习题课材料（四）

注 1： 本次习题课包含内容：线性相关性、矩阵的秩、维数公式等

注 2： 带 ♡ 号的习题有一定的难度、比较耗时, 请量力为之.

注 3： 本节考虑的矩阵均为实矩阵.

注 4： 本节 $N(A)$ 指 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解集构成的子空间，称作 A 的零空间；$C(A)$ 指 A 的列向量张成的子空间，称作列空间.

习题 1. 复习：矩阵的列秩和行秩的概念，说明为什么矩阵的初等行变换不改变这两个秩，以及列秩为什么等于行秩.

注意：有了这个结论才有矩阵**秩**的概念，请结合秩的定义，注意其中的逻辑顺序，切勿循环论证.

习题 2. 复习：设 $m\times n$ 矩阵 A 的秩是 r，取出 A 的 r 线性无关的列向量，构成新的矩阵 B. 那么矩阵 B 的列秩是 r，所以 B 的行秩也是 r. 于是可以再取出 B 的 r 个线性无关的行，构成新的矩阵 C，那么矩阵 C 的行秩是 r，所以 C 的列秩也是 r. 此时，C 是秩为 r 的 r 阶方阵，所以 C 可逆.

反之，假设 A 存在 r 阶可逆子方阵 C，则 C 所在的列向量线性无关，所以 A 的列秩大于等于 r.

综上所述，A 的秩等于其可逆子矩阵的最高阶数.

习题 3. 本章的公式中最重要的是维数公式：设 A 是 $m\times n$ 矩阵，则

$$\dim C(A)+\dim N(A)=n.$$

其中，$C(A)$ 是 A 的列向量张成的子空间，简称列空间. 由于 $\dim C(A)=\operatorname{rank}(A)$，所以该公式等价于

$$\operatorname{rank}(A)+\dim N(A)=n.$$

酌情可以拓展：设 $f:V\to W$ 是线性映射，则 $\dim V=\dim\ker(f)+\dim\operatorname{Im}(f)$

习题 4. $m\times n$ 矩阵 A 的秩为 r，则下列正确的有（　　）

(A). A 中存在 $r+1$ 阶子式不为零

(B). A 中存在 $r-1$ 阶子式不为零

(C). A 的列向量组中存在 r 个线性无关的向量

(D). A 的行向量组的极大线性无关组所含向量的个数是 r

习题 5. 下列各陈述中，正确的是（　　）

(A). 若两组向量的秩相等，则两组向量可互相线性表出

(B). 若一组向量可由另一组向量线性表出，则两组向量的秩相等，则两组向量等价

(C). 若向量组（*1*）可由向量组（*2*）线性表出，则向量组（*1*）的秩一定小于向量组（*2*）的秩

(D). 以上都不对

习题 6. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，求向量组 $\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\cdots,\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s$ 的秩.

习题 7. 已知：$A\in M_{n\times m}, B\in M_{m\times n}$ 且 $n<m, AB=I_n$. 求证：B 的列向量线性无关.

习题 8. A 是 n 阶方阵.

1. $|A^*|=|A|^{n-1}$
2. 求 $\operatorname{rank}(A^*)$.
3. 求 $(A^*)^*$

习题 9 $(\heartsuit\heartsuit)$**.** 给定向量组：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，其中 $\alpha_1\neq\mathbf{0}$. 证明：以下两条等价：

1. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性相关.
2. 存在 $1\leq i\leq n$ 使得 α_i 可被 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{i-1}$ 唯一地线性表出.

习题 10. 判断正误，正确的简述其理由，错误的给出反例.

1. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，若 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 有非零解，则 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解
2. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，若 $r(A)=n$，则非齐次方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解
3. 已知 η_1,η_2 是 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 不同的两个解，ξ_1,ξ_2 是其对应的齐次方程组 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的基础解析，k_1,k_2 是两个任意常数，则 $k_1\xi_1+k_2(\xi_1-\xi_2)+\dfrac{\eta_1+\eta_2}{2}$ 是方程 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的通解
4. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times p$ 矩阵，$\operatorname{rank}(A)=n, AB=\mathbf{0}$，则 $B=\mathbf{0}$
5. 已知 $A=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{bmatrix}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta(\beta\neq 0)$ 线性相关，则非齐次方程组 $A\boldsymbol{x}=\beta$ 有解.
6. 已知 A 是 $m\times n$ 矩阵，则存在矩阵 B，使得 $AB=\mathbf{0}$ 且有 $\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)=n$.
7. 在分块矩阵 $X=\begin{bmatrix}A & C\\ \mathbf{0} & B\end{bmatrix}$ 中，$\operatorname{rank}(A)=r,\operatorname{rank}(B)=s$，则 $\operatorname{rank}(X)=r+s$.

习题 11. 1. 已知 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times p$ 矩阵，且 $\operatorname{rank}(A)=n$. 证明：$\operatorname{rank}(AB)=\operatorname{rank}(B)$.

2. 若 A,B 均为 n 阶方阵，且 $A^2=B^2=\mathbf{0}$. 若 $A+B$ 可逆，证明：$\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)$.

习题 12 ($\heartsuit$)**.** 设 A, B, C 分别为 $m \times n, n \times k, k \times s$ 矩阵，证明：

$$\mathrm{rank}(AB) + \mathrm{rank}(BC) \le \mathrm{rank}(ABC) + \mathrm{rank}(B).$$

习题 13 ($\heartsuit$)**.** 对于 n 阶方阵，求证：$A^2 = A$ 当且仅当 $\mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(I_n - A) = n$.

习题 14 ($\heartsuit$)**.** *(Fredhelm 二则一定理)*：设 A 是 $m \times n$ 矩阵. 线性方程组 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有解当且仅当 $\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_m \\ 1 \end{bmatrix}$ 无解.