第三和第四周习题参考解答　　杨利军　　Sept 29, Oct 11, 2025

Sept 29 作业

习题一: 课本第23页习题 1.5 题2(1)(2)(3)(4): 利用 Cauchy 收敛原理证明极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ 存在.

$$(1)\quad a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin k}{2^k};\quad (2)\quad a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos(k!)}{k(k+1)};$$

$$(3)\quad a_n=\sum_{k=1}^{n}c_kq^k,\text{ 其中 }0<q<1,\{c_k\}\text{ 有界};\quad (4)\quad a_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^2}\right);$$

证(1) 对任意正整数 n 和 $p\geq 1$, 我们有

$$|a_{n+p}-a_n|=\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{\sin k}{2^k}\right|\leq\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{|\sin k|}{2^k}\leq\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{n+p}}<\frac{1}{2^n}.$$

于是对任给 $\varepsilon>0$, 取 $N=[\log_2\frac{1}{\varepsilon}]+1$, 使得任意正整数 $n>N$, $p\geq 1$, 成立

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{\sin k}{2^k}\right|<\frac{1}{2^n}<\varepsilon.$$

这说明序列 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 列. 根据 Cauchy 收敛原理知极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$ 存在.

证(2): 对任意正整数 n 和 $p\geq 1$, 我们有

$$|a_{n+p}-a_n|=\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{\cos(k!)}{k(k+1)}\right|\leq\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k(k+1)}$$

$$=\sum_{k=n+1}^{n+p}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+p+1}<\frac{1}{n+1}.$$

于是对任给 $\varepsilon>0$, 取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]$, 使得任意正整数 $n>N$, $p\geq 1$, 成立

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p}\frac{\cos(k!)}{k(k+1)}\right|<\frac{1}{n+1}<\varepsilon.$$

这说明序列 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 列. 根据 Cauchy 收敛原理知极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ 存在.

证(3): 由假设 $\{c_k\}$ 有界知存在正数 $M > 0$, 使得 $|c_k| \le M, \forall k \ge 1$. 对任意正整数 n 和 $p \ge 1$, 我们有

$$|a_{n+p} - a_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k q^k\right| \le M \sum_{k=n+1}^{n+p} q^k = \frac{M(q^{n+1} - q^{n+p+1})}{1-q}$$

$$< \frac{Mq^{n+1}}{1-q} < Mq^{n+1}.$$

于是对任给 $\varepsilon > 0$, 取

$$N = \left[\frac{\ln(\frac{\varepsilon}{M})}{\ln q}\right],$$

使得任意正整数 $n > N$, $p \ge 1$, 成立

$$|a_{n+p} - a_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k q^k\right| < Mq^{n+1} < \varepsilon.$$

这说明序列 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 列. 根据 Cauchy 收敛原理知极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ 存在.

证(4): 根据第二周第二次作业习题三(3)的结论知

$$0 < a_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{k^2}\right) = 2\prod_{k=2}^{n}\left(1 + \frac{1}{k^2}\right) < 2e.$$

对任意正整数 n 和 $p \ge 1$, 我们有

$$|a_{n+p} - a_n| = \left|\prod_{k=1}^{n+p}\left(1 + \frac{1}{k^2}\right) - \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{k^2}\right)\right|$$

$$= \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{k^2}\right)\left\{\prod_{k=n+1}^{n+p}\left(1 + \frac{1}{k^2}\right) - 1\right\} < 2e\left\{\prod_{k=n+1}^{n+p}\left(1 + \frac{1}{k^2}\right) - 1\right\}.$$

根据均值不等式得

$$0 < \prod_{k=n+1}^{n+p}\left(1 + \frac{1}{k^2}\right) < \left[\frac{1}{p}\left(1 + \frac{1}{(n+1)^2} + 1 + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + 1 + \frac{1}{(n+p)^2}\right)\right]^p$$

$$= \left[1+\frac{1}{p}\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}\right)\right]^p$$

$$< \left[1+\frac{1}{p}\left(\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}\right)\right]^p$$

$$= \left[1+\frac{1}{p}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}\right)\right]^p < \left(1+\frac{1}{pn}\right)^p = \left\{\left(1+\frac{1}{pn}\right)^{pn}\right\}^{\frac{1}{n}} < e^{\frac{1}{n}}.$$

于是

$$|a_{n+p}-a_n| < 2e\left\{\prod_{k=n+1}^{n+p}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)-1\right\} < 2e\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right).$$

由于 $e^{\frac{1}{n}}-1\to 0$, 故对任意 $\varepsilon>0$, 存在正整数 N, 使得对任意正整数 $n\geq N$, $|e^{\frac{1}{n}}-1|<\varepsilon$. 于是对任意正整数 $p\geq 1$

$$|a_{n+p}-a_n| < 2e\left|e^{\frac{1}{n}}-1\right| < 2e\varepsilon.$$

这说明序列 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 列. 根据 Cauchy 收敛原理知极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ 存在. 解答完毕.

注: 利用 Cauchy 收敛原理证明序列 $a_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)$ 并不是最简单的方法. 利用单调有界定理证明更简单.

习题二. 课本第23页习题1.5 题4:

假设数列 $\{a_n\}$ 满足条件: 对任意正整数 p, $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_{n+p}-a_n)=0$. 问 $\{a_n\}$ 是否为 Cauchy 列? 研究如下例子:

$$(1)\quad a_n=\sqrt{n};\quad (2)\quad a_n=\ln n;\quad (3)\quad a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}.$$

解: 假设数列 $\{a_n\}$ 满足条件: 对任意正整数 p, $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_{n+p}-a_n)=0$. $\{a_n\}$ 不一定是 Cauchy 列. 以下三个例子均为反例.

例一: 序列 $a_n=\sqrt{n}$ 满足条件: 对任意正整数 p

$$|a_{n+p}-a_n| = \sqrt{n+p}-\sqrt{n} = \frac{p}{\sqrt{n+p}+\sqrt{n}} \to 0,\quad n\to+\infty.$$

显然序列 $\{a_n\}$ 不是 Cauchy 列.

例二: 序列 $a_n = \ln n$ 满足条件: 对任意正整数 p

$$|a_{n+p} - a_n| = \ln(n+p) - \ln n = \ln\left(1 + \frac{p}{n}\right) \to 0, \quad n \to +\infty.$$

显然序列 $\{a_n\}$ 不是 Cauchy 列.

例三: 序列 $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ 满足条件: 对任意正整数 p

$$|a_{n+p} - a_n| = \sum_{k=1}^{n+p} \frac{1}{\sqrt{k}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+p}} \to 0, \quad n \to +\infty.$$

显然序列 $\{a_n\}$ 不是 Cauchy 列.

习题三. 课本第23页习题1.5 题5:
设两个数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 均有界, 证明存在正整数列 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$, 使得两个子列 $\{a_{n_k}\}$ 和 $\{b_{n_k}\}$ 均收敛.

证法一: 由于数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 均有界, 故根据 Bolzano-Weierstrass 定理知 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 均存在收敛子列 $\{a_{n_k}\}$ 和 $\{b_{n_k}\}$. 证毕.
证法一有误: 虽然有界序列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 均存在收敛子列 $\{a_{l_k}\}$ 和 $\{b_{m_k}\}$, 但它们的下标 l_k 与 m_k 不一定相同.

证法二: 根据 B-W 定理知有界数列 $\{a_n\}$ 存在收敛子列 $\{a_{l_j}\}$. 考虑 $\{b_n\}$ 的子列 $\{b_{l_j}\}$. 显然子列 $\{b_{l_j}\}$ 有界. 再次利用 B-W 定理知 $\{b_{l_j}\}$ 存在收敛子列 $b_{l_{j_k}}$. 记 $n_k = l_{j_k}$, 则子列 $\{a_{n_k}\}$ 和 $\{b_{n_k}\}$ 均收敛. 证毕.

习题四. 课本第23页习题1.5 题6:
证明若一个有界数列 $\{a_n\}$ 发散, 则 $\{a_n\}$ 存在两个收敛子列, 它们收敛于两个不同的极限.

证明: 由 Bolzano Weierstrass 定理知 $\{a_n\}$ 存在一个收敛子列 $\{a_{n_k}\}$. 设 $a_{n_k} \to a$. 由于 $\{a_n\}$ 发散, 故 $a_n \not\to a$, 即存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得对任意正整数 j 存在 $m_j \geq j$, 使得 $|a_{m_j} - a| \geq \varepsilon_0$, 并且 $m_1 < m_2 < \cdots$. 由于子列 $\{a_{m_j}\}$ 有界, 故 $\{a_{m_j}\}$ 也存在收敛子列 $\{a_{m_{j_i}}\}$. 设 $a_{m_{j_i}} \to b$. 由于 $|a_{m_{j_i}} - a| \geq \varepsilon_0$, 故 $b \neq a$. 于是 $\{a_n\}$ 存在两个收敛子列 $\{a_{n_k}\}$, $\{a_{m_{j_i}}\}$, 它们收敛于两个不同的极限. 证毕.

习题五. 课本第23页习题1.5 题7:
证明若数列 $\{a_n\}$ 无界, 但 $|a_n| \not\to +\infty$, 则数列 $\{a_n\}$ 存在两个子列 $\{a_{l_k}\}$ 和 $\{a_{m_k}\}$, 使得 $|a_{l_k}| \to +\infty$, 且 $a_{m_k} \to a \in \mathbb{R}$.

证明: 由假设 $\{a_n\}$ 无界, 故对任意正整数 k, 存在 $l_k \geq k$, 使得 $l_1 < l_2 < \cdots$, $|a_{l_k}| \to +\infty$. 再根据另一个假设 $|a_n| \not\to +\infty$ 可知, 存在 $M_0 > 0$, 使得对任意正整数 k, 存在 $n_k \geq k$, $n_1 < n_2 < \cdots$, $|a_{n_k}| \leq M_0$. 这表明子列 $\{a_{n_k}\}$ 有界. 由 B-W 定理知子列 $\{a_{n_k}\}$ 存在收敛子列 $\{a_{n_{k_i}}\}$. 于是两个子列 $\{a_{l_k}\}$ 和 $\{a_{n_{k_i}}\}$ 满足要求. 证毕.

习题六. 课本第23页习题1.5 题8: 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $|a_{n+1} - a_n| \leq q|a_n - a_{n-1}|$, $\forall n \geq 1$, 其中 $0 < q < 1$ 为常数, 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

证明: 我们只需证数列 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 列. 若 $a_2 = a_1$, 则不难证明对任意正整数 $n \geq 1$, $a_n = a_1$. 此时数列 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 列. 以下设 $a_2 \neq a_1$. 对任意正整数 n

$$|a_{n+1} - a_n| < q|a_n - a_{n-1}| < q^2|a_{n-1} - a_{n-2}| < \cdots < q^{n-1}|a_2 - a_1|.$$

于是

$$\begin{aligned}
|a_{n+p} - a_n| &\leq |a_{n+p} - a_{n+p-1}| + |a_{n+p-1} - a_{n+p-2}| + \cdots + |a_{n+1} - a_n| \\
&< q^{n+p-1}|a_2 - a_1| + q^{n+p-2}|a_2 - a_1| + \cdots + q^n|a_2 - a_1| \\
&= (q^{n+p-1} + q^{n+p-2} + \cdots + q^n)|a_2 - a_1| = \frac{q^n - q^{n+p}}{1-q}|a_2 - a_1| \\
&< \frac{q^n}{1-q}|a_2 - a_1| < q^n|a_2 - a_1|.
\end{aligned}$$

对任意 $\varepsilon>0$, 取 $N=[\frac{\ln(\varepsilon|a_2-a_1|)}{\ln q}]+1$, 对任意正整数 $n>N$, 以及正整数 p,

$$|a_{n+p}-a_n|<q^n|a_2-a_1|<\varepsilon.$$

即数列 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 列. 命题得证.

习题七. 课本第24页第一章总复习题题3:
证明若单调序列 $\{a_n\}$ 有一个收敛子列, 则序列 $\{a_n\}$ 收敛.

证明: 不失一般性, 设 $\{a_n\}$ 为单调增序列, 其子列 $\{a_{n_k}\}$ 收敛. 设 $a_{n_k}\to a$, 即对任意 $\varepsilon>0$, 存在正整数 K, 使得对任意正整数 $k\geq K$,

$$|a-a_{n_k}|=a-a_{n_k}<\varepsilon$$

取 $N=n_K$, 则对任意正整数 $n\geq N$,

$$|a-a_n|=a-a_n\leq a-a_N=a-a_{n_K}<\varepsilon.$$

这就证明了 序列 $\{a_n\}$ 收敛, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$. 证毕.

习题八. 课本第24页第一章总复习题题4: 若将一个序列 $\{a_n\}$ 作为一个实数集合既没有最大值, 也没有最小值, 证明序列 $\{a_n\}$ 发散.

证. 用反证法. 假设 $\{a_n\}$ 收敛, 且 $a_n\to a$.
(i) 若 $a_n=a, \forall n\geq 1$, 则实数集 $\{a_n\}=\{a\}$ 为单点集, 从而有最大值和最小值. 此与假设矛盾.
(ii) 设存在 $a_{n_0}\neq a$. 不妨设 $a_{n_0}>a$, 则实数集 $\{a_n\}$ 中, 满足 $a_n\geq a_{n_0}$ 的项只有有限项, 即

$$\Big\{a_n \big|\, a_n\geq a_{n_0}\Big\}=\Big\{a_{n_1},a_{n_2},\cdots,a_{n_m}\Big\}.$$

易见实数子集 $\{a_n\}$ 有最大值, 且 $\max\{a_n\}=\max\{a_{n_1},a_{n_2},\cdots,a_{n_m}\}$. 此与假设矛盾. 命题得证.

习题九. 课本第24页第一章总复习题题6: 设 $\{a_n\}$ 为单调序列, 且极限

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=A$$

存在, A 可以是无穷. 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=A$.

证明: 不妨设数列 $\{a_n\}$ 单调上升. 若数列 $\{a_n\}$ 无上界, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=+\infty$, 且

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=+\infty.$$

命题得证. 若 $\{a_n\}$ 有上界, 则根据单调有界定理知 $\{a_n\}$ 收敛. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=A$, 则

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=A.$$

命题得证.

Oct 11 作业

习题一: 课本第35页习题2.1题3:

设 $f(x)=\frac{2-3x}{1+x}$, 求 $f(-x)$, $f(2+\frac{1}{x})$, $f(f(x))$, $f(f(f(x)))$.

解:

$$f(-x)=\frac{2+3x}{1-x},$$

$$f\Big(2+\frac{1}{x}\Big)=\frac{2-3(2+\frac{1}{x})}{1+(2+\frac{1}{x})}=\frac{-4-\frac{3}{x}}{3+\frac{1}{x}}=-\frac{4x+3}{3x+1},$$

$$f(f(x))=\frac{2-3(\frac{2+3x}{1-x})}{1+\frac{2+3x}{1-x}}=\frac{2(1+x)-3(2-3x)}{1+x+2-3x}=\frac{11x-4}{3-2x},$$

$$f(f(f(x))=f\Big(\frac{11x-4}{3-2x}\Big)=\frac{2-3(\frac{11x-4}{3-2x})}{1+\frac{11x-4}{3-2x}}=\frac{2(3-2x)-3(11x-4)}{3-2x+11x-4}=\frac{18-37x}{9x-1}.$$

解答完毕.

习题二: 课本第35页习题2.1题4: 设 $f(x)=2^x$, $g(x)=x\ln x$, 求复合函数 $f\circ g$ 和 $g\circ f$.

解:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = 2^{g(x)} = 2^{x \ln x},$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = f(x) \ln f(x) = 2^x \ln 2^x = 2^x x \ln 2.$$

解答完毕.

习题三: 课本第35页习题2.1题5: 设函数

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x, & x < 0, \\ x^2, & x \geq 0. \end{cases}$$

求 $f \circ g$ 和 $g \circ f$, 并验证是否成立 $f \circ g = g \circ f$.

解: 注意到 $g(x) \geq 0$, 当且仅当 $x \geq 0$. 因此

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = \begin{cases} g(x)+2, & g(x) \geq 0, \\ 0, & g(x) < 0, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^2+2, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

为确定复合函数 $g \circ f$, 我们注意 $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. 因此

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = f^2(x) = \begin{cases} (x+2)^2, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

比较这两个复合函数可知 $f \circ g \neq g \circ f$. 解答完毕.

习题四: 课本第35页习题2.1题9:
判断下列函数的奇偶性:

$$(1) \quad y = \ln(x + \sqrt{x^2+1}), \quad (2) \quad y = \frac{x(1-e^x)}{1+e^x}, \quad (3) \quad y = 3x - x^3,$$

$$(4)\quad y=\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|,\quad (5)\quad y=\ln(e^x+1)-\frac{1}{x}+1,$$

$$(6)\quad y=R(x)=\begin{cases}\frac{1}{n}, & x=\frac{m}{n}, m,n\text{ 互质}, n>0,\\ 0, & x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q},\end{cases}$$

其中 $\mathbb{Q}$ 代表有理数集合.

解 (1): 函数 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 是奇函数, 因为

$$y(-x)=\ln(-x+\sqrt{x^2+1})=\ln\frac{(-x+\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})}{(x+\sqrt{x^2+1})}$$

$$=-\ln(x+\sqrt{x^2+1})=-y(x).$$

解 (2): 函数 $y=\frac{x(1-e^x)}{1+e^x}$ 是偶函数, 因为

$$y(-x)=\frac{-x(1-e^{-x})}{1+e^{-x}}=\frac{-x(e^x-1)}{e^x+1}=\frac{x(1-e^x)}{1+e^x}=y(x).$$

解 (3): 函数 $y=3x-x^3$ 是奇函数, 因为

$$y(-x)=-x-(-x)^3=-(x-x^3)=-y(x).$$

解 (4): 函数 $y=\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|$ 是奇函数, 因为

$$y(-x)=\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|=-\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|=-y(x).$$

解 (5): 函数 $y=\ln(e^x+1)-\frac{1}{x}+1$ 既不是奇函数, 也不是偶函数.

解 (6): 函数 $y=R(x)$ 是偶函数, 因为对任意 $x\in\mathbb{R}$,

(i) 若 x 是有理数, 即 $x=\frac{m}{n}$, m,n 互质, $n>0$, 则 $-x=\frac{-m}{n}$, 故依定义 $R(-x)=\frac{1}{n}=R(x)$;

(ii) 若 x 是无理数, 则 $-x$ 也是无理数. 于是依定义 $R(-x)=0=R(x)$.

习题五: 课本第36页习题2.1题10:

设 $f(x)$ 的定义域关于原点对称, 证明 $f(x)$ 可以表示为一个奇函数和一个偶函数之和.

证明: 令

$$g(x)=\frac{1}{2}\Big(f(x)+f(-x)\Big),\quad h(x)=\frac{1}{2}\Big(f(x)-f(-x)\Big),$$

则显然 $g(x)$ 为偶函数, $h(x)$ 为奇函数, 且 $f(x)=g(x)+h(x)$. 命题得证.

习题六: 课本第42页习题2.2题1:

(i) 用 ε,δ 语言表述 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq A$;

(ii) 用 ε,M 语言表述 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\neq A$.

解: (i) 极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq A$ 的 $\varepsilon-\delta$ 语言的表述: 存在 $\varepsilon_0>0$, 对任意 $\delta>0$, 存在 x_δ 满足 $0<|x_\delta-x_0|<\delta$, 使得 $|f(x_\delta)-A|\geq\varepsilon_0$.

(ii) 极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\neq A$ 的 $\varepsilon-M$ 语言的表述: 存在 $\varepsilon_0>0$, 对任意 $M>0$, 存在 x_M 满足 $x_M\geq M$, 使得 $|f(x_M)-A|\geq\varepsilon_0$.

习题七: 课本第42页习题2.2题2(有修改):

判断下列四个说法是否与 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 等价. 若不等价, 请举反例.

(i) 对于无穷多个正数 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得只要 $0<|x-x_0|<\delta$, 则成立 $|f(x)-A|\leq\varepsilon$;

(ii) 对于任意 $\varepsilon\in(0,1)$, 存在 $\delta>0$, 使得只要 $0<|x-x_0|<\delta$, 则成立 $|f(x)-A|\leq 8\varepsilon$;

(iii) 对于任意正整数 k, 存在 $\delta_k>0$, 使得只要 $0<|x-x_0|<\delta_k$, 则成立 $|f(x)-A|\leq 2^{-k}$;

(iv) 对于任意正整数 n, 只要 $0<|x-x_0|<\frac{1}{n}$, 则成立 $|f(x)-A|<\frac{1}{n}$.

解: 说法 (i) 与 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 不等价. 例如设

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\geq 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$$

$x_0=0$, $A=1$. 显然 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 不成立. 但是说法 (i) 成立: 存在无穷多个正数 $\varepsilon=2,3,\cdots$, 存在 $\delta=1$, 使得只要 $0<|x-x_0|<\delta$, 则成立 $|f(x)-A|\leq 1<\varepsilon$.

说法 (ii) 与 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 等价.
说法 (iii) 与 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 等价.
说法 (iv) 与 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 不等价. 确切地说, 说法 (iv) $\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \not\Rightarrow$ (iv).
证 (iv) $\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$: 假设条件 (iv) 成立, 要证 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 即 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得只要 $0<|x-x_0|<\delta$, $|f(x)-A|<\varepsilon$. 对 $\forall\varepsilon>0$, 令 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]+1$, $\delta=\frac{1}{N}$, 由条件 (iv) 可知, 只要当 $0<|x-x_0|<\delta=\frac{1}{N}$, $|f(x)-A|<\frac{1}{N}\le\varepsilon$. 此即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \not\Rightarrow$ (iv).
例一: $f(x)=2x$, $x_0=0$, $A=0$, 显然 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$. 但此时 (iv) 不成立: 因为对任意正整数 n, $0<|x|<\frac{1}{n}$, 不能推出

$$0<|f(x)-A|=|2x|<\frac{1}{n}.$$

例二: $f(x)=\sqrt{|x|}$, $x_0=0$, $A=0$, 显然 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$. 但此时 (iv) 不成立: 因为对任意正整数 n, $0<|x|<\frac{1}{n}$, 不能推出

$$0<|f(x)-A|=\sqrt{|x|}<\frac{1}{n}.$$

解答完毕.

习题八: 课本第42页习题2.2题3: 用函数极限的定义证明如下极限:

$$(1)\quad \lim_{x\to 2}\sqrt{x^2+5}=3,\quad (2)\quad \lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x^2-9}=\frac{1}{5},$$

$$(3)\quad \lim_{x\to 2}\frac{x^2-3}{x^2-4x+3}=-1,\quad (4)\quad \lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}=0.$$

解(1): 考虑

$$\left|\sqrt{x^2+5}-3\right|=\frac{|x^2+5-9|}{\sqrt{x^2+5}+3}=\frac{|x^2-4|}{\sqrt{x^2+5}+3}\le\frac{|x+2||x-2|}{5}.$$

对任意 $\varepsilon>0$, 可取 $\delta=\min\{\varepsilon,2\}$, 当 $0<|x-2|<\delta$ 时, $x>0$, $|x+2|\le 4$. 于是

$$\left|\sqrt{x^2+5}-3\right|\le\frac{|x+2||x-2|}{5}<\frac{4}{5}|x-2|<|x-2|<\delta\le\varepsilon.$$

这表明 $\lim_{x\to 2}\sqrt{x^2+5}=3$.

解(2): 考虑

$$\left|\frac{x-3}{x^2-9}-\frac{1}{6}\right|=\left|\frac{x-3}{(x+3)(x-3)}-\frac{1}{6}\right|=\left|\frac{1}{x+3}-\frac{1}{6}\right|=\frac{|x-3|}{6|x+3|}.$$

对任意 $\varepsilon>0$, 可取 $\delta=\min\{18\varepsilon,3\}$, 当 $0<|x-3|<\delta$ 时, $x>0$, 从而 $|x+3|>3$. 于是

$$\left|\frac{x-3}{x^2-9}-\frac{1}{6}\right|=\frac{|x-3|}{6|x+3|}<\frac{\delta}{18}\leq\varepsilon.$$

这表明 $\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x^2-9}=\frac{1}{6}$.

解(3): 考虑

$$\left|\frac{x^2-3}{x^2-4x+3}+1\right|=\left|\frac{2x(x-2)}{(x-2)^2-1}\right|.$$

对任意 $\varepsilon>0$, 可取 $\delta=\min\{\frac{1}{7}\varepsilon,\frac{1}{2}\}$, 当 $0<|x-2|<\delta\leq\frac{1}{2}$ 时, $\frac{3}{2}<x<\frac{5}{2}$. 于是

$$\left|\frac{x^2-3}{x^2-4x+3}+1\right|=\left|\frac{2x(x-2)}{(x-2)^2-1}\right|\leq\frac{2\cdot\frac{5}{2}\delta}{\frac{3}{4}}<7\delta\leq\varepsilon.$$

这表明 $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3}{x^2-4x+3}=-1$.

解(4): 考虑

$$\left|\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}-0\right|=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}.$$

对任意 $\varepsilon>0$, 可取 $\delta=\varepsilon^2$, 当 $0<x-1<\delta$ 时, $x+1>2$. 于是

$$\left|\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}-0\right|=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}<\sqrt{\frac{\delta}{2}}<\sqrt{\delta}<\varepsilon.$$

这表明 $\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}=0$.

习题九: 课本第50页习题2.3题6: 求下列函数极限

$$(2)\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x},\quad (4)\quad \lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1},\quad (5)\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1-x-4x^3}{1+x^2+2x^3},$$

(6) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x-\arctan x}{x+\arctan x}$, (7) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$, (8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}\right)$,

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+p^2}-p}{\sqrt{x^2+q^2}-q}$, $(p,q>0)$ (10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$, (11) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x-1}$,

(12) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$, (13) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$, (14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{m}}-1}{x}$,

(15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$, (16) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+nx)^{\frac{1}{m}}-(1+mx)^{\frac{1}{n}}}{x}$,

(17) $\lim\limits_{x\to 0}x\left[\dfrac{1}{x}\right]$, (18) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{[x]^2+4}{x^2+4}$.

其中 m,n 为正整数, $[\cdot]$ 代表取整函数.

解(2): 根据极限的四则运算定理得

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}=\frac{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x}{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}x}=\frac{1}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}.$$

故 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}=\frac{2}{\pi}$.

解(4): 当 $x\to 1$ 且 $x<1$ 时

$$\frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1}=-\frac{\sqrt{(1-x)^2}}{1-x}=-\frac{1-x}{1-x}=-1\to -1.$$

故 $\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1}=-1$.

解(5): 根据极限的四则运算定理得

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1-x-4x^3}{1+x^2+2x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^2}-4}{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x}+2}$$

$$=\frac{\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3}-\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}-\lim_{x\to-\infty}4}{\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3}+\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}+\lim_{x\to-\infty}2}=\frac{0-0-4}{0+0+2}=-2.$$

故 $\lim_{x\to-\infty}\frac{1-x-4x^3}{1+x^2+2x^3}=-2$.

解(6): 由于 $\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$, 故当 $x\to\pm\infty$ 时,

$$\frac{x-\arctan x}{x+\arctan x}=\frac{1-\frac{\arctan x}{x}}{1+\frac{\arctan x}{x}}\to\frac{1-0}{1+0}=1.$$

故 $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-\arctan x}{x+\arctan x}=1$.

解(7): 当 $h\to 0$ 且 $h\neq 0$ 时,

$$\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h}=\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}$$

$$=3x^2+3xh+h^2\to 3x^2.$$

故 $\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=3x^2$.

解(8): 当 $x\to+\infty$ 时,

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\frac{x+\sqrt{x}-(x-\sqrt{x})}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}}=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}+\sqrt{1-\sqrt{\frac{1}{x}}}}\to\frac{2}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=1.$$

故

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}\right)=1.$$

解(9): 当 $x\to 0$ 时,

$$\frac{\sqrt{x^2+p^2}-p}{\sqrt{x^2+q^2}-q}=\frac{(\sqrt{x^2+p^2}-p)(\sqrt{x^2+p^2}+p)}{\sqrt{x^2+p^2}+p}\cdot\frac{\sqrt{x^2+q^2}+q}{\sqrt{(x^2+q^2}-q)(\sqrt{(x^2+q^2}+q)}$$

$$=\frac{x^2+p^2-p^2}{\sqrt{x^2+p^2}+p}\cdot\frac{\sqrt{x^2+q^2}+q}{x^2+q^2-q^2}=\frac{\sqrt{x^2+q^2}+q}{\sqrt{x^2+p^2}+p}\to\frac{q}{p}.$$

故 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+p^2}-p}{\sqrt{x^2+q^2}-q}=\frac{q}{p}$.

解(10): 当 $x \to 0$ 时,

$$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$

$$= \frac{1+x-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} \to \frac{2}{2} = 1.$$

故 $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = 1$.

解(11): 当 $x \to 1$ 时,

$$\frac{x^m-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+1)}{x-1} = x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+1 \to m.$$

故 $\lim_{x\to 1} \frac{x^m-1}{x-1} = m$.

解(12): 当 $x \to 1$ 时,

$$\frac{x^m-1}{x^n-1} = \frac{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1)}{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)}$$

$$= \frac{x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1}{x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1} \to \frac{m}{n}.$$

故 $\lim_{x\to 1} \frac{x^m-1}{x^n-1} = \frac{m}{n}$.

解(13): 利用题 (11) 的结论知, 当 $x \to 1$ 时,

$$\frac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} + \frac{x^2-1}{x-1} + \cdots + \frac{x^n-1}{x-1}$$

$$\to 1+2+\cdots+n = \frac{1}{2}n(n+1).$$

故 $\lim_{x\to 1} \frac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1} = \frac{1}{2}n(n+1)$.

解(14): 令 $y = (1+x)^{\frac{1}{m}}$, 则 $x = y^m - 1$, 且当 $x \to 0$ 时, $y \to 1$. 于是根据题 (11) 的结论得

$$\frac{(1+x)^{\frac{1}{m}}-1}{x} = \frac{y-1}{y^m-1} \to \frac{1}{m}.$$

故 $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{m}}-1}{x}=\frac{1}{m}$.

解(15): 由二项式展开公式得

$$(1+mx)^n=1+nmx+C_n^2(mx)^2+o(x^2),\quad (1+nx)^m=1+mnx+C_m^2(nx)^2+o(x^2).$$

于是

$$(1+mx)^n-(1+nx)^m=1+nmx+C_n^2(mx)^2+o(x^2)-\big(1+mnx+C_m^2(nx)^2+o(x^2)\big)$$

$$=\frac{1}{2}n(n-1)m^2x^2-\frac{1}{2}m(m-1)n^2x^2+o(x^2)$$

$$\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}=\frac{\frac{1}{2}n(n-1)m^2x^2-\frac{1}{2}m(m-1)n^2x^2+o(x^2)}{x^2}$$

$$\to\frac{1}{2}\big(n(n-1)m^2-m(m-1)n^2\big)=\frac{1}{2}mn(n-m).$$

故 $\lim_{x\to 0}\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}=\frac{1}{2}mn(n-m)$.

解(16): 根据题 (14) 的结论知, 当 $x\to 0$ 时,

$$\frac{(1+nx)^{\frac{1}{m}}-1}{x}=n\frac{(1+nx)^{\frac{1}{m}}-1}{nx}\to\frac{n}{m},$$

$$\frac{(1+mx)^{\frac{1}{n}}-1}{x}=m\frac{(1+mx)^{\frac{1}{n}}-1}{mx}\to\frac{m}{n}.$$

于是

$$\frac{(1+nx)^{\frac{1}{m}}-(1+mx)^{\frac{1}{n}}}{x}=\frac{(1+nx)^{\frac{1}{m}}-1+1-(1+mx)^{\frac{1}{n}}}{x}$$

$$=\frac{(1+nx)^{\frac{1}{m}}-1}{x}-\frac{(1+mx)^{\frac{1}{n}}-1}{x}\to\frac{n}{m}-\frac{m}{n}.$$

故 $\lim_{x\to 0}\frac{(1+nx)^{\frac{1}{m}}-(1+mx)^{\frac{1}{n}}}{x}=\frac{n}{m}-\frac{m}{n}$.

解(17): 注意对任意 $x\neq 0$, 成立

$$\frac{1}{x}-1<\left[\frac{1}{x}\right]\le\frac{1}{x}.\qquad(*)$$

用 $x>0$ 乘以上式得

$$1-x<x\left[\frac{1}{x}\right]\leq 1.$$

令 $x\to 0^+$, 并两边夹法则得得 $\lim_{x\to 0^+} x\left[\frac{1}{x}\right]=1$. 用 $x<0$ 乘以不等式 (*) 得

$$1-x>x\left[\frac{1}{x}\right]\geq 1.$$

令 $x\to 0^-$, 并根据两边夹法则得 $\lim_{x\to 0^-} x\left[\frac{1}{x}\right]=1$. 因此 $\lim_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]=1$.

解(18): 注意当 $x\in(1,2)$ 时 $[x]^2=1^2=1$. 故 $\lim\limits_{x\to 2^-}([x]^2+4)=5$. 又 $\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2+4)=4+4=8$. 根据极限的四则运算定理知所求极限为

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{[x]^2+4}{x^2+4}=\frac{\lim_{x\to 2^-}([x]^2+4)}{\lim_{x\to 2^-}(x^2+4)}=\frac{5}{8}.$$

解答完毕.