线性代数习题解答

练习 3.3.11：求平面 $\mathcal{M}$ 上的正交投影与距离

解：

(1) 平面 $\mathcal{M}: x_1 - x_2 + x_3 = 0$ 的法向量为 $\boldsymbol{n} = (1, -1, 1)^{\mathrm{T}}$。由此

$$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n} = 2, \qquad \boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n} = 3, \qquad \boldsymbol{p}_n = \frac{\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}}\boldsymbol{n} = \frac{2}{3}(1, -1, 1)^{\mathrm{T}}.$$

(2) 正交投影等于去掉法向分量：

$$\boldsymbol{p}_{\mathcal{M}} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{p}_n = (1, 1, 2)^{\mathrm{T}} - \frac{2}{3}(1, -1, 1)^{\mathrm{T}} = (1/3, 5/3, 4/3)^{\mathrm{T}}.$$

(3) 距离就是 $\boldsymbol{p}_n$ 的模长：

$$\operatorname{dist}(\boldsymbol{b}, \mathcal{M}) = \|\boldsymbol{p}_n\| = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

练习 3.3.17：求列空间和行空间的正交投影矩阵

解：

令

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 4 & 8 & 8 \end{bmatrix}.$$

(1) 三个列向量都与 $\boldsymbol{c} = (3, 4)^{\mathrm{T}}$ 共线，因此列空间是一维的。列空间上的正交投影矩阵为

$$P_1 = \frac{\boldsymbol{c}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}} = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{bmatrix}.$$

(2) 行空间等于 $\mathcal{R}(A^{\mathrm{T}})$，由 $\boldsymbol{r} = (1, 2, 2)^{\mathrm{T}}$ 张成。于是

$$P_2 = \frac{\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

(3) 由于 A 的列向量本就在 $\mathcal{R}(A)$ 中，故 $P_1A = A$；同理，$AP_2 = A$。于是

$$P_1AP_2 = A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 4 & 8 & 8 \end{bmatrix}.$$

练习 3.3.18：验证 $P_2P_1 = P_1$

解：

给定

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{a}_1 = (1,2,0)^{\mathrm{T}}.$$

(1) 令 $V_1 = \mathrm{span}(\boldsymbol{a}_1)$，$V_2 = \mathcal{R}(A)$。显然 $V_1 \subseteq V_2$，所以任意向量先投影到 V_1 中后再投影到 V_2 时保持不变，即 $P_2(P_1\boldsymbol{x}) = P_1\boldsymbol{x}$。

(2) 对所有 $\boldsymbol{x}$ 均成立上述关系，因此矩阵相等：$P_2P_1 = P_1$。

(3) 投影矩阵 P_1 可直接写为

$$P_1 = \frac{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

练习 3.3.23：斜投影矩阵的性质

证明. **(1)** 设 $Q = I_n - P$，则

$$Q^2 = (I_n - P)^2 = I_n - 2P + P^2 = I_n - P = Q,$$

因此 Q 亦为斜投影矩阵。

(2) 若 $\boldsymbol{y} \in \mathcal{R}(P)$，可写为 $\boldsymbol{y} = P\boldsymbol{x}$，于是 $(I_n - P)\boldsymbol{y} = 0$，故 $\mathcal{R}(P) \subseteq \mathcal{N}(I_n - P)$。反过来若 $(I_n - P)\boldsymbol{y} = 0$，则 $\boldsymbol{y} = P\boldsymbol{y}$，所以 $\boldsymbol{y} \in \mathcal{R}(P)$。因此 $\mathcal{R}(P) = \mathcal{N}(I_n - P)$，同理可得 $\mathcal{R}(I_n - P) = \mathcal{N}(P)$。

(3) 任意 $\boldsymbol{v}$ 都满足恒等式 $\boldsymbol{v}=P\boldsymbol{v}+(I_n-P)\boldsymbol{v}$，其中前项在 $\mathcal{R}(P)$，后项在 $\mathcal{R}(I_n-P)$。若还存在 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2$，其中 $\boldsymbol{u}_1\in\mathcal{R}(P)$，$\boldsymbol{u}_2\in\mathcal{R}(I_n-P)$，左右同乘 P 得到 $P\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}_1$，再同乘 I_n-P 得到 $(I_n-P)\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}_2$，故分解唯一。

(4) 取

$$P=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},$$

直接计算可知 $P^2=P$ 但 $P^{\mathrm{T}}\neq P$，于是该矩阵是斜投影但不是正交投影。

□

练习 3.3.15：辨析命题的真伪

解：

设 A 可逆，记 $\boldsymbol{r}_i$ 为 A 的第 i 行向量，$\boldsymbol{c}_i$ 为第 i 列。

(1) 错误。 取 $A=I_2$，则 $\boldsymbol{r}_1^{\mathrm{T}}=(1,0)^{\mathrm{T}}$，而 (A^{-1}) 的对应行转置也是 $(1,0)^{\mathrm{T}}$，内积为 $1\neq 0$。

(2) 错误。 $\boldsymbol{r}_iA^{-1}$ 的第 i 个对角元素为 1，因此 $\boldsymbol{r}_i^{\mathrm{T}}$ 与 A^{-1} 的第 i 列内积为 1 而非 0。

(3) 错误。 A 的第 i 列与 A^{-1} 的第 i 行的转置满足

$$\boldsymbol{c}_i^{\mathrm{T}}\big((\boldsymbol{r}_i^{A^{-1}})^{\mathrm{T}}\big)=\boldsymbol{r}_i^{A^{-1}}\boldsymbol{c}_i=e_i^{\mathrm{T}}A^{-1}Ae_i=1.$$

(4) 错误。 同样以 $A=I$ 为例，任意对应列内积都等于 1。

(5) 错误。 设 $v=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$、$w=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$。令 $x=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$，则 $v^{\mathrm{T}}x=0$；令 $y=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$，则 $w^{\mathrm{T}}y=0$，但 $x^{\mathrm{T}}y=1$，两个解集中的向量并非总是正交。

(6) 正确。 第 k 列为 Ae_k，其模长平方为 $\|Ae_k\|^2=e_k^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}Ae_k=e_k^{\mathrm{T}}Ae_k=A_{kk}$，其中用了正交投影矩阵的性质 $A^{\mathrm{T}}=A$、$A^2=A$。

(7) 正确。 若 A,B 是正交投影且 $AB=BA$，则 $(AB)^2=A(BA)B=(AA)(BB)=AB$ 且 $(AB)^{\mathrm{T}}=BA=AB$，故 AB 仍为正交投影。反之若 AB 是正交投影，则 $(AB)^{\mathrm{T}}=BA$ 必等于 AB，从而 $AB=BA$。

(8) 正确。 当 $\mathcal{R}(A)\perp\mathcal{R}(B)$ 时，$A+B$ 对称且 $(A+B)^2=A+B$，它是投影到 $\mathcal{R}(A)\oplus\mathcal{R}(B)$ 的正交投影。若 $A+B$ 为正交投影，则 A、B 分别是其在互补正交子空间上的投影，因而 $\mathcal{R}(A)$ 与 $\mathcal{R}(B)$ 必相互正交。

练习 3.3.24：最小二乘拟合直线与抛物线

解：

已知四个点

$$(x_i, y_i) = (0,0),\ (1,8),\ (3,8),\ (4,20).$$

首先计算必要的求和值：

$$\sum x_i = 8, \quad \sum y_i = 36, \quad \sum x_i^2 = 26, \quad \sum x_i y_i = 0+8+24+80 = 112.$$

(1) 平行于 x 轴的直线 $y=b$

最小二乘条件 $S(b) = \sum_{i=1}^{4}(y_i - b)^2$ 最小。令导数为零得到

$$4b = \sum_{i=1}^{4} y_i = 36 \Rightarrow b = 9.$$

因而最佳直线为

$$y = 9.$$

(2) 过原点的直线 $y = kx$

正规方程为 $(\sum x_i^2)k = \sum x_i y_i$，即：

$$26k = 112 \Rightarrow k = \frac{112}{26} = \frac{56}{13}.$$

故最佳直线为

$$y = \frac{56}{13}x.$$

(3) 一般直线 $y = kx + b$

令

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 8 \\ 20 \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} k \\ b \end{bmatrix}.$$

正规方程 $X^{\mathrm{T}}X\beta = X^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ 给出

$$\begin{bmatrix} 26 & 8 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 112 \\ 36 \end{bmatrix}.$$

由第二行得 $8k + 4b = 36 \Rightarrow 2k + b = 9 \Rightarrow b = 9 - 2k$。代入第一行：

$$26k + 8(9-2k) = 112 \Rightarrow 26k + 72 - 16k = 112 \Rightarrow 10k = 40 \Rightarrow k = 4.$$

进而 $b = 9 - 2(4) = 1$。即

$$y = 4x + 1.$$

(4) 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$

令设计矩阵（列向量对应 $x^2, x, 1$），参数向量 $\beta = (a, b, c)^{\mathrm{T}}$：

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 8 \\ 20 \end{bmatrix}.$$

计算 $X^{\mathrm{T}}X$ 和 $X^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$：

$$X^{\mathrm{T}}X = \begin{bmatrix} 338 & 92 & 26 \\ 92 & 26 & 8 \\ 26 & 8 & 4 \end{bmatrix}, \quad X^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 400 \\ 112 \\ 36 \end{bmatrix}.$$

正规方程组为：

$$\begin{cases} 338a + 92b + 26c = 400 & \cdots (1) \\ 92a + 26b + 8c = 112 & \cdots (2) \\ 26a + 8b + 4c = 36 & \cdots (3) \end{cases}$$

化简方程组：由 (3) 得 $13a + 4b + 2c = 18 \Rightarrow 2c = 18 - 13a - 4b$。代入 (2)（先化简 (2) 为 $46a + 13b + 4c = 56$）：

$$46a + 13b + 2(18 - 13a - 4b) = 56 \Rightarrow 20a + 5b = 20 \Rightarrow 4a + b = 4 \Rightarrow b = 4 - 4a.$$

代入 (1)（先化简 (1) 为 $169a + 46b + 13c = 200$）：

$$169a + 46(4 - 4a) + 13(9 - 6.5a - 2(4 - 4a)) = 200.$$

或者利用 $b = 4 - 4a$ 和 $c = 9 - 6.5a - 2b = 9 - 6.5a - 2(4 - 4a) = 1 + 1.5a$。将 b, c 表达式代入化简后的 (1)：

$$169a + 46(4 - 4a) + 13(1 + 1.5a) = 200$$

$$169a + 184 - 184a + 13 + 19.5a = 200$$

$$4.5a + 197 = 200 \Rightarrow 4.5a = 3 \Rightarrow a = \frac{2}{3}.$$

回代求 b, c：

$$b = 4 - 4(2/3) = 4/3, \quad c = 1 + 1.5(2/3) = 2.$$

因而最小二乘抛物线为

$$y = \frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2.$$