本次讨论题主要涉及导数及其计算问题. 有三部分内容:

一. 关于导数的基本概念;

二. 关于高阶导数计算;

三. 关于隐函数和反函数的导数计算.

第一部分. 关于导数的基本概念

讨论题 1: 设 $f(x)$ 在 x_0 的一个邻域上有定义. 若极限

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{f(x_0-\delta)-f(x_0)}{\sin\delta} \tag{1}$$

存在, 问函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导吗? 说明理由.

答: 可导. 理由如下. 依定义函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 即极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \tag{2}$$

存在. 因为式 (2) 中的差商可以写作

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{f(x_0-(-h))-f(x_0)}{\sin(-h)}\cdot\frac{\sin(-h)}{-h}\cdot(-1).$$

于上式取极限即可知, 极限 (2) 存在, 当且仅当极限 (1) 存在, 并且这两个极限仅相差一个符号. 解答完毕.

讨论题 2: 设

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x>0\\ x^2g(x), & x\le 0.\end{cases}$$

其中 $g(x)$ 是有界函数. 讨论函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性和可导性.

解: 首先考查函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的左右极限:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{x^2}{\sqrt{x}} = 0;$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2 g(x) = 0.$$

后一极限存在是因为函数 $g(x)$ 有界. 因此函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的左右极限均存在且都等于函数值 $f(0)=0$. 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 再来考查 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的左右导数是否存在. 由于当 $x>0$ 时,

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{\frac{1-\cos x}{\sqrt{x}}}{x} = \frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{x^2}{x\sqrt{x}} \to 0, \quad x\to 0^+.$$

当 $x<0$ 时,

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{x^2 g(x)}{x} = xg(x) \to 0, \quad x\to 0^-.$$

因此函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处的左右导数均存在且均等于零. 因此 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导, 且 $f'(0)=0$. 解答完毕.

讨论题 3: 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导. 若 $a_n<0$, $a_n\to 0^-$, 且 $b_n>0$, $b_n\to 0^+$, 证明

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n} = f'(0).$$

证法一: 注意

$$\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n} = \frac{f(b_n)-f(0)+f(0)-f(a_n)}{b_n-a_n}$$

$$= \frac{f(b_n)-f(0)}{b_n-0}\cdot\frac{b_n}{b_n-a_n} - \frac{f(a_n)-f(0)}{a_n-0}\cdot\frac{a_n}{b_n-a_n},$$

以及

$$f'(0) = \left(\frac{b_n}{b_n-a_n} - \frac{a_n}{b_n-a_n}\right) f'(0),$$

故

$$\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n} - f'(0)$$

$$= \left(\frac{f(b_n)-f(0)}{b_n-0} - f'(0)\right)\frac{b_n}{b_n-a_n} - \left(\frac{f(a_n)-f(0)}{a_n-0} - f'(0)\right)\frac{a_n}{b_n-a_n}.$$

由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $b_n \to 0^+$, $a_n \to 0^-$, 故对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得当 $n > N$ 时

$$\left|\frac{f(b_n)-f(0)}{b_n-0} - f'(0)\right| < \varepsilon \quad \text{且} \quad \left|\frac{f(a_n)-f(0)}{a_n-0} - f'(0)\right| < \varepsilon.$$

于是使得当 $n > N$ 时

$$\begin{aligned}&\left|\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n} - f'(0)\right| \\ \le\ & \left|\frac{f(b_n)-f(0)}{b_n-0} - f'(0)\right|\left|\frac{b_n}{b_n-a_n}\right| + \left|\frac{f(a_n)-f(0)}{a_n-0} - f'(0)\right|\left|\frac{a_n}{b_n-a_n}\right| \\ <\ & \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.\end{aligned}$$

命题得证. 注意这里利用了不等式

$$\left|\frac{b_n}{b_n-a_n}\right| < 1, \quad \left|\frac{a_n}{b_n-a_n}\right| < 1,$$

而上述不等式成立, 是因为 $a_n < 0$, $b_n > 0$.

证法二: 由假设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导知, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对 $\forall x \in (-\delta, \delta)\backslash\{0\}$,

$$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0} - f'(0)\right| < \varepsilon \text{ 或 } -\varepsilon < \frac{f(x)-f(0)}{x-0} - f'(0) < \varepsilon.$$

对于任意 $a_n \to 0^-$, $b_n \to 0^+$, 存在正整数 N, 使得对任意 $n \ge N$, 成立 $a_n \in (-\delta, 0)$ 和 $b_n \in (0, \delta)$. 于是对任意 $n \ge N$,

$$-\varepsilon < \frac{f(b_n)-f(0)}{b_n} - f'(0) < \varepsilon \quad \text{且} \quad -\varepsilon < \frac{f(a_n)-f(0)}{a_n} - f'(0) < \varepsilon,$$

或写作

$$\begin{aligned}&-\varepsilon b_n < f(b_n) - f(0) - f'(0)b_n < b_n\varepsilon, \\ &\varepsilon a_n < -f(a_n) + f(0) + f'(0)a_n < (-a_n)\varepsilon.\end{aligned}$$

上述两式相加得

$$-\varepsilon(b_n - a_n) < f(b_n) - f(a_n) - f'(0)(b_n - a_n) < \varepsilon(b_n - a_n).$$

上式同除 $b_n - a_n$ 得对于任意 $\geq N$, 成立

$$-\varepsilon < \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} - f'(0) < \varepsilon.$$

命题得证.

讨论题 4: (本题与课本第89页第三章总复习题题4类似) 设函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 处可导且 $f(a) \neq 0$. 求极限

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{f(a + \frac{1}{x})}{f(a)} \right]^x.$$

解: 先考虑情形 $f'(a) \neq 0$. 此时我们可以断言, 存在 $\delta > 0$, 使得 $f(x) \neq f(a)$, $\forall x \in (a-\delta, a+\delta) \backslash \{a\}$. 因此当 x 充分大的时候, $f(a + \frac{1}{x}) \neq f(a)$. 于是我们有

$$\left[\frac{f(a + \frac{1}{x})}{f(a)} \right]^x = \left[1 + \frac{f(a + \frac{1}{x}) - f(a)}{f(a)} \right]^{\frac{f(a)}{f(a+\frac{1}{x}) - f(a)} \frac{1}{f(a)} \frac{f(a+\frac{1}{x}) - f(a)}{\frac{1}{x}}}.$$

注意到

$$\frac{f(a + \frac{1}{x}) - f(a)}{f(a)} \to 0 \quad \text{and} \quad \frac{f(a + \frac{1}{x}) - f(a)}{\frac{1}{x}} \to f'(a), \quad x \to +\infty.$$

因此我们就得到

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{f(a + \frac{1}{x})}{f(a)} \right]^x = e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}.$$

再来考虑情形 $f'(a) = 0$. 令

$$\delta(x) = \frac{f(a + \frac{1}{x}) - f(a)}{f(a)},$$

则

$$x\delta(x) = \frac{f(a + \frac{1}{x}) - f(a)}{f(a)\frac{1}{x}} \to \frac{f'(a)}{f(a)} = 0, \quad x \to +\infty.$$

这表明 $\delta(x)=o(\frac{1}{x})$. 另一方面

$$\left[\frac{f(a+\frac{1}{x})}{f(a)}\right]^x=(1+\delta(x))^x.$$

于是

$$\ln\left[\frac{f(a+\frac{1}{x})}{f(a)}\right]^x=x\ln(1+\delta(x))=x\Big[\delta(x)+o(\delta(x))\Big]\to 0,\quad x\to+\infty.$$

因此

$$\left[\frac{f(a+\frac{1}{x})}{f(a)}\right]^x=e^{x\ln(1+\delta(x))}\to e^0=1.$$

以上两个情形可以统一写作

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(a+\frac{1}{x})}{f(a)}\right]^x=e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}.$$

解答完毕.

注: 同理可证

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{f(a+\frac{1}{x})}{f(a)}\right]^x=e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}.$$

讨论题 5. 设函数 $g(x)$ 在 $(-1,1)$ 上连续. 定义

$$f(x)\stackrel{\text{def}}{=}\begin{cases}\frac{g(x)}{x}, & x\neq 0,\\ 2, & x=0.\end{cases}$$

假设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. (1) 求函数 $g(x)$ 在点 $x=0$ 处的值; (2) 问函数 $g(x)$ 在点 $x=0$ 处是否可导. 若可导, 试求导数值.

解: 由假设知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 故有

$$2=f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}.$$

再根据函数 $g(x)$ 的连续性知

$$g(0)=\lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}\cdot x=2\cdot 0=0.$$

由于

$$\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\frac{g(x)}{x}\to 2,\quad x\to 0,$$

因此函数 $g(x)$ 在点 $x=0$ 处可导且 $g'(0)=2$. 解答完毕.

讨论题 6: 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 点处的可导且 $f(0)=0$. 定义 $x_n=f(\frac{1}{n^2})+f(\frac{2}{n^2})+\cdots+f(\frac{n}{n^2})$, $\forall n\geq 1$. 证明序列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求出其极限值.

证明: 根据假设我们有 $f(h)-f(0)=f'(0)h+o(h)$, 即对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得 $|f(h)-f'(0)h|<\varepsilon h$, $\forall h\in(-\delta,\delta)$. 取 $N=[\frac{1}{\delta}]+1$, 则对任意 $n>N$, $\frac{1}{n}<\delta$. 于是 $\frac{i}{n^2}\leq\frac{1}{n}\in(0,\delta)$, $i=1,2,\cdots,n$. 于是对任意 $n>N$,

$$\left|f\left(\frac{i}{n^2}\right)-f'(0)\frac{i}{n^2}\right|<\frac{\varepsilon i}{n^2}.$$

去掉绝对值符号得

$$-\frac{\varepsilon i}{n^2}<f\left(\frac{i}{n^2}\right)-f'(0)\frac{i}{n^2}<\frac{\varepsilon i}{n^2}.$$

对上述不等式关于 $i=1,2,\cdots$ 求和得

$$-\frac{\varepsilon}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i<\sum_{i=1}^{n}\left[f\left(\frac{i}{n^2}\right)-f'(0)\frac{i}{n^2}\right]<\frac{\varepsilon}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i.$$

此即

$$\left|\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n^2}\right)-f'(0)\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2}\right|\leq\frac{\varepsilon}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i.$$

再根据求和公式 $\sum_{i=1}^{n}i=\frac{1}{2}n(n+1)$ 得

$$\left|\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n^2}\right)-f'(0)\frac{n+1}{2n}\right|\leq\frac{\varepsilon(n+1)}{2n}<\varepsilon.$$

这表明

$$\left|x_n-f'(0)\frac{n+1}{2n}\right|<\varepsilon.$$

于是

$$\left|x_n-\frac{f'(0)}{2}\right|\leq\left|x_n-f'(0)\frac{n+1}{2n}\right|+\left|f'(0)\frac{n+1}{2n}-\frac{f'(0)}{2}\right|<\varepsilon+\frac{|f'(0)|}{2n}.$$

可取正整数 $N_1>N$ 充分大, 使得 $\frac{|f'(0)|}{2N_1}<\varepsilon$. 于是对任意 $\varepsilon>0$, 存在正整数 N_1, 使得当 $n\geq N_1$ 时,

$$\left|x_n-\frac{f'(0)}{2}\right|<2\varepsilon.$$

由此可见序列 $\{x_n\}$ 收敛且 $x_n\to\frac{f'(0)}{2}$. 证毕.

第二部分: 关于高阶导数计算

讨论题 7 (课本第88页习题3.3题7): 设 $y=(\arcsin x)^2$.

(a) 证明

$$(1-x^2)f^{n+2}(x)-(2n+1)xf^{n+1}(x)-n^2f^n(x)=0,\quad \forall n\geq 1. \tag{3}$$

(b) 求 $y^{(n)}(0)$.

解: (a) 对函数 $y=(\arcsin x)^2$ 求导得

$$y'=2(\arcsin x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{4}$$

为了再次求导的方便, 我们将上式改写为如下形式

$$(1-x^2)(y')^2=4y. \tag{5}$$

对上式两边关于 x 求导得 $(1-x^2)2y'y''-2x(y')^2=4y'$. 两边约去 y' 即得

$$(1-x^2)y''-xy'=2. \tag{6}$$

对上式再次求导得

$$(1-x^2)f'''(x)-3xf''(x)-f'(x)=0.$$

即等式 (3) 对 $n=1$ 成立. 假设等式 (3) 对正整数 $n=k$ 成立, 即

$$(1-x^2)f^{(k+2)}(x)-(2k+1)xf^{(k+1)}(x)-k^2f^{(k)}(x)=0,$$

考虑 $n=k+1$ 情形. 对上式求导得

$$(1-x^2)f^{(k+3)}(x)-2xf^{(k+2)}(x)-(2k+1)xf^{(k+2)}(x)-(2k+1)f^{(k+1)}(x)-k^2f^{(k+1)}(x)=0.$$

整理得

$$(1-x^2)f^{(k+3)}(x)-[2(k+1)+1]xf^{(k+2)}(x)-(k+1)^2f^{(k+1)}(x)=0.$$

即等式 (3) 对正整数 $n=k+1$ 成立. 由归纳法原理知等式 (3) 对任意正整数 n 成立. 结论 (a) 得证.

解答 (b): 根据函数 $y(x)$ 的定义, 以及等式 (5) 和 (6), 我们立刻得到 $y(0)=0$, $y'(0)=0$, $y''(0)=2$. 在等式 (3) 即等式

$$(1-x^2)y^{(n+2)}-(2n+1)xy^{(n+1)}-n^2y^{(n)}=0$$

中令 $x=0$ 得递推关系式 $y^{(n+2)}(0)=n^2y^{(n)}(0)$. 由 $y'(0)=0$ 可知 $y^{(2n+1)}(0)=0$. 再由 $y''(0)=2$ 可知

$$\begin{aligned} y^{(4)}(0) &= 2^2y^{(2)}(0)=2\cdot 2^2 \\ y^{(6)}(0) &= 4^2y^{(4)}(0)=2(4\cdot 2)^2 \\ &\vdots \\ y^{(2n)}(0) &= 2[(2n-2)!!]^2. \end{aligned}$$

解答完毕.

讨论题 8: 求函数 $f(x)$ 的 n 阶导数, 其中 $f(x)$ 如下定义

$$f(x)=\frac{2x^3+1}{x^2-3x+2}.$$

<u>解</u>: 利用带余除法, 将分式 $f(x)$ 化为如下多项式加上真分式形式

$$f(x)=2x+6+\frac{14x-11}{x^2-3x+2}.$$

再将真分式部分化为最简分式. 由于 $x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$, 故可令

$$\frac{14x-11}{x^2-3x+2}=\frac{14x-11}{(x-2)(x-1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-1},$$

其中 A,B 为待定常数. 上式两边同乘以 $(x-2)(x-1)$ 即得

$$14x-11=A(x-1)+B(x-2).$$

比较两边 x 和 $x^0=1$ 的系数得 $14=A+b$, $-11=-A-2B$. 解之得 $A=17$, $B=-3$. 于是

$$\frac{14x-11}{x^2-3x+2}=\frac{17}{x-2}-\frac{3}{x-1}.$$

因此

$$f'(x)=\left(2x+6+\frac{17}{x-2}-\frac{3}{x-1}\right)'=2-\frac{17}{(x-2)^2}+\frac{3}{(x-1)^2}.$$

对于 $\forall n\geq 2$

$$f^{(n)}(x)=\left[-\frac{17}{(x-2)^2}+\frac{3}{(x-1)^2}\right]^{(n-1)}=(-1)^n n!\left(\frac{17}{(x-2)^{n+1}}-\frac{3}{(x-1)^{n+1}}\right).$$

解答完毕.

讨论题 9: (课本第88页第三章总复习题题2) 定义函数

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

证明函数 $f(x)$ 在整个实轴上无穷次可导, 并且 $f^{(n)}(0)=0, \forall n\geq 1$.

<u>证明</u>: 当 $x\neq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 为指数函数与函数 $\frac{1}{x^2}$ 的复合函数, 故函数 $f(x)$ 无穷次可导. 只需考虑 $x=0$ 时函数的可导情况. 以下我们将要反复应用一个函数极限的结论, 我们将它写作一个引理形式.

<u>引理</u>: 对任何正整数 $m\geq 1$,

$$\lim_{y\to\pm\infty}\frac{y^m}{e^{y^2}}=0.$$

证明: 当 $m=2k$ 为偶数时, 记 $z=y^2$, 则

$$\lim_{y\to\pm\infty}\frac{y^m}{e^{y^2}}=\lim_{z\to+\infty}\frac{z^k}{e^z}=0.$$

当 $m=2k-1$ 为奇数时,

$$\lim_{y\to\pm\infty}\frac{y^m}{e^{y^2}}=\lim_{y\to\pm\infty}\left[\frac{1}{y}\cdot\frac{y^{2k}}{e^{y^2}}\right]=\lim_{y\to\pm\infty}\frac{1}{y}\cdot\lim_{y\to\pm\infty}\frac{y^{2k}}{e^{y^2}}=0\cdot 0=0.$$

引理得证.

往下我们将用归纳法证明, 对任意正整数 n, 函数 $f(x)$ 在整个实轴上 n 次连续可导, 并且其 n 次导数可表为

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases} p_n(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

其中 $p_n(y)$ 是一个多项式.

Step 1. 证: $f(x)$ 的一阶导函数连续, 且可表为

$$f'(x)=\begin{cases} -\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

对于 $x\neq 0$,

$$f'(x)=\frac{-2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

另一方面

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=\frac{y}{e^{y^2}}\to 0,\quad y=\frac{1}{x}\to\pm\infty,\quad x\to 0.$$

因此 $f'(0)=0$. 利用引理易证

$$f'(x)=-\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}=-\frac{2y^3}{e^{y^2}}\to 0=f'(0),\quad y=\frac{1}{x}\to\pm\infty,\quad x\to 0.$$

因此一阶导函数 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 从而在整个实轴上连续.

Step 2. 证明 $f(x)$ 的二阶导函数连续, 并且可表为

$$f''(x)=\begin{cases} p_2(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

这里 $p_2(y)=6y^4-4y^6$ 是一个多项式. 对于 $x\neq 0$, 对 $f'(x)$ 直接求导得

$$f''(x)=\left(\frac{4}{x^6}-\frac{6}{x^4}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

另一方面

$$\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=-\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}\frac{1}{x}=-\frac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^4}=-\frac{2y^4}{e^{y^2}}\to 0,\quad y=\frac{1}{x}\to\pm\infty,\quad x\to 0.$$

这表明 $f''(0)=0$. 同样利用引理可知

$$f''(x)=\left(\frac{4}{x^6}-\frac{6}{x^4}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}=\frac{4y^6-6y^4}{e^{y^2}}\to 0=f''(0),\quad y\to\pm\infty.$$

这表明二阶导函数 $f''(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 从而在整个实轴上连续.

Step 3. 假设对于一般正整数 $n\geq 2$, 函数 $f(x)$ 的 n 阶导函数在整个实轴上连续, 且可表为

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases} p_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

其中 $p_n(y)$ 是一个多项式, 那么函数 $f(x)$ 在 $x\neq 0$ 时的 $n+1$ 阶导函数可表为

$$f^{(n+1)}(x)=p_n'\left(\frac{1}{x}\right)\frac{-1}{x^2}e^{-\frac{1}{x^2}}+p_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}\left(\frac{2}{x^3}\right)=p_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}},$$

其中 $p_{n+1}(y)$ 是一个多项式. 另一方面根据引理可知

$$\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x-0}=\frac{1}{x}p_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}=\frac{yp_n(y)}{e^{y^2}}\to 0,\quad y=\frac{1}{x}\to\pm\infty,\quad x\to 0.$$

这表明 $f^{(n+1)}(0)=0$. 再次利用引理可知

$$f^{(n+1)}(x)=p_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}=\frac{p_{n+1}(y)}{e^{y^2}}\to 0=f^{(n+1)}(0),\quad y=\frac{1}{x}\to\pm\infty,\quad x\to 0.$$

这就证明了函数 $f(x)$ 的 $n+1$ 阶导函数 $f^{(n+1)}(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 从而在整个实轴上连续, 并且 $f^{(n+1)}(x)$ 可表为

$$f^{(n+1)}(x)=\begin{cases} p_{n+1}(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

其中 $p_{n+1}(x)$ 是一个多项式. 根据归纳法原理可知结论得证. 证毕.

<u>注记</u>: 函数

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

具有十分重要的理论和实际意义. 一方面它提供了一个标准的无穷次可导函数, 但不是解析函数的例子. 关于解析函数, 我们下个学期学习无穷级数时再作详细讨论. 另一方

面, 在构造具有特殊性质的函数时, 这个函数能派上大用场. 同学们应牢记这个函数. 下面我们举例说明这个函数的用处.

例: (光滑对接) 构造一个函数 $u(x)$, 它在区间 $(-\infty, 0]$ 上恒为零， 在区间 $[1, +\infty)$ 恒为 1, 而在整个实轴上为无穷次可导. 构造方式如下. 令

$$u(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{g(x)}{g(x)+g(1-x)}, \qquad g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

则不难验证函数 $u(x)$ 满足条件

(i) $u(x) \equiv 0$, $\forall x \in (-\infty, 0]$;

(ii) $u(x) \equiv 1$, $\forall x \in [1, +\infty)$;

(iii) $0 \leq u(x) \leq 1$, $\forall x \in [0, 1]$;

(iv) $u(x)$ 在整个实轴上无穷次可微.

注记完毕.

第三部分: 关于隐函数和反函数的导数

讨论题 10: 设 $y = y(x)$ 由方程 $e^{xy} + \tan(xy) = y$ 在点 $(x, y) = (0, 1)$ 附近确定的可导函数, 其中 $x \in (-r, r)$, $r > 0$. 求 $y'(0)$.

解: 对方程 $e^{xy} + \tan(xy) = y$ 两边关于 x 求导得

$$\left(e^{xy} + \frac{1}{\cos^2(xy)}\right)(y + xy') = y'. \tag{7}$$

在方程 $e^{xy} + \tan(xy) = y$ 中令 $x = 0$ 得 $y = 1$. 这表明 $y(0) = 1$. 将 $(x, y) = (0, 1)$ 代入等式(7) 我们就得到 $2 = y'$. 这表明 $y'(0) = 2$. 解答完毕.

讨论题 11: 设 $y = y(x)$ 由方程 $e^{x+y} - \sin(x+y) = x^3$ 所确定的二阶可导函数. 求函数 $y(x)$ 的一阶和二阶导数.

解: 在方程 $e^{x+y} - \sin(x+y) = x^3$ 中, 视 y 为 x 的可导函数. 于是对方程两边关于 x 求

导得

$$\left(e^{x+y}-\cos(x+y)\right)(1+y')=3x^2. \tag{8}$$

由上式解出 y' 得

$$y'=\frac{3x^2}{e^{x+y}-\cos(x+y)}-1. \tag{9}$$

对等式 (8) 再次关于 x 求导得

$$\left(e^{x+y}-\cos(x+y)\right)y''+\left(e^{x+y}+\sin(x+y)\right)(1+y')^2=6x.$$

由此解得

$$y''=\frac{6x-[e^{x+y}+\sin(x+y)](1+y')^2}{e^{x+y}-\cos(x+y)}. \tag{10}$$

将一阶导数 y' 表达式 (9) 带入上式 (10) 并稍加整理得

$$y''=\frac{6x[e^{x+y}-\cos(x+y)]^2-9x^4[e^{x+y}+\sin(x+y)]}{[e^{x+y}-\cos(x+y)]^3}. \tag{11}$$

解答完毕.

讨论题 12: 设函数 $y=f(x)$ 为三次可导, 且 $f'(x)\neq 0$, 其反函数记 $x=g(y)$. 试用函数 $f(x)$ 的前三阶导数来表示反函数 $g(y)$ 的前三阶导数. (本题本质上是课本第89页第三章总复习题题15)

解: 由反函数定理知

$$g'(y)=\frac{1}{f'(x)},\quad x=g(y).$$

进一步关于 y 求导得

$$g''(y)=\frac{d}{dy}\left[\frac{1}{f'(x)}\right]=\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{f'(x)}\right]\frac{dx}{dy}=-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3},\quad x=g(y).$$

于上式再次关于 y 求导得

$$g'''(y)=\frac{d}{dy}\left[-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}\right]=\frac{d}{dx}\left[-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}\right]\frac{dx}{dy}$$

$$= \left(-\frac{f'''(x)}{[f'(x)]^3} + \frac{3[f''(x)]^2}{[f'(x)]^4}\right)\frac{1}{f'(x)} = \frac{3[f''(x)]^2}{[f'(x)]^5} - \frac{f'''(x)}{[f'(x)]^4}, \quad x = g(y).$$

解答完毕.