习题课材料（一）

注：本次习题课内容为线性方程组与行列式.

注：带 ♡ 号的习题有一定的难度、比较耗时, 请量力为之.

本节考虑的矩阵均为实矩阵.

习题 1. *复习总结 Gauss 消元法的步骤；说明如何利用系数矩阵和增广矩阵来判断解的情况.*

解 复习三种初等行变换：倍加、倍乘和对换，以及它们的作用. 由于倍加和倍乘都涉及倍数，区分一下对于倍数的要求：倍加中的倍数可以是 0，而倍乘中的倍数非零. 初等行变换最基本的原则是保持方程组的解不改变，既不增加也不减少；或者说变换前后的方程组要能互相转化.

方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的增广矩阵是 $\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{bmatrix}$，对它做初等行变换，转化成行阶梯形矩阵（只是判断解的情况，不需要最简行阶梯形，行阶梯形即可）. 最终会出现两种情况：

- 最后一列是主元列，这意味着最后一行所代表的方程等价于 $0=1$，此时方程组无解.
- 最后一列不是主元列，此时方程组有解. 有解时，数一下非零行的个数（等价于主元个数），若非零行个数等于未知数个数，则有唯一解；若非零行个数小于未知数个数，则无解.

□

习题 2. *设非齐次方程组：*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = b_1 \\ -x_1 + x_3 = b_2 \\ -x_2 - x_3 = b_3 \end{cases}$$

证明：

1. *方程组有解当且仅当* $b_1+b_2+b_3=0$.
2. *其对应齐次线性方程组的解集是*

$$\left\{ \begin{bmatrix} k \\ -k \\ k \end{bmatrix} : k \in \mathbb{R} \right\}.$$

3. 当非齐次方程组有解时，设 $\begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \end{bmatrix}$ 是一个解，则解集是

$$\left\{ \begin{bmatrix} k+x_1^0 \\ -k+x_2^0 \\ k+x_3^0 \end{bmatrix} : k \in \mathbb{R} \right\}.$$

解　1. 方程组有解，当且仅当系数矩阵和增广矩阵主元个数相等. 我们对增广矩阵作初等行变换：

$$\left[\begin{array}{rrr|l} 1 & 1 & 0 & b_1 \\ -1 & 0 & 1 & b_2 \\ 0 & -1 & -1 & b_3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|l} 1 & 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & b_1+b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_1+b_2+b_3 \end{array}\right]$$

系数矩阵主元个数为 2，增广矩阵主元个数等于 2 当且仅当 $b_1+b_2+b_3=0$.

2. 对应的齐次方程组是

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = b_1 & ① \\ -x_1 + x_3 = b_2 & ② \\ -x_2 - x_3 = b_3 & ③ \end{cases}$$

易知对任意 $k \in \mathbb{R}$，$\begin{bmatrix} k \\ -k \\ k \end{bmatrix}$ 都满足齐次方程组. 另一方面，任取 x_3 的值 k，由②式解得 $x_1 = k$，由③（或者①）式，都解得 $x_2 = -k$，因此对应的齐次方程组的解集是

$$\left\{ \begin{bmatrix} k \\ -k \\ k \end{bmatrix} : k \in \mathbb{R} \right\}.$$

3. 设 $\begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \end{bmatrix}$ 是方程组的一个解. 首先，对任意 k，直接验证 $\begin{bmatrix} k+x_1^0 \\ -k+x_2^0 \\ k+x_3^0 \end{bmatrix}$ 也是方程组的解；其

次，若 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ 也是方程组的解，那么 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \end{bmatrix}$ 是齐次方程组的解，因此存在 k 使得

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ k \\ k \end{bmatrix}, \text{即} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^0+k \\ x_2^0+k \\ x_3^0+k \end{bmatrix}.$$

因此

$$\left\{ \begin{bmatrix} k+x_1^0 \\ -k+x_2^0 \\ k+x_3^0 \end{bmatrix} : k \in \mathbb{R} \right\}.$$

□

注释 1. 要证明解集是 $\left\{ \begin{bmatrix} k+x_1^0 \\ -k+x_2^0 \\ k+x_3^0 \end{bmatrix} : k \in \mathbb{R} \right\}$，我们需要证明两方面：一方面是包含，另一方面是被包含. 上面的论述中，“首先”是在论证包含，“其次”是在论证被包含.

强调证明的规范性和严谨性. 我们要证明两个集合 $S_1 = S_2$，必须说明 $S_1 \subseteq S_2$ 且 $S_2 \subseteq S_1$. 如果其中有平凡的包含关系，可以不证明，但是要指出来.

习题 3. 考虑线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + (\lambda+2)x_3 = 3, \\ x_1 + \lambda x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

λ 取何值时, 该方程组无解? λ 取何值时, 该方程组有唯一解? λ 取何值时, 该方程组有无穷多解? 证明你的论断.

解　依然是对增广矩阵作初等行变换

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & \lambda+2 & 3 \\ 1 & \lambda & -2 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda-2 & -3 & -1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda & -1 \\ 0 & 0 & \lambda^2-2\lambda-3 & \lambda-3 \end{array}\right]$$

系数矩阵主元个数为 2 当且仅当 $\lambda^2-2\lambda-3=0$，即当且仅当 $\lambda=3$ 或 $\lambda=-1$，即

- $\lambda=3$ 或 $\lambda=-1$ 时，系数矩阵主元个数等于 2；
- $\lambda \neq 3$ 且 $\lambda \neq -1$ 时，系数矩阵主元个数等于 3.

增广矩阵的主元个数等于 2 当且仅当 $\lambda^2-2\lambda-3=0$ 且 $\lambda-3=0$，即当且仅当 $\lambda=3$，即

- $\lambda=3$，增广矩阵的主元个数等于 2；
- $\lambda\neq 3$ 时，系数矩阵的主元个数等于 3.

当 $\lambda\neq -1$ 时，

- 如果 $\lambda=3$，则系数矩阵和增广矩阵的主元个数都等于 2，此时方程组有无穷多解；
- 如果 $\lambda\neq 3$，则系数矩阵和增广矩阵的主元个数都等于 3，此时方程组有唯一解.

而当 $\lambda=-1$ 时，系数矩阵的主元个数等于 2，小于增广矩阵的主元个数 3，此时方程组无解. □

习题 4. 求三阶方阵 $A\in M_3(\mathbb{R})$, 使得方程组 $A\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}2\\4\\2\end{bmatrix}$ 的解集是 $\left\{\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}: c,d\in\mathbb{R}\right\}$.

解　设 $A=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3\end{bmatrix}$. 根据解集行形式判断：

- $A\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\4\\2\end{bmatrix}$，因此 $2\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}2\\4\\2\end{bmatrix}$，即 $\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$.
- $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ 是齐次方程组 $A\boldsymbol{x}=0$ 的解，因此

$$A\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=0,$$

求得 $\boldsymbol{a}_2=-\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}-1\\-2\\-1\end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_3=0.$

所以

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\2 & -2 & 0\\1 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

□

习题 5. 设齐次线性方程组

$$\begin{cases} ax_1+bx_2+bx_3+\cdots+bx_n &= 0 \\ bx_1+ax_2+bx_3+\cdots+bx_n &= 0 \\ \cdots \\ bx_1+bx_2+bx_3+\cdots+ax_n &= 0 \end{cases}$$

其中 $ab\neq 0$，$n\geq 2$. 试讨论 a,b 取何值时，方程组仅有零解，有无穷多解？在有无穷多解时，写出全部解.

解　对系数矩阵做初等行变换：

$$\begin{bmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & & & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} a+(n-1)b & a+(n-1)b & a+(n-1)b & \cdots & a+(n-1)b \\ b & a & b & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & & & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{bmatrix}$$

如果 $a+(n-1)b\neq 0$，则对第一行作倍乘：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b & a & b & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & & & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{bmatrix}$$

- 当 $a-b\neq 0$ 时，系数矩阵的主元个数等于 n，方程组仅有零解；
- 当 $a-b=0$ 时，方程组主元个数为 1，有无穷多解，解集为

$$\left\{ c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + c_{n-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix} : c_1,c_2,\cdots,c_{n-1}\in\mathbb{R} \right\}.$$

如果 $a+(n-1)b=0$，方程组始终有无穷多解. 由于 $b\neq 0$，作初等行变换，系数矩阵变成：

$$\begin{bmatrix} 1 & -(n-1) & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & -(n-1) & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & & & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -(n-1) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -(n-1) & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & -(n-1) & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & & & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -(n-1) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -(n-1) & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & n & -n & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & & \cdots \\ 0 & n & 0 & \cdots & -n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -(n-1) & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

因此方程组的解集为 $\left\{ c\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} : c\in\mathbb{R} \right\}$. □

习题 6. 在平面内三条直线分别为：

$$l_1 : x+y=1; \qquad l_2 : 3x-y=1; \qquad l_3 : 4x-10y=-3.$$

(1) 上述三条直线有没有公共点？有多少个公共点？

(2) 改变直线 l_3 的方程中某一个系数，得到直线 l_4 的方程，使得 l_1,l_2,l_4 没有公共点.

解　1. 要求公共点，只需要求解联立方程组：

$$\begin{cases} x+y &= & 1 \\ 3x-y & =1 \\ 4x-10y &= & -3 \end{cases}$$

方程组有唯一解：$x=y=\frac{1}{2}$，因此三条直线有唯一的公共点 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

2. 要使新的三条直线没有公共点，只需要使方程组无解. 无数种修改的方法，比如说，把 4 改成任意其它数字均可.

□

习题 7. 计算如下两个矩阵的行列式：

$$\begin{bmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

解

- 对于第一个矩阵，每次都把 $\begin{bmatrix} a_n & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ 和它上面的行进行对换，就能把矩阵变成对角矩阵. 它需要和其余 $n-1$ 行每一个对换一次，因此共需要 $(n-1)$ 次对换. 每次对换乘以 -1，因此原矩阵行列式为

$$(-1)^{n-1}a_1a_2\cdots a_n.$$

- 对于第二个矩阵，将第 1 行和第 n 对换，第 2 行和第 $n-1$ 行对换，总之都是第 r 行和第 $n+1-r$ 行对换. 需要注意的是中间的行，如果 n 是偶数（设为 $2k$），那么最后一次对换是第 k 行和第 $k+1$ 行；如果 n 是奇数（设为 $2k+1$），那么最中间的行第 $k+1$ 行保持不动，最后一次行对换是第 k 行和第 $k+2$ 行. 总而言之，当 $n=2k$ 或者 $2k+1$ 时，都需要进行 k 次行对换转化成对角矩阵，因此原矩阵行列式为

$$\begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}}a_1a_2\cdots a_n & n\text{是偶数} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}a_1a_2\cdots a_n & n\text{是奇数} \end{cases}$$

□

习题 8. 计算下述行列式

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 98 & 101 & 97 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 98 & 101 & 97 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 100 & 100 & 100 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 100 \begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

到这个地方，无论是用大公式展开成 6 项还是继续做初等行列变换都无关紧要了. 总而言之

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 98 & 101 & 97 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -500.$$

□

习题 9. 已知

$$\begin{vmatrix} \lambda+1 & 2 & 2 \\ -2 & \lambda+4 & -5 \\ 2 & -2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = 0,$$

求 λ 的所有取值。

解

$$\begin{vmatrix} \lambda+1 & 2 & 2 \\ -2 & \lambda+4 & -5 \\ 2 & -2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda+4)(\lambda+1) - 2\cdot 5\cdot 2 + 2\cdot 2\cdot 2 - 4(\lambda+4) - 10(\lambda+1) + 4(\lambda+1).$$

展开计算可知行列式为 $\lambda^3+6\lambda^2-\lambda-30$，因此要解的方程为 $\lambda^3+6\lambda^2-\lambda-30=0$.

因此 λ 的所有取值是：2、-3 和 -5. □

习题 10. 设 x_1,x_2,x_3 是方程 $x^3+px+q=0$ 的三个根，求行列式

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix}$$

解 先用三阶行列式的完全展开式可知：

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix} = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3$$

根据条件：x_1,x_2,x_3 是方程 $x^3+px+q=0$ 的根，由韦达定理：

$$x_1+x_2+x_3=0,\quad x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=p,\quad x_1x_2x_3=-q.$$

所以

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3-3x_1x_2x_3=-(px_1+q)-(px_2+q)-(px_3+q)+3q=0;$$

或者

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3-3x_1x_2x_3=(x_1+x_2+x_3)(x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2-x_2x_3-x_3x_1)=0.$$

□

习题 11. 求行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 \\ 0 & a_{52} & a_{53} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 \\ 0 & a_{52} & a_{53} & 0 & 0 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{31} & a_{34} & a_{35} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{24} & a_{25} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 & a_{42} & a_{43} \\ 0 & 0 & 0 & a_{52} & a_{53} \end{vmatrix}$$

因此

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 \\ 0 & a_{52} & a_{53} & 0 & 0 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{31} & a_{34} \\ a_{21} & a_{24} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{42} & a_{43} \\ 0 & a_{52} & a_{53} \end{vmatrix}=0.$$

□