ESTRUTURAS DE DADOS II

MSC. DANIELE CARVALHO OLIVEIRA

DOUTORANDA EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO - USP

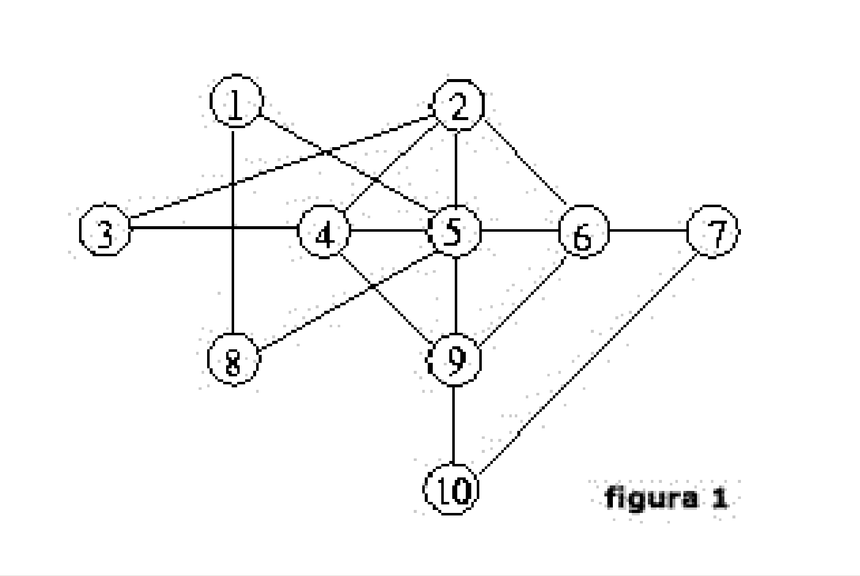
MESTRE EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO – UFU

BACHAREL EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO - UFJF

GRAFOS EULERIANOS

3 CIRCUITO EULERIANO

- Um circuito euleriano em um grafo G é um circuito simples que contém cada aresta de G.

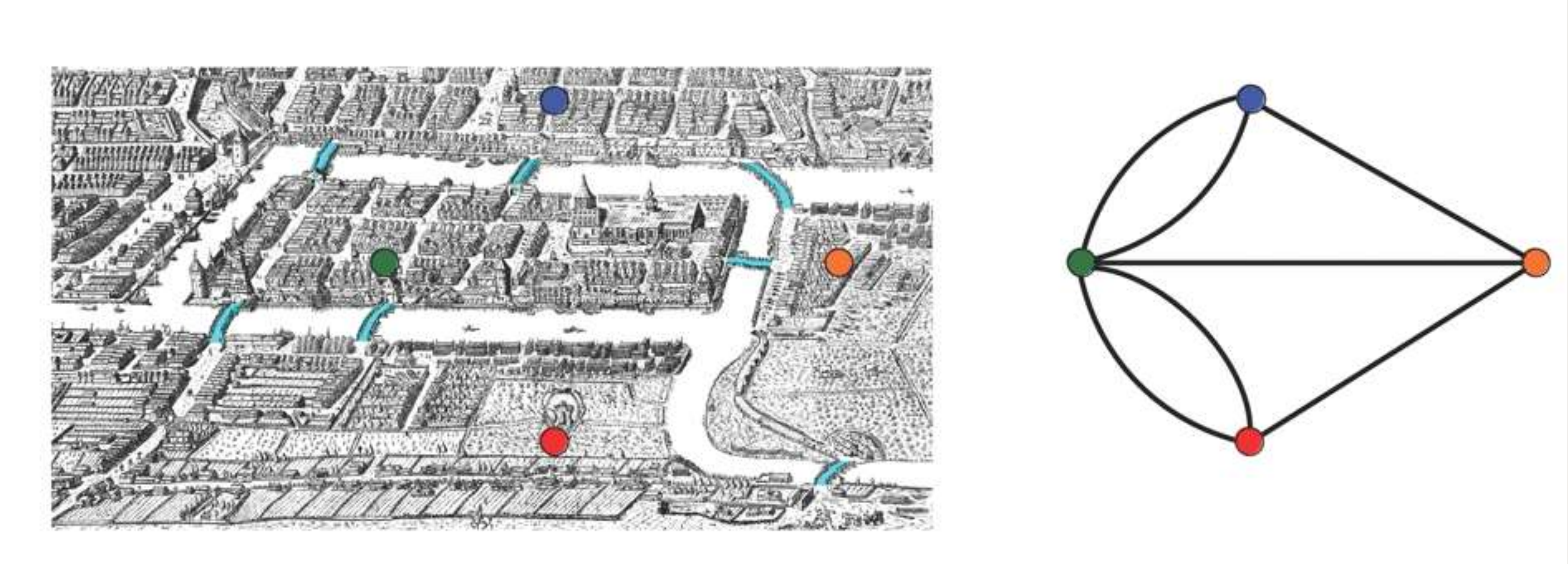


Teorema (Euler 1736)

Um multigrafo conectado G possui um circuito euleriano se e somente se o grau de cada vértice de G é par.

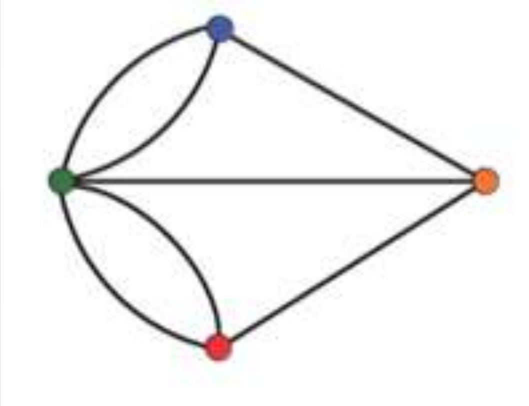
PONTES DE KÖNIGSBERG

- É possível sair de uma das ilhas, passar uma única vez por cada uma das pontes e retornar ao ponto de origem?



6 PONTES DE KÖNIGSBERG

- Como nem todos os vértices têm grau par, o grafo não é euleriano. Logo, é impossível atravessar todas as pontes uma só vez e voltar ao lugar de partida.



- Podemos construir um circuito euleriano.

Como fazer um desenho que comece a partir de um ponto, retorne a esse ponto, o lápis não seja levantado do papel e um traço só é desenhado uma vez

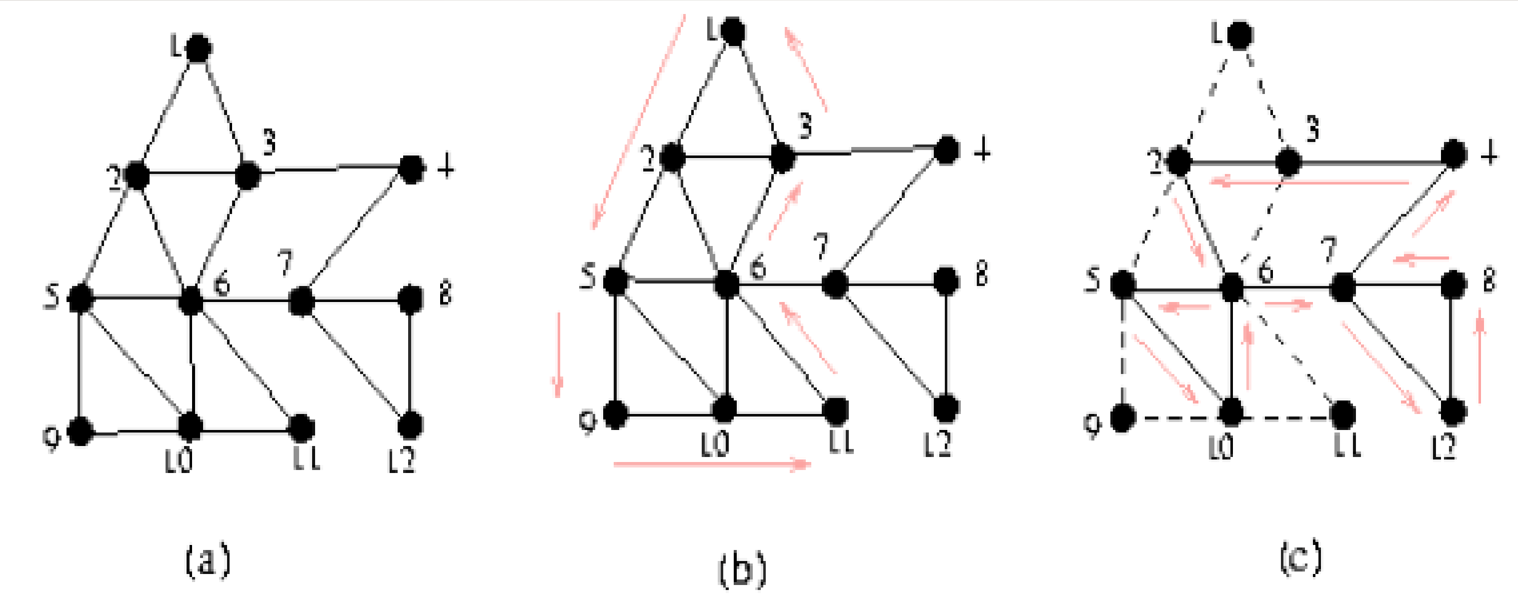
- **Existem vários algoritmos para construir um circuito euleriano.**

Algoritmo de Hierholzer

Algoritmo para a construção de um ciclo euleriano.

- Comece em qualquer vértice u e percorra aleatoriamente as arestas ainda não visitadas a cada vértice visitado até fechar um ciclo
- Se sobrarem arestas não visitadas, recomece a partir de um vértice do ciclo já formado
- Se não existem mais arestas não visitadas, construa o ciclo euleriano a partir dos ciclos formados, unindo-os a partir de um vértice comum

9 ALGORITMO DE HIERHOLZER



Ciclo 1: 1,2,5,9,10,11,6,3,1

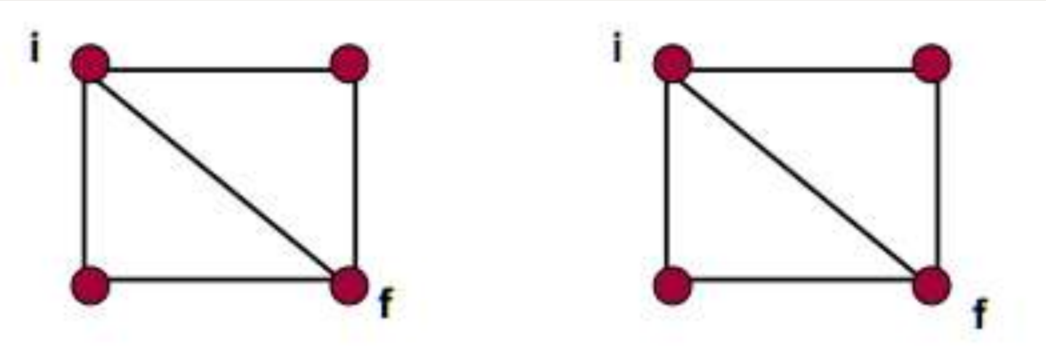
Ciclo 2: 2,6,5,10,6,7,12,8,7,4,3,2

Ciclo Euleriano: 1,2,6,5,10,6,7,12,8,7,4,3,2,5,9,10,11,6,3,1

10

CAMINHOS EULERIANOS

- Teorema
  - Um multigrafo conectado G possui um caminho euleriano, mas que não é circuito, se e somente se possui exatamente dois vértices com grau ímpar.



CAMINHO X CIRCUITO

- Um caminho euleriano passa por todas as arestas de um grafo.

- Um ciclo ou circuito é um caminho euleriano fechado.

CARTEIRO CHINÊS

- Imagine um carteiro que deve percorrer um roteiro todo dia. O problema é identificar esse roteiro de maneira a minimizar a distância total percorrida. Essa situação pode ser representada por um grafo onde as arestas correspondem às ruas e os vértices correspondem aos cruzamentos.

CARTEIRO CHINÊS

- Dado um grafo conexo G=(V,E), encontrar um caminho fechado (i.e., com início e fim no mesmo vértice) de peso mínimo que atravesse cada aresta de G pelo menos uma vez.
  - A um caminho nessas condições chama-se percurso ótimo do carteiro Chinês.
  - A qualquer caminho fechado (não necessariamente de peso mínimo) que atravesse cada aresta de G pelo menos uma vez chama-se percurso do carteiro.

- Se o grafo G for Euleriano, então qualquer circuito de Euler é um percurso ótimo do carteiro Chinês.
- Se o grafo G não for Euleriano, pode-se construir um grafo Euleriano G* duplicando algumas arestas de G, selecionadas de forma a conseguir um grafo Euleriano com peso total mínimo. Nunca é necessário visitar cada aresta mais do que duas vezes!

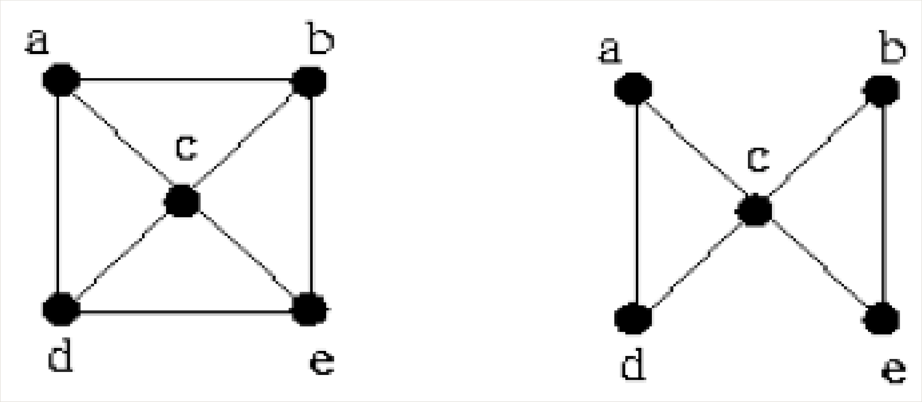
ALGORITMO PARA ACHAR UM PERCURSO ÓTIMO DO CARTEIRO CHINÊS NUM GRAFO NÃO DIRIGIDO

- Achar todos os vértices de grau ímpar em G. Seja k o nº (par!) destes vértices. Se k=0, fazer G*=G e saltar para o passo 6.
- Achar os caminhos mais curtos (e distâncias mínimas) entre todos os pares de vértices de grau ímpar em G.
- Construir um grafo completo G' com os vértices de grau ímpar de G ligados entre si por arestas de peso igual à distância mínima calculada no passo 2.
- Encontrar um emparelhamento perfeito de peso mínimo em G'. Isto corresponde a emparelhar os vértices de grau ímpar de G, de forma a minimizar a soma das distâncias entre vértices emparelhados.
- Para cada par (u, v) no emparelhamento perfeito encontrado, adicionar pseudo-arestas (arestas paralelas duplicadas) a G ao longo de um caminho mais curto entre u e v. Seja G* o grafo resultante.
- Achar um circuito de Euler em G*. Este circuito é um percurso ótimo do carteiro Chinês

GRAFOS HAMILTONIANOS

16 CAMINHOS E CIRCUITOS HAMILTONIANOS

- Definição
  - Um caminho (ou circuito) em um grafo G(V,E) é dito ser hamiltoniano se ele passa exatamente uma vez em cada um dos vértices de G.



Caminho e circuito hamiltoniano

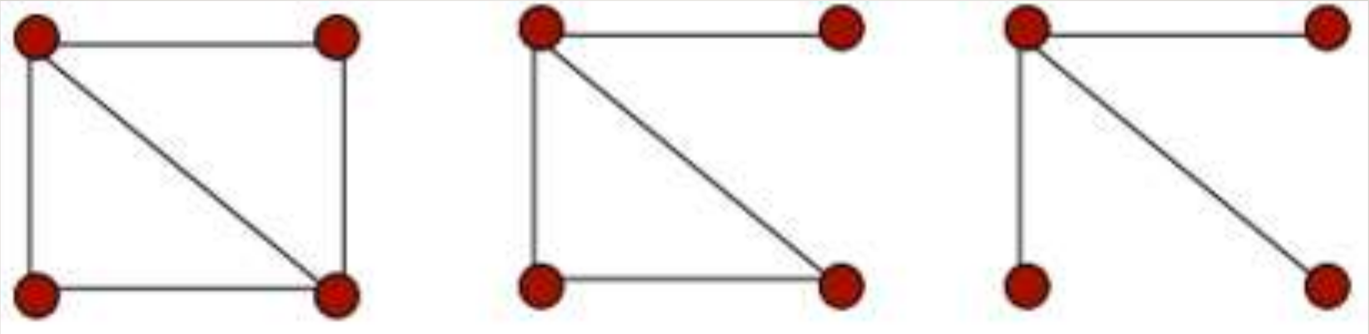
Apenas caminho hamiltoniano

17 CAMINHO X CIRCUITO

- Um caminho Hamiltoniano ou caminho rastreável é um caminho que visita cada vértice exatamente uma vez.

- Um ciclo Hamiltoniano ou circuito Hamiltoniano é um ciclo que visita cada vértice **exatamente uma vez** (exceto o vértice que é tanto o início quanto o fim, e portanto é visitado duas vezes). Um grafo que contém um ciclo Hamiltoniano é chamado de grafo Hamiltoniano.

MAIS EXEMPLOS



Circuito e caminho

Caminho

Não Hamiltoniano

19 GRAFO HAMILTONIANO

- Não existe uma caracterização para identificar grafos hamiltonianos como existe para os eulerianos;

- A busca de tal caracterização é um dos maiores problemas ainda não solucionados da teoria dos grafos.

GRAFO HAMILTONIANO

- Muito pouco é conhecido dos grafos hamiltonianos;
- A maioria dos teoremas existentes são da forma: "Se G possui arestas suficientes, então G é hamiltoniano".
- Eles dão condições suficientes apenas:

Se P então Q: P $\rightarrow$ Q

P é **condição suficiente** para Q (basta que P ocorra para Q ocorrer)

Q é **condição necessária** para P (se Q não ocorrer então P também não ocorrerá)

CIRCUITO HAMILTONIANO EM GRAFOS COMPLETOS

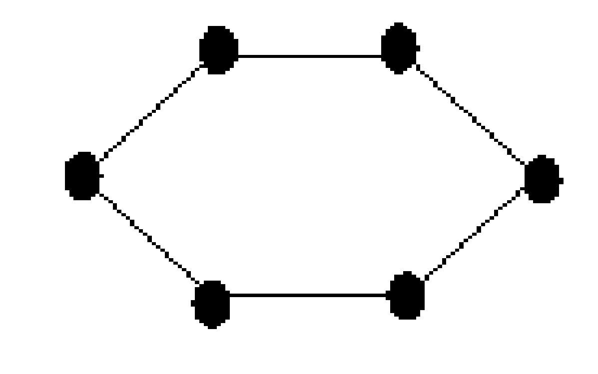
- Todo grafo completo, que contém mais de 2 vértices contem um circuito hamiltoniano

Seja $v_1, v_2, \ldots, v_n$ os vértices de G. Como existe uma aresta entre qualquer par de vértices, é possivel, a partir de v_1 percorrer essa sequência até v_n e voltar para v_1.

Teorema (Dirac 1952)

Uma condição suficiente, mas não necessária, para que um grafo conexo simples G com n (>2) vértices tenha um circuito hamiltoniano é que o grau de todo vértice de G seja $\geq n/2$

- O grafo abaixo, possui um circuito hamiltoniano mas não respeita a condição do teorema de Dirac.



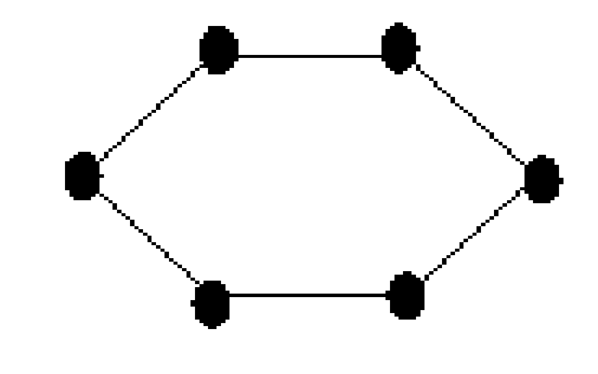
Teorema (Dirac 1952)

Uma condição suficiente, mas não necessária, para que um grafo simples G com n (>2) vértices tenha um circuito hamiltoniano é o grau de cada vértice seja >= n/2.

- Permite identificar mais grafos com circuitos hamiltonianos que o anterior, mas demora muito para efetuar os cálculos. Uma busca por tentativa e erro pode ser mais eficiente em alguns casos.

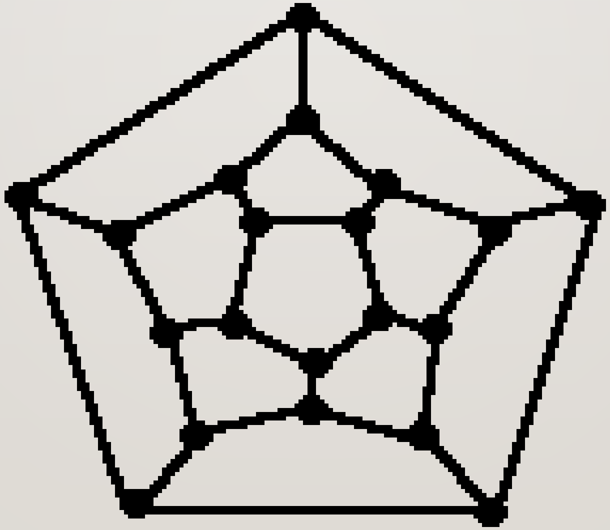
24 TEOREMA DE DIRAC

- O grafo é hamiltoniano e não respeita a condição do último teorema. O grau de cada vértice é 2, o que é menor que 6/2 = 3.

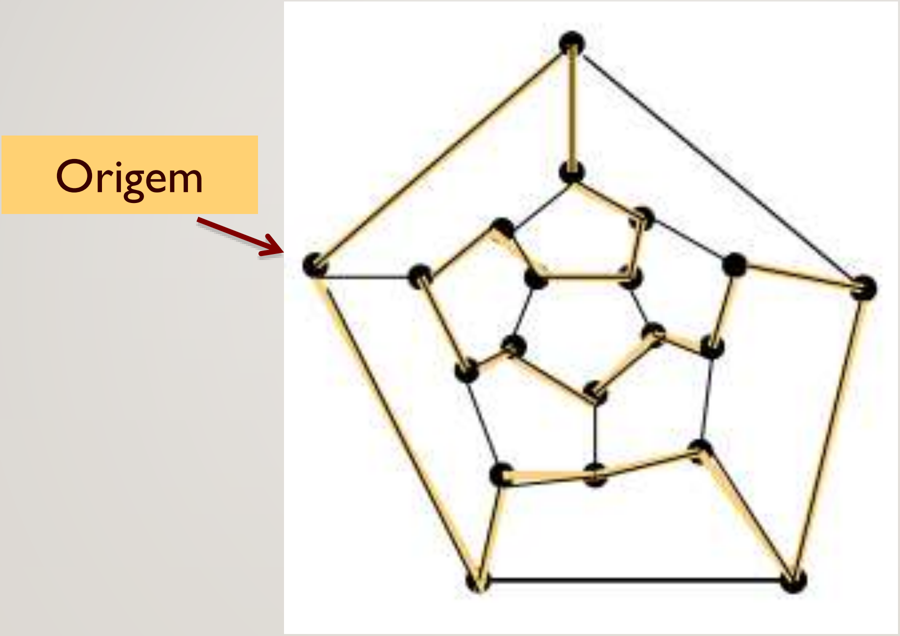


- O adjetivo "hamiltoniano" deve-se ao matemático irlandês Sir William Rowan Hamilton (1805-1865).
  - Diz-se que ele inventou um jogo que envolve um dodecaedro (sólido regular com 20 vértices, 30 arestas e 12 faces).
- Hamilton rotulou cada vértice do dodecaedro com o nome de uma cidade conhecida.
  - O objetivo do jogo era que o jogador viajasse "ao redor do mundo" ao determinar uma viagem circular que incluísse todas as cidades exatamente uma vez, com a restrição de que só fosse possível viajar de uma cidade a outra se existisse uma aresta entre os vértices correspondentes.

- A figura abaixo mostra um grafo que representa esse problema, ou seja os vértices e arestas de um dodecaedro.



27 CICLO HAMILTONIANO



PROBLEMA DO CAIXEIRO VIAJANTE

- O **problema do caixeiro viajante** é um problema que tenta determinar a menor rota para percorrer uma série de cidades (visitando cada uma pelo menos uma vez), retornando à cidade de origem. Ele é um problema de otimização NP-Completo inspirado na necessidade dos vendedores em realizar entregas em diversos locais (as cidades) percorrendo o menor caminho possível, reduzindo o tempo necessário para a viagem e os possíveis custos com transporte e combustível.

MÉTODOS DE SOLUÇÃO PARA O PCV

- Existem basicamente duas formas:
  - Métodos exatos
  - Métodos heurísticos

MÉTODOS EXATOS

- Basicamente, analisam todas as alternativas possíveis.
- A complexidade é fatorial!
- Por isto, os métodos mais usados são os do tipo ”branch-and-bound”.
- Estes, consistem em expandir os nós e cortar caminhos de pesquisa que não são promissores.

MÉTODOS HEURÍSTICOS

- Com base em heurísticas é possível encontrar soluções aproximadas, isto é, não são soluções exatas mas fornecem um resultado satisfatório em tempo hábil.
- Os métodos exatos não retornam solução alguma para um número de cidades maior do que 14 ou 15.

ALGUMAS TÉCNICAS

- Basicamente, técnicas de inteligência artificial
  - Métodos de busca heurística (algoritmo guloso)

- Métodos de computação bioinspirada
  - Algoritmos genéticos
  - Colônia de formigas

CURIOSIDADES

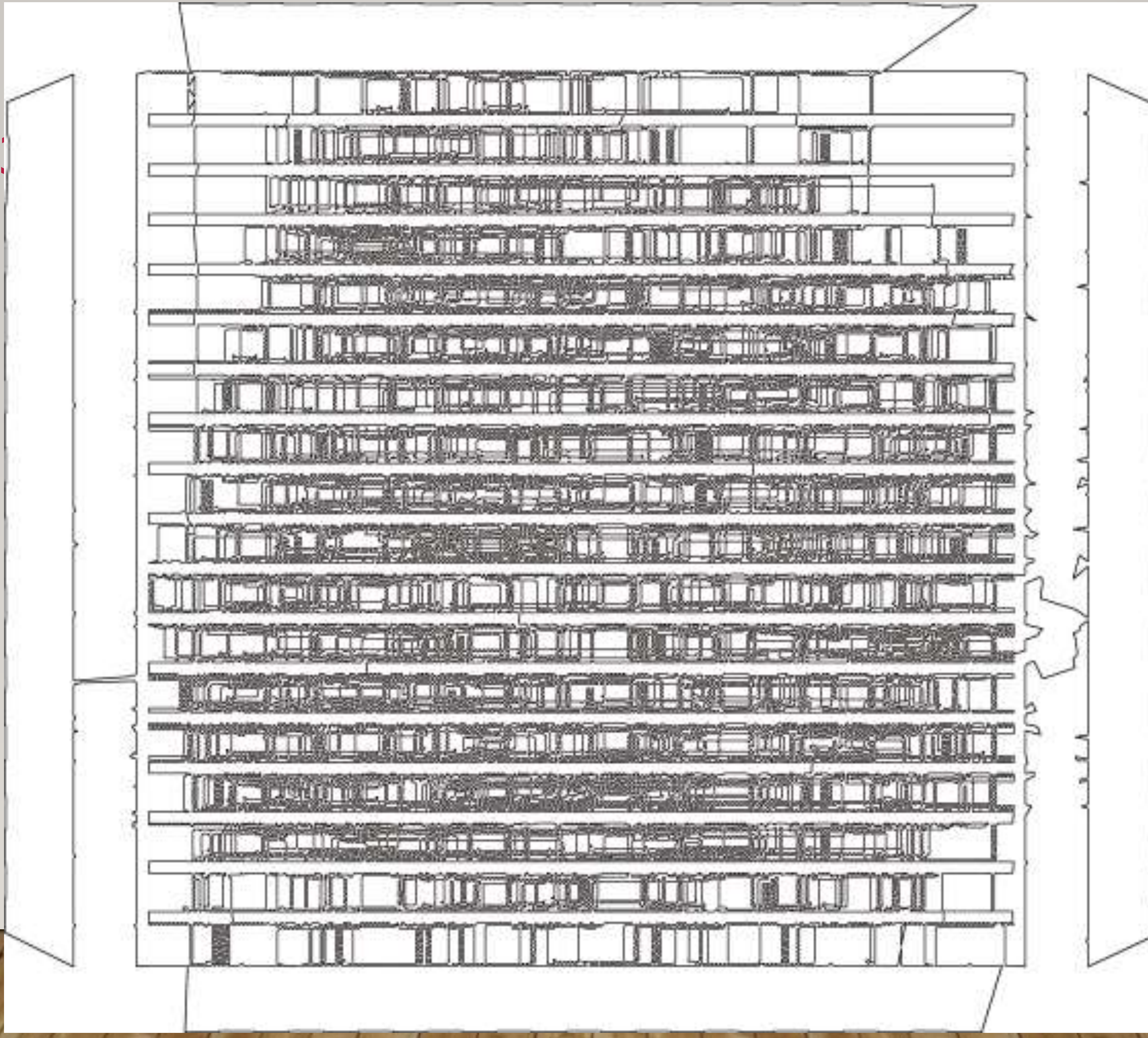
- Filme: Traveling Salesman : http://www.travellingsalesmanmovie.com/

- Applegate, D. L., Bixby, R. E., Chvatal, V., & Cook, W. J. (2011). The traveling salesman problem: a computational study. Princeton University Press.

- http://www.math.uwaterloo.ca/tsp/index.html

WORLD RECORDS

- 08/05/1998 – usa13509 – Um Tour por 13.509 cidades dos EUA
  - Tempo de processamento (segundos) – 131.052.087
- 28/09/1999 – rl11849 - Placa de circuito impresso com 11.849 buracos
  - Tempo de processamento (segundos) – 13.094.345
- 29/01/2000 – rl5915 - Placa de circuito impresso com 5.915 buracos
  - Tempo de processamento (segundos) - 2.301.520
- 27/02/2000 – pla7397 - Uma Aplicação para AT&T: 7.397 cidades
  - Tempo de processamento (segundos) – 423.787
- 20/04/2001 – 15.112 cidades da Alemanha
  - Tempo de processamento (anos) – 22.6 (rede com 110 processadores)
- 05/2004 – 24.978 cidades na Suiça
  - Tempo de processamento (segundos) – 222.796.246
- 2006 – 85.900 cidades



PROBLEMAS RESOLVIDOS

- Em Fevereiro de 2009, Rober Bosch criou uma instância do TSP com 100.000 cidades.
  - http://www.math.uwaterloo.ca/tsp/data/ml/monalisa.html

Extra

- URI:
  - 1671; 1053

FIM DA AULA 14

Próxima aula:

Grafos: Coloração de Vértices