线性代数习题解答

《线性代数与几何-上》

习题 5.7

题目: 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实矩阵.

(1) 证明: 全体与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵构成 $M_n(\mathbb{R})$ 的一个子空间, 记为 $Z(\boldsymbol{A})$;

(2) 当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}, \boldsymbol{A}=\operatorname{diag}(1,2,\cdots,n)$,

(3) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 1 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}$

时, 分别求 $Z(\boldsymbol{A})$ 的维数和一组基.

解答:

(1) **证明:**

根据子空间的定义, 我们需要验证 $Z(\boldsymbol{A})$ 对加法和数乘的封闭性:

a. **非空性:** 显然单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 满足 $\boldsymbol{AI}=\boldsymbol{IA}=\boldsymbol{A}$, 故 $\boldsymbol{I}\in Z(\boldsymbol{A})$, 集合非空.

b. **加法封闭性:** 设 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\in Z(\boldsymbol{A})$, 则有 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 且 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{CA}$. 对于 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$, 有:

$$(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$$

因此 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}\in Z(\boldsymbol{A})$.

c. **数乘封闭性:** 设 $\boldsymbol{B}\in Z(\boldsymbol{A}), k\in\mathbb{R}$, 则:

$$(k\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}=k(\boldsymbol{BA})=k(\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$$

因此 $k\boldsymbol{B}\in Z(\boldsymbol{A})$.

综上所述, $Z(\boldsymbol{A})$ 构成 $M_n(\mathbb{R})$ 的一个子空间.

(2) 分别求不同 $\boldsymbol{A}$ 情况下的维数与基.

情况 1: 当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$ 时

- **分析:** 由于单位矩阵与任何 n 阶矩阵均可交换, 因此 $Z(\boldsymbol{I})$ 就是整个矩阵空间 $M_n(\mathbb{R})$.
- **维数:** $\dim(Z(\boldsymbol{A}))=n^2$.
- **基:** 标准基 $\{E_{ij}\mid 1\le i,j\le n\}$ (即第 i 行第 j 列为 1, 其余为 0 的矩阵).

情况 2: 当 $\boldsymbol{A}=\operatorname{\mathbf{diag}}(1,2,\cdots,n)$ 时

- **分析:** 当 $\boldsymbol{A}$ 为对角矩阵且对角元互不相同时, 与其交换的矩阵 $\boldsymbol{B}$ 必须也是对角矩阵 (即满足 $b_{ij}(a_j - a_i) = 0$).
- **维数:** $\dim(Z(\boldsymbol{A})) = n$.
- **基:** $\{E_{ii} \mid 1 \leq i \leq n\}$, 即所有对角矩阵构成的基:

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & \ddots \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

情况 3: 当 $\boldsymbol{A}$ 为下三角全 1 矩阵时

- **分析:** 观察该矩阵的形式, 它可以写为 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{N}$, 其中 $\boldsymbol{N}$ 是一个下三角矩阵:

$$\boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \cdots \\ 1 & 1 & 0\cdots \end{bmatrix}.$$

  对于这种" 全 1" 结构的下三角矩阵, 与其交换的矩阵 $\boldsymbol{B}$ 必须是下三角且每一条对角线上的元素相等.
- **维数:** $\dim(Z(\boldsymbol{A})) = n$.
- **基:** 每一条下对角线全为 1 的矩阵. 如下:

$$\boldsymbol{B}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n\times n},$$

$$\boldsymbol{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}_{n\times n},$$

$$\boldsymbol{B}_k = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n\times n} \quad (\text{该1 位于第}k+1\text{ 行, 第1 列}),$$

$$\boldsymbol{B}_{n-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}.$$

习题 5.10

题目: 设 $W_1 = L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3), W_2 = L(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)$, 其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,1,0)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = (1,2,3,4)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\alpha}_3 = (2,1,3,1)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\beta}_1 = (5,6,7,8)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\beta}_2 = (3,4,5,6)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\beta}_3 = (2,3,4,5)^{\mathrm{T}}.$$

试求 $W_1 \cap W_2, W_1 + W_2$ 的基与维数.

解答:

将 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 依次作为列向量构造矩阵, 并化为行最简形:

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 6 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 7 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 8 & 6 & 5 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

不难看出 $\dim(W_1) = 3$, $\dim(W_2) = 2$.

1. $W_1 + W_2$

- **维数:** 观察化简后的矩阵, 前 4 列 (对应 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1$) 是线性无关的 (均含有主元). 因此, 矩阵的秩为 4, 即 $\dim(W_1 + W_2) = 4$.
- **基:** 取原矩阵中主元所在的列, 一组基为 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1\}$.

2. $W_1 \cap W_2$

$$\dim(W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 + W_2) = 3 + 2 - 4 = 1.$$

设交空间中的向量 $\boldsymbol{\delta} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3 = -(m_1\boldsymbol{\beta}_1 + m_2\boldsymbol{\beta}_2)$. 这等价于求解齐次线性方程组 $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

利用前 5 列的化简结果:

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + 5m_1 + 3m_2 = 0, \\ k_2 + m_1 + m_2 = 0, \\ k_3 = 0, \\ 4m_1 + 2m_2 = 0. \end{cases}$$

取 $m_1 = \frac{1}{2}, m_2 = -1$, 得到非零解向量 $(k_1, k_2, k_3, m_1, m_2)^{\mathrm{T}} = (0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, -1)^{\mathrm{T}}$.

代入 $\boldsymbol{\delta}$ 的表达式:

$$\boldsymbol{\delta} = 0\boldsymbol{\alpha}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2 + 0\boldsymbol{\alpha}_3 = \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2.$$

结论:

- **维数:** 1.
- **基:** $\{\boldsymbol{\alpha}_2\}$.

习题 5.12

题目: 设 $W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & 0 \end{bmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}, W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$. 证明: $W_1 + W_2 = M_2(\mathbb{R})$.

证明:

根据题意, 我们可以直接写出两个子空间的基底:

- W_1 的一组基为: $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.
- W_2 的一组基为: $B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

利用 $M_2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^4$ 的同构关系, 将上述矩阵对应到 $\mathbb{R}^4$ 中的列向量:

- $\alpha_1 = (1, 0, 0, 0)^T, \alpha_2 = (0, 1, 0, 0)^T, \alpha_3 = (0, 0, 1, 0)^T$.
- $\beta_1 = (1, 0, 0, 0)^T, \beta_2 = (0, 0, 0, 1)^T$.

和空间 $W_1 + W_2$ 由向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2\}$ 生成. 构造矩阵如下并进行初等行变换:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

根据上述矩阵得 $\dim(W_1 + W_2) = \operatorname{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2) = 4$.
已知全空间 $M_2(\mathbb{R})$ 的维数为 $2 \times 2 = 4$.
由于 $W_1 + W_2$ 是 $M_2(\mathbb{R})$ 的子空间, 且其维数等于全空间的维数, 故有:

$$W_1 + W_2 = M_2(\mathbb{R}).$$

习题 5.14

题目: 如果 W 是 V 的子空间, 且 $\dim W = \dim V$, 证明 $W = V$.

证明:

设 $\dim W = s, \dim V = t$. 根据题目已知条件, 有 $s = t$.
取 W 的一组基为 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$.
由于 $W \subseteq V$, 这组向量在 V 中也是线性无关的. 根据 **基扩充原理**, 我们可以将这组向量扩充为 V 的一组基: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s, \alpha_{s+1}, \ldots, \alpha_t$.
因为已知 $s = t$, 这意味着在扩充过程中, 实际上并没有增加任何额外的向量 (即不存在 α_{s+1} 及之后的项).
因此, W 的基 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$ 同时也是 V 的基.
由于 W 和 V 拥有相同的基, 它们所张成的空间必然相等.
所以 $W = V$.
证毕.

习题 5.16

题目: 证明: 如果 $V = V_1 \oplus V_2$, 而 $V_1 = V_{11} \oplus V_{12}$, 那么 $V = V_{11} \oplus V_{12} \oplus V_2$.

证明:

1. **利用已知直和条件的性质**

由于 $V = V_1 \oplus V_2$, 根据直和的性质, 我们可知:

- $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.
- $\dim V = \dim V_1 + \dim V_2$.

同理, 由于 $V_1 = V_{11} \oplus V_{12}$, 我们有:

- $V_{11} \cap V_{12} = \{0\}$.
- $\dim V_1 = \dim V_{11} + \dim V_{12}$.

我们需要证明 V_{11}, V_{12}, V_2 这三个子空间的交集关系满足直和要求.

- 因为 $V_{11} \subseteq V_1$, 所以 $V_{11} \cap V_2 \subseteq V_1 \cap V_2$. 已知 $V_1 \cap V_2 = \{0\}$, 故 $V_{11} \cap V_2 = \{0\}$.
- 同理, 因为 $V_{12} \subseteq V_1$, 所以 $V_{12} \cap V_2 \subseteq V_1 \cap V_2 = \{0\}$, 故 $V_{12} \cap V_2 = \{0\}$.
- 已知条件中已有 $V_{11} \cap V_{12} = \{0\}$.

将维数公式进行代换:

$$\dim V = \dim V_1 + \dim V_2 = (\dim V_{11} + \dim V_{12}) + \dim V_2.$$

由于 $V = V_1 + V_2 = (V_{11} + V_{12}) + V_2$, 且上述子空间之间的交集均为 $\{0\}$, 维数满足相加关系, 符合多子空间直和的定义.

结论:

$$\therefore V = V_{11} \oplus V_{12} \oplus V_2.$$

证毕.

习题 5.18

题目: 证明 $M_n(F) = SM_n(F) \oplus W$, 其中 $W = \{A \mid A \in M_n(F), A^{\mathrm{T}} = -A\}$.

证明:

- **证明 $M_n(F) = SM_n(F) + W$:** 对于任意矩阵 $A \in M_n(F)$, 我们可以构造如下分解:

$$A = \frac{1}{2}(A + A^{\mathrm{T}}) + \frac{1}{2}(A - A^{\mathrm{T}}).$$

  - 设 $A_1 = \frac{1}{2}(A + A^{\mathrm{T}})$. 由于 $A_1^{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}(A^{\mathrm{T}} + A) = A_1$, 故 $A_1 \in SM_n(F)$.
  - 设 $A_2 = \frac{1}{2}(A - A^{\mathrm{T}})$. 由于 $A_2^{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}(A^{\mathrm{T}} - A) = -A_2$, 故 $A_2 \in W$.

  因此, A 可以表示为一个对称矩阵与一个反对称矩阵之和, 即 $M_n(F) = SM_n(F) + W$.

- **证明交集为零向量:** 设矩阵 $A \in SM_n(F) \cap W$.
  - 由于 $A \in SM_n(F)$, 则 $A^{\mathrm{T}} = A$.
  - 由于 $A \in W$, 则 $A^{\mathrm{T}} = -A$.
  - 由此可得 $A = -A$, 即 $2A = 0$, 在特征不为 2 的域 F 上, 必有 $A = 0$.

  因此, $SM_n(F) \cap W = \{0\}$.

- **结论:** 由于 $M_n(F)$ 是两子空间之和且交集仅含零元素, 故为直和:

$$M_n(F) = SM_n(F) \oplus W.$$

证毕.

《线性代数入门》

习题 7.1.10

题目: 考虑矩阵空间 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 的分别满足以下条件的矩阵 A 的全体, 判断是否为子空间.

1. A 可逆. 2. A 不可逆. 3. $A^2 = O$. 4. $AA^{\mathrm{T}} = I$. 5. $\mathcal{R}(A) = \mathcal{M}$, 其中 $\mathcal{M}$ 是 $\mathbb{F}^n$ 的给定子空间. 6. $\mathcal{N}(A) = \mathcal{M}$, 其中 $\mathcal{M}$ 是 $\mathbb{F}^n$ 的给定子空间. 7. 存在矩阵 B, C, 使得 $A = \begin{bmatrix} C & -B \\ B & C \end{bmatrix}$.

解答:

1. A **可逆: 不是子空间**. 不包含零元素, 且对加法不封闭.
2. A **不可逆: 不是子空间**. 对加法不封闭. 例如: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 均不可逆, 但其和为单位矩阵, 是可逆的.
3. $A^2 = O$**: 不是子空间**. 对加法不封闭. 例如: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 均为幂零矩阵, 但其和为可逆矩阵, 不再满足条件.
4. $AA^{\mathrm{T}} = I$**: 不是子空间**. 不包含零元素.
5. $\mathcal{R}(A) = \mathcal{M}$**: 只有当** $\mathcal{M} = \{0\}$ **时才是子空间**. 若 $\mathcal{M}$ 为非零给定子空间, 零矩阵不满足此条件.
6. $\mathcal{N}(A) = \mathcal{M}$**: 只有当** $\mathcal{M} = \mathbb{F}^n$ **时才是子空间**. 若 $\mathcal{M}$ 为其他给定子空间, 零矩阵不满足此条件.
7. **存在** B, C **使得** $A = \begin{bmatrix} C & -B \\ B & C \end{bmatrix}$**: 是子空间**. 直接验证可知该集合对线性组合封闭.

习题 7.1.11

题目: 考虑多项式空间 $\mathbb{R}[x]$ 的分别满足以下条件的多项式 p 的全体, 判断是否为子空间.

1. $p(2) = 0$. 2. $p(2) = 1$. 3. $p'(2) = 0$. 4. p 的次数是奇数. 5. p 的根都是实数.

解答:

1. $p(2)=0$: **是子空间**. 直接验证其对线性组合封闭.
2. $p(2)=1$: **不是子空间**. 不包含零元素.
3. $p'(2)=0$: **是子空间**. 导数运算满足线性性质, 对线性组合封闭.
4. p **的次数是奇数: 不是子空间**. 对加法不封闭, 例如 x^3+x^2 与 $-x^3$ 的和是 2 (偶数) 次多项式.
5. p **的根都是实数: 不是子空间**. 例如 x^2 和 $x+1$ 的根为实数, 但其和 x^2+x+1 没有实数根.

习题 7.1.12

题目: 设 $\mathcal{M}_1=\operatorname{span}(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2),\mathcal{M}_2=\operatorname{span}(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)$, 其中

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}-2\\3\\1\\-3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\0\\-2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}_2=\begin{bmatrix}1\\3\\1\\-3\end{bmatrix}.$$

分别求 M_1+M_2 和 $M_1\cap M_2$ 的一组基和维数.

解答:

1. M_1+M_2 **的基和维数**
将向量作为列组成矩阵 $A=[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2]$, 通过初等行变换化为简化行阶梯形:

$$A=\begin{bmatrix}1&-2&1&1\\-1&3&2&3\\0&1&0&1\\1&-3&-2&-3\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{bmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

- **维数:** 矩阵的秩为 3, 所以 $\dim(M_1+M_2)=3$.
- **基:** 主元在第 $1,2,3$ 列, 因此 M_1+M_2 的一组基为 $\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{b}_1\}$.

2. $M_1\cap M_2$ **的基与维数**

- **维数:** 根据维数公式 $\dim(M_1+M_2)+\dim(M_1\cap M_2)=\dim(M_1)+\dim(M_2)$: 由于 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2$ 线性无关 $(\dim M_1=2)$, $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2$ 线性无关 $(\dim M_2=2)$, 则

$$\dim(M_1\cap M_2)=2+2-3=1.$$

- **基:** 根据简化行阶梯形矩阵的第 4 列可知, 向量间的线性关系为:

$$\mathbf{b}_2=2\mathbf{a}_1+1\mathbf{a}_2+1\mathbf{b}_1.$$

整理得:

$$2\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2=\mathbf{b}_2-\mathbf{b}_1.$$

等式左边属于 M_1, 右边属于 M_2, 因此该向量即为交空间 $M_1 \cap M_2$ 的基. 计算其具体坐标:

$$\mathbf{v} = \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

所以 $M_1 \cap M_2$ 的基为: $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$.

习题 7.1.13

题目: 设 $\mathbb{F}_0^{n\times n}$ 是矩阵空间 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 中所有迹为零的矩阵构成的子集.

1. 证明 $\mathbb{F}_0^{n\times n}$ 是 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 的子空间. 2. 求子空间 $\mathbb{F}_0^{n\times n}$ 和 $\mathrm{span}(I_n) := \{kI_n \mid k \in \mathbb{F}\}$ 的交与和.

解答:

1. **证明:** 对于 $A, B \in \mathbb{F}_0^{n\times n}$, $a, b \in \mathbb{F}$, 那么

$$\mathrm{trace}(aA + bB) = a \cdot \mathrm{trace}(A) + b \cdot \mathrm{trace}(B) = 0.$$

所以 $\mathbb{F}_0^{n\times n}$ 在线性组合之下封闭, 因此是子空间.

2. **交与和:**

- **交:** 设 $kI_n \in \mathbb{F}_0^{n\times n}$, 那么 $\mathrm{trace}(kI_n) = 0$, 即 $nk = 0$, 所以 $k = 0$, 这就说明 $\mathbb{F}_0^{n\times n} \cap \mathrm{Span}(I_n) = \{0\}$.
- **和:** 对任意 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 令 $A_0 = A - \frac{\mathrm{trace}(A)}{n} I_n$, 那么 $\mathrm{trace}(A_0) = 0$, 且 $A = A_0 + \frac{\mathrm{trace}(A)}{n} I_n$. 因此 $\mathbb{F}_0^{n\times n} + \mathrm{Span}(I_n) = \mathbb{F}^{n\times n}$.