ESTRUTURAS DE DADOS II

MSC. DANIELE CARVALHO OLIVEIRA

DOUTORANDA EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO – USP

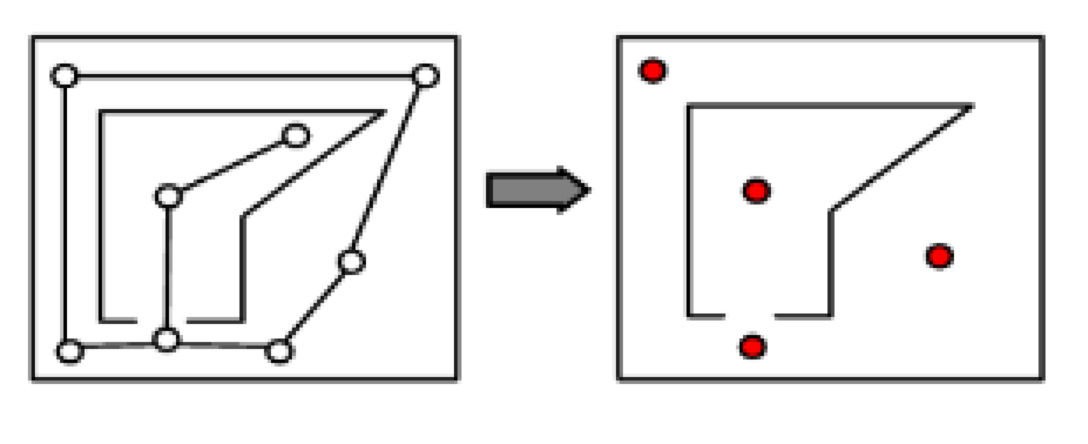
MESTRE EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO – UFU

BACHAREL EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO - UFJF

COBERTURA E EMPARELHAMENTO

3 COBERTURAS

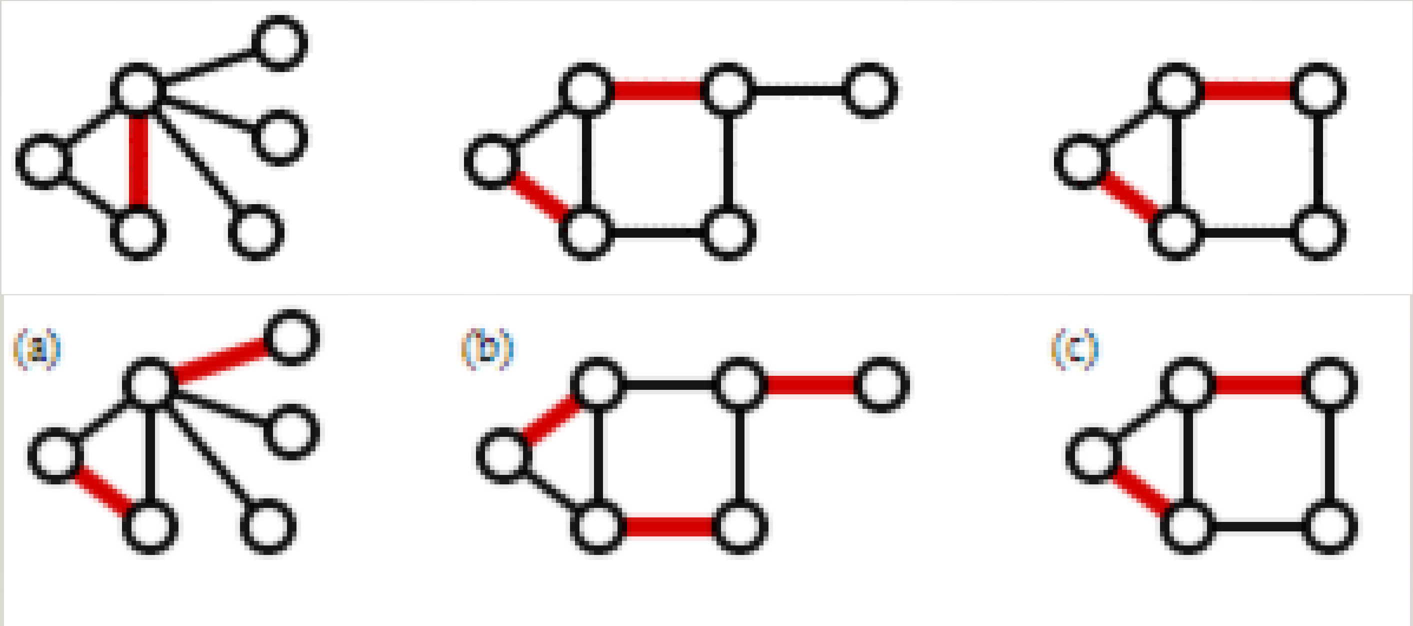
- Uma cobertura de vértices de um grafo G é um subconjunto Q ∈ G, tal que contém no mínimo um vértice de cada aresta de G.
- Podemos dizer que os vértices em Q cobrem A(G)



4 EMPARELHAMENTO (MATCHING)

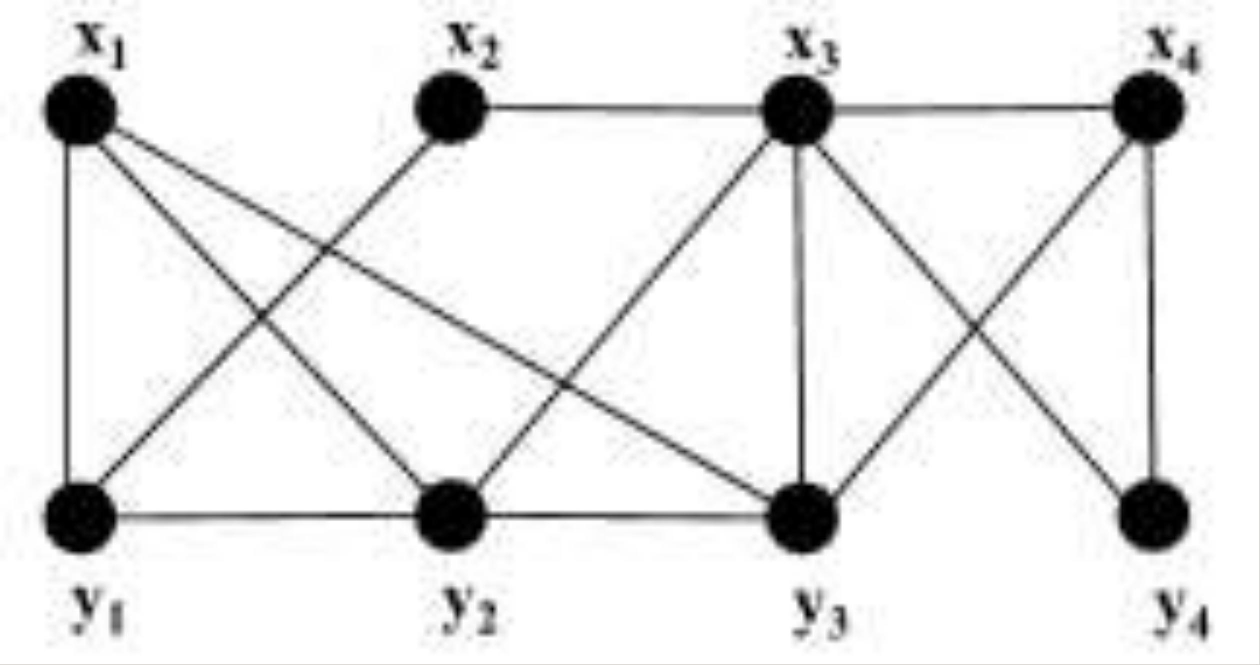
- Um matching em um grafo G é um conjunto de arestas que não formam loops e que não compartilham vértices entre si.
- Um vértice incidente às arestas de um matching M é dito saturado por M.
- Um matching perfeito de G satura todos os vértices de G.

5 EXEMPLOS

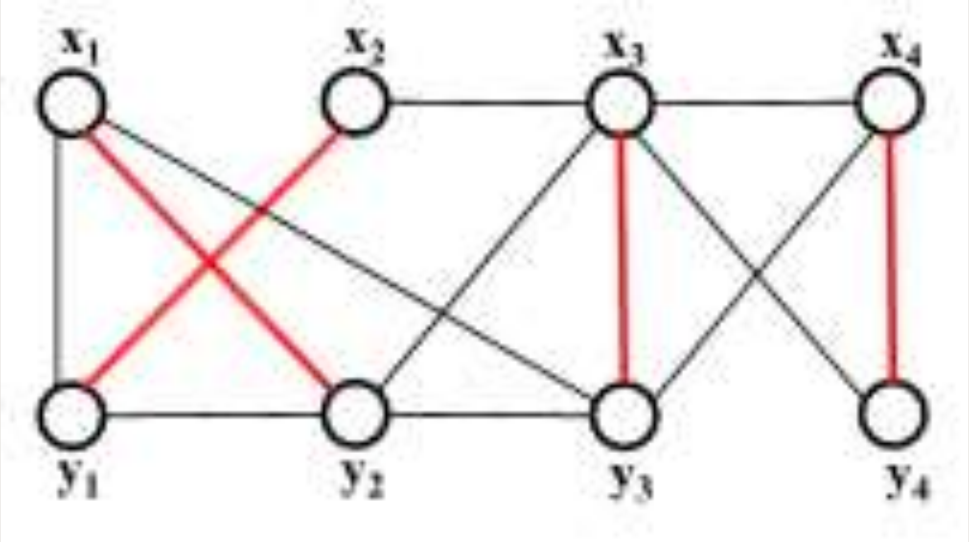


6 EXERCÍCIO

- Determine um matching e um matching perfeito para o grafo abaixo



7 SOLUÇÃO



- É um matching perfeito? Sim

8

MATCHING

- O tamanho de um matching M é igual a quantidade de arestas de M.
- Um matching é maximal se todo a aresta que não está em M é adjacente a uma que está.
- Se o matching for o de maior cardinalidade ele é chamado de matching máximo.

9 MATCHING

- Um **caminho alternante** em um matching M é um caminho cujas arestas alternam entre as que estão e não estão em M.
- Um caminho alternante cujos vértices extremos não são saturados por M é um **caminho de aumento** de M.

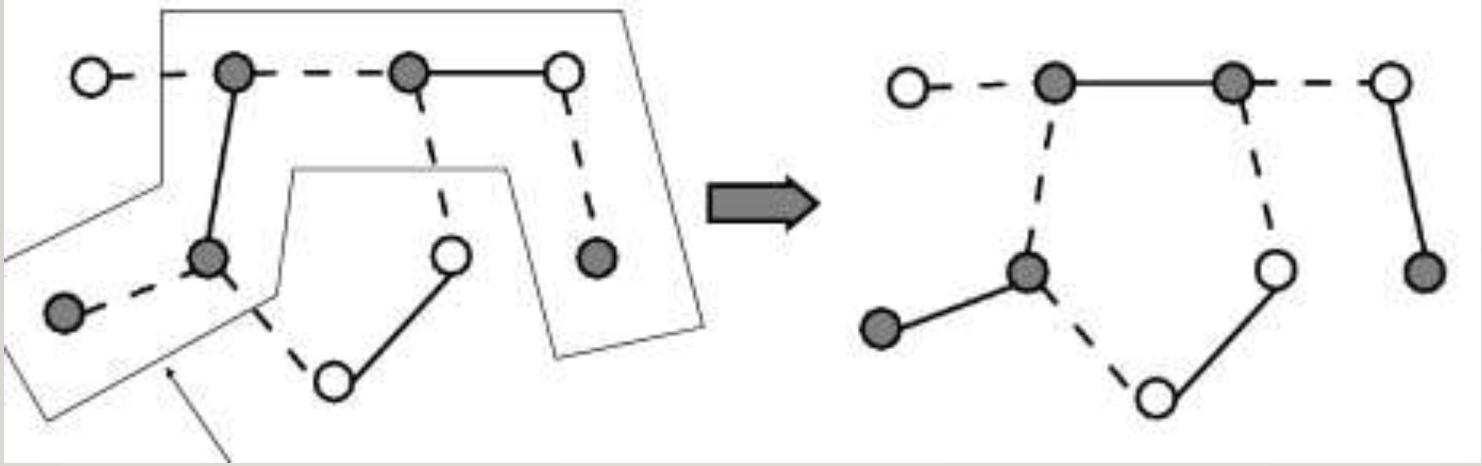
MATCHING

- Quando M possuir um caminho de aumento podemos trocar as arestas deste caminho, substituindo aquelas que não estão em M pelas que estão. Isto irá aumentar em uma unidade o tamanho do matching

O matching máximo não possui caminhos de aumento.

EXERCÍCIO

- O matching do grafo abaixo é maximal ou máximo?



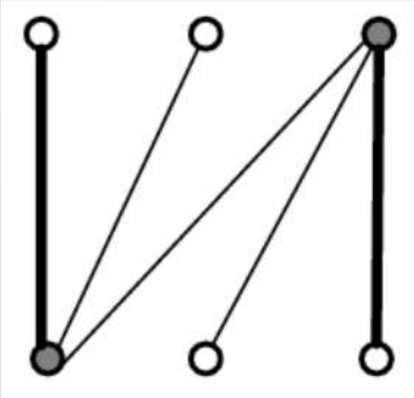
12

RELAÇÃO MIN-MAX

- A relação entre os problemas de matching e da cobertura de vértices corresponde a uma relação min-max, quando tomados sob a mesma instância de um problema.
- Quando a resposta para a maximização de um problema é igual a resposta para a minimização do outro sobre a mesma instância do problema então sabemos que o valor encontrado é ótimo
- Ou seja, obtendo um matching máximo e uma cobertura mínima de vértices de mesmo tamanho provamos que cada um deles é ótimo.
- O teorema que rege esta relação para os problemas de matching e de cobertura é o teorema de König-Egervary. Este teorema afirma que para grafos bipartidos o tamanho do matching máximo é igual ao tamanho da menor cobertura de vértices.

13 RELAÇÃO

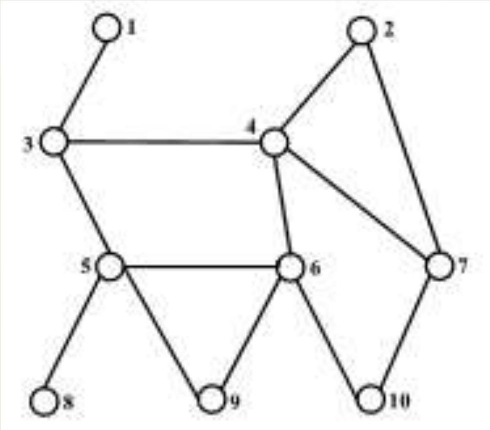
- Na figura abaixo, tanto a cardinalidade do matching (denotado pelas arestas mais escuras) quanto a da cobertura de vértices (ilustrado pelos vértices cinzas) é a mesma e igual a 2.



- a cardinalidade da cobertura proíbe matching com mais de 2 arestas; e o tamanho do matching proibe coberturas com menos que 2 vértices.

14 EXERCÍCIO

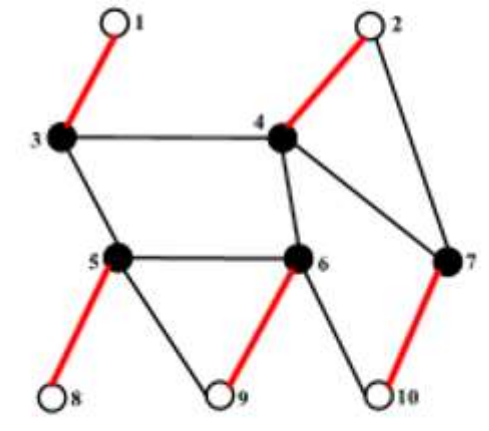
- Encontre a menor cobertura e o maior matching do grafo abaixo?



15

EXERCÍCIO

- Encontre a menor cobertura e o maior matching do grafo abaixo?



- A cardinalidade da cobertura é igual a 5 e o matching também.

16 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

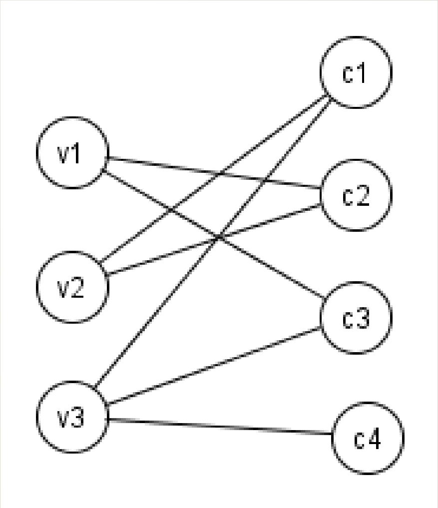
- O problema do emparelhamento em grafos pode ser definido da seguinte forma: dado um grafo não orientado, queremos encontrar um subconjunto M das arestas tal que nenhuma aresta de M tenha um vértice em comum com outra aresta de M, e a cardinalidade de M seja máxima. Informalmente, trata-se de conseguir "casar" o máximo número de pares de vértices adjacentes do grafo.

PRINCIPAIS APLICAÇÕES

- Suas aplicações mais comuns ocorrem nos problemas de:
  - **Atribuições pessoais** (tarefas e competências)
  - **Escalonamento**
  - **Redes ópticas** como em (Nomikos et al), onde o autor soluciona o problema de maximização do número de pedidos atendidos utilizando emparelhamento.
  - **Cobertura de vértices** também aparece, mas como uma dualidade fraca, sob a ótica da cardinalidade.

18 PRINCIPAIS APLICAÇÕES

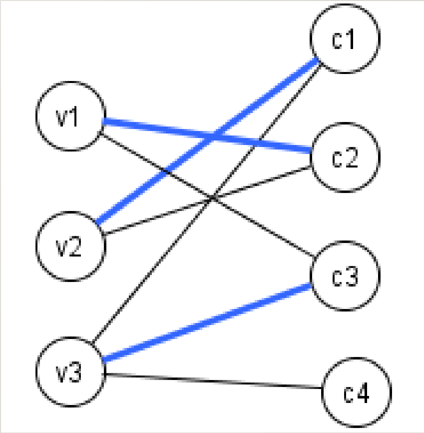
- Exemplo: suponha que há quatro candidatos c1, c2, c3 e c4 para as três vagas de uma empresa que serão chamadas de v1, v2 e v3 e que nem todos os candidatos tenha competência para todas as vagas.



grafo bipartido

19 POSSÍVEL SOLUÇÃO

- Será possível preencher todas as vagas disponíveis pela empresa? Uma combinação possível seria a de escolher o candidato c1 para a vaga v2, o candidato c2 para a vaga v1 e, finalmente, o candidato c3 para a vaga v3.



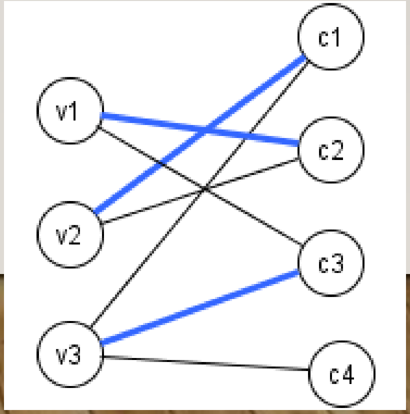
Exemplo de emparelhamento máximo

PRINCIPAIS MÉTODOS DE SOLUÇÃO

- **Algoritmo de Berge**
  - O Teorema de Berge fornece um algoritmo para obter um emparelhamento máximo. A ideia é procurar caminhos aumentáveis, a partir de vértices livres.
- **Algoritmo de Hopcroft e Karp**
  - Ao contrário do algoritmo de Berge, ao invés de em cada interação determinamos um único caminho aumentante, procuramos uma coleção maximal de caminhos aumentantes disjuntos, através da sequência de uma busca em largura e de uma em profundidade. Este é mais eficiente que o anterior.
- **Algoritmo de Ford-Fulkerson**
  - Podemos usar o algoritmo de Ford-Fulkerson para encontrar um emparelhamento máximo em um grafo bipartido não orientado. Basta transformar um problema no outro: O problema do emparelhamento máximo no problema de fluxo máximo;

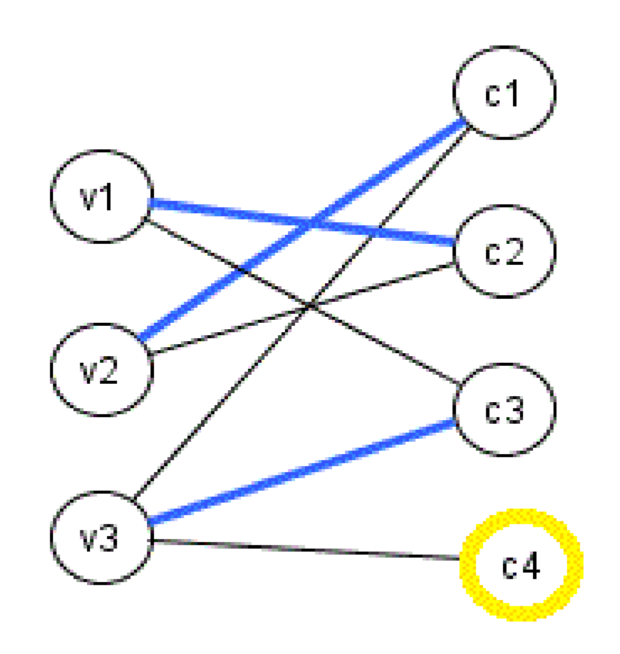
NOTAÇÃO, TEOREMA E DEFINIÇÕES UTILIZADAS

- $\oplus$ denota o ou exclusivo (também chamada de diferença simétrica) ente dois conjuntos, ou seja, se X e Y são dois conjuntos, então:
  - $X \oplus Y = (X \cup Y) \setminus (X \cup Y) = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$;
- Definição 1:
  - Dado um grafo G = (V, E) , um emparelhamento (matching) é um subconjunto de arestas $M \in E$ tal que, quaisquer duas arestas de M não são adjacentes.



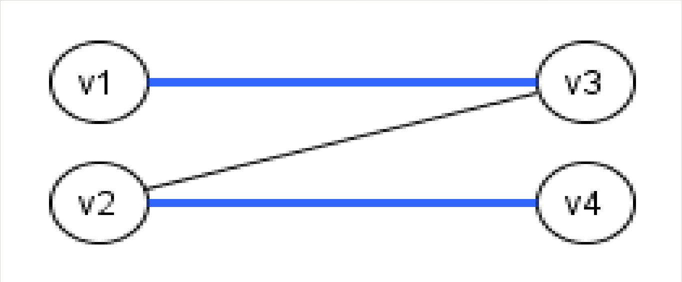
NOTAÇÃO, TEOREMA E DEFINIÇÕES UTILIZADAS

- Definição 2:
  - Seja M um emparelhamento de G.
  - Um vértice v diz-se saturado em M (ou emparelhado) se alguma aresta de M é incidente nesse vértice; caso contrário, v diz-se **livre**.

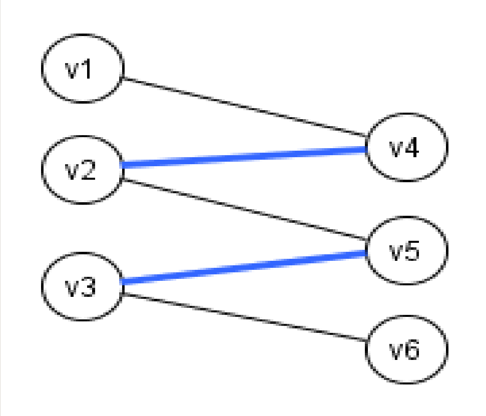


23 NOTAÇÃO, TEOREMA E DEFINIÇÕES UTILIZADAS

- Definição 3:
  - Seja M um emparelhamento de G.
  - Um caminho alternante (alternating) em G é um caminho cujas arestas estão alternadamente em E\M e em M .
  - Um caminho aumentável (augmenting) em G é um caminho alternante, cujos extremos são livres.



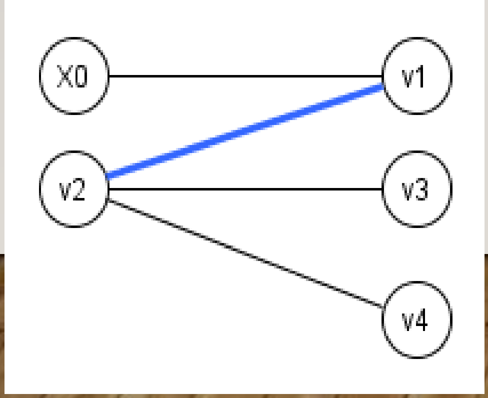
Caminho alternante

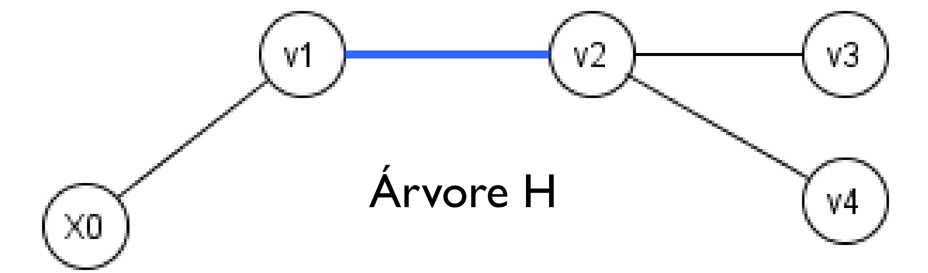


Caminho aumentável

NOTAÇÃO, TEOREMA E DEFINIÇÕES UTILIZADAS

- Definição 4:
  - Seja M um emparelhamento do grafo bipartido G e x0 um vértice livre de V1. Então, o subgrafo H de G é uma árvore alternante, com raiz no vértice x0 se:
    - H é uma árvore;
    - x0 ∈ V (G), isto é, x0 pertence ao conjunto de vértices de H;
    - Para qualquer vértice v da árvore H o único caminho de H de x0 para v é um caminho alternante.





Árvore H

25

NOTAÇÃO, TEOREMA E DEFINIÇÕES UTILIZADAS

- Teorema (de Berge, 1957)
  - Um emparelhamento M em G é máximo se e só se não existir nenhum caminho aumentável entre dois quaisquer vértices livres.

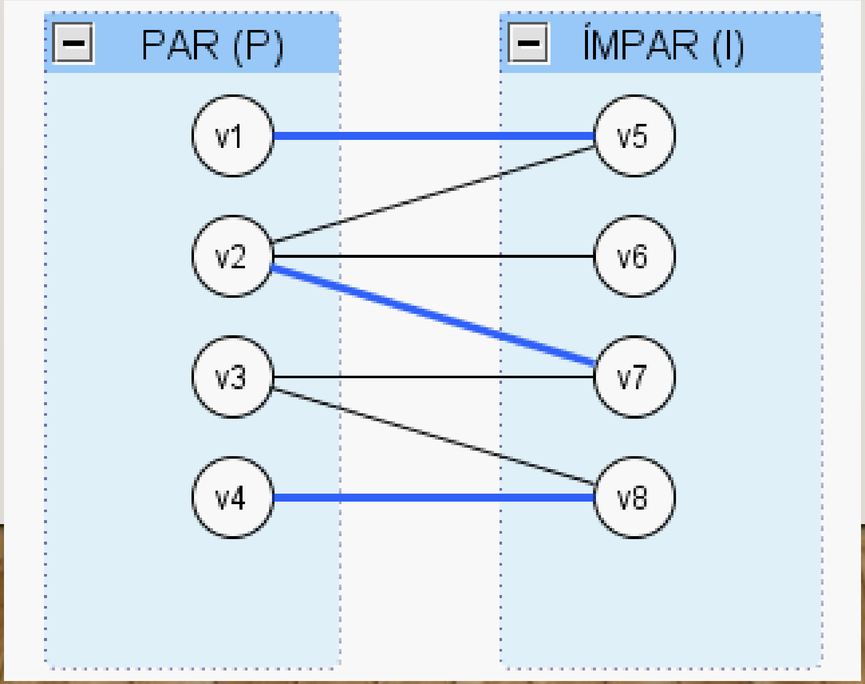
ALGORITMO DE BERGE

```
Algoritmo
  Input:  grafo bipartido G = (V1 ∪ V2, E)
  Output:  emparelhamento máximo M

  begin
    emparelhamento válido M
    while   existe caminho aumentável C   do
              M:= M ⊕ C
  end;
```

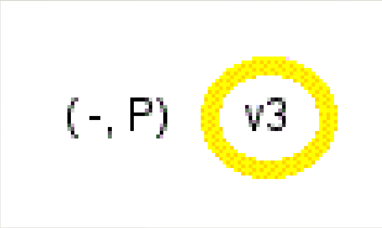
PESQUISA DE CAMINHOS AUMENTÁVEIS

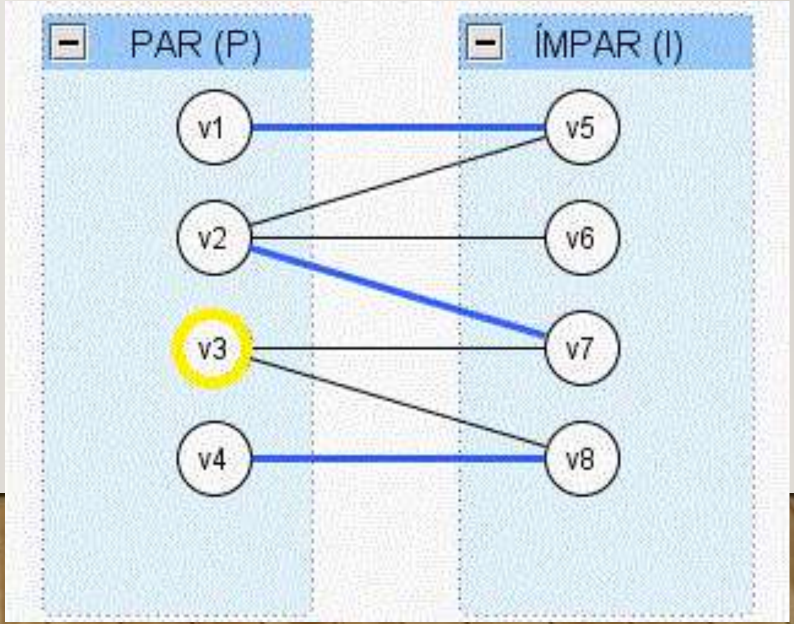
- Neste algoritmo, os vértices são rotulados como pares e ímpares. Como se trata de um grafo bipartido, consideramos que os vértices de V1 têm rótulo par e os vértices V2 têm rótulo ímpar.



28 PESQUISA DE CAMINHOS AUMENTÁVEIS

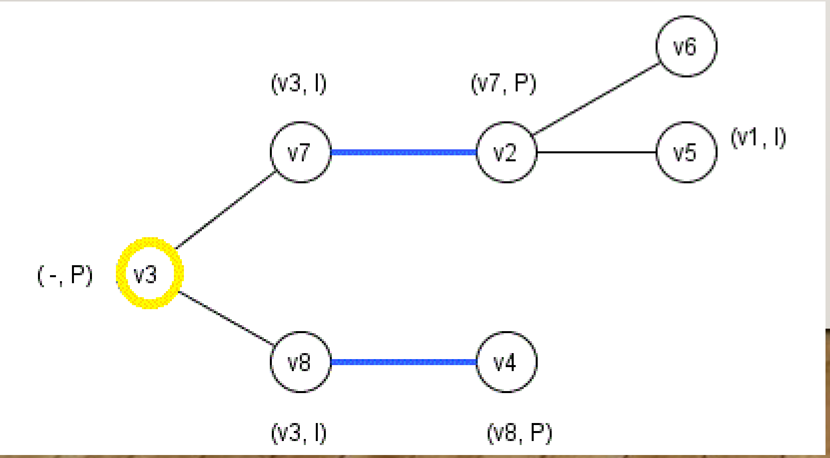
- Atribui-se o nível 0 ao vértice livre, que constitui a raiz da árvore. Os vértices de V2 aparecem a um nível de profundidade ímpar e os vértices de V1 a um nível de profundidade par.

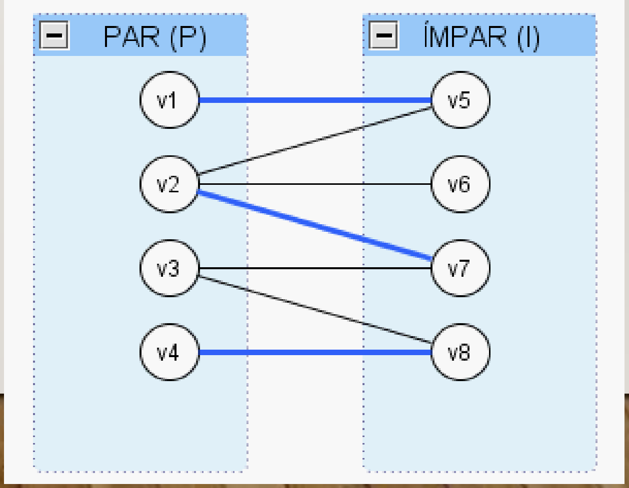




PESQUISA DE CAMINHOS AUMENTÁVEIS

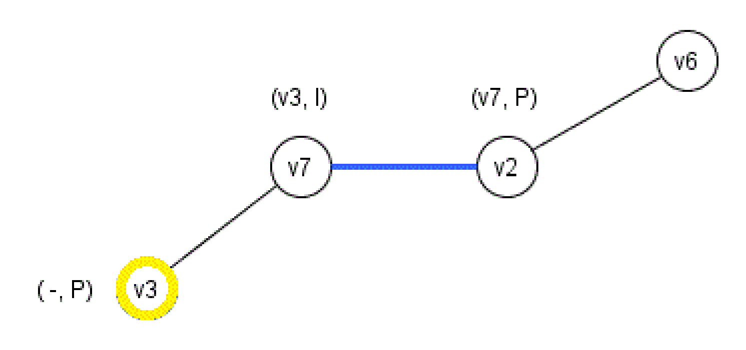
- Inicia-se a pesquisa de caminhos aumentáveis a partir de vértices livres em V1, procurando encontrar um vértice livre de V2. Se tal acontecer é detectada a existência de um caminho aumentável.
- Por outro lado, os vértices de V2 encontrados que não sejam livres, estão necessariamente emparelhados com vértices de V1. Assim, no processo de pesquisa, quando se encontra um vértice de V2 que não seja livre, atribui-se um rótulo ímpar a esse vértice e, simultaneamente, um rótulo par ao vértice de V que com ele está emparelhado.

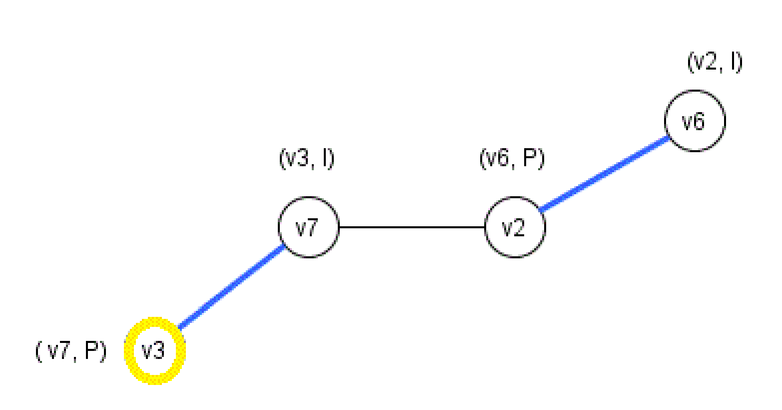




PESQUISA DE CAMINHOS AUMENTÁVEIS

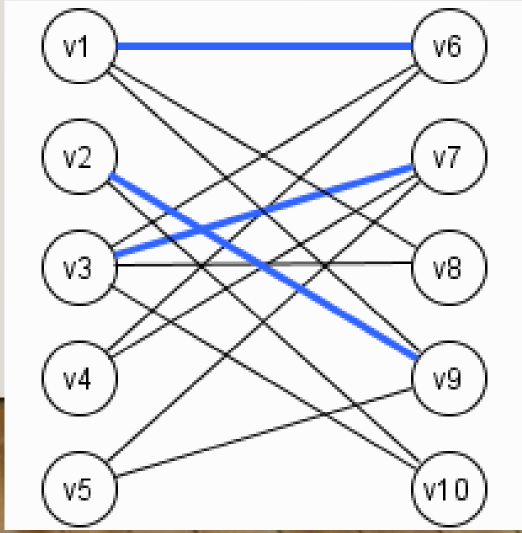
- O algoritmo mantém uma lista de vértices pares já rotulados, mas ainda não examinados, todos pertencentes a V1. Se esta lista ficar vazia sem ter sido encontrado nenhum vértice livre, então não existe nenhum caminho aumentável a partir do vértice livre escolhido.





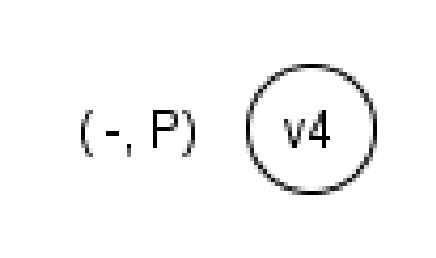
PROBLEMA PROPOSTO

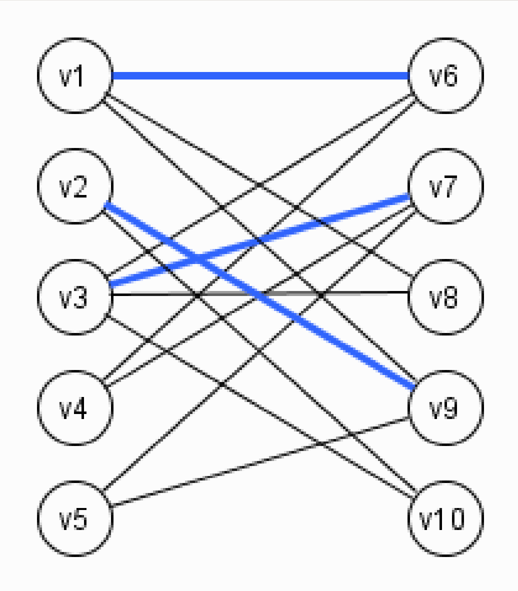
- Suponhamos que os vértices de um grafo representam as pessoas e as arestas a possibilidade de duas pessoas se casarem, estamos interessados em responder perguntas deste tipo: "De que forma podemos realizar o maior número de casamentos, de modo a que as pessoas casem com uma das pessoas de que gostam?"



EXECUÇÃO DO ALGORITMO

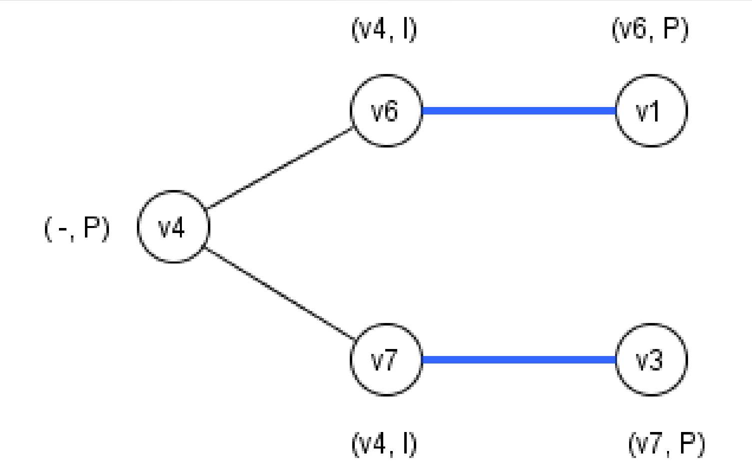
- A pesquisa de caminhos aumentáveis, vai começar num vértice livre de V1, por exemplo, em v4 . Este vértice é rotulado como (-, P) , significando que não tem precedente e se trata de um vértice par.

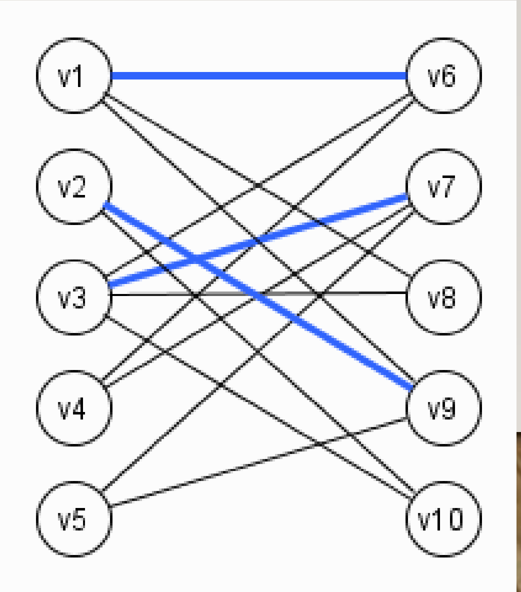




33 EXECUÇÃO DO ALGORITMO

- A análise de v4 consiste em rotular os vértices adjacentes a ele, que são v6 e v7, como (v4, I), indicando que são vértices ímpares. Como ambos estes vértices estão emparelhados, os respectivos pares são rotulados. O vértice v1 é rotulado como (v6, P) e o vértice v3 é rotulado como (v7, P).

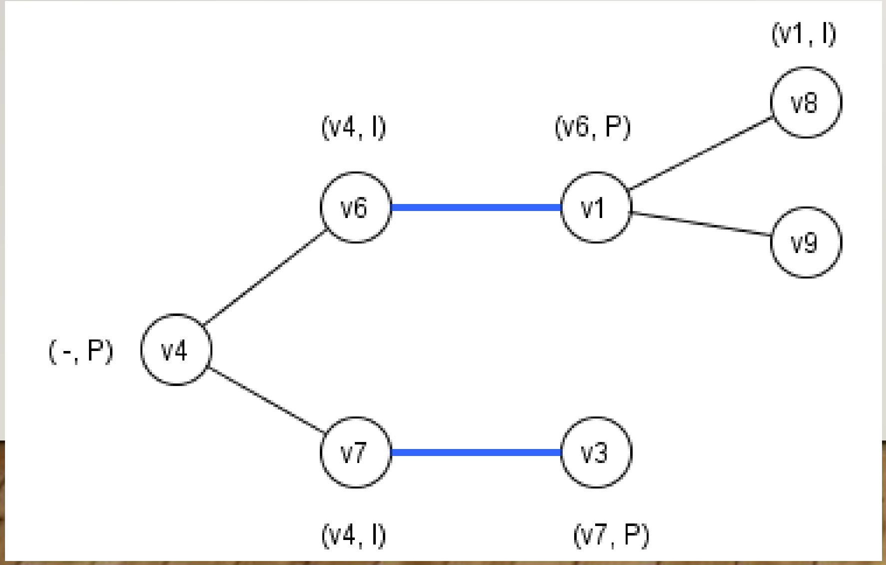


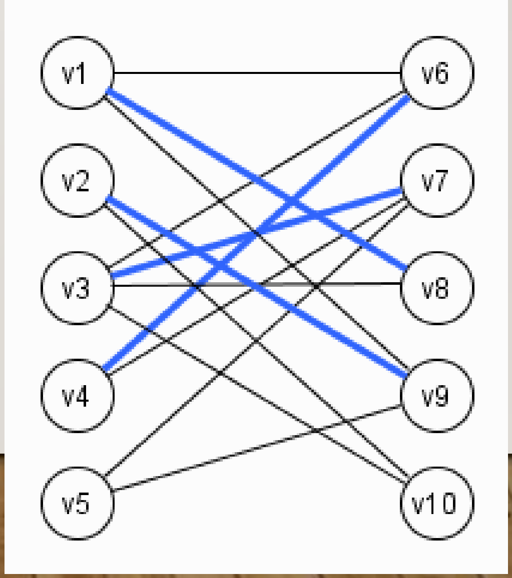


34

EXECUÇÃO DO ALGORITMO

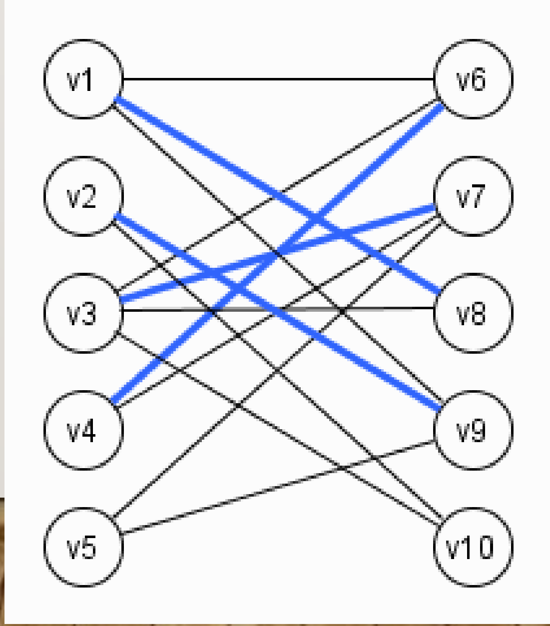
- No fim desta fase, há na lista dois vértices pares, v1 e v3. De seguida procede-se à análise de um destes vértices, por exemplo, de v1. A análise de v1 permite detectar um vértice livre em V2 , o v8 e a existência de um caminho aumentável, v4v6v1v8. A árvore de pesquisa resultante é:





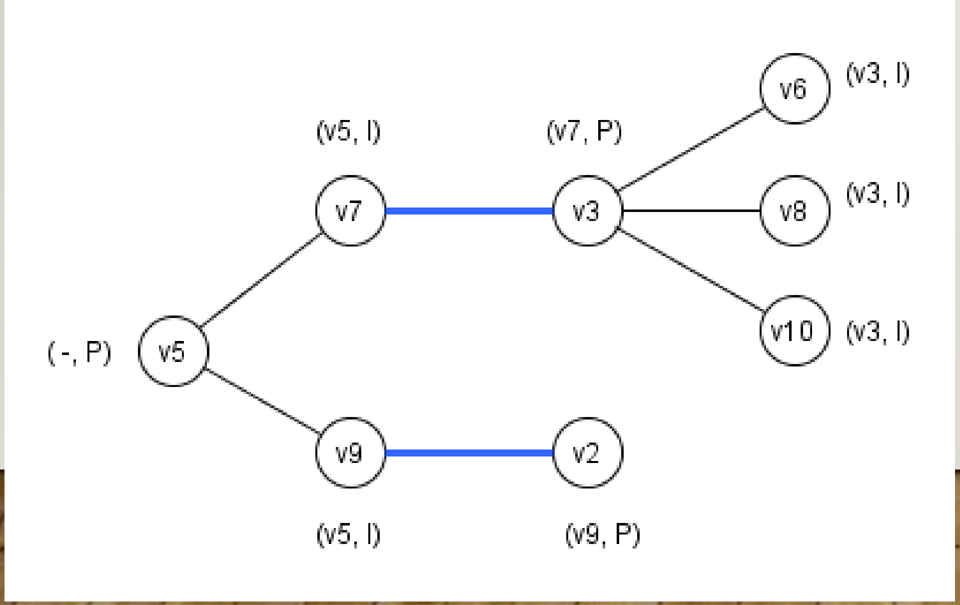
35 EXECUÇÃO DO ALGORITMO

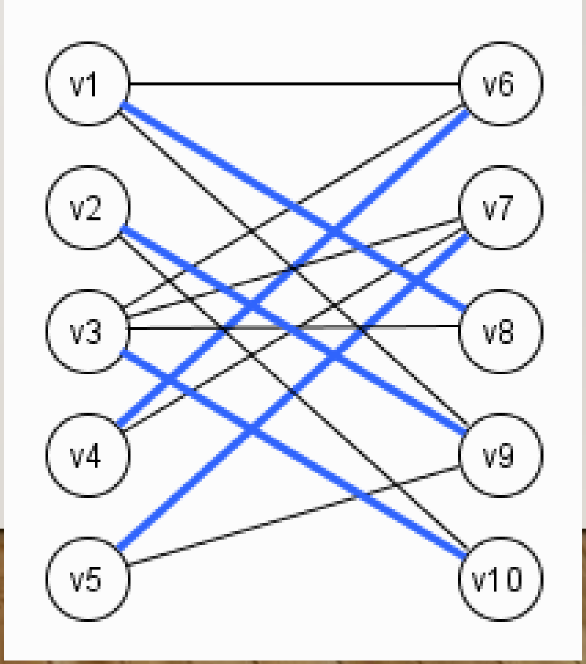
- O novo emparelhamento (figura abaixo), de cardinalidade 4, tem duas arestas novas v4v6 e v1v8. A aresta que não faz parte do caminho aumentável, v3v7, mantém-se no novo emparelhamento.



EXECUÇÃO DO ALGORITMO

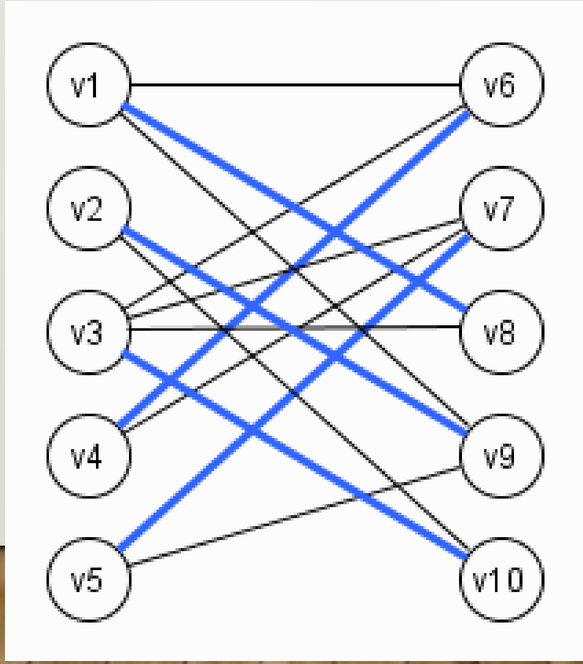
- De seguida analisa-se o vértice v5 e detecta-se um caminho aumentável até ao vértice v10, obtendo-se, assim, um emparelhamento de cardinalidade 5, que é um emparelhamento máximo.





RESULTADO

- A saída será um grafo com emparelhamento máximo, ou seja, podemos realizar o maior número de casamentos, de modo a que as pessoas casem com uma das pessoas de que gostam.



38 CONCLUSÃO

- Observada a complexidade de certos problemas (dentre os citados na introdução), o método de emparelhamento máximo demonstra sua capacidade para resolver tais de forma rápida eficaz.

- No processo para se aprender o procedimento de busca do maximum matching, são abordados novos conceitos, como os de caminho alternante e caminho aumentante, que hão de ser utilizados a posteriori em problemas similares, tal como o de busca por um emparelhamento perfeito.

Trabalho

- **Implementar:**
    - **Hopcroft e Karp**
    - **Ford Fulkerson**

Extra

- URI:
    - 1056; 1330; 1362; 1915

FIM DA AULA 13

Próxima aula:

Grafos Eulerianos, Hamiltonianos