《微积分A1》第二十讲

教师 杨利军

清华大学数学科学系

2025年11月26日

<u>例二</u>: 求积分

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}dx.$$

<u>解</u>:

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx$$

$$= \int dx - \int \frac{dx}{1+x^2} = x - \arctan x + C.$$

解答完毕.

例三: 求积分

$$\int \tan^2 x dx.$$

解:

$$\int \tan^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \tan x - x + C.$$

解答完毕.

例四: 求积分

$$\int \frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x} dx.$$

解:

$$\int \frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x} dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x + \sin x} dx$$

$$= \int (\cos x - \sin x) dx = \int \cos x dx - \int \sin x dx$$

$$= \sin x + \cos x + C.$$

解答完毕.

例五: 设 $a>0$, 求不定积分

$$\int \frac{1}{a^2-x^2}dx, \quad |x| \neq a.$$

解: 先将被积函数分式化为方便积分的形式, 即

$$\frac{1}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right).$$

于是

$$\int \frac{1}{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2a}\left(\int \frac{dx}{a+x}+\int \frac{dx}{a-x}\right)$$

$$= \frac{1}{2a}\left(\ln|a+x| - \ln|a-x|\right) + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C.$$

解答完毕.

例六: 求不定积分

$$\int e^{|x|}dx.$$

解: 由于 $e^{|x|}$ 在整个 $\mathbb{R}$ 上连续, 故它有原函数. 例如 $F(x) = \int_0^x e^{|t|}dt$ 就是一个函数 $e^{|x|}$ 的一个原函数. 当 $x \geq 0$ 时, $F(x) = \int_0^x e^t dt = e^x - 1$; 当 $x < 0$ 时, $F(x) = -\int_x^0 e^{-t}dt = e^{-t}\big|_x^0 = 1 - e^{-x}$. 因此所求不定积分为

$$\int e^{|x|}dx = F(x) + C,$$

其中 $F(x)$ 定义如下

$$F(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x \geq 0, \\ 1 - e^{-x}, & x < 0. \end{cases}$$

解答完毕.

第一换元法(也称作凑微分方法)

Theorem

<u>定理</u>: 考虑计算 $\int g(x)dx$. 如果 $g(x)$ 可以表示为 $g(x) = f(\phi(x))\phi'(x)$, 且 $\int f(u)du = F(u) + C$ (通常 $\int f(u)du$ 容易计算), 则

$$\int g(x)dx = F(\phi(x)) + C.$$

Proof.

<u>证明</u>: 由假设 $F'(u) = f(u)$ 知

$$[F(\phi(x))]' = F'(\phi(x))\phi'(x) = f(\phi(x))\phi'(x) = g(x),$$

此即 $\int g(x)dx = F(\phi(x)) + C$. 证毕. □

第一换元法计算过程

计算不定积分 $\int f(\phi(x))\phi'(x)dx$ 的过程:

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)dx = \int f(\phi(x))d\phi(x) = \int f(u)du$$

$$= F(u) + C, \quad u = \phi(x).$$

注: 应用第一换元法计算 $\int g(x)dx$ 的关键在于, 如何将被积函数 $g(x)$ 表示为 $g(x) = f(\phi(x))\phi'(x)$, 并且计算 $\int f(u)du = F(u) + C$ 比较容易.

例一:

$$\int (3x+2)^5 dx = \frac{1}{3}\int (3x+2)^5 d(3x+2) = \frac{1}{3}\int u^5 du$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}u^6 + C = \frac{1}{18}(3x+2)^6 + C.$$

例二:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\sqrt{u} + C = -\sqrt{1-x^2} + C.$$

例三:

$$\int \sin^2 x \cos^3 x dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \cos x dx$$

$$= \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x) [\sin x]' dx = \int u^2 (1 - u^2) du$$

$$= \int u^2 du - \int u^4 du = \frac{1}{3} u^3 - \frac{1}{5} u^5 + C$$

$$= \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x + C.$$

例四:

$$\int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2}(x^2)'dx = \frac{1}{2}\int e^u du = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

例五: 设 $a \neq 0$，则

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{d(ax+b)}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$$

Theorem

定理: 考虑计算不定积分 $\int f(x)dx$. 如果作可逆变量代换 $x=\phi(t)$, 使得计算 $\int f(\phi(t))\phi'(t)dt$ 比较容易. 设 $\int f(\phi(t))\phi'(t)dt=G(t)+C$, 则

$$\int f(x)dx=G(\phi^{-1}(x))+C,\quad x\in J,$$

其中 $f(x)$ 于 J 上定义, $x=\phi(t)$ 为区间 K 上的连续可微函数, $\phi(t)\in J$, $\forall t\in K$, 且 $\phi'(t)\neq 0$, $t=\phi^{-1}(x)$ 为 $x=\phi(t)$ 的反函数.

定理证明

Proof.

证明: 由假设 $\phi'(t) \neq 0$ 可知 $x = \phi(t)$ 存在反函数 $t = \phi^{-1}(x)$. 于是

$$[G(\phi^{-1}(x))]' = G'(t)[\phi^{-1}(x)]' = f(\phi(t))\phi'(t)\frac{1}{\phi'(t)} = f(x),$$

上式中 $t = \phi^{-1}(x)$. 这表明 $G(\phi^{-1}(x))$ 是 $f(x)$ 的原函数. 证毕. □

注: 应用第二换元法计算 $\int f(x)dx$ 的关键在于, 如何寻找可逆变换 $x = \phi(t)$, 使得不定积分 $\int f(\phi(t))\phi'(t)dt$ 容易算出来.

例一:

$$\int x(1-x)^n dx = -\int (1-t)t^n dt \quad (x = 1-t,\ 或\ t = 1-x)$$

$$= -\int (t^n - t^{n+1})dt = -\frac{1}{n+1}t^{n+1} + \frac{1}{n+2}t^{n+2} + C$$

$$= \frac{1}{n+2}(1-x)^{n+2} - \frac{1}{n+1}(1-x)^{n+1} + C.$$

例二: 求不定积分

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}$$

解法一: 被积函数 $\frac{1}{x\sqrt{4-x^2}}$ 的定义域为 $(-2,2)\backslash\{0\}$. 作变换 $x = 2\sin t$, $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $t \neq 0$, 则

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{2\cos t dt}{2\sin t \cdot 2\cos t} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sin t}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{2\sin(t/2)\cos(t/2)} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t/2)}{\tan(t/2)\cos^2(t/2)}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d\tan(t/2)}{\tan(t/2)} = \frac{1}{2}\ln|\tan(t/2)| + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\tan\left(\frac{1}{2}\arcsin(x/2)\right)\right| + C.$$

解答完毕.

例二，续

注：计算 $\int \frac{dt}{\sin t}$ 的另一个方法：

$$\int \frac{dt}{\sin t} = \int \frac{\sin t dt}{\sin^2 t} = -\int \frac{d\cos t}{1-\cos^2 t}$$

$$= -\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1-\cos t} + \frac{1}{1+\cos t}\right) d\cos t$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos t}{1+\cos t}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-(x/2)^2}}{1+\sqrt{1-(x/2)^2}}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{2-\sqrt{4-x^2}}{2+\sqrt{4-x^2}}\right| + C.$$

故原不定积分为

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2-\sqrt{4-x^2}}{2+\sqrt{4-x^2}}\right| + C.$$

解法二：令 $u=\sqrt{4-x^2}$，则 $u^2=4-x^2$，$2udu=-2xdx$. 于是

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}=\int\frac{xdx}{x^2\sqrt{4-x^2}}=-\int\frac{udu}{(4-u^2)u}$$

$$=\int\frac{du}{u^2-4}=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{u-2}-\frac{1}{u+2}\right)du$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{u-2}{u+2}\right|+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{4-x^2}-2}{\sqrt{4-x^2}+2}\right|+C.$$

注：虽然两种解法所得到的结果看上去不同，但不难验证它们仅相差一个常数.

例三: 求不定积分

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2}, \quad a>0.$$

解: 作变换 $x = au$, 则

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \int \frac{adu}{a^2+a^2u^2} = \frac{1}{a}\int \frac{du}{1+u^2}$$

$$= \frac{1}{a}\arctan u + C = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C.$$

解答完毕.

例四: 设 a, b 为两个非零常数, 求不定积分

$$\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}.$$

解:

$$\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{a^2\tan^2 x + b^2},$$

$$= \frac{1}{b^2}\int \frac{d\tan x}{(a/b)^2\tan^2 x + 1} = \frac{1}{ab}\int \frac{d\frac{a}{b}\tan x}{1 + (\frac{a}{b})^2\tan^2 x},$$

$$= \frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{a}{b}\tan x\right) + C.$$

解答完毕.

例五: 求不定积分

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx, \quad |x| < a, a > 0.$$

解: 作变换 $x = a\sin t$, $|t| < \frac{\pi}{2}$, $a\sin t : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to (-a, a)$. 于是

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t} \cdot (a\sin t)' dt$$

$$= a^2 \int \cos t \cdot \cos t dt = a^2 \int \cos^2 t dt$$

$$= \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos 2t) dt = \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{1}{2}\sin 2t \right) + C$$

$$= \frac{a^2}{2} (t + \sin t \cos t) + C.$$

函数 $x = a\sin t$ 的反函数为 $t = t(x) = \arcsin\frac{x}{a}$，

$$\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-(x/a)^2} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

于是

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{a^2}{2}(t+\sin t\cos t)+C$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{a}\frac{1}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)+C$$

$$= \frac{1}{2}\left(a^2\arcsin\frac{x}{a}+x\sqrt{a^2-x^2}\right)+C$$

$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

解答完毕.

注记

注：求不定积分有时不容易，但验证计算不定积分的计算结果却是很简单的，只需对计算结果求导，并观察求导结果是否为被积函数．因此同学们应该养成一个好习惯，即每次计算不定积分完后，都应验证计算结果．例如我们来验证刚才的计算结果

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

验证

$$\left(\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2}\right)'$$

$$= \frac{a^2}{2}\frac{1}{\sqrt{1 - (x/a)^2}}\frac{1}{a} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{x}{2}\frac{1}{2}\frac{-2x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

验证，续

$$= \frac{a^2}{2}\frac{1}{\sqrt{1-(x/a)^2}}\frac{1}{a} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{x}{2}\frac{1}{2}\frac{-2x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$= \frac{a^2}{2\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2} - \frac{x^2}{2\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2-x^2}.$$

由此可见计算结果正确.

两种换元法有时都管用

例如对于积分

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$$

用第一换元法:

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = 2\int \sin\sqrt{x}(\sqrt{x})'dx = 2\int \sin\sqrt{x}d\sqrt{x} = -2\cos\sqrt{x} + C.$$

用第二换元法: 作变换 $x = t^2$, 则

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{\sin t}{t}2tdt = 2\int \sin tdt = -2\cos t + C = -2\cos\sqrt{x} + C.$$

回忆求导的 Leibniz 法则 $(uv)' = u'v + uv'$, 由此得

$$\int (uv)'dx = \int u'vdx + \int uv'dx.$$

于是

$$uv = \int u'vdx + \int uv'dx.$$

因此如果两个不定积分 $\int u'vdx$ 和 $\int uv'dx$, 其中之一可以求出来的话, 那么就可以求出另一个. 不定积分 $\int u'vdx$ 和 $\int uv'dx$ 常写作

$$\int u'vdx = \int vdu, \quad \int uv'dx = \int udv.$$

例一:

$$\int xe^x dx = \int x de^x$$

$$= xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

注: 分部积分还有另一种可能

$$\int xe^x dx = \int e^x d(x^2/2) = e^x(x^2/2) - \int \frac{x^2}{2} de^x$$

$$= e^x(x^2/2) - \int \frac{x^2}{2} e^x dx.$$

显然这个尝试不可取.

例二:

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int x d\ln x = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$= x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$$

注: 之前曾指出函数 $\ln(1+x)$ 有原函数 $(1+x)\ln(1+x)-(x+1)$. 见 Nov 17 讲义第 43 页. 这个结论可由例二立刻得到: 在例二中，用 $1+x$ 代替 x 即得 $\int \ln(1+x)dx = (1+x)\ln(1+x)-(x+1)+C$. 结论得证.

例三:

$$\int x\cos x dx = \int x d\sin x$$

$$= x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C.$$

例四: 求不定积分 $\int e^x \cos x dx$ 和 $\int e^x \sin x dx$.

解法一: 两次分部积分得

$$\int e^x \cos x dx = \int e^x d\sin x = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$$

$$= e^x \sin x + \int e^x d\cos x = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx.$$

将上式最后一项移到左边得

$$2\int e^x \cos x dx = e^x \sin x + e^x \cos x$$

$$\Rightarrow \quad \int e^x \cos x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + c_1.$$

完全类似地我们可以得到

$$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + c_2.$$

解法二：对积分 $\int e^x \cos x dx$ 和 $\int e^x \sin x dx$ 分别作一次分部积分即得

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx;$$

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx.$$

记 $C = \int e^x \cos x dx$，$S = \int e^x \sin x dx$，则

$$\begin{cases} C = e^x \sin x - S \\ S = -e^x \cos x + C \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} C + S = e^x \sin x \\ -C + S = -e^x \cos x. \end{cases}$$

由此可解得

$$\int e^x \cos x dx = C = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + c_1,$$

$$\int e^x \sin x dx = S = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + c_2.$$

解法三：利用 Euler 公式 $e^{x+ix} = e^x(\cos x + i\sin x)$，计算上述两个不定积分：

$$\int e^{(x+ix)}dx = \int e^{x(1+i)}dx = \frac{1}{1+i}e^{x(1+i)} + c$$

$$= \frac{1-i}{1+1}e^x(\cos x + i\sin x) + c_1 + ic_2$$

$$= \frac{e^x}{2}\left[(\cos x + \sin x) + i(\sin x - \cos x)\right] + c_1 + ic_2,$$

其中 $c = c_1 + ic_2$，$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. 此即

$$\int e^{(x+ix)}dx = \int e^x \cos x dx + i\int e^x \sin x dx$$

$$= \frac{e^x}{2}\left[(\cos x + \sin x) + i(\sin x - \cos x)\right] + c_1 + ic_2.$$

上述等式意味着两边的实虚部分别相等，即

$$\int e^x \cos x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + c_1,$$

$$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + c_2.$$

解答完毕.

例五:

$$\int x^2e^x dx = \int x^2 de^x = x^2e^x - \int e^x dx^2$$

$$= x^2e^x - 2\int e^x x dx = x^2e^x - 2\int x de^x$$

$$= x^2e^x - 2\left(xe^x - \int e^x dx\right)$$

$$= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C.$$

例一：计算积分 $J_m = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^m}$，其中 $a > 0$，m 为正整数。

解：

$$J_m = \frac{x}{(x^2+a^2)^m} - \int x \left[\frac{1}{(x^2+a^2)^m}\right]' dx$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^m} + 2m \int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{m+1}} dx$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^m} + 2m \int \frac{x^2+a^2}{(x^2+a^2)^{m+1}} dx - 2ma^2 \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{m+1}}$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^m} + 2mJ_m - 2ma^2 J_{m+1},$$

即 $$J_m = \frac{x}{(x^2+a^2)^m} + 2mJ_m - 2ma^2 J_{m+1}.$$

例一，续

$$2ma^2 J_{m+1} = \frac{x}{(x^2+a^2)^m} + (2m-1)J_m$$

$$J_{m+1} = \frac{x}{2ma^2(x^2+a^2)^m} + \frac{2m-1}{2ma^2} J_m.$$

$$J_1 = \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

$$J_2 = \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^2} J_1$$

$$= \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^3}\arctan\frac{x}{a} + C.$$

解答完毕.

例二: 求积分 $J_n = \int \tan^n x dx$, 其中 n 为正整数.

解: 对于任意正整数 $n \geq 2$,

$$J_n = \int \tan^n x dx = \int \tan^{n-2} x \tan^2 x dx$$

$$= \int \tan^{n-2} x \left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \right) dx = \int \tan^{n-2} x \left(\frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \right) dx$$

$$= \int \tan^{n-2} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int \tan^{n-2} x dx$$

$$= \int \tan^{n-2} x d \tan x - J_{n-2} = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - J_{n-2}.$$

这样我们就得到递推关系式 $J_n = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - J_{n-2}$, $\forall n \geq 2$.

当 $n=1$ 时，

$$J_1=\int \tan x dx=\int \frac{\sin x dx}{\cos x}=-\ln|\cos x|+C.$$

当 $n=2$ 时，

$$J_2=\int \tan^2 x dx=\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx=\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx$$

$$=\int \frac{1}{\cos^2 x}dx-\int dx=\tan x-x+C.$$

解答完毕.

有理分式, 真分式, 假分式

Definition

定义: (i) 多项式的商, 即形如 $P(x)/Q(x)$ 的函数, 称为有理函数, 或有理分式, 其中 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 均为多项式.

(ii) 多项式 $P(x)$ 的次数记作 $\deg P(x)$. 例如 $\deg(1+x^3)=3$.

(iii) 有理分式 $P(x)/Q(x)$ 称为真(假)分式, 如果 $\deg P(x) < (\geq) \deg Q(x)$.

例如 $\frac{x^2+1}{x^3+2}$ 是真分式, 而 $\frac{x^4+2}{x^3+1}$ 是假分式.

Lemma

引理: 每个假分式均可表为一个多项式加上一个真分式.

引理的证明可以由如下例子得到. 例如有理分式 $\frac{x^4}{1+x^2}$ 是假分式. 可用辗转相除法, 将其化为一个多项式, 加上一个真分式:

$$\frac{x^4}{x^2+1}=\frac{x^4+x^2-x^2}{x^2+1}=x^2+\frac{-x^2}{x^2+1}$$

$$=x^2+\frac{-x^2-1+1}{x^2+1}=x^2-1+\frac{1}{x^2+1}.$$

Theorem

定理: 一个实系数多项式 $Q(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ 在实数域中有如下分解式

$$Q(x) = (x - d_1)^{n_1} \cdots (x - d_r)^{n_r} (x^2 + p_1x + q_1)^{m_1} \cdots (x^2 + p_sx + q_s)^{m_s},$$

其中 $d_1, \cdots, d_r$, $p_1, q_1, \cdots, p_s, q_s$ 均为实数, $p_1^2 - 4q_1 < 0$, $\cdots$, $p_s^2 - 4q_s < 0$, $n_1, \cdots, n_r$, $m_1, \cdots, m_s$ 均为正整数.

证明: 根据代数基本定理知, 多项式 $Q(x)$ 在复数域里有 n 个复根. 设在这 n 个复根中, 有 r 个互异的实数根 $d_1, \cdots, d_r$, 对应的重数为 $n_1, \cdots, n_r$, 以及 s 对互异的共轭复根 $c_1, \bar{c}_1 \cdots, c_s, \bar{c}_s$, 对应的重数为 $m_1, \cdots, m_s$, 则

$$n = n_1 + \cdots + n_r + 2(m_1 + \cdots + m_s).$$

于是多项式 $Q(x)$ 有如下分解式

$$Q(x)=(x-d_1)^{n_1}\cdots(x-d_r)^{n_r}[(x-c_1)(x-\bar{c}_1)]^{m_1}\cdots[(x-c_s)(x-\bar{c}_s]^{m_s}.$$

设 $c_1=a_1+ib_1, \cdots, c_s=a_s+ib_s$，则

$$(x-c_1)(x-\bar{c}_1)=[(x-a_1)+ib_1][(x-a_1)-ib_1]$$

$$=(x-a_1)^2+b_1^2=x^2-2a_1x+a_1^2+b_1^2=x^2+p_1x+q_1,$$

其中 $p_1=-2a_1$，$q_1=a_1^2+b_1^2$. 显然

$$p_1^2-4q_1=(-2a_1)^2-4(a_1^2+b_1^2)=-4b_1^2<0.$$

同理

$$(x-c_2)(x-\bar{c}_2)=x^2+p_2x+q_2,\cdots,(x-c_s)(x-\bar{c}_s)=x^2+p_sx+q_s,$$

其中 $p_2^2-4q_2=-4b_2^2<0, \cdots, p_s^2-4q_s=-4b_s^2<0.$

于是多项式 $Q(x)$ 可分解为

$$Q(x)=(x-d_1)^{n_1}\cdots(x-d_r)^{n_r}(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}\cdots(x^2+p_sx+p_s)^{m_s}.$$

定理得证. □

分式分解情形一

Theorem

定理一：设 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 为真分式，且 $Q(x)=(x-a)^kQ_1(x)$，其中 $Q_1(x)$ 为多项式且 $Q_1(a)\neq 0$，$k\geq 1$，则分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 有如下分解式

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{(x-a)^k}+\frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)}, \qquad (*)$$

其中 A 为实常数，$P_1(x)$ 为多项式，它们由 $P(x)$，$Q(x)$ 唯一确定，且分式 $\frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)}$ 为真分式.

证明：对任意常数 $A\in\mathbb{R}$，恒成立

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{(x-a)^k}+\frac{P(x)-AQ_1(x)}{(x-a)^kQ_1(x)}.$$

取 A 使 $P(a)-AQ_1(a)=0$，即取 $A=\frac{P(a)}{Q_1(a)}$，

可使得 $P(x) - AQ_1(x)$ 含有因子 $x - a$，即存在唯一多项式 $P_1(x)$，使得 $P(x) - AQ_1(x) = (x - a)P_1(x)$. 于是成立分解式 (*) 成立，即

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)}.$$

以下我们证明分式 $\frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)}$ 为真分式. 由于

$$\deg(P_1) = \deg(P - AQ_1) - 1 \le \max\{\deg(P), \deg(Q_1)\} - 1$$

$$\le \max\{\deg(P), \deg(Q) - k\} - 1,$$

并且 $\deg(P) < \deg(Q)$，$\deg(Q) - k < \deg(Q)$，故

$$\deg(P_1) < \deg(Q) - 1 = \deg[(x-a)^{k-1}Q_1].$$

这表明 $\frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)}$ 为真分式. 定理得证. □

情形一分解，续二

Corollary

推论：设 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 为真分式，且 $Q(x)=(x-a)^k Q_1(x)$，其中 $Q_1(x)$ 为多项式且 $Q_1(a)\neq 0$，$k\geq 1$，则分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 有如下分解式

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{(x-a)}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(x-a)^k}+\frac{P_k(x)}{Q_1(x)},$$

其中常数 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 为实常数，$P_k(x)$ 为多项式，它们由 $P(x)$，$Q(x)$ 唯一确定，且分式 $\frac{P_k(x)}{Q_1(x)}$ 为真分式.

证明：逐次利用定理一即可得到结论. □

例子

<u>例</u>: 考虑分式 $\frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}$. 显然分母有分解式 $x^3+4x=x(x^2+4)$. 由定理一知这个分式有如下分解

$$\frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}=\frac{A}{x}+\frac{P_1(x)}{x^2+4}, \qquad (*)$$

其中常数 A 和多项式 $P_1(x)$ 待定. 以 $x(x^2+4)$ 乘以等式 (*) 两边得

$$2x^2-x+4=A(x^2+4)+P_1(x)x. \qquad (**)$$

令 $x=0$ 得 $A=1$. 将式 (**) 右边的项 $A(x^2+4)=x^2+4$ 移到左边即可得 $2x^2-x+4-(x^2+4)=x^2-x=P_1(x)x$. 由此得 $P_1(x)=x-1$. 于是分解式 (*) 为

$$\frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}=\frac{1}{x}+\frac{x-1}{x^2+4}.$$

Theorem

定理二: 设 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 为真分式. 若 $Q(x)=(x^2+px+q)^kQ_1(x)$, 其中 $Q_1(x)$ 为多项式, $k\geq 1$, $p^2-4q<0$, 且 x^2+px+q 不整除 $Q_1(x)$, 则分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 有如下分解式

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}+\frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}Q_1(x)}, \qquad (*)$$

其中 A,B 均为实常数, $P_1(x)$ 为多项式, 它们由 $P(x)$, $Q(x)$ 唯一确定, 且分式 $\frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}Q_1(x)}$ 为真分式.

证明: 对任意常数 $A,B\in\mathbb{R}$, 恒成立

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}+\frac{P(x)-(Ax+B)Q_1(x)}{(x^2+px+q)^kQ_1(x)}.$$

可取常数 $A,B\in\mathbb{R}$, 使多项式 $P(x)-(Ax+B)Q_1(x)$ 含有因子 x^2+px+q.

情形二分解，续一

设 $x^2+px+q=(x-\alpha)^2+\beta^2$，其中 $\alpha=-\frac{p}{2}$，$\beta=\frac{1}{2}\sqrt{4q-p^2}>0$，即 x^2+px+q 有一对共轭复根 $\alpha\pm i\beta$. 取 $A,B\in\mathbb{R}$，使得

$$P(\alpha+i\beta)-\Big[A(\alpha+i\beta)+B\Big]Q_1(\alpha+i\beta)=0,$$

即

$$A(\alpha+i\beta)+B=\frac{P(\alpha+i\beta)}{Q_1(\alpha+i\beta)}.$$

具体说来，若设 $\frac{P(\alpha+i\beta)}{Q_1(\alpha+i\beta)}=K+iL$，则取 $A=\frac{L}{\beta}$，$B=\frac{K\beta-L\alpha}{\beta}$ 即可满足要求. 对这样的 A,B，可使得多项式 $P(x)-(Ax+B)Q_1(x)$ 含有因子 x^2+px+q，即存在多项式 $P_1(x)$，使得 $P(x)-(Ax+B)Q_1(x)=(x^2+px+q)P_1(x)$. 于是我们得到

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}+\frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}Q_1(x)}.$$

以下证明 $\frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}Q_1(x)}$ 是真分式. 由分解式 $P(x)-(Ax+B)Q_1(x)$ $=(x^2+px+q)P_1(x)$ 可知

$$\deg(P_1)=\deg[P-(Ax+b)Q_1]-2\le\max\{\deg(P),\deg(Q_1)+1\}-2$$

$$=\max\{\deg(P),\deg(Q)-2k+1\}-2<\deg(Q)-2$$

$$=\deg[(x^2+px+q)^{k-1}Q_1]$$

命题得证. □

Corollary

推论二：设 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 为真分式．若 $Q(x)=(x^2+px+q)^kQ_1(x)$，其中 $Q_1(x)$ 为多项式，$k\geq 1$，$p^2-4q<0$，且 x^2+px+q 不整除 $Q_1(x)$，则分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 有如下分解式

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1x+B_1}{(x^2+px+q)}+\frac{A_2x+B_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\frac{A_kx+B_k}{(x^2+px+q)^k}+\frac{P_k(x)}{Q_1(x)},$$

其中 $A_1,B_1,\cdots,A_k,B_k$ 均为实常数，$P_k(x)$ 为多项式，它们由 $P(x)$，$Q(x)$ 唯一确定，且分式 $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ 为真分式．

证明：逐次利用定理二即可得到结论． $\square$

例: 考虑分式 $\frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2}$. 根据定理一和定理二知这个分式有如下分解

$$\frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{(x^2+1)}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}, \qquad (*)$$

其中 A,B,C,D,E 为待定常数. 以 $x(x^2+1)^2$ 乘以等式 (*) 两边得

$$1-x+2x^2-x^3=A(x^2+1)^2+(Bx+C)(x^2+1)x+(Dx+E)x. \qquad (**)$$

令 $x=0$ 得 $A=1$. 将式 (**) 右边的项 $A(x^2+1)^2=(x^2+1)^2$ 移到左边得

$$1-x+2x^2-x^3-(x^2+1)^2=1-x+2x^2-x^3-x^4-2x^2-1$$

$$=-(x^4+x^3+x)=(Bx+C)(x^2+1)x+(Dx+E)x.$$

于上式约去因子 x 得

$$-(x^3+x^2+1)=(Bx+C)(x^2+1)+(Dx+E)$$

$$=Bx^3+Cx^2+(B+D)x+(C+E).$$

例子，续

比较系数得

$$B = -1$$

$$C = -1$$

$$B + D = 0$$

$$C + E = -1.$$

易解得 $D = 1$, $E = 0$. 于是分解式 (*) 为

$$\frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{x+1}{(x^2+1)} + \frac{x}{(x^2+1)^2}.$$

分解完毕.

<u>定理</u>: 设 P/Q 为真分式. 假设其分母有分解

$$Q(x) = (x-a)^{\alpha}\cdots(x-b)^{\beta}(x^2+px+q)^{\lambda}\cdots(x^2+rx+s)^{\mu},$$

其中 $a,\cdots,b,\ p,q,\cdots,\ r,s\in\mathbb{R},\ p^2-4q<0,\ \cdots,\ r^2-4s<0,\ \alpha,\cdots,\beta,$ $\lambda,\cdots,\mu$ 均为正整数, 则真分式 P/Q 有如下分解式 (称为最简分式)

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}+\frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha-1}}+\cdots+\frac{A_1}{x-a}+\cdots+\frac{B_\beta}{(x-b)^\beta}+\frac{B_{\beta-1}}{(x-b)^{\beta-1}}$$

$$+\cdots+\frac{B_1}{x-b}+\frac{K_\lambda x+L_\lambda}{(x^2+px+q)^\lambda}+\cdots+\frac{K_1x+L_1}{x^2+px+q}+\cdots$$

$$+\frac{M_\mu x+N_\mu}{(x^2+rx+s)^\mu}+\cdots+\frac{M_1x+N_1}{x^2+rx+s},$$

其中 $A_i,\cdots,B_i,K_i,L_i,\cdots,M_i,N_i$ 均为实数. 进一步上述分解式是唯一的. (定理证明: 由上述的推论一和推论二立得结论).

例一: 化分式 $\frac{x+1}{x^2-4x+3}$ 为最简分式.

解: 注意分母有分解式 $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$. 根据上述分式分解定理知分式可分解为

$$\frac{x+1}{x^2-4x+3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-3},$$

其中 A, B 为待定常数. 于上式两边同乘以分母得

$$x+1=A(x-3)+B(x-1).$$

确定常数 A, B 有两种方法. 方法一: 分别用 $x=1$ 和 $x=3$ 代入上式即得 $2=-2A$ 和 $4=2B$. 由此得 $A=-1$, $B=2$.

例一，续

方法二：比较等式 $x+1=A(x-3)+B(x-1)$ 常数项和一次项的系数得 $A+B=1$ 和 $-3A-B=1$. 解之得同样的结果 $A=-1, B=2$. 于是求得如下分式分解

$$\frac{x+1}{x^2-4x+3}=\frac{-1}{x-1}+\frac{2}{x-3}.$$

注：通常使用方法一比较简单快捷.

例二: 化分式 $\frac{x}{x^3+x^2+3x+3}$ 为最简分式.

解: 先将分母作分解 $x^3+x^2+3x+3=(x+1)(x^2+3)$. 依据分式分解定理知上述分式可分解成如下形式

$$\frac{x}{x^3+x^2+3x+3}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+3}.$$

去分母得 $x=A(x^2+3)+(Bx+C)(x+1)$. 令 $x=-1$ 得 $-1=4A$, 即 $A=\frac{-1}{4}$. 将项 $A(x^2+3)$ 移至等式左边得

$$x+\frac{1}{4}(x^2+3)=\frac{1}{4}x^2+x+\frac{3}{4}=(Bx+C)(x+1)=Bx^2+(B+C)x+C.$$

由此得 $B=\frac{1}{4}$, $C=\frac{3}{4}$. 于是所求分式的分解为

$$\frac{x}{x^3+x^2+3x+3}=\frac{-1}{4}\frac{1}{x+1}+\frac{1}{4}\frac{x+3}{x^2+3}. \quad \#$$

例三：将分式 $\frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}$ 化为最简分式.

解：显然分母有分解 $x^4-3x^3+3x^2-x=x(x-1)^3$. 根据分式分解定理知上述分式有如下分解

$$\frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)^3}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{x-1},$$

其中 A,B,C,D 为待定系数. 去分母后得

$$x^3+1=A(x-1)^3+Bx+Cx(x-1)+Dx(x-1)^2.$$

为确定这些系数，令 $x=0$ 得 $A=-1$. 于是

$$x^3+1+(x-1)^3=2x^3-3x^2+3x=Bx+Cx(x-1)+Dx(x-1)^2.$$

约去因子 x 得 $2x^2-3x+3=B+C(x-1)+D(x-1)^2$.

令 $x = 1$ 即得 $B = 2$. 于是

$$2x^2 - 3x + 1 = C(x-1) + D(x-1)^2.$$

上式左边可因式分解为 $(2x-1)(x-1)$. 故约去因子 $x-1$ 得

$$2x - 1 = C + D(x-1).$$

再令 $x = 1$ 得 $C = 1$. 进而得 $2x - 2 = D(x-1)$. 约去因子 $x-1$ 最后确定 $D = 2$. 综上即得分式 $\frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}$ 的最简分式为

$$\frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x} = \frac{-1}{x} + \frac{2}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1}.$$

解答完毕.

有理分式的不定积分

根据分式分解定理知，真分式的不定积分可转化为如下两类简单分式

$$\frac{A}{(x-a)^k}, \quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k}$$

的不定积分，其中 $p^2-4q<0$. 第一类分式的不定积分可立刻写出

$$\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C,$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)^k} = \frac{(x-a)^{1-k}}{1-k} + C, \quad k \geq 2.$$

考虑第二类分式的不定积分，即

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx,$$

其中 $p^2-4q<0$. 经过配方得 $x^2+px+q=(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}$. 令 $u=x+\frac{p}{2}$, $a^2=q-\frac{p^2}{4}>0$. 于是

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx = A\int \frac{udu}{(a^2+u^2)^k}+B_1\int \frac{du}{(a^2+u^2)^k}$$

其中 $B_1=B-\frac{Ap}{2}$. 上式第一个积分可简单计算. 第二个不定积分可用递推方法求得.

例一：计算积分

$$\int \frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}dx.$$

解：之前已分解被积有理分式如下

$$\frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}=\frac{-1}{x}+\frac{2}{(x-1)^3}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{x-1}.$$

于是

$$\int \frac{(x^3+1)dx}{x^4-3x^3+3x^2-x}$$

$$=-\int \frac{dx}{x}+2\int \frac{dx}{(x-1)^3}+\int \frac{dx}{(x-1)^2}+2\int \frac{dx}{x-1}$$

$$=-\ln|x|-\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}+\ln(x-1)^2+C. \quad \#$$

例二: 求积分

$$J = \int \frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2} dx.$$

解: 分母已分解妥. 故被积分式有如下形式的最简分式

$$\frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx + C}{x^2+1} + \frac{Dx + E}{(x^2+1)^2},$$

其中 A, B, C, D, E 为待定常数. 去分母得

$$2x^2 + 2x + 13 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x-2)(x^2+1) + (Dx+E)(x-2).$$

令 $x = 2$ 得 $25 = 25A$. 由此得 $A = 1$. 再将项 $A(x^2+1)^2$ 移至左边得

例二，续一

$$2x^2+2x+13-(x^2+1)^2=-x^4+2x+12$$

$$=(Bx+C)(x-2)(x^2+1)+(Dx+E)(x-2).$$

由上式可知左端含有因子 $x-2$. 仍由待定系数法可得

$$-x^4+2x+12=(x-2)(-x^3-2x^2-4x-6)$$

$$=(Bx+C)(x-2)(x^2+1)+(Dx+E)(x-2).$$

消去因子 $x-2$ 得

$$-x^3-2x^2-4x-6=(Bx+C)(x^2+1)+(Dx+E)$$

$$=Bx^3+Cx^2+(B+D)x+(C+E).$$

比较上式两边系数得 $B=-1$, $C=-2$, $B+D=-4$, $C+E=-6$.

由此解得 $D=-3$, $E=-4$. 于是得到如下分解

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}=\frac{1}{x-2}-\frac{x+2}{x^2+1}-\frac{3x+4}{(x^2+1)^2}.$$

由此得

$$\int\frac{(2x^2+2x+13)dx}{(x-2)(x^2+1)^2}$$

$$=\int\frac{dx}{x-2}-\int\frac{(x+2)dx}{x^2+1}-\int\frac{(3x+4)dx}{(x^2+1)^2}$$

$$=\ln|x-2|-\frac{1}{2}\int\frac{d(1+x^2)}{1+x^2}-2\int\frac{dx}{1+x^2}-\frac{3}{2}\int\frac{d(1+x^2)}{(1+x^2)^2}-4\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

$$=\ln|x-2|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-2\arctan x+\frac{3}{2(1+x^2)}-4\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}.$$

已求得关于积分 $J_m=\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^m}$ 的递推关系式

$$J_{m+1}=\frac{x}{2ma^2(x^2+a^2)^m}+\frac{2m-1}{2ma^2}J_m.$$

故 $$\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}=\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\arctan x+C.$$

于是所求不定积分为

$$\int\frac{(2x^2+2x+13)dx}{(x-2)(x^2+1)^2}=\frac{1}{2}\ln\frac{(x-2)^2}{1+x^2}+\frac{3-4x}{2(1+x^2)}-4\arctan x+C.$$

解答完毕.

总结: 任何有理函数的不定积分均可积得出来, 并且可以表示为若干个有理函数, 对数函数, 以及反正切函数之和.

Nov 26 作业，共七大题

习题一：课本第155-156页习题5.4题1： 思考下列问题. 如果答案是肯定的，请简要说明；如果答案是否定的，请举出反例.

(1) 若函数 $f(x)$ 在区间 J 上可积，问函数 $f(x)$ 在 J 上是否必存在原函数?

(2) 若函数 $f(x)$ 在区间 J 上仅有第一类间断点，问函数 $f(x)$ 在 J 上是否必存在原函数?

(3) 若函数 $f(x)$ 在区间 J 上有原函数，问函数 $f(x)$ 在区间 J 上是否必可积?

习题二：课本第155-156页习题5.4题2： 考查下列函数在实轴 $\mathbb{R}$ 上是否有原函数. 若有，请求出原函数；若没有，请说明理由.

$$(1)\quad f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\le 0, \\ \cos x, & x>0; \end{cases}\qquad (2)\quad f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\le 0, \\ \cos x+\frac{\pi}{4}, & x>0; \end{cases}$$

$$(3)\quad f(x)=\begin{cases} -\sin x, & x\le 0, \\ \frac{1}{\sqrt{x}}, & x>0; \end{cases}\qquad (4)\quad f(x)=\begin{cases} 1, & x\le 0, \\ x, & x>0. \end{cases}$$

习题三：课本第155-156页习题5.4题3：求下列不定积分

$$(1)\ \int (x-x^{-2})\sqrt{x\sqrt{x}}dx;\quad (3)\ \int a^x e^x dx;\quad (5)\ \int (2\cosh x-3\sinh x)dx;$$

$$(7)\ \int \left(\frac{4}{\sqrt{1-x^2}}+\sin x\right)dx;\quad (9)\ \int |(x-1)(3x-2)|dx.$$

习题四：课本第155-156页习题5.4题4：求下列不定积分

$$(1)\ \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx;\quad (2)\ \int \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}};\quad (3)\ \int \frac{dx}{(1+x^2)\arctan x};$$

$$(4)\ \int \frac{1}{x^2}\sinh\frac{1}{x}dx;\quad (5)\ \int \tanh x dx;\quad (6)\ \int x\sec^2(1-x^2)dx;$$

$$(7)\ \int \frac{x^2dx}{1+x^6};\quad (8)\ \int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{1+\tan x}}dx;\quad (9)\ \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\sin\sqrt{1+x^2}dx.$$

作业，续二

习题五：课本第157页习题5.4题5：求下列不定积分

$$(1)\int\frac{dx}{3-x^2};\quad (2)\int\frac{xdx}{3-x^2};\quad (3)\int\frac{xdx}{x^2+x-6};$$

$$(4)\int\frac{x-1}{x^2-4x+8}dx;\quad (5)\int\frac{2x+1}{\sqrt{4x-x^2}}dx;\quad (6)\int\frac{x+1}{\sqrt{-x^2+2x+3}}dx;$$

习题六：课本第157页习题5.4题6：求下列不定积分

$$(1)\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx;\quad (2)\int\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx;\quad (3)\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}};$$

$$(4)\int\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx;\ (5)\int\frac{2x-1}{\sqrt{4x^2+4x+5}}dx;\ (6)\int\frac{x^2}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx.$$

习题七：课本第157页习题5.4题7：求下列不定积分

$$(1)\ \int x\cos(2x)dx;\quad (2)\ \int xe^{-3x}dx;\quad (3)\ \int x^2\sin(2x)dx;$$

$$(4)\ \int x\arctan x dx;\quad (5)\ \int x\ln(x-1)dx;\quad (6)\ \int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx.$$