Nov 24

习题一: 课本第135页习题5.1题4: 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 且 $f(x) \geq d > 0$, $\forall x \in [a,b]$, 证明函数 $\frac{1}{f(x)}$ 在区间 $[a,b]$ 上也 Riemann 可积.

证明: 由于 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 故函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界且几乎处处连续. 又由于 $f(x) \geq d > 0$, $\forall x \in [a,b]$, 故函数 $\frac{1}{f(x)}$ 的连续点集合, 与 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的连续点集合相同, 因此 函数 $\frac{1}{f(x)}$ 在区间 $[a,b]$ 上有界, 且几乎处处连续. 于是函数 $\frac{1}{f(x)}$ 在区间 $[a,b]$ 上也 Riemann 可积. 证毕.

习题二: 课本第135页习题5.1题5: 假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 证明 $\cos[f(x)]$ 在 $[a,b]$ 上也 Riemann 可积.

证明: 由假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界且几乎处处连续. 根据复合函数的连续性质知, 若 $f(x)$ 在点 x_0 处连续, 则函数 $\cos[f(x)]$ 在点 x_0 处也连续. 因此函数 $\cos[f(x)]$ 在 $[a,b]$ 上有界且几乎处处连续. 故 $\cos[f(x)]$ 在 $[a,b]$ 上也 Riemann 可积. 证毕.

习题三: 课本第135页习题5.1题6: 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 令

$$F(x) = \sup_{t \in [a,x]} f(t),$$

问函数 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上是否 Riemann 可积?

解: 函数 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上是 Riemann 可积. 理由如下. 由于函数 $f(x)$ 有界, 故函数 $F(x)$ 也有界. 又显然函数 $F(x)$ 单调上升, 而有界的单调函数可积. 因此$F(x)$ 在 $[a,b]$ 上是 Riemann 可积. 解答完毕.

习题四: 课本第136页习题5.1题9:

(1) 证明函数 x^2 在区间 $[a,b]$ 上一致连续;

(2) 证明函数 $\ln x$ 在区间 $(2,+\infty)$ 上一致连续;

(3) 证明函数 $\sin x$ 在实轴 $\mathbb{R}$ 上一致连续;

(4) 证明函数 $\sqrt{x}$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上一致连续.

证(1): 回忆 Cantor 定理: 有界闭区间上的连续函数必一致连续. 故根据 Cantor 定理知函数 x^2 在区间 $[a,b]$ 上一致连续.

证(2): 对任意 $x,y>2$, 由中值定理得

$$|\ln x-\ln y|=\frac{1}{\xi}|x-y|<\frac{1}{2}|x-y|,$$

其中 ξ 介于 x 和 y 之间, 故 $\xi>2$. 于是对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta=2\varepsilon$, 对任意 $x,y>2$ 且 $|x-y|<\delta$,

$$|\ln x-\ln y|<\frac{1}{2}|x-y|<\frac{1}{2}\delta=\frac{1}{2}\cdot 2\varepsilon=\varepsilon.$$

这就证明了函数 $\ln x$ 在区间 $(2,+\infty)$ 上一致连续.

证(3): 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta=\varepsilon$, 使得对任意 $x,y\in\mathbb{R}$, 且当 $|x-y|<\delta$ 时, 利用中值定理得

$$|\sin x-\sin y|=|\cos\xi||x-y|\le|x-y|<\delta=\varepsilon,$$

其中 ξ 介于 x 和 y 之间. 这就证明了函数 $\sin x$ 在实轴 $\mathbb{R}$ 上一致连续.

证(4): (i) 由 Cantor 定理知函数 $\sqrt{x}$ 在 $[0,1]$ 上一致连续.

(ii) 证函数 $\sqrt{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续. $\forall\varepsilon>0$, 存在 $\delta=\varepsilon$, 使得对任意 $x,y\ge 1$ 且 $|x-y|<\delta$ 时, 由中值定理得

$$|\sqrt{x}-\sqrt{y}|=\frac{1}{2\sqrt{\xi}}|x-y|<\frac{1}{2}\delta=\frac{1}{2}\varepsilon<\varepsilon,$$

其中 ξ 为介于 x 和 y 之间的某个点. 这说明函数 $\sqrt{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续.

(iii) 根据下面习题五的注记知, 函数 $\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续.

习题五: 课本第136页习题5.1题10: 假设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 和 $[b,c]$ 上均一致连续, 证明函数 $f(x)$ 在区间 $[a,c]$ 上一致连续.

证明: 由假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 和 $[b,c]$ 上均一致连续可知, 对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $\delta_1>0$, $\delta_2>0$, 使得对 $\forall x_1,y_1\in[a,b]$, $\forall x_2,y_2\in[b,c]$, 且 $|x_1-y_1|<\delta_1$, $|x_2-y_2|<\delta_2$, 成立

$$|f(x_1)-f(y_1)|<\varepsilon \quad 和 \quad |f(x_2)-f(y_2)|<\varepsilon.$$

再由函数 $f(x)$ 在点 $x=b$ 处连续知, 对上述 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta_3>0$, 使得当 $|x-b|<\delta_3$ 时, $|f(x)-f(b)|<\varepsilon$. 记 $\delta=\frac{1}{2}\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$, 对任意 $x,y\in[a,c]$ 且 $|x-y|<\delta$ 时,
(i) 若 $x,y\in[a,b]$ 或 $x,y\in[b,c]$, 则显然成立 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$;
(ii) 假设 x 或 y 的其中之一, 不妨设 $x\in[b-\delta,b-\delta]$, 则

$$|y-b|=|y-x+x-b|\le|x-y|+|x-b|<\delta+\delta=2\delta\le2\cdot\frac{1}{2}\delta_3=\delta_3.$$

于是

$$|f(x)-f(y)|=|f(x)-f(b)+f(b)-f(y)|\le|f(x)-f(b)|+|f(b)-f(y)|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon.$$

这就证明了函数 $f(x)$ 在区间 $[a,c]$ 上一致连续. 证毕.
注记: 用同样的方法可以证明如下命题: 假设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 和 $[1,+\infty)$ 上均一致连续, 证明函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上一致连续. 见课本第136页习题5.1题11.

习题六: 课本第136页习题5.1题15:
(1) 证明函数 x^2 在 $[0,+\infty)$ 上非一致连续;
(2) 证明函数 $\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上非一致连续;
(3) 证明函数 $\sin(x^2)$ 在 $\mathbb{R}$ 上非一致连续;
(4) 证明函数 $x\sin x$ 在 $\mathbb{R}$ 上非一致连续.

证(1): 反证. 若不然, 则函数 x^2 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续, 即对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $|x-y|<\delta$ 时 $(x,y\ge0)$, $|x^2-y^2|<\varepsilon$. 取 $x_n=n+\frac{1}{n}$, $y_n=n$, 则 $|x_n-y_n|=\frac{1}{n}<\delta$ (n 充分大),

但
$$|x_n^2-y_n^2| = \left|n^2+2+\frac{1}{n^2}-n^2\right| = 2+\frac{1}{n^2}$$
不可能任意小. 矛盾. 命题得证.

证(2): 反证. 若不然, 则函数 $\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致连续, 即对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $|x-y|<\delta$ 时 $(x,y>0)$,
$$|\ln x-\ln y| = \left|\ln\frac{x}{y}\right| < \varepsilon.$$
取 $x_n=\frac{2}{n}$, $y_n=\frac{1}{n}$, 则 $|x_n-y_n|=\frac{1}{n}<\delta$ (n 充分大), 但
$$|\ln x_n-\ln y_n| = \left|\ln\frac{x_n}{y_n}\right| = \ln 2 < \varepsilon.$$
而 $\varepsilon>0$ 可以任意小. 故这不可能. 命题得证.

证(3): 反证. 若不然, 则函数 $\sin(x^2)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续, 即对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $|x-y|<\delta$ 时,
$$|\sin(x^2)-\sin(y^2)|<\varepsilon.$$
由三角函数的和差化积公式得
$$\sin(x^2)-\sin(y^2) = 2\cos\frac{x^2+y^2}{2}\sin\frac{x^2-y^2}{2}.$$
取
$$x_n^2 = n\pi+\frac{3\pi}{2},\quad y_n^2 = n\pi+\frac{\pi}{2},$$
则
$$|x_n-y_n| = \sqrt{n\pi+\frac{3\pi}{2}}-\sqrt{n\pi+\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{n\pi+\frac{3\pi}{2}}+\sqrt{n\pi+\frac{\pi}{2}}}\to 0,$$
$$|\sin(x_n^2)-\sin(y_n^2)| = 2\left|\cos\frac{x_n^2+y_n^2}{2}\sin\frac{x_n^2-y_n^2}{2}\right|$$
$$= 2\left|\cos(n\pi+\pi)\sin\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right| = 2.$$
这表明函数 $\sin(x^2)$ 在 $\mathbb{R}$ 上非一致连续.

证(4): 取 $x_n = 2n\pi + \frac{1}{2n\pi}$, $y_n = 2n\pi$, 则 $|x_n - y_n| = \frac{1}{2n\pi} \to 0$, 但

$$|x_n \sin x_n - y_n \sin y_n| = \left(2n\pi + \frac{1}{2n\pi}\right)\left|\sin\left(2n\pi + \frac{1}{2n\pi}\right)\right|$$

$$= 2n\pi \sin\left(\frac{1}{2n\pi}\right) + \frac{1}{2n\pi}\sin\left(\frac{1}{2n\pi}\right) \to 1 + 0 = 1.$$

这说明函数 $x\sin x$ 在 $\mathbb{R}$ 上非一致连续. 证毕.

习题七: 课本第136页习题5.1题16(有修改): 设 $a < b$ 为两个有限实数, $f(x)$ 在 (a,b) 上连续. 证明函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上一致连续, 当且仅当两个单侧极限 $\lim_{x\to a^+} f(x)$ 和 $\lim_{x\to b^-} f(x)$ 均存在, 并说明函数 $\frac{\sin x}{x}$ 在 $(0,1)$ 上一致连续.

证必要性: 假设 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上一致连续, 要证两个单侧极限存在. 根据 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上的一致连续性知, 对 $\forall\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $x, y \in (a, a+\delta)$ 时, $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. 根据函数极限的 Cauchy 准则知极限 $\lim_{x\to a^+} f(x)$ 存在. 类似可证极限 $\lim_{x\to b^-} f(x)$ 均存在.

证充分性: 假设两个单侧极限存在, 作函数

$$F(x) = \begin{cases} \lim_{x\to a^+} f(x), & x = a, \\ f(x), & x \in (a,b), \\ \lim_{x\to b^-} f(x), & x = b, \end{cases}$$

则显然函数 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 根据 Cantor 定理知函数 $F(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上一致连续. 由此得到 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上一致连续. 充分性得证.

由于 $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$, 且 $\lim_{x\to 1^-} \frac{\sin x}{x} = \sin 1$, 故根据上述结论知, 函数 $\frac{\sin x}{x}$ 在 $(0,1)$ 上一致连续.

注: 当函数 $f(x)$ 在有界开区间 (a,b) 上一致连续时, 还可以得到 $f(x)$ 在 (a,b) 上的有界性.

习题八: 课本第145页习题5.3题1: 求下列函数的导数

(1) $F(x)=\int_0^x\sqrt{1-t}dt$, 其中 $x\le 1$;

(2) $F(x)=\int_x^1\sqrt{1+t^2}dt$;

(3) $F(x)=\int_0^{x^2}\ln(2+t)dt$;

(4) $F(x)=\int_{\sqrt{x}}^{x^2}e^{-t^2}dt$;

(5) $F(x)=\int_0^{\arctan x}\tan t dt$;

(6) $F(x)=\int_0^x f(t)dt$, $0\le x\le 2$, 其中

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x<1,\\ 1, & 1\le x\le 2.\end{cases}$$

解(1): $F'(x)=\sqrt{1-x}$;

解(2): $F'(x)=-\sqrt{1+x^2}$;

解(3): $F'(x)=2x\ln(1+x^2)$;

解(4): $F'(x)=2xe^{-x^4}-\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-x}$;

解(5): $F'(x)=\frac{x}{1+x^2}$;

解(6): 由于被积函数 $f(x)$ 在开区间 $(0,1)$ 和 $(1,2)$ 上连续, 故 $F(x)$ 在这两个开区间处处可导, 且

$$F'(x)=2x,\quad x\in(0,1),\qquad\qquad F'(x)=1,\quad x\in(1,2).$$

习题九: 课本第145页习题5.3题2: 设函数 $y=y(x)$ 由方程

$$\int_0^y e^{-t^2}dt+\int_0^x\cos(t^2)dt=0 \tag{1}$$

确定, 求其导数 $y'(x)$.

解: 对方程 (1) 求导得

$$e^{-y^2}y'(x)+\cos(x^2)=0\quad \text{由此得}\quad y'(x)=-e^{y^2}\cos(x^2).$$

习题十: 课本第145页习题5.3题3: 设曲线 $y=f(x)$ 由如下参数方程

$$x=\int_1^t \frac{\cos u}{u}du, \quad y=\int_1^t \frac{\sin u}{u}du,$$

确定, 求该曲线在当 $t=\frac{\pi}{4}$ 时的点处之斜率.

解: 根据参数曲线的求导公式得

$$f'(x)=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{\frac{\sin t}{t}}{\frac{\cos t}{t}}=\frac{\sin t}{\cos t}=\tan t.$$

当 $t=\frac{\pi}{4}$ 时, 曲线对应的点记为 (x_0,y_0), 其中

$$x_0=\int_1^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos u}{u}, \quad y_0=\int_1^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin u}{u}.$$

切线在点 (x_0,y_0) 的斜率为 $f'(x_0)=\tan\frac{\pi}{4}=1$. 解答完毕.

习题十一: 课本第145页习题5.3题4: 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续. 若 $f(x)$ 满足积分方程

$$\int_0^{\sqrt{x}} f(t)dt=x+\sin x, \tag{2}$$

求 $f(x)$.

解: 对方程 (2) 关于 $x>0$ 求导得

$$f(\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}=1+\cos x \quad \text{或} \quad f(\sqrt{x})=2\sqrt{x}+2\sqrt{x}\cos x.$$

将 x 换作 x^2 得

$$f(x)=2x+2x\cos(x^2).$$

解答完毕.

Nov 26 作业

习题一: 课本第155-156页习题5.4题1:

思考下列问题. 如果答案是肯定的, 请简要说明; 如果答案是否定的, 请举出反例.

(1) 若函数 $f(x)$ 在区间 J 上可积, 问函数 $f(x)$ 在 J 上是否必存在原函数?

(2) 若函数 $f(x)$ 在区间 J 上仅有第一类间断点, 问函数 $f(x)$ 在 J 上是否必存在原函数?

(3) 若函数 $f(x)$ 在区间 J 上有原函数, 问函数 $f(x)$ 在区间 J 上是否必可积?

问题(1)答: 不一定. 例如 $J=[-1,1]$, 符号函数 $sgn(x)$ 在 J 上可积, 但 $sgn(x)$ 在 J 上没有原函数. 因为 $x=0$ 是 $sgn(x)$ 的第一类间断点. 而导函数没有第一类间断点.

问题(2)答: 否定, 即若函数 $f(x)$ 在区间 J 上仅有第一类间断点, 则函数 $f(x)$ 在 J 上没有原函数. 例如符号函数 $sgn(x)$, $J=[-1,1]$.

问题(3)答: 不一定. 反例: $J=[0,1]$,

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x=0, \\ x^2\sin\frac{1}{x^2}, & x\neq 0. \end{cases}$$

易见 $F(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上处处可导, 且

$$F'(x)=\begin{cases} 0, & x=0, \\ 2x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}, & x\neq 0. \end{cases}$$

记 $f(x)=F'(x)$. 由于函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上无界, 故 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上不可积.

习题二: 课本第155-156页习题5.4题2:

考查下列函数在实轴 $\mathbb{R}$ 上是否有原函数. 若有, 请求出原函数; 若没有, 请说明理由.

$$(1)\quad f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\leq 0, \\ \cos x, & x>0; \end{cases}\qquad (2)\quad f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\leq 0, \\ \cos x+\frac{\pi}{4}, & x>0; \end{cases}$$

$$(3)\quad f(x)=\begin{cases} -\sin x, & x\leq 0, \\ \frac{1}{\sqrt{x}}, & x>0; \end{cases}\qquad (4)\quad f(x)=\begin{cases} 1, & x\leq 0, \\ x, & x>0. \end{cases}$$

解(1): 显然函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上处处连续, 故 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有原函数, 且 $\int_0^x f(t)dt$ 就是 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的一个原函数.

解(2): 由于函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有一个第一类(跳跃间断)点, 故函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上没有原函数.

解(3): 回答是否定的. 反证. 假设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的有原函数 $F(x)$, 则

$$F(x)=\begin{cases}\cos x+C_1, & x<0,\\ 2\sqrt{x}+C_2, & x>0.\end{cases}$$

在根据 $F(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性知 $C_2=1+C_1$. 故原函数为

$$F(x)=\begin{cases}\cos x+C_1, & x\leq 0,\\ 2\sqrt{x}+1+C_1, & x>0.\end{cases}$$

我们再来考虑函数 $F(x)$ 在点 $x=0$ 处的左导数和右导数:

$$F'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\cos x+C_1-1-C_1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\cos x-1}{x}=0;$$

$$F'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2\sqrt{x}+1+C_1-1-C_1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2\sqrt{x}}{x}=+\infty.$$

即右导数 $F'_+(0)$ 不存在. 因此 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的不存在原函数.

解(4): 函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的不存在原函数. 因为函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有第一类间断点. 解答完毕.

习题三: 课本第155-156页习题5.4题3: 求下列不定积分

$$(1)\quad \int(x-x^{-2})\sqrt{x\sqrt{x}}dx;\quad (3)\quad \int a^xe^xdx;\quad (5)\quad \int(2\cosh x-3\sinh x)dx;$$

$$(7)\quad \int\left(\frac{4}{\sqrt{1-x^2}+\sin x}\right))dx;\quad (9)\quad \int|(x-1)(3x-2)|dx.$$

解(1):

$$\int(x-x^{-2})\sqrt{x\sqrt{x}}dx=\int(x-x^{-2})x^{\frac{3}{4}}dx=\int(x^{\frac{7}{4}}-x^{-\frac{5}{4}})dx$$

$$= \int x^{\frac{7}{4}}dx - \int x^{-\frac{5}{4}}dx = \frac{4}{11}x^{\frac{11}{4}} + 4x^{-\frac{1}{4}} + C.$$

解(3):

$$\int a^x e^x dx = \int e^{x(1+\ln a)} = \frac{1}{1+\ln a}e^{x(1+\ln a)} + C.$$

解(5): 回忆双曲函数的性质: $(\sinh x)' = \cosh x$, $(\cosh x)' = \sinh x$. 于是

$$\int (2\cosh x - 3\sinh x)dx = 2\int \cosh x dx - 3\int \sinh x dx = 2\sinh x - 3\cosh x + C.$$

解(7):

$$\int \left(\frac{4}{\sqrt{1-x^2}} + \sin x\right)dx = \int \frac{4dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \sin x dx = 4\arcsin x - \cos x + C.$$

解(9): 为方便不定积分的计算, 先将被积函数 $|(x-1)(3x-2)|$ 写作如下分段形式

$$|(x-1)(3x-2)| = \begin{cases} 3x^2 - 5x + 2, & x \le \frac{2}{3}, \\ -3x^2 + 5x - 2, & \frac{2}{3} \le x \le 1, \\ 3x^2 - 5x + 2, & x > 1. \end{cases}$$

于是

$$\int |(x-1)(3x-2)|dx = \begin{cases} \int (3x^2 - 5x + 2)dx, & x \le \frac{2}{3}, \\ \int (-3x^2 + 5x - 2)dx, & \frac{2}{3} \le x \le 1, \\ \int (3x^2 - 5x + 2)dx, & x > 1, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x + C_1, & x \le \frac{2}{3}, \\ -x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 2x + C_2, & \frac{2}{3} \le x \le 1, \\ x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x + C_3, & x > 1. \end{cases}$$

由于原函数处处可导, 从而处处连续. 特别在点 $x = \frac{2}{3}$ 和点 $x = 1$ 处连续. 根据函数在 $x = \frac{2}{3}$ 的连续性得

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 - \frac{5}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{2}{3}\right) + C_1 = -\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \frac{5}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{2}{3}\right) + C_2.$$

由此解得 $C_2 = C_1 + \frac{28}{27}$. 再根据函数在 $x = 1$ 的连续性得

$$-1 + \frac{5}{2} - 2 + C_2 = 1 - \frac{5}{2} + 2 + C_3.$$

由此解得 $C_3 = C_2 - 1 = C_1 + \frac{1}{27}$. 于是所求不定积分为

$$\int |(x-1)(3x-2)|dx = \begin{cases} x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x + C, & x \le \frac{2}{3}, \\ -x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 2x + C + \frac{28}{27}, & \frac{2}{3} \le x \le 1, \\ x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x + C + \frac{1}{27}, & x > 1, \end{cases}$$

其中 C 为任意常数.

习题四: 课本第155-156页习题5.4题4: 求下列不定积分

$$(1) \quad \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx; \qquad (2) \quad \int \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}; \qquad (3) \quad \int \frac{dx}{(1+x^2)\arctan x};$$

$$(4) \quad \int \frac{1}{x^2}\sinh\frac{1}{x}dx; \qquad (5) \quad \int \tanh x dx; \qquad (6) \quad \int x\sec^2(1-x^2)dx;$$

$$(7) \quad \int \frac{x^2dx}{1+x^6}; \qquad (8) \quad \int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{1+\tan x}}dx; \qquad (9) \quad \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\sin\sqrt{1+x^2}dx;$$

解(1):

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx = \int \frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1} = \ln|x^2+x+1| + C;$$

解(2):

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(4-x^2)}{\sqrt{4-x^2}} = -\sqrt{4-x^2} + C.$$

解(3):

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)\arctan x} = \int \frac{d\arctan x}{\arctan x} = \ln|\arctan x| + C.$$

解(4):

$$\int \frac{1}{x^2}\sinh\frac{1}{x}dx = -\int \sinh\frac{1}{x}d\frac{1}{x} = -\cosh\frac{1}{x} + C.$$

解(5):

$$\int \tanh x dx = \int \frac{\sinh x}{\cosh x} dx = \int \frac{d\cosh x}{\cosh x} = \ln|\cosh x| + C.$$

解(6):

$$\int x\sec^2(1-x^2)dx = \int \frac{xdx}{\cos^2(1-x^2)} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\cos^2(1-x^2)} = -\frac{1}{2}\tan(1-x^2) + C.$$

解(7):

$$\int \frac{x^2dx}{1+x^6} = \frac{1}{3}\int \frac{dx^3}{1+x^6} = \frac{1}{3}\arctan(x^3) + C.$$

解(8):

$$\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{1+\tan x}}dx = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\sqrt{1+\tan x}} = \int \frac{d(1+\tan x)}{\sqrt{1+\tan x}} = 2\sqrt{1+\tan x} + C.$$

解(9):

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\sin\sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{\sqrt{1+x^2}}\sin\sqrt{1+x^2}$$

$$= \int \sin\sqrt{1+x^2}d\sqrt{1+x^2} = -\cos\sqrt{1+x^2} + C.$$

习题五: 课本第157页习题5.4题5: 求下列不定积分

$$(1)\quad \int \frac{dx}{3-x^2};\qquad (2)\quad \int \frac{xdx}{3-x^2};\qquad (3)\quad \int \frac{xdx}{x^2+x-6};$$

$$(4)\quad \int \frac{x-1}{x^2-4x+8}dx;\qquad (5)\quad \int \frac{2x+1}{\sqrt{4x-x^2}}dx;\qquad (6)\quad \int \frac{x+1}{\sqrt{-x^2+2x+3}}dx;$$

解(1):

$$\int \frac{dx}{3-x^2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\int \left(\frac{1}{\sqrt{3}-x} + \frac{1}{\sqrt{3}+x}\right)dx = \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+x}{\sqrt{3}-x}\right| + C.$$

解(2):

$$\int \frac{xdx}{3-x^2} = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{\sqrt{3}-x} - \frac{1}{\sqrt{3}+x}\right)dx$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)| + C = -\frac{1}{2}\ln|3-x^2| + C.$$

解(3): 将分式 $\frac{x}{x^2+x-6}$ 分解为最简分式. 由于 $x^2+x-6=(x+3)(x-2)$, 故可令

$$\frac{x}{x^2+x-6} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-2}, \tag{3}$$

其中 A, B 为待定常数. 由等式 (3) 同时乘以 $(x+3)(x-2)$ 得 $x = A(x-2)+B(x+3)$. 解之得 $A=\frac{3}{5}$, $B=\frac{2}{5}$. 于是

$$\int \frac{xdx}{x^2+x-6} = \frac{1}{5}\int\left(\frac{3}{x+3}+\frac{2}{x-2}\right)dx = \frac{1}{5}\ln|(x+3)^3(x-2)^2| + C.$$

解(4):

$$\int \frac{x-1}{x^2-4x+8}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d[(x-2)^2+4]}{(x-2)^2+4}dx + \int \frac{d(x-2)}{(x-2)^2+4}dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left[(x-2)^2+4\right] + \frac{1}{2}\arctan\frac{x-2}{2} + C.$$

解(5):

$$\int \frac{2x+1}{\sqrt{4x-x^2}}dx = \int \frac{(x^2-4x)'+5}{\sqrt{4x-x^2}}dx = -\int \frac{d(4x-x^2)}{\sqrt{4x-x^2}}dx + 5\int \frac{1}{\sqrt{4-(x-2)^2}}dx$$

$$= -2\sqrt{4x-x^2} + 5\arcsin\frac{x-2}{2} + C.$$

解(6):

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{-x^2+2x+3}}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{(-x^2+2x+3)'}{\sqrt{-x^2+2x+3}}dx + 2\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+2x+3}}dx$$

$$= -\sqrt{-x^2+2x+3} + 2\int \frac{1}{\sqrt{4-(x-1)^2}}dx$$

$$= -\sqrt{-x^2+2x+3} + 2\arcsin\frac{x-1}{2} + C.$$

习题六: 课本第157页习题5.4题6: 求下列不定积分

$$(1)\quad \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx; \qquad (2)\quad \int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx; \qquad (3)\quad \int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}};$$

$$(4)\quad \int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx; \qquad (5)\quad \int \frac{2x-1}{\sqrt{4x^2+4x+5}}dx; \qquad (6)\quad \int \frac{x^2}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx.$$

解(1):

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = \int \sqrt{a^2+x^2}dx - a^2\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}. \tag{4}$$

对不定积分 $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$ 作变量代换 $x = a\sinh t$, 其反函数为 $t = \ln(\frac{x}{a} + \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}})$. 于是

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \int \frac{a\cosh t dt}{a\cosh t} = t + C_1$$

$$= \ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}\right) + C_1 = \ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) + C_2, \tag{5}$$

其中 $C_2 = C_1 - \ln a$. 再对不定积分 $\int \sqrt{a^2+x^2}dx$ 作分部积分得

$$\int \sqrt{a^2+x^2}dx = x\sqrt{a^2+x^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx. \tag{6}$$

将式 (5) 和 (6) 代入 (4) 得

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = x\sqrt{a^2+x^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx - a^2\ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) + C_2.$$

因此

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2+x^2} - \frac{1}{2}a^2\ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) + C,$$

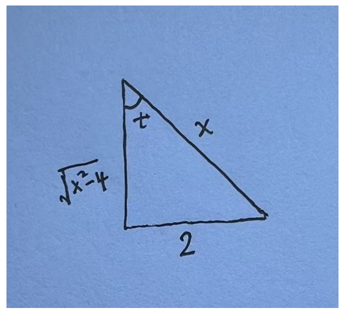
其中 $C = \frac{1}{2}C_2$ 为任意常数.

解(2): 对积分 $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx$ 作变量代换 $x = \frac{2}{\sin t}$, $0 < |t| < \frac{\pi}{2}$, 于是

$$\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx = \int \frac{\sqrt{\frac{4}{\sin^2 t}-4}}{\frac{2}{\sin t}} \cdot \frac{-2\cos t}{\sin^2 t}dt = -2\int \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}dt$$

$$= -2\int \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}dt = 2t - 2\int \frac{dt}{\sin^2 t} = 2t + 2\cot t + C.$$

由代换 $x = \frac{2}{\sin t}$ 得 $t = \arcsin\frac{2}{x}$. 再根据 $\sin t = \frac{2}{x}$ 可得 $\cot t = \frac{\sqrt{x^2-4}}{2}$, 如图所示.



因此

$$\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx = \sqrt{x^2-4} + 2\arcsin\frac{2}{x} + C.$$

解(3): 对积分 $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}$ 作变量代换 $x = a\sin t$, $0 < |t| < \frac{\pi}{2}$. 于是

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{a\cos t}{a\sin t\cdot a\cos t}dt = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{\sin t} = \frac{1}{a}\int \frac{\sin tdt}{\sin^2 t} = -\frac{1}{a}\int \frac{d\cos t}{1-\cos^2 t}$$

$$= -\frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{1-\cos t}+\frac{1}{1+\cos t}\right)d\cos t = -\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{1+\cos t}{1-\cos t}\right| + C = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{1+\cos t}{\sin t}\right| + C.$$

根据变换 $x = a\sin t$, $0 < |t| < \frac{\pi}{2}$, 可知 $\cos t = \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$. 于是

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{1+\cos t}{\sin t}\right| + C = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}{\frac{x}{a}}\right| + C$$

$$= -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right| + C = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{x}{a+\sqrt{a^2-x^2}}\right| + C.$$

解(4): 对积分 $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$ 作变量代换 $x = \frac{1}{\sin t}$, $0 < |t| < \frac{\pi}{2}$. 于是

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{\frac{-\cos t}{\sin^2 t}dt}{\frac{1}{\sin^2 t}\sqrt{\frac{1}{\sin^2 t}-1}} = -\int \sin tdt = \cos t + C = \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} + C.$$

解(5): 注意 $4x^2+4x+5=4(x+\frac{1}{2})^2+4=4u^2+4$, 其中 $u=x+\frac{1}{2}$. 于是

$$\int\frac{2x-1}{\sqrt{4x^2+4x+5}}dx=\int\frac{2u-2}{\sqrt{4u^2+4}}du=\int\frac{u-1}{\sqrt{u^2+1}}du=\int\frac{udu}{\sqrt{u^2+1}}-\int\frac{du}{\sqrt{u^2+1}}.$$

上述第一个积分可简单计算, 而第二个积分可用双曲函数变换 $u=\sinh t$ 计算:

$$\int\frac{udu}{\sqrt{u^2+1}}du=\frac{1}{2}\int\frac{d(u^2+1)}{\sqrt{u^2+1}}=\sqrt{u^2+1}+C_1;$$

$$\int\frac{du}{\sqrt{u^2+1}}=\int\frac{\cosh t}{\cosh t}dt=t+C_2=\ln(u+\sqrt{u^2+1})+C_2.$$

于是

$$\int\frac{2x-1}{\sqrt{4x^2+4x+5}}dx=\sqrt{u^2+1}-\ln(u+\sqrt{u^2+1})+C$$

$$=\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1}-\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+1}\right)+C.$$

解(6): 由于 $3+2x-x^2=4-(x-1)^2=4-u^2$, $u=x-1$, 故

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx=\int\frac{(u+1)^2}{\sqrt{4-u^2}}du=\int\frac{u^2+2u+1}{\sqrt{4-u^2}}du$$

$$=\int\frac{u^2-4}{\sqrt{4-u^2}}du+\int\frac{2u}{\sqrt{4-u^2}}du+5\int\frac{du}{\sqrt{4-u^2}}$$

$$=-\int\sqrt{4-u^2}du-\int\frac{d(4-u^2)}{\sqrt{4-u^2}}+5\arcsin\frac{u}{2}$$

$$=-\int\sqrt{4-u^2}du-2\sqrt{4-u^2}+5\arcsin\frac{u}{2}.$$

对上式中的积分 $\int\sqrt{4-u^2}du$ 作变量代换 $u=2\sin t$, $|t|<\frac{\pi}{2}$ 得

$$\int\sqrt{4-u^2}du=\int 2\cos t\cdot 2\cos tdt=4\int\cos^2 tdt=2\int(1+\cos 2t)dt=2t+\sin 2t+C_1$$

$$=2\arcsin\frac{u}{2}+2\sin t\cos t+C_1=2\arcsin\frac{u}{2}+u\sqrt{1-\frac{u^2}{4}}+C_1$$

$$= 2\arcsin\frac{u}{2} + \frac{u}{2}\sqrt{4-u^2} + C_1.$$

于是

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx = -2\arcsin\frac{u}{2} - \frac{u}{2}\sqrt{4-u^2} - 2\sqrt{4-u^2} + 5\arcsin\frac{u}{2} + C$$

$$= 3\arcsin\frac{u}{2} - \left(\frac{u}{2}+2\right)\sqrt{4-u^2} + C = 3\arcsin\frac{x-1}{2} - \frac{x+3}{2}\sqrt{4-(x-1)^2} + C.$$

解答完毕.

习题七: 课本第157页习题5.4题7: 求下列不定积分

$$(1)\quad \int x\cos(2x)dx; \qquad (2)\quad \int xe^{-3x}dx; \qquad (3)\quad \int x^2\sin(2x)dx;$$

$$(4)\quad \int x\arctan x dx; \qquad (5)\quad \int x\ln(x-1)dx; \qquad (6)\quad \int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx;$$

解(1):

$$\int x\cos(2x)dx = \frac{1}{2}\int xd\sin(2x) = \frac{1}{2}x\sin(2x) - \frac{1}{2}\int \sin(2x)dx$$

$$= \frac{1}{2}x\sin(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x) + C.$$

解(2):

$$\int xe^{-3x}dx = -\frac{1}{3}\int xde^{-3x} = -\frac{1}{3}xe^{-3x} + \frac{1}{3}\int e^{-3x}dx = -\frac{1}{3}xe^{-3x} - \frac{1}{9}e^{-3x} + C.$$

解(3):

$$\int x^2\sin(2x)dx = -\frac{1}{2}\int x^2 d\cos(2x) = -\frac{1}{2}x^2\cos(2x) + \frac{1}{2}\int \cos(2x)2xdx$$

$$= -\frac{1}{2}x^2\cos(2x) + \frac{1}{2}\int xd\sin(2x) = -\frac{1}{2}x^2\cos(2x) + \frac{1}{2}x\sin(2x) - \frac{1}{2}\int \sin(2x)dx$$

$$= -\frac{1}{2}x^2\cos(2x) + \frac{1}{2}x\sin(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x) + C.$$

解(4):

$$\int x\arctan x dx = \frac{1}{2}\int \arctan x d(x^2) = \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx = \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctan x + C.$$

解(5):

$$\int x\ln(x-1)dx = \frac{1}{2}\int \ln(x-1)d(x^2) = \frac{1}{2}x^2\ln(x-1) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x-1}dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln(x-1) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2-1+1}{x-1}dx = \frac{1}{2}x^2\ln(x-1) - \frac{1}{2}\int (x+1)dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1}$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln(x-1) - \frac{1}{2}\ln(x-1) - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + C.$$

解(6):

$$\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx = x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx$$

$$= x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C.$$