  $G'$ , la seule manière d'interférer avec  $G'$  est de saturer l'une des extrémités, disons  $v$ . Dans ce cas,  $G$  possède maintenant une  $Cat_3(44, a_s, b)$  induite. D'après le Lemme 2.23, Bob gagne.

Supposons donc qu'Alice réponde dans  $G'$ . Si elle colorie  $u_2$  avec  $a$  ou  $u_{n-1}$  avec  $b$ , elle laisse respectivement une  $Cat_3(44, b, [a, a])$  induite ou une  $Cat_3(44, a, [b, b])$  induite. Les deux impliquent que le jeu est dans une 2-B $_f$ -position. Si Alice colorie  $u_2$  avec  $\bar{a}$  ou  $u_{n-1}$  avec  $\bar{b}$ , Bob colorie respectivement  $v_2$  avec  $\bar{a}$  et  $v_{n-1}$  avec  $\bar{b}$ , laissant ainsi une  $Cat_3(43, a_s, b)$  induite ou une  $Cat_3(43, b_s, a)$  induite. D'après le Lemme 2.27, les deux impliquent que Bob gagne. Pour n'importe quel autre coup d'Alice dans  $G'$ , disons  $v_i$  ou  $u_i$  colorié avec  $c$ , Bob répond de sorte que l'arête  $u_i v_i$  ait ses deux extrémités  $c$ -saturées. Maintenant  $G$  possède une  $Cat_3(i, c_s, a)$  induite et une  $Cat_3(44-i+1, c_s, b)$  induite. Soit  $i \geq 23$ , soit  $44-i+1 \geq 23$ , et à chaque

fois le Lemme 2.27 permet de conclure que le jeu est dans une 2-B-position.

En conclusion, Bob peut dans tous les cas obtenir la victoire sur  $G$  si seules deux couleurs sont autorisées.  $\square$

## 2.3 Conclusion et perspectives du chapitre

Dans ce chapitre nous avons étudié une variante du nombre chromatique ludique, le nombre chromatique ludique 1-impropre, défini de manière analogue excepté que la coloration construite au cours du jeu ne doit être qu'1-impropre.

Nous avons commencé par étudier le lien entre  $\chi_g$  et  $\chi_g^{(1)}$ . Il se trouve que de manière contre-intuitive,  $\chi_g^{(1)}$  ne peut être borné supérieurement par aucune fonction de  $\chi_g$ . En particulier, pour les graphes bipartis  $K_{n,n}$  ( $n \geq 2$ ),  $\chi_g(K_{n,n}) = 3$ , tandis que  $\chi_g^{(1)}(K_{n,n}) = n$ . De la même manière, nous pourrions montrer que  $\chi_g^{(d)}(K_{n,n}) = \lceil \frac{2n}{d} \rceil$ , pour tout  $d \geq 1$ . Il serait intéressant d'étudier le lien entre  $\chi_g^{(1)}$  et  $\chi_g^{(d)}$ , pour des valeurs de  $d$  strictement plus grandes que 1. Nous ne voyons *a priori* aucune raison pour que  $\chi_g^{(d)}$  soit toujours inférieur à  $\chi_g^{(1)}$ . Nous posons en particulier la question suivante.

**Question ouverte.** *Pouvons-nous trouver des graphes  $G$  pour lesquels  $\chi_g^{(2)}(G)$  est significativement plus grand que  $\chi_g^{(1)}(G)$  ?*

Il serait intéressant de chercher de manière réciproque, s'il existe une fonction  $F$  telle que  $\chi_g(G) \leq F(\chi_g^{(1)}(G))$ , pour tout graphe  $G$ . Cette question est motivée par le résultat suivant, issu du folklore :  $\chi(G) \leq 2\chi^{(1)}(G)$  et par le fait que nous n'avons pas d'exemples de graphes pour lesquels  $\chi_g(G)$  n'est pas du même ordre que  $\chi_g^{(1)}(G)$ .

Ensuite nous avons montré que  $\chi_g^{(1)}(P_n) = \chi_g^{(1)}(C_n) = 2$ , pour  $n \geq 3$ . Le nombre chromatique ludique des grilles en général est encore inconnu, tandis que pour les grilles toroïdales, nous savons que  $\chi_g(C_{2n} \square C_m) = 5$ , pour  $n \geq 3$  et  $m \geq 7$  (voir les travaux de Raspaud et Wu [75]). Il serait intéressant de voir ce qu'il en est pour le jeu de coloration 1-impropre. Peut-être est-ce plus facile d'obtenir la valeur exacte ?

Pour finir nous nous sommes consacrés aux forêts. Il était déjà connu que  $\chi_g(F) \leq 3$ , pour toute forêt  $F$  et que cette borne est serrée. Notre travail a consisté à montrer que la borne reste optimale même si nous nous restreignons aux chenilles de degré maximum 3. Rappelons que pour une forêt  $F$ ,  $\chi_g(F) = 3, 4$ , sauf si  $F$  ne contient que des composantes d'ordre inférieur ou égal à 3 et dans ce cas  $\chi_g(F) \leq 2$ . Dunn et al. proposent dans [33] un algorithme polynomial pour déterminer si le nombre chromatique ludique d'une forêt n'ayant pas de sommets de degré 3 est égal à 3 ou 4. Cependant la complexité du problème sur les arbres reste ouverte lorsque des sommets de degré 3 sont autorisés. De la même manière, nous savons que pour une

forêt  $F$ ,  $\chi_g^{(1)}(F) = 2, 3$ , sauf si toutes les composantes de  $F$  sont de taille inférieure ou égale à 2 et dans ce cas  $\chi_g^{(1)}(F) = 1$ . Nous posons donc la question suivante, qui sous-entend une caractérisation des forêts pour lesquelles  $\chi_g^{(1)} = 2$ .

**Question ouverte.** *Existe-t-il un algorithme polynomial pour le calcul du nombre chromatique ludique 1-impropre d'une forêt ?*

Pour les forêts, la stratégie d'activation utilisée pour le nombre chromatique ludique s'adapte immédiatement au jeu 1-impropre et donne une meilleure borne supérieure. De manière similaire, Chu et al. [23] démontrent que  $\chi_g^{(1)}(G) \leq 6$ , dès lors que  $G$  est un graphe planaire extérieur (alors que pour cette classe la meilleure borne supérieure connue sur  $\chi_g$  est 7). Pour d'autres classes de graphes où de telles stratégies sont utilisées, nous pourrions peut-être obtenir de meilleurs résultats pour le jeu de coloration 1-impropre. Par exemple, la borne supérieure de 17 pour les graphes planaires peut-elle être descendue si nous considérons la version 1-impropre ?

Pour terminer, nous soulevons une question qui nous semble pouvoir servir de fil rouge dans l'étude de ce jeu. Remarquons que pour tout graphe  $G$ ,  $\chi^{(1)}(G) \leq \Delta(G)$ . Nous ne pouvons donc pas trouver trivialement d'exemple de graphes pour lesquels  $\chi_g^{(1)} = \Delta + 1$ . Par exemple, il n'est pas difficile de se convaincre que  $\chi_g^{(1)}(K_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ .

**Question ouverte.** *Existe-t-il des graphes  $G$  pour lesquels  $\chi_g^{(1)}(G) = \Delta(G) + 1$  ?*

Pour répondre à cette question, il serait intéressant de regarder des exemples non-triviaux de graphes pour lesquels  $\chi_g = \Delta + 1$ . Par exemple, les grilles toroïdales  $\chi_g(C_{2n} \square C_m)$ , pour  $n \geq 3$  et  $m \geq 7$ , que nous avons déjà citées, ou encore les hypercubes, pour lesquels il est conjecturé que  $\chi_g(\mathcal{H}_n) = n + 1$ , conjecture qui est vérifiée pour  $n \leq 4$  [5].