# Composition d'informatique n°6

Corrigé et remarques

⋆⋆⋆

## Remarques

- Q3A. Attention à respecter les règles d'inférence autorisées par le sujet. En particulier, le raisonnement par l'absurde ne faisait pas partie de la liste des règles.
- Q6A. Il est préférable de trouver des arguments généraux au lieu de traiter chaque sommet un par un. Il faut bien se ramener à la définition qui considère les sommets accessibles (ou dire pourquoi on peut s'en passer).
- Q7A. Il faut considérer un sommet accessible depuis $u$, pas le sommet $u$ lui-même, pour prouver que $u \Vdash \neg(A \wedge \neg A)$.
- Q9A. Il est tout à fait acceptable de traiter le cas de $\vee$ et de dire que $\wedge$ se traite de la même manière (mais $\rightarrow$ doit être rédigé à part).
- Q9B. Il ne faut pas oublier le cas de base de $\perp$.
- Q10A. Il ne faut pas oublier de supposer $u \Vdash \Gamma$.
- Q10B. Il faut quantifier correctement les sommets considérés et expliciter les relations d'accessibilité.
- Q13A. Il est inutile (voire parfois faux) de faire des affaiblissements avant de conclure avec un axiome.
- Q16A. Pour le sens réciproque, le plus simple est de considérer la formule $A \vee A$.
- Q27A. Penser à utiliser $(\neg\neg_e)$ prouvé à la question 3.
- Q33A. On pourrait être tenté de faire un raisonnement en disant que seules les règles $(K)$ et $(N)$ contiennent le symbole $\Box$ en prémisse et/ou conclusion, mais d'autres règles peuvent faire apparaître $(\perp_e)$ ou disparaître $(\rightarrow_e)$ ce symbole. Cet argument est donc incorrect.

# 1 Sémantique de Kripke

## 1.1 Premières preuves

**Question 1** Il suffit de remarquer qu'elles correspondent à l'application de $\to_i$ et $\to_e$ dans le cas particulier où $B = \bot$.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\Gamma, A \vdash \bot$}
\RightLabel{$\to_i$}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash A \to \bot = \neg A$}
\end{prooftree}
\quad \text{et} \quad
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\Gamma \vdash A \to \bot$}
\AxiomC{$\Gamma \vdash A$}
\RightLabel{$\to_e$}
\BinaryInfC{$\Gamma \vdash \bot$}
\end{prooftree}
$$

**Question 2** On a la preuve suivante :

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{(ax)}
\UnaryInfC{$A \wedge \neg A \vdash A \wedge \neg A$}
\RightLabel{$\wedge_e$}
\UnaryInfC{$A \wedge \neg A \vdash A$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(ax)}
\UnaryInfC{$A \wedge \neg A \vdash A \wedge \neg A$}
\RightLabel{$\wedge_e$}
\UnaryInfC{$A \wedge \neg A \vdash \neg A$}
\RightLabel{$\neg_e$}
\BinaryInfC{$A \wedge \neg A \vdash \bot$}
\RightLabel{$\neg_i$}
\UnaryInfC{$\vdash \neg(A \wedge \neg A)$}
\end{prooftree}
$$

**Question 3** On a la preuve suivante :

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{(te)}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash A \vee \neg A$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(ax)}
\UnaryInfC{$\Gamma, A \vdash A$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(ax)}
\UnaryInfC{$\Gamma, \neg A \vdash \neg A$}
\AxiomC{$\Gamma \vdash \neg\neg A$}
\RightLabel{(aff)}
\UnaryInfC{$\Gamma, \neg A \vdash \neg\neg A$}
\RightLabel{$\neg_e$}
\BinaryInfC{$\Gamma, \neg A \vdash \bot$}
\RightLabel{$\bot_e$}
\UnaryInfC{$\Gamma, \neg A \vdash A$}
\RightLabel{$\vee_e$}
\TrinaryInfC{$\Gamma \vdash A$}
\end{prooftree}
$$

## 1.2 Modèle de Kripke

**Question 4** Si $u \Vdash \neg A$, alors $u \Vdash A \to \bot$. Or $u \preccurlyeq u$, donc par définition, si $u \Vdash A$, alors $u \Vdash \bot$. Mais par hypothèse, $u \nVdash \bot$, donc $u \nVdash A$.

La réciproque est fausse. En effet, dans le modèle $\textcircled{0} \longrightarrow \overset{x}{\textcircled{1}}$, on a $0 \nVdash x$, mais $0 \nVdash \neg x$, car $0 \preccurlyeq 1$ et $1 \Vdash x$.

**Question 5** Les sommets qui réalisent $\neg x_0$ sont ceux qui ne peuvent pas accéder à un sommet qui réalise $x_0$. Il n'y que les sommets 3 et 7 dans ce cas. On en déduit que les sommets qui réalisent $x_1 \vee \neg x_0$ sont $3, 5, 6$ et 7.

**Question 6** Le modèle $\mathcal{K}_3$ réalise $x_0 \to \neg x_1$ si et seulement si tout sommet qui réalise $x_0$ ne peut pas accéder à un sommet qui réalise $x_1$. C'est effectivement le cas, car 0 et 3 sont les seuls sommets qui réalisent $x_0$ et ne peuvent accéder qu'à eux mêmes, et ne réalisent pas $x_1$.

En revanche, $\mathcal{K}_3$ ne réalise pas $\neg x_0 \vee \neg x_1$, car le sommet 2 ne réalise pas $\neg x_0$ (car il peut accéder à 0 qui réalise $x_0$), ni $\neg x_1$ (car il peut accéder à 1 qui réalise $x_1$).

**Question 7** Soit $\mathcal{K} = (W, R, \Vdash)$ un modèle de Kripke intuitionniste et $u \in W$. Montrons que $u \Vdash \neg(A \wedge \neg A)$. Pour ce faire, considérons $v \in W$ tel que $u \preccurlyeq v$. Montrons que $v \nVdash A \wedge \neg A$.

En effet, si $v \Vdash A \wedge \neg A$, alors $v \Vdash A$ et $v \Vdash \neg A$. Or $v \preccurlyeq v$, donc puisque $v \Vdash A \to \bot$, si $v \Vdash A$, alors $v \Vdash \bot$, ce qui est absurde. On en déduit que $v \nVdash A \wedge \neg A$, et donc que $u \Vdash \neg(A \wedge \neg A)$.

**Question 8** Le modèle $\textcircled{0} \longrightarrow \overset{x}{\textcircled{1}}$ convient à nouveau comme contre-exemple :

- $0 \nVdash \neg x$ et $1 \nVdash \neg x$, car 0 et 1 peuvent accéder à un sommet qui réalise $x$ ;
- on en déduit que $0 \Vdash \neg\neg x$ car 0 ne peut pas accéder à un sommet qui réalise $\neg x$ ;
- finalement, $0 \nVdash \neg\neg x \to x$, car $0 \preccurlyeq 0$, $0 \Vdash \neg\neg x$ mais $0 \nVdash x$.

On en déduit que ce modèle ne réalise pas $\neg\neg A \to A$.

## 1.3 Correction

**Question 9** On procède par induction sur $\mathcal{F}$. On suppose $u \Vdash A$ et $u \preccurlyeq v$ :

- si $A = x \in \mathcal{V}$, alors le résultat est établi par définition de $\Vdash$ ;
- $A$ ne peut pas être égal à $\perp$ ;
- supposons le résultat établi pour $B$ et $C$ :
  - si $A = B \wedge C$, alors $u \Vdash B$ et $u \Vdash C$, donc $v \Vdash B$ et $v \Vdash C$ par hypothèse d'induction, donc $v \Vdash A$ ;
  - de même si $A = B \vee C$ ;
  - si $A = B \to C$, soit $w$ tel que $v \preccurlyeq w$. Si $w \Vdash B$, alors $w \Vdash C$, car $u \Vdash B \to C$ et $u \preccurlyeq w$ ($\preccurlyeq$ est transitive). On en déduit que $v \Vdash B \to C = A$.

  Dans tous les cas, on a montré $v \Vdash A$.

On conclut par induction.

**Question 10** On fait la preuve pour chacune des quatre règles. On considère à chaque fois un modèle de Kripke intuitionniste $\mathcal{K} = (W, R, \Vdash)$.

- pour $\to_i$ : supposons que $\Gamma, A \Vdash B$ et montrons que $\Gamma \Vdash A \to B$. Soit $u \in W$ tel que $u \Vdash \Gamma$ et soit $v \in W$ tel que $u \preccurlyeq v$. Supposons que $v \Vdash A$. Par la question précédente, comme $u \preccurlyeq v$, on en déduit que $v \Vdash \Gamma$, et donc que $v \Vdash \Gamma \cup \{A\}$. Or, par hypothèse, $\Gamma, A \Vdash B$, donc $v \Vdash B$. On a bien montré que $u \Vdash A \to B$.

  Ceci étant vrai pour tout monde $u$, on en déduit que $\Gamma \Vdash A \to B$ ;
- pour $\to_e$ : supposons que $\Gamma \Vdash A$ et $\Gamma \Vdash A \to B$ et montrons que $\Gamma \Vdash B$. Soit $u \in W$ tel que $u \Vdash \Gamma$. Comme $u \preccurlyeq u$, que $u \Vdash A$ et $u \Vdash A \to B$, on en déduit que $u \Vdash B$ ;
- pour $\vee_e$ : supposons que $\Gamma \Vdash A \vee B$, $\Gamma, A \Vdash C$ et $\Gamma, B \Vdash C$ et montrons que $\Gamma \Vdash C$. Soit $u \in W$ tel que $u \Vdash \Gamma$. Comme $u \Vdash A \vee B$, on en déduit que $u \Vdash A$ ou $u \Vdash B$, donc $u \Vdash \Gamma \cup \{A\}$ ou $u \Vdash \Gamma \cup \{B\}$, donc $u \Vdash C$ ;
- pour $\perp_e$ : supposons que $\Gamma \Vdash \perp$ et montrons que $\Gamma \Vdash A$. Comme il n'existe pas de sommet $u$ tel que $u \Vdash \perp$, on en déduit qu'il n'existe pas de sommet $u$ tel que $u \Vdash \Gamma$, donc par vacuité, tout sommet (donc aucun) réalisant $\Gamma$ réalise aussi $A$.

**Question 11** On procède par induction sur les arbres de preuve : soit $\Gamma \vdash A$ un séquent prouvable en logique intuitionniste :

- si la dernière règle utilisée est un axiome, alors par correction de la règle, on en déduit $\Gamma \Vdash A$ ;
- sinon, supposons que l'arbre de preuve est de la forme :

$$\frac{T_1 \qquad T_2 \qquad \dots \qquad T_k}{\Gamma \vdash A}\ (R)$$

  où les $T_i$ sont des sous-arbres de preuves dont les séquents conclusions sont de la forme $\Gamma_i \vdash A_i$ vérifiant $\Gamma_i \Vdash A_i$. Alors la règle $(R)$ étant correcte, on en déduit que $\Gamma \Vdash A$.

On conclut par induction que dans tous les cas, $\Gamma \Vdash A$.

Notons qu'il n'était pas nécessaire de traiter le cas des axiomes à part (mais une induction sans cas de base explicite est toujours un peu perturbant).

**Question 12** On utilise toujours le même contre-exemple $0 \longrightarrow \overset{x}{1}$ !

À nouveau, on a $0 \not\Vdash x$ et $0 \not\Vdash \neg x$, donc $0 \not\Vdash x \vee \neg x$. On en déduit que $A \vee \neg A$ n'est pas toujours réalisée, et donc par correction de la logique intuitionniste, que cette formule n'est pas prouvable en logique intuitionniste.

Il s'avère que $A \vee \neg A$ est toujours prouvable en logique classique (c'est un axiome). Par correction de la logique classique pour la sémantique booléenne, on en déduit que c'est une tautologie : $\vDash A \vee \neg A$. Si la logique intuitionniste était complète pour la sémantique booléenne, alors toute tautologie, en particulier $A \vee \neg A$, serait prouvable en logique intuitionniste, ce qui n'est pas le cas.

**Question 13** On a la preuve suivante, en posant $\Gamma = \{\neg A \vee B, A\}$ :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \neg A \vee B}\,(\text{ax}) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \neg A \vdash A}\,(\text{ax}) \quad \dfrac{}{\Gamma, \neg A \vdash \neg A}\,(\text{ax})}{\Gamma, \neg A \vdash \bot}\,\neg_e}{\Gamma, \neg A \vdash B}\,\bot_e \qquad \dfrac{}{\Gamma, B \vdash B}\,(\text{ax})}{\Gamma \vdash B}\,\vee_e}{\neg A \vee B \vdash A \to B}\,\to_i}{\vdash (\neg A \vee B) \to (A \to B)}\,\to_i$$

La formule réciproque n'est pas prouvable en logique intuitionniste, car elle n'est pas toujours réalisée. En effet, dans le modèle $0 \longrightarrow \overset{x_0, x_1}{1}$ , on a $0 \Vdash x_0 \to x_1$, car tout sommet qui réalise $x_0$ réalise aussi $x_1$. Mais $0 \not\Vdash \neg x_0 \vee x_1$ :

- le sommet 1 vérifie $0 \preccurlyeq 1$ et $1 \Vdash x_0$, donc $0 \not\Vdash \neg x_0$ ;
- $0 \not\Vdash x_1$.

# 2 Complétude

## 2.1 Cas général

**Question 14** On montre, par récurrence sur $m$, que $\Gamma_m \nvdash_i A$.

- $\Gamma_0 = \Gamma \nvdash_i A$ par hypothèse ;
- supposons que $\Gamma_m \nvdash_i A$ pour un certain $m \in \mathbb{N}$. Montrons que $\Gamma_{m+1} \nvdash_i A$. On distingue :
  - si $\Gamma_{m+1} = \Gamma_m$, le résultat est immédiat ;
  - si $\Gamma_{m+1} = \Gamma_m \cup \{B_k\}$, alors $\Gamma_{m+1} \nvdash_i A$ par construction ;
  - sinon, $\Gamma_{m+1} = \Gamma_m \cup \{C_k\}$ et $\Gamma_m, B_k \vdash_i A$. Mais alors, si $\Gamma_{m+1} \vdash_i A$, la preuve suivante est une preuve de $\Gamma_m \vdash_i A$, absurde par hypothèse :

$$\dfrac{\Gamma_m \vdash B_k \vee C_k \qquad \Gamma_m, B_k \vdash A \qquad \Gamma_m, C_k \vdash A}{\Gamma_m \vdash A}\,\vee_e$$

**Question 15** On considère l'ensemble $\Delta$ défini à la question précédente. Cet ensemble vérifie bien $\Delta \nvdash_i A$.

Cet ensemble est de plus saturé. En effet, il est cohérent, car s'il ne l'était pas, alors $\dfrac{\Delta \vdash \bot}{\Delta \vdash A}\,\bot_e$ serait une preuve intuitionniste du séquent $\Delta \vdash A$.

Enfin, pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $\Delta \vdash_i A_k$, on a $B_k \in \Delta$ ou $C_k \in \Delta$. En effet, on remarque que par construction, $B_k \in \Gamma_k$ ou $C_k \in \Gamma_k$.

**Question 16** Si $A \in \Delta$, alors $\dfrac{}{\Delta \vdash A}\,(\text{ax})$ est une preuve de $\Delta \vdash A$.

Réciproquement, supposons $\Delta \vdash_i A$. Alors $\Delta \vdash_i A \vee A$, donc $A \in \Delta$, par saturation de $\Delta$.

**Question 17** Supposons $B \to C \in \Delta$ et $\Delta'$ saturé tel que $\Delta \cup \{B\} \subseteq \Delta'$. Alors $B \to C \in \Delta \subseteq \Delta'$, donc par la question précédente, $\Delta' \vdash_i B \to C$. Comme $B \in \Delta'$, on a $\Delta' \vdash_i B$, et par $\to_e$, $\Delta' \vdash_i C$, donc $C \in \Delta'$.

Réciproquement, raisonnons par contre-apposée et supposons que $B \to C \notin \Delta$. Alors $\Delta \nvdash_i B \to C$, donc $\Delta, B \nvdash_i C$. Par le lemme de Henkin, il existe $\Delta'$ saturé tel que $\Delta \cup \{B\} \subseteq \Delta'$ et $\Delta' \nvdash_i C$, donc $C \notin \Delta'$.

**Question 18** Dans un premier temps, on constate que $R$ est bien acyclique : en effet, l'inclusion stricte est transitive, et s'il existe $\Delta \in W$ tel que $\Delta \prec \Delta$, alors $\Delta \subsetneq \Delta$, ce qui est absurde.

Ensuite, si $\Delta \Vdash x$ et $\Delta \prec \Delta'$, alors $\Delta' \Vdash x$. En effet, $\Delta \prec \Delta'$ implique $\Delta \subsetneq \Delta'$, et $x \in \Delta$, donc $x \in \Delta'$, soit $\Delta' \Vdash x$.

$\mathcal{K}$ est bien un modèle de Kripke intuitionniste.

**Question 19** Montrons alors par induction sur $B$ que pour $\Delta \in W$ et $B \in \mathcal{F}$, $\Delta \Vdash B$ si et seulement si $B \in \Delta$ :

- si $B = \bot$, alors $B \notin \Delta$ (car $\Delta$ saturé) et $\Delta \nVdash B$ ;
- si $B = x \in \mathcal{V}$, alors par définition de $\Vdash$ on a bien $\Delta \Vdash x$ si et seulement si $x \in \Delta$ ;
- supposons le résultat établi pour $C, D$ deux formules. Distinguons selon $B$ :
  - si $B = C \wedge D$, alors $\Delta \Vdash B$ si et seulement si $\Delta \Vdash C$ et $\Delta \Vdash D$ si et seulement si $C \in \Delta$ et $D \in \Delta$ si et seulement si $\Delta \vdash_i C$ et $\Delta \vdash_i D$ si et seulement si $\Delta \vdash_i B$ si et seulement si $B \in \Delta$ ;
  - de même si $B = C \vee D$ ;
  - si $B = C \to D$, supposons $\Delta \Vdash B$. Comme $\Delta \subseteq \Delta$, on a bien $\Delta \cup \{C\} \vdash_i D$, donc $\Delta \vdash_i C \to D$, soit $C \to D \in \Delta$ ;

    Réciproquement, si $C \to D \in \Delta$, alors pour $\Delta \subseteq \Delta'$, si $\Delta' \Vdash C$, alors $\Delta' \Vdash D$, donc $\Delta \Vdash C \to D$.

On conclut par induction. Finalement, comme $\Gamma \subseteq \Delta_0$, on a $\Delta_0 \Vdash \Gamma$, mais $\Delta_0 \nVdash A$ (car $A \notin \Delta_0$), soit $\Gamma \nVdash A$. Par contre-apposée, on a bien si $\Gamma \Vdash A$, alors $\Gamma \vdash_i A$, ce qui assure la complétude de la logique intuitionniste pour la sémantique de Kripke.

## 2.2 Cas fini

**Question 20** Toutes les règles étant correctes pour la sémantique de Kripke intuitionniste, elles le sont en particulier pour les modèles finis, donc la preuve de correction est la même qu'en question 11.

**Question 21** La formule $A$ étant fixée, son nombre de sous-formules est fini, donc le nombre de sous-ensemble de ses formules est fini, donc $W_A$ est fini. La preuve que c'est bien un modèle intuitionniste est similaire à la question 18, en utilisant à nouveau l'inclusion stricte et l'appartenance.

**Question 22** On procède par induction sur la formule $B$. Les cas de base découlent de la définition de $\mathcal{K}_A$. On traite le cas inductif où $B = C \to D$, les autres cas se traitent de manière similaire :

- si $u \Vdash C \to D$, soit $v \in W$ tel que $S(u) \subseteq S(v)$ et $S(v) \Vdash_A C$. Par hypothèse d'induction, $v \Vdash C$. Mais comme $C \to D \in S(u) \subseteq S(v)$, on a $v \Vdash C \to D$, donc $v \Vdash D$. Par hypothèse d'induction, $S(v) \Vdash_A D$, donc $S(u) \Vdash_A C \to D$ ;
- si $S(u) \Vdash_A C \to D$, soit $v \in W$ tel que $u \preccurlyeq v$ et $v \Vdash C$. Comme $u \preccurlyeq v$, par la question 9, on en déduit que $S(u) \subseteq S(v)$. Par hypothèse d'induction, $S(v) \Vdash C$, donc $S(v) \Vdash D$, ce qui montre, par hypothèse d'induction à nouveau, que $v \Vdash D$, et donc $u \Vdash C \to D$.

**Question 23** On raisonne par contre-apposée : si $\nvdash_i A$, alors par complétude pour les modèles intuitionnistes quelconques, il existe un modèle de Kripke $\mathcal{K}$ tel que $\mathcal{K} \nVdash A$. Par la question précédente, $\mathcal{K}_A \nVdash A$, donc $A$ n'est pas toujours réalisée par un modèle fini.

**Question 24** Une formule propositionnelle $A$ a un nombre fini de sous-formules $N$. Pour un modèle intuitionniste $\mathcal{K}$ quelconque, le modèle $\mathcal{K}_A$ possède donc au plus $2^N$ mondes.

Par correction et complétude, une manière de décider le problème `INTUITIONNISTE` pour la formule $A$ serait donc de considérer tous les modèles de Kripke ayant au plus $2^N$ mondes (il y en a un nombre fini) et de vérifier pour chacun s'il réalise la formule $A$.

Pour un modèle fini, vérifier s'il réalise une formule peut se faire par induction en utilisant la définition de la réalisation étendue aux formules. Tout ceci donne bien l'existence d'un algorithme pour résoudre le problème.

**Question 25** Il est faux de dire que $A \in$ `CLASSIQUE` si et seulement si $A \in$ `INTUITIONNISTE` (puisque $A = x \vee \neg x$ en est un contre-exemple). Il est vrai que $A$ est satisfiable si et seulement si le modèle de Kripke défini dans le raisonnement réalise la formule $A$. Toutefois, cela ne donne pas l'équivalence voulue, car $A$ pourrait ne pas être réalisée dans un autre modèle, ce qui montrerait qu'elle n'est pas prouvable en logique intuitionniste.

**Question 26** La construction de la formule $\neg\neg A$ se fait en temps polynomial en la taille de $A$. Par la remarque précédente, on en déduit que `CLASSIQUE` $\leqslant_m^p$ `INTUITIONNISTE`. Comme `CLASSIQUE` est coNP-difficile, on en déduit que `INTUITIONNISTE` est coNP-difficile.

# 3 Logique modale

## 3.1 Système K

**Question 27** Pour le premier séquent, on pose $\Gamma = \{\Box\neg A, \neg\Box\neg A\}$. On a :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \Box\neg A}\,(\text{ax}) \qquad \dfrac{}{\Gamma \vdash \neg\Box\neg A}\,(\text{ax})}{\Gamma \vdash \bot}\,\neg_e}{\Box\neg A, \Diamond A \vdash \bot}}{\Box\neg A \vdash \neg\Diamond A}\,\neg_i}{\vdash \Box\neg A \to \neg\Diamond A}\,\to_i$$

Pour l'autre séquent, on a :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg\neg\Box\neg A \vdash \neg\neg\Box\neg A}\,(\text{ax})}{\neg\neg\Box\neg A \vdash \Box\neg A}\,\neg\neg_e}{\neg\Diamond A \vdash \Box\neg A}}{\vdash \neg\Diamond A \to \Box\neg A}\,\to_i$$

**Question 28** On a la preuve :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A, \neg A \vdash A}\,(\text{ax}) \qquad \dfrac{}{A, \neg A \vdash \neg A}\,(\text{ax})}{A, \neg A \vdash \bot}\,\neg_e}{A \vdash \neg\neg A}\,\neg_i}{\vdash A \to \neg\neg A}\,\to_i}{\vdash \Box(A \to \neg\neg A)}\,(N)}{\vdash \Box A \to \Box\neg\neg A}\,(K)$$

## 3.2 Modèles de Kripke modaux

**Question 29** $u \Vdash \neg A$ si et seulement si lorsque $u \Vdash A$, alors $u \Vdash \bot$. Par définition, cela signifie que $u \nVdash A$. On en déduit que $u \Vdash \Diamond A$ si et seulement si $u \nVdash \Box\neg A$ si et seulement si il existe $v \in W$ tel que $uRv$ et $v \nVdash \neg A$ (c'est-à-dire $v \Vdash A$).

**Question 30** Les sommets $1, 3, 4$ réalisent $x_0$ et 1 et 4 n'ont pas d'autre voisin que ces trois-là, donc ils réalisent aussi $\Box x_0$. 0 et 2 ont pour voisin 2 qui ne réalise pas $x_0$, donc ils ne réalisent pas $x_0$. Par contre, 3 et 5 ne peuvent accéder à aucun sommet, donc ils réalisent $\Box x_0$ par vacuité.

Les sommets qui réalisent $\neg\Diamond x_1$ sont ceux qui ne réalisent pas $\Diamond x_1$, c'est-à-dire ceux qui ne peuvent pas accéder à un sommet qui réalise $x_1$. Il s'agit de 3, 4 et 5.

**Question 31** On considère $\mathcal{K} = (W, R, \Vdash)$ un modèle de Kripke.

- On a toujours $\Vdash A \vee \neg A$, car soit $\Vdash A$, soit $\nVdash A$, et alors $\Vdash \neg A$. La règle (te) est donc correcte ;
- supposons $\Gamma, A \Vdash B$ et montrons $\Gamma \Vdash A \to B$. En effet, pour $u \in W$ tel que $u \Vdash \Gamma$. Si $u \Vdash A$, alors $u \Vdash \Gamma \cup \{A\}$, donc $u \Vdash B$. On en déduit que dans tous les cas, $u \Vdash A \to B$ et donc que $\Gamma \Vdash A \to B$ ;
- supposons $\Gamma \Vdash \Box(A \to B)$. Alors soit $u \in W$ tel que $u \Vdash \Gamma$. Supposons $u \Vdash \Box A$. Alors pour $v \in W$ tel que $uRv$, on a $v \Vdash A$. Or $u \Vdash \Box(A \to B)$, donc $v \Vdash A \to B$, et donc $v \Vdash B$. Ceci étant vrai pour tout monde $v$ voisin de $u$, on en déduit $u \Vdash \Box B$. Au final, $u \Vdash \Box A \to \Box B$. Ceci étant vrai pour tout monde $u \in W$, on a bien $\Gamma \Vdash \Box A \to \Box B$ ;
- supposons $\Vdash A$. Alors pour tout $u \in W$, $u \Vdash A$. En particulier, pour tout monde $v$ voisin de $u$, $v \Vdash A$. On en déduit que $u \Vdash \Box A$, soit $\Vdash \Box A$.

**Question 32** La preuve se fait par induction exactement de la même manière que pour les modèles intuitionnistes.

**Question 33** Si $A$ est prouvable en système $K$, alors par correction, elle est toujours réalisée. Elle est en particulier réalisée par un modèle à un seul monde et $R = \emptyset$. Pour ce modèle $\mathcal{K}$, on peut faire une bijection entre la relation $\Vdash$ et une valuation $\mu$. On a équivalence entre $\mathcal{K} \Vdash A$ et $\mu(A) = 1$. On en déduit que $\vDash A$ et donc $\vdash_c A$ par complétude.

**Question 34** La règle $(D_1)$ implique $(D_2)$ :

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{(ax)}
\UnaryInfC{$\Box\bot \vdash \Box\bot$}
\RightLabel{$(D_1)$}
\UnaryInfC{$\Box\bot \vdash \Diamond\bot$}
\UnaryInfC{$\Box\bot \vdash \neg\Box\neg\bot$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(ax)}
\UnaryInfC{$\bot \vdash \bot$}
\RightLabel{$\neg_i$}
\UnaryInfC{$\vdash \neg\bot$}
\RightLabel{$(N)$}
\UnaryInfC{$\vdash \Box\neg\bot$}
\RightLabel{(aff)}
\UnaryInfC{$\Box\bot \vdash \Box\neg\bot$}
\RightLabel{$\neg_e$}
\BinaryInfC{$\Box\bot \vdash \bot$}
\RightLabel{$\neg_i$}
\UnaryInfC{$\vdash \neg\Box\bot$}
\RightLabel{(aff)}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash \neg\Box\bot$}
\end{prooftree}
$$

et réciproquement, en posant $\Delta = \Gamma \cup \{\Box\neg A\}$ :

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{$(D_2)$}
\UnaryInfC{$\Delta \vdash \neg\Box\bot$}
\AxiomC{$\Gamma \vdash \Box A$}
\RightLabel{(aff)}
\UnaryInfC{$\Delta \vdash \Box A$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(ax)}
\UnaryInfC{$\Delta \vdash \Box\neg A$}
\UnaryInfC{$\Delta \vdash \Box(A \to \bot)$}
\RightLabel{$(K)$}
\UnaryInfC{$\Delta \vdash \Box A \to \Box\bot$}
\RightLabel{$\to_e$}
\BinaryInfC{$\Delta \vdash \Box\bot$}
\RightLabel{$\neg_e$}
\BinaryInfC{$\Gamma, \Box\neg A \vdash \bot$}
\RightLabel{$\neg_i$}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash \Diamond A$}
\end{prooftree}
$$

**Question 35** Par la question précédente, il suffit de montrer que la sérialité caractérise $\neg\Box\bot$. Soit $\mathcal{K} = (W, R, \Vdash)$ un modèle sériel et $u \in W$. Par définition, il existe $v \in W$ tel que $uRv$. Comme $v \nVdash \bot$, on en déduit $u \nVdash \Box\bot$, soit $u \Vdash \neg\Box\bot$, et donc $\mathcal{K} \Vdash \neg\Box\bot$.

Réciproquement, soit $\mathcal{K} = (W, R, \Vdash)$ un modèle quelconque tel que $\mathcal{K} \Vdash \neg\Box\bot$. Alors pour tout $u \in W$, $u \Vdash \neg\Box\bot$, et donc $u \nVdash \Box\bot$. On en déduit qu'il existe un sommet $v \in W$ tel que $uRv$ et $v \nVdash \bot$, et en particulier $u$ n'est pas un puits, donc $\mathcal{K}$ est sériel.

**Question 36** Soit $\mathcal{K} = (W, R, \Vdash)$ un modèle réflexif. Soit $u \in W$ tel que $u \Vdash \Box A$. Comme $u$ est réflexif, $uRu$, on en déduit que $u \Vdash A$. On en déduit que $\mathcal{K} \Vdash \Box A \to A$.

Réciproquement, soit $(W, R)$ un cadre quelconque tel que $(W, R, \Vdash) \Vdash \Box A \to A$, pour tout $\Vdash$. Supposons qu'il existe $u \in W$ tel que $(u, u) \notin R$. Pour une certaine variable $x \in \mathcal{V}$, on définit $\Vdash$ tel que $u \nVdash x$ et pour tout voisin $v$ de $u$, $v \Vdash x$. Alors, par définition, $u \Vdash \Box x$, mais alors $u \nVdash \Box x \to x$, ce qui est absurde. On en déduit que $R$ est réflexive.

**Question 37** Montrons que la transitivité caractérise $\Box A \to \Box\Box A$.

Soit $\mathcal{K} = (W, R, \Vdash)$ un modèle transitif. Soit $u \in W$ tel que $u \Vdash \Box A$. Soit $v \in W$ tel que $uRv$. Montrons que $v \Vdash \Box A$. En effet, si $w \in W$ est tel que $vRw$, alors par transitivité, $uRw$, et comme $u \Vdash \Box A$, $w \Vdash A$. On en déduit que $v \Vdash \Box A$ et donc que $u \Vdash \Box\Box A$. On a bien montré que $\mathcal{K} \Vdash \Box A \to \Box\Box A$.

Réciproquement, soit $(W, R)$ un cadre de Kripke quelconque tel que $(W, R, \Vdash) \Vdash \Box A \to \Box\Box A$ pour tout $\Vdash$. Supposons qu'il existe $u, v, w \in W$ tels que $uRv$, $vRw$ mais $(u, w) \notin R$. On définit $\Vdash$ telle que $w$ ne réalise pas $x \in \mathcal{V}$ et tous les voisins de $u$ réalisent $x$. Alors $u \Vdash \Box x$, mais $v \nVdash \Box x$ donc $u \nVdash \Box x \to \Box\Box x$, ce qui est absurde. On en déduit que $R$ est transitive.

**Question 38** Montrons que la symétrie caractérise $A \to \Box\Diamond A$.

Soit $\mathcal{K} = (W, R, \Vdash)$ un modèle symétrique. Soit $u \in W$ tel que $u \Vdash A$. On distingue :

- si $u$ n'a pas de voisin, alosr $u \Vdash \Box\Diamond A$ par vacuité ;
- sinon, soit $v$ un voisin de $u$. Comme $\mathcal{K}$ est symétrique, $u$ est voisin de $v$, donc $v \Vdash \Diamond A$. On en déduit que $u \Vdash \Box\Diamond A$.

Soit $(W, R)$ un cadre de Kripke quelconque tel que $(W, R, \Vdash) \Vdash A \to \Box\Diamond A$ pour tout $\Vdash$. Supposons qu'il existe $u, v \in W$ tels que $uRv$ mais $(v, u) \notin R$. On définit $\Vdash$ telle que $u$ réalise $x \in \mathcal{V}$ et aucun voisin de $v$ ne réalise $x$. Alors $u \Vdash x$ mais $v \nVdash \Diamond x$, donc $u \nVdash \Box\Diamond x$, ce qui est absurde. On en déduit que $R$ est symétrique.

⋆ ⋆ ⋆