《微积分A1》第七讲

教师 杨利军

清华大学数学科学系

2025年10月13日

Definition

定义: 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 当 $x \to a$ 时均为无穷大量.

(i) 若 $\frac{f(x)}{g(x)} \to 0\ (x \to a)$, 则称 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的高阶无穷大量, 或者说 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的低阶无穷大量. 也记作 $f(x) = o(g(x))$, $x \to a$.

(ii) 若 $\frac{f(x)}{g(x)} \to C \neq 0$, $x \to a$, 则称函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 为同阶无穷大量 $(x \to a)$. 特别当 $C = 1$ 时, 称 $f(x)$ 和 $g(x)$ 为等价无穷大, 记作 $f(x) \sim g(x)\ (x \to a)$.

与无穷小量类似, 当 $x \to a$ 时, 通常取 $\frac{1}{x-a}$ 为标准无穷大量. 当 $x \to +\infty$ 时, 取 x 为标准无穷大量.

小欧 o 例子

Example

例: (i) 当 $x \to 0$ 时, $x^2 + x^3 = o(x)$;

(ii) 当 $x \to 0$ 时, $\sin(x^2) = o(x)$; 但不能写作 $o(x) = \sin(x^2)$;

(iii) $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = o(x^{n+1})$, $x \to \infty$;

(iv) $x^n = o(e^x)$, $x \to +\infty$.

Example

例：当 $x \to 0$ 时，

(i) $\sin x \sim x$;

(ii) $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$;

(iii) $\tan x \sim x$;

(iv) $\ln(1+x) \sim x$;

(v) $e^x - 1 \sim x$;

(vi) $a^x - 1 \sim x \ln a$;

(vii) $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$.

证明

结论 (i) 至 (vi) 已证. 以下证 (vii): $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$. 令 $y = (1+x)^\alpha - 1$, 则当 $x \to 0$ 时, $y \to 0$ 且 $1+y = (1+x)^\alpha$. 故 $\ln(1+y) = \alpha \ln(1+x)$. 于是

$$\frac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha x} = \frac{y}{\ln(1+y)} \cdot \frac{\alpha \ln(1+x)}{\alpha x} \to 1 \cdot 1 = 1.$$

这就证明了结论 (vii), 即 $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$.

等价无穷小量应用于求极限, 例一

Example

例一: 求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\big(1-\cos x\big)}{x^4}.$$

解:

$$\frac{1-\cos\big(1-\cos x\big)}{x^4}=\frac{1-\cos\big(1-\cos x\big)}{\frac{1}{2}(1-\cos x)^2}\cdot\frac{\frac{1}{2}(1-\cos x)^2}{x^4}$$

$$=\frac{1-\cos\big(1-\cos x\big)}{\frac{1}{2}(1-\cos x)^2}\cdot\left(\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}\right)^2\cdot\frac{1}{2\cdot 4}\to 1\cdot 1^2\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{8}.$$

Example

例二: 求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x^4}-\sqrt[3]{1-x^4}}{(\sin^2 x)(1-\cos x)}.$$

解:

$$\frac{\sqrt{1+2x^4}-\sqrt[3]{1-x^4}}{(\sin^2 x)(1-\cos x)}$$

$$=\frac{(\sqrt{1+2x^4}-1)-(\sqrt[3]{1-x^4}-1)}{x^4}\cdot\frac{x^4}{(\sin^2 x)(1-\cos x)}$$

$$=\left(\frac{(1+2x^4)^{1/2}-1}{x^4}-\frac{(1-x^4)^{1/3}-1}{x^4}\right)\cdot\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\cdot\frac{2\cdot\frac{x^2}{2}}{1-\cos x}$$

$$\to\left(\frac{1}{2}\cdot 2-\frac{1}{3}\cdot(-1)\right)\cdot 1^2\cdot 2\cdot 1=(1+\frac{1}{3})\cdot 2=\frac{8}{3}.$$

例三

Example

例三: 求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^2\ln(1+x)}.$$

解:

$$\frac{\tan x-\sin x}{x^2\ln(1+x)}=\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{1}{\cos x}-1}{x\ln(1+x)}=\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{x\ln(1+x)}$$

$$=\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{x}{\ln(1+x)}\to 1\cdot 1\cdot 1/2\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

故所求极限为 $1/2$.

注: 虽然 $\tan x\sim\sin x$, 但不能取 $\tan x-\sin x=0$. 以后我们利用 Taylor 展式可以证明 $\tan x-\sin x=\frac{1}{2}x^3+o(x^3)$. 求极限时慎用无穷小代换!

例四

课本第57页习题2.4第9题(14): 求极限

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt[3]{x^3-x^2}\right).$$

解:

$$\sqrt{x^2+2x}-\sqrt[3]{x^3-x^2}=x\left(1+\frac{2}{x}\right)^{1/2}-x\left(1-\frac{1}{x}\right)^{1/3}$$

$$=x\left[\left(1+\frac{2}{x}\right)^{1/2}-1\right]-x\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)^{1/3}-1\right]$$

$$=\frac{\left(1+\frac{2}{x}\right)^{1/2}-1}{\frac{2}{x}}\cdot 2-\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{1/3}-1}{-\frac{1}{x}}\cdot(-1)$$

$$\to\frac{1}{2}\cdot 2-\frac{1}{3}\cdot(-1)=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}.$$

故所求极限为 4/3.

Definition

定义：设 $f(x)$ 在 $U(x_0,r) \overset{\text{def}}{=} (x_0-r, x_0+r)$ 上有定义.

(i) 若 $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$，即 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使得 $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$，$\forall x \in U(x_0,\delta)$，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

(ii) 若极限 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 不存在，或虽存在但不等于 $f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处间断，或不连续.

(iii) 若函数 $f(x)$ 在其定义域 J 处处连续，则称 $f(x)$ 为 J 上的连续函数.

由函数极限的讨论可知,

1. 多项式在 $\mathbb{R}$ 上连续;
2. 分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 在分母非零处连续, 其中 $P(x)$, $Q(x)$ 为多项式;
3. 函数 $\sin x$, $\cos x$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数;
4. 函数 $\tan x$ 是 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上的连续函数, $\cot x$ 是 $(0, \pi)$ 上的连续函数;
5. 指数函数 a^x $(a > 0)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续;
6. 对数函数 $\ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续.

左连续，右连续

Definition

定义：(i) 若 $f(x_0^+) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续；

(ii) 若 $f(x_0^-) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续.

Theorem

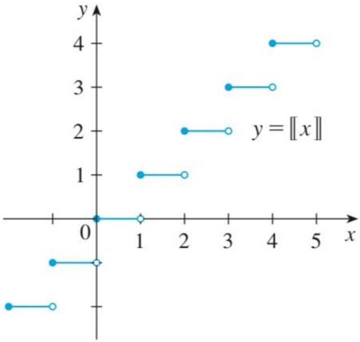
定理：函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续 $\Longleftrightarrow$ $f(x)$ 在点 x_0 处既右连续又左连续.

Proof.

证明：由相应的函数极限结论立得. □

取整函数的连续性

回忆取整函数 [x] 的值定义为不大于 x 的最大整数. 因此对于函数 [x] 在非整数处连续. 显然在整数 $x = N$ 处间断, 但右连续. 函数 [x] 的图像如下.



间断点类型

Definition

<u>定义</u>: 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处间断, 则可能出现如下情形之一.

(1) (可去间断) 极限 $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ 存在, 但 $L \neq f(x_0)$.

(2) (跳跃间断) 左右极限 $\lim_{x\to x_0^{\pm}} f(x)$ 均存在, 但不相等.

(3) (本性间断) 至少有一个单侧极限不存在.

可去间断和跳跃间断常称为第一类间断, 而本性间断常称为第二类间断.

可去间断，例子

对于可去间断点，若补充或修改 $f(x)$ 在点 x_0 处的值为 L，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处就连续了．例如函数

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

在点 $x=0$ 处有可去间断．因为 $\lim_{x\to 0} f(x)$ 极限存在且等于 1，不等于 $f(0)=0$．如果改变 $f(0)=0$ 为 $f(0)=1$，则函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续．

Heaviside 函数定义如下

$$H(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 1, & t\geq 0.\end{cases}$$

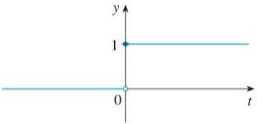
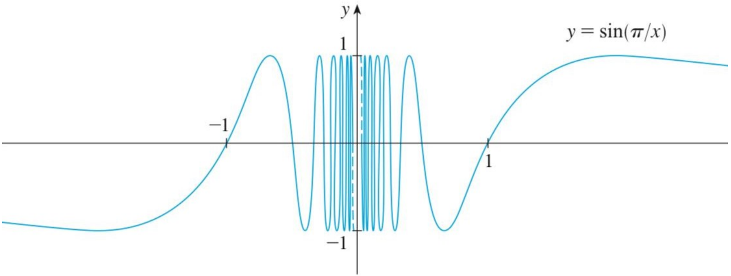


FIGURE 8
The Heaviside function

显然 $t=0$ 是函数 $H(t)$ 的跳跃间断点. 因为 $\lim_{t\to 0^+}H(t)=1$, $\lim_{t\to 0^-}H(t)=0$, 即两个单侧极限存在, 但不相等.

本性间断，例子

定义函数 $f(x)=\sin\frac{\pi}{x}$, $\forall x\neq 0$, $f(0)=0$. 显然 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的本性间断点. 因为左右极限 $\lim_{x\to 0^\pm} f(x)$ 都不存在. 如图所示.



Theorem

定理：单调函数的间断点均为跳跃间断.

证：因为单调函数在其定义域每一点处的左右极限均存在.

Theorem

定理：设函数 f 和 g 在点 x_0 处连续，则它们的和差函数 $f \pm g$，乘积函数 fg，商函数 f/g（补充假设 $g(x_0) \neq 0$）在点 $x = x_0$ 处也连续.

证：根据函数极限的四则运算定理立得.

Theorem

定理: 设函数 $g(x)$ 在点 x_0 处连续, 设 $f(u)$ 在点 $u_0 = g(x_0)$ 处连续, 则它们的复合函数 $f \circ g$ 在点 x_0 处也连续.

Proof.

证: 由 $f(u)$ 在 u_0 的连续性知, 对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得对 $\forall u \in U(u_0, \delta)$, $|f(u) - f(u_0)| < \varepsilon$. 由 $g(x)$ 在点 x_0 处的连续性知对上述 $\delta > 0$, 存在 $\delta_1 > 0$, 使得 $|g(x) - g(x_0)| < \delta$, $\forall x \in U(x_0, \delta_1)$. 于是 $|f(g(x)) - f(g(x_0))| < \varepsilon$, $\forall x \in U(x_0, \delta_1)$. 此即 $f \circ g$ 在点 x_0 处连续. 证毕. □

连续函数的保号性

Theorem

定理: 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续. 若 $f(x_0) > 0(< 0)$, 则存在 $\delta_0 > 0$, 使得 $f(x) > 0(< 0)$, $\forall x \in U(x_0, \delta_0)$.

证: 只证括号外的情形, 即情形 $f(x_0) > 0$. 由 $f(x)$ 在 x_0 处的连续性知, 对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得对 $\forall x \in U(x_0, \delta)$, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. 取 $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0$, 则存在 $\delta_0 > 0$, 使得对 $\forall x \in U(x_0, \delta_0)$, $|f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2}$, 即

$$f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} < f(x) < f(x_0) + \frac{f(x_0)}{2},$$

$$\text{亦即} \quad 0 < \frac{f(x_0)}{2} < f(x), \quad \forall x \in U(x_0, \delta_0). \qquad \square$$

(回忆两个平行结论: 序列极限保号性, 函数极限保号性).

Definition

定义：称函数 $f(x)$ 在有界闭区间 $[a,b]$ 上连续，如果 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上每一点均连续，且在左端点 $x=a$ 处右连续，在右端点 $x=b$ 处左连续.

记号：$C[a,b]$ 表示闭区间 $[a,b]$ 上连续函数的全体.

连续函数的性质一：介值性

Theorem

定理：设 $f \in C[a,b]$，则对于介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的任意一个值 η，存在点 $\xi \in [a,b]$，使得 $f(\xi) = \eta$.

注：上述定理常称作连续函数的介值定理 (the intermediate value theorem)

证：若 $f(a) = f(b)$，则 $\eta = f(a) = f(b)$. 取 $\xi = a$ 或 $\xi = b$ 即可. 设 $f(a) \neq f(b)$. 不失一般性可设 $f(a) < 0 < f(b)$ 且 $\eta = 0$. 因为 (1) 若 $f(b) < f(a)$，则考虑 $\hat{f}(x) \stackrel{\text{def}}{=} -f(x)$ 即可；(2) 若 $\eta \neq 0$，则考虑 $\hat{f}(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) - \eta$ 即可. 因此我们只需要证在假设 $f(a) < 0 < f(b)$ 下，存在 $\xi \in [a,b]$，使得 $f(\xi) = 0$. 令 $E \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in [a,b], f(x) < 0\}$. 显然 E 非空且有上界，因为 $a \in E$，且 $E \subset [a,b]$. 因此 E 存在上确界. 记 $\xi \stackrel{\text{def}}{=} \sup E$. 我们将证明 $f(\xi) = 0$. 现讨论如下.

证明，续

(i) 若 $f(\xi) > 0$，则根据连续函数的保号性质知，存在 $\delta > 0$，使得 $f(x) > 0$，$\forall x \in [\xi - \delta, \xi]$. 由于 $\xi - \delta$ 不是 E 的上界，故存在 $x_1 \in E$，使得 $x_1 > \xi - \delta$. 于是 $x_1 \in (\xi - \delta, \xi]$，故 $f(x_1) > 0$. 另一方面 $x_1 \in E$，故 $f(x_1) < 0$. 矛盾.

(ii) 若 $f(\xi) < 0$，仍由连续函数的保号性质知，存在 $\delta > 0$，使得 $f(x) < 0$，$\forall x \in [\xi, \xi + \delta]$. 这说明 $\xi + \delta \in E$. 此与 $\xi = \sup E$ 相矛盾. 综上所述可知 $f(\xi) = 0$. 证毕.

另一证明

另证: 不妨设 $f(a) < 0 < f(b)$. 要证 $\exists \xi \in [a,b]$, 使得 $f(\xi) = 0$. 以下用二分法来证. 记 $[a_1, b_1] = [a, b]$, 则 $f(a_1) < 0 < f(b_1)$. 考虑 $f(x)$ 在区间 $[a_1, b_1]$ 中点 $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$ 处的值. 若 $f(c_1) = 0$, 则证毕. 设 $f(c_1) \neq 0$. 若 $f(c_1) > 0$, 则记 $[a_2, b_2] = [a_1, c_1]$. 否则取 $[a_2, b_2] = [c_1, b_1]$. 于是 $f(a_2) < 0 < f(b_2)$, 且 $b_2 - a_2 = \frac{1}{2}(b-a)$. 对区间 $[a_2, b_2]$ 重复刚才做法, 考虑 $f(c_2)$ 的值, 其中 $c_2 = \frac{a_2+b_2}{2}$. 若 $f(c_2) = 0$, 结论成立. 若不然, 则类似构造闭区间 $[a_3, b_3]$, 使得 $f(a_3) < 0 < f(b_3)$, 且 $b_3 - a_3 = \frac{1}{2}(b_2 - a_2) = \frac{1}{2^2}(b-a)$. 继续上述过程, 则可能出现如下两种情况.

(i) 上述过程中止于第 n 步, 即已构造闭区间 $[a_n, b_n]$, 函数 $f(x)$ 在其中点 $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$ 为零, 结论成立.

另证，续

(ii) 上述过程可无穷次进行. 由此得一个闭区间套 $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$, $\forall n \geq 1$, 且区间长度为 $b_n - a_n = \frac{1}{2^{n-1}}(b-a)$. 由区间套定理知存在唯一点 $\xi \in \bigcap_{n\geq 1}[a_n, b_n]$, 并且 $a_n \uparrow \xi$, $b_n \downarrow \xi$. 根据做法有 $f(a_n) < 0 < f(b_n)$. 令 $n \to +\infty$ 并利用函数 $f(x)$ 的连续性可知, $f(\xi) \leq 0 \leq f(\xi)$. 因此 $f(\xi) = 0$. 证毕.

例子

例: 证明奇数次实系数多项式必存在零点.

证: 设 $p(x) = x^{2k+1} + a_{2k}x^{2k} + \cdots + a_1 x + a_0$ 为 $2k+1$ 次实系数多项式. 要证 $p(x)$ 有零点, 即存在 $\xi \in \mathbb{R}$, 使得 $p(\xi) = 0$. 将 $p(x)$ 写作

$$p(x) = x^{2k+1}\left(1 + \frac{a_{2k}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{2k}} + \frac{a_0}{x^{2k+1}}\right).$$

由于 $\frac{a_{2k}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{2k}} + \frac{a_0}{x^{2k+1}} \to 0$, $|x| \to +\infty$, 故存在 $M > 0$, 使得

$$\left|\frac{a_{2k}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{2k}} + \frac{a_0}{x^{2k+1}}\right| \le \frac{1}{2}, \quad |x| \ge M.$$

于是

$$p(M) = M^{2k+1}\left(1 + \frac{a_{2k}}{M} + \frac{a_{2k-1}}{M^2} + \cdots + \frac{a_0}{M^{2k+1}}\right)$$

$$\ge M^{2k+1}\left(1 - \left|\frac{a_{2k}}{M} + \frac{a_{2k-1}}{M^2} + \cdots + \frac{a_0}{M^{2k+1}}\right|\right)$$

$$\geq M^{2k+1}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}M^{2k+1}>0.$$

同理

$$p(-M)=-M^{2k+1}\left(1-\frac{a_{2k}}{M}+\frac{a_{2k-1}}{M^2}-\cdots-\frac{a_0}{M^{2k+1}}\right).$$

于是

$$-p(-M)=M^{2k+1}\left(1-\frac{a_{2k}}{M}+\frac{a_{2k-1}}{M^2}-\cdots-\frac{a_0}{M^{2k+1}}\right)$$

$$\geq M^{2k+1}\left(1-\left|\frac{a_{2k}}{M}-\frac{a_{2k-1}}{M^2}+\cdots+\frac{a_0}{M^{2k+1}}\right|\right)$$

$$\geq M^{2k+1}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}M^{2k+1}>0.$$

故 $p(-M)<-\frac{1}{2}M^{2k+1}<0$. 由介值定理知 $\exists\xi\in[-M,M]$，使得 $p(\xi)=0$.

证毕.

闭区间上连续函数的性质二：有界性

Theorem

定理：有界闭区间上的连续函数必有界．也就是说，若函数 $f(x)$ 在有界闭区间 $[a,b]$ 上连续，则存在 $M>0$，使得 $|f(x)|\le M$，$\forall x\in[a,b]$．

证明：反证．若不然，设函数 $f(x)$ 无界，则对任意正整数 n，存在 $x_n\in[a,b]$，使得 $|f(x_n)|>n$．这样就得到一个有界序列 $\{x_n\}\subset[a,b]$．根据 B-W 定理可知序列 $\{x_n\}$ 存在收敛子列 $\{x_{n_k}\}$．设 $x_{n_k}\to\xi$，$k\to+\infty$．由 $a\le x_{n_k}\le b$ 可知 $a\le\xi\le b$．一方面 $|f(x_{n_k})|>n_k\to+\infty$．另一方面由 $f(x)$ 的连续性知 $f(x_{n_k})\to f(\xi)$，$k\to+\infty$．故序列 $\{f(x_{n_k})\}$ 有界．矛盾．证毕．

例子

Example

例: 设 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上取正值的连续函数. 若 $\lim_{x\to+\infty} f(f(x)) = +\infty$, 证明 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

反证: 假设 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ 不成立, 则存在 $M_0 > 0$, 使得对任意正整数 n, 存在 $x_n > n$, 使得 $0 < f(x_n) \le M_0$, $\forall n \ge 1$. 由于连续函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0, M_0]$ 上有界, 故存在 $C > 0$, 使得 $0 \le f(x) \le C$, $\forall x \in [0, M_0]$. 于是 $0 < f(f(x_n)) \le C$. 此与假设 $\lim_{x\to+\infty} f(f(x)) = +\infty$ 相矛盾. 证毕.

Theorem

定理: 有界闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 必有最大值和最小值, 即存在 $\xi,\eta\in[a,b]$, 使得 $f(\xi)\le f(x)\le f(\eta)$, $\forall x\in[a,b]$, 即 $f(\xi)=\min_{x\in[a,b]} f(x)$, $f(\eta)=\max_{x\in[a,b]} f(x)$. 也就是说, 函数 $f(x)$ 在点 $x=\xi$ 处取得最小值; 在点 $x=\eta$ 处取得最大值.

注: 上述定理通常称作连续函数的最值定理.

确界的一个性质

Lemma

引理: 设 $S \subset \mathbb{R}$ 为一个非空实数集合.

(i) 记 $M = \sup S$ (允许 $M = +\infty$), 则存在 $s_n \in S$, 使得 $s_n \to M$, $n \to +\infty$;

(ii) 记 $m = \inf S$ (允许 $m = -\infty$), 则存在 $t_n \in S$, 使得 $t_n \to m$, $n \to +\infty$.

证: 只证(i). 结论(ii)的证明类似. 当 M 为有限数时, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 依定义知 $M - \varepsilon$ 不是 S 的上界, 故存在 $s_\varepsilon \in S$, 使得 $s_\varepsilon > M - \varepsilon$. 取 $\varepsilon = \frac{1}{n}$, 则存在 $s_n \in S$, 使得 $M \geq s_n > M - \frac{1}{n}$, 即 $s_n \to M$. 当 $M = +\infty$, 即 S 无上界时, 已证存在 $s_n \in S$, 使得 $s_n \to +\infty$. (见Sept24讲义第27页中的引理). 证毕.

最值定理之证明

证明: 记 $M \overset{\text{def}}{=} \sup\{f(x), x \in [a,b]\}$, $m \overset{\text{def}}{=} \inf\{f(x), x \in [a,b]\}$. 根据函数 $f(x)$ 的有界性可知 M 和 m 均为有限数. 根据上述引理知存在 $x_n \in [a,b]$, 使得 $f(x_n) \to M$, $n \to +\infty$. 由 B-W 定理知, 序列 $\{x_n\}$ 存在收敛子列 $x_{n_k} \to \eta$. 再根据函数 $f(x)$ 的连续性知 $f(x_{n_k}) \to f(\eta)$. 这表明 $f(\eta) = M$. 同理可证 $\exists \xi \in [a,b]$, 使得 $f(\xi) = m$. 证毕.

Corollary

推论: 有界闭区间上的连续函数的值域是有界闭区间. 也就是说, 若函数 $f(x)$ 在有界闭区间 $J=[a,b]$ 上连续, 则函数 f 的值域 $f(J)=\{f(x),x\in J\}$ 是有界闭区间.

Proof.

证明: 由连续函数的最值性知, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上取得最大值和最小值, 即 $\exists\xi,\eta\in[a,b]$, 使得 $f(\xi)=\min\{f(x),x\in[a,b]\}$, $f(\eta)=\max\{f(x),x\in[a,b]\}$. 再根据连续函数的介值性可知, 对任意 $c\in[f(\xi),f(\eta)]$, 存在 x 介于 ξ 和 η 之间, 使得 $f(x)=c$. 这表明 $f(J)=[f(\xi),f(\eta)]$. □

总结, 注记

总结: 有界闭区间上的连续函数具有三个性质: 介值性, 有界性, 最值性.

注记: 上述三个性质成立的前提条件 (i) 区间闭; (ii) 区间有界; (iii) 函数连续.

例一: 函数 $\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 上连续, 但无界.

例二: 函数 $\frac{1}{x}$ 在无界区间 $[1,+\infty)$ 上连续, 但无最小值.

例三: 符号函数 $\mathrm{sgn}(x)$ 无介值性质. 例如不存在 $\xi \in \mathbb{R}$, 使得 $\mathrm{sgn}(\xi) = \frac{1}{2}$.

Theorem

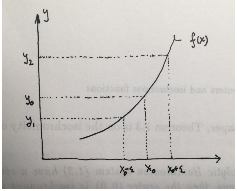
定理: 设 $f(x)$ 在闭区间 $J=[a,b]$ 上连续, 且严格单调, 则反函数 $f^{-1}(y)$ 在有界闭区间 $f(J)$ 上连续.

证: 不妨设 $f(x)\uparrow$ 严格. 若不然则可考虑 $-f$. 于是反函数 $f^{-1}(y)\uparrow$ 严格, 且 $c \overset{\text{def}}{=} f(a)$ 和 $d \overset{\text{def}}{=} f(b)$ 分别是函数 $f(x)$ 的最小值和最大值. 回忆连续函数在有界闭区间的值域也是有界闭区间, 故 $f(J)=[c,d]$. 以下证反函数 $f^{-1}(y)$ 在 $[c,d]$ 上连续. 对任意 $y_0\in[c,d]$, 记 $x_0=f^{-1}(y_0)$, 即 $f(x_0)=y_0$.

情形一. $y_0\in(c,d)$, 即 y_0 是闭区间 $[c,d]$ 的内点(不是端点). 要证 $f^{-1}(y)$ 在 y_0 处连续, 即要证对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得 $|f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)|<\varepsilon$, $\forall y\in U(y_0,\delta)$.

证明，续

令 $y_1 = f(x_0 - \varepsilon)$，$y_2 = f(x_0 + \varepsilon)$，如图所示.



取 $\delta = \min\{y_2 - y_0, y_0 - y_1\}$，故对 $\forall y \in U(y_0, \delta)$，$|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon$.

这就证明了 $f^{-1}(y)$ 在点 y_0 处的连续.

情形二：$y_0 = c$ 或 $y_0 = d$. 可作类似处理. 定理得证. $\square$

例子

Example

例: 正弦函数 $y = \sin x$ 在闭区间 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上严格单调上升, 其值域为闭区间 $[-1, 1]$. 由反函数存在定理知, 函数 $y = \sin x$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上存在反函数. 这个反函数就是我们熟知的反正弦函数 $x = \arcsin y$, 它的定义域为 $[-1, 1]$, 并在 $[-1, 1]$ 上处处连续. 类似可证其他反三角函数在其定义域上连续.

Theorem

定理: 每个初等函数在其定义域上处处连续.

证: 已证多项式函数 $P(x)$, 指数函数 e^x, 对数函数 $\ln x$, 三角函数 $\sin x$, $\cos x$ 在它们的定义域上处处连续. 由复合函数的连续性知, 幂函数 $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ 在其定义域 $x > 0$ 上连续. 由连续函数四则运算定理知, 正切函数 $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ 和余切函数 $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ 在其定义域上连续. 根据反函数连续性定理知, 反三角函数 $\arcsin x$, $\arctan x$, 等在其定义域上连续. 因此六类基本初等函数, 即多项式函数, 幂函数, 对数函数, 指数函数, 三角函数, 反三角函数在其定义域上处处连续. 依定义每个初等函数是由基本初等函数经过有限次的四则运算, 以及有限次函数复合所得, 而连续函数经过四则运算, 以及复合之后, 仍为连续函数, 故每个初等函数在其定义域上连续. 证毕. $\square$

Definition

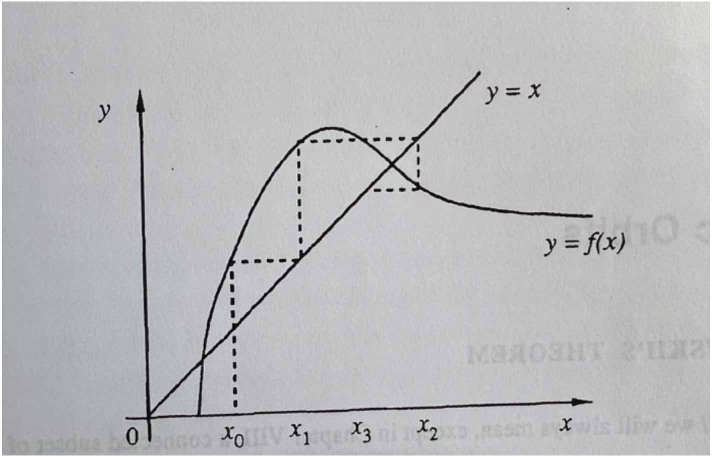
定义: 每个从区间 J 到自身的函数 (映射) $f: J \to J$ 均称为区间 J 上的一个(离散)动力系统 (dynamical system). 动力系统理论研究 f 在区间 J 上的迭代, 即轨道(序列)

$$\{f^n(x)\} = \left\{x, f(x), f^2(x), \cdots, f^n(x), \cdots\right\}, \quad x \in J$$

的性态, 这里 $f^2(x) = f(f(x))$, $f^n(x) = f(f^{n-1}(x))$, $\forall n \geq 1$.

记号: 由区间 J 到自身的映射(函数) f 有时记作 $f: J \hookleftarrow$.

迭代图示



例子

Example

例一: 设 $f_\lambda(x) = \lambda x$, 则任意点 $x_0 \in \mathbb{R}$ 的轨道为 $\{x_0, \lambda x_0, \lambda^2 x_0, \lambda^3 x_0, \cdots,\}$. 显然当 $|\lambda| < 1$ 时, 轨道点列 $\{\lambda^n x_0\}$ 收敛于零. 而 $|\lambda| > 1$ 时, 且 $x_0 \neq 0$ 时, 轨道点列 $\{\lambda^n x_0\}$ 发散.

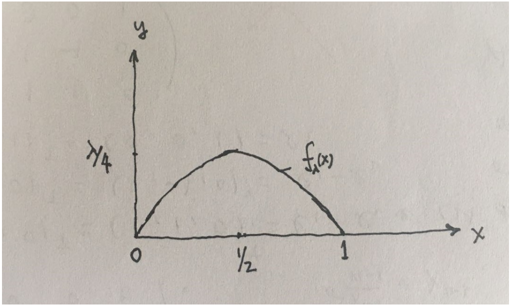
Example

例二: 考虑函数 $g(x) = \frac{3}{2}x(1-x)$. 解不动点方程 $g(x) = x$ 易得 $g(x)$ 有两个不动点 $x = 0, \frac{1}{3}$. 可以证明对任意 $x_0 \in (0, 1]$, 点列 $\{g^n(x_0)\}$ 收敛于不动点 $x = \frac{1}{3}$. 例如 $x_0 = 0.25$, $x_1 = g(x_0) = 0.28125$, $x_2 = g(x_1) = 0.3032227\ldots$, $\cdots$, $x_{21} = g^{21}(0.25) = 0.333333\ldots$.

Logistic 映射

设 $f_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$. 不难证明当 $\lambda \in [0,4]$ 时, $f_\lambda : [0,1] \hookleftarrow$, 即由区间 $[0,1]$ 到自身的映射. 这个著名映射称为 Logistic 映射.

建议同学们 Google 一下 Logistic maps, 或百度一下 Logistic 映射.



周期点

Definition

定义: 点 $x_0 \in J$ 称为映射 $f: J \hookleftarrow$ 的 k 周期点, 如果

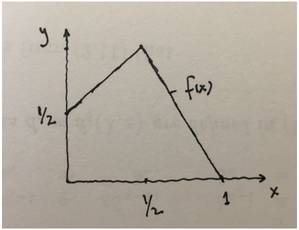
$$f^j(x_0) \neq x_0, \quad j = 1, 2, \cdots, k-1, \quad f^k(x_0) = x_0.$$

特别 1 周期点又称为不动点, 即 $f(x_0) = x_0$.

注: 当 $x_0 \in J$ 为 k 周期点时, 其轨道 $\{f^n(x_0)\}_{n \geq 0}$ 为 k 个点 x_0, $f(x_0)$, $\cdots$, $f^{k-1}(x_0)$ 的无穷次重复. 此时轨道可简单地记作 $\{x_0, f(x_0), \cdots, f^{k-1}(x_0)\}$.

考虑函数

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 2(1 - x), & x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$



显然 $x = 0$ 是 3 周期点: $f(0) = \frac{1}{2}$, $f(\frac{1}{2}) = 1$, $f(1) = 0$.

Lemma

引理一: 设 x_0 为映射 $f: J \hookleftarrow$ 的 k 周期点, 则 k 个点 $x_0, f(x_0), \cdots, f^{k-1}(x_0)$ 两两互异.

Lemma

引理二: 设 x_0 为映射 $f: J \hookleftarrow$ 的 k 周期点. 若 $f^n(x_0) = x_0$, 则 n 为 k 的倍数, 即 $n = mk$.

Lemma

引理三: 设函数 $f: J = [a, b] \hookleftarrow$ 连续, 则 f 必有 1 周期点, 即不动点.

简单事实，续

Lemma

<u>引理四</u>：设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 连续. 若 f 有 2 周期点，则 f 有 1 周期点，即不动点.

Lemma

<u>引理五</u>：设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 连续. 若 f 的值域包含定义域，即 $f([a,b])\supseteq[a,b]$，则 f 有不动点.

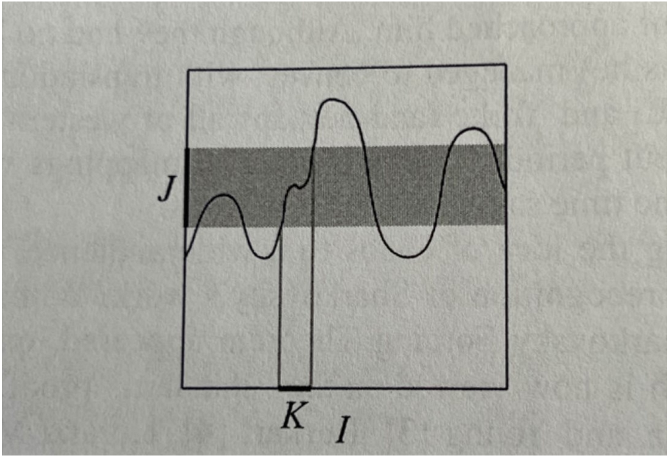
以上引理一至引理五的证明均留作习题.

Lemma

<u>引理六</u>: 设函数 $f(x)$ 在闭区间 I 上连续. 如果值域 $f(I)$ 包含一个闭区间 J, 即 $f(I) \supseteq J$, 那么存在一个闭子区间 $K \subseteq I$, 使得 $f(K) = J$, 且 f 映射区间 K 的端点为区间 J 的端点, 映区间 K 的内部为区间 J 的内部. 也就是说, 如果我们记 $K = [c, d]$, $J = [a, b]$, 则 $\{f(c), f(d)\} = \{a, b\}$, $f((c, d)) = (a, b)$.

<u>记号</u>: 条件 $f(I) \supseteq J$ 将记作 $I \xrightarrow{f} J$ 或 $I \to J$.

引理六的图形证明



解析证明

<u>证</u>: 设 $J=[a,b]$. 由于 $f(I)\supset J$, 故存在 $x\in I$, 使得 $f(x)=a$. 记 c 为象点 a 的最大原象, 即 $c=\max\{x\in I, f(x)=a\}$, 则 $f(c)=a$.

<u>情形1</u>: $\exists x\in I$ 且 $x>c$, 使得 $f(x)=b$, 取 $d=\min\{x\in I, x>c, f(x)=b\}$, 则 $f(d)=b$, 且 $f([c,d])=[a,b]$. 命题得证.

<u>情形2</u>: $\exists x\in I$ 且 $x<c$, 使得 $f(x)=b$, 取 $c'=\max\{x\in I, x<c, f(x)=b\}$, $d'=\min\{x\in I, x>c', f(x)=a\}$, 则 $f([c',d'])=[a,b]$. 引理六得证.

引理七，及其证明

Lemma

引理七：设 $f: J \hookleftarrow$ 连续，$J_k \subseteq J$，$k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$ 为 J 的 n 个有界闭子区间. 若

$$J_0 \to J_1 \to J_2 \to \cdots \to J_{n-2} \to J_{n-1} \to J_0,$$

则存在 $x_0 \in J_0$，使得 $f^n(x_0) = x_0$，$f^k(x_0) \in J_k$，$k = 1, 2, \cdots, n-1$.

证：为清晰计，考虑情形 $n = 5$. 此时引理假设为 $J_0 \to J_1 \to J_2 \to J_3 \to J_4 \to J_0$. 反复应用引理六，我们有如下结论.

(i) 由 $J_3 \to J_4$ 知，$f(J_3) \supseteq J_4$，故存在闭区间 $J_3^0 \subseteq J_3$，使得 $f(J_3^0) = J_4$.

(ii) 由 $J_2 \to J_3$ 知，$f(J_2) \supseteq J_3 \supseteq J_3^0$，故存在闭区间 $J_2^0 \subseteq J_2$，使得 $f(J_2^0) = J_3^0$.

(iii) 由 $J_1 \to J_2$ 知，$f(J_1) \supseteq J_2 \supseteq J_2^0$，故存在闭区间 $J_1^0 \subseteq J_1$，使得 $f(J_1^0) = J_2^0$.

(iv) 由 $J_0 \to J_1$ 知，$f(J_0) \supseteq J_1 \supseteq J_1^0$，故存在闭区间 $J_0^0 \subseteq J_0$，使得 $f(J_0^0) = J_1^0$.

于是 $f^4(J_0^0) = J_4$. 因为

$$f^4(J_0^0) = f^3(f(J_0^0)) = f^3(J_1^0) = f^2(f(J_1^0))$$

$$= f^2(J_2^0) = f(f(J_2^0)) = f(J_3^0) = J_4.$$

再根据假设 $J_4 \to J_0$，即 $f(J_4) \supseteq J_0$ 得

$$f^5(J_0^0) = f(f^4(J_0^0)) = f(J_4) \supseteq J_0 \supseteq J_0^0.$$

由引理五可知存在 $x_0 \in J_0^0$，使得 $f^5(x_0) = x_0$.

证明，续二

现断言 $f^k(x_0) \in J_k$，$k = 1, 2, 3, 4$. 理由如下.

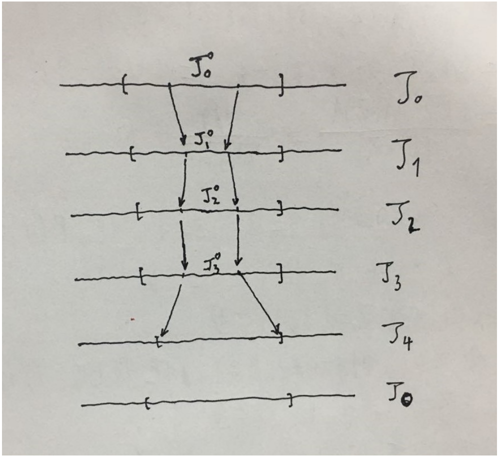
(1) 由于 $f(J_0^0) = J_1^0$，故 $f(x_0) \in J_1^0 \subseteq J_1$.

(2) 由于 $f^2(J_0^0) = J_2^0 \subseteq J_2$，故 $f^2(x_0) \in J_2$.

(3) 由于 $f^3(J_0^0) = J_3^0 \subseteq J_3$，故 $f^3(x_0) \in J_3$.

(4) 由于 $f^4(J_0^0) = J_4$，故 $f^4(x_0) \in J_4$. 引理得证.

引理七证明图示, n = 5 情形

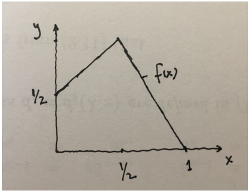


Li-Yorke 第一定理

Theorem

第一定理 [Tienyien Li & James Yorke, 1975]: 设 $f: J \hookleftarrow$ 连续. 若 f 有 3 周期点, 则对任意正整数 n, f 有 n 周期点.

例: 之前已指出, 函数 $f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 2(1-x), & x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$



有 3 周期点 $x = 0$, 因为 $f(0) = \frac{1}{2}$, $f(\frac{1}{2}) = 1$, $f(1) = 0$. 根据 Li-Yorke 第一定理可知, f 在区间 $[0, 1]$ 上拥有任意正整数 n 的周期点.

习题一：课本第51页习题2.3题7：求下列极限

$$(1)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^3)}{[\sin(6x)]^3},\qquad (2)\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}},\qquad (3)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan(3x)}{x},$$

$$(4)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{2x},\qquad (5)\quad \lim_{n\to+\infty}2^n\sin\frac{\pi}{2^n},\qquad (6)\quad \lim_{x\to 9}\frac{\sin^2 x-\sin^2 9}{x-9},$$

$$(7)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\cos(2x)},\qquad (8)\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3},\qquad (9)\ \lim_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2},$$

$$(10)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(4x)}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}},\qquad (11)\quad \lim_{x\to 0}\frac{[\sin(ax)]^2-[\sin(bx)]^2}{x\sin x},$$

$$(12)\quad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2\sin\frac{1}{x}+2\sin x}{x}.$$

习题二：课本第51页习题2.3题8：求下列极限

$$(1)\ \lim_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}},\quad (2)\ \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x+n}{x-n}\right)^{x},\quad (3)\ \lim_{x\to 0}(1+3\tan x)^{\cot x},$$

$$(4)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan(2x)},\quad (5)\ \lim_{x\to 1}(2x-1)^{\frac{1}{x-1}},\quad (6)\ \lim_{x\to 0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}.$$

习题三：课本第51页习题2.3题9：确定 a, b 的值，使得下列两个极限式成立：

$$(1)\quad \lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=0,$$

$$(2)\quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0.$$

习题四：课本第52页习题2.3题13：设函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上定义．假设 (i) $f(2x)=f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$; (ii) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$．证明 $f(x)$ 为常数函数．

习题五：课本第56页习题2.4题7：确定下列无穷小量(当 $x\to 0^+$)的阶，并按照阶由低到高排列这些无穷小量：

$$\sin(x^2),\ 2\sqrt{x}+x^3,\ e^{x^3}-1,\ \sin(\tan x),\ \ln(1+x^{\frac{2}{3}}),\ 1-\cos(x^2),\ \sqrt{x}-\sqrt[4]{x}.$$

习题六：课本第56页习题2.4题8：将下列无穷大量(当 $n\to+\infty$)，按照它们的阶由低到高重新排列：

$$n^2,\ e^n,\ \ln(1+n^2),\ \sqrt{n},\ 2^n,\ \sqrt{n^3+\sqrt{n}},\ n^n,\ n!.$$

习题七：课本第56页习题2.4题9：求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\tan x)}{\tan(\sin x)}$; (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$; (3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{\sin x}-1}{x}$, $a>0$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\ln(1-x)}$; (5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos(kx^2)}}{x^4}$; (6) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}x^2\ln\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)$;

(7) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}x(e^{\sin\frac{1}{x}}-1)$; (8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{e^x-1}$;

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}{x^2}$; (10) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{\cos\sqrt{x}-1+x}$;

(11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\tan x}}{x-\tan x}$; (12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)}{x^3\ln(1+x)}$;

(13) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\ln(x-2)-\ln x\right]$; (14) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt[3]{x^3-x^2}\right)$.

习题八：课本第56页习题2.4题11：假设常数 α 使得当 $x \to 0$ 时，$(1+\alpha x^2)^{\frac{1}{3}} - 1$ 与 $1 - \cos x$ 是等价无穷小，求常数 α 的值.