

习题课材料 (二)

注：本次习题课包含内容：矩阵运算、逆矩阵、分块矩阵等

注：带 \heartsuit 号的习题有一定的难度、比较耗时，请量力为之。

本节考虑的矩阵均为实矩阵。

习题 1. 下列命题是否正确？

1. 若 A, B 都是 n 阶方阵，则 $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.
2. 若矩阵 A, B, C 满足 $A \neq 0, AB = AC$ ，则 $B = C$.
3. 若矩阵 A 满足 $A^2 = I$ ，则 $A = \pm I$.
4. 若 n 阶方阵 A 的行列式 $|A| = 0$ ，则 $A = 0$.
5. 若可逆矩阵 A 经过初等行变换可以化为方阵 B ，则 $A^{-1} = B^{-1}$.
6. 若 n 阶方阵 A, B, C 满足 $ABC = I$ ，则

$$BCA = I, \quad A^{-1}C^{-1}B^{-1} = I, \quad C^T B^T A^T = I.$$

7. 若 A 为 n 阶方阵， k 为任意常数，则 $|kA| = k|A|$.
8. 若 A 可逆，且 $|A+AB| = 0$ ，则 $|B+I| = 0$.
9. 若矩阵 A 满足 $A^2 = A$ ， $|A-I| \neq 0$ ，则 $A = 0$.
10. 对方阵进行初等行变换，不改变方阵的行列式。

习题 2. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵， B 是 $n \times m$ 矩阵。证明： $I_m - AB$ 可逆当且仅当 $I_n - BA$ 可逆。

习题 3. 已知 n 阶方阵 A 满足方程： $A^2 + 3A - 4I = 0$ ，其中 I 是单位矩阵。

1. 求 $(A + 3I)^{-1}$ ；
2. 求 $(A + 5I)^{-1}$ ；

3. 问当 m 满足什么条件时, $(A + mI)$ 必可逆.

习题 4. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, 求与 A 可交换的矩阵。

习题 5. 设 $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$, k 是正整数, 求 A^k .

习题 6 (\heartsuit). 证明, 如果 n 阶方阵 A 对任意 n 维列向量 x , 都存在依赖于 x 的常数 $c(x)$, 满足 $Ax = c(x)x$, 则存在常数 c , 使得 $A = cI_n$.

习题 7 (\heartsuit). 1. $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, 如果对任意的 $x \in \mathbb{R}^n$, 都有 $Ax = \mathbf{0}$, 证明: $A = O$.

2. 如果对任意的 $b \in \mathbb{R}^m$, 线性方程组 $Ax = b$ 和 $Cx = b$ 都有相同的解集, 证明 $A = C$.

习题 8. 已知列向量 $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, 行向量 $\beta = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1. 试计算 $A = \alpha\beta$ 以及 $B = \beta\alpha$;

2. 求 A^2, A^3 , 从中你能归纳出什么结论? 能否求出 A^{2025} ?

习题 9 (矩阵的迹). 方阵 A 的对角线元素的和称为它的迹, 记作 $\text{trace}(A)$. 验证下列性质.

1. 对任意同阶方阵 A, B , $\text{trace}(A + B) = \text{trace}(A) + \text{trace}(B)$.

2. 对任意方阵 A 与实数 k , $\text{trace}(kA) = k\text{trace}(A)$.

3. 对 m 阶单位阵 I_m , $\text{trace}(I_m) = m$.

4. 对任意方阵 A , $\text{trace}(A) = \text{trace}(A^T)$.

5. 设 $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$, 则 $\text{trace}(A^T B) = \sum_{i=1}^4 a_i b_i$. 如果 A, B 是 m 阶方阵呢?

6. 设 A 是实对称矩阵, 如果 $\text{trace}(A^2) = 0$, 则 $A = O$.

7. 设 v, w 是 m 维向量, 则 $\text{trace}(v^T w) = \text{trace}(w v^T)$.

8. 设 A, B 分别是 $m \times n, n \times m$ 矩阵, 则 $\text{trace}(AB) = \text{trace}(BA)$.

9. 设 A, B 是任意 m 阶方阵, 则 $AB - BA \neq I_m$.

习题 10 (♡). 1. 设 A 为 n 阶方阵, 求证: $A+A^T, AA^T, A^TA$ 都是对称矩阵, 而 $A-A^T$ 是反对称矩阵.

2. 求证: 任意方阵 A 都可唯一地表为 $A=B+C$, 其中 B 是对称矩阵, C 是反对称矩阵.
3. 求证: n 阶方阵 A 是反对称矩阵当且仅当对任意的 n 维列向量 x , 都有 $x^TAx=0$.
4. 求证: 设 A, B 是 n 阶对称矩阵, 则 $A=B$ 当且仅当对任意 n 维列向量 x , 都有 $x^TAx=x^TBx$.
5. 给定 n 阶实反对称矩阵 A , 求证 I_n-A 可逆.

习题 11 (♡). 1. 设 A 为 n 阶方阵, 若对任意 $1 \leq i \leq n$, 都有

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|,$$

则称 A 是对角占优矩阵. 证明: 对角占优矩阵都是可逆矩阵.

2. 令 $X_\varepsilon = \begin{bmatrix} A & \varepsilon B_1 \\ B_2 & C \end{bmatrix}$, 其中 $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, C 为 n 阶对角占优方阵, B_1 为任意给定的 $3 \times n$ 矩阵, B_2 为任意给定的 $n \times 3$ 矩阵. 证明:

- (a) A 可逆.
- (b) 存在常数 $\delta > 0$ (依赖于 C, B_1, B_2), 使得对任意满足条件 $|\varepsilon| \leq \delta$ 的 ε , X_ε 均可逆.