ESTRUTURAS DE DADOS II

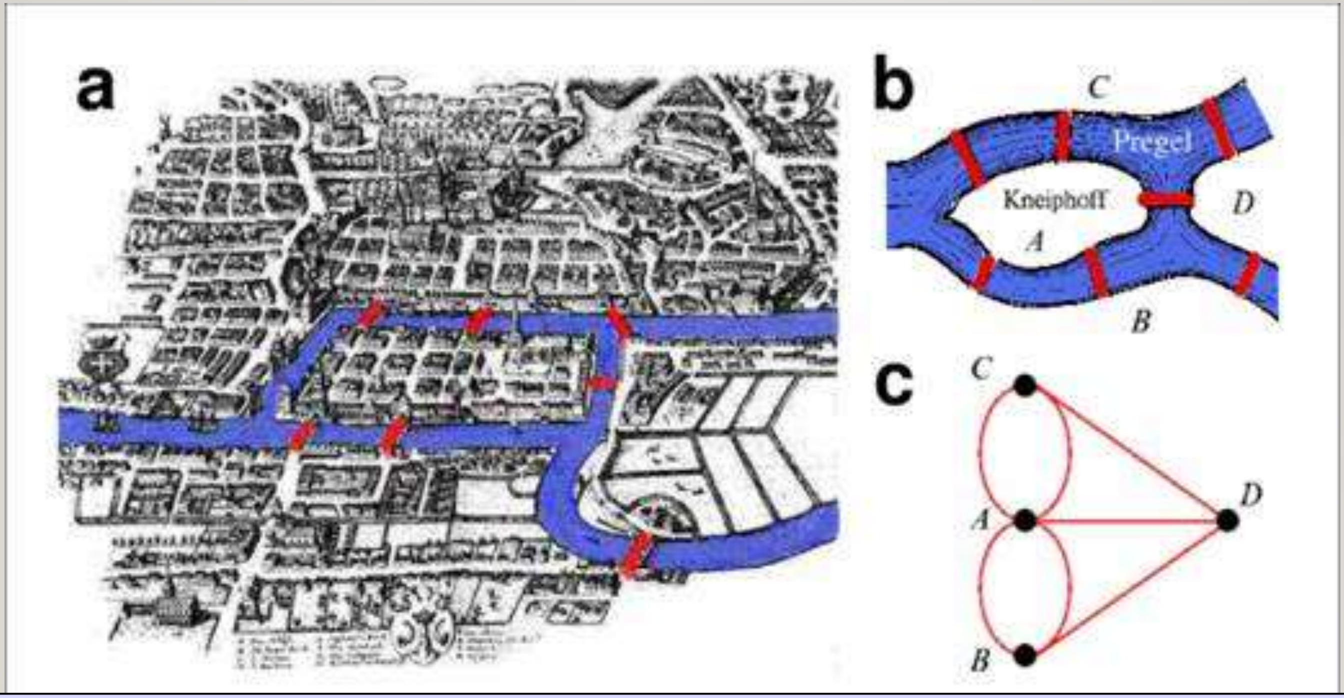
MSC. DANIELE CARVALHO OLIVEIRA

MESTRE EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO – UFU

BACHAREL EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO - UFJF

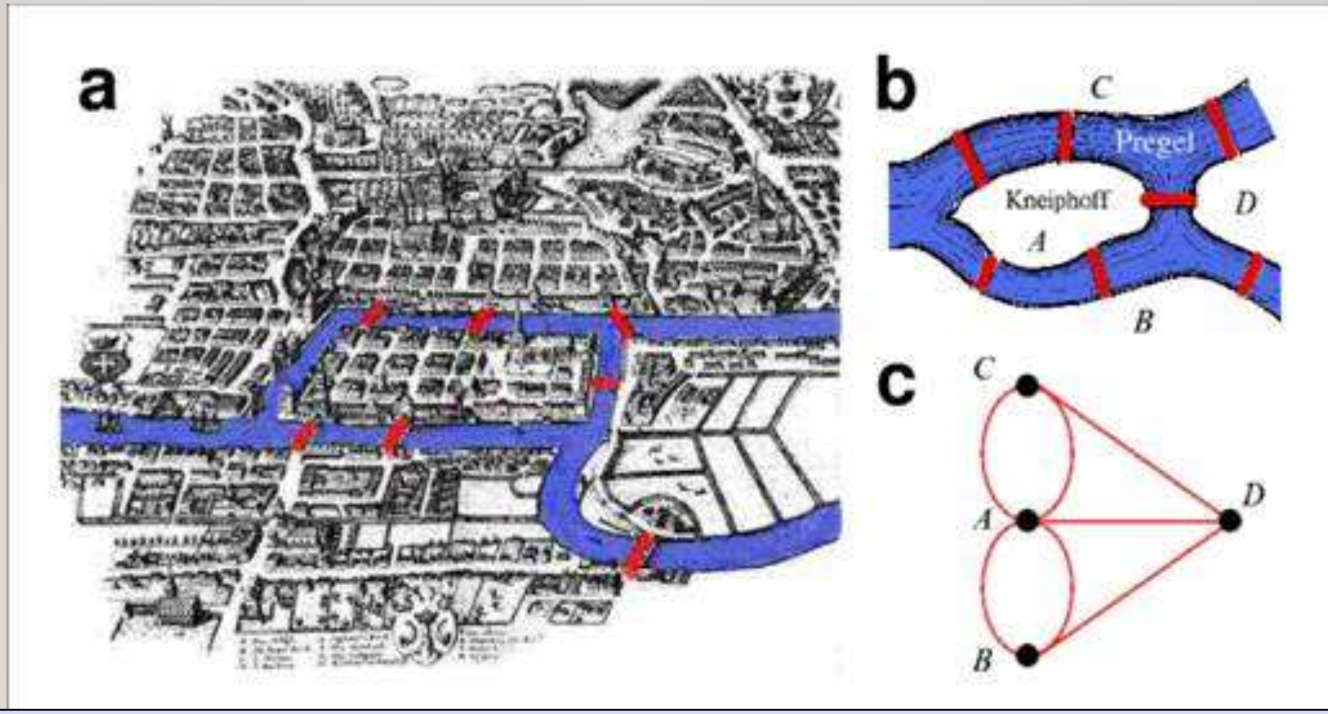

Grafos

3 PONTES DE KÖNIGSBERG (1736)



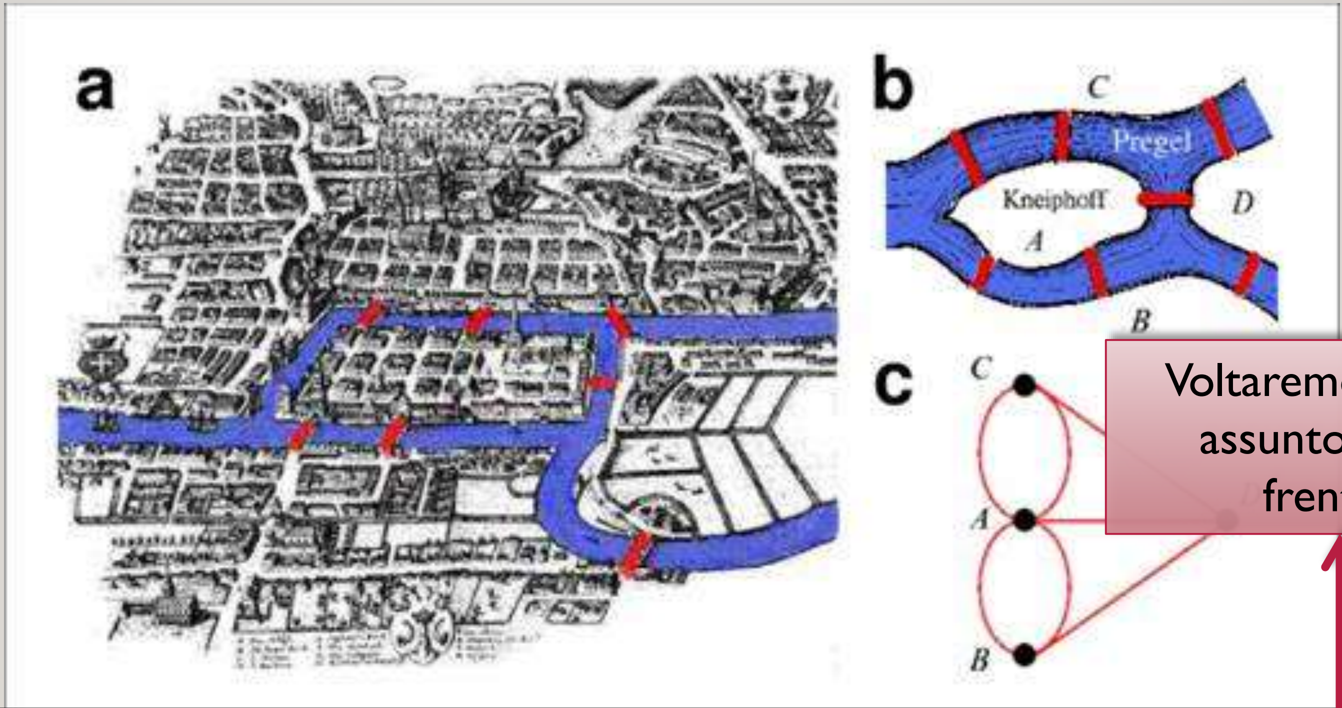
Em Königsber, Alemanha, um rio que passava pela Cidade tinha uma ilha e, logo depois de passar por essa ilha se bifurcava em 2 ramos. Nessa região existiam 7 pontes, como mostra a figura.

4 PONTES DE KÖNIGSBERG (1736)



É possível andar por toda a cidade de tal modo que cada ponte seja atravessada exatamente uma vez?

5 PONTES DE KÖNIGSBERG (1736)

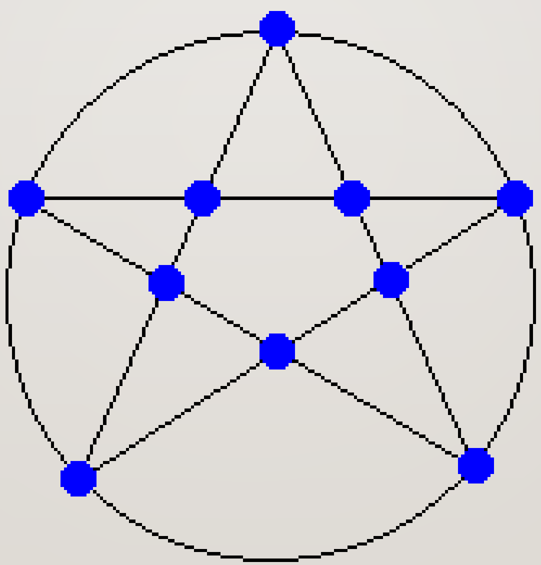


Voltaremos a esse assunto mais a frente!!!

Na teoria de grafos, um caminho completo com as propriedades descritas acima de não retraçar nenhum arco é chamado de CAMINHO EULERIANO

OUTRO EXEMPLO

- Existe um caminho euleriano para o grafo abaixo:



O QUE SÃO GRAFOS

- Conjunto de pontos e linhas que conectam os pontos.

- Grafo é um modelo matemático que representa relações entre objetos.

O QUE SÃO GRAFOS

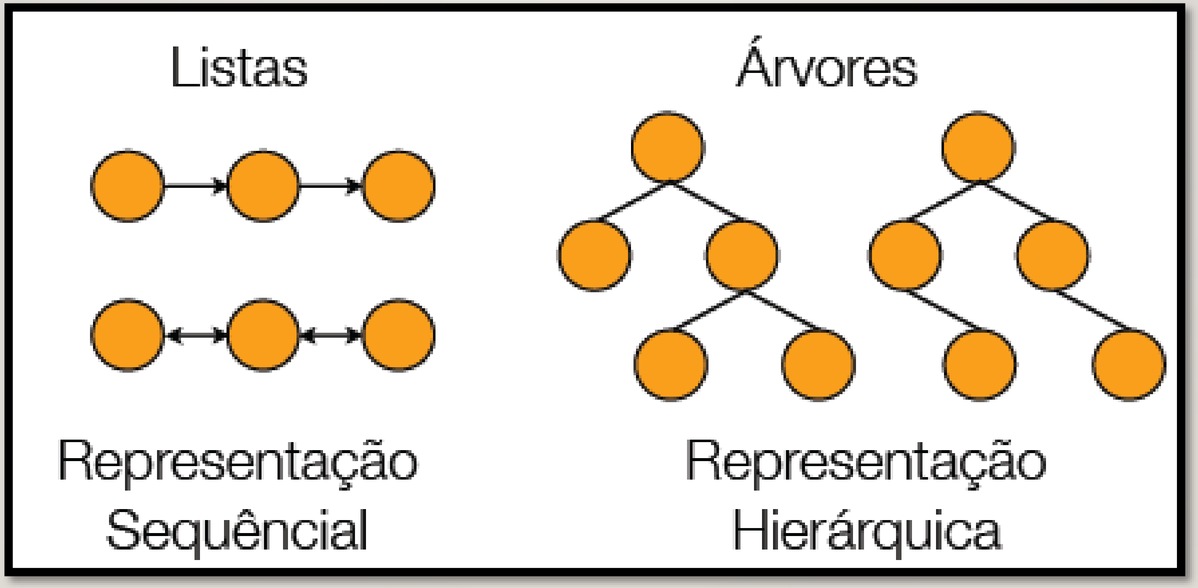
- Grafos são estruturas de dados largamente usadas em computação.

- Exemplos de aplicações são:
  - Modelagem de circuitos digitais
  - Representação de processos em sistemas paralelos ou distribuídos, Redes
  - Redes Sociais
  - Recuperação de Informação

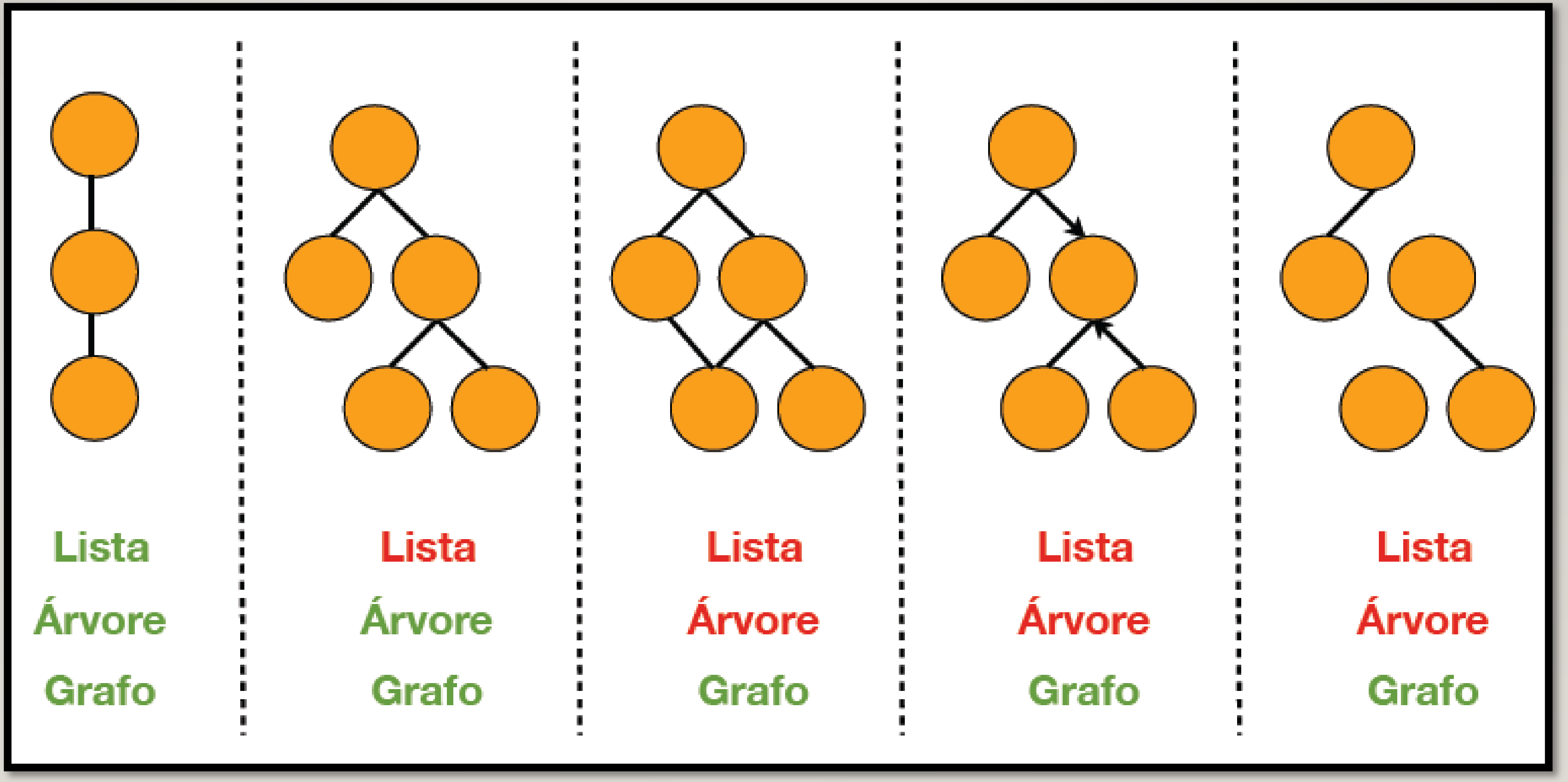
9

O QUE SÃO GRAFOS

- Similar a árvores e listas, com menos restrições



10


Lista
Árvore
Grafo
Lista
Árvore
Grafo
Lista
Árvore
Grafo
Lista
Árvore
Grafo
Lista
Árvore
Grafo

DEFINIÇÃO

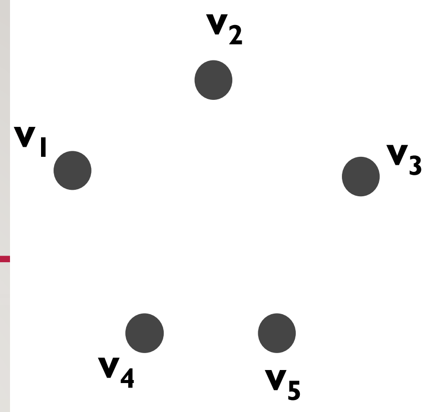
- Um Grafo é um par ordenado $G = (V, E)$
  - V é um conjunto finito não-vazio. Os elementos de V são denominados vértices.
  - E é um conjunto finito de pares ordenados de vértices. Os elementos de E são denominados arestas.
    - Dois vértices ligados por uma aresta são denominados adjacentes

12 EXEMPLO 1:

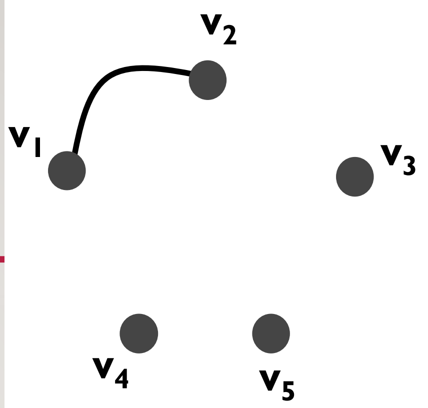
- $G=(V(G), E(G), \psi_G)$, onde
  - $V(G) =\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$
  - $E(G)=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$
  - ψ_G :
    - $\psi_G(e_1)= (v_1, v_2)$, $\psi_G(e_2)= (v_2, v_3)$,
    - $\psi_G(e_3)= (v_3, v_3)$, $\psi_G(e_4)= (v_3, v_4)$,
    - $\psi_G(e_5)= (v_2, v_4)$, $\psi_G(e_6)= (v_4, v_5)$,
    - $\psi_G(e_7)= (v_2, v_5)$, $\psi_G(e_8)= (v_2, v_5)$

EXEMPLO 1:

- $G=(V(G), E(G), \psi_G)$, onde
  - $V(G) =\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$
  - $E(G)=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$
  - ψ_G :
    - $\psi_G(e_1)= (v_1, v_2)$, $\psi_G(e_2)= (v_2, v_3)$,
    - $\psi_G(e_3)= (v_3, v_3)$, $\psi_G(e_4)= (v_3, v_4)$,
    - $\psi_G(e_5)= (v_2, v_4)$, $\psi_G(e_6)= (v_4, v_5)$,
    - $\psi_G(e_7)= (v_2, v_5)$, $\psi_G(e_8)= (v_2, v_5)$

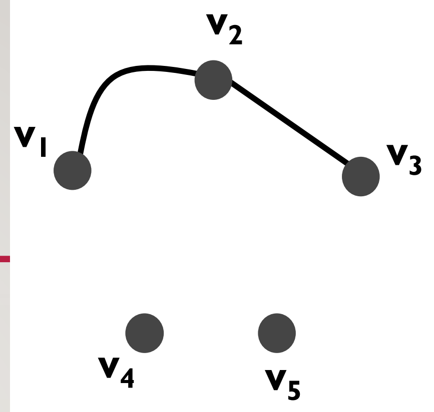


EXEMPLO 1:



- $G=(V(G), E(G), \psi_G)$, onde
  - $V(G) =\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$
  - $E(G)=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7 , e_8\}$
  - ψ_G :
    - $\psi_G(e_1)= (v_1, v_2)$, $\psi_G(e_2)= (v_2, v_3)$,
    - $\psi_G(e_3)= (v_3, v_3)$, $\psi_G(e_4)= (v_3, v_4)$,
    - $\psi_G(e_5)= (v_2, v_4)$, $\psi_G(e_6)= (v_4, v_5)$,
    - $\psi_G(e_7)= (v_2, v_5)$, $\psi_G(e_8)= (v_2, v_5)$

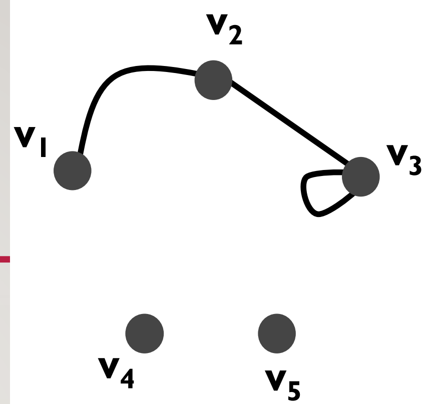
15 EXEMPLO 1:



- G=(V(G), E(G), ψ_G), onde
  - V(G) ={v_1, v_2, v_3, v_4, v_5}
  - E(G)={e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7 , e_8}
  - ψ_G :
    - $\psi_G(e_1)= (v_1, v_2)$, $\psi_G(e_2)= (v_2, v_3)$,
    - $\psi_G(e_3)= (v_3, v_3)$, $\psi_G(e_4)= (v_3, v_4)$,
    - $\psi_G(e_5)= (v_2, v_4)$, $\psi_G(e_6)= (v_4, v_5)$,
    - $\psi_G(e_7)= (v_2, v_5)$, $\psi_G(e_8)= (v_2, v_5)$

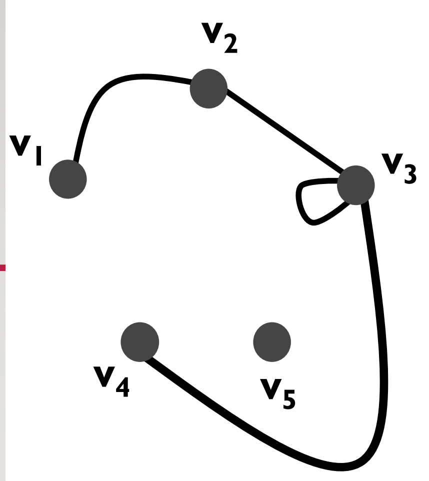
16

EXEMPLO 1:



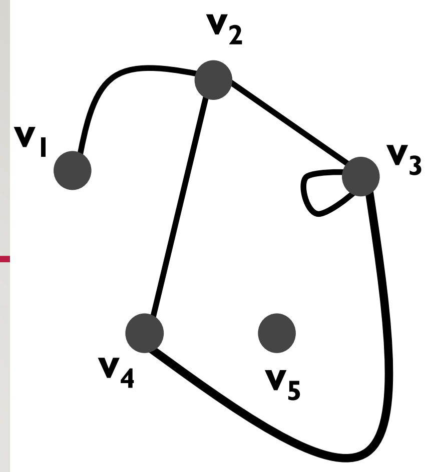
- $G=(V(G), E(G), \psi_G)$, onde
  - $V(G) =\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$
  - $E(G)=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$
  - ψ_G :
    - $\psi_G(e_1)= (v_1, v_2)$, $\psi_G(e_2)= (v_2, v_3)$,
    - $\psi_G(e_3)= (v_3, v_3)$, $\psi_G(e_4)= (v_3, v_4)$,
    - $\psi_G(e_5)= (v_2, v_4)$, $\psi_G(e_6)= (v_4, v_5)$,
    - $\psi_G(e_7)= (v_2, v_5)$, $\psi_G(e_8)= (v_2, v_5)$

EXEMPLO 1:



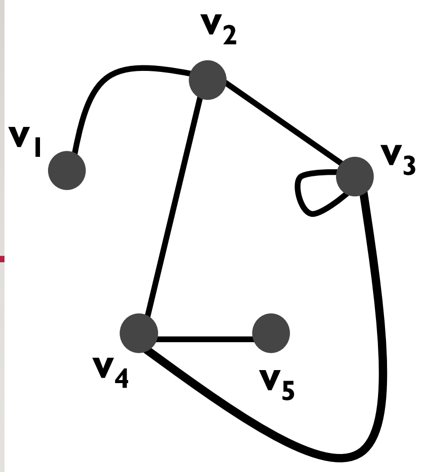
- $G=(V(G), E(G), \psi_G)$, onde
  - $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$
  - $E(G)=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$
  - ψ_G :
    - $\psi_G(e_1)= (v_1, v_2)$, $\psi_G(e_2)= (v_2, v_3)$,
    - $\psi_G(e_3)= (v_3, v_3)$, $\psi_G(e_4)= (v_3, v_4)$,
    - $\psi_G(e_5)= (v_2, v_4)$, $\psi_G(e_6)= (v_4, v_5)$,
    - $\psi_G(e_7)= (v_2, v_5)$, $\psi_G(e_8)= (v_2, v_5)$

18 EXEMPLO 1:



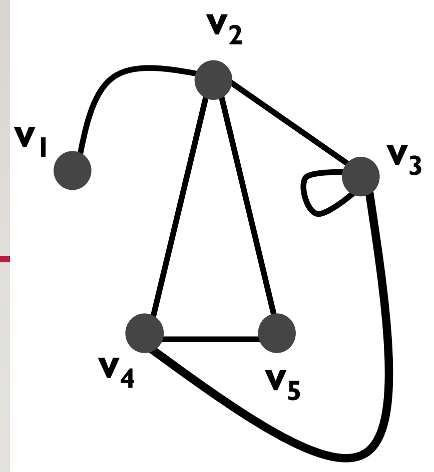
- $G=(V(G), E(G), \psi_G)$, onde
  - $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$
  - $E(G)=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$
  - ψ_G :
    - $\psi_G(e_1)= (v_1, v_2)$, $\psi_G(e_2)= (v_2, v_3)$,
    - $\psi_G(e_3)= (v_3, v_3)$, $\psi_G(e_4)= (v_3, v_4)$,
    - $\psi_G(e_5)= (v_2, v_4)$, $\psi_G(e_6)= (v_4, v_5)$,
    - $\psi_G(e_7)= (v_2, v_5)$, $\psi_G(e_8)= (v_2, v_5)$

EXEMPLO 1:



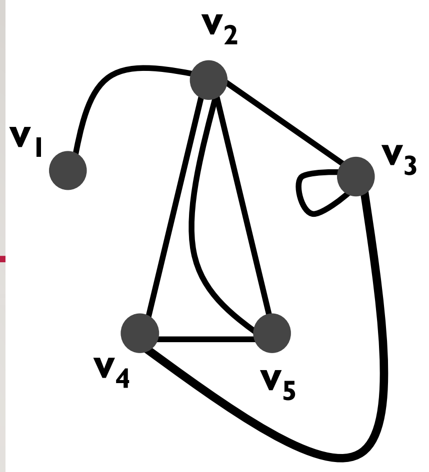
- $G=(V(G), E(G), \psi_G)$, onde
  - $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$
  - $E(G)=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$
  - ψ_G :
    - $\psi_G(e_1)= (v_1, v_2)$, $\psi_G(e_2)= (v_2, v_3)$,
    - $\psi_G(e_3)= (v_3, v_3)$, $\psi_G(e_4)= (v_3, v_4)$,
    - $\psi_G(e_5)= (v_2, v_4)$, $\psi_G(e_6)= (v_4, v_5)$,
    - $\psi_G(e_7)= (v_2, v_5)$, $\psi_G(e_8)= (v_2, v_5)$

20 EXEMPLO 1:



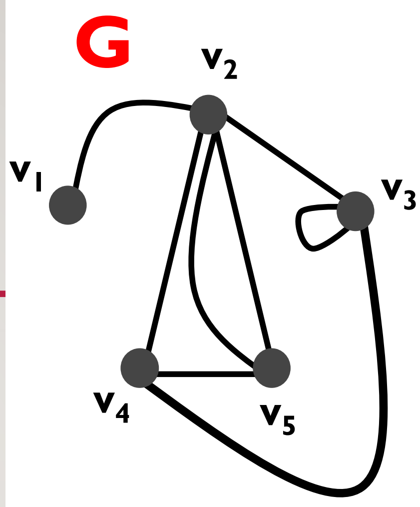
- $G=(V(G), E(G), \psi_G)$, onde
  - $V(G) =\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$
  - $E(G)=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7 , e_8\}$
  - ψ_G :
    - $\psi_G(e_1)= (v_1, v_2)$, $\psi_G(e_2)= (v_2, v_3)$,
    - $\psi_G(e_3)= (v_3, v_3)$, $\psi_G(e_4)= (v_3, v_4)$,
    - $\psi_G(e_5)= (v_2, v_4)$, $\psi_G(e_6)= (v_4, v_5)$,
    - $\psi_G(e_7)= (v_2, v_5)$, $\psi_G(e_8)= (v_2, v_5)$

21 EXEMPLO 1:



- $G=(V(G), E(G), \psi_G)$, onde
  - $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$
  - $E(G)=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$
  - ψ_G :
    - $\psi_G(e_1)= (v_1, v_2)$, $\psi_G(e_2)= (v_2, v_3)$,
    - $\psi_G(e_3)= (v_3, v_3)$, $\psi_G(e_4)= (v_3, v_4)$,
    - $\psi_G(e_5)= (v_2, v_4)$, $\psi_G(e_6)= (v_4, v_5)$,
    - $\psi_G(e_7)= (v_2, v_5)$, $\psi_G(e_8)= (v_2, v_5)$

22 EXEMPLO 1:



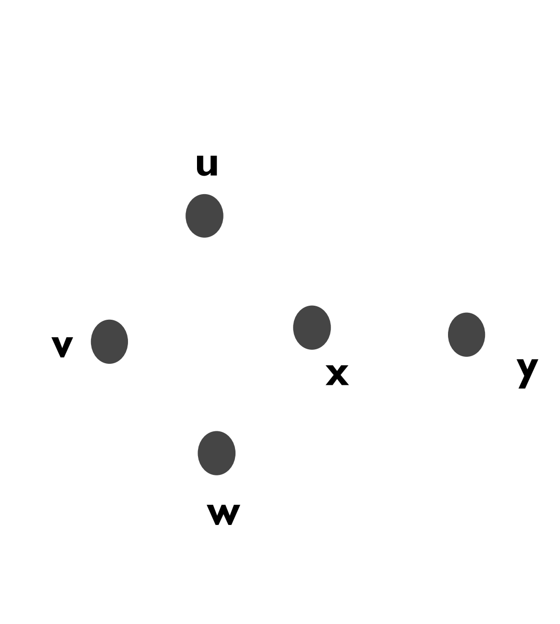
- $G=(V(G), E(G), \psi_G)$, onde
  - $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$
  - $E(G)=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$
  - ψ_G :
    - $\psi_G(e_1)= (v_1, v_2), \psi_G(e_2)= (v_2, v_3),$
    - $\psi_G(e_3)= (v_3, v_3), \psi_G(e_4)= (v_3, v_4),$
    - $\psi_G(e_5)= (v_2, v_4), \psi_G(e_6)= (v_4, v_5),$
    - $\psi_G(e_7)= (v_2, v_5), \psi_G(e_8)= (v_2, v_5)$

EXEMPLO 2:

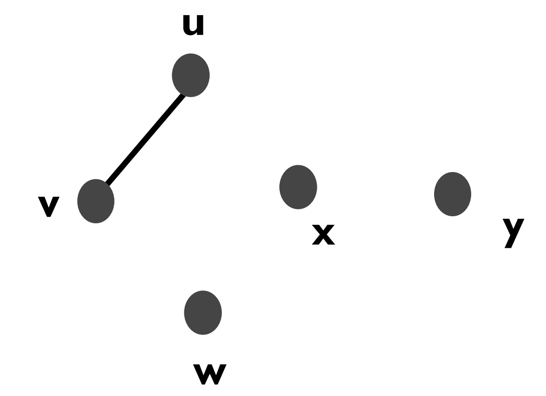
- $H=(V(H), E(H), \psi_H)$, onde
  - $V(H) = \{u, v, w, x, y\}$
  - $E(H)=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$
  - ψ_G :
    - $\psi_G(a)= (u, v)$, $\psi_G(b)= (u, u)$,
    - $\psi_G(c)= (v, w)$, $\psi_G(d)= (w, x)$,
    - $\psi_G(e)= (v, x)$, $\psi_G(f)= (w, x)$,
    - $\psi_G(g)= (u, x)$, $\psi_G(h)= (x, y)$

24 EXEMPLO 2:

- H=(V(H), E(H), ψ_H), onde
  - V(H) ={u, v, w, x, y}
  - E(H)={a, b, c, d, e, f, g, h}
  - ψ_G :
    - ψ_G(a)= (u, v), ψ_G(b)= (u, u),
    - ψ_G(c)= (v, w), ψ_G(d)= (w, x),
    - ψ_G(e)= (v, x), ψ_G(f)= (w, x),
    - ψ_G(g)= (u, x), ψ_G(h)= (x, y)

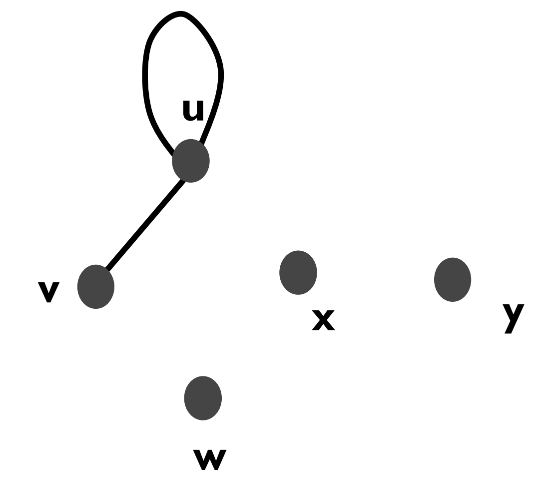


25 EXEMPLO 2:



- $H=(V(H), E(H), \psi_H)$, onde
  - $V(H) = \{u, v, w, x, y\}$
  - $E(H)=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$
  - ψ_G :
    - $\psi_G(a)= (u, v)$, $\psi_G(b)= (u, u)$,
    - $\psi_G(c)= (v, w)$, $\psi_G(d)= (w, x)$,
    - $\psi_G(e)= (v, x)$, $\psi_G(f)= (w, x)$,
    - $\psi_G(g)= (u, x)$, $\psi_G(h)= (x, y)$

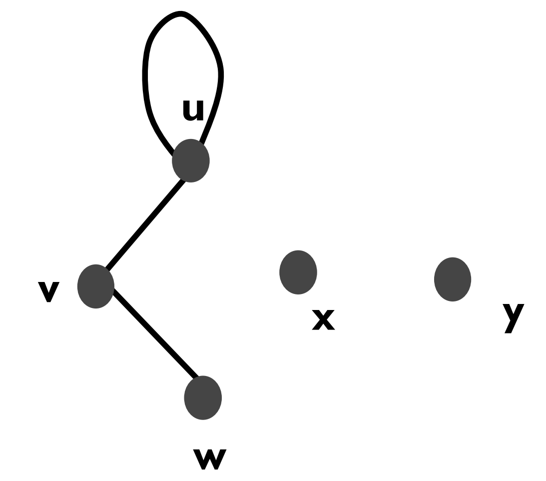
EXEMPLO 2:



- $H=(V(H), E(H), \psi_H)$, onde
  - $V(H) = \{u, v, w, x, y\}$
  - $E(H)=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$
  - ψ_G :
    - $\psi_G(a)= (u, v)$, $\psi_G(b)= (u, u)$,
    - $\psi_G(c)= (v, w)$, $\psi_G(d)= (w, x)$,
    - $\psi_G(e)= (v, x)$, $\psi_G(f)= (w, x)$,
    - $\psi_G(g)= (u, x)$, $\psi_G(h)= (x, y)$

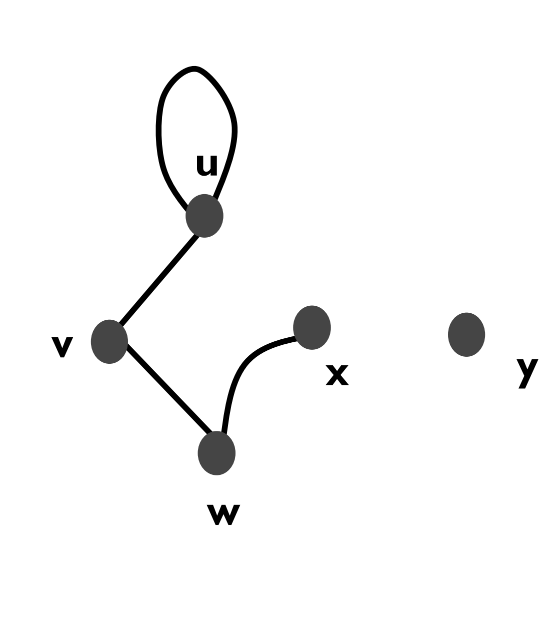
27 EXEMPLO 2:

- $H=(V(H), E(H), \psi_H)$, onde
  - $V(H) = \{u, v, w, x, y\}$
  - $E(H)=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$
  - ψ_G :
    - $\psi_G(a)= (u, v)$, $\psi_G(b)= (u, u)$,
    - $\psi_G(c)= (v, w)$, $\psi_G(d)= (w, x)$,
    - $\psi_G(e)= (v, x)$, $\psi_G(f)= (w, x)$,
    - $\psi_G(g)= (u, x)$, $\psi_G(h)= (x, y)$



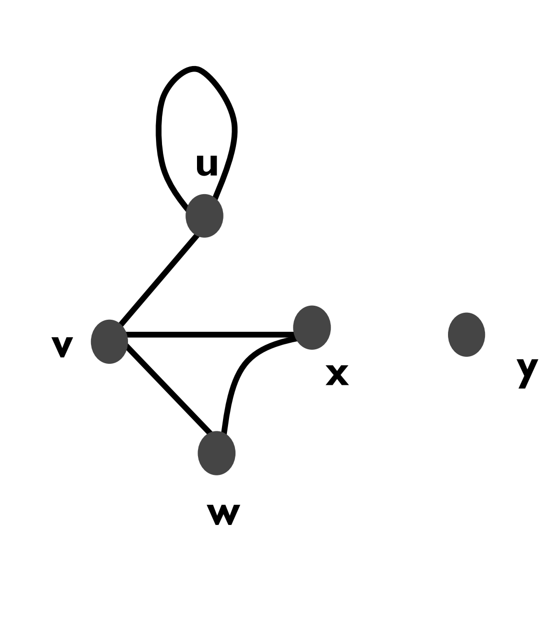
28

EXEMPLO 2:



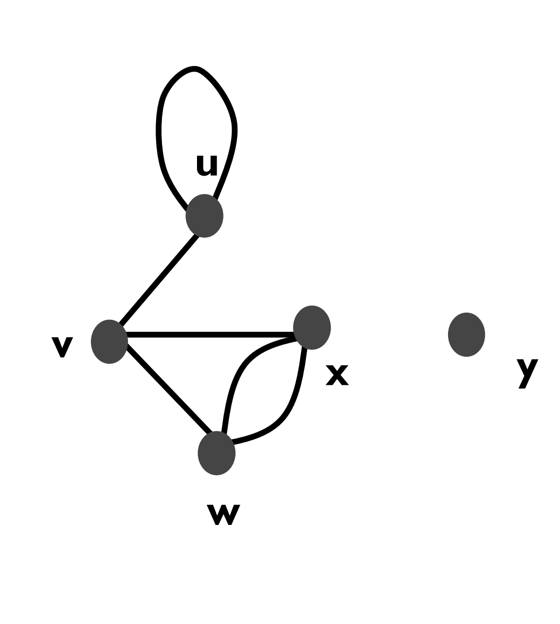
- $H=(V(H), E(H), \psi_H)$, onde
  - $V(H) = \{u, v, w, x, y\}$
  - $E(H)=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$
  - ψ_G :
    - $\psi_G(a)= (u, v)$, $\psi_G(b)= (u, u)$,
    - $\psi_G(c)= (v, w)$, $\psi_G(d)= (w, x)$,
    - $\psi_G(e)= (v, x)$, $\psi_G(f)= (w, x)$,
    - $\psi_G(g)= (u, x)$, $\psi_G(h)= (x, y)$

29 EXEMPLO 2:



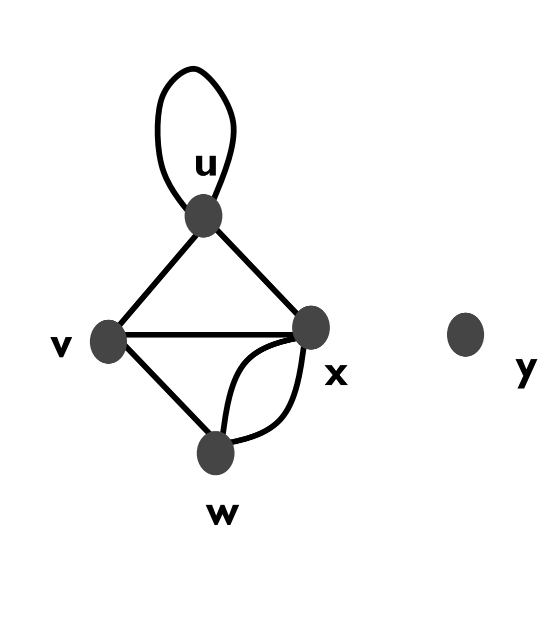
- H=(V(H), E(H), ψ_H), onde
  - V(H) ={u, v, w, x, y}
  - E(H)={a, b, c, d, e, f, g, h}
  - ψ_G :
    - ψ_G(a)= (u, v), ψ_G(b)= (u, u),
    - ψ_G(c)= (v, w), ψ_G(d)= (w, x),
    - ψ_G(e)= (v, x), ψ_G(f)= (w, x),
    - ψ_G(g)= (u, x), ψ_G(h)= (x, y)

30 EXEMPLO 2:



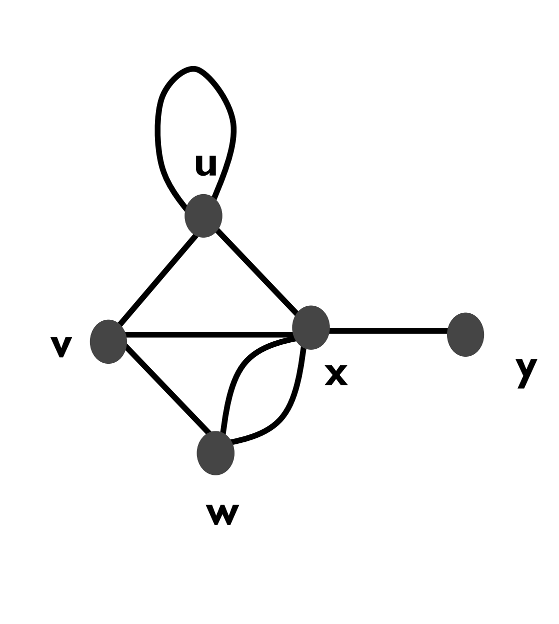
- $H=(V(H), E(H), \psi_H)$, onde
  - $V(H) = \{u, v, w, x, y\}$
  - $E(H)=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$
  - ψ_G :
    - $\psi_G(a)= (u, v)$, $\psi_G(b)= (u, u)$,
    - $\psi_G(c)= (v, w)$, $\psi_G(d)= (w, x)$,
    - $\psi_G(e)= (v, x)$, $\psi_G(f)= (w, x)$,
    - $\psi_G(g)= (u, x)$, $\psi_G(h)= (x, y)$

EXEMPLO 2:



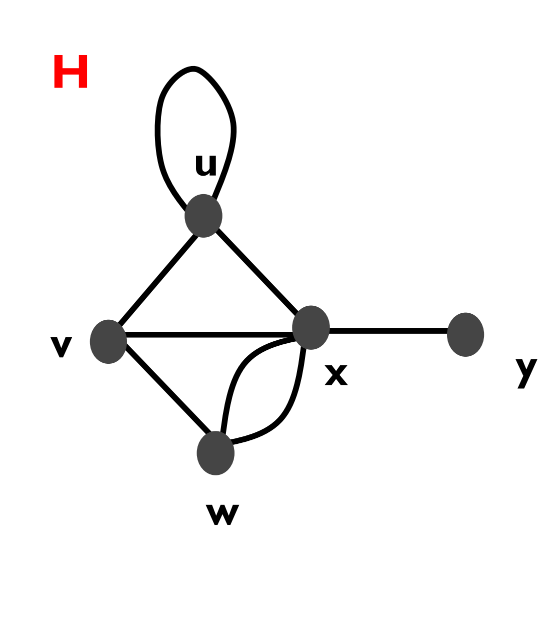
- H=(V(H), E(H), ψ_H), onde
  - V(H) ={u, v, w, x, y}
  - E(H)={a, b, c, d, e, f, g, h}
  - ψ_G :
    - ψ_G(a)= (u, v), ψ_G(b)= (u, u),
    - ψ_G(c)= (v, w), ψ_G(d)= (w, x),
    - ψ_G(e)= (v, x), ψ_G(f)= (w, x),
    - ψ_G(g)= (u, x), ψ_G(h)= (x, y)

EXEMPLO 2:



- H=(V(H), E(H), ψ_H), onde
  - V(H) ={u, v, w, x, y}
  - E(H)={a, b, c, d, e, f, g, h}
  - ψ_G :
    - ψ_G(a)= (u, v), ψ_G(b)= (u, u),
    - ψ_G(c)= (v, w), ψ_G(d)= (w, x),
    - ψ_G(e)= (v, x), ψ_G(f)= (w, x),
    - ψ_G(g)= (u, x), ψ_G(h)= (x, y)

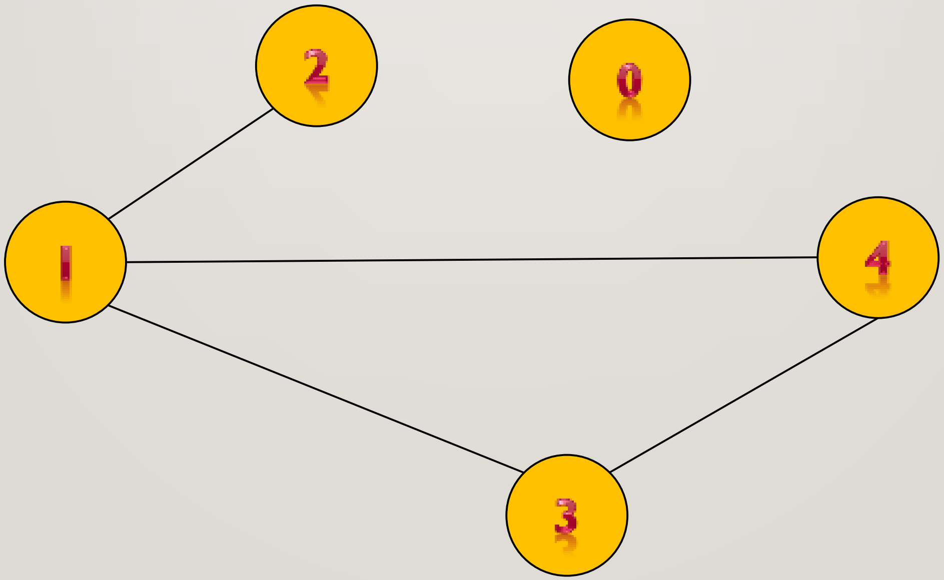
33 EXEMPLO 2:



- $H=(V(H), E(H), \psi_H)$, onde
  - $V(H) =\{u, v, w, x, y\}$
  - $E(H)=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$
  - ψ_G :
    - $\psi_G(a)= (u, v)$, $\psi_G(b)= (u, u)$,
    - $\psi_G(c)= (v, w)$, $\psi_G(d)= (w, x)$,
    - $\psi_G(e)= (v, x)$, $\psi_G(f)= (w, x)$,
    - $\psi_G(g)= (u, x)$, $\psi_G(h)= (x, y)$

34 OUTRA FORMA DE REPRESENTAR: EXEMPLO

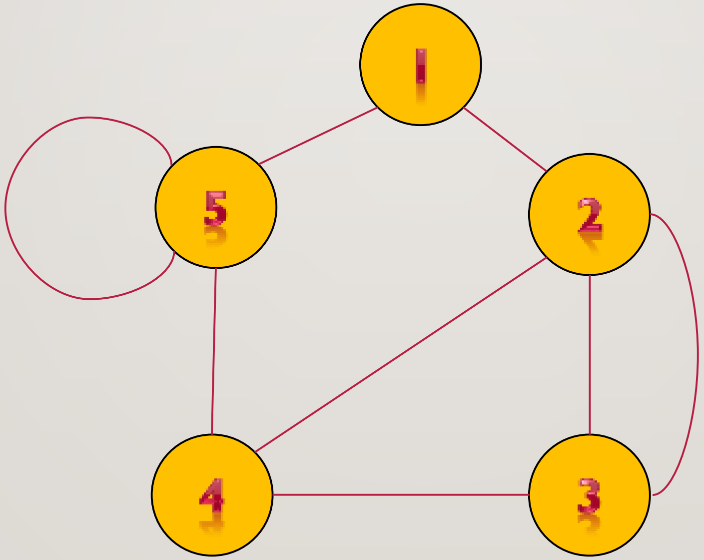
- $V = \{0,1,2,3,4\}$
- $E = \{(1,2), (1,3), (1,4), (3,4)\}$

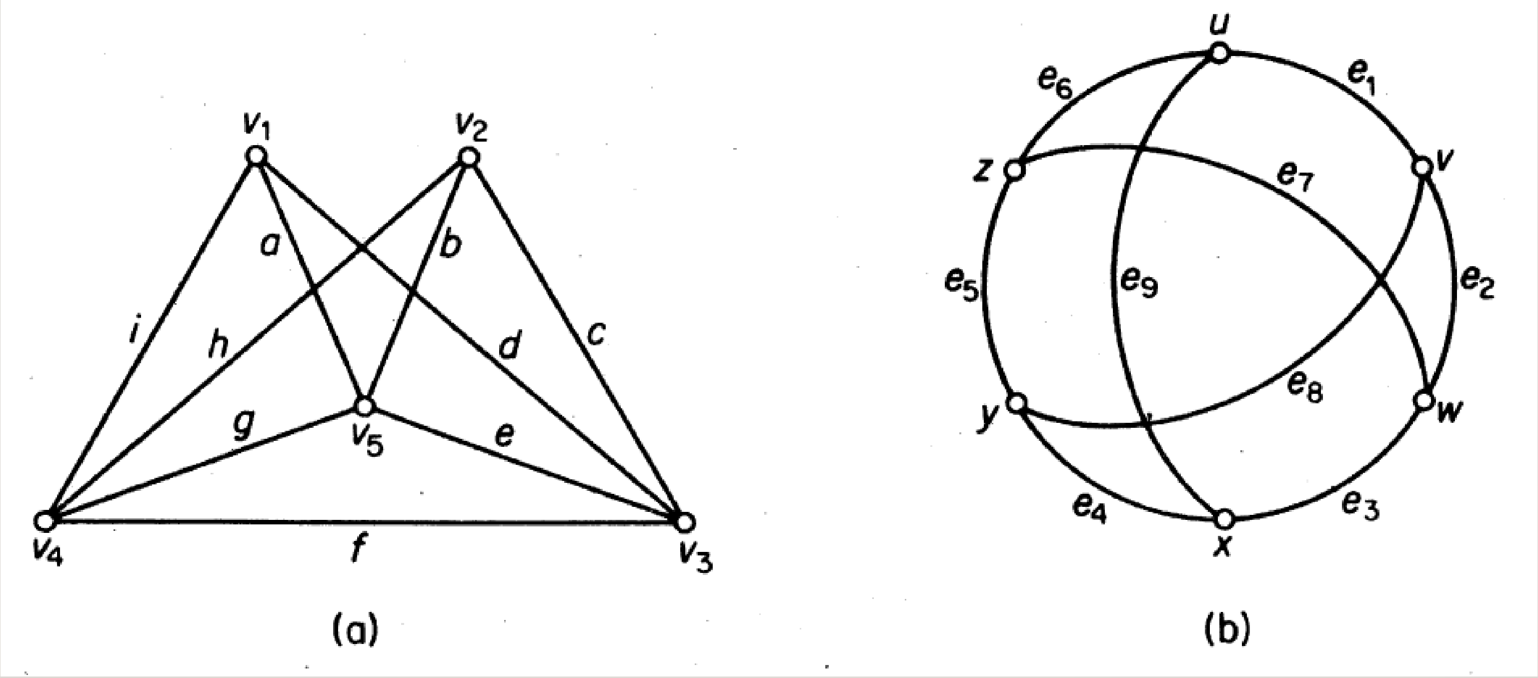


CONCEITOS DE GRAFOS

36

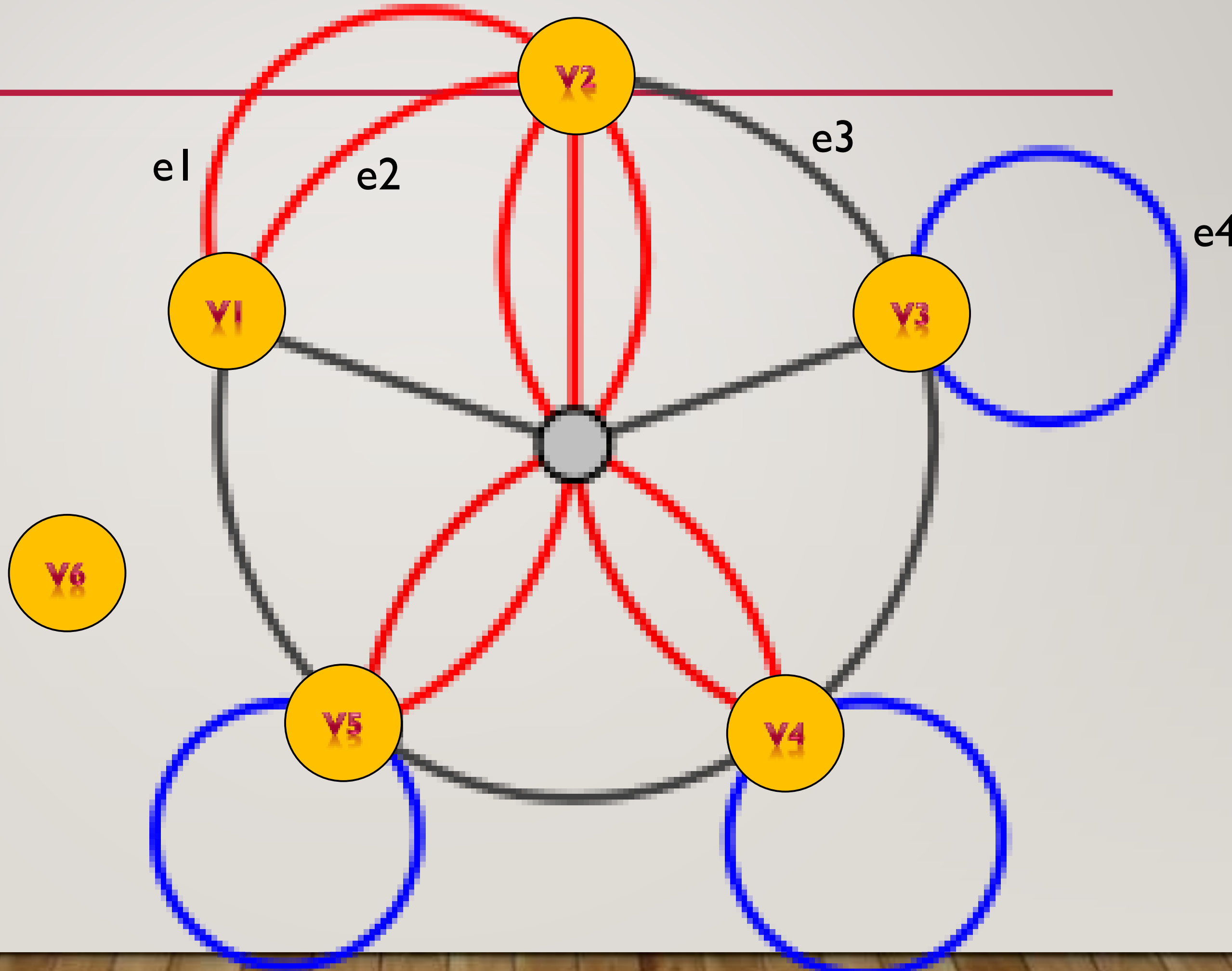
GRAFO PLANAR



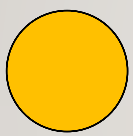

v1
v2
a
b
i
h
d
c
g
v5
e
v4
f
v3
(a)
u
e6
e1
z
e7
v
e5
e9
e2
e8
y
w
e4
e3
x
(b)

38

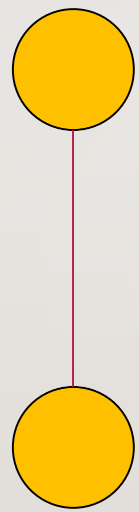
- \- Incidência
  - Adjacência
  - Laço
  - Link
  - Arestas Múltiplas
  - Multigrafo
  - Vértice Isolado



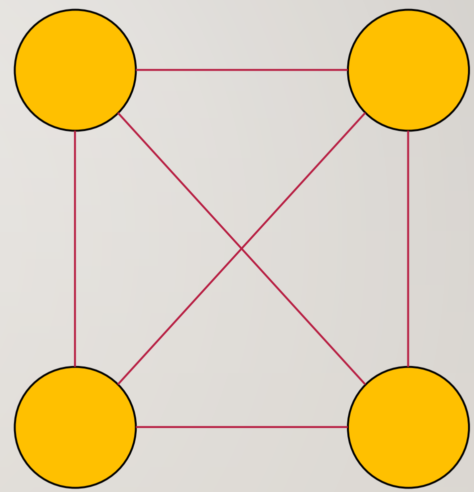
GRAFO TRIVIAL E GRAFO SIMPLES



A



B



C

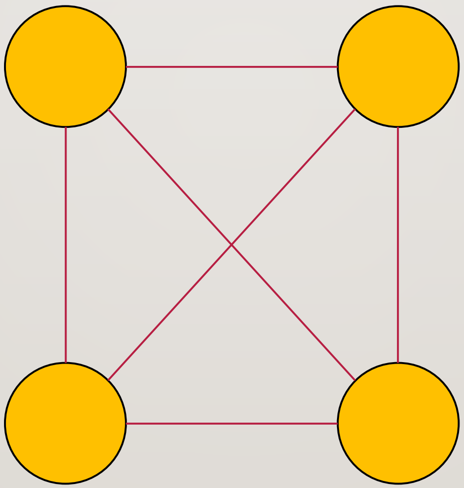
NOTAÇÃO

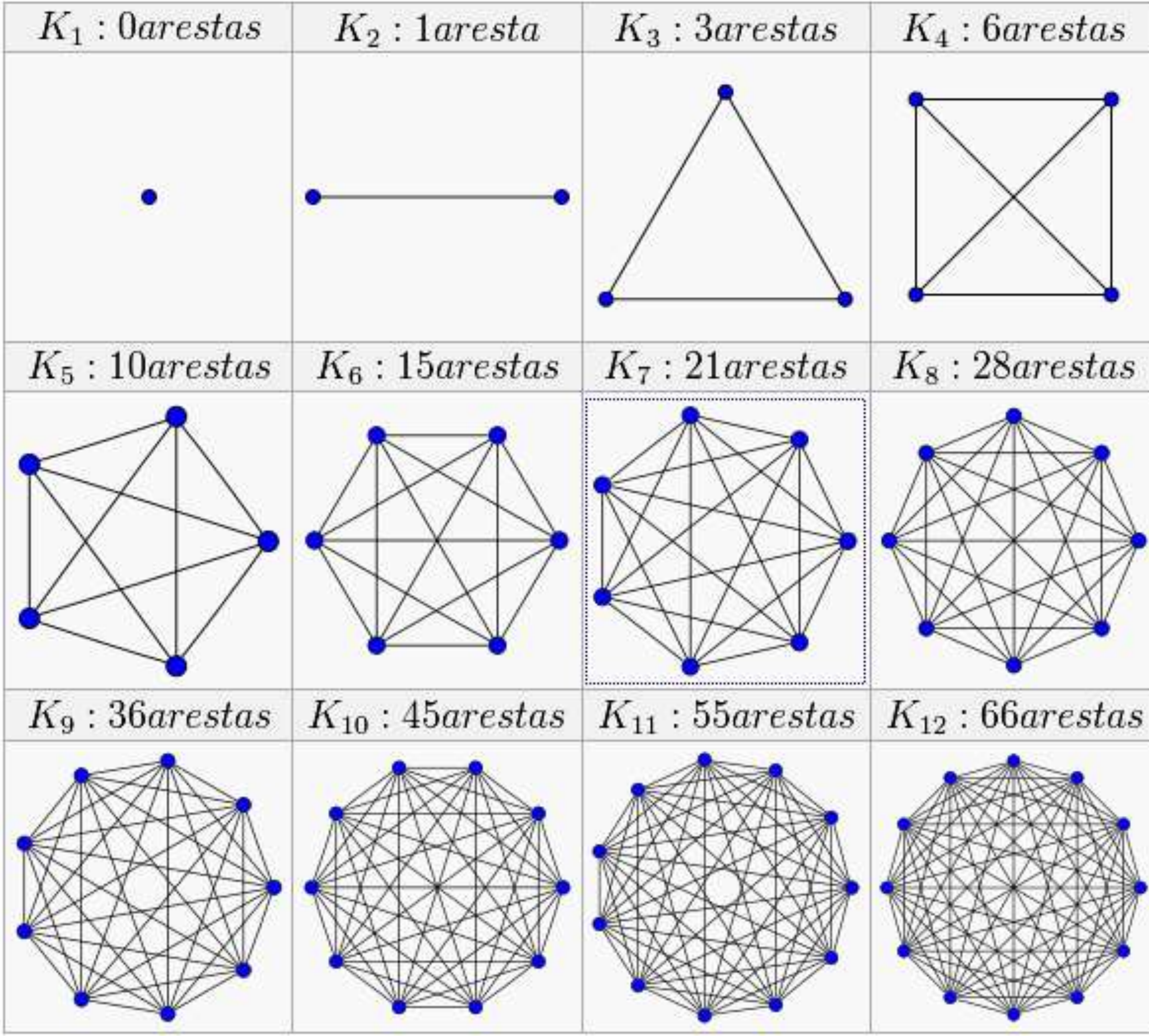
- **G**: Grafo com conjunto de vértices V(G) e conjunto de arestas E(G).

- **n**: número de vértices de G
- **m**: número de arestas de G

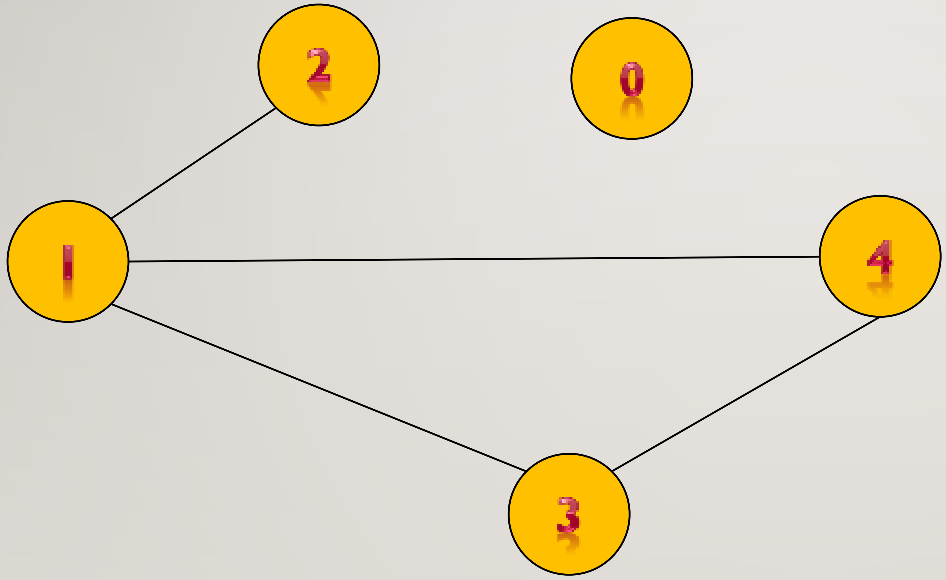
- m <= $\binom{n}{2}$
- m <= $\frac{n(n-1)}{2}$

GRAFO COMPLETO

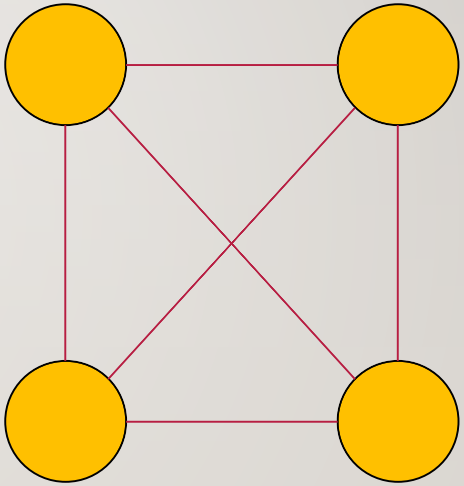



$K_1 : 0arestas$
$K_2 : 1aresta$
$K_3 : 3arestas$
$K_4 : 6arestas$
$K_5 : 10arestas$
$K_6 : 15arestas$
$K_7 : 21arestas$
$K_8 : 28arestas$
$K_9 : 36arestas$
$K_{10} : 45arestas$
$K_{11} : 55arestas$
$K_{12} : 66arestas$

43 GRAFO REGULAR

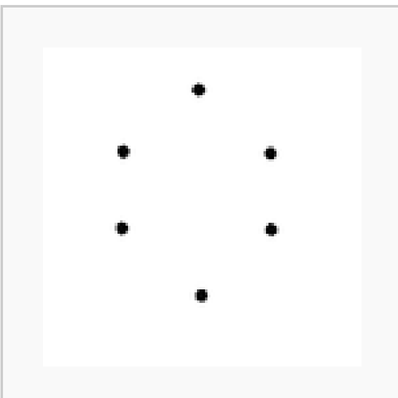


Não é Grafo Regular

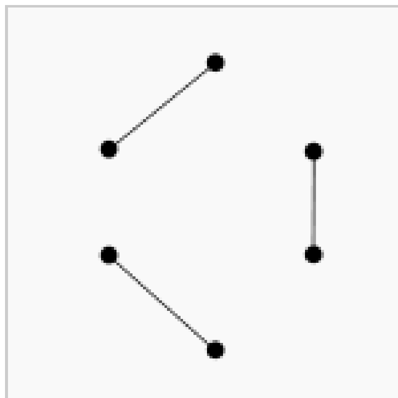


Grafo Regular de grau 3

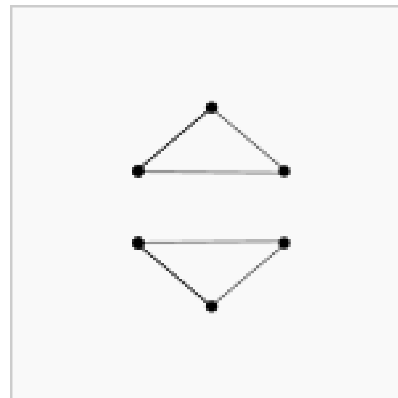
OUTROS EXEMPLOS



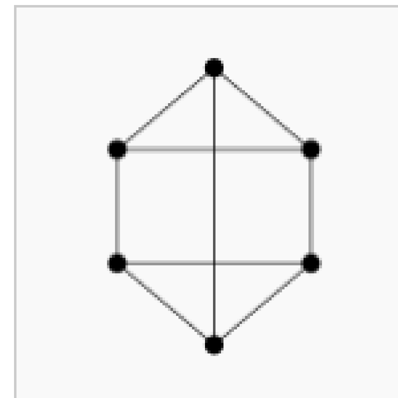
grafo 0-regular



grafo 1-regular



grafo 2-regular



grafo 3-regular

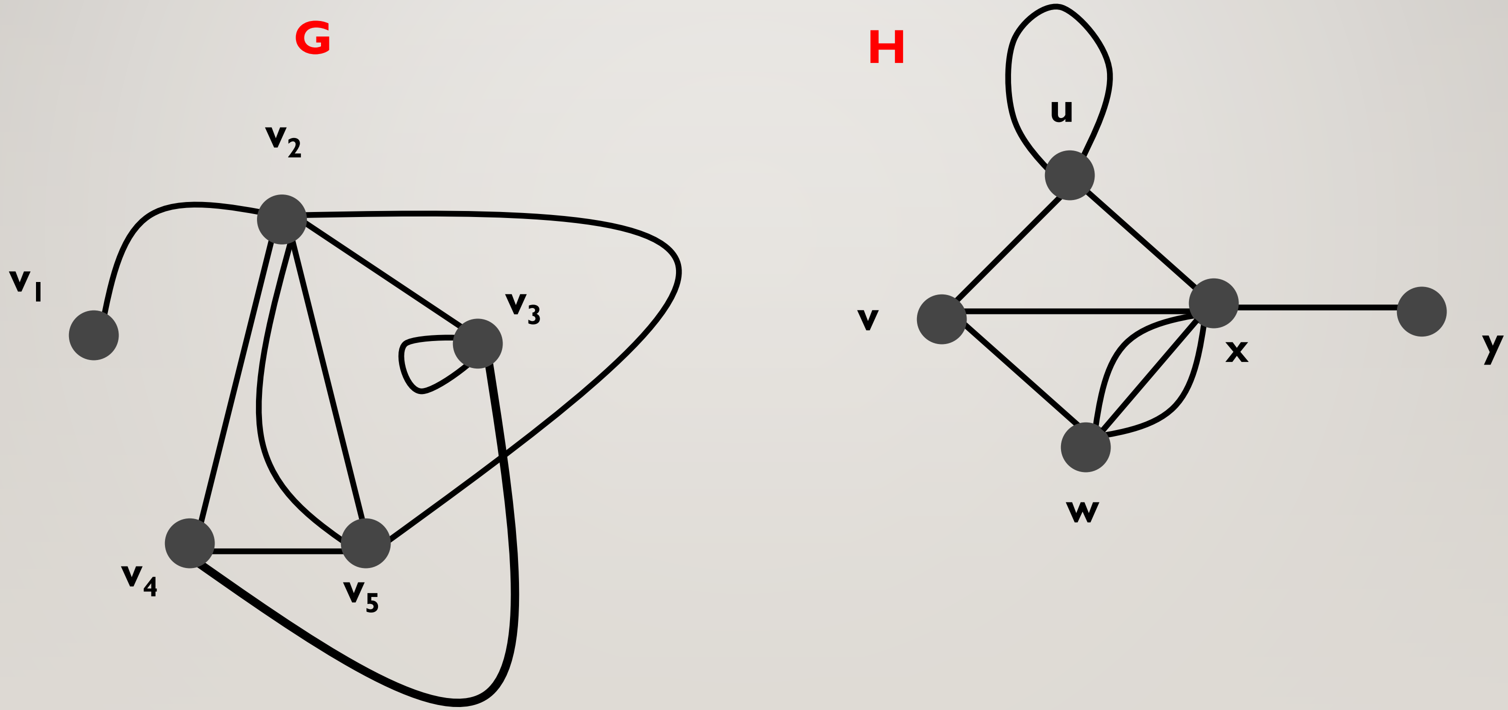
45 ISOMORFISMO

- Dois grafos G e H são idênticos se
  - $V(G)=V(H)$;
  - $E(G)=E(H)$;
  - $\psi_G = \psi_H$

ISOMORFISMO ENTRE GRAFOS

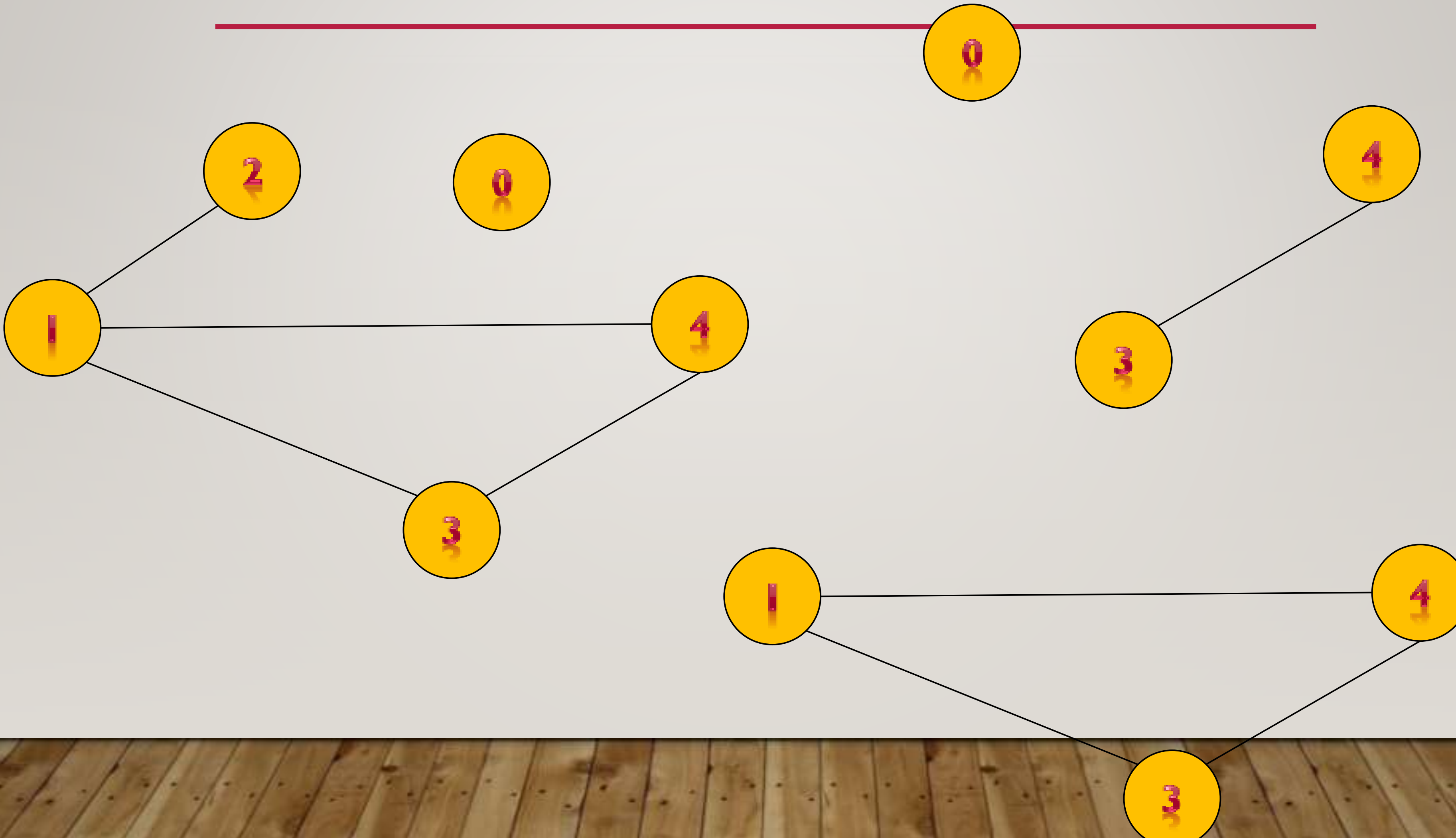
- Um isomorfismo entre dois grafos é uma bijeção f de V(G) em V(H) tal que
- $(u,v) \in V(G) \Leftrightarrow (f(u),f(v)) \in V(H)$

47 EXEMPLO: G ≅ H ?

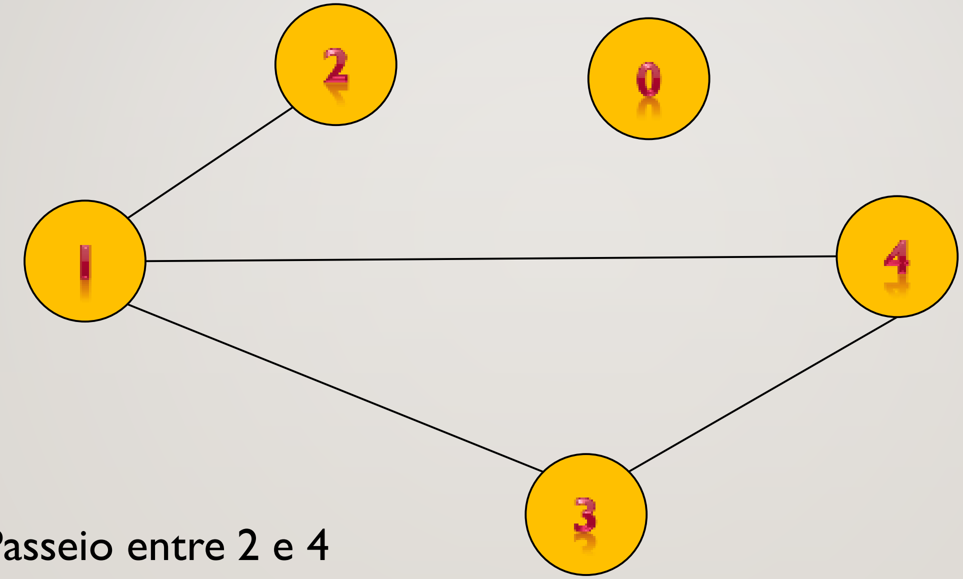


Para mostrar que dois grafos são isomorfos,
devemos indicar um isomorfismo entre eles.

SUBGRAFO



PASSEIO



- Passeio entre 2 e 4
- (2, (2,1), (1,3), (3,4), 4)

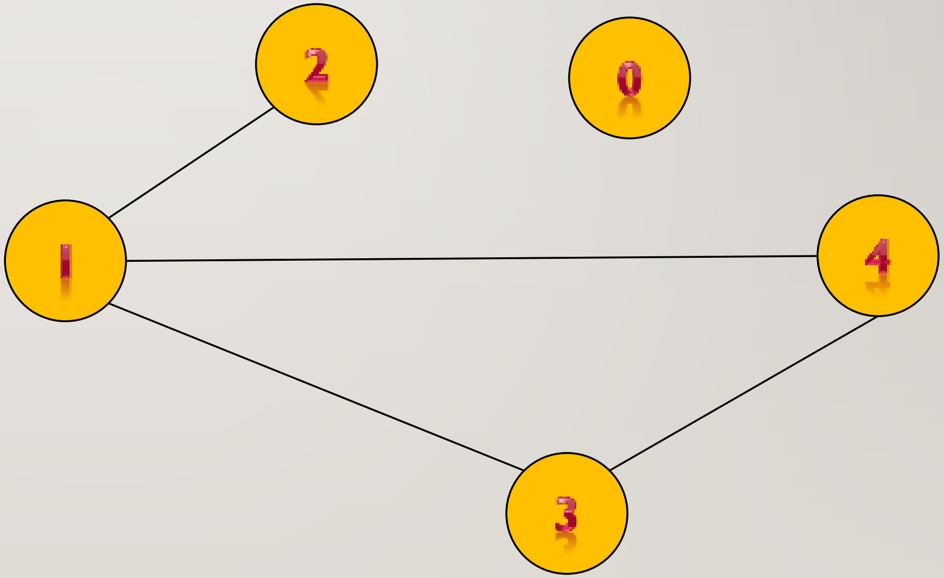
CAMINHO SIMPLES, TRAJETO E CICLOS

- Quando todos os vértices de um passeio são distintos, recebe o nome de caminho simples.
- Quando todas as arestas são distintas, o caminho recebe o nome de trajeto
- Um ciclo é um caminho $v_1, v_2, \ldots, v_k$, tal que $v_1 = v_k$ e $k \geq 3$

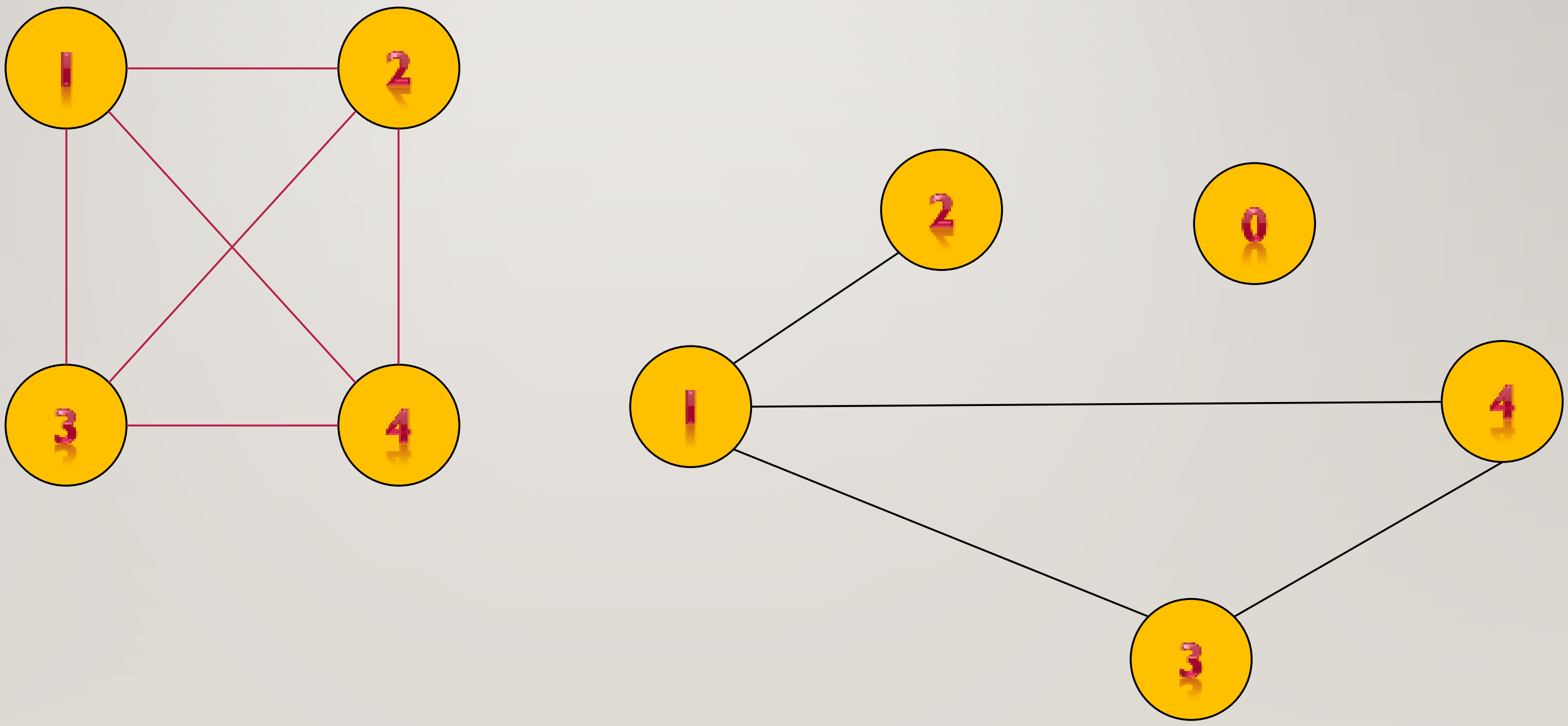
- Caminho simples: 2,1,3,4

- Trajeto: 1,3,4,1,2

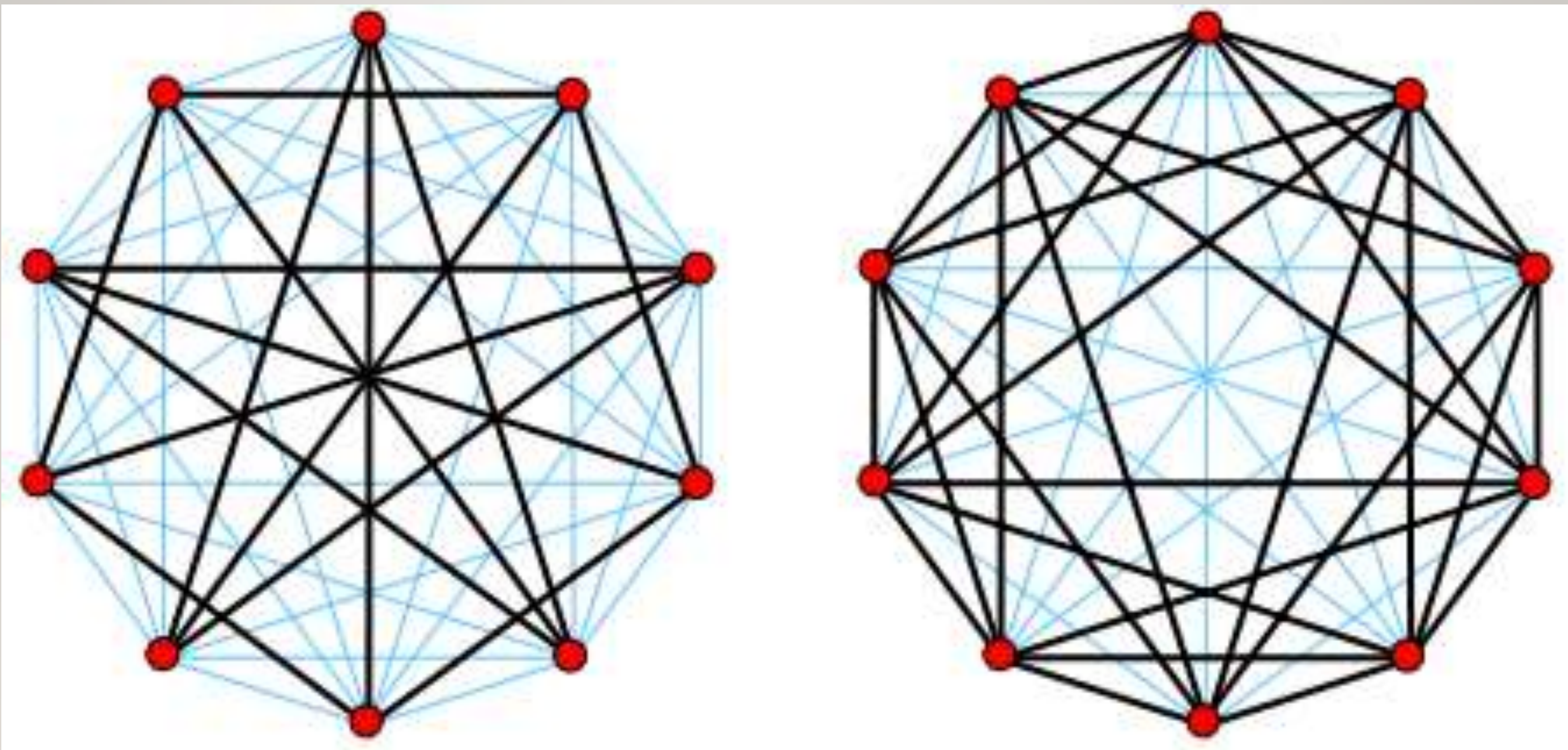
- Ciclo: 1,3,4,1



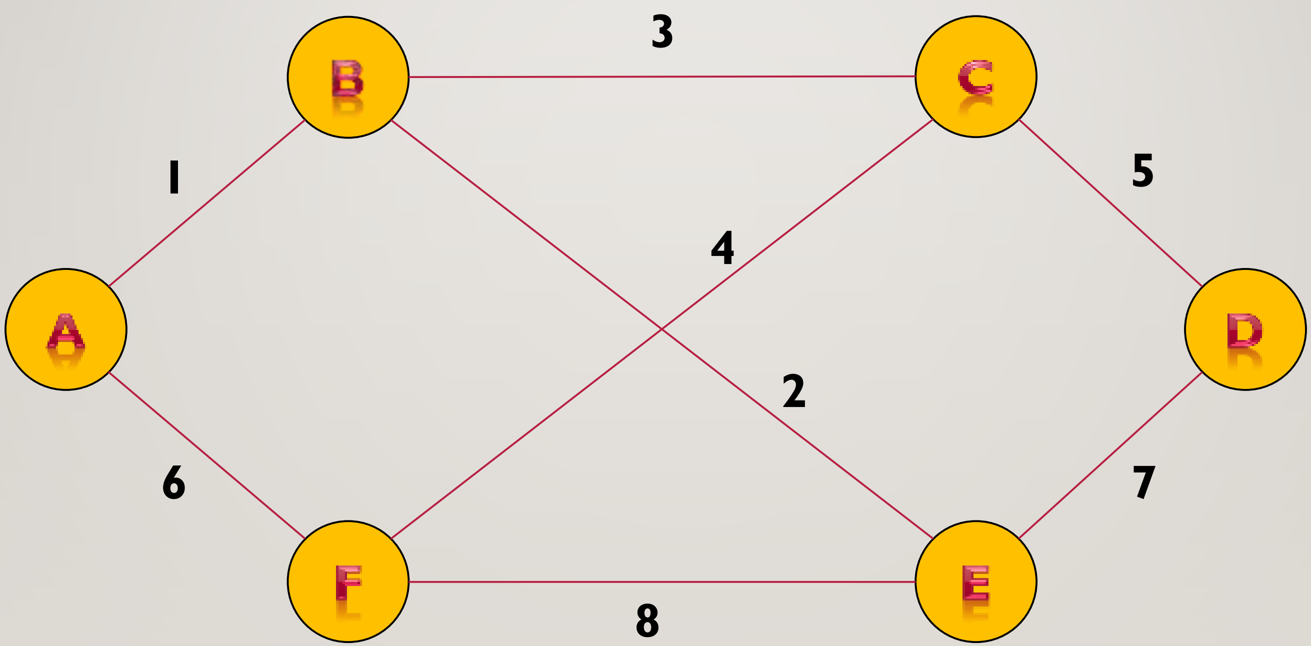
52 GRAFO CONEXO E DESCONEXO



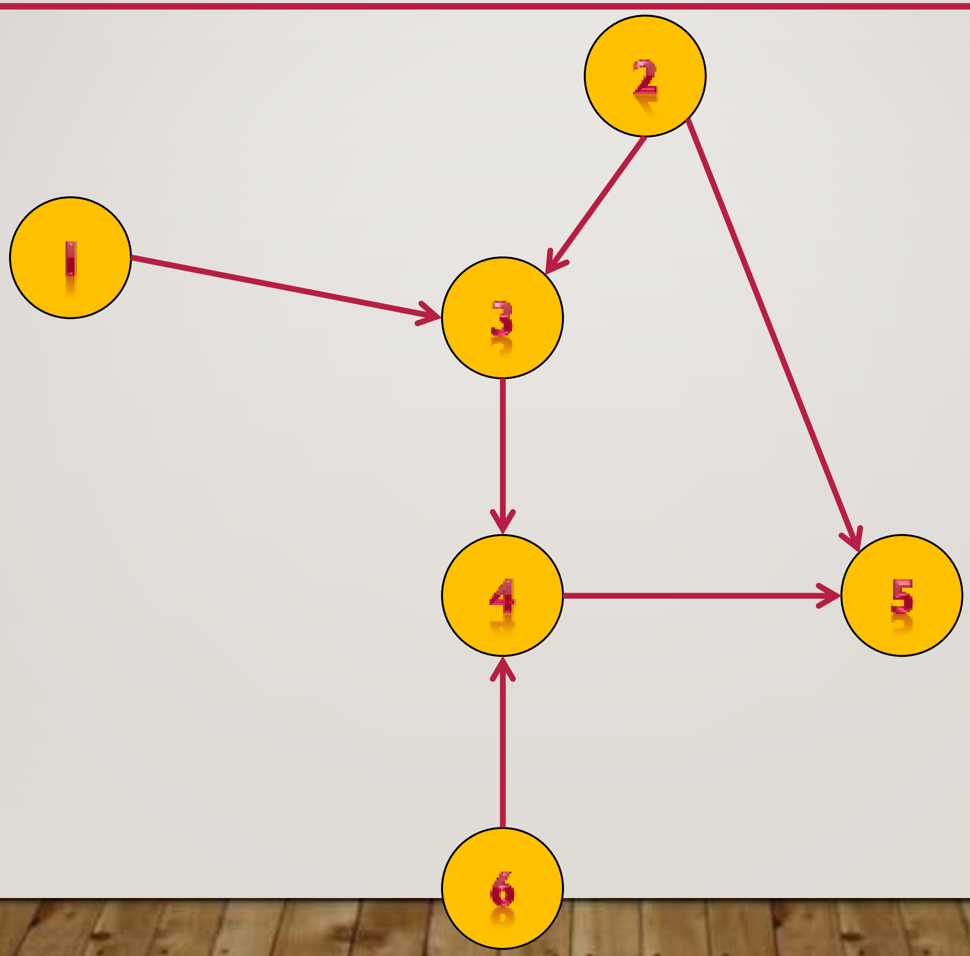
53 GRAFO COMPLEMENTAR



GRAFO PONDERADO



55 DIGRAFO



DIGRAFO

- Grafo Orientado
- Deve-se respeitar a orientação das arestas

57

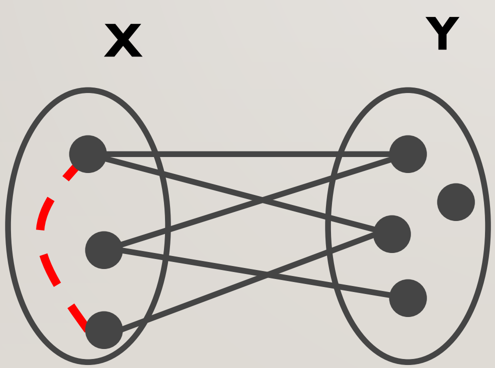
DIGRAFO

- Grau de entrada: número de arestas que incidem no vértice
  - Vértice Fonte: grau de entrada = 0

- Grau de saída: número de arestas que partem do vértice
  - Vértice Sumidouro: grau de saída = 0

CLASSES ESPECIAIS DE GRAFOS

- Grafo Bipartido: é aquele em que o conjunto de vértices pode ser particionado em dois subconjuntos X e Y, tal que cada aresta tem um extremo em X e um em Y.



(X,Y) é um bipartição do grafo

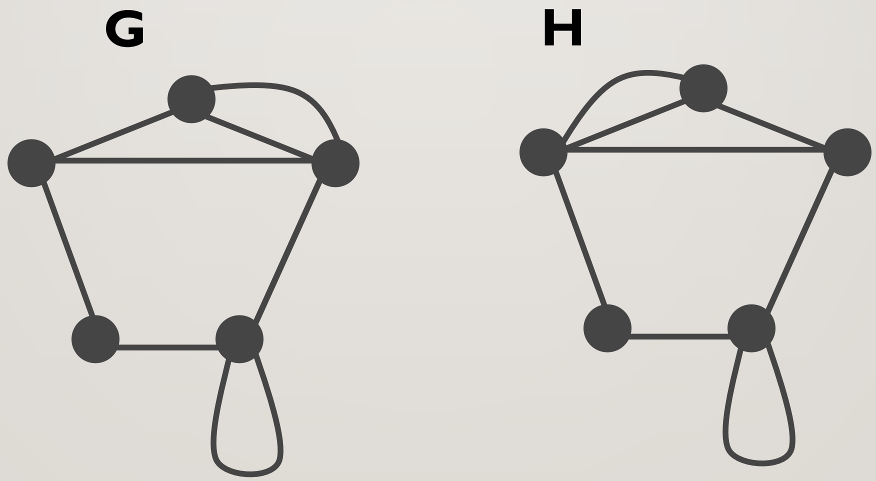
CLASSES ESPECIAIS DE GRAFOS

- Grafo Bipartido Completo: é um grafo bipartido com bipartição (X,Y) em que cada vértice de X é adjacente a cada vértice de Y.

- Se |X|=m e |Y|=n, então denotamos tal grafo por $K_{m,n}$

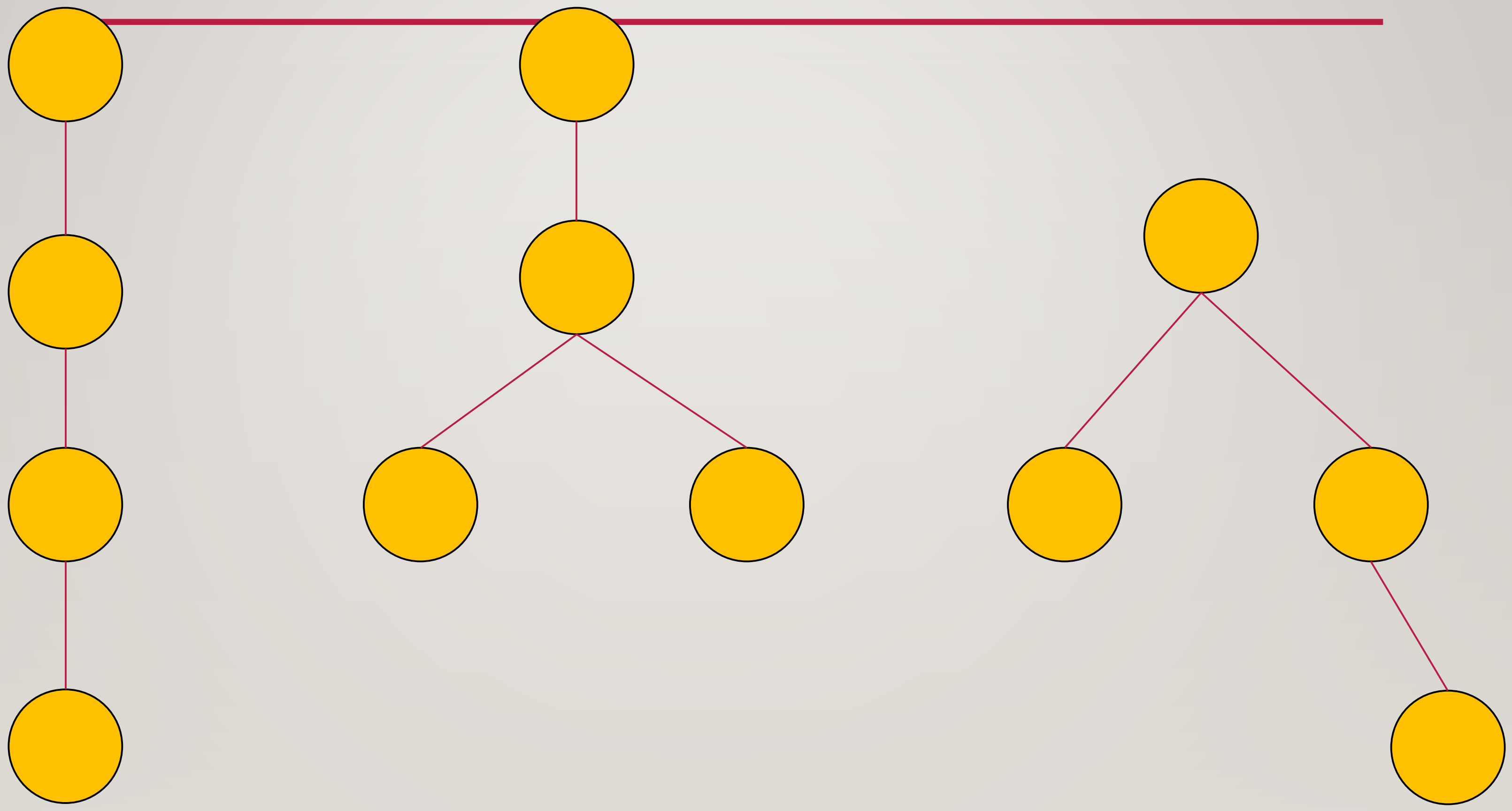
60 EXERCÍCIOS

- 1. Mostre que os seguintes grafos não são isomorfos:



ÁRVORES

- Um Grafo $T(V, E)$
  - Não possui ciclos
  - Conexo
  - Seja $v \in V$, se v possui grau menor ou igual a 1, então v é uma folha
  - Uma árvore com n vértices possui $n - 1$ arestas.
  - Um grafo G é uma árvore, se, e somente se, existir um único caminho entre cada par de vértices de G.



Exercício

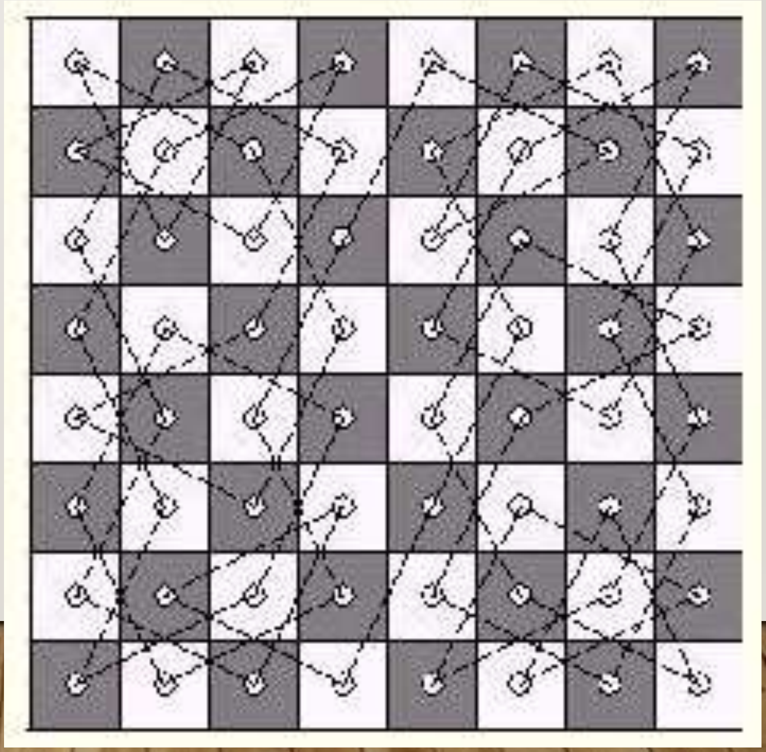
- Quantos vértices e quantas arestas tem o grafo da dama 3–por–3?
- Defina o grafo do rei, o grafo do bispo, o grafo do cavalo e o grafo da torre 4–por-4. Quantos vértices e quantas arestas tem cada grafo?

- O grafo **das palavras** é definido assim: cada vértices é uma palavra da língua portuguesa e duas palavras são adjacentes se diferem em exatamente uma posição. Por exemplo, rato e ralo são adjacentes, enquanto ralo e rota não são. Faça uma figura da parte do grafo definida pelas palavras abaixo:
- caiado cavado cavalo girafa girava ralo ramo rata rato
- remo reta reto rota vaiado varado virada virado virava

EXEMPLOS

- Vértices são adjacentes se uma dama do jogo de xadrez pode saltar de um deles para o outro em um só movimento.

- Ex. Grafo do cavalo



FIM DA AULA 10

Próxima aula:

Grafos: Representação e Busca