

2023~2024 学年秋 线性代数（书院）期末考试

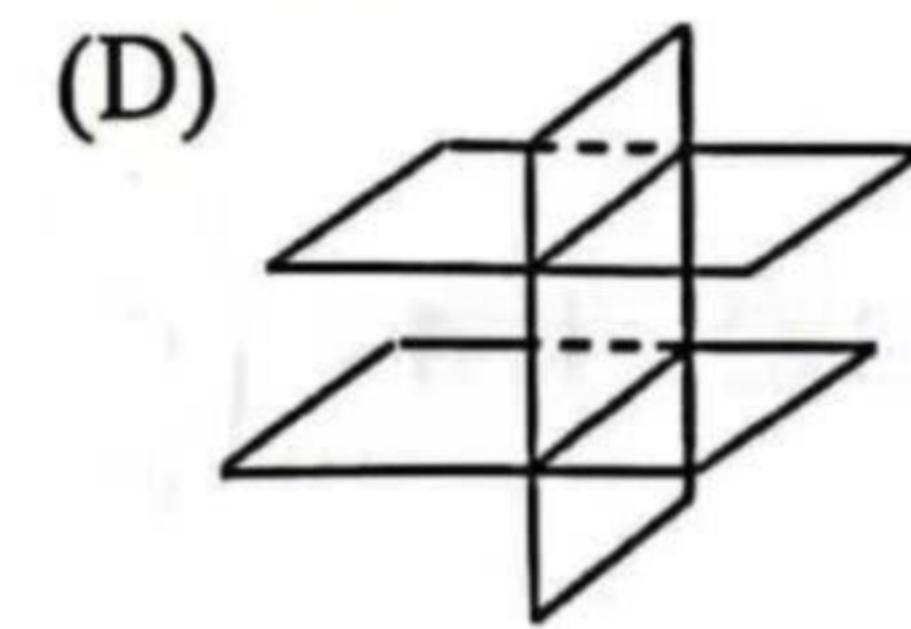
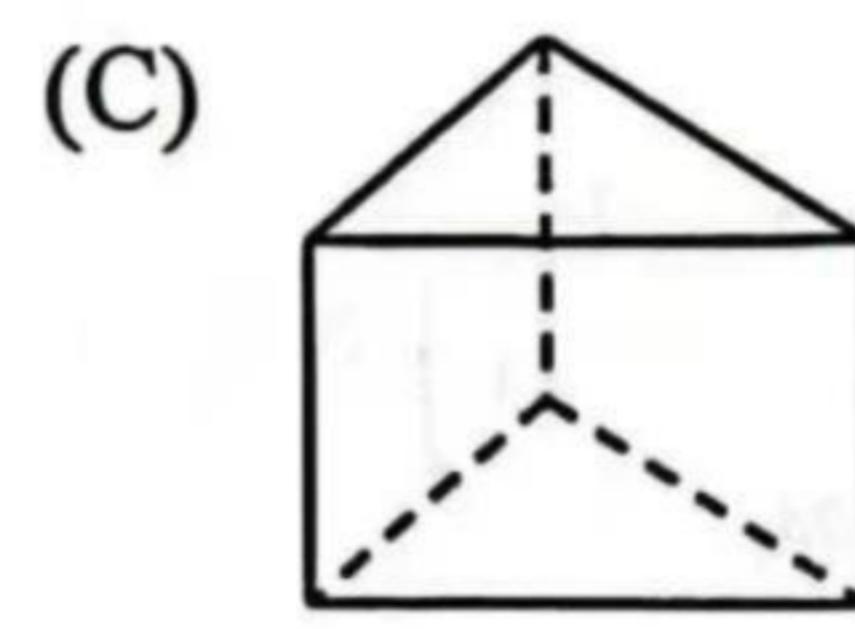
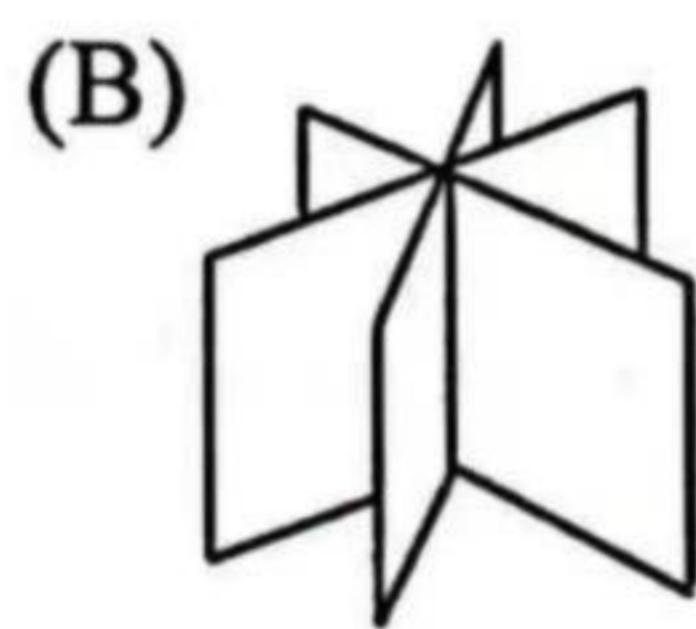
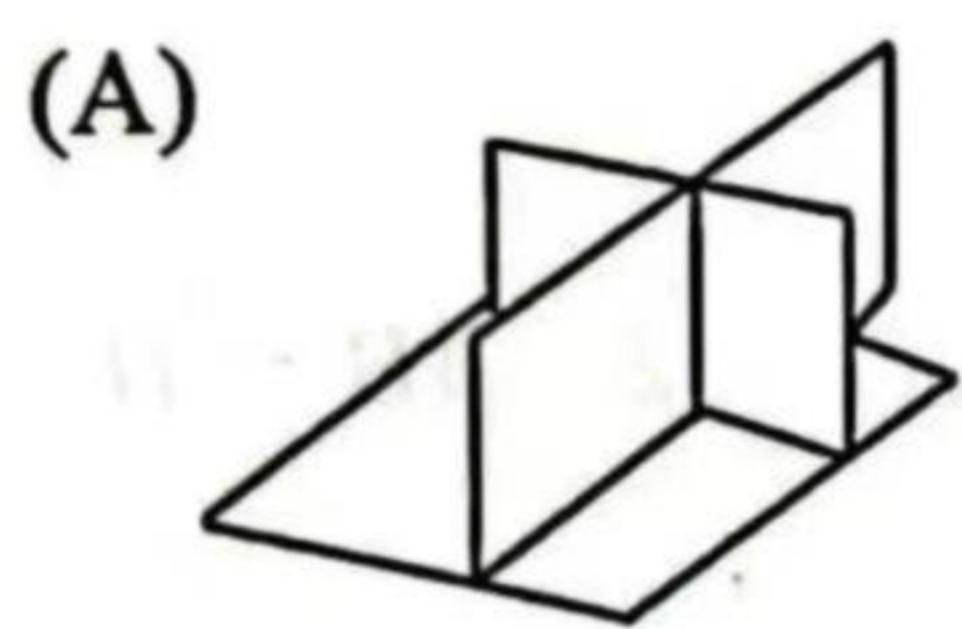
A 卷

时间：2024 年 1 月 10 日 上午 9:00~11:00

院系&班级：_____，姓名：_____，学号：_____

一、客观题（选择与填空，每空 4 分，共 40 分）

- 点 $P(1,0,2)$ 在平面 $x + 2y + z - 4 = 0$ 上的（正交）投影点坐标是_____。
- 三个平面 $\pi_1: 2x - y + 3z - 1 = 0$, $\pi_2: x + 2y - z + 1 = 0$, $\pi_3: x + 7y - 6z + 10 = 0$ 的位置关系属于以下哪种情形_____（选择题）。



- 设 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$, 且 $A = \alpha\beta^T$ 相似于 $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $A^{2024} =$ _____。

- 设 3 阶非零方阵 A 满足 $A^3 = A$, $r(A) + r(I - A) + r(I + A) = 6$, 且 $\det A = \text{tr} A = 0$, 则 A 的全体特征值为_____。

- 设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ 为可逆矩阵, B 是 3 阶矩阵满足 $BA = \begin{pmatrix} a_{11} & -a_{13} & -4a_{12} \\ a_{21} & -a_{23} & -4a_{22} \\ a_{31} & -a_{33} & -4a_{32} \end{pmatrix}$, 则 B 的全部特征值是_____。

- 若秩为 4 的实对称阵 A 满足: A 与 $-A$ 相合, 则其正惯性指数为_____。

- 三元实二次型 $f = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + tx_2x_3$ 是正定的, 则 t 的取值范围是_____。

- 设 $V = \mathbb{R}^3$, σ 为 V 上的线性变换, 设 σ 在基 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 下的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$,

- σ 在另一组基下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, 则这组基是_____。

- 定义 $M_2(\mathbb{R})$ 上线性变换 $T: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ 满足 $T(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, 则 T 在基 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 下的矩阵是_____。

- 设 A 为 n 阶实方阵, 则 A 可逆 \Leftrightarrow _____ \Leftrightarrow _____ \Leftrightarrow _____

↔

↔ (写出至少四个充要条件)。

二、解答题与证明题 (须写出必要的解答过程, 共 60 分)

11. (10 分) Lucas 数列的定义为: $L_1 = 1, L_2 = 3, L_{n+2} = L_{n+1} + L_n, n \geq 1$.

(i) 令 $x_n = \begin{pmatrix} L_n \\ L_{n+1} \end{pmatrix} (n \geq 1)$, 给出 x_n 与 x_{n+1} 满足的关系式.

(ii) 利用(i)的结果, 求 Lucas 数列的通项公式.

12. (10 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 求矩阵 A 的 QR 分解.

13. (12 分) 设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ 是实对称阵, 满足 $a_{11} + a_{22} + a_{33} = 2, AB = \mathbf{0}$, 其中 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 令 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, f(x_1, x_2, x_3) = x^T Ax$ 是相应实二次型.

(i) 用正交替换 (主轴化) 方法将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化成标准形, 并求相应可逆线性替换;

(ii) 求矩阵 A ;

(iii) 方程 $f(x_1, x_2, x_3) = 1$ 表示什么曲面?

14. (10 分) 设 W_1, W_2 是 \mathbb{R}^4 个的两个子空间, W_1 的基为 $(1, 2, 1, -1)^T, (0, -1, -3, 2)^T$, 而 W_2 的基为 $(2, -1, -6, 1)^T, (-1, 2, 4, a+8)^T$. 已知 $W_1 \cap W_2 \neq \{\mathbf{0}\}$.

(i) 求 a 的值;

(ii) 求 $W_1 \cap W_2$ 与 $W_1 + W_2$ 的维数和一组基.

15. (8 分) 对向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, 证明: 其中任意 s 个向量均线性无关的充要条件是方程

$$x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n = \mathbf{0}$$

的任一解均至少有 $s+1$ 个非零分量.

16. (10 分) 设 A 是一个 n 阶可逆实矩阵.

(i) 证明: AA^T 与 A^TA 均为正定矩阵.

(ii) 求矩阵 $M = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & A^T \\ A & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ 的正负惯性指数.