Linear Algebra 2025 Fall

Sample Solution

TA: Zening Xie *Week 13-1*

《线性代数与几何》6.47（2、4、6、8、9、10）、49、50、51、53、54

Exercise 6.47 对下列实对称矩阵 A，求正交阵 Q 和对角阵 D，使得 $Q^{-1}AQ = D$。

(2) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Solution:

1. **求特征值：**计算特征多项式 $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2 - 1 = (\lambda-1)(\lambda-3)$。特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$。

2. **求特征向量：**

- 当 $\lambda_1 = 1$ 时，解 $(I - A)x = 0$，得基础解系 $\xi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$。单位化得 $q_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$。
- 当 $\lambda_2 = 3$ 时，解 $(3I - A)x = 0$，得基础解系 $\xi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$。单位化得 $q_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$。

3. **结果：**

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(4) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Solution:

1. **求特征值：**$|\lambda I - A| = \lambda[(\lambda-1)^2 - 1] = \lambda(\lambda^2 - 2\lambda) = \lambda^2(\lambda-2)$。特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 2$。

2. **求特征向量：**

- 当 $\lambda = 2$ 时，由 $(2I - A)x = 0$ 解得 $\xi_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，单位化得 $q_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$。

- 当 $\lambda = 0$ 时，由 $Ax = 0 \Rightarrow x_2 + x_3 = 0$。取两个正交的基础解系 $\xi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \xi_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$。

  单位化得 $q_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, q_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$。

3. **结果**：

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(6) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Solution:

1. **求特征值**：特征多项式为 $(\lambda - 8)(\lambda + 1)^2 = 0$。特征值为 $\lambda_1 = 8, \lambda_2 = \lambda_3 = -1$。
2. **求特征向量**：

- 当 $\lambda = 8$ 时，解 $(8I - A)x = 0$ 得 $\xi_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$。单位化得 $q_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$。

- 当 $\lambda = -1$ 时，方程对应的平面为 $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$。取 $\xi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$，则 $q_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{bmatrix}$。

  再取 ξ_3 与 ξ_1, ξ_2 正交（即 $\xi_1 \times \xi_2$），得 $\xi_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$。单位化得 $q_3 = \begin{bmatrix} \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ -\frac{5}{3\sqrt{5}} \end{bmatrix}$。

3. **结果：**

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{5}{3\sqrt{5}} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(8) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Solution:

1. **求特征值：** $|\lambda I - A| = (\lambda-2)[(\lambda-3)^2-1] = (\lambda-2)(\lambda-2)(\lambda-4)$。特征值为 $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = \lambda_3 = 2$。

2. **求特征向量：**

- $\lambda = 4$：解得 $\xi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow q_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$。
- $\lambda = 2$：由 $(2I - A)x = 0 \Rightarrow x_1 + x_3 = 0$。取正交基础解系 $\xi_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \xi_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$。单位化得 $q_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, q_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$。

3. **结果：**

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(9) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Solution:

利用分块矩阵性质，特征值为 $\lambda_1=5,\lambda_2=-5,\lambda_3=3,\lambda_4=-3$。对应的特征向量（已正交）：$\xi_1=(1,1,1,1)^T,\xi_2=(1,1,-1,-1)^T,\xi_3=(1,-1,1,-1)^T,\xi_4=(1,-1,-1,1)^T$。全部模长为 2，单位化后为：

$$Q=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}5&0&0&0\\0&-5&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&-3\end{bmatrix}$$

(10) $A=\begin{bmatrix}-1&-3&3&-3\\-3&-1&-3&3\\3&-3&-1&-3\\-3&3&-3&-1\end{bmatrix}$

Solution:

1. **求特征值**：利用行和及矩阵结构，特征值为 $\lambda_1=8$（单重），$\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=-4$（三重）。

2. **求特征向量**：

- $\lambda=8$：观察得 $\xi_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}$，单位化 $q_1=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}$。
- $\lambda=-4$：需寻找与 ξ_1 正交的三个向量（即满足 $x_1-x_2+x_3-x_4=0$）。选取正交基如下：$v_1=(1,1,0,0)^T\Rightarrow q_2=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0,0)^T$。$v_2=(0,0,1,1)^T\Rightarrow q_3=(0,0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})^T$。$v_3$ 与前两者及 ξ_1 正交，取 $v_3=(1,-1,-1,1)^T\Rightarrow q_4=\frac{1}{2}(1,-1,-1,1)^T$。

3. **结果**：

$$Q=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{2}\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}8&0&0&0\\0&-4&0&0\\0&0&-4&0\\0&0&0&-4\end{bmatrix}$$

Exercise 6.49 证明：实反对称矩阵的特征值只能为 0 或纯虚数。

Proof:

设 A 为 n 阶实反对称矩阵，即 $A^T=-A$。设 λ 为 A 的特征值，x 为对应的特征向量（$x\neq 0$，注意 x 可能为复向量）。

根据特征值定义有：

$$Ax = \lambda x$$

对等式两边同时左乘 x 的共轭转置向量 x^H（即 $\bar{x}^T$），得：

$$x^H Ax = x^H(\lambda x) = \lambda x^H x = \lambda \|x\|^2$$

另一方面，对等式两边取共轭转置：

$$(Ax)^H = (\lambda x)^H \implies x^H A^H = \bar{\lambda} x^H$$

因为 A 是实矩阵，故 $A^H = A^T$；又因为 A 反对称，故 $A^T = -A$。代入上式得：

$$x^H(-A) = \bar{\lambda} x^H \implies x^H A = -\bar{\lambda} x^H$$

等式两边同时右乘 x，得：

$$x^H Ax = -\bar{\lambda} x^H x = -\bar{\lambda}\|x\|^2$$

对比两个含有 $\|x\|^2$ 的式子，可得：

$$\lambda\|x\|^2 = -\bar{\lambda}\|x\|^2$$

移项得 $(\lambda + \bar{\lambda})\|x\|^2 = 0$。由于 x 是特征向量，$x \neq 0$，故 $\|x\|^2 > 0$，因此必须有：

$$\lambda + \bar{\lambda} = 0$$

设 $\lambda = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$，则 $\bar{\lambda} = a - bi$。代入上式得：

$$(a + bi) + (a - bi) = 2a = 0 \implies a = 0$$

即 λ 的实部为 0。因此，$\lambda = bi$，即特征值只能为 0 或纯虚数。

Exercise 6.50 证明：正交矩阵的特征值 λ 满足 $\lambda\bar{\lambda} = 1$。

Proof:

设 Q 为 n 阶正交矩阵，满足 $Q^T Q = I$。设 λ 为 Q 的特征值，x 为对应的特征向量（$x \neq 0$）。

根据特征值的定义：

$$Qx = \lambda x$$

对等式两边取共轭转置（Hermitian transpose）。注意到 Q 是实矩阵，因此 $Q^H = Q^T$。

$$(Qx)^H = (\lambda x)^H \implies x^H Q^T = \bar{\lambda} x^H$$

将上式与原方程对应相乘（左边乘左边，右边乘右边）：

$$(x^H Q^T)(Qx) = (\bar{\lambda} x^H)(\lambda x)$$

利用矩阵乘法的结合律以及正交矩阵的性质 $Q^TQ=I$，左边化简为：

$$x^H(Q^TQ)x = x^HIx = x^Hx = \|x\|^2$$

右边化简为：

$$\bar{\lambda}\lambda(x^Hx) = (\lambda\bar{\lambda})\|x\|^2$$

因此有：

$$\|x\|^2 = (\lambda\bar{\lambda})\|x\|^2$$

由于 x 是特征向量，$x \neq 0$，故其长度平方 $\|x\|^2 > 0$。两边同时约去 $\|x\|^2$，得：

$$1 = \lambda\bar{\lambda}$$

证毕。

Exercise 6.51 已知三阶实对称矩阵 A 的特征值为 $1, 1, -2$，且 $(1, 1, -1)^T$ 是对应于 -2 的特征向量，求 A。

Solution:

设矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -2$。已知 $\lambda_3 = -2$ 对应的特征向量为 $\alpha_3 = (1, 1, -1)^T$。将 α_3 单位化，得到单位特征向量 u_3：

$$u_3 = \frac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|} = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

由于 A 是实对称矩阵，其不同特征值对应的特征向量相互正交，且特征向量组构成 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基。设对应于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 的单位特征向量为 u_1, u_2。根据谱分解定理（Spectral Decomposition），矩阵 A 可以表示为：

$$A = \lambda_1 u_1 u_1^T + \lambda_2 u_2 u_2^T + \lambda_3 u_3 u_3^T$$

代入 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 和 $\lambda_3 = -2$，得：

$$A = 1 \cdot (u_1 u_1^T + u_2 u_2^T) - 2u_3 u_3^T$$

利用单位矩阵的性质 $I = u_1u_1^T + u_2u_2^T + u_3u_3^T$，可得 $u_1u_1^T + u_2u_2^T = I - u_3u_3^T$。将其代入 A 的表达式中：

$$\begin{aligned} A &= (I - u_3u_3^T) - 2u_3u_3^T \\ &= I - 3u_3u_3^T \end{aligned}$$

计算 $u_3u_3^T$：

$$u_3u_3^T = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\1 & 1 & -1\\-1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

最后计算 A：

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} - 3\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\1 & 1 & -1\\-1 & -1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\1 & 1 & -1\\-1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\-1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Exercise 6.53 设 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$, $\beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^T$ 是两个非零的 n 维实向量，若 α 与 β 正交，试证明矩阵

$$C = \begin{bmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n\\a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n\end{bmatrix}$$

的全部特征值皆为零。

Proof:

根据矩阵乘法的定义，矩阵 C 可以表示为列向量 α 与行向量 β^T 的乘积，即：

$$C = \alpha\beta^T$$

考察 C 的平方：

$$C^2 = (\alpha\beta^T)(\alpha\beta^T)$$

利用矩阵乘法的结合律，将其重组为：

$$C^2 = \alpha(\beta^T\alpha)\beta^T$$

其中 $\beta^T\alpha = \sum_{i=1}^{n} b_ia_i$ 是向量 α 与 β 的内积。因为已知 α 与 β 正交，所以它们的内积为零，即 $\beta^T\alpha = 0$。将此代入上式，得：

$$C^2 = \alpha(0)\beta^T = O$$

由此可知 C 是幂零矩阵。设 λ 是 C 的任意特征值，x 是对应的特征向量（$x \neq 0$），则有 $Cx = \lambda x$。两边同时左乘 C，得：

$$C^2x = C(\lambda x) = \lambda(Cx) = \lambda^2 x$$

由于 $C^2 = O$，故：

$$\lambda^2 x = 0$$

因为特征向量 $x \neq 0$，所以必须有 $\lambda^2 = 0$，解得 $\lambda = 0$。综上所述，矩阵 C 的全部特征值皆为零。

Exercise 6.54 设 A 与 B 是 n 阶实方阵，A 有 n 个互异的特征值，试证明：$AB = BA$ 的充分必要条件是 A 的特征向量都是 B 的特征向量。

Proof:

必要性 (⇒):

假设 $AB = BA$。由于 A 有 n 个互异的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，对应的特征向量 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 线性无关，构成 $\mathbb{R}^n$ 的一组基。对于任意一个 A 的特征向量 p_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$，有 $Ap_i = \lambda_i p_i$。利用 $AB = BA$，考察向量 Bp_i：

$$A(Bp_i) = (AB)p_i = (BA)p_i = B(Ap_i) = B(\lambda_i p_i) = \lambda_i (Bp_i)$$

上式说明 Bp_i 也是 A 关于特征值 λ_i 的特征向量。因为 A 的特征值互异，所以每个特征值对应的特征子空间维数均为 1。因此，Bp_i 必须与 p_i 共线，即存在常数 μ_i 使得：

$$Bp_i = \mu_i p_i$$

根据特征向量的定义，这表明 p_i 也是 B 的特征向量（对应特征值为 μ_i）。综上，A 的所有特征向量都是 B 的特征向量。

充分性 (⇐):

假设 A 的特征向量都是 B 的特征向量。设 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 是 A 的特征向量，分别对应特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$。根据假设，它们也是 B 的特征向量，设对应的特征值分别为 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$。即：

$$Ap_i = \lambda_i p_i, \quad Bp_i = \mu_i p_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

因为 A 的特征值互异，$p_1, \cdots, p_n$ 构成空间的一组基。要证明 $AB = BA$，只需证明它们在基向量上的作用结果相同。对于任意 p_i：

$$(AB)p_i = A(Bp_i) = A(\mu_i p_i) = \mu_i (Ap_i) = \mu_i \lambda_i p_i$$

$$(BA)p_i = B(Ap_i) = B(\lambda_i p_i) = \lambda_i (Bp_i) = \lambda_i \mu_i p_i$$

由于实数乘法满足交换律 $\mu_i \lambda_i = \lambda_i \mu_i$，故 $(AB)p_i = (BA)p_i$ 对所有 i 成立。既然 AB 和 BA 在一组基上的作用完全相同，则 $AB = BA$。

证毕。

《线性代数入门》习题 6.1：4、5、6、13（谱分解就是相似对角化）

Exercise 6.1.4 设三阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为 3，$a_1 = [-1, 2, -1]^T, a_2 = [0, -1, 1]^T \in \mathcal{N}(A)$，求 A 及其谱分解。

Solution:

由矩阵 A 的各行元素之和均为 3 可知，A 乘以全 1 向量等于 3 倍的全 1 向量，即：

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

这表明 $\lambda_1 = 3$ 是 A 的一个特征值，对应的特征向量为 $\alpha_1 = (1, 1, 1)^T$。由 $a_1, a_2 \in \mathcal{N}(A)$ 可知，$Aa_1 = 0, Aa_2 = 0$。因此 A 有特征值 $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$。由于 a_1, a_2 线性无关，$\lambda = 0$ 的特征子空间维数为 2。因为 A 是实对称矩阵，我们需要构造一组标准正交特征向量 u_1, u_2, u_3。首先，将 $\lambda_1 = 3$ 的特征向量单位化：

$$u_1 = \frac{1}{\|\alpha_1\|} \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

其次，在 $\lambda = 0$ 的特征子空间中，将 a_1, a_2 正交化。注意到 α_1 已经与 a_1, a_2 正交（实对称矩阵不同特征值的特征向量正交）。选取 $v_2 = a_2 = (0, -1, 1)^T$，单位化得：

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

寻找第三个向量 v_3，使其与 u_1, u_2 正交。可取 $v_3 = u_1 \times u_2$ 方向，或者直接在零空间中找与 a_2 正交的向量。取 $v_3 = (2, -1, -1)^T$，验证正交性：$v_3 \cdot u_1 = 0, v_3 \cdot u_2 = 0$。单位化得：

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

A 的谱分解（Spectral Decomposition）为：

$$A = \lambda_1 u_1 u_1^T + \lambda_2 u_2 u_2^T + \lambda_3 u_3 u_3^T = 3u_1 u_1^T + 0u_2 u_2^T + 0u_3 u_3^T = 3u_1 u_1^T$$

计算矩阵 A：

$$A = 3 \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right) = 3 \cdot \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

综上，$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，其谱分解为 $A = 3u_1u_1^T$（其中 u_1 定义如上）。

Exercise 6.1.5 求下列实对称矩阵 A 的谱分解。

1. A 满足 $A^3 = O$。

   Solution: 因为 A 是实对称矩阵，所以 A 可正交对角化，即存在正交矩阵 U 和对角矩阵 Λ 使得 $A = U\Lambda U^T$。由 $A^3 = O$ 可得：

   $$(U\Lambda U^T)^3 = U\Lambda^3U^T = O \implies \Lambda^3 = O$$

   设 $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$，则 $\lambda_i^3 = 0$，解得 $\lambda_i = 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$。因此 A 的所有特征值均为 0，即 $A = O$（零矩阵）。其谱分解为：

   $$A = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot e_ie_i^T = O$$

   其中 e_i 为任意一组标准正交基。

2. $A = a_1x_1x_1^T + a_2x_2x_2^T$，其中 x_1, x_2 是 $\mathbb{R}^2$ 的一组标准正交基，a_1, a_2 为实数。

   Solution: 根据谱分解定理，实对称矩阵 A 可以表示为 $A = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_iu_iu_i^T$，其中 λ_i 是特征值，u_i 是对应的标准正交特征向量。题目给出的表达式

   $$A = a_1x_1x_1^T + a_2x_2x_2^T$$

   本身即为 A 的谱分解形式。其中 A 的特征值为 a_1 和 a_2，对应的标准正交特征向量分别为 x_1 和 x_2。

3. $A = \begin{bmatrix} O & M \\ M & O \end{bmatrix}$，其中 M 是 n 阶对称矩阵，有谱分解 $M = Q\Lambda Q^T$。

   Solution: 设 M 的谱分解为 $M = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mu_iq_iq_i^T$，其中 μ_i 为 M 的特征值，q_i 为对应的标准正交特征向量（即 $Q = [q_1, \cdots, q_n]$，$\Lambda = \operatorname{diag}(\mu_1, \cdots, \mu_n)$）。构造 $2n$ 阶矩阵 A 的特征向量。考虑如下形式的分块向量：

   $$u_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} q_i \\ q_i \end{bmatrix}, \quad v_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} q_i \\ -q_i \end{bmatrix} \quad (i = 1, \cdots, n)$$

   验证 u_i：

   $$Au_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} O & M \\ M & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_i \\ q_i \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} Mq_i \\ Mq_i \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \mu_iq_i \\ \mu_iq_i \end{bmatrix} = \mu_iu_i$$

验证 v_i：

$$Av_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} O & M \\ M & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_i \\ -q_i \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -Mq_i \\ Mq_i \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -\mu_i q_i \\ \mu_i q_i \end{bmatrix} = -\mu_i v_i$$

易证 $\{u_1, \cdots, u_n, v_1, \cdots, v_n\}$ 构成 $\mathbb{R}^{2n}$ 的一组标准正交基。因此，A 的特征值为 $\mu_1, \cdots, \mu_n$ 和 $-\mu_1, \cdots, -\mu_n$，对应的特征向量为 u_i 和 v_i。A 的谱分解为：

$$A = \sum_{i=1}^{n} \mu_i u_i u_i^T + \sum_{i=1}^{n} (-\mu_i) v_i v_i^T$$

或者写成矩阵形式：

$$A = U \begin{bmatrix} \Lambda & O \\ O & -\Lambda \end{bmatrix} U^T, \quad \text{其中} U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} Q & Q \\ Q & -Q \end{bmatrix}$$

Exercise 6.1.6 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，计算满足下列条件的 b 的取值范围：

1. A 不可逆；
2. A 可以正交对角化；
3. A 不可对角化。

Solution:

1. A **不可逆**：矩阵不可逆的充要条件是其行列式等于零。

   $$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & b \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -b$$

   令 $\det(A) = 0$，解得 $b = 0$。

2. A **可以正交对角化**：实矩阵可以正交对角化的充要条件是该矩阵为实对称矩阵，即 $A^T = A$。

   $$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   比较对应位置元素，解得 $b = 1$。

3. A **不可对角化**：计算 A 的特征多项式：

   $$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -b \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 2) - b = \lambda^2 - 2\lambda - b$$

   令特征多项式为零，解得特征值 $\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4b}}{2} = 1 \pm \sqrt{1 + b}$。我们在实数域范围内讨论对角化问题：

- 当 $1+b<0$ 即 $b<-1$ 时，特征值为虚数，矩阵在实数域上无法对角化。
- 当 $1+b=0$ 即 $b=-1$ 时，特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$。此时考察矩阵 $A-I=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$，其秩为 1。特征值 1 的几何重数为 $n-r(A-I)=2-1=1$，小于其代数重数 2，因此矩阵不可对角化。
- 当 $1+b>0$ 即 $b>-1$ 时，矩阵有两个互异的实特征值，必然可以对角化。

综上所述，A 不可对角化的 b 的取值范围是 $b\le -1$。

Exercise 6.1.13 设 λ_1 是实对称矩阵 A 的最大的特征值。证明 A 的左上角元素 $a_{11}\leqslant\lambda_1$。

Proof:

因为 A 是实对称矩阵,根据谱定理,存在正交矩阵 $Q=(q_{ij})_{n\times n}$ 和对角矩阵 $\Lambda=\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)$，使得 $A=Q\Lambda Q^T$。其中 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$ 是 A 的特征值。根据矩阵乘法的定义，A 的 $(1,1)$ 元 a_{11} 可以表示为 $Q\Lambda Q^T$ 的 $(1,1)$ 元。设 Q 的第 k 列为 q_k，则 $Q=[q_1,q_2,\cdots,q_n]$，其中 q_k 的第 1 个分量为 q_{1k}。展开矩阵乘积可得：

$$a_{11}=\sum_{k=1}^{n}\mu_k q_{1k}^2$$

由于 Q 是正交矩阵，其行向量也是单位向量。考察 Q 的第一行 $(q_{11},q_{12},\cdots,q_{1n})$，满足归一化条件：

$$\sum_{k=1}^{n}q_{1k}^2=1$$

且显然 $q_{1k}^2\geqslant 0$。题目假设 λ_1 是最大的特征值，即对于所有 k，都有 $\mu_k\leqslant\lambda_1$。因此，我们可以对 a_{11} 进行放缩：

$$a_{11}=\sum_{k=1}^{n}\mu_k q_{1k}^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}\lambda_1 q_{1k}^2=\lambda_1\sum_{k=1}^{n}q_{1k}^2$$

将 $\sum_{k=1}^{n}q_{1k}^2=1$ 代入上式，得：

$$a_{11}\leqslant\lambda_1\cdot 1=\lambda_1$$

证毕。 $\square$