线性代数第五周作业答案

2025 年 10 月 27 日

第 3 题

给定矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. 计算 AB

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot1+1\cdot2+1\cdot1 & 3\cdot1+1\cdot(-1)+1\cdot0 & 3\cdot(-1)+1\cdot0+1\cdot1 \\ 2\cdot1+1\cdot2+2\cdot1 & 2\cdot1+1\cdot(-1)+2\cdot0 & 2\cdot(-1)+1\cdot0+2\cdot1 \\ 1\cdot1+2\cdot2+3\cdot1 & 1\cdot1+2\cdot(-1)+3\cdot0 & 1\cdot(-1)+2\cdot0+3\cdot1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3+2+1 & 3-1+0 & -3+0+1 \\ 2+2+2 & 2-1+0 & -2+0+2 \\ 1+4+3 & 1-2+0 & -1+0+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 6 & 1 & 0 \\ 8 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

2. 计算 BA

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot3+1\cdot2+(-1)\cdot1 & 1\cdot1+1\cdot1+(-1)\cdot2 & 1\cdot1+1\cdot2+(-1)\cdot3 \\ 2\cdot3+(-1)\cdot2+0\cdot1 & 2\cdot1+(-1)\cdot1+0\cdot2 & 2\cdot1+(-1)\cdot2+0\cdot3 \\ 1\cdot3+0\cdot2+1\cdot1 & 1\cdot1+0\cdot1+1\cdot2 & 1\cdot1+0\cdot2+1\cdot3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3+2-1 & 1+1-2 & 1+2-3 \\ 6-2+0 & 2-1+0 & 2-2+0 \\ 3+0+1 & 1+0+2 & 1+0+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

3. 计算 $AB - BA$

$$AB - BA = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 6 & 1 & 0 \\ 8 & -1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

4. 计算 $A^T B$

首先求 A^T：

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

然后计算：

$$A^T B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot1+2\cdot2+1\cdot1 & 3\cdot1+2\cdot(-1)+1\cdot0 & 3\cdot(-1)+2\cdot0+1\cdot1 \\ 1\cdot1+1\cdot2+2\cdot1 & 1\cdot1+1\cdot(-1)+2\cdot0 & 1\cdot(-1)+1\cdot0+2\cdot1 \\ 1\cdot1+2\cdot2+3\cdot1 & 1\cdot1+2\cdot(-1)+3\cdot0 & 1\cdot(-1)+2\cdot0+3\cdot1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3+4+1 & 3-2+0 & -3+0+1 \\ 1+2+2 & 1-1+0 & -1+0+2 \\ 1+4+3 & 1-2+0 & -1+0+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & 1 \\ 8 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

第 4 题

给定矩阵：

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

1. 计算 P_1A 和 AP_1

P_1A:

$$P_1A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

AP_1:

$$AP_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{bmatrix}$$

2. 计算 P_2A 和 AP_2

P_2A:

$$P_2A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

AP_2:

$$AP_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 2a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 2a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & 2a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

3. 计算 P_3A 和 AP_3

P_3A:

$$P_3A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + ca_{31} & a_{22} + ca_{32} & a_{23} + ca_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

AP_3:

$$AP_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12}c + a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22}c + a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{32}c + a_{33} \end{bmatrix}$$

第 6 题

(1) 计算 $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}^5$

计算过程:

$$\begin{aligned}
M &= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}, \\
M^2 &= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}, \\
M^3 = M^2M &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \\
M^4 = M^3M &= \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -6 \\ 12 & 8 \end{bmatrix}, \\
M^5 = M^4M &= \begin{bmatrix} -7 & -6 \\ 12 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

所以:

$$\boxed{\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}^5 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}}$$

(2) 计算 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n$

观察模式：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \cdots$$

所以：

$$\boxed{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

(3) 计算 $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^n$

这是旋转矩阵，其 n 次幂为旋转 $n\theta$ 角度：

$$\boxed{\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}}$$

(4) 计算 $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

计算二次型：

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= x_1(2x_1 + x_2 - 2x_3) + x_2(x_1 - x_2 + 3x_3) + x_3(-2x_1 + 3x_2) \\ &= 2x_1^2 + x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_1x_2 - x_2^2 + 3x_2x_3 - 2x_1x_3 + 3x_2x_3 \\ &= 2x_1^2 - x_2^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 6x_2x_3. \end{aligned}$$

所以：

$$\boxed{2x_1^2 - x_2^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 6x_2x_3}$$

(5) 计算 $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ **；** $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

第一部分：行向量乘以列向量

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 3(-1) + 2(1) + (-1)(-1) = -3 + 2 + 1 = 0.$$

所以:

$$\boxed{0}$$

第二部分：列向量乘以行向量

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1\cdot 3 & -1\cdot 2 & -1\cdot(-1) \\ 1\cdot 3 & 1\cdot 2 & 1\cdot(-1) \\ -1\cdot 3 & -1\cdot 2 & -1\cdot(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

所以:

$$\boxed{\begin{bmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix}}$$

(6) 计算 $\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}^n$

设 $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$，可以写为 $A = \lambda I + J$，其中 $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$。

由于 I 和 J 可交换，且 $J^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，$J^3 = 0$。

由二项式定理:

$$A^n = (\lambda I + J)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\lambda I)^{n-k} J^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} J^k.$$

由于 $J^k = 0$ 当 $k \geq 3$，所以只有 $k = 0, 1, 2$ 项:

$$A^n = \binom{n}{0} \lambda^n J^0 + \binom{n}{1} \lambda^{n-1} J^1 + \binom{n}{2} \lambda^{n-2} J^2.$$

代入 $J^0 = I$，$J^1 = J$，J^2:

$$A^n = \lambda^n I + n\lambda^{n-1} J + \frac{n(n-1)}{2} \lambda^{n-2} J^2.$$

计算各项:- $\lambda^n I = \begin{bmatrix} \lambda^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{bmatrix}$ - $n\lambda^{n-1} J = \begin{bmatrix} 0 & n\lambda^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ - $\frac{n(n-1)}{2} \lambda^{n-2} J^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{n(n-1)}{2} \lambda^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

相加得:

$$A^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2} \lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{bmatrix}.$$

所以:

$$\boxed{\begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{bmatrix}}$$

第 7 题

给定:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

计算 NA:

$$NA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

所以:

$$\boxed{NA = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

计算 AN:

$$AN = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 0 & a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}.$$

所以:

$$\boxed{AN = \begin{bmatrix} 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 0 & a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}}$$

计算 NN^T:

$$N^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad NN^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

所以:

$$\boxed{NN^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

计算 $A - NN^TA$:

首先计算 NN^TA:

$$NN^TA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

然后:

$$A - NN^TA = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}.$$

所以:

$$\boxed{A - NN^TA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}}$$

第 8 题

求所有与 A 可交换的矩阵 B，即 $AB = BA$。

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

设 $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$。计算 AB 和 BA:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ a+c & b+d \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & b \\ c+d & d \end{bmatrix}.$$

令 $AB = BA$:

$$\begin{cases} a = a+b \\ b = b \\ a+c = c+d \\ b+d = d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = d \end{cases}.$$

所以 $B = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & a \end{bmatrix}$，其中 a, c 任意。

$$\boxed{B = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & a \end{bmatrix} \quad \text{for any } a, c}$$

(2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

设 $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$。计算 AB 和 BA:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ a-c & b-d \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & 2a-b \\ c+d & 2c-d \end{bmatrix}.$$

令 $AB = BA$:

$$\begin{cases} a+2c = a+b \\ b+2d = 2a-b \\ a-c = c+d \\ b-d = 2c-d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2c \\ b+d = a \\ a-2c = d \\ b = 2c \end{cases}.$$

所以 $b = 2c$，$a = 2c+d$。因此 $B = \begin{bmatrix} 2c+d & 2c \\ c & d \end{bmatrix}$，其中 c, d 任意。

$$\boxed{B = \begin{bmatrix} 2c+d & 2c \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{for any } c, d}$$

(3) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

设 $B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$。计算 AB 和 BA:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d+2g & e+2h & f+2i \\ 3a+d+2g & 3b+e+2h & 3c+f+2i \end{bmatrix},$$

$$BA = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+3c & b+c & 2b+2c \\ d+3f & e+f & 2e+2f \\ g+3i & h+i & 2h+2i \end{bmatrix}.$$

令 $AB = BA$，比较元素得:

$$\begin{cases} a = a+3c \Rightarrow c = 0 \\ b = b+c \Rightarrow c = 0 \\ c = 2b+2c \Rightarrow 0 = 2b \Rightarrow b = 0 \\ d+2g = d+3f \Rightarrow 2g = 3f \Rightarrow g = \frac{3}{2}f \\ e+2h = e+f \Rightarrow 2h = f \Rightarrow h = \frac{f}{2} \\ f+2i = 2e+2f \Rightarrow 2i = 2e+f \Rightarrow i = e+\frac{f}{2} \\ 3a+d+2g = g+3i \Rightarrow 3a+d+g = 3i \\ e+2h = h+i \Rightarrow e+h = i \end{cases}.$$

由 $e+h=i$ 和 $i=e+\frac{f}{2}$、$h=\frac{f}{2}$，得一致。由 $3a+d+g=3i$ 和 $g=\frac{3}{2}f$、$i=e+\frac{f}{2}$，得 $3a+d+\frac{3}{2}f = 3e+\frac{3}{2}f \Rightarrow 3a+d=3e \Rightarrow d=3e-3a$。所以 $B = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 3e-3a & e & f \\ \frac{3}{2}f & \frac{f}{2} & e+\frac{f}{2} \end{bmatrix}$，其中 a, e, f 任意。

$$\boxed{B = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 3e-3a & e & f \\ \frac{3}{2}f & \frac{f}{2} & e+\frac{f}{2} \end{bmatrix} \quad \text{for any } a, e, f}$$

(4) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

设 $B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$。计算 AB 和 BA:

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$BA = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & d & e \\ 0 & g & h \end{bmatrix}.$$

令 $AB = BA$:

$$\begin{cases} d = 0, \quad e = a, \quad f = b, \\ g = 0, \quad h = d = 0, \quad i = e = a, \\ 0 = 0, \quad 0 = g = 0, \quad 0 = h = 0. \end{cases}$$

所以条件：$d = 0$, $e = a$, $f = b$, $g = 0$, $h = 0$, $i = a$。而 a, b, c 自由。因此：

$$B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}.$$

所以：

$$\boxed{B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \quad \text{for any } a, b, c}$$

第 9 题

证明: 设与 A 可交换的矩阵为 $B = [b_{ij}]_{n\times n}$。给定 $A = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ 是一个对角矩阵, 其中 $a_i \neq a_j$ (当 $i \neq j$)。

我们计算 AB 和 BA 的第 (i, j) 个元素:

AB 的 (i, j) 元素为:

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (A)_{ik}(B)_{kj}$$

因为 A 是对角矩阵, $(A)_{ik} = 0$ 当 $i \neq k$, 且 $(A)_{ii} = a_i$。所以上式中只有 $k = i$ 时项不为零:

$$(AB)_{ij} = (A)_{ii}(B)_{ij} = a_i b_{ij}$$

BA 的 (i,j) 元素为:

$$(BA)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (B)_{ik}(A)_{kj}$$

因为 A 是对角矩阵, $(A)_{kj} = 0$ 当 $k \neq j$, 且 $(A)_{jj} = a_j$。所以上式中只有 $k = j$ 时项不为零:

$$(BA)_{ij} = (B)_{ij}(A)_{jj} = b_{ij}a_j$$

因为 $AB = BA$, 所以它们的 (i,j) 元素必须对所有 i,j 都相等:

$$a_i b_{ij} = b_{ij} a_j$$

将上式移项, 得:

$$(a_i - a_j)b_{ij} = 0$$

我们分两种情况讨论:

1. 当 $i = j$ (对角元素): 此时 $a_i - a_j = a_i - a_i = 0$。方程变为 $(0)b_{ii} = 0$, 这对 b_{ii} 的值没有任何限制。

2. 当 $i \neq j$ (非对角元素): 根据题意, A 的对角元素互不相等, 即 $a_i \neq a_j$。因此, $a_i - a_j \neq 0$。为了使 $(a_i - a_j)b_{ij} = 0$ 成立, 必须有 $b_{ij} = 0$。

综上所述, 矩阵 B 的所有非对角元素 b_{ij} (其中 $i \neq j$) 都必须为 0, 而对角元素 b_{ii} 可以是任意值。因此, B 只能是对角矩阵。

证毕。

第 11 题

证明: 设 $A = [a_{ij}]_{n\times n}$。我们要证明 A 是数量矩阵 (即 $A = kI$), 这等价于证明: 1. 当 $i \neq j$ 时, $a_{ij} = 0$ (A 是对角矩阵)。2. $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = k$ (A 的对角元素全部相等)。

我们利用 A 与所有 n 阶方阵 B 可交换这一条件, 选取特定的矩阵 B。设 E_{rs} 为 (r,s) 位置为 1, 其余位置为 0 的 n 阶矩阵单位。根据题意, $AE_{rs} = E_{rs}A$ 必须对所有 $r,s = 1,\ldots,n$ 成立。

1. 证明 A 是对角矩阵

我们先证明 A 的所有非对角元素为 0。任取 $r \neq s$, 我们要证明 $a_{rs} = 0$。

考虑 $B = E_{rr}$ (即 (r,r) 位置为 1 的对角矩阵)。$AE_{rr} = E_{rr}A$。

AE_{rr} 的 (i,j) 元素为:

$$(AE_{rr})_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(E_{rr})_{kj} = a_{ir}\delta_{rj}$$

(这表示 AE_{rr} 是一个第 r 列为 A 的第 r 列, 其余列全为 0 的矩阵)

$E_{rr}A$ 的 (i,j) 元素为:

$$(E_{rr}A)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (E_{rr})_{ik}a_{kj} = \delta_{ir}a_{rj}$$

(这表示 $E_{rr}A$ 是一个第 r 行为 A 的第 r 行, 其余行全为 0 的矩阵)

令 $(AE_{rr})_{ij} = (E_{rr}A)_{ij}$, 得:

$$a_{ir}\delta_{rj} = \delta_{ir}a_{rj}$$

a) 取 $i \neq r, j = r$:

$$a_{ir}\delta_{rr} = \delta_{ir}a_{rr} \implies a_{ir}(1) = (0)a_{rr} \implies a_{ir} = 0$$

这说明在 A 的第 r 列中, 所有非对角元素 $(i \neq r)$ 均为 0。

b) 取 $i = r, j \neq r$:

$$a_{rr}\delta_{rj} = \delta_{rr}a_{rj} \implies a_{rr}(0) = (1)a_{rj} \implies a_{rj} = 0$$

这说明在 A 的第 r 行中, 所有非对角元素 $(j \neq r)$ 均为 0。

由于 r 可以是 $1, 2, \ldots, n$ 中的任意一个, 这证明了 A 的所有非对角元素 a_{ij} $(i \neq j)$ 均为 0。因此, A 是一个对角矩阵, $A = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$。

2. 证明 A 的对角元素相等

现在我们已知 A 是对角矩阵。取 $B = E_{rs}$, 其中 $r \neq s$。根据 $AB = BA$, 我们有 $AE_{rs} = E_{rs}A$。

AE_{rs} 的 (i, j) 元素为 (利用 A 是对角矩阵的性质, $a_{ik} = a_{ii}\delta_{ik}$):

$$(AE_{rs})_{ij} = \sum_{k=1}^{n}(a_{ii}\delta_{ik})(E_{rs})_{kj} = a_{ii}(E_{rs})_{ij} = a_{ii}\delta_{ir}\delta_{js}$$

(这表示 AE_{rs} 是一个在 (r, s) 位置为 a_{rr}, 其余位置为 0 的矩阵)

$E_{rs}A$ 的 (i, j) 元素为 (利用 A 是对角矩阵的性质, $a_{kj} = a_{jj}\delta_{kj}$):

$$(E_{rs}A)_{ij} = \sum_{k=1}^{n}(E_{rs})_{ik}(a_{jj}\delta_{kj}) = (E_{rs})_{is}a_{ss} = (\delta_{ir}\delta_{ss})a_{ss} = a_{ss}\delta_{ir}\delta_{sj}$$

(注: δ_{js} 和 δ_{sj} 相同。这表示 $E_{rs}A$ 是一个在 (r, s) 位置为 a_{ss}, 其余位置为 0 的矩阵)

令 $AE_{rs} = E_{rs}A$, 比较它们的 (r, s) 元素 (即 $i = r, j = s$):

$$(AE_{rs})_{rs} = a_{rr}\delta_{rr}\delta_{ss} = a_{rr}$$

$$(E_{rs}A)_{rs} = a_{ss}\delta_{rr}\delta_{ss} = a_{ss}$$

因此, $a_{rr} = a_{ss}$。

由于 r 和 s 可以是任意两个不相等的下标 $(r \neq s)$, 这证明了 A 的所有对角元素都相等。

结论

综合 (1) 和 (2), A 是一个对角矩阵, 且所有对角元素相等。因此, A 必为数量矩阵, $A = kI$ (其中 $k = a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn}$)。

证毕。

第 14 题

第一部分: 证明 $AS = SA$

给定矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 和 $S = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$。

计算 AS:

$$AS = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1(1)+2(0) & 1(k)+2(1)\\ 0(1)+1(0) & 0(k)+1(1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & k+2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

计算 SA:

$$SA = \begin{bmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1(1)+k(0) & 1(2)+k(1)\\ 0(1)+1(0) & 0(2)+1(1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2+k\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

因为 $\begin{bmatrix}1 & k+2\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2+k\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, 所以 $AS = SA$。
证毕。

第二部分: 求 A^n

我们使用二项式定理来计算 A^n。将 A 分解为 $A = I + N$, 其中:

$$I = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

首先, 计算 N 的幂:

$$N^2 = \begin{bmatrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0(0)+2(0) & 0(2)+2(0)\\ 0(0)+0(0) & 0(2)+0(0)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

由于 $N^2 = \mathbf{0}$, 则 $N^k = \mathbf{0}$ 对于所有 $k \geq 2$。

因为 $IN = NI = N$, I 和 N 可交换, 我们可以应用二项式定理 $(I+N)^n$:

$$A^n = (I+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I^{n-k} N^k$$

展开求和:

$$A^n = \binom{n}{0} I^n N^0 + \binom{n}{1} I^{n-1} N^1 + \binom{n}{2} I^{n-2} N^2 + \cdots + \binom{n}{n} N^n$$

由于 $N^k = \mathbf{0}$ (当 $k \geq 2$), 上述展开式中从第三项开始全部为零矩阵:

$$A^n = \binom{n}{0} I + \binom{n}{1} N + \mathbf{0} + \cdots + \mathbf{0}$$

$$A^n = (1)I + (n)N$$

代入 I 和 N 的值:

$$A^n = 1\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} + n\begin{bmatrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 2n\\ 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2n\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\boxed{A^n = \begin{bmatrix}1 & 2n\\ 0 & 1\end{bmatrix}}$$