

微积分 A 历年考试真题集

目 录

第一学期期中考试	1
清华大学 2006 级一元微积分期中考试试题	1
清华大学 2007 级一元微积分期中考试试题	3
清华大学 2008 级一元微积分期中考试试题	5
清华大学 2010 级微积分 A(1) 期中考试试题	7
清华大学 2011 级微积分 A(1) 期中考试试题	9
清华大学 2012 级微积分 A(1) 期中考试试题	11
清华大学 2013 级微积分 A(1) 期中考试试题	13
清华大学 2015 级微积分 A(1) 期中考试试题	15
清华大学 2016 级微积分 A(1) 期中考试试题	17
清华大学 2018 级微积分 A(1) 期中考试试题	19
第一学期期末考试	21
清华大学 2006 级一元微积分期末考试试题	21
清华大学 2008 级一元微积分期末考试试题	23
清华大学 2009 级一元微积分期末考试试题	25
清华大学 2010 级微积分 A(1) 期末考试试题	27
清华大学 2013 级微积分 A(1) 期末考试试题	29
清华大学 2016 级微积分 A(1) 期末考试试题	31
第二学期期中考试	33
清华大学 2006 级多元微积分期中考试试题	33
清华大学 2008 级多元微积分期中考试试题	35
清华大学 2009 级多元微积分期中考试试题	37
清华大学 2010 级微积分 A(2) 期中考试试题	40
清华大学 2011 级微积分 A(2) 期中考试试题	42
清华大学 2012 级微积分 A(2) 期中考试试题	44
清华大学 2013 级微积分 A(2) 期中考试试题	46
清华大学 2017 级微积分 A(2) 期中考试试题	48
清华大学 2018 级微积分 A(2) 期中考试试题	50
第二学期期末考试	53
清华大学 2005 级多元微积分期末考试试题	53
清华大学 2006 级多元微积分期末考试试题	55
清华大学 2008 级多元微积分期末考试试题	58
清华大学 2009 级多元微积分期末考试试题	60
清华大学 2010 级微积分 A(2) 期末考试试题	62
清华大学 2011 级微积分 A(2) 期末考试试题	64
清华大学 2012 级微积分 A(2) 期末考试试题	66

清华大学 2006 级一元微积分期中考试试题

2006.11

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空) [请将答案直接填写在横线上]

1. 已知 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax + b}{x - 2} = 5$, 则 $a + b = \underline{-5}$.

2. $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(1 - \sin x)}{\sin 2x}} = \underline{e^{-\frac{1}{2}}}$.

3. 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - x) + xf(x)}{x^2} = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = \underline{\frac{1}{2}}$.

4. 已知 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = x - \left(\frac{4}{3} + a \cos x\right) \sin x$ 为 x 的五阶无穷小量, 则 $a = \underline{-\frac{5}{3}}$.

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x) - x - x^2}{\sin x^2} = \underline{-\frac{3}{2}}$.

6. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sin \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \underline{e}$.

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}{\sqrt{1+x^2} - 1} = \underline{\quad\quad\quad}$.

8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 - x}{3x^2 + 5}\right)^{\frac{x^2}{x-1}} = \underline{\quad\quad\quad}$.

9. 设 $f(x) = e^{\cos x^2}$, 则 $f'(x) = \underline{\quad\quad\quad}$.

10. 设 $f(x) = x(x+1)(x+2) \cdots (x+n)$, 则 $f'(0) = \underline{\quad\quad\quad}$.

11. 函数 $f(x) = x|x^3 + x^2 - 2x|$ 的不可导点的个数为 $\underline{\quad\quad\quad}$.

12. 曲线 $y = x + \sqrt{x^2 - x + 1}$ 在 $x \rightarrow +\infty$ 时的渐近线方程为 $\underline{\quad\quad\quad}$.

13. 设 $f(x) = \arctan x$, 则 $f''(x) = \underline{\quad\quad\quad}$.

14. 已知函数 $y = y(x)$ 由 $e^y - e^{-x} + xy = 0$ 确定, 则曲线 $y = y(x)$ 在 $x = 0$ 点处的切线方程为 $\underline{\quad\quad\quad}$.

15. 函数 $y = 2x + \sin x$ 的反函数的导数 $\frac{dx}{dy} = \underline{\quad\quad\quad}$.

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题) [请写出详细的计算过程和必要的依据]

1. 已知函数 $y(x)$ 有参数形式 $\begin{cases} x = \ln(1 + t^2) \\ y = \arctan t \end{cases}$, 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.

2. 求函数 $f(x) = \frac{x}{x^2 - x - 2}$ 在 $x_0 = 0$ 处的带有 Lagrange 余项的 n 阶 Taylor 公式.

3. 根据正整数 n 奇偶性的不同情况, 分别讨论函数 $f(x) = x^n e^{-x}$ 的单调性, 求函数在实数范围内的最值, 并画出其图像.

4. 已知 $f(x)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续可导函数, $g(x) = f(x|x|)$.

(1) 求证: $g(x)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 上的可导函数;

(2) 计算 $g'(x)$.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题) [请写出详细的证明过程]

- (8 分) 设 $f(x) \in C[0, +\infty)$, $f(0) = 0$, 在 $x > 0$ 处 $f'(x)$ 存在且单调递增. 证明: 当 $x > 0$ 时, $\frac{f(x)}{x}$ 单调递增.
- (7 分) 设函数 $y = f(x)$ 在区间 (α, β) 内二阶可导, 且其图像在 (α, β) 内有三个点满足关系 $y = ax^2 + bx + c$.
(1) 证明: 必然存在一个点 $\xi \in (\alpha, \beta)$, 使得 $f''(\xi) = 2a$;
(2) 写出此命题的一个推广命题.

答案与提示

(说明: 以下为官方提供的参考答案. 受篇幅所限, 计算题和证明题仅给出解答概要或思路.)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空)

1. -5
2. $e^{-\frac{1}{2}}$
3. $\frac{1}{2}$
4. $-\frac{1}{3}$ (提示: Taylor 展开.)
5. $-\frac{3}{2}$
6. 1 (提示: 令 $t := \frac{1}{x}$ 并取对数.)
7. $-\frac{1}{2}$ (提示: 分子有理化.)
8. $e^{-\frac{1}{3}}$
9. $-2x \sin x^2 e^{\cos x^2}$
10. $n!$ (提示: 利用导数定义.)
11. 2
12. $y = 2x - \frac{1}{2}$
13. $-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$
14. $x + y = 0$
15. $\frac{1}{2 + \cos x}$

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题)

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2t}$ (5 分), $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1+t^2}{4t^3}$ (5 分).
2. $\frac{x}{x^2 - x - 2} = \frac{2}{x-2} - \frac{1}{x-1} = \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) x^k + (-1)^{n+1} \left[\frac{2}{(\theta x - 2)^{n+2}} - \frac{1}{(\theta x - 1)^{n+2}} \right] x^{n+1}, \theta \in (0, 1)$
(展开式 6 分; Lagrange 余项 4 分, 写为 Peano 余项得 2 分).
3. $f'(x) = (n-x)x^{n-1}e^{-x}$. (i) $n = 1$ 时, 驻点为 $x = 1$, 在 $(-\infty, 1)$ 上递增, 在 $(1, +\infty)$ 上递减, 故有最大值 e^{-1} 而无最小值. (2 分) (ii) $n = 2k + 1 (k \in \mathbb{Z}^+)$ 为奇数时, 驻点为 $x = n$ 与 $x = 0$, 在 $(-\infty, n)$ 上递增, 在 $(n, +\infty)$ 上递减, 故有最大值 $n^n e^{-n}$ 而无最小值. (2 分) (iii) $n = 2k (k \in \mathbb{Z}^+)$ 为偶数时, 驻点为 $x = n$ 与 $x = 0$, 在 $(-\infty, 0)$ 上递减, 在 $(0, n)$ 上递增, 在 $(n, +\infty)$ 上递减, 故有最小值 0 而无最大值. (3 分) 函数图像略. (3 分, 每种情况 1 分)
4. (1) $g(x) = \begin{cases} f(x^2) & x \geq 0 \\ f(-x^2) & x < 0 \end{cases}$, 在 $x \neq 0$ 处显然可导. 在 $x = 0$ 处, 利用导数定义及 L'Hospital 法则可得

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x} = 0, \text{ 故 } g(x) \text{ 可导. (5 分). (2) } g'(x) = \begin{cases} 2xf'(x^2) & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -2xf'(-x^2) & x < 0 \end{cases} \text{ (5 分)}$$

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题)

1. 记 $F(x) := \frac{f(x)}{x}$, 则 $F'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$. (4 分). 由 Rolle 中值定理, $\exists \xi \in (0, x) : f(x) - f(0) = f'(\xi)x$. (2 分) 故 $F'(x) = \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x} > 0$, 从而 $\frac{f(x)}{x}$ 单调递增. (2 分)
2. (1) 记 $F(x) := f(x) - (ax^2 + bx + c)$, 则 F 在 (α, β) 内二阶可导. 由已知条件, $\exists u < v < w \in (\alpha, \beta) : F(u) = F(v) = F(w) = 0$, 故由 Rolle 中值定理知 $\exists \xi_1 \in (u, v), \xi_2 \in (v, w) : F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0$. (2 分) 因此, $\exists \xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (\alpha, \beta) : F''(\xi) = f''(\xi) - 2a = 0$, 即得. (2 分) (2) 凡与本题有关且正确的推广命题皆可. (3 分)

清华大学 2007 级一元微积分期中考试试题

2007.11

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空) [请将答案直接填写在横线上]

1. 设 $f(x) = x^2 \cos x$, 则 $f^{(30)}(x) =$ _____.
2. 设 $f'(a)$ 存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f(a) - f\left(a + \frac{1}{n}\right) \right] =$ _____.
3. 设 $f(x) = \begin{cases} (x+1) \arctan \frac{1}{x^2-1} & |x| \neq 1 \\ 0 & |x| = 1 \end{cases}$ =_____.
4. 设 m, n 是正整数, 则 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{\sqrt[m]{x} - 1} =$ _____.
5. 设 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = f'(t) \\ y = tf'(t) - f(t) \end{cases}$ 给出 ($f''(t_0) \neq 0$), 则曲线 $y = y(x)$ 在 $(x_0, y_0) = (f'(t_0), t_0 f'(t_0) - f(t_0))$ 点的切线方程是_____.
6. 设方程 $y = F(x^2 + y^2) + F(x + y)$ 确定 y 是 x 的函数, 其中 $F(u)$ 可导, 则 $\frac{dy}{dx} =$ _____.
7. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1 - \cos x}{\sin x} \right)^{\frac{1}{\ln x}} =$ _____.
8. 设 $f(x) = \cos^2(ax)$, 则 $f^{(5)}(x) =$ _____.
9. 函数 $y = \sqrt{x^2 + x + 1}$ 当 $x \rightarrow +\infty$ 时的渐近线为_____.
10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x} =$ _____.
11. 当 $x > 0$ 时, $\frac{d}{dx}(x^x) =$ _____.
12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - \cos x}{x^2} =$ _____.
13. 函数 $f(x) = \frac{x}{3} - x^{\frac{2}{3}}$ 的单调减区间为_____.
14. 设 $\begin{cases} x = 1 + e^t \\ y = te^t \end{cases}$, 则 $\frac{dy}{dx} =$ _____, $\frac{d^2y}{dx^2} =$ _____.

二、计算题 (每题 8 分, 共 5 题) [请写出详细的计算过程和必要的依据]

1. 设 $f(x)$ 在 $x = a$ 点可导, 且 $f(a) \neq 0$. 计算 $I = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{f\left(a + \frac{1}{x}\right)}{f(a)} \right]^x$.
2. 设 $y = \frac{x^2 - 2}{x^2 - x - 2}$, 求 $y^{(n)}(x)$.
3. 求常数 a 的范围, 使不等式 $\ln x \leq a(x - 1)$ 对于任何 $x > 0$ 都成立.

4. 若 $f'(x) = 1 + x^2 + x^3 + o(x^3)(x \rightarrow 0)$, $g(x) = \begin{cases} \frac{x}{f(x) - f(0)} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$.

(1) 当 a 取何值时 $g(x)$ 连续?

(2) 计算 $g(x)$ 到 3 阶的带 Peano 余项的 Taylor 公式.

5. 设 $g(0) = g'(0) = 0$, $f(x) = \begin{cases} g(x) \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$. 求 $f'(0)$.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题) [请写出详细的证明过程]

1. (7 分) 设 $0 < a < b$, 证明: $\ln \frac{b}{a} > \frac{2(b-a)}{a+b}$.

2. (8 分) 已知 $f \in C^{(2)}[0, 1]$, $|f''(x)| \leq M$. 利用 Taylor 公式证明:

(1) 若 $f(0) = 0$, 且 $f(x)$ 的最大值和最小值都在 $(0, 1)$ 内部取得, 则 $|f(x)| \leq \frac{M}{2}$;

(2) 若 $f(0) = 0$, $f(1) = 0$, 则 $|f(x)| \leq \frac{M}{8}$.

答案与提示

(说明: 以下为官方提供的参考答案. 受篇幅所限, 计算题和证明题仅给出解答概要或思路.)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空)

1. 870 2. $-f'(a)$ (提示: 利用导数定义.) 3. $x = 1$ 4. $\frac{n}{m}$ 5. $y = t_0 x - f(t_0)$
 6. $\frac{2xF'(x^2+y^2) + F'(x+y)}{1-2yF'(x^2+y^2) - F'(x+y)}$ 7. e (提示: L'Hospital 法则.) 8. $-16a^5 \sin(2ax)$ (提示: 标准形式.)
 9. $y = x + \frac{1}{2}$ 10. 1 11. $x^x(\ln x + 1)$ (提示: 对数求导.) 12. 1 (提示: 分子有理化, Taylor 展开.)
 13. $[0, 8]$ 14. $1+t; e^{-t}$

二、计算题 (每题 8 分, 共 5 题)

1. 令 $t := \frac{1}{x} \rightarrow 0^+$, 记 $y := \left[\frac{f(a+t)}{f(a)} \right]^{\frac{1}{t}}$. 则 $\ln y = \frac{\ln |f(a+t)| - \ln |f(a)|}{t}$, $\lim_{t \rightarrow 0^+} \ln y = \frac{d(\ln |f|)}{dt} \Big|_{x=a} = \frac{f'(a)}{f(a)}$,
 故 $I = e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$. 注: 若直接变形 $y = \left[1 + \frac{f(a+t)-f(a)}{f(a)} \right]^{\frac{f(a)}{f(a+t)-f(a)} \cdot \frac{f(a+t)-f(a)}{tf(a)}}$, 则要求 $f(a+t) \neq f(a)$, 但这里不扣分.

2. $y = 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x-2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+1}$ (4 分), 因此 $y^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{3} [2(x-2)^{-n-1} + (x+1)^{-n-1}]$ (4 分).

3. 记 $f(x) := \begin{cases} \frac{\ln x}{x-1} & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$, 则 $f(x)$ 在 \mathbb{R}^+ 上连续. $x \neq 1$ 时, $f'(x) = \frac{x-1-x \ln x}{x(x-1)^2}$, 研究 $x-1-x \ln x$ 知其

恒负, 故 $f(x)$ 单调递减. 进而在 $(0, 1)$ 和 $(1, +\infty)$ 上讨论知 $a = 1$. (8 分)

4. (1) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \frac{1}{f'(0)} = 1$, 故 $a = 1$ 时 $g(x)$ 连续. (4 分) (2) $g(x) = 1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + o(x^3)$. (4 分)

5. $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} \sin \frac{1}{x}$ (2 分), 而 $\left| \frac{g(x)}{x} \sin \frac{1}{x} \right| \leq \left| \frac{g(x)}{x} \right| \rightarrow g'(0) = 0$ (4 分), 故 $f'(0) = 0$ (2 分).

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题)

1. 两端为齐次式, 令 $x = \frac{b}{a} \in (1, +\infty)$, 即要证 $\ln x > \frac{2(x-1)}{x+1}$ 并记 $f(x) = (x+1) \ln x - 2(x-1)$ (2 分).
 $f'(x) = \ln x + \frac{1}{x} - 1$ (2 分), $f''(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} > 0$ (2 分), 故 $f'(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 进而 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 即有 $f(x) > f(1) = 0$. 移项即得所求式. (2 分)

2. (1) 设 $f(x)$ 在 $x_1, x_2 \in (0, 1)$ 处分别取最小、最大值 (且为极值点). 在 x_1 处由 Taylor 公式知 $f(x) = f(x_1) + \frac{f''(\xi)}{2}(x-x_1)^2 (\exists \xi)$. (2 分) 取 $x = 0$ 知 $|f(x_1)| \leq \frac{M}{2}$. 同理 $|f(x_2)| \leq \frac{M}{2}$, 即得. (2 分) (2) 类似上一问, 仅需对 $x_1 \in (0, \frac{1}{2}]$ 和 $x_1 \in (\frac{1}{2}, 1)$ 的情形分别讨论, 用邻近的端点放缩即可. (4 分)

清华大学 2008 级一元微积分期中考试试题

2008.11.7

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空) [请将答案直接填写在横线上]

1. 设 $f(x) = x^2 e^x$, 则 $f^{(10)}(0) =$ _____.
2. 设 $f'(a)$ 存在, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left[f\left(a - \frac{1}{n}\right) - f\left(a + \frac{1}{n}\right) \right] =$ _____.
3. 设 $f(x)$ 在 $x = 1$ 的一个邻域内可导, 且满足条件 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-x)}{x} = -1$, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的斜率为_____.
4. 点 $(1, 0)$ 到抛物线 $y^2 = x$ 的最短距离是_____.
5. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\alpha x} - \sqrt{1+\beta x}}{x} =$ _____.
6. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \tan x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{\sin x}} =$ _____.
7. 假设当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $(1 - ax)^{\frac{1}{4}} - 1$ 和函数 $\sin x$ 是等价无穷小, 则 $a =$ _____.
8. 函数 $f(x) = x^3 - 3x + 2$ 在闭区间 $[-2, 2]$ 上的最大值为_____.
9. 设 $f(x) = \begin{cases} x + a & x \leq 0 \\ \frac{\ln(1+x)}{x} & x > 0 \end{cases}$, 则当 $a =$ _____ 时, 函数 f 在 $x = 0$ 处连续.
10. 设 $y = y(x)$ 是由方程 $e^{x+y} + \cos y = 1$ 确定的可微隐函数, 则其导函数 $\frac{dy}{dx} =$ _____.
11. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln x \ln(1-x) =$ _____.
12. 已知由方程 $x = 1 + y + y^3$ 确定了一个可微的隐函数 $y = y(x)$, 满足 $y(1) = 0$, 那么其导函数在 $x = 1$ 处的值 $y'(1) =$ _____.
13. 函数 $f(x) = \frac{2x^2 + e^{-x}}{1+x}$ 的斜渐近线方程为_____.
14. 由参数方程 $\begin{cases} x = \sin t \\ y = e^t \end{cases}$ 表示的曲线在点 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, e^{\frac{\pi}{4}}\right)$ 处的切线方程为_____.
15. 设 $f(x) = x^2$, $h(x) = f(1 + g(x))$, 其中 $g(x)$ 在 $x = 1$ 的一个邻域内可导, 且 $g'(1) = h'(1) = 1$, 则 $g(1) =$ _____.

二、计算题 (每题 8 分, 共 5 题) [请写出详细的计算过程和必要的依据]

1. 设 $y = y(x)$ 是由参数方程 $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ (旋轮线) 所确定的二阶连续可微函数. 计算 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.
2. 计算函数 $y(x)$ 的 n 阶导函数 $y^{(n)}(x)$, 其中函数 $y(x)$ 由下式给出: $y(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 2x - 3}$.
3. 确定函数 $\ln(1+x^2)$ 的单调区间、凸性区间、极值以及拐点, 并画出该函数曲线的草图.

4. 求函数 $y = \ln x$ 在 $x = 2$ 处带 Lagrange 余项的 n 阶 Taylor 展开式.
5. 设函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 的某个邻域内可导且 $f(a) = 0$. 若其绝对值函数 $|f(x)|$ 在 $x = a$ 处也可导, 求 $f'(a)$ 的值, 并说明理由.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题) [请写出详细的证明过程]

1. (8 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 上二阶可导. 进一步假设 $f(a) = f(b) = 0$, 且存在一点 $c \in (a, b)$ 使得 $f(c) > 0$. 证明: 存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f''(\xi) < 0$.
2. (7 分) 证明: 当 $x > 0$ 时, $(x^2 - 1) \ln x \geq (x - 1)^2$.

答案与提示

(说明: 本卷参考答案未公开, 以下答案仅供参考, 使用时务必谨慎核验.)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空)

1. 90 2. $-2f'(a)$ (提示: 利用导数定义.) 3. -1 4. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 5. $\frac{\alpha}{m} - \frac{\beta}{n}$ (提示: $L'Hospital$ 法则或 Taylor 展开.) 6. 1 (提示: 取对数用 $L'Hospital$ 法则.) 7. -4 8. 4 9. 1 10. $\frac{e^{x+y}}{\sin y - e^{x+y}}$
 11. 0 (提示: 作代换 $t = 1 - x \rightarrow 0^+$.) 12. 1 13. $y = 2x - 2$ 14. $y = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}x}$ 15. $-\frac{1}{2}$

二、计算题 (每题 8 分, 共 5 题)

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}, \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{(1 - \cos t)^2}$.
2. $y = \frac{7}{2(x-3)} - \frac{1}{2(x+1)} + 1, y^{(n)} = (-1)^n n! \left[\frac{7}{2(x-3)^{n+1}} - \frac{1}{2(x+1)^{n+1}} \right]$.
3. 记 $f(x) := \ln(1+x^2)$, 则 $f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}, f''(x) = \frac{2(1-x^3)}{(x^2+1)^2}$. 故函数在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 有极小值 $f(0) = 0$; 函数在区间 $(-\infty, -1)$ 及 $(1, +\infty)$ 上凸, 而在区间 $(-1, 1)$ 下凸, 有拐点 $(\pm 1, \ln 2)$.
4. 令 $t := x - 2$, 则可化为 $y = \ln 2 + \ln \left(1 + \frac{t}{2} \right) \stackrel{\text{Taylor}}{=} \ln 2 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} t^k}{k \cdot 2^k} + R_n = \ln 2 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} (x-2)^k}{k \cdot 2^k} + \frac{(-1)^n (x-2)^{n+1}}{(n+1)[\theta(x-2) + 2]^{n+1}}$, 其中 $\theta \in (0, 1)$.
5. 记 $g(x) := |f(x)|$, 则 $g'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|f(a+h)| - |f(a)|}{h} \stackrel{f(a)=0}{=} \left| \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right| = |f'(a)|$, 同理 $g'_-(a) = -|f'(a)|$, 故由 $g(x)$ 的可导性只能有 $f'(a) = 0$.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题)

1. 由已知条件及 Lagrange 中值定理: $\exists \alpha \in (a, c) : f'(\alpha) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a} > 0, \exists \beta \in (c, b) : f'(\beta) = \frac{f(c) - f(b)}{c - b} < 0$. 而 $f' \in \mathcal{D}[\alpha, \beta]$, 故 $\exists \xi \in (\alpha, \beta) \subset (a, b) : f''(\xi) = \frac{f'(\alpha) - f'(\beta)}{\alpha - \beta} < 0$.
2. 记 $g(x) := (x+1) \ln x - (x-1)$, 则 $g'(x) = \ln x + \frac{1}{x}, g''(x) = \frac{x-1}{x^2} \begin{cases} > 0 & x \in (1, +\infty) \\ < 0 & x \in (0, 1) \end{cases}$, 故导函数 $g'(x) \geq g'(1) = 1 > 0$, 从而 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 而 $g(1) = 0$, 故 $(x-1)g(x) \geq 0$, 移项整理即得.

清华大学 2010 级微积分 A(1) 期中考试试题

2010.11

(本卷后用作期中考试样卷.)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空) [请将答案直接填写在横线上]

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^x = \underline{\hspace{2cm}}.$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - x}{\arcsin x + x} = \underline{\hspace{2cm}}.$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{\ln(1+x^3)} = \underline{\hspace{2cm}}.$
- $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2} = \underline{\hspace{2cm}}.$
- 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$ 为 x^k 的同阶无穷小量, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}.$
- 函数 $f(x) = \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}}$ 在 $x = 1$ 处间断点的类型为 $\underline{\hspace{2cm}}.$
- 设 $y = x^x (x > 0)$, 则其微分 $dy = \underline{\hspace{2cm}}.$
- 设 $f(x) = e^{\sin(x^2+1)}$, 则 $f'(x) = \underline{\hspace{2cm}}.$
- 设由 $\begin{cases} x = 2t + \sin t \\ y = \cos t \end{cases}$ 确定 $y = f(x)$, 则在 $x = 0$ (即 $t = 0$) 点, $f'(0) = \underline{\hspace{2cm}}.$
- 设 $y = e^x + \ln x (x > 0)$, 则其反函数 $x = x(y)$ 的导数 $\frac{dx}{dy} = \underline{\hspace{2cm}}.$
- 函数 $f(x) = xe^x$ 的 n 阶导函数 ($n \geq 1$) $f^{(n)}(x) = \underline{\hspace{2cm}}.$
- 函数 $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$ 在区间 $[-2, 2]$ 上的最大值为 $\underline{\hspace{2cm}}.$
- 设 $f(x) = |x - \sin x|$, 则 $f'(0) = \underline{\hspace{2cm}}.$
- 曲线 $y = (x+1)\sqrt[3]{3-x}$ 在其上一点 $(-1, 0)$ 的法线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}.$
- 曲线 $y = \sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1}$ 的渐近线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题) [请写出详细的计算过程和必要的依据]

- 确定 a, b 的值, 使函数 $f(x) = \begin{cases} \sin ax & x \leq 0 \\ \ln(1+x) + b & x > 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导.
- 计算 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right)^{\frac{1}{\ln x}}.$
- 设 $f''(x)$ 存在且 $f'(x) \neq 1, \forall x \in (-\infty, +\infty)$, 函数 $y = y(x)$ 由 $y = f(x+y)$ 确定. 求 y' 与 y'' .
- 求 $f(x) = |x^3 - 2x^2 + x|$ 的所有最大单增区间、上凸下凸区间、极大极小值点, 并画出 $y = f(x)$ 的图像示意图.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题) [请写出详细的证明过程]

- (8 分) 证明: 当 $x > 0$ 时, $(x^2 - 1) \ln x \geq (x - 1)^2$.
- (7 分) 设 $f(x) \in \mathcal{C}^1(-\infty, +\infty)$ 为下凸函数.
 - 证明: $\forall x_0, x \in (-\infty, +\infty): f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$;
 - 证明: 若存在常数 $M > 0$, 使得 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$, 均有 $|f(x)| \leq M$, 则 $f(x)$ 为常值函数.

答案与提示

(说明: 以下为官方提供的参考答案. 受篇幅所限, 计算题和证明题仅给出解答概要或思路.)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空)

- $\frac{1}{e}$
- $\frac{1}{2}$ (提示: Taylor 展开.)
- $\frac{1}{3}$ (提示: 注意 $x \rightarrow +\infty$, 只能用 L'Hospital 法则.)
- $\frac{4}{3}$
- 1 (提示: 通分后 Taylor 展开.)
- 第一类间断点
- $x^x(1 + \ln x)dx$
- $2x \cos(x^2 + 1)e^{\sin(x^2 + 1)}$
- 0
- $\frac{1}{e^x + \frac{1}{x}}$
- $(x + n)e^x$
- 13
- 0
- $y = -\frac{\sqrt[3]{2}}{2}(x + 1)$
- $y = x + \frac{1}{3}$

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题)

- 由连续性知 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = b \Rightarrow b = 0$. (3 分) 据导数定义有 $f'_-(0) = a$, $f'_+(0) = 1 \Rightarrow a = 1$ (6 分). 故 $a = 1, b = 0$ (1 分).
- 取对数得 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\ln x} \xrightarrow{\text{L'Hospital}} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{\frac{\pi}{2} - \arctan x}$ (4 分) $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{1+x^2}}{\arctan x - \frac{\pi}{2}} \xrightarrow{\text{L'Hospital}}$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x^2) \cdot \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = -1$ (4 分), 故原极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}} = \frac{1}{e}$. (2 分)
- $y' = \frac{f'(x+y)}{1-f'(x+y)}$ (4 分), $y'' = \frac{f''(x+y)}{[1-f'(x+y)]^3}$ (6 分).
- 讨论 $g(x) := x^3 - 2x^2 + x$ 的一阶与二阶导数, 知 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 及 $(\frac{1}{3}, 1)$ 上单调递减, 而在 $(0, \frac{1}{3})$ 及 $(1, +\infty)$ 上单调递增 (2 分); 在 $(-\infty, 0)$ 及 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 下凸, 而在 $(0, \frac{2}{3})$ 上凸 (2 分). 进而, 函数有极大值点 $x = \frac{1}{3}$, 有极小值点 $x = 0$ 和 $x = 1$ (2 分). 函数草图略. (4 分, 酌情给分)

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题)

- 记 $\varphi(x) := \ln x - \frac{x-1}{x+1}$, 则 $\varphi'(x) = \frac{x^2+1}{x(x+1)^2} > 0, \forall x > 0$. (3 分) 而 $\varphi(1) = 0$, 故 $\varphi(x) \begin{cases} < 0 & x \in (0, 1) \\ > 0 & x \in (1, +\infty) \end{cases}$. (4 分) 移项知 $x > 0$ 时原不等式恒成立. (1 分)
- (1) 若 $x > x_0$, 则 $\exists \xi \in (x_0, x): \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi) \geq f'(x_0)$ (由下凸性知 $f'(x)$ 单调递增), 移项即得待证式. $x < x_0$ 的情形同理可证. (4 分) (2) 用反证法, 假设 $\exists x_1 < x_2: f(x_1) \neq f(x_2)$, 可不妨设 $f(x_1) < f(x_2)$, 则 $k := \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$. 由 Lagrange 中值定理, $\exists \xi \in (x_1, x_2) Lf'(\xi) = k$, 从而 $f'(x) > k, \forall x > \xi$. 由 (1) 得: $f(x) > f(\xi) + k(x - \xi), \forall x > \xi$, 这与 $f(x)$ 的有界性矛盾. 故假设不成立, 命题得证. (3 分)

清华大学 2011 级微积分 A(1) 期中考试试题

2011.11.12

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空) [请将答案直接填写在横线上]

1. 设 $x_n = \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{2}$, 则上极限 $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n =$ _____.
2. 设 $A = \{x \mid x^2 - 2x - 3 < 0\}$, 则 $\inf A =$ _____.
3. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x)^{\frac{1}{\ln x}} =$ _____.
4. 设 a, b 均为正数, 求极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{a^{\frac{1}{n}} + 2b^{\frac{1}{n}}}{3} \right)^n =$ _____.
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{1}{x} \right)^x =$ _____.
6. 设 $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$, 则极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n =$ _____.
7. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - e^x}{x} & x \neq 0 \\ -1 & x = 0 \end{cases}$, 则 $f'(0) =$ _____.
8. 函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$ 在 $x = 1$ 处间断点的类型为_____.
9. 在 $x \rightarrow 0$ 时, 无穷小 $\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 - \sin x}$ 的阶为_____.
10. 函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t + \sin t \\ y = t - \cos t \end{cases}$ 给出, 其微分 $dy =$ _____.
11. 设 f 可导, 函数 $y = f(\sin x)$ 存在可导的反函数, 则 $\frac{dx}{dy} =$ _____.
12. 曲线 $y = x \arctan x$ 在 $x \rightarrow +\infty$ 时的渐近线为_____.
13. 参数曲线 $\begin{cases} x = e^t + \sin t \\ y = 4t + \cos t \end{cases}$ 在 xOy 平面上点 $(1, 1)$ 处 (即 $t = 0$ 处) 的切线方程为_____.
14. 设 $f(x) = x(x+1)(x+2) \cdots (x+100)$, 则 $f'(0) =$ _____.
15. 设 $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$, 则 $f'(x)$ 在区间 $(0, 2)$ 内有_____个零点.

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题) [请写出详细的计算过程和必要的依据]

1. 设二阶可导函数 $y = y(x)$ 由方程 $\sin(x+y) = x-y$ 确定, 求二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$.
2. 求函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 在开区间 $(0, +\infty)$ 上的单调区间, 极值和极值点, 凸性区间, 以及渐近线 (如果存在的话), 并画出草图.
3. 设数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{2n} = a$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{2n+1} = b$. 求极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$.

4. 用极限的“ $\varepsilon - \delta$ ”定义直接验证 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{3}$.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题) [请写出详细的证明过程]

- (8 分) 设 $0 < x < 1$, 证明不等式 $(1+x)\ln^2(1+x) < x^2$.
- (7 分) 设 $f(x)$ 于闭区间 $[0, 1]$ 上可导, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, 且 $f(x)$ 不恒等于 x . 证明: 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi) > 1$.

答案与提示

(说明: 以下为官方提供的参考答案. 受篇幅所限, 计算题和证明题仅给出解答概要或思路.)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空)

- $\frac{1}{2}$
- 1
- e^2 (提示: 取对数用 $L'Hospital$ 法则.)
- $\sqrt[3]{ab^2}$ (提示: 幂平均结论, 取对数用等价无穷小.)
- 1 (提示: 作代换 $t := \frac{1}{x} \rightarrow 0^+$.)
- 1 (提示: 放缩法.)
- $-\frac{1}{2}$
- 第一类 (跳跃) 间断点
- 1 (提示: $Taylor$ 展开.)
- $\frac{1 + \sin t}{1 + \cos t} dx$
- $\frac{1}{f'(\sin x) \cos x}$
- $y = \frac{\pi}{2}x - 1$
- $y = 2x - 1$
- 100!
- 2

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题)

- $y' = \frac{1 - \cos(x+y)}{1 + \cos(x+y)}, y'' = \frac{\sin(x+y)(1+y')^2}{1 + \cos(x+y)}$.
- 求导得 $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, f''(x) = \frac{2 \ln x - 3}{x^3}$. 因此, 函数在 $(0, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减, 从而有极大值点 $x = e$ (对应极大值 $f(e) = \frac{1}{e}$). 函数在 $(0, e^{\frac{3}{2}})$ 上凸, 在 $(e^{\frac{3}{2}}, +\infty)$ 下凸, 从而有拐点 $(e^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}})$. 函数有两条渐近线 $x = 0$ 和 $y = 0$. 函数草图略.
- 由题意, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}}{n} = a, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1}}{n} = b$. 记 $S_n := \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} = \frac{a+b}{2}$, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2n}{2n+1} S_{2n} + \frac{a_{2n+1}}{2n+1} \right) = \frac{a+b}{2}$. 故原极限值为 $\frac{a+b}{2}$.
- $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{5}{6}\varepsilon \right\}, \forall x \in (2 - \delta, 2 + \delta) \subset \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2} \right) : \left| \frac{1}{x^2 - 1} - \frac{1}{3} \right| = \frac{|x+2||x-2|}{3|x^2-1|} < \frac{(\frac{5}{2}+2)|x-2|}{3(\frac{9}{4}-1)} = \frac{6}{5}|x-2| < \varepsilon$. 此即为极限定义.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题)

- 记 $F(x) := (1+x)\ln^2(1+x) - x^2$, 求导得 $F'(x) = \ln^2(1+x) + 2\ln(1+x) - 2x, F''(x) = \frac{2[\ln(1+x) - x]}{1+x} < 0, \forall x \in (0, 1)$. 而 $F(0) = F'(0) = 0$, 故 $F(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, $F(x) < F(0) = 0, \forall 0 < x < 1$.
- 用反证法, 假设 $f'(x) \leq 1, \forall x \in (0, 1)$, 则 $F(x) := f(x) - x$ 在 $[0, 1]$ 上单调递减 (由 $F'(x) \leq 0$). 因此 $0 = F(0) \geq F(x) \geq F(1) = 0, \forall x \in (0, 1)$, 即 $f(x) \equiv x$, 与题设矛盾. 故假设不成立, 命题得证. (本题也有利用微分中值定理的构造性证明.)

清华大学 2012 级微积分 A(1) 期中考试试题

2012.11.11

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空) [请将答案直接填写在横线上]

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan^4 x}{\sin^3 x (1 - \cos x)} = \underline{\hspace{2cm}}.$
- 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 (e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}) = \underline{\hspace{2cm}}.$
- 函数 $f(x) = x^2|x|$ 在 $x = 0$ 处存在最高阶导数的阶数为 $\underline{\hspace{2cm}}.$
- 曲线 $y = e^x + x^2 + 1$ 在其上一点 $(0, 2)$ 处的切线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}.$
- 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$ 确定, 则 $\frac{dy}{dx} = \underline{\hspace{2cm}}.$
- 设 $f(x) = \frac{x}{1-x}$, 则 $f^{(10)}(x) = \underline{\hspace{2cm}}.$
- 设 $y = x + e^x$, 则其反函数的导数 $\frac{dx}{dy} = \underline{\hspace{2cm}}.$
- 设 $x \rightarrow 0$ 时 $1 - \cos x$ 与 $1 - (1 + ax^2)^{\frac{1}{3}}$ 是同阶无穷小量, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}.$
- 设函数 f, g 均可微, $y = f(x^2)g(x^3)$, 则 $dy = \underline{\hspace{2cm}}.$
- 函数 $f(x) = \frac{1}{\sin \frac{1}{1-x}}$ 在 $x = 1$ 处间断点的类型为 $\underline{\hspace{2cm}}.$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = \underline{\hspace{2cm}}.$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos^2(\sqrt{n^2 + n\pi}) = \underline{\hspace{2cm}}.$
- 曲线 $y = \frac{x^3 + 3x + 4}{x^2 + 1}$ 的斜渐近线为 $\underline{\hspace{2cm}}.$
- 函数 $f(x) = 3x^{\frac{2}{3}} - 2x$ 在区间 $[-1, 2]$ 上的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题) [请写出详细的计算过程和必要的依据]

- 设函数 $f(x) = \begin{cases} \ln(x^2 + a^2) & x > 1 \\ \sin b(x-1) & x \leq 1 \end{cases}$ 在 \mathbb{R} 上可导, 求 a, b 的值.
- 求函数 $y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$ 的单调区间和凸性区间, 并写出其极值点和拐点.
- 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\cos x} - e^{-\frac{x^2}{6}}}{\sin(x^2) - \ln(1 + x^2)}.$
- 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = \ln t + t \\ y = \frac{t^2}{2} + t \end{cases}$ 确定, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}.$

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题) [请写出详细的证明过程]

- (8 分) 设 $0 \leq x_1 \leq \sqrt{c}$, $x_{n+1} = \frac{c(1+x_n)}{c+x_n}$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ (其中 $c > 1$ 为常数). 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求其收敛值.
- (7 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 可导.
 - 若 $f(0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, 求证: 存在 $\xi \in (0, +\infty)$, 使 $f'(\xi) = 0$.
 - 若 $0 \leq f(x) \leq \ln \frac{2x+1}{x+\sqrt{1+x^2}}$, 求证: 存在 $\xi \in (0, +\infty)$, 使 $f'(\xi) = \frac{2}{2\xi+1} - \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}$.

答案与提示

(说明: 本卷参考答案未公开, 以下答案仅供参考, 使用时务必谨慎核验.)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空)

- 2
- $\frac{A}{2}$ (提示: Stolz 定理.)
- 1
- 2 阶
- $y = x + 2$
- $\frac{\cos t + \sin t}{\cos t - \sin t}$
- $\frac{10!}{(1-x)^{11}}$
- $\frac{1}{1+e^x}$
- $-\frac{3}{2}$
- $[2xf'(x^2) \cdot g(x^3) + f(x^2) \cdot 3x^2g'(x^3)]dx$
- 第二类间断点 (提示: 左右极限震荡型不存在.)
- $e^{-\frac{1}{2}}$
- 1
- $y = x$
- $3\sqrt[3]{4} - 4$ (提示: 检验极值可疑点.)

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题)

- 由 $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(a+1) = f(1) = 0$ 得 $a = 0$, 进而由 $b = f'_-(1) = f'_+(1) = 2$ 得 $b = 2$.
- $y' = \frac{x^2-3}{3(x^2-1)^{\frac{4}{3}}}$, $y'' = \frac{2x(9-x^2)}{9(x^2-1)^{\frac{7}{3}}}$. 故函数在 $(-\infty, -\sqrt{3})$ 及 $(\sqrt{3}, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-\sqrt{3}, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, +\sqrt{3})$ 上单调递减, 有极值点 $\pm\sqrt{3}$; 函数在区间 $(-\infty, -3)$, $(-1, 0)$, $(1, 3)$ 下凸, 在区间 $(-3, -1)$, $(0, 1)$, $(3, +\infty)$ 上凸, 有拐点 $\pm\left(3, \frac{3}{2}\right)$ 和 $(0, 0)$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\cos x} - e^{-\frac{x^2}{6}}}{\sin(x^2) - \ln(1+x^2)} \stackrel{\text{Taylor}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{72}) + (1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{72}) + o(x^4)}{x^2 - (x^2 - \frac{x^4}{2}) + o(x^4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^4}{36} + o(x^4)}{\frac{x^4}{2} + o(x^4)} = -\frac{1}{18}.$
- $\frac{dy}{dx} = t$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})}{\frac{dx}{dt}} = \frac{t}{1+t}.$

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题)

- 注意到 $x_{n+1} - x_n = \frac{c-x_n^2}{c+x_n}$ ($n \in \mathbb{Z}^+$), 故用归纳法可证 $0 \leq x_{n+1} \leq x_n \leq \sqrt{c}$ ($n \in \mathbb{Z}^+$), 从而 $\{x_n\}$ 单调有界, 必有极限 A . 递推式两端取极限并化简得 $A^2 = c$, 由保号性知数列的极限值为 $A = \sqrt{c}$.
- (1) 若 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有一根 x_0 , 则对区间 $(0, x_0)$ 用 Rolle 定理即可. 否则, 由连续性知 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上不变号, 不妨设为恒正. 则 $\exists M > 0, \forall x > M: f(x) < f(1)$; 特别地, $0 < f(2M) < f(1)$. 又由 $f(x)$ 的连续性, $\exists m \in (0, 1): f(m) = f(2M)$, 从而对区间 $(m, 2M)$ 用 Rolle 定理即可. (2) 记 $g(x) := f(x) - \ln \frac{2x+1}{x+\sqrt{1+x^2}}$, 则不难验证 $g(0) = 0$. 而 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{2x+1}{x+\sqrt{1+x^2}} = 0$, 再由夹逼定理即得 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$. 因此, 由 (1) 的结论知 $\exists \xi \in (0, +\infty): g'(\xi) = 0$. 移项整理即得待证不等式.

清华大学 2013 级微积分 A(1) 期中考试试题

2013.11.17

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空) [请将答案直接填写在横线上]

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $3x - 4\sin x + \sin x \cos x$ 与 x^p 为同阶无穷小, 则 $p =$ _____.
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1+x}}{\ln(1+x^2)} =$ _____.
3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(3^{\frac{1}{n-1}} - 3^{\frac{1}{n}} \right) =$ _____.
4. 由方程 $x^2 + y^2 + \sin x + \sin y = 1$ 确定的隐函数 $y = y(x)$ 的导数为 $\frac{dy}{dx} =$ _____.
5. 函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x + e^{2ax} - 1}{x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续, 则 $a =$ _____.
6. 函数 $y = \sin x + e^x$ 的反函数微分 $dx =$ _____.
7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{(x-2)(x+3)} \right]^x =$ _____.
8. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right) =$ _____.
9. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 \arctan \frac{1}{x} & x < 0 \\ \ln(1+x^2) & x \geq 0 \end{cases}$, 则 $f'(0) =$ _____.
10. 曲线 L 的参数方程为 $\begin{cases} x = \sin t + t \\ y = t \sin t - \cos t \end{cases}$ (t 为参数), 则 L 在参数 $t = \frac{\pi}{2}$ 处的切线方程为_____.
11. 设 a, b 均为大于 0 的常数, $f(x) = a^{x^b}$, 则 $f'(x) =$ _____.
12. 曲线 $y = (2x-1)e^{\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线方程为_____.
13. 设 $(1, 3)$ 为 $y = ax^3 + bx^2$ 的拐点, 则 $b - a =$ _____.
14. 函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+x^n} (x \geq 0)$ 的间断点类型为_____.
15. 使不等式 $\ln(1+x) < \alpha + 2\sqrt{1+x}$ 对任意的 $x > 0$ 都成立的 α 的最小值为_____.

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题) [请写出详细的计算过程和必要的依据]

1. 求由参数形式 $\begin{cases} x = \cos t + t \\ y = \sin t + t \end{cases}$ 给出的函数 $y = y(x)$ 的二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$.
2. 求函数 $f(x) = \sin(x^2 + 2\sqrt{\pi}x)$ 在 $x_0 = -\sqrt{\pi}$ 处的带有 Peano 余项的 Taylor 公式 (求出一般项), 并求 $f^{(n)}(-\sqrt{\pi})$.
3. 设 $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$, 求 $f(x)$ 的定义域、单调区间、极值点、凸性区间、拐点及渐近线, 并画出 $y = f(x)$ 的示意图.

4. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{g(x) - e^{-x}}{x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$, 其中 $g(x)$ 二阶连续可微, $g(0) = 1, g'(0) = -1$.

(1) a 为何值时 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续?

(2) 当 $f(x)$ 为连续函数时, $f(x)$ 是否可导? 若可导, 求 $f'(x)$.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题) [请写出详细的证明过程]

1. (8 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上三阶可导, 且在 $[a, b]$ 上 $|f'''(x)| \leq M$, $f(a+h) = f(a) + f'(a+\frac{h}{2})h + E(h)$ ($0 < h < b-a$), 其中 $E(h)$ 为误差项. 求证: $|E(h)| \leq \frac{7}{24}Mh^3$.

2. (7 分) 设 $x_0 > 0, x_n = \ln(1+x_{n-1})$ ($n = 2, 3, 4, \dots$). 求证:

(1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ 存在, 并求其值;

(2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n = 2$.

答案与提示

(说明: 以下为官方提供的参考答案. 受篇幅所限, 计算题和证明题仅给出解答概要或思路.)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空)

1. 5 2. 0 (提示: 分子有理化.) 3. $\ln 3$ 4. $-\frac{2x+\cos x}{2y+\cos y}$ 5. -2 6. $\frac{dy}{\cos x + e^x}$ 7. $\frac{1}{e}$ (提示: 取对数.)
 8. $\frac{1}{3}$ (提示: 通分后 Taylor 展开.) 9. 0 10. $y = 2x - 2 - \frac{\pi}{2}$ 11. $b \ln a \cdot x^{b-1} a^{x^b}$
 12. $y = 2x + 1$ 13. 6 14. 第一类间断点 15. -2

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题)

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{1+\cos t}{1-\sin t}, \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1+\cos t - \sin t}{(1-\sin t)^3}$.

2. $f(x) = -\sin(x+\sqrt{\pi})^2 = -(x+\sqrt{\pi})^2 + \frac{1}{3!}(x+\sqrt{\pi})^6 + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)!}(x+\sqrt{\pi})^{4n+2} + o((x+\sqrt{\pi})^{4n+2})$.

从而有 $f^n(-\sqrt{\pi}) = \begin{cases} (-1)^{k-1} \cdot \frac{(4k+2)!}{(2k+1)!} & n = 4k+2 \\ 0 & n \neq 4k+2 \end{cases} (k \in \mathbb{Z}^+)$.

3. $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$. 求得 $f'(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right) \sqrt{\frac{x}{(x-1)^3}}$, 故函数在 $(-\infty, 0)$ 和 $(1, \frac{3}{2})$ 内递减, 在 $(\frac{3}{2}, +\infty)$ 内递增, 从而有极小值点 $x = \frac{3}{2}$; $f''(x) = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{x}{(x-1)^3}} \cdot \frac{1}{x(x-1)} > 0$, 故函数在定义域内均下凸. 函数有渐近线 $y = x - \frac{1}{2}, y = -x + \frac{1}{2}$ 和 $x = 1$. 函数草图略.

4. (1) 在 $x = 0$ 处, $g(x) = 1 - x + o(x) \Rightarrow f(x) = o(1), x \rightarrow 0$, 因此必然有 $a = 0$. (2) 由定义得 $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - e^{-x}}{x^2} \xrightarrow{\text{L'Hospital}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x) + e^{-x}}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{g'(x) - g(0)}{x} + \frac{e^{-x} - 1}{x} \right] = \frac{g''(0) - 1}{2}$. 而 $x \neq 0$ 时显然有 $f'(x) = \frac{x[f'(x) + e^{-x}] - [g(x) - e^{-x}]}{x^2}$, 故函数可微.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题)

1. 在 $x = a$ 处对 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 作 Taylor 展开: $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f'''(a+\theta_1h)}{6}h^3$ ($\exists \theta_1 \in (0, 1)$),
 $f'(a+\frac{h}{2}) = f'(a) + \frac{f''(a)}{2} \frac{h}{2} + \frac{f'''(a+\theta_2h)}{2} \left(\frac{h}{2}\right)^2$ ($\exists \theta_2 \in (0, 1)$), 相减得

$$|E(h)| = \left| f(a) + f'(a+\frac{h}{2})h - f(a+h) \right| = \left| \left[\frac{f'''(a+\theta_2h)}{8} - \frac{f'''(a+\theta_1h)}{6} \right] h^3 \right| \leq \frac{7}{24}Mh^3.$$

2. (1) 易见 $0 < x_n = \ln(1+x_{n-1}) < x_{n-1}$, 故 $\{x_n\}$ 单调有界, 必有极限. 两边取极限知极限值为 0. (2) 由 Stolz 定理: $\lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n \xrightarrow{\text{Stolz}} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1) - n}{\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n \ln(1+x_n)}{x_n - \ln(1+x_n)} \xrightarrow{x:=x_n \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x)}{x - \ln(1+x)} \xrightarrow{\text{Taylor}} 2$.

清华大学 2015 级微积分 A(1) 期中考试试题

2015.11.15

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空) [请将答案直接填写在横线上]

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right] = \underline{\hspace{2cm}}.$
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\arctan n)^{\frac{1}{n}} = \underline{\hspace{2cm}}.$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x)^{\frac{1}{\ln x}} = \underline{\hspace{2cm}}.$
4. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $1 - \cos(e^{x^2} - 1)$ 与 x^n 为同阶无穷小, 则 $n = \underline{\hspace{2cm}}.$
5. 如果 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 1}{x - 2} = 3$, 则 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{f(x)} - e}{x - 2} = \underline{\hspace{2cm}}.$
6. 函数 $f(x) = \begin{cases} 2ax + b & x \leq 0 \\ e^{ax} + 2bx & x > 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 点可导, 则 $a + b = \underline{\hspace{2cm}}.$
7. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) = \underline{\hspace{2cm}}.$
8. 设 $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x$, 则 $f'(x) = \underline{\hspace{2cm}}.$
9. 设 $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$, 则 $f'(x) = \underline{\hspace{2cm}}.$
10. 设 f 为可微函数, $y = f(e^x) + f(\ln x)$, 则 $\frac{dy}{dx} = \underline{\hspace{2cm}}.$
11. 由参数方程 $\begin{cases} x = e^\theta \cos \theta \\ y = e^\theta \sin \theta \end{cases}$ 表示的曲线 $y = y(x)$ 在 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 对应点处的切线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}.$
12. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $y^2 + \ln y = x^4$ 确定, 则 $dy = \underline{\hspace{2cm}}.$
13. 设 $y = x \sin x$, $x = x(y)$ 为其反函数, 则 $\frac{dx}{dy} = \underline{\hspace{2cm}}.$
14. 曲线 $y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$ 的渐近线条数为 $\underline{\hspace{2cm}}.$
15. $f(x) = \ln(x - 1)$ 在 $x_0 = 2$ 点的三阶 Taylor 多项式为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题) [请写出详细的计算过程和必要的依据]

1. 已知 $f(x) = (x + 1)e^{\frac{1}{2x}}$.
 - (1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间和凹凸区间;
 - (2) 求曲线 $y = f(x)$ 的渐近线.
2. 设 $f(x)$ 有二阶连续导函数, 且 $f(0) = 0$. 令 $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & x \neq 0 \\ f'(0) & x = 0 \end{cases}.$
 - (1) 求 $g'(x)$;
 - (2) 讨论 $g'(x)$ 在 $x = 0$ 点处的连续性.

3. 在曲线 $y = x^2$ 上求一个点 (x_0, y_0) , 其中 $x_0 \in [0, 8]$, 使过此点的切线与直线 $x = 8, y = 0$ 所围成的位于第 I 象限的三角形面积最大.

4. 设函数 $y = y(x)$ 由参数形式 $\begin{cases} x = t + e^t \\ y = t - \ln t \end{cases}$ 给出, 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题) [请写出详细的证明过程]

1. (10 分) 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ($A \in \mathbb{R}$), 用 “ $\varepsilon - \delta$ ” 语言证明: $\lim_{x \rightarrow x_0} e^{f(x)} = e^A$.

2. (5 分) 设函数 f 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(x) \neq 0, \forall x \in (0, 1)$. 试证明: 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$.

答案与提示

(说明: 本卷参考答案未公开, 以下答案仅供参考, 使用时务必谨慎核验.)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空)

1. $\frac{1}{2}$ (提示: Taylor 展开.) 2. 1 (提示: $\arctan n \rightarrow \frac{\pi}{2}$.) 3. e^2 (提示: 取对数用 L'Hospital 法则.) 4.

4. 5. $3e$ 6. 3 7. $\frac{1}{2}$ (提示: 作代换 $t := x - 1 \rightarrow 0$.) 8. $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right]$ 9.

$\frac{1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x} + \sqrt{x}}$ 10. $f'(e^x)e^x + \frac{f'(\ln x)}{x}$ 11. $y = -x + e^{\frac{\pi}{2}}$ 12. $\frac{4x^3y}{2y^2+1}dx$ 13. $\frac{1}{\sin x + x \cos x}$

14. 2 15. $(x-2) - \frac{1}{2}(x-2)^2 + \frac{1}{3}(x-2)^3$ (提示: 区分 Taylor 多项式与 Taylor 展开式.)

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题)

1. 函数定义域为 $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. (1) $f'(x) = e^{\frac{1}{2x}} \frac{2x^2 - x - 1}{2x^2}$, $f''(x) = e^{\frac{1}{2x}} \frac{5x + 1}{4x^4}$. 因此函数在 $(-\infty, -\frac{1}{2})$ 和 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-\frac{1}{2}, 0)$ 和 $(0, 1)$ 上单调递减; 函数在区间 $(-\infty, -\frac{1}{5})$ 上凸, 在区间 $(-\frac{1}{5}, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 下凸. (2) $f(x) = \left[1 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right](x+1) = x + \frac{3}{2} + o(1), x \rightarrow \infty$. 故函数有斜渐近线 $y = x + \frac{3}{2}$ 和竖直渐近线 $x = 0$.

2. (1) 作 Taylor 展开得 $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\xi)}{2}x^2$ ($\xi \in (0, x)$). 因此 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f'(0)x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(\xi)}{2} = \frac{f''(0)}{2}$ (也可用 L'Hospital 法则). (2) $g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$ ($x \neq 0$), 易见 $\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \frac{f''(0)}{2} = g'(0)$, 故 $g'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

3. 过 (x_0, x_0^2) 的切线 $y = 2x_0x - x_0^2$ 与直线 $y = 0$ 交于 $\left(\frac{x_0}{2}, 0\right)$, 与直线 $x = 8$ 交于 $(8, 16x_0 - x_0^2)$. 故三角形面积 $S = S(x) = \frac{x(16-x)^2}{4}$ ($x \in (0, 8)$). 求得 $S'(x) = \frac{(x-16)(3x-16)}{4}$, 故函数在定义域内有极大值点 $\frac{16}{3}$, 不难验证此为最大值点. 故 $S_{\max} = S\left(\frac{16}{3}\right) = \frac{4096}{27}$.

4. $\frac{dy}{dx} = \frac{t-1}{t(1+e^t)}, \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{e^t(-t^2+t+1)+1}{t^2(1+e^t)^3}$.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题)

1. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta): |f(x) - A| < \min\left\{\ln\left(1 + \frac{\varepsilon}{e^A}\right), \left|\ln\left(1 - \frac{\varepsilon}{e^A}\right)\right|\right\}$, 从而 $A + \ln\left(1 - \frac{\varepsilon}{e^A}\right) < f(x) < A + \ln\left(1 + \frac{\varepsilon}{e^A}\right)$, 即 $-\varepsilon < e^{f(x)} - e^A < \varepsilon$. 由极限定义即得证.

2. (说明: 本题似乎有误, 因为显然有 $\xi = \frac{1}{2}$ 满足题意. 下给出 “利用” 中值定理的方法.) 记 $g(x) := f(x)f(1-x)$, 则 $g(0) = g(1)$ 满足 Rolle 定理条件, 从而 $\exists \xi \in (0, 1): g'(\xi) = f'(\xi)g(1-\xi) - f(\xi)g'(1-\xi) = 0$. 移项整理即得.

清华大学 2016 级微积分 A(1) 期中考试试题

2016.11.13

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空) [请将答案直接填写在横线上]

- $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) = \underline{\hspace{2cm}}.$
- 若过原点的曲线 $y = f(x)$ 在原点与 $y = e^{2x} - 1$ 有相同的切线, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n f\left(\frac{4}{n}\right) = \underline{\hspace{2cm}}.$
- 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $x^2 y^2 + x^2 + y^2 - 1 = 0$ 确定, 则 $dy = \underline{\hspace{2cm}}.$
- 设 $f(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} x \left(1 + \frac{1}{t} \right)^{2xt}$, 则 $f'(x) = \underline{\hspace{2cm}}.$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{1}{n^2 + \pi} + \frac{1}{n^2 + 2\pi} + \cdots + \frac{1}{n^2 + n\pi} \right) = \underline{\hspace{2cm}}.$
- 当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $\tan(x^2) - \sin(x^2)$ 与 x^n 为同阶无穷小, 则 $n = \underline{\hspace{2cm}}.$
- 常数 a 满足 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{1 - x^3} - ax \right) = 0$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}.$
- 设 $y = y(x)$ 由方程 $xy + \ln y = 1$ 确定, 则曲线 $y = y(x)$ 由在其上的点 $(1, 1)$ 处的切线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}.$
- 设 $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$, 则 $f^{(10)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}.$
- 设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)x}{nx^2 + 1}$, 则 $f(x)$ 的间断点 $x = 0$ 的类型为 $\underline{\hspace{2cm}}.$
- 设 $f(x) = \varphi(a+bx) - \varphi(a-bx)$, 其中 $\varphi(x)$ 在 $x = a$ 可导. 记 $\varphi'(a) = A$, 则 $f'(0) = \underline{\hspace{2cm}}.$
- 设 $y = e^x + \arctan x$, 则其反函数 $x = x(y)$ 的导数 $\frac{dx}{dy} = \underline{\hspace{2cm}}.$
- 设 $f(x) = \arcsin \sqrt{x-1}$, 则 $f'(x) = \underline{\hspace{2cm}}.$
- 函数 $f(x) = x |\sin x|$ 在 $\left(-\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$ 内的不可导点的个数为 $\underline{\hspace{2cm}}.$
- 设函数 $y = y(x)$ 由 $\begin{cases} x = e^t + t^2 \\ y = e^t \sin t \end{cases}$ 确定, 则 $\frac{dy}{dx} = \underline{\hspace{2cm}}.$

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题) [请写出详细的计算过程和必要的依据]

- 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $\arctan \frac{x}{y} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ 确定, 求 $\frac{dy}{dx}$ 与 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.
- 设 $f(x) = \begin{cases} \lim_{t \rightarrow x} \left(\frac{\sin t}{\sin x} \right)^{\frac{t}{\sin x - \sin t}} & x \neq n\pi, n \in \mathbb{Z} \\ 0 & x = n\pi, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$. 求函数 $f(x)$ 的显式表达式, 并求 $f(x)$ 的间断点 (指出间断点的类型).
- 设 $f(x) = \begin{cases} x \arctan \frac{1}{\sqrt{x}} & x > 0 \\ \frac{\pi}{2}(e^{\sin x} - 1) & x \leq 0 \end{cases}$. 讨论 $f(x)$ 在 $x = 0$ 点处的连续性和可微性; 若可微, 讨论其

导函数 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 点处的连续性.

4. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x \ln(1 + x) - x^2}$.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题) [请写出详细的证明过程]

- (10 分) 设 $1 < x_1 < 5$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n(5 - x_n)}$ ($n = 1, 2, \dots$). 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求该极限.
- (5 分) 若函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续且严格单调, 在 $(0, 1)$ 内可导, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. 求证: 对于任意正整数 n , 存在 n 个不同的 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in (0, 1)$, 使得 $\frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} + \dots + \frac{1}{f'(\xi_n)} = n$.

答案与提示

(说明: 本卷参考答案未公开, 以下答案仅供参考, 使用时务必谨慎核验.)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空)

- $-\frac{1}{3}$ (提示: 通分后 Taylor 展开.)
- 8 (提示: 利用导数定义.)
- $dy = -\frac{x(y^2 + 1)}{y(x^2 + 1)}dx$
- $e^{2x}(1 + 2x)$
- 1 (提示: 夹逼定理.)
- 3
- 1
- $y = \frac{3 - x}{2}$
- $-\frac{3 \cdot 10!}{2^{11}}$
- 第一类 (跳跃) 间断点
- $2Ab$
- $\frac{x^2 + 1}{(x^2 + 1)e^x + 1}$
- $\frac{1}{2\sqrt{(x-1)(2-x)}}$
- 2 个
- $\frac{e^t(\sin t + \cos t)}{e^t + 2t}$

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题)

- 两边求导得 $\frac{\frac{y-xy'}{y^2}}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1} = \frac{2x + 2yy'}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot 2\sqrt{x^2 + y^2}}$, 整理得 $y' = \frac{y-x}{y+x}$. 进而有 $y'' = \frac{2(xy' - y)}{(x+y)^2} = -\frac{2(x^2 + y^2)}{(x+y)^3}$.
- 取对数得 $\lim_{t \rightarrow x} \frac{t}{\sin x - \sin t} \cdot \ln \frac{\sin t}{\sin x} = \lim_{t \rightarrow x} \frac{t}{\sin x - \sin t} \cdot \frac{\sin t - \sin x}{\sin x} = -\frac{x}{\sin x}$, 故 $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{x}{\sin x}} & x \neq n\pi \\ 0 & x = n\pi \end{cases}$.

在 $x = 0$ 处, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{e}$, 为第一类 (可去) 间断点; 在 $x = n\pi$ ($n \neq 0$) 两侧, $f(x)$ 分别趋近于 0 和 $+\infty$, 为第二类间断点. 因此函数有第一类 (可去) 间断点 0 和第二类间断点 $n\pi$ ($n \neq 0$).

- 函数在 $x = 0$ 处显然左连续, 而 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 = f(0)$, 故函数在 $x = 0$ 处连续. 注意到单侧导数 $f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \arctan \frac{1}{\sqrt{h}} = \frac{\pi}{2}$, $f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{\pi}{2} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{e^{\sin h} - 1}{h} = \frac{\pi}{2}$, 故 $f(x)$

在 $x = 0$ 处可导, 且 $f'(0) = \frac{\pi}{2}$. 故导函数 $f'(x) = \begin{cases} -\frac{\sqrt{x}}{2(x+1)} + \arctan \frac{1}{\sqrt{x}} & x > 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0, \text{ 易验证在 } x = 0 \text{ 处也连续.} \\ \frac{\pi}{2} e^{\sin x} \cos x & x < 0 \end{cases}$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x \ln(1 + x) - x^2} \xrightarrow{\text{分子有理化}} \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x \ln(1 + x) - x^2} \xrightarrow{\text{Taylor}} -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^3 + o(x^3)}{\frac{1}{2}x^3 + o(x^3)} = -\frac{1}{2}$.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题)

- $\left| x_{n+1} - \frac{5}{2} \right| = \frac{(x_n - \frac{5}{2})^2}{\sqrt{x_n(5 - x_n)} + \frac{5}{2}} < \frac{2|x_n - \frac{5}{2}|}{5} \left| x_n - \frac{5}{2} \right|$. 容易归纳证明 $x_n \in [1, x_1]$ (从而 $\frac{2|x_n - \frac{5}{2}|}{5} \leq \max \left\{ \frac{3}{5}, \frac{2|x_1 - \frac{5}{2}|}{5} \right\} =: \lambda < 1$), 则 $\left| x_{n+1} - \frac{5}{2} \right| \leq \lambda \left| x_n - \frac{5}{2} \right|$. 因此数列 $\{x_n\}$ 收敛至 $\frac{5}{2}$.
- 若 $y \equiv x$, 则任取 $(0, 1)$ 中 n 个相异实数均可. 否则, $\exists \zeta \in (0, 1) : f(\zeta) \neq \zeta$. 由 Lagrange 中值定理, $\exists \xi \in (0, \zeta) : f'(\xi) = \frac{f(\zeta) - f(0)}{\zeta - 0}$; $\exists \eta \in (\zeta, 1) : f'(\eta) = \frac{f(\zeta) - f(1)}{\zeta - 1}$. 注意到 $f'(\xi), f'(\eta)$ 中恰有一个大于 1, 另一个小于 1, 故由 Darboux 定理: $\exists \varepsilon > 0, \forall d \in \left(\frac{1}{1 - \varepsilon}, \frac{1}{1 + \varepsilon} \right), \exists \delta \in (0, 1) : f'(\delta) = d$. 因此, 仅需取 ξ_1, \dots, ξ_n 使 $\frac{1}{f'(\xi_k)} = \frac{1}{n} - \frac{n-1}{2n}\varepsilon + \frac{k}{n}\varepsilon$, 则易验证满足题意. 命题得证.

清华大学 2018 级微积分 A(1) 期中考试试题

2018.11.17

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空) [请将答案直接填写在横线上]

- $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{n^2 + \pi} + \frac{1}{n^2 + 2\pi} + \cdots + \frac{1}{n^2 + n\pi} \right) = \underline{\hspace{2cm}}.$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 1}{4x - 3} \sin \frac{1}{x + 1} = \underline{\hspace{2cm}}.$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n + 4\sqrt{n}} - \sqrt{n - 2\sqrt{n}} \right) = \underline{\hspace{2cm}}.$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos(2\sqrt{x}) - 2x}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2 e^x)^{\frac{1}{1 - \cos x}} = \underline{\hspace{2cm}}.$
- 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left[1 + \frac{f(x)}{\sin x} \right]}{e^x - 1} = 1$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 + \sqrt[n]{3}}{2} \right)^n = \underline{\hspace{2cm}}.$
- 若函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{ax} & x > 0 \\ 1 & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}.$
- 曲线 $y = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{e^{\frac{1}{x}} - 1} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ 在点 $(0, 0)$ 的左侧以及右侧部分的切线方程分别为 $\underline{\hspace{2cm}}.$
- 设 $f(x) = x^{\sin x}$, 则 $f'(\pi) = \underline{\hspace{2cm}}.$
- 设 $f(x) = e^{-3x} \sin(2x)$, 则 $dy = \underline{\hspace{2cm}}.$
- 函数 $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ 在 $x_0 = 0$ 处的带 Peano 余项的 n 阶 Taylor 公式为 $\underline{\hspace{2cm}}.$
- 设 $f(x) = x^2 e^x$, 则 $f^{(10)}(x) = \underline{\hspace{2cm}}.$
- 函数 $f(x) = x^6 |x|$ 在 $x = 0$ 处存在最高阶导数的阶数为 $\underline{\hspace{2cm}}.$
- 曲线 $y = y(x)$ 满足参数方程 $\begin{cases} x = t \sin t \\ y = t \cos t \end{cases}$, 其中 $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $\frac{dy}{dx} = \underline{\hspace{2cm}}.$

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题) [请写出详细的计算过程和必要的依据]

- 设 $f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x e^{(1-x)t} + x^{2t}}{e^{(1-x)t} + x^{2t+1}}, x \in [0, +\infty)$. 求函数 $f(x)$ 的表达式, 讨论 $f(x)$ 的连续性和可微性, 并在可微点处计算其导函数.
- 设 $y = 2x + \sin x$, 求其反函数 $x = x(y)$ 的二阶导数 $\frac{d^2 x}{dy^2}$.
- 曲线 $y = x^{-\lambda}, x > 0$ ($\lambda > 0$ 是参数) 的切线与 x 轴和 y 轴围成一个三角形, 记切点横坐标为 a . 求切线方程和上述三角形的面积. 当 $a \rightarrow +\infty$ 时, 该三角形的面积变化趋势如何?
- 计算 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \left(\frac{\sin x}{x}\right)^x}{x^3}.$

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题) [请写出详细的证明过程]

- (10 分) 设 $a_1 = 0$, 且对一切 $n \geq 1$ 均有 $a_{n+1} = \frac{1+2a_n}{1+a_n}$. 证明极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在, 并求该极限.
- (5 分) 设函数 f 在区间 $[0, 1]$ 上二阶可导且 $f(1) > 0$, 极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$ 存在 (为有限实数), 且严格小于 0. 求证: 方程 $f(x)f''(x) + [f'(x)]^2 = 0$ 在区间 $(0, 1)$ 内至少存在两个不同实根.

答案与提示

(说明: 本卷参考答案未公开, 以下答案仅供参考, 使用时务必谨慎核验.)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空)

- 1 (提示: 放缩法.)
2. $\frac{1}{2}$
3. 3
4. $-\frac{2}{3}$ (提示: Taylor 展开.)
5. e^2 (提示: 取对数后 Taylor 展开.)
6. 1
7. $\sqrt{3}$
8. $\frac{1}{2}$
9. 左侧切线 $y = -x$, 右侧切线 $y = 0$
10. $-\ln \pi$ (提示: 对数求导法.)
11. $[-3e^{-3x} \sin(2x) + 2 \cos(2x)e^{-3x}]dx$
12. $f(x) = 1 + \sum_{k=1}^n 2x^k + o(x^n) = 1 + 2x + 2x^2 + \cdots + 2x^n + o(x^n)$
13. $(x^2 + 20x + 90)e^x$
14. 6 阶
15. $\frac{\cos t - t \sin t}{\sin t + t \cos t}$

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题)

1. $f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x\lambda^t + 1}{\lambda^t + x}$, 其中 $\lambda := \frac{e^{1-x}}{x^2}$. 考察辅助函数 $g(x) := e^{1-x} - x^2$ ($x \in [0, +\infty)$), $g'(x) = -e^{1-x} - 2x < 0$,

故 $g(x)$ 单调递减. 又注意到 $g(1) = 0$, 因此 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \lambda < 1 \Leftrightarrow x \in (1, +\infty) \\ 1 & \lambda = 1 \Leftrightarrow x = 1 \\ x & \lambda > 1 \Leftrightarrow x \in [0, 1) \end{cases}$. 显然 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 在

$(0, 1) \cup (1, +\infty)$ 上可导, 且导函数为 $f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2} & x \in (1, +\infty) \\ 1 & x \in (0, 1) \end{cases}$.

2. $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2 + \cos x}$, 从而 $\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dx}{dy} \right) \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{\sin x}{(2 + \cos x)^3}$.

3. $y' = -\lambda x^{-\lambda-1}$, 故切线斜率为 $k = -\lambda a^{-\lambda-1}$, 切线方程为 $y = -\lambda a^{-\lambda-1}x + a^{-\lambda}(1 + \lambda)$. 从而切线在 x 轴、 y 轴上的截距分别为 $x_0 = \frac{1+\lambda}{\lambda}a$ 和 $y_0 = a^{-\lambda}(1 + \lambda)$, 则三角形面积 $S = S(a) = \frac{x_0 y_0}{2} = \frac{(1+\lambda)^2}{2\lambda} a^{1-\lambda}$, 在 $a \rightarrow +\infty$

时根据参数 λ 取值不同, 分别有渐进行为 $S(a) \rightarrow \begin{cases} +\infty & \lambda \in (0, 1) \\ \frac{(1+\lambda)^2}{2\lambda} & \lambda = 1 \\ 0 & \lambda \in (1, +\infty) \end{cases}$.

4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \left(\frac{\sin x}{x}\right)^x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x \ln \frac{\sin x}{x}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \left(1 - \frac{\sin x}{x}\right)}{x^3} = \frac{x - \sin x}{x^3} \xrightarrow{\text{Taylor}} \frac{1}{6}$.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题)

1. 记 $\phi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. 我们证明 $0 \leq a_n < a_{n+1} < \phi$ ($n \in \mathbb{Z}^+$). 事实上, 易归纳得 $a_n < \phi \Rightarrow a_{n+1} = 2 - \frac{1}{1+a_n} < 2 - \frac{1}{1+\phi} = \phi$, 进而 $a_{n+1} - a_n = \frac{1+a_n - a_n^2}{1+a_n} > 0$. 因此 $\{a_n\}$ 单调有界, 必有极限 A . 在递推式两端取极限并化

简整理得 $A^2 - A - 1 = 0$, 由保号性知 $A = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2. 设 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = A < 0$, 显然 $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$. 由极限定义, $\exists \delta > 0, \forall x \in (0, 2\delta) : |f(x) - A| < \frac{|A|}{2}$, 从而 $f(\delta) < -\frac{|A|}{2} < 0$. 因此 $\exists \beta \in (\delta, 1) : f(\beta) = 0$ (介值定理), 进而 $\exists \gamma \in (\delta, \beta) : f'(\gamma) = \frac{f(\beta) - f(\delta)}{\beta - \delta} > 0$

(Lagrange 中值定理). 而 $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) \xrightarrow{\text{L'Hospital}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = A < 0$, 故 $\exists \alpha \in (0, \gamma) : f'(\alpha) = 0$ (Darboux 定理, 即导数的介值性质). 现在考虑辅助函数 $g(x) := f(x)f'(x)$, 则 $g(0) = g(\alpha) = g(\beta) = 0$, 故由 Rolle 中值定理: $\exists \xi \in (0, \alpha), \eta \in (\alpha, \beta) : g'(\xi) = g'(\eta) = 0$. 这恰好是待证的结论.

清华大学 2006 级一元微积分期末考试试题

2007.1

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空) [请将答案直接填写在横线上]

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x^2}}{x} \int_0^x t^2 e^{t^2} dt = \underline{\hspace{2cm}}.$
- 设 $f(x)$ 为连续函数, $F(x) = \int_0^{\cos x} f(x-t) dt$, 则 $F'(x) = \underline{\hspace{2cm}}.$
- $\int_{-1}^1 (\sin x^3 + \sqrt{1-x^2}) dx = \underline{\hspace{2cm}}.$
- $\int x \ln x dx = \underline{\hspace{2cm}}.$
- $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+e^x} = \underline{\hspace{2cm}}.$
- $\int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$
- 当 p 的取值范围为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 时, 广义积分 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p(x-2)^{p-1}}$ 收敛.
- 设幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-a)^n}{n}$ 在点 $x=2$ 收敛, 则 a 的取值范围为 $\underline{\hspace{2cm}}.$
- 若广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^p} dx$ 收敛, 则参数 p 的取值范围为 $\underline{\hspace{2cm}}.$
- 幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} x^{2n+1}$ 的收敛半径是 $\underline{\hspace{2cm}}.$
- 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(1+n)}{1+n}$ 是收敛还是发散? $\underline{\hspace{2cm}}$ (填“绝对收敛”, “条件收敛”或“发散”).
- 函数 e^{x^2+2x} 在 $x_0 = -1$ 点的 Taylor 级数展开式为 $\underline{\hspace{2cm}}.$
- 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n!}}{n^{\frac{n}{2}}}$ 收敛还是发散? $\underline{\hspace{2cm}}$ (填“收敛”或“发散”).
- 定解问题 $\begin{cases} \frac{dy}{dx} - 2y = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ 的解为 $\underline{\hspace{2cm}}.$
- 方程 $\frac{dy}{dx} - y = y^2$ 的所有解为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题) [请写出详细的计算过程和必要的依据]

- 求 $\int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx.$
- 计算上半心形线: $\begin{cases} x = a(1 + \cos \theta) \cos \theta \\ y = a(1 + \cos \theta) \sin \theta \end{cases} (0 \leq \theta \leq \pi)$ 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积 $V.$
- 将函数 $f(x) = \frac{1}{x^2}$ 展开成 $x+1$ 的幂级数, 求该幂级数的收敛域, 并求 $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2(x+1)^n$ 的和函数.

4. 求下面定解问题的解 $y = y(x), x \in (0, +\infty)$:
$$\begin{cases} \frac{d^2 y}{dx^2} = 2y(y-a)(2y-a) \\ y(0) = 1, y'(0) = \sqrt{2}(1-a) \end{cases} \quad (\text{其中, 常数 } a > 1).$$

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题) [请写出详细的证明过程]

1. (8 分) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续且单调递增, 求证: $\int_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x)dx$.
2. (7 分) 设 $f \in C^{(1)}[0, +\infty)$, 且 $\int_0^{+\infty} (|f(x)| + |f'(x)|)dx$ 收敛. 求证: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

答案与提示

(说明: 以下为官方提供的参考答案. 受篇幅所限, 计算题和证明题仅给出解答概要或思路.)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空)

1. $\frac{1}{2}$ (提示: $L'Hospital$ 法则.) 2. $f(x) - (1 + \sin x)f(x - \cos x)$ 3. $\frac{\pi}{2}$ (提示: 利用奇偶性与几何意义.)
4. $\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$ 5. $\ln 2$ 6. $\cos \frac{1}{x} + C$ 7. $(1, 2)$ 8. $(1, 3]$ 9. $(1, 2)$ 10. $\sqrt{2}$
11. 条件收敛 12. $\frac{1}{e} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+1)^{2n}}{n!}, x \in \mathbb{R}$ 13. 收敛 (提示: 比值判别法.) 14. $y = \frac{e^{2x} - 1}{2}$
15. $y = \frac{1}{Ce^{-x} - 1}$ 及 $y = 0$ (提示: 求所有解时不要遗漏奇解.)

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题)

1. $\int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx = 2 \int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} d(\sqrt{x})$ (2 分) $= 2 \int_0^1 \arcsin \sqrt{x} d(\arcsin \sqrt{x})$ (4 分) $= \frac{\pi^2}{4}$ (4 分).
2. $dx = -a(1 + 2 \cos \theta) \sin \theta d\theta$ (2 分), 从而有 $V = \left| \int_0^\pi \pi y^2 dx \right| = \pi a^3 \left| \int_0^\pi (1 + \cos \theta)^2 \sin^2 \theta (1 + 2 \cos \theta) d(\cos \theta) \right|$
(表达式 3 分, 绝对值 2 分) $\stackrel{t=\cos \theta}{=} \pi a^3 \int_{-1}^1 (1+t)^2 (1-t^2) (1+2t) dt = \frac{8}{3} \pi a^3$ (3 分).
3. 注意到 $-\frac{1}{x} = \frac{1}{1-(x+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (x+1)^n, x \in (-2, 0)$, 故求得 $\frac{1}{x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n(x+1)^{n-1}$ (4 分), 收敛域为 $(-2, 0)$ (2 分). 进而有 $\frac{x+1}{x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n(x+1)^n$, 再求得 $-\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2(x+1)^{n-1}$, 因此所求和函数为 $S(x) = -\frac{(x+1)(x+2)}{x^3}$. (4 分)
4. 令 $y' = p(y)$, 则 $y'' = p'_y p$. 方程化为 $pp'_y = 4y^3 - 6ay^2 + 2a^2y$ (2 分), 分离变量积分得 $p^2 = 2[y^2(y-a)^2 + C]$ (2 分). 由初值条件解得 $C = 0$, 故 $p(y) = \sqrt{2}y(y-a)$ (1 分). 再分离变量积分得 $\sqrt{2}x = \int \frac{dy}{y(y-a)} = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{y-a}{y} \right| + C$ (4 分), 利用初值条件解得 $C = -\frac{\ln(a-1)}{a}$, 故 $y(x) = \frac{a}{1 + (a-1)e^{\sqrt{2}ax}}$ (1 分).

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题)

1. 记 $F(b) := \int_a^b xf(x)dx, G(b) := \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x)dx$. 则 $F(a) = G(a)$ (2 分), $F'(b) = bf(b), G'(b) = \frac{1}{2} \int_a^b f(x)dx + \frac{a+b}{2} f(b)$ (2 分). 由单调性得 $F'(x) \geq G'(x)$ (2 分), 故不等式得证. (注: 移项分拆后利用积分中值定理同样可证, 酌情给分.)
2. 由比较判别法, $\int_0^{+\infty} f'(x)dx$ 绝对收敛, 故极限 $\lim_{A \rightarrow +\infty} f(A) = f(0) + \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A f'(x)dx = f(0) + \int_0^{+\infty} f'(x)dx$ 存在. (3 分) 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \neq 0$, 不妨令 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a > 0$ (否则取反), 则 $\exists M > 0, \forall x > M: f(x) \geq \frac{a}{2}$. 故 $\forall A > M: \int_0^{+\infty} |f(x)|dx \geq \int_M^A |f(x)|dx \geq \frac{a}{2}(A-M) \rightarrow +\infty$, 矛盾. 因此只能是 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. (4 分)

清华大学 2008 级一元微积分期末考试试题

2009.1.9

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空) [请将答案直接填写在横线上]

1. 定积分 $\int_0^{100} (x - [x])dx =$ _____, 其中 $[x]$ 表示取整函数.
2. 极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) =$ _____.
3. 不定积分 $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} =$ _____.
4. 定积分 $\int_{\frac{1}{e}}^e (\ln x)^2 dx =$ _____.
5. 若广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)dx}{x^p(1+x)^{p-1}}$ 收敛, 则参数 p 的取值范围是 _____.
6. 设 $p > 0$, 则幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{2n-1}}{n^p}$ 的收敛域为 _____.
7. 微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x-y} + 1$ 的通解为 _____.
8. 已知函数 $f(x)$ 的一个原函数为 $\frac{\sin x}{x}$, 则 $\int f\left(\frac{x}{a}\right) dx =$ _____.
9. 不定积分 $\int \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx =$ _____.
10. 设 $a \neq 0$, 则 $\int \frac{dx}{x(a+x^n)} =$ _____.
11. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续可导, 则 $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{4a^2} \int_{-a}^a [f(t+a) - f(t-a)] dt =$ _____.
12. 求和 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n(1+n)}{n!} =$ _____.
13. 设 $f(x)$ 为连续函数, $F(x) = \int_0^{\sin x} f(t-x)dx$, 则 $F'(x) =$ _____.
14. 函数 e^{x^2+2x} 在 $x_0 = -1$ 点的幂级数展开式为 _____.
15. 微分方程 $xy'' + 3y' = 0$ 的通解为 _____.

二、计算题 (每题 8 分, 共 5 题) [请写出详细的计算过程和必要的依据]

1. 求解二阶常微分方程的初值问题:
$$\begin{cases} y'' - y' = e^{2x} \\ y(0) = \frac{1}{2}, y'(0) = 1 \end{cases}.$$
2. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且满足 $xf'(x) = f(x) + x^2$. 又设曲线 $y = f(x)$ 与 $x = 0, x = 1, y = 0$ 所围的图形 S 面积为 2. 求 $f(x)$ 的表达式, 以及图形 S 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.
3. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内满足 $f(x) = f(x - \pi) + \sin x$, 且当 $x \in [0, \pi)$ 时有 $f(x) = x$. 计算 $\int_{\pi}^{3\pi} f(x)dx$.

4. 求级数 $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n^2-1)2^n}$ 的和.

5. 设平面区域 D 由 $y=0, y=a, x=0, s=\sqrt{a^2+y^2}$ 围成 ($a>0$). 求 D 绕 y 轴旋转所生成的旋转体的体积 V , 以及旋转体的表面积 S (表面积 = 侧面积 + 上下底面积).

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题) [请写出详细的证明过程]

1. (7 分) 已知方程 $x^n + nx - 1 = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上存在唯一的根, 记作 a_n ($n=1, 2, \dots$). 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ 条件收敛.

2. (8 分) 设函数 $f(x), g(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 满足 $\int_a^x g(t)dt \leq \int_a^x f(t)dt, \forall x \in [a, b]$, 且 $\int_a^b g(t)dt = \int_a^b f(t)dt$. 证明: $\int_a^b xf(x)dx \leq \int_a^b xg(x)dx$.

答案与提示

(说明: 以下为官方提供的参考答案. 受篇幅所限, 计算题和证明题仅给出解答概要或思路.)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空)

1. 50 2. $\ln 2$ 3. $\arcsin(2x-1) + C$ (或写为 $2\arcsin \sqrt{x} + C$ 等) 4. $e - \frac{5}{e}$ 5. $(1, 2)$ 6. $[0, 2]$
 7. $(x-y)^2 = -2x + C$ (提示: 作代换 $t := x-y$.) 8. $\frac{a^2}{x} \sin \frac{x}{a} + C$ 9. $(1+x) \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} - \sqrt{x} + C$ (提示: 作代换 $t := \sqrt{\frac{x}{1+x}}$.) 10. $\frac{1}{na} \ln \left| \frac{x^n}{a+x^n} \right| + C$ (提示: 作代换 $t := x^n$.) 11. $f'(0)$ (提示: $L'Hospital$ 法则.) 12. $3e^2$ 13. $(\cos x - 1)f(\sin x - x) + f(-x)$ 14. $\frac{1}{e} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+1)^{2n}}{n!}, x \in \mathbb{R}$ 15. $y = \frac{C_1}{x^2} + C_2$

二、计算题 (每题 8 分, 共 5 题)

1. 令 $z := y'$, 则 $z' - z = e^{2x}$, 解得 $z(x) = e^{2x} + C_1 e^x$. 由 $z(0) = 1$ 知 $C_1 = 0$, 从而 $y' = e^{2x} \Rightarrow y = \frac{1}{2}e^{2x} + C_2$. 又由 $y(0) = \frac{1}{2}$ 知 $C_2 = 0$, 故 $y = \frac{1}{2}e^{2x}$.
 2. 在 $x \neq 0$ 处, $\left[\frac{f(x)}{x} \right]' = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = 1$, 结合连续性得 $f(x) = x^2 + Cx$ ($x \in [0, 1]$), 故 $\int_0^1 |x^2 + Cx|dx = 2$.
 (i) $C \geq 0$ 时, 解得 $C = \frac{10}{3}$, 从而 $V = \frac{752}{135}\pi$. (ii) $-1 < C < 0$ 时, 均不合题意. (iii) $C \leq -1$ 时, 解得 $C = -\frac{14}{3}$, 从而 $V = \frac{692}{135}\pi$. 综上, 共有两组合题意的解.

$$3. \int_{-\pi}^{3\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{3\pi} [f(x-\pi) + \sin x]dx \stackrel{t:=x-\pi}{=} \int_0^{2\pi} f(t)dt = \int_0^{\pi} f(t)dt + \int_{\pi}^{2\pi} [f(t-\pi) + \sin t]dt \stackrel{u:=t-\pi}{=} \int_0^{\pi} f(t)dt + \int_0^{\pi} f(u)du = 2 \cdot \frac{\pi^2 - 2}{2} = \pi^2 - 2.$$

$$4. S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2-1} = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{x^n}{n-1} - \frac{x^n}{n+1} \right) = -\frac{x \ln(1-x)}{2} + \frac{1}{2} \left[\frac{\ln(1-x)}{x} + 1 + \frac{x}{2} \right], S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8} - \frac{3}{4} \ln 2.$$

$$5. V = \pi \int_0^a (a^2 + y^2)dy = \frac{4}{3}\pi a^3, S = 2\pi \int_0^a x \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} dy + \pi(2a^2 + a^2) = \left[\frac{\ln(\sqrt{2} + \sqrt{3})}{\sqrt{2}} + \sqrt{3} + 3 \right] \pi a^2.$$

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题)

1. 注意到 $f\left(\frac{1}{n+1}\right) < 0 < f\left(\frac{1}{n}\right)$, 故 $\frac{1}{n+1} < a_n < \frac{1}{n}$, 从而 $\{a_n\}$ 单调递减趋于 0, 由 Leibniz 判别法即得.

2. 令 $F(x) := f(x) - g(x)$, $G(x) := \int_a^x F(t)dt$. 易见 $G'(x) = F(x)$, 且 $G(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$. 从而 $\int_a^b xF(x)dx = \int_a^b x d[G(x)] = xG(x) \Big|_a^b - \int_a^b G(x)dx = -\int_a^b G(x)dx \leq 0$, 移项即得待证不等式.

清华大学 2009 级一元微积分期末考试试题

2009.1

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空) [请将答案直接填写在横线上]

1. $\int \frac{\ln x}{(1-x)^2} dx =$ _____.
2. $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x} =$ _____.
3. $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx =$ _____.
4. $\int x f(x) dx = \arctan x + C$, 则 $\int \frac{dx}{f(x)} =$ _____.
5. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+x)\cos x}{1+\sin^2 x} dx =$ _____.
6. $\frac{d}{dx} \left(\int_x^{x^2} e^{t^2} dt \right) =$ _____.
7. 设 $f(x)$ 为连续函数, $f(0) \neq 0$, $F(x) = \int_0^x t^2 f(t) dt$. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $F(x)$ 与 x^k 是同阶无穷小, 则 $k =$ _____.
8. 将 $(x-3)^2 + y^2 = 1$ 绕 y 轴转一圈, 则所得图形围成的体积为_____.
9. 设 $m > 0$, 且广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} + x^m}$ 收敛, 则 m 的取值范围为_____.
10. 幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2^n + (-5)^n}$ 的收敛域为_____.
11. 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin \frac{1}{n}}{n^p}$ 条件收敛, 则参数 p 取值范围为_____.
12. 在 $x_0 = 0$ 点, 函数 $\int_0^x e^{-t^2} dt$ 的幂级数展开为_____.
13. 微分方程 $y' = e^x + e^{x+y}$ 的通解为_____.
14. 微分方程 $x dy + (x - 2y) dx = 0$ 满足 $y(1) = 0$ 的解为_____.
15. 初值问题 $\begin{cases} y'' + 2x(y')^2 = 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = 0 \end{cases}$ 的解为_____.

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题) [请写出详细的计算过程和必要的依据]

1. 求 p 的取值范围, 使得 $\int_1^{+\infty} \sin \frac{\pi}{x} \cdot \frac{dx}{\ln^p x}$ 收敛.
2. 计算摆线: $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} (t \in [0, 2\pi])$ 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积和表面积.

3. 求级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n^2}{2^n}$ 的和.

4. 设 $f(x) \in \mathcal{C}(0, +\infty)$, 且对任意 $x > 0$ 满足 $x \int_0^1 f(tx) dt = -2 \int_0^x f(t) dt + xf(x) + x^4$, $f(1) = 0$. 求函数 $f(x)$.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题) [请写出详细的证明过程]

1. (8 分) 已知函数 $y = f(x) = x \ln x + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+1) \cdot (n+1)!}$. 求 $f(x)$ 的定义域, 证明 $y = f(x)$ 满足微分方程 $xy' - y = xe^x$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = 0$.

2. (7 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可导, 且 $f(0) = 0$, $0 < f'(x) < 1, \forall x \in [0, 1]$.

求证: $\left[\int_0^1 f(x) dx \right]^2 > \int_0^1 [f(x)]^3 dx$.

答案与提示

(说明: 以下为官方提供的参考答案. 受篇幅所限, 计算题和证明题仅给出解答概要或思路.)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空)

1. $\frac{\ln x}{1-x} + \ln|1-x| - \ln x + C$
2. $\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\tan x}{\sqrt{2}} + C$ (提示: 提出 $\cos^2 x$ 凑 $\tan x$ 的微分.)
3. $\frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}$
4. $\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + C$
5. $\frac{\pi}{2}$ (提示: 利用奇偶性.)
6. $2xe^{x^4} - e^{x^2}$
7. 3 (提示: $L'Hospital$ 法则.)
8. $6\pi^2$
9. $(1, +\infty)$
10. $(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$
11. $(-1, 0]$
12. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)}, x \in \mathbb{R}$
13. $y - \ln(e^y + 1) = e^x + C$
14. $y = x - x^2$
15. $y = 1$

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题)

1. 在瑕点 $x = 1$ 附近, $\sin \frac{\pi}{x} \cdot \frac{1}{\ln^p x} \sim \frac{\pi}{x(x-1)^{p-1}}$, 当且仅当 $p < 2$ 时收敛. 在 $+\infty$ 附近, $\sin \frac{\pi}{x} \cdot \frac{1}{\ln^p x} \sim \frac{\pi}{x \ln^p x}$, 而 $\int_2^A \frac{dx}{x \ln^p x} \xrightarrow{t:=\ln x} \int_{\ln 2}^{\ln A} \frac{dt}{t^p}$, 故当且仅当 $p > 1$ 时收敛. 综上, p 的取值范围是 $(1, 2)$.
2. $V = \int_0^{2\pi} \pi(1 - \cos t)^2 d(t - \sin t) = 5\pi^2$, $S = 2\pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt = 8\pi \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2} dt = \frac{64}{3}\pi$.
3. 记 $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n$, 则 $\int_0^x \frac{S(t)}{t} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n \Rightarrow \int_0^x \left[\frac{1}{u} \int_0^u \frac{S(t)}{t} dt \right] du = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$. 故求导反解得 $S(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$, 从而原级数的和为 $S\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{27}$.
4. 令 $u = tx$, 换元整理得 $3 \int_0^x f(u) du = xf(x) + x^4$. 两边求导得一阶微分方程 $f'(x) - \frac{2}{x}f(x) = -4x^2$, 解得 $f(x) = x^2(C - 4x)$. 由 $f(1) = 0$ 知 $C = 4$, 故 $f(x) = 4x^2 - 4x^3$.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题)

1. 注意到级数收敛域为 \mathbb{R} , 而 $x \ln x$ 定义域为 $(0, +\infty)$, 故 $f(x)$ 的定义域也为 $(0, +\infty)$. 求导后代入得 $xy' - y = x \left[1 + \ln x + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+2)x^{n+1}}{(n+1) \cdot (n+1)!} \right] - \left[x \ln x + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+1) \cdot (n+1)!} \right] = x + x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = xe^x$. 此外, 由级数的逐项求极限性质, $\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) + \lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+1) \cdot (n+1)!} = 0$.
2. 记 $\varphi(x) := \left[\int_0^x f(t) dt \right]^2 - \int_0^x [f(t)]^3 dt$, 则 $\varphi'(x) = f(x) \left[2 \int_0^x f(t) dt - f^2(x) \right]$. 又记 $\psi(x) := 2 \int_0^x f(t) dt - f^2(x)$, 则 $\psi'(x) = 2f(x)[1 - f'(x)] > 0, \forall x \in [0, 1]$, 又 $\psi(0) = 0$, 故 $\psi(x) > 0 \Rightarrow \varphi'(x) > 0, \forall x \in [0, 1]$. 再由 $\varphi(0) = 0$ 就得到 $\varphi(1) > 0$, 移项即得待证不等式.

清华大学 2010 级微积分 A(1) 期末考试试题

2011.1

(本卷后用作期末考试样卷.)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空) [请将答案直接填写在横线上]

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{n}{(n+i)(n+2i)} = \underline{\hspace{2cm}}.$

2. $\int x^2 e^x dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin(t^2) dt}{x^3} = \underline{\hspace{2cm}}.$

4. $\frac{d}{dx} \int_{x^2}^{2x} \ln(1 + \sin t) dt = \underline{\hspace{2cm}}.$

5. 曲线 $y = e^x$, $y = -\cos(\pi x)$, $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$ 所围成区域的面积为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

6. $\int_0^\pi \sqrt{\sin x - \sin^3 x} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

7. $\int \frac{dx}{x(x^2 + 1)} = \underline{\hspace{2cm}}.$

8. $\int_1^2 \frac{dx}{x + \sqrt{x}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

9. 悬链线 $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ ($|x| \leq 1$) 的弧长 $L = \underline{\hspace{2cm}}.$

10. 二阶微分方程 $x^2 y'' - xy' - 3y = 0$ 的通解为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

11. 一阶线性常微分方程组 $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y + 2z \\ \frac{dz}{dx} = 2y + z \end{cases}$ 的通解为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

12. 设 x, x^2 是二阶齐次线性常微分方程组的解, 则该微分方程为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

13. 微分方程 $y'' + 6y' + 10y = 0$ 的通解为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

14. 微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \tan \frac{y}{x}$ 的通解为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

15. 常微分方程 $y' - \frac{6}{x}y = -xy^2$ 的通解为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题) [请写出详细的计算过程和必要的依据]

1. 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^2 x + 3 \cos^2 x}.$

2. 求曲线 $\begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \cos t \\ y = -1 + \sqrt{2} \sin t \end{cases} \left(t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right] \right)$ 绕 x 轴旋转的旋转体体积及表面积.

3. 求微分方程 $y'' + 2y' + y = (3x + 2)e^{-x}$ 的通解.

4. 求一条曲线 $\Gamma: y = y(x)$, 其中 $y(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续可微, 并使得曲线 Γ 上的每一点处, 切线与横轴交点的坐标等于切点横坐标的一半.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题) [请写出详细的证明过程]

1. (8 分) 设 $f \in C[0, 1]$, 利用分部积分证明: $\int_0^1 \left[\int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(t) dt \right] dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) f(x) dx$.
2. (7 分) 设 $a(x)$ 和 $b(x)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 上以 2π 为周期的连续函数. 考虑一阶线性常微分方程 $\frac{dy}{dx} = a(x)y + b(x)$ 的解的情况.
 (1) 举出 $a(x), b(x)$ 的一个例子, 使得方程的解为下列三种情况之一: (a) 没有以 2π 为周期的解; (b) 只有一个以 2π 为周期的解; (c) 任意解都以 2π 为周期.
 (2) 证明该方程以 2π 为周期的解的个数, 只能出现上述三种情况之一.

答案与提示

(说明: 以下为官方提供的参考答案. 受篇幅所限, 计算题和证明题仅给出解答概要或思路.)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空)

1. $\ln 3 - \ln 2$ 2. $x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C$ 3. $\frac{1}{3}$ (提示: $L'Hospital$ 法则.) 4. $2 \ln(1 + \sin 2x) - 2x \ln(1 + \sin x^2)$
 5. $\sqrt{e} - \frac{1}{\sqrt{e}} + \frac{2}{\pi}$ 6. $\frac{4}{3}$ 7. $\ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$ 8. $2 \ln(\sqrt{2} + 1) - 2 \ln 2$ 9. $e - \frac{1}{e}$
 10. $y = C_1 x^3 + \frac{C_2}{x}$ (提示: $Euler$ 方程.) 11. $\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -e^{-x} \\ e^{-x} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{3x} \\ e^{3x} \end{pmatrix}$ 12. $y'' - \frac{2}{x} y' + \frac{2}{x^2} y = 0$
 13. $y = C_1 e^{-3x} \cos x + C_2 e^{-3x} \sin x$ 14. $\sin \frac{y}{x} = Cx$ 15. $\frac{1}{y} = \frac{C}{x^6} + \frac{x^2}{8}$

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题)

1. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^2 x + 3 \cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x (3 + \tan^2 x)} \xrightarrow{t:=\tan x} \int_0^1 \frac{dt}{3 + t^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{t}{\sqrt{3}} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$.
2. $V = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \pi(-1 + \sqrt{2} \sin t)^2 \sqrt{2}(-\sin t) dt = 2\pi \left(\frac{5}{3} - \frac{\pi}{2} \right)$, $S = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} 2\pi(-1 + \sqrt{2} \sin t) \sqrt{2} dt = 2\sqrt{2}\pi \left(2 - \frac{\pi}{2} \right)$.
3. 方程对应的齐次方程有二重特征根 $\lambda = -1$, 故齐次方程的通解为 $y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$. 设非齐次方程有形如 $\tilde{y} = x^2(ax + b)e^{-x}$ 的特解, 代入解得 $a = 2, b = 1$. 故非齐次方程的通解为 $y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + x^2(2x + 1)e^{-x}$.
4. 曲线 Γ 上任意一点 (x_0, y_0) 处的切线方程为 $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$. 由题意, 点 $\left(\frac{x_0}{2}, 0\right)$ 在切线上, 故 $-y_0 = -y'(x_0) \cdot \frac{x_0}{2}$. 因此, 函数 $y(x)$ 满足微分方程 $xy' = 2y$, 解得 $y = Cx^2$ (C 为任意非零常数).

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题)

1. $\int_0^1 \left[\int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(t) dt \right] dx \xrightarrow{\text{分部积分}} \left[x \int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(t) dt \right]_0^1 - \int_0^1 x d \left[\int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(t) dt \right] = \int_0^1 x f(x^2) d(x^2) + \int_0^1 x f(\sqrt{x}) d(\sqrt{x})$
 $\xrightarrow{u:=x^2, v:=\sqrt{x}} \int_0^1 \sqrt{u} f(u) du + \int_0^1 v^2 f(v) dv = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) f(x) dx$.
2. (1) 方程通解可写为 $y = e^{\int_0^x a(t) dt} \left[\int_0^x b(u) e^{-\int_0^u a(t) dt} du + C \right]$. 因此: (a) 取 $a(x) = b(x) = \cos x + 1$, 则 $y = C e^{\sin x + x} - 1$ 均不以 2π 为周期; (b) 取 $a(x) = \cos x + 1$, 方程 $\left[1 - e^{\int_0^{2\pi} a(t) dt} \right] y_0 = e^{\int_0^{2\pi} a(t) dt} \int_0^{2\pi} b(u) e^{-\int_0^u a(t) dt} du$ 确定初值 y_0 , 则取 $C = y_0$ 即得唯一的 2π 周期解; (c) 取 $a(x) = b(x) = \cos x$, 则 $y = C e^{\sin x} - 1$ 均以 2π 为周期.
 (2) 若 (a)、(b) 均不成立, 则方程至少有两个 2π 周期解 y_1, y_2 , 从而此一阶方程的通解可写为 $y = C(y_1 - y_2) + y_1$, 恒以 2π 为周期. 这就证明了 (a)(b)(c) 三者必居其一 (且仅居其一).

清华大学 2013 级微积分 A(1) 期末考试试题

2014.1.8

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空) [请将答案直接填写在横线上]

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^3} \sqrt{n^2 - k^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$
- 设 $f(x)$ 为连续函数, $g(x) = \int_0^x f(x-t)dt$, 则 $g'(x) = \underline{\hspace{2cm}}.$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \int_0^x e^{t^2} dt}{x^2 \sin x} = \underline{\hspace{2cm}}.$
- 设 $f(x) = |x|$, 则 $f(x)$ 的一个原函数为 $\underline{\hspace{2cm}}.$
- $\int_{-1}^1 \sin(x^3) \cos x dx = \underline{\hspace{2cm}}.$
- 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的一个原函数为 $x^4 + 2x^2$, 则 $\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right) dx = \underline{\hspace{2cm}}.$
- 曲线 $y = \sin x (x \in [0, \pi])$ 绕 x 轴旋转所得的旋转体体积为 $\underline{\hspace{2cm}}.$
- 渐开线: $\begin{cases} x(t) = \cos t + t \sin t \\ y(t) = \sin t - t \cos t \end{cases} (t \in [0, 2\pi])$ 的弧长为 $\underline{\hspace{2cm}}.$
- $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \underline{\hspace{2cm}}.$
- 设广义积分 $\int_1^{+\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{x^p}\right) dx$ 收敛, 则参数 p 的取值范围为 $\underline{\hspace{2cm}}.$
- 微分方程 $(x^2+1)(y^2+1)dx + 2ydy = 0$ 满足 $y(0) = 0$ 的解为 $\underline{\hspace{2cm}}.$
- 微分方程 $y'' + 4y' + 4y = 0$ 的通解为 $\underline{\hspace{2cm}}.$
- 微分方程 $y' + y = e^{-x} \cos x$ 的通解为 $\underline{\hspace{2cm}}.$
- 设 $e^{3x} - xe^{2x}, e^x - xe^{2x}, -xe^{2x}$ 是某二阶非齐次线性常微分方程的解, 则该微分方程的通解为 $\underline{\hspace{2cm}}.$
- 常微分方程组 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y \\ \frac{dy}{dt} = -x \end{cases}$ 的通解为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题) [请写出详细的计算过程和必要的依据]

- 求常微分方程 $y'' - 2y' - 3y = -3x - 5$ 满足条件 $y(0) = 1, y'(0) = 5$ 的解.
- 求积分 $\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}.$
- 设 $F(x) > 0$ 为 \mathbb{R} 上的连续可导函数, $F(0) = \sqrt{\pi}$, 且 $F(x)F'(x) = \frac{\cos x}{2\sin^2 x + \cos^2 x}$. 求 $F(x)$.

4. 求由参数方程 $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases} \left(t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ 确定的曲线绕 x 轴旋转所成曲面的面积.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题) [请写出详细的证明过程]

1. (7 分) 证明: $\int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin t}{t} dt \right) dx = 1 - \sin 1$.
2. (8 分) 设当 $x > -1$ 时, 可微函数 $f(x)$ 满足 $f'(x) + f(x) = \frac{1}{x+1} \int_0^x f(t) dt$. 求证:
- (1) $f(x)$ 满足微分方程 $(x+1)y'' + (x+2)y' = 0$;
- (2) 若 $f(0) = 1, f'(0) = -1$, 则 $e^{-x} \leq f(x) \leq 1, \forall x \geq 0$.

答案与提示

(说明: 本卷参考答案未公开, 以下答案仅供参考, 使用时务必谨慎核验.)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空)

1. $\frac{1}{3}$ 2. $f(x)$ (提示: 作代换 $u := x - t$, 或直接用含参积分求导的结论.) 3. $-\frac{1}{3}$ (提示: $L'Hospital$ 法则.)
4. $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + C & x \geq 0 \\ -\frac{1}{2}x^2 + C & x < 0 \end{cases}$ (提示: 选取常数使之连续.) 5. 0 (提示: 利用对称性.) 6. 6 7. $\frac{\pi^2}{2}$
8. $2\pi^2$ 9. $\frac{\pi}{2}$ (提示: 作代换 $x := \sec t$, 其中 $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.) 10. $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 11. $y^2 = e^{-\frac{1}{3}x^3 - x} - 1$ 12.
- $y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x}$ 13. $e^{-x}(\sin x + C)$ 14. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^x - x e^{2x}$ 15. $\begin{cases} x = [(C_2 - C_1) - C_2 t]e^{-t} \\ y = (C_1 + C_2 t)e^{-t} \end{cases}$

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题)

1. 对应齐次方程有通解 $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}$. 下求非齐次方程的一个特解, 猜测其具有形式 $\tilde{y} = ax + b$, 代入原方程解得 $a = b = 1$, 故非齐次方程有通解 $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} + x + 1$. 代入定解条件得 $\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ 3C_1 - C_2 = 4 \end{cases}$, 解得 $C_1 = 1, C_2 = -1$. 因此, 所求的特解为 $y = e^{3x} - e^{-x} + x + 1$.
2. 注意到 $\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{2(x+1)} - \frac{x-1}{2(x^2+1)}$, 故 $\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{d(x^2)}{x^2+1} + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{2} \ln|x+1| - \frac{1}{4} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2} \arctan x + C$.
3. 分离变量得 $F(x)d(F(x)) = \frac{d(\sin x)}{1+\sin^2 x}$, 故 $F(x)^2 = 2 \arctan(\sin x) + C$. 代入定解条件得 $C = \pi$, 又 $F(x) > 0$, 故 $F(x) = \sqrt{2 \arctan(\sin x) + \pi}$.
4. $S = 2\pi \int_0^{2\pi} |e^t \sin t| \sqrt{[e^t(\cos t - \sin t)]^2 + [e^t(\sin t + \cos t)]^2} dt = 2\sqrt{2}\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t} \sin t dt = \frac{2\sqrt{2}}{5}\pi(1 + 2e^\pi)$.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题)

1. $\int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin t}{t} dt \right) dx \xrightarrow{\text{分部}} \left[x \int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin t}{t} dt \right]_0^1 - \int_0^1 x d \left[\int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin t}{t} dt \right] = - \int_0^1 x \left(\frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\sin x}{x} \right) dx$
 $= \int_0^1 \left(\sin x - \frac{\sin \sqrt{x}}{2} \right) dx \xrightarrow{t:=\sqrt{x}} - \int_0^1 t \sin t dt + \int_0^1 \sin x dx = 1 - \sin 1$.
2. (1) 等式两端求导得 $f''(x) + f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} \int_0^x f(t) dt + \frac{f(x)}{x+1} = -\frac{f'(x) + f(x)}{x+1} + \frac{f(x)}{x+1}$, 移项整理即得 $(x+1)f''(x) + (x+2)f'(x) = 0$. (2) 记 $u := f'(x)$, 则 $\frac{du}{u} = -\frac{x+2}{x+1} dx$, 解得 $\ln|u| = -\ln|x+1| - x + C$. 在题给条件下, 有 $C = 0$ 且 $u < 0$, 故解得 $f'(x) = u = -\frac{1}{e^x(x+1)}$. 进而有 $f(x) = 1 - \int_0^x \frac{dt}{e^t(t+1)} \geq 1 - \int_0^x e^{-t} dt = e^{-x}$, 而右侧不等式根据保号性显然. 故不等式得证.

清华大学 2016 级微积分 A(1) 期末考试试题

2017.1.11

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空) [请将答案直接填写在横线上]

1. 函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln |x| & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ 的极大值点是 $x = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. 函数 $f(x) = x + \sqrt{1-x}$ 在区间 $[-5, 1]$ 上的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
3. 曲线 $y = \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)$ 有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 条渐近线.
4. 函数 $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x}$ 在 $x_0 = 2$ 处的 $2n$ 阶 Taylor 多项式为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
5. 若 $\int f(x)dx = e^x \cos x + C$, 则 $\int [f'(x) - 2f(x)]e^{-x}dx = \underline{\hspace{2cm}}$.
6. $\int \frac{8dx}{x(x^2 + 4)} = \underline{\hspace{2cm}}$.
7. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2) \cdots (n+n)} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$.
8. $\int_{-1}^1 \left(x + \sqrt{\pi^2 - x^2} \right)^2 dx = \underline{\hspace{2cm}}$.
9. 设 $f(x) = \int_0^{x - \sin x} (1 - \cos(t^2))dt$, 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^k} = C \neq 0$, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.
10. 曲线 $y = \int_0^x \tan t dt$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$) 的弧长为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
11. 由曲线 $y = \ln x$ 与两直线 $y = e + 1 - x$ 及 $y = 0$ 所围成的平面图形的面积为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
12. 曲线 $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) 绕 x 轴旋转所得的旋转体体积为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
13. 设 $p > 0$, 广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^{2p})[\ln(1+x)]^p}$ 收敛, 则实数 p 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
14. 微分方程 $y'' - 3y' + 2y = e^x$ 满足 $y(0) = 1, y'(0) = 1$ 的特解为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
15. 微分方程 $x^2 y'' - xy' + y = 0$ ($x > 0$) 的满足 $y(1) = 1, y'(1) = 0$ 的特解为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题) [请写出详细的计算过程和必要的依据]

1. 求函数 $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ 的定义域、单调区间、凸性区间、极值、拐点和渐近线.
2. 求广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^3} dx$.
3. 设 $a > 0$, 求旋轮线: $\begin{cases} x = a(\theta - \sin \theta) \\ y = a(1 - \cos \theta) \end{cases}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) 绕 y 轴旋转一周所得旋转面的面积.
4. 设函数 $y(x)$ 满足微分方程 $y^{(4)} - y'' = 0$, 且当 $x \rightarrow 0$ 时 $y(x) \sim x^3$. 求 $y(x)$.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题) [请写出详细的证明过程]

1. (7 分) 设 $x \in (-1, 1)$, 证明不等式: $x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x \geq 1 + \frac{x^2}{2}$.
2. (8 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 令 $g(x) = \int_0^x f(t)dt$.
- (1) 若 $A, B \in (0, +\infty)$, 证明: $\int_A^B \frac{g^2(x)}{x^2} dx = \frac{g^2(A)}{A} - \frac{g^2(B)}{B} + 2 \int_A^B \frac{f(x)g(x)}{x} dx$;
- (2) 若 $\int_0^{+\infty} f^2(x)dx$ 收敛, 证明 $\int_0^{+\infty} \frac{g^2(x)}{x^2} dx$ 收敛, 且 $\int_0^{+\infty} \frac{g^2(x)}{x^2} dx \leq 4 \int_0^{+\infty} f^2(x)dx$.

答案与提示

(说明: 以下为官方提供的参考答案. 受篇幅所限, 计算题和证明题仅给出解答概要或思路.)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空)

1. 0 2. $-5 + \sqrt{6}$ (提示: 最小值点为 -5 .) 3. 3 4. $-\sum_{k=0}^n \frac{(x-2)^{2k}}{2^{2k+2}}$ (提示: 可作代换 $t := x-2$.)
5. $-2 \sin x + C$ 6. $\ln \frac{x^2}{x^2+4} + C$ 7. $2 \ln 2 - 1$ (提示: 定积分定义.) 8. $2\pi^2$ 9. 15 (提示: $L'Hospital$ 法则.)
10. $\ln(1+\sqrt{2})$ 11. $\frac{3}{2}$ 12. $\frac{\pi^2}{2}$ 13. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 14. $y = e^{2x} - xe^x$ 15. $y = x - x \ln x$

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题)

1. 函数定义域为 \mathbb{R} . (1 分) 求导得 $f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ (驻点 $x = \pm 1$), $f''(x) = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$ (拐点横坐标 ± 3). 从而函数的单调减区间为 $(-\infty, -1)$ 和 $(1, +\infty)$, 单调增区间为 $(-1, 1)$; (2 分) 上凸区间为 $(-\infty, -\sqrt{3})$ 和 $(0, \sqrt{3})$, 下凸区间为 $(-\sqrt{3}, 0)$ 和 $(\sqrt{3}, +\infty)$; (2 分); 极大值为 $f(1) = \frac{1}{2}$, 极小值为 $f(-1) = -\frac{1}{2}$; (2 分) 拐点为 $\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ 和 $\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$; (2 分) 曲线有渐近线 $y = 0$. (1 分)
2. $\int \frac{\ln x dx}{(1+x)^3} = -\frac{1}{2} \int \ln x d\left(\frac{1}{(1+x)^2}\right) \xrightarrow{\text{分部积分}} -\frac{\ln x}{2(1+x)^2} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x(1+x)^2} \xrightarrow{\text{有理函数}} -\frac{\ln x}{2(1+x)^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{x}{1+x} + \frac{1}{2(1+x)} + C$, 从而广义积分的值为 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x dx}{(1+x)^3} = -\frac{1}{2}$.
3. $S = 2\pi \int_0^{2\pi} a(\theta - \sin \theta) \sqrt{a^2(1 - \cos \theta)^2 + a^2 \sin^2 \theta} d\theta$ (5 分) $= 16\pi^2 a^2$ (5 分). (误求绕 x 轴 $S = \frac{64}{3} \pi a^2$, 得 5 分)
4. 由特征根法得方程有通解 $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^x + C_4 e^{-x}$. (4 分) 当 $x \rightarrow 0$ 时: $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$, $e^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ (2 分), 则有 $y = (C_1 + C_3 + C_4) + (C_2 + C_3 - C_4)x + \frac{C_3 + C_4}{2}x^2 + \frac{C_3 - C_4}{6}x^3 + o(x^3)$. 因此解方程得 $C_1 = 0, C_2 = -6, C_3 = 3, C_4 = -3$, 即 $y = -6x + 3e^x - 3e^{-x}$. (4 分)

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题)

1. 令 $F(x) := x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x - 1 - \frac{x^2}{2}$, 则 $F'(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{2x}{1-x^2} - \sin x - x$ (1 分), $F''(x) = \frac{4}{(1-x^2)^2} - \cos x - 1 \geq 4 - 1 - 1 > 0$ (2 分). 而 $F'(0) = 0$, 故下凸函数 $F(x)$ 有最小值点 0, 即得 $F(x) \geq F(0) = 0$. (4 分)
- 注: 也可利用不等式 $\ln(1+x) \leq x^2$, 得 $x > 0$ 时 $x \ln \frac{1+x}{1-x} \geq -x \ln(1-x) \geq x^2$ ($x < 0$ 时有类似的不等式). 再与不等式 $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$ 相加即得原不等式.
2. (1) 分部积分得 $\int_A^B \frac{g^2(x)}{x^2} dx = -\int_A^B g^2(x) d\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow{\text{分部积分}} -\frac{g^2(x)}{x} \Big|_A^B + 2 \int_A^B \frac{g(x)g'(x)}{x} dx = \frac{g^2(A)}{A} - \frac{g^2(B)}{B} + 2 \int_A^B \frac{f(x)g(x)}{x} dx$. (3 分) (2) 取 $A = \varepsilon > 0, B = M > \varepsilon$, 由 (1) 得 $\int_\varepsilon^M \frac{g^2(x)}{x^2} dx \leq \frac{g^2(\varepsilon)}{\varepsilon} + 2 \int_\varepsilon^M \frac{f(x)g(x)}{x} dx$. 由 $f(x)$ 连续且 $g(0) = 0$ 知: $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{g(\varepsilon)}{\varepsilon} \xrightarrow{L'Hospital} f(0) \Rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{g^2(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0$, 因此对上式取极限知 $\int_0^M \frac{g^2(x)}{x^2} dx \leq 2 \int_0^M \frac{f(x)g(x)}{x} dx$. 再由 Cauchy 不等式: $\int_0^M \frac{g^2(x)}{x^2} dx \leq 2 \left(\int_0^M f^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^M \frac{g^2(x)}{x^2} dx \right)^{\frac{1}{2}}$, 故 $\int_0^M \frac{g^2(x)}{x^2} dx \leq 4 \int_0^M f^2(x) dx$ (注意到被积函数非负), 因此由比较判别法知命题得证. (5 分)

清华大学 2006 级多元微积分期中考试试题

2007.4.20

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空) [请将答案直接填写在横线上]

1. 将 $f(x) = \begin{cases} -x & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2-x & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$ 展成周期为 $T = 2$ 的正弦 Fourier 级数, 则其和函数 $S(x)$ 在 $x = -\frac{5}{2}$ 的值 $S\left(-\frac{5}{2}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. 设函数 $u = \arctan \frac{x-y}{x+y}$, 则 $du = \underline{\frac{y}{x^2+y^2} dx - \frac{x}{x^2+y^2} dy}$.
3. 设 $f: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3 - y \\ y^3 + x \end{pmatrix}$ 为 \mathbb{R}^2 到自身的映射, 其逆映射 f^{-1} 在 $(u, v) = (0, 2)$ 处的 Jacobi 矩阵为 $\underline{\frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}$.
4. 设函数 $z = x - 2y + \frac{y}{x}$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \underline{-\frac{1}{x^2}}$.
5. 设 $\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, 则 $\Delta (\ln \sqrt{x^2 + y^2} - 2xy) = \underline{0}$.
6. 函数 $u(x, y, z) = \ln(z + \cos(xy))$ 在点 $(1, 0, 1)$ 处函数值增长最快的方向为 $\underline{(1, 0, 1)}$.
7. 函数 $u = x^2y + y^2z + z^2x$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处沿 $\ell = (1, 2, 1)$ 的方向导数为 $\underline{2\sqrt{6}}$.
8. 曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $2x + 4y - z = 0$ 平行的切平面方程为 $\underline{2x + 4y - z = 6}$.
9. 曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x^2 + y^2 - z^2 = 4 \end{cases}$ 在点 $(2, 1, 1)$ 处的单位切向量为 $\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 1)}$.
10. 曲线 $L: \begin{cases} y = x^2 \\ z = x^3 \end{cases}$ 上某点的切线平行于平面 $x + 3y + 3z = 18$, 则这个点是 $\underline{(2, 4, 8)}$.
11. 设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $x^2y + y^2z + z^2x = 3$ 所确定的隐函数, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} = \underline{-\frac{y \ln x}{e^{y \ln x}}}$.
12. 函数 x^y 在 $x = 1, y = 0$ 点的二阶 Taylor 多项式为 $\underline{1 - y + xy}$.
13. 函数 $f(x, y) = x^3 - 3x + y^3 - 3y$ 的极大值点为 $\underline{(-1, -1)}$, 极小值点为 $\underline{(1, 1)}$.
14. 函数 $f(x, y) = \frac{\cos x}{y+1}$ 在 $(0, 0)$ 点处带 Lagrange 余项的一阶 Taylor 展开式为 $\underline{1 - x + \frac{1}{2}x^2}$.

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题) [请写出详细的计算过程和必要的依据]

1. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的函数, 在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为 $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [-\pi, 0) \\ e^x & x \in [0, \pi) \end{cases}$. 将 $f(x)$ 展开为 Fourier 级数.
2. 若 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点的某个邻域内有定义, $f(0, 0) = 0$, 且 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = a$, 其中 a 为常数.

- (1) 讨论函数 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点的连续性;
 (2) 当 a 为何值时, 函数 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点可微? 并求 $df(0, 0)$.
3. 设 $f(x, y, z)$ 存在连续偏导数, $z = z(x, y)$ 是由方程 $f(z - x, z - y) = 1$ 确定的隐函数. 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.
4. 求 xy^2z^3 在条件 $x + y + z = 1 (x, y, z > 0)$ 下的最大值.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题) [请写出详细的证明过程]

1. (8 分) 设 z 是变量 x, y 的隐函数, 且由方程 $z = x + y\varphi(z)$ 定义. 求证:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi(z) \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ [\varphi(z)]^2 \frac{\partial z}{\partial x} \right\}.$$

2. (7 分) 假设 $f(x, y)$ 有连续的偏导数, 在全平面除原点外处处满足 $x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) > 0$.

求证: 原点是 $f(x, y)$ 的唯一极小值点, 且满足 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$.

答案与提示

(说明: 以下为官方提供的参考答案. 受篇幅所限, 计算题和证明题仅给出解答概要或思路.)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空)

1. $-\frac{1}{2}$ (提示: 奇延拓至 $[-1, 1]$.) 2. $\frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$ 3. $\frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ 4. $-\frac{1}{x^2}$ 5. 0 6. $(0, 0, 1)$
7. $2\sqrt{6}$ 8. $2(x-1) + 4(y-2) - (z-5) = 0$ 9. $\pm \frac{(1, -2, 0)}{\sqrt{5}}$ 10. $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}\right)$ 11. $-\frac{2xy + z^2}{2xz + y^2}$
12. $1 + (x-1)y$ 13. $(-1, -1); (1, 1)$ 14. $f(x, y) = 1 - y + \frac{1}{2}(xy) \begin{pmatrix} -\frac{\cos \theta x}{\theta y + 1} & \frac{\sin \theta x}{(\theta y + 1)^2} \\ \frac{\sin \theta x}{(\theta y + 1)^2} & \frac{2 \cos \theta x}{(\theta y + 1)^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \exists \theta \in (0, 1)$

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题)

1. $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^x dx = \frac{e^\pi - 1}{\pi}$, $a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^x \cos nx dx = \frac{(-1)^n e^\pi - 1}{\pi} - n^2 a_n \Rightarrow a_n = \frac{(-1)^n e^\pi - 1}{(n^2 + 1)\pi} (n \geq 1)$,
 $b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^x \sin nx dx = (-n) a_n$. 故 $f(x) \sim \frac{e^\pi - 1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n e^\pi - 1}{(n^2 + 1)\pi} (\cos nx - n \sin nx)$.

2. (1) 由已知得 $\frac{f(x, y) - \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = a + o(1)$, 即 $f(x, y) = (a+1)\sqrt{x^2 + y^2} + o(\sqrt{x^2 + y^2}) \rightarrow 0 = f(0, 0)$, 故函数在原点连续. (2) 由可微性定义, 为使上式具有微分的形式, 只需取 $a = -1$, 此时函数在原点处的微分 $df(0, 0) = 0$.

3. 由 $\frac{\partial z}{\partial y} f'_1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} - 1\right) f'_2 = 0$ 知 $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{f'_2}{f'_1 + f'_2}$, 同理 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{f'_1}{f'_1 + f'_2}$. 故 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{f''_{11}(f'_2)^2 - 2f'_1 f'_2 f''_{12} + f''_{22}(f'_1)^2}{(f'_1 + f'_2)^3}$.

4. 构造 Lagrange 函数 $L := xy^2z^3 - \lambda(x + y + z - 1)$, 求各偏导数得驻点处 $y^2z^3 = 2xyz^3 = 3y^2z^2 = \lambda$, 解得 $(x, y, z) = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$. 易检验函数有条件最大值, 且最大值为 $f\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{432}$.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题)

1. 求导知 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 - y\varphi'(z)}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\varphi(z)}{1 - y\varphi'(z)}$, 故 $\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi(z) \frac{\partial z}{\partial x}$. 进而 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\varphi(z) \frac{\partial z}{\partial x} \right] = \varphi'(z) \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \varphi(z) \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \varphi'(z) \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \varphi(z) \frac{\partial z}{\partial x} + \varphi(z) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[\varphi(z) \frac{\partial z}{\partial x} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ [\varphi(z)]^2 \frac{\partial z}{\partial x} \right\}$.

2. 首先证明: 原点 $(0, 0)$ 是唯一的极值点. 一方面, 对 $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, 取向量 $\ell = \frac{(x_0, y_0)}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$. 则 $\frac{\partial f}{\partial \ell}(x_0, y_0) = 0$, 方向导数不为 0 则不为极值点. 另一方面, $\forall x_0 > 0: \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, 0) > 0, \frac{\partial f}{\partial x}(-x_0, 0) < 0$, 故由极限保号性知 $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x_0 \rightarrow 0^+} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, 0) \geq 0$, 相应得 $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \leq 0$. 因此只能是 $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$, 同理 $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$, 因此 $(0, 0)$ 是驻点. 由方向导数恒正知 $(0, 0)$ 确为极小值点. 此时, 由 $f(x, y)$ 可微知 $df(0, 0) = 0$, 由定义即证得极限为 0.

清华大学 2008 级多元微积分期中考试试题

2009.4

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空) [请将答案直接填写在横线上]

1. 设 $x^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos nx$ ($x \in [-\pi, \pi]$), 则 $a_2 =$ _____.
2. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -2x & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$, 将 $f(x)$ 展开成周期为 $T = 2$ 的正弦 Fourier 级数 $S(x)$, 则 $S\left(-\frac{5}{2}\right) =$ _____.
3. 设二元函数 $f(x, y)$ 在全平面 \mathbb{R}^2 上可微, (a, b) 为平面 \mathbb{R}^2 上给定的一点, $df(a, b) = 3dx - dy$, 则极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a+x, b+x) - f(a, b)}{x} =$ _____.
4. 设可微函数 $f(x, y, z)$ 在 (x_0, y_0, z_0) 点的梯度为 $(1, 2, 3)$, 则该函数在 (x_0, y_0, z_0) 点的微分 $df(x_0, y_0, z_0) =$ _____.
5. 极限 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 2)} \frac{\sin xy}{x} =$ _____.
6. 函数 $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ 在点 $(1, 1)$ 处函数值增长最快的方向是_____.
7. 设 $z = f\left(xy, \frac{y}{x}\right)$, 其中 f 连续可微, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ _____.
8. 函数 $f: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{pmatrix}$, 则 $\mathcal{J}f(x, y) =$ _____.
9. 曲线 $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 - 2z - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 2z + 2 = 0 \end{cases}$ 在 $(1, 1, 2)$ 处的切线方程为_____.
10. 函数 $f(x, y) = x \sin(x + y)$ 在 $(0, 0)$ 点带有 Peano 余项的二阶 Taylor 展开式为_____.
11. 函数 $x^2 + 2xy + y^2$ 在约束条件 $x^2 + y^2 = 1$ 下的最大值为_____.
12. 设曲面 $z = xy$ 在某一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的法线垂直于平面 $x + 3y + z + 9 = 0$, 则 P_0 点坐标 $(x_0, y_0, z_0) =$ _____.
13. 曲面 $z^2 = x^2 - 3y^2$ 在点 $(2, 1, 1)$ 处的切平面方程为_____.
14. 设 $F(y) = \int_y^{y^2} \frac{\sin(y^2 x)}{x} dx$, 则 $F'(y) =$ _____.
15. 函数 $\frac{1 - e^{xy}}{x^2 + y^2}$ 当 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 时极限是否存在? _____(填“存在”或“不存在”).

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题) [请写出详细的计算过程和必要的依据]

1. 将函数 $f(x) = 1 - x^2$ ($x \in [0, \pi]$) 展成周期为 2π 的余弦 Fourier 级数, 并求 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 的和.
2. 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $xy = f(x + y, z)$ 确定, 其中 f 有二阶连续偏导数. 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.
3. 已知曲线 $C: \begin{cases} x^2 + y^2 - 2z^2 = 0 \\ x + y + 3z = 5 \end{cases}$, 求曲线 C 上距离 xOy 平面最远和最近的点的坐标.

4. 计算积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan bx - \arctan ax}{x} dx$, 其中 $0 < a < b$.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题) [请写出详细的证明过程]

1. (8 分) 设 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \varphi(x, y)$, 其中 $\varphi(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处连续. 证明: $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微的充分必要条件是 $\varphi(0, 0) = 0$.
2. (7 分) 设函数 $u(x, y)$ 在区域 $D = \{(x, y) \mid 2x^2 + 3y^2 \leq 4\}$ 上连续, 在区域 D 的内部有二阶连续偏导数, 且满足 $-2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u^2$; 在区域 D 的边界 $2x^2 + 3y^2 = 4$ 上 $u(x, y) \geq 0$. 证明: 当 $2x^2 + 3y^2 \leq 4$ 时, $u(x, y) \geq 0$. (提示: 可用反证法证明.)

答案与提示

(说明: 本卷参考答案未公开, 以下答案仅供参考, 使用时务必谨慎核验.)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空)

1. 1 2. $\frac{7}{8}$ (提示: 利用收敛定理.) 3. $\sqrt{2}$ (提示: 方向导数.) 4. $dx + 2dy + 3dz$ 5. 2 6. $(1, 1)$
7. $yf'_1 - \frac{y}{x^2}f'_2$ 8. $\begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}$ 9. $\begin{cases} 3(x-1) + 2(y-1) - (z-2) = 0 \\ (x-1) - (y-1) + (z-2) = 0 \end{cases}$ 10. $f(x, y) = x^2 + xy + o(x^2 + y^2)$ (提示: 用一元 Taylor 展开较简便.) 11. 1 12. $(-3, -1, 3)$ 13. $2x - 3y - 2z = -1$
14. $\frac{4\sin(y^4) - 3\sin(y^3)}{y}$ 15. 不存在 (提示: 等价无穷小.)

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题)

1. $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (1-x^2) dx = 2 \left(1 - \frac{\pi^2}{3}\right)$, $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (1-x^2) \cos nx dx = \frac{4 \cdot (-1)^{n-1}}{n^2}$ ($n \in \mathbb{Z}^+$). 故 $f(x) \sim 1 - \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \cos nx dx$. 取 $x = 0$, 则 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.
2. 对 x 求偏导得 $y = f'_1 + f'_2 \frac{\partial z}{\partial x}$, 故 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y - f'_1}{f'_2}$. 同理 $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x - f'_1}{f'_2}$. 前一式两边再对 y 求偏导得 $1 = f''_{11} + f''_{12} \frac{\partial z}{\partial y} + f''_{21} \frac{\partial z}{\partial x} + f''_{22} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + f'_2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, 从而 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{(f''_{11} - 1)(f'_2)^2 + f''_{12}(x + y - 2f'_1)f'_2 + f''_{22}(x - f'_1)(y - f'_1)}{(f'_2)^3}$.
3. 即要求函数 z 以曲线方程为约束条件时的条件极值 (由问题的几何意义, 最大值与最小值存在, 且均为条件极值点). 构造 Lagrange 函数 $L := z + \lambda(x^2 + y^2 - 2z^2) + \mu(x + y + 3z - 5)$, 求偏导解得 $x = y = -\frac{\mu}{2\lambda}$, $z = \frac{1+3\mu}{4\lambda}$. 代入约束条件得 $(\lambda, \mu) = \left(-\frac{1}{5}, \frac{1}{10}\right), \left(-1, -\frac{1}{10}\right)$, 分别对应 $(1, 1, 1)$ (最近点) 和 $(-5, -5, 5)$ (最远点), 即为所求.
4. 将常数 b 置为参变量 t , 并记相应积分为 $I(t)$. 则 $y = \frac{\arctan tx - \arctan ax}{x} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^2)$, $\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{1}{t^2 x^2 + 1} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^2)$, 且广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\partial y}{\partial t} dx$ 关于参变量 $t \in [a, +\infty)$ 一致收敛 (Weierstrass 判别法), 因此有 $\frac{dI}{dt} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{t^2 x^2 + 1} = \frac{\arctan tx}{t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2t}$ ($t \in [a, +\infty)$). 进而, $I(b) = I(a) + \int_a^b \frac{\pi}{2t} dt = \frac{\pi}{2} \ln \frac{b}{a}$, 此即为所求广义积分.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题)

1. 注意到 $\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(0, 0) \frac{|h|}{h}$, 同理有 $\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(0, 0) \frac{|h|}{h}$. 一方面, 若函数可微, 则两偏导数必然存在, 从而只能是 $\varphi(0, 0) = 0$. 另一方面, 当 $\varphi(0, 0) = 0$ 时, 有 $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$. 因此, 仅需验证定义式 $\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0) - 0}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \varphi(0, 0) = 0$, 即得函数可微. 命题得证.
2. 若不然, 设 D° 内有函数值小于 0, 则函数的最小值在 D° 内部某点 (x_0, y_0) 处取得. 该点必为极小值点, 故必然有 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \geq 0$, 即 $u(x_0, y_0)^2 \leq 0 \Rightarrow u(x_0, y_0) = 0$, 矛盾. 故假设不成立, 命题得证.

清华大学 2009 级多元微积分期中考试试题

2010.4

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空) [请将答案直接填写在横线上]

1. 设函数 $2x + 1$ 在 $[0, 2)$ 上的 Fourier 展开为 $S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n\pi x) + b_n \sin(n\pi x)]$, 则 $S(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right)^{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.
3. 隐函数 $y = y(x), z = z(x)$ 由方程组 $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$ 确定 ($y \neq z$), 则 $\frac{dy}{dx} = \underline{\hspace{2cm}}$.
4. 设 $f(u, v)$ 连续可微, $w = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)$, 则 $dw = \underline{\hspace{2cm}}$.
5. 函数 $x + y^2 + z^3$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处沿方向 $\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ 的方向导数为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
6. 函数 $x^2 + 2y^2$ 在点 $(1, 1)$ 处函数值下降最快的方向为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
7. 设 $\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$, 则其逆映射的 Jacobi 矩阵 $\frac{\partial(\rho, \varphi)}{\partial(x, y)} = \underline{\hspace{2cm}}$.
8. 设 $z = x^2 + y(x)^2$, 其中函数 $y(x)$ 是由方程 $x^2 - xy + y^2 = 1$ 在点 $(x_0, y_0) = (1, 0)$ 附近所确定的隐函数, 则 $z''(1) = \underline{\hspace{2cm}}$.
9. 已知 $F(x + y + z, z, z) = 0$ 确定了隐函数 $z = z(x, y)$, 其中 F 为连续可微函数, $F'_1 + F'_2 + F'_3 \neq 0$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} = \underline{\hspace{2cm}}$.
10. 函数 $\frac{\sin x}{1 - \sin y}$ 在 $(0, 0)$ 点处带 Peano 余项的二阶 Taylor 展开式为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
11. 曲线 $\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 + z^2 = 9 \\ z^2 = 3x^2 + y^2 \end{cases}$ 在点 $(1, -1, 2)$ 处的切线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
12. 椭球面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处的切平面为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
13. 曲线 $\begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ z = v \end{cases}$ 在点 $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ 处的切平面方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
14. 已知 $f(y) = \int_{\sin y}^{\cos y} e^{x^2 y} dx$, 则 $f'(y) = \underline{\hspace{2cm}}$.
15. 设 $f(x)$ 为连续函数, $F(x) = \int_0^x f(t)(x-t)^2 dt$, 则 $F'''(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题) [请写出详细的计算过程和必要的依据]

1. 设 $f(x) = \begin{cases} x & x \in [0, \frac{\ell}{2}] \\ \ell - x & x \in [\frac{\ell}{2}, \ell] \end{cases}$, 将 $f(x)$ 在 $(0, \ell)$ 上展成周期为 2ℓ 的正弦 Fourier 级数, 并求该 Fourier 级数的和函数.

2. 设函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. 回答以下问题, 并说明理由:

- (1) 函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处是否连续?
- (2) 函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处的两个一阶偏导数是否存在? 若存在, 求出这两个偏导数.
- (3) 函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处是否可微? 若可微, 求出函数的微分.

3. 设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $x^3 + y^3 + z^3 = x + y + z$ 确定的二阶可微函数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

4. 在椭球曲面 $x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$ 上寻找位于第 I 卦限的一点 (即 $x, y, z > 0$), 使得该点处的切平面与三个坐标轴的交点到原点的距离平方和最小.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题) [请写出详细的证明过程]

1. (7 分) 设函数 $f(x, y)$ 在全平面上连续可微, 且满足: (1) 两个一阶偏导数处处相等, 即 $f'_x(x, y) = f'_y(x, y), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$; (2) $f(x, 0) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. 证明: $f(x, y) > 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
2. (8 分) 设 $f(x, y)$ 在全平面上二阶连续可微, 其 Hesse 矩阵处处正定. 证明:
 - (1) 该函数若有驻点, 则此点为最小值点;
 - (2) 该函数最多只有一个驻点.

答案与提示

(说明: 以下为官方提供的参考答案. 受篇幅所限, 计算题和证明题仅给出解答概要或思路.)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空)

1. 3 2. 0 (提示: 放缩法.) 3. $\frac{z-x}{y-z}$ 4. $-\frac{f'_1}{y}dx + \left(\frac{f'_2}{z} - \frac{xf'_1}{y^2}\right)dy - \frac{yf'_2}{z^2}dz$ 5. $\frac{1}{3}$ 6. $(-1, -2)$
7. $\frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi & \rho \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$ 8. 10 9. $-\frac{F'_1}{F'_1 + F'_2 + F'_3}$ 10. $x + xy + o(x^2 + y^2)$ 11. $\begin{cases} x - 3y + 2z = 8 \\ 3x - y - 2z = 0 \end{cases}$
12. $x + 2y + 3z = 6$ 13. $\begin{cases} x - \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(u-2) - \sqrt{2}\left(v - \frac{\pi}{4}\right) \\ y - \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(u-2) + \sqrt{2}\left(v - \frac{\pi}{4}\right) \\ z = v \end{cases}$ 14. $\int_{\sin y}^{\cos y} x^2 e^{x^2 y} dx - e^{y \cos^2 y} \sin y - e^{y \sin^2 y} \cos y$

15. $2f(x)$ (提示: 利用定义.)

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题)

1. 对 $f(x)$ 作奇延拓, 则 Fourier 系数 $b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell f(x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx$ (4 分) $= \frac{4\ell}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & n = 2k \\ \frac{(-1)^k 4\ell}{(2k+1)^2 \pi^2} & n = 2k+1 \end{cases}$ ($k \in \mathbb{N}$) (4 分), 故形式正弦 Fourier 级数为 $f(x) \sim \frac{4\ell}{\pi^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{\ell}$. (2 分)
2. (1) 注意到 $|f(x, y)| \leq |x| + |y| \rightarrow 0, (x, y) \rightarrow (0, 0)$, 故函数在 $(0, 0)$ 处连续. (3 分) (2) 由偏导数定义, $f'_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 1$, 同理 $f'_y(0, 0) = 1$. (4 分) (3) 由于极限 $\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0) - (\Delta x + \Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \frac{-\Delta x \Delta y (\Delta x + \Delta y)}{[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]^{\frac{3}{2}}}$ 显然不存在, 故函数在 $(0, 0)$ 处不可微. (3 分)
3. 求得 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1-3x^2}{3z^2-1}$ (3 分), $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1-3y^2}{3z^2-1}$ (3 分), 进而可求得 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -6z \frac{(1-3x^2)(1-3y^2)}{(3z^2-1)^3}$ (4 分).
4. 椭球面在 (x_0, y_0, z_0) 处的切平面为 $2x_0(x-x_0) + 2y_0(y-y_0) + \frac{z_0}{2}(z-z_0) = 0$, 在各坐标轴上的截距分别为

$\frac{1}{x_0}, \frac{1}{y_0}, \frac{4}{z_0}$. (2 分) 因此, 只需要求函数 $S(x, y, z) := \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{16}{z^2}$ 在约束条件 $x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$ 下的条件最小值. (2 分) 取 Lagrange 函数 $L := S(x, y, z) + \lambda \left(x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} - 1 \right)$ (3 分), 容易解得其在第 I 卦限内有唯一驻点 $(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{2} \right)$. 检验知在点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{2} \right)$ 处 $S(x, y, z)$ 确实有最小值 16. (3 分)

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题)

1. 对任意定点 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, 考虑函数 $g(t) := f(x+t, y-t)$. 易见 g 也连续可微, 求导得 $g'(t) = f'_x(x+t, y-t) - f'_y(x+t, y-t) = 0$, 从而 $g(t)$ 是与 t 无关的常数, 即恒有 $f(x, y) = g(0) = g(y) = f(x+y, 0) > 0$. 命题得证. (7 分)
2. (1) 设 (x_0, y_0) 为函数的驻点, 在 (x_0, y_0) 处对 $f(x, y)$ 作 Taylor 展开得 $f(x, y) \stackrel{\exists \xi, \eta}{=} f(x_0, y_0) + \frac{1}{2}(x - x_0, y - y_0)H(\xi, \eta) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \geq f(x_0, y_0)$ (这里用到 Hesse 矩阵正定), 故驻点必为最小值点. (4 分) (2) 由正定性, (1) 中等号仅在 $(x, y) = (x_0, y_0)$ 处取到, 故函数至多只有一个最小值点, 从而至多有一个驻点. (4 分)

清华大学 2010 级微积分 A(2) 期中考试试题

2011.4

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空) [请将答案直接填写在横线上]

1. 将定义在区间 $(0, \pi)$ 上的函数 e^x 展成周期为 2π 的正弦 Fourier 级数, 记 $S(x)$ 为该级数的和函数, 则 $S(0) =$ _____.
2. $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow 0}} \left(\frac{x-1}{x} \right)^{\frac{x^2}{x+y}} =$ _____.
3. 设 $z = f(x+y, x-y)$, 其中 $f \in C^{(1)}$, 则 $dz =$ _____.
4. 设 $z = x^y$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ _____.
5. 方程 $xy + z \ln y + e^{yz} = e$ 在 $(0, 1, 1)$ 点附近确定隐函数 $z = z(x, y)$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ _____.
6. 设 $y = y(x), z = z(x)$ 是由方程组 $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}$ 确定的隐函数 (其中 $c^2 y \neq b^2 z$), 则 $\frac{dy}{dx} =$ _____.
7. 函数 $x + y^2 + z^3$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处沿方向 $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0 \right)$ 的方向导数为_____.
8. 函数 $x^2 + y^2$ 在点 $(1, 2)$ 处函数值增大最快的方向为_____.
9. 设 $\begin{cases} x = \cos \varphi \cos \theta \\ y = \cos \varphi \sin \theta \end{cases}$, 则其 Jacobi 矩阵的行列式 $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\varphi, \theta)} \right| =$ _____.
10. 参数曲面 $\begin{cases} x = u + v \\ y = uv \\ z = u \sin v \end{cases}$ 在 $(u, v) = (1, 0)$ 处的切平面方程为_____.
11. 曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}$ 在点 $(1, -1, 2)$ 处的切线方程为_____.
12. 曲面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ 在点 $(1, -2, 2)$ 处的法线方程为_____.
13. 曲面 $z = \arctan \frac{y}{x}$ 在点 $\left(1, 1, \frac{\pi}{4} \right)$ 处的单位法向量为_____.
14. 曲线 $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 \end{cases}$ 上一点 M 处的切线平行于平面 $x + 2y + z = 4$, 则 M 点的坐标为_____.
15. 函数 $f(x, y) = e^x(\sin y + \cos y)$ 在 $(0, 0)$ 点的带有 Peano 余项的二阶 Taylor 公式为_____.

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题) [请写出详细的计算过程和必要的依据]

1. 求函数 $f(x) = \begin{cases} \pi - x & x \in [-\pi, 0] \\ \pi + x & x \in [0, \pi] \end{cases}$ 的 Fourier 级数, 并求数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ 的和.
2. 设 $f(u, v) \in C^{(2)}(\mathbb{R}^2)$, 隐函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $x + y = f(x, z)$ 确定, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

3. 设 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^4}$, 研究 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点的连续性、偏导数存在性及可微性 (说明理由).
4. 求函数 $f(x, y) = xy$ 在集合 $D = \{(x, y) \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$ 上的最大值和最小值.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题) [请写出详细的证明过程]

1. (8 分) 设 $F(x, y, z)$ 有连续的一阶偏导数 $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$, 并且满足 $y \frac{\partial F}{\partial x} - x \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \geq \alpha > 0$ (其中 α 为常数). 证明: $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(-\cos t, \sin t, t) = +\infty$.
2. (7 分) 设 $D = \{(x, y) \mid |x| \leq a, |y| \leq b, a, b > 0\}$, 二元函数 $f \in C^{(2)}(D)$, 且在 D 内满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq 0$. 证明: 函数 $f(x, y)$ 的最大值和最小值只能在 D 的边界上取得.

答案与提示

(说明: 以下为官方提供的参考答案. 受篇幅所限, 计算题和证明题仅给出解答概要或思路.)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空)

1. 0 2. $\frac{1}{e}$ (提示: 取对数.) 3. $(f'_u + f'_v)dx + (f'_u - f'_v)dy$ 4. $x^{y-1}(1 + y \ln x)$ 5. $\frac{-y}{\ln y + ye^{yz}}$
6. $\frac{b^2(a^2z - c^2x)}{a^2(c^2y - b^2z)}$ 7. 2 8. $(2, 4)$ 9. $-\sin \varphi \cos \varphi$ 10. $y - z = 0$ 11. $\begin{cases} x - y + 2z = 6 \\ 2x - 2y - z = 2 \end{cases}$
12. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-2}{6}$ 13. $\pm \frac{(1, -1, 2)}{\sqrt{6}}$ 14. $(-1, 1, -1)$ 或 $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27})$ 15. $f(x, y) = 1 + x + y + \frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2} + o(x^2 + y^2)$

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题)

1. 易得 Fourier 级数为 $f(x) \sim \frac{3\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$. 级数在 $x=0$ 处收敛至 $f(0) = \pi$, 故 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.
2. 求得 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1-f'_x}{f'_z}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{f'_z}$, 进而可求得 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{f''_{zx}f'_z + f''_{zz}(1-f'_x)}{(f'_z)^3}$.
3. $|f(x, y)| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0, (x, y) \rightarrow (0, 0)$, 故函数在 $(0, 0)$ 处连续. 由偏导数定义, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h^2}}{h}$ 不存在, 而 $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h^4}}{h} = 0$. 由可微性蕴含偏导数存在性知: 函数在 $(0, 0)$ 处不可微.
4. 由于 $f(x, y)$ 是有界闭集 D 上的连续函数, 故可取到最大值和最小值. 在 D 的内部求函数的驻点, 即得 $(0, 0)$, 不在 D 内, 故舍去. 因此, 只需在约束条件 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 下求条件最值. 作 Lagrange 函数 $L := xy - \lambda[(x-1)^2 + y^2 - 1]$, 解得三个驻点: $(0, 0), (\frac{3}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2})$. 易检验知函数有最大值 $f(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ 和最小值 $f(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题)

1. 记 $G(t) := F(-\cos t, \sin t, t)$, 则 $G'(t) = \sin t F'_x(-\cos t, \sin t, t) + \cos t F'_y(-\cos t, \sin t, t) + F'_z(-\cos t, \sin t, t) \geq \alpha$ (由题设), 从而 $G(t) = \int_0^t G'(s)ds + G(0) \geq \alpha t + G(0) \rightarrow +\infty, t \rightarrow +\infty$.
2. 假设函数 $f(x, y)$ 的最值在 D 内部某点处取得, 则该点必为极值点. 然而, 考虑 f 的 Hesse 矩阵 H_f , 由 $\det H_f = -(f''_{xx})^2 + (f''_{xy})^2 < 0$ 知 H_f 为不定矩阵, 从而 f 在 D 的内部无极值点. 命题得证.

清华大学 2011 级微积分 A(2) 期中考试试题

2012.4

(本卷后用作期中考试样卷.)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空) [请将答案直接填写在横线上]

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^y (xy^{x-1}) = 1^2 \cdot 2^0 = 1$$

$$\ln x^y y^x$$

$$1. \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right)^{\ln(xy)} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1} \cdot y^x + x^y y^x \ln y = 2 \cdot 2 + 2 \ln 2$$

$$2. \text{函数 } f(x, y) = x^y y^x \text{ 在 } (1, 2) \text{ 点的全微分为 } (4 + 2 \ln 2) dx + 1 dy$$

$$3. \text{设函数 } f(u, v) \text{ 可微, 函数 } z = z(x, y) \text{ 由方程 } f(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2) = 0 \text{ 确定, 则偏导数 } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{f_u' + 2xf_v'}{-f_u' - 2zf_v'}$$

$$4. \text{函数 } x^2 + 2y^2 + 3z^2 \text{ 在点 } (1, 1, 1) \text{ 处函数值递增最快的方向为 } (1, 2, 3)$$

$$5. \text{向量值函数 } f(x, y) = (x^3 y^2, x^3 - y^2) \text{ 的 Jacobi 矩阵 } Jf = \begin{pmatrix} 3x^2 y^2 & 2xy^2 \\ 3x^2 & -2y \end{pmatrix}$$

$$6. \text{设 } u = f(x^2 + y^2), \text{ 其中 } f \text{ 为 } C^{(2)} \text{ 类函数, 则 } \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 4xy f''$$

$$7. \text{设 } \begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases} \text{ 是由方程组 } \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \text{ 确定的隐函数 } (y \neq z), \text{ 则 } \frac{dy}{dx} = \frac{z-x}{y-z}$$

$$8. \text{函数 } f(x, y) = x^y \text{ 在点 } (x, y) = (1, 1) \text{ 处带 Peano 余项的二阶 Taylor 展开式为 } 1 - (x-1) + (x-1)(y-1) + 0((x-1)^2 + (y-1)^2)$$

$$9. \text{曲面 } \begin{cases} x = u + e^{u+v} \\ y = u + v \\ z = e^{u-v} \end{cases} \text{ 在 } (2, 0, e^2) \text{ 点的切平面方程为 } (x-2)(-2e^2) + 3e^2 y + (z-e^2) = 0$$

$$10. \text{曲面 } x^2 + y^2 + \sin y = z^2 \text{ 在 } (1, 0, 1) \text{ 点的切平面方程为 } 2(x-1) - y - 2(z-1) = 0$$

$$11. \text{曲线 } \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ z = xy \end{cases} \text{ 在点 } (1, 2, 2) \text{ 处的切线方程为 } \frac{x-1}{-4} = \frac{y-2}{6} = \frac{z-2}{-3}$$

$$12. \text{曲面 } x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21 \text{ 在点 } (1, -2, 2) \text{ 处的法线方程为 } \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-2}{6}$$

$$13. \text{已知 } \alpha > 0, \text{ 广义积分 } \int_1^{+\infty} \sin(x^\alpha) dx \text{ 收敛, 则 } \alpha \text{ 的取值范围是 } (1, +\infty)$$

$$14. \text{设 } p, q, r > 0, \text{ 利用 Beta 函数, 积分 } \int_0^1 x^{p-1} (1-x^r)^{q-1} dx \text{ 可以表示为 } \frac{1}{r} B\left(\frac{p}{r}, \frac{q}{r} + 1\right)$$

$$15. \text{设 } F(x) = \int_x^{2x} e^{\sin(xy)} dy, \text{ 则 } F'(x) = \frac{2x}{1} e^{\sin(2x)} \cdot \cos(2x) \cdot 2 + e^{\sin(x^2)} = 2e^{\sin(x^2)} - e^{\sin(x^2)}$$

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题) [请写出详细的计算过程和必要的依据]

$$1. \text{求函数 } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \text{ 在原点的偏导数 } f'_x(0, 0) \text{ 与 } f'_y(0, 0), \text{ 并考察 } f(x, y) \text{ 在 } (0, 0) \text{ 的连续性和可微性.}$$

$$2. \text{设 } \varphi \text{ 为二阶连续可微函数, } z = z(x, y) \text{ 是由方程 } x^3 + y^3 + z^3 = \varphi(z) \text{ 确定的隐函数, 求 } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \text{ 并说明隐函数存在的条件.}$$

$$3. \text{求椭圆 } x^2 + 3y^2 = 12 \text{ 的一个内接等腰三角形, 使其底边平行于长轴, 且其面积最大.}$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1$$



$$f(x, y) = x(y+z) - \lambda(x^2 + 3y^2 - 12) = 0$$

【下一页还有试题……】

4. 已知 $0 < a < b$, $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, 求积分 $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-a^2 x^2} - e^{-b^2 x^2}}{x^2} dx$.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题) [请写出详细的证明过程]

1. (7 分) 证明二元函数的罗尔(Rolle)定理: 设二元函数 $f(x, y)$ 在开圆盘 $D_R: x^2 + y^2 < R^2$ 内部可微, 在闭圆盘 $\overline{D}_R: x^2 + y^2 \leq R^2$ 上连续. 若 $f(x, y)$ 在圆周 $\partial D_R: x^2 + y^2 = R^2$ 上取常数值, 则 $f(x, y)$ 在开圆盘 D_R 内必有驻点 (即存在点 $(\xi, \eta) \in D_R$, 使得 $\nabla f(\xi, \eta) = \mathbf{0}$).

2. (8 分) 证明: 当 $p > \frac{1}{2}$ 时, 广义积分 $\int_0^{+\infty} \left[\ln \left(1 + \frac{1}{x^p} \right) - \frac{1}{1+x^p} \right] dx$ 收敛.

答案与提示

(说明: 以下为官方提供的参考答案. 受篇幅所限, 计算题和证明题仅给出解答概要或思路.)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空)

1. 0 2. $2(\ln 2 + 2)dx + dy$ 3. $-\frac{f'_u + 2xf'_v}{f'_u + 2zf'_v}$ 4. $(1, 2, 3)$ 5. $\begin{pmatrix} 3x^2y^2 & 2x^3y \\ 3x^2 & -2y \end{pmatrix}$ 6. $4xyf''(x^2 + y^2)$
7. $-\frac{z-x}{z-y}$ 8. $x^y = 1 + (x-1) + (x-1)(y-1) + o((x-1)^2 + (y-1)^2)$ 9. $\begin{cases} x-2 = 2(u-1) + (v+1) \\ y = (u-1) + (v+1) \\ z-e^2 = e^2(u-1) - e^2(v+1) \end{cases}$
10. $2(x-1) + y = 2(z-1)$ 11. $\begin{cases} (x-1) + 2(y-2) + 2(z-2) = 0 \\ z-2 = 2(x-1) + (y-2) \end{cases}$ 12. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-2}{4}$
13. $(1, +\infty)$ (提示: 换元法.) 14. $\frac{1}{r}B\left(\frac{p}{r}, q\right)$ 15. $\int_x^{2x} y \cos(xy) e^{\sin(xy)} dy + 2e^{\sin(2x^2)} - e^{\sin x^2}$

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题)

1. 由定义知 $f'_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 1$ (2 分), 同理知 $f'_y(0, 0) = -1$ (2 分). 因此显然有函数在 $(0, 0)$ 点连续 (3 分). 由于极限 $\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0) - (\Delta x - \Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\Delta x \Delta y (\Delta x - \Delta y)}{[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]^{\frac{3}{2}}}$ 显然不存在, 故函数在 $(0, 0)$ 处不可微. (3 分)
2. 求得 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3x^2}{\varphi'(z) - 3z^2}$ (2 分), $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3y^2}{\varphi'(z) - 3z^2}$ (2 分). 故隐函数存在的条件为 $\varphi'(z) \neq 3z^2$ (2 分), 且二阶偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{6z - \varphi''(z)}{\varphi'(z) - 3z^2} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{9x^2 y^2 (6z - \varphi''(z))}{[\varphi'(z) - 3z^2]^3}$ (4 分).
3. 对椭圆上任一点 (x, y) (不妨设 $x > 0 > y$), 对应的内接等腰三角形面积为 $S = x(2-y)$. (2 分) 作 Lagrange 函数 $L := x(2-y) + \lambda(x^2 + 3y^2 - 12)$ (3 分), 解得其驻点为 $(3, -1)$ (3 分). 由问题的几何意义知 S 存在条件最大值, 因此点 $(3, -1), (-3, -1), (0, 2)$ 连成的椭圆内接等腰三角形即为所求. (2 分)
4. 注意到 $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-a^2 x^2} - e^{-b^2 x^2}}{x^2} dx = \int_0^{+\infty} dx \int_{a^2}^{b^2} e^{-x^2 y} dy$. (3 分) 易证反常含参积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2 y} dx$ 在 $[a^2, b^2]$ 上一致收敛, 且被积函数连续 (1 分), 故交换积分顺序得 $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-a^2 x^2} - e^{-b^2 x^2}}{x^2} dx = \int_{a^2}^{b^2} dy \int_0^{+\infty} e^{-x^2 y} dx \stackrel{t:=x\sqrt{y}}{=} \int_{a^2}^{b^2} \frac{dy}{\sqrt{y}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \stackrel{\text{Poisson 积分}}{=} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_{a^2}^{b^2} \frac{dy}{\sqrt{y}} = \sqrt{\pi}(b-a)$. (6 分)

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题)

1. 若 $f(x, y)$ 在 \overline{D}_R 上恒为常数, 则其在 D_R 上梯度处处为 $\mathbf{0}$, 命题显然成立. 否则, \overline{D}_R 上的连续函数 $f(x, y)$ 有相异的最大值和最小值, 至少其一在开圆盘 D_R 内部某点 (ξ, η) 处取得. 该点必为极值点, 从而 $\nabla f(\xi, \eta) = \mathbf{0}$. (7 分)
2. 在瑕点 0 附近, $\int_0^1 \left[\ln \left(1 + \frac{1}{x^p} \right) - \frac{1}{1+x^p} \right] dx = \int_0^1 \left[\ln(1+x^p) - \frac{1}{1+x^p} - p \ln x \right] dx$ 必然收敛. (3 分) 而当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 对被积函数作 Taylor 展开: $\ln \left(1 + \frac{1}{x^p} \right) - \frac{1}{1+x^p} = \frac{1}{2x^{2p}} - \frac{2}{3x^{3p}} + o\left(\frac{1}{x^{3p}}\right)$, 当且仅当 $p > \frac{1}{2}$ 时收敛. (4 分) 因此, 原广义积分当且仅当 $p > \frac{1}{2}$ 时收敛. (1 分)

18:58-19:20

清华大学 2012 级微积分 A(2) 期中考试试题

2013.4

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空) [请将答案直接填写在横线上]

1. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow +\infty}} \frac{xy}{x^2 + y} = \underline{0}$. $\lim_{x,y \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi}{y}}{x^2 + \frac{1}{y}} = \frac{\pi}{xy+1}$ $\rho \sin \theta \ln \rho$, $\frac{(2\rho \ln \rho) \sin \theta}{\rightarrow 2}$
2. 函数 $f(x, y) = \begin{cases} y \ln(x^2 + y^2) & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ 在 $(0, 0)$ 点处是否连续? 是 (填“是”或“否”). $\sin \frac{1}{x^2} + x \cos \frac{1}{x^2} (-\frac{2}{x^3})$
3. 设 $f(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$ ($x^2 + y^2 \neq 0$), 则 $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) = \underline{\sin 1 - 2 \cos 1}$ $\sin 1 +$
4. 设函数 $f(x, y)$ 可微, 且在点 P_0 处沿 $\ell_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ 的方向导数为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 沿 $\ell_2 = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right)$ 的方向导数为 $\frac{1}{5}$, 则 $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{P_0} = \underline{3}$. $(-1, 1)$
5. 二元函数 $x^2 + xy + y^2$ 在点 $(-1, 1)$ 处增长最快的方向为 $\underline{(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})}$.
6. 设 $z(x, y) = e^{xy}$, 则 $dz = \underline{(e^{xy} \cdot 2xy) dx + (e^{xy} \cdot x^2) dy}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$
7. 设 $y(x) = f(2x, x^2)$, 其中 f 为可微函数, 则 $y'(x) = \underline{2f'_1 + 2xf'_2}$.
8. 设 $\begin{cases} f(u, v) = u + v \\ g(u, v) = uv \end{cases}$, $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$, 则 $\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)} = \underline{\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}$
9. 设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $x^2 + y + z = e^{-z}$ 所确定的隐函数, 则 $\frac{\partial z}{\partial x}(1, e) = \underline{-\frac{2}{e+1}}$ $1 + e + z = e^{-z}$ $z = -1$
10. 函数 $f(x, y) = \frac{1}{x + y}$ 在点 $(1, 0)$ 处带 Peano 余项的二阶 Taylor 展开式为 $\underline{1 - [(x-1) + y] + [(x-1) + y]^2 + o(1 + y^2)}$
11. 曲面 $(x + y + z)e^{xyz} = 3e$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处的切平面方程为 $\underline{4e(x-1) + 4e(y-1) + 4e(z-1) = 0}$ $x + y + z = 3$
12. 曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$ 在点 $(2, 1, 1)$ 处的切向量为 $\underline{(0, -1, 1)}$. $e^{x(x+z)}$
13. 曲线 $\begin{cases} x = 3t \\ y = 3t^2 \\ z = t^3 \end{cases}$ 上一点 P_0 处的切线与平面 $x + y + z = 3$ 平行, 则 P_0 的坐标为 $\underline{(-3, 3, -1)}$. $(1, 1, 1)$ $(1, 1, 1)$ $(0, -1, 1)$
14. 设函数 $F(x, y) = \int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-yt} dt$ ($x, y > 0$), 则 $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \int_1^{+\infty} -t^x e^{-yt} dt$
15. 设 $\varphi(t) = \int_{2t}^{t^2} \frac{\sin tx}{x} dx$ ($t > 0$), 则 $\varphi'(t) = \underline{\int_{2t}^{t^2} \cos tx dx + 2 \frac{\sin t^2}{t} - \frac{\sin 2t^2}{t} = \frac{3 \sin t^2 - 2 \sin 2t^2}{t}}$ $\int_1^{+\infty} -e^{-yt} t^x \ln t dt$

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题) [请写出详细的计算过程和必要的依据]

1. 讨论函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 y)}{x^2 + y^2} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ 在点 $(0, 0)$ 处的连续性、偏导数存在性及可微性.
2. 设 $\varphi \in C^{(2)}(\mathbb{R})$, 函数 $z = z(x, y)$ 由 $x + y - z = \varphi(x + y + z)$ 给出, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.
3. 求函数 $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - x - y$ 在闭单位圆盘 $x^2 + y^2 \leq 1$ 上的最大值和最小值.

【下一页还有试题……】

4. 设 $0 < a < b$, c 为任意实常数, 计算广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \cos cx dx$.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题) [请写出详细的证明过程]

1. (6 分) 设 $\lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y) = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = 0$, 且 $[f(x, y) - \varphi(y)] \leq \psi(x)$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

证明: $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = a$. $|f(x, y) - a| \leq |f(x, y) - \varphi(y)| + |\varphi(y) - a| \leq \psi(x) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

2. (9 分) 设二元函数 $f(x, y)$ 在全平面上 \mathbb{R}^2 上二次连续可微, $f(x, y) > 0$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, 且满足:

$f''_{xy}(x, y)f(x, y) \equiv f'_x(x, y)f'_y(x, y)$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$. 证明:

(1) $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f'_x}{f} \right) \equiv 0$;

(2) $f(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, 其中 φ, ψ 为 \mathbb{R} 上二次连续可微的一元函数.

答案与提示

(说明: 以下为官方提供的参考答案. 受篇幅所限, 计算题和证明题仅给出解答概要或思路.)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空)

1. 0 (提示: 放缩法.) 2. 是 3. $\sin 1 - 2 \cos 1$ 4. 3 (提示: 表为偏导数的线性组合.) 5. $(-1, 1)$
 6. $e^{x^2 y}(2xy dx + x^2 dy)$ 7. $2f'_1(2x, x^2) + 2xf'_2(2x, x^2)$ 8. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2x & -2y \end{pmatrix}$ (提示: 直接代入或利用乘积性质.)
 9. $-\frac{2}{e+1}$ 10. $1 - [(x-1) + y] + [(x-1)^2 + 2(x-1)y + y^2] + o((x-1)^2 + y^2)$ 11. $x + y + z = 3$
 12. $(0, 1, -1)$ 13. $(-3, 3, -1)$ 14. $-\int_1^{+\infty} t^x e^{-yt} \ln t dt$ 15. $\frac{3 \sin t^3 - 2 \sin 2t^2}{t}$

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题)

1. $|f(x, y)| \sim \frac{x^2}{x^2 + y^2} |y| \leq |y| \rightarrow 0, (x, y) \rightarrow (0, 0)$, 故 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点连续. 两偏导数显然存在且均为 0, 而 $\frac{f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0) - (0 \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \frac{\sin[(\Delta x)^2 \Delta y]}{[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]^{\frac{3}{2}}}$ 在 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 时极限不存在, 故不可微.
 2. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1 - \varphi'(x + y + z)}{1 + \varphi'(x + y + z)}$, 进而 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{4\varphi''(x + y + z)}{[1 + \varphi'(x + y + z)]^3}$.
 3. 在圆盘内部, 求偏导得 $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y - 1$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - x - 1$, 解得驻点 $(1, 1)$ 在单位圆盘外, 舍去. 故最值只可能圆盘边界上取得, 而有界闭集上的连续函数必有最值. 因此只需在约束条件 $x^2 + y^2 = 1$ 下求条件极值. 构造 Lagrange 函数 $L := x^2 - xy + y^2 - x - y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$, 求得 L 的驻点为 $\pm \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), (0, -1), (-1, 0)$. 检验知最大值为 $2 = f(0, -1) = f(-1, 0)$, 最小值为 $\frac{1}{2} - \sqrt{2} = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

4. 易见 $\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = \int_a^b e^{-ux} du$, 即 $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \cos cx dx = \int_0^{+\infty} \left[\int_a^b e^{-ux} \cos cx du \right] dx$. 又注意到广义积分 $\int_0^{+\infty} e^{-ux} \cos cx dx$ 关于 $u \in [a, b]$ 一致收敛, 故 $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \cos cx dx = \int_a^b du \int_0^{+\infty} e^{-ux} \cos cx dx = \int_a^b \frac{u du}{u^2 + c^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{b^2 + c^2}{a^2 + c^2}$ (积分换序时用到了致收敛性). (注: 一致收敛性这里不要求证明, 仅需明确指出.)

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题)

1. 由极限定义: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in U_\delta(x_0), \forall y \in U_\delta(y_0) : |\varphi(y) - a| < \frac{\varepsilon}{2}, |\psi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. 进而有 $|f(x, y) - a| \leq |f(x, y) - \varphi(y)| + |\varphi(y) - a| \leq \psi(x) + |\varphi(y) - a| < \varepsilon$, 由极限定义即证得.
 2. (1) 显然有 $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f'_x}{f} \right) = \frac{f''_{xy}f - f'_x f'_y}{f^2} \equiv 0$. (2) 由 (1) 知函数 $\frac{f'_x}{f}$ 与 y 无关, 即 $\frac{\partial(\ln f)}{\partial x} = \frac{f'_x}{f} = \xi(x)$, 其中 $\xi(x) \in C^{(1)}$. 由此可积分得 $\ln f(x, y) = \int \xi(x) dx + \eta(y)$, 或 $f(x, y) = e^{\int \xi(x) dx} \cdot e^{\eta(y)}$, 这里 $e^{\int \xi(x) dx}, e^{\eta(y)} \in C^{(2)}$.

清华大学 2013 级微积分 A(2) 期中考试试题

2014.4

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空) [请将答案直接填写在横线上]

1. 设 $z = z(x, y)$ 由方程 $z + e^x = xy$ 确定, 则 $dz = \underline{(y - e^x)dx + x dy}$
2. 函数 $u = x^2 + 2y - xyz$ 在 $(1, 1, 0)$ 处的梯度方向为 g , 则 $\frac{\partial u}{\partial g} \Big|_{(1,1,0)} = \underline{\frac{(2, 2, -1)}{\sqrt{6}}}$ 是具体数
3. 设 $u = f(x, y, z)$, 其中 $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, 则 $\frac{\partial u}{\partial x} = \underline{f'_x + f'_z \frac{x}{x^2 + y^2}}$ 梯度向量的模长
4. 设 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2x\}$, 则 $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \underline{\frac{\pi}{2}}$
5. 交换积分次序: $\int_0^1 dx \int_{2x}^{3x} f(x, y) dy = \underline{\hspace{2cm}}$
6. 设 $F(x) = \int_0^x \frac{\sin xy}{y} dy$, 则 $F'(x) = \underline{\frac{\sin x^2}{x}}$
7. 设 $D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 1\}$, 则 $\iint_D (1 + ye^{x^{10}}) dx dy = \underline{\hspace{2cm}}$
8. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2)^{x^2 y^2} = \underline{1}$
9. 曲面 $e^z - z + xy = 3$ 在点 $(2, 1, 0)$ 处的切平面方程为 $\underline{x + 2y - 4 = 0}$
10. 曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ 在点 $(1, -2, 1)$ 的切线方程为 $\underline{\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{-1}}$ 且 $y = -2$
11. 函数 $f(x, y) = e^x \cos y$ 在点 $(0, 0)$ 处带 Peano 余项的二阶 Taylor 展开式为 $\underline{1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + o(x^2 + y^2)}$
12. 在变换 $\begin{cases} u = x \\ v = y - x \end{cases}$ 下, 方程 $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ 可化为 $\underline{\frac{\partial f}{\partial u} = 0}$
13. 二元函数 $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ 在点 $(-1, 1)$ 处增长最快的方向为 $\underline{(-1, 1)}$
14. $\lim_{a \rightarrow 0} \int_0^1 \sqrt{x^3 + a^2} dx = \underline{\frac{2}{5}}$
15. 广义积分 $\int_0^{+\infty} e^{-yx} \frac{\sin x}{x} dx$ 在 $y \in [0, +\infty)$ 上是否一致收敛? 是 (填“是”或“否”).

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题) [请写出详细的计算过程和必要的依据]

1. 设 $z = z(x, y)$ 由方程 $z = f(x + y + z)$ 确定, 其中 f 是 $C^{(2)}$ 类函数, 且 $f' \neq 1$. 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \underline{\frac{f''}{(1 - f')^3}}$
2. 用 Lagrange 乘子法求椭圆 $5x^2 + 4xy + 2y^2 = 1$ 的长半轴和短半轴. $\underline{1, \frac{1}{\sqrt{6}}}$
3. 设 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^4}$, 研究 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点的连续性、偏导数存在性及可微性 (说明理由). $y = 2, x = -\sqrt{2y - y^2}$ 围成的平面区域.
4. 设函数 $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)^p \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ (其中 p 为实数). 讨论:

- (1) 当 p 满足什么条件时, $f(x, y)$ 在原点连续?
- (2) 当 p 满足什么条件时, $f'_x(0, 0)$ 和 $f'_y(0, 0)$ 都存在?
- (3) 当 p 满足什么条件时, $f(x, y)$ 在原点可微?

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题) [请写出详细的证明过程]

1. (10 分) 设 $x = f(u, v), y = g(u, v), w = h(x, y)$ 均有二阶连续偏导数, 且满足

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} = -\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial v}, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = -\frac{\partial g}{\partial u}; \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0.$$

连续 \Rightarrow 可交换 \downarrow 相等关系

- (1) 证明: $\frac{\partial^2(fg)}{\partial u^2} + \frac{\partial^2(fg)}{\partial v^2} = 0$; 练习链式
- (2) 证明: $w = h(f(u, v), g(u, v))$ 满足 $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0$.

2. (5 分) 设 $f(x, y)$ 是定义在 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上的可微函数, $|f(x, y)| \leq 1$.

求证: 在 D 内存在一点 (x_0, y_0) , 使得 $\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right]^2 \leq 16$.

(提示: 作辅助函数 $g(x, y) = f(x, y) + 2(x^2 + y^2)$.)

答案与提示

(说明: 以下为官方提供的参考答案. 受篇幅所限, 计算题和证明题仅给出解答概要或思路.)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空)

1. $\frac{ydx + xdy}{1 + e^z}$ 2. 3 3. $f'_1 + \frac{x}{x^2 + y^2} f'_3$ 4. $\frac{32}{9}$ (提示: 极坐标代换.) 5. $\int_0^2 dy \int_{\frac{y}{3}}^{\frac{y}{2}} f(x, y) dx +$
 $\int_2^3 dy \int_{\frac{y}{3}}^1 f(x, y) dx$ 6. $\frac{2 \sin x^2}{x}$ 7. 2 (提示: 对称性.) 8. 1 9. $x + 2y = 4$ 10. $\begin{cases} x + z = 2 \\ y = -2 \end{cases}$
 11. $1 + x + \frac{1}{2}(x^2 - y^2) + o(x^2 + y^2)$ 12. $\frac{\partial f}{\partial u} = 0$ 13. $(-1, 1)$ 14. $\frac{2}{5}$ 15. 是 (提示: D - A 判别法.)

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题)

1. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{f'}{1 - f'}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{f''}{(1 - f')^3}$.
2. 即求 $x^2 + y^2$ 在约束条件 $5x^2 + 4xy + 2y^2 = 1$ 下的极值 (由几何意义知条件极值存在). 构造 Lagrange 函数 $L = x^2 + y^2 + \lambda(5x^2 + 4xy + 2y^2 - 1)$, 求得极值点处 $\lambda = -1$ 或 $-\frac{1}{6}$. 而方程组变形得 $x^2 + y^2 = -\lambda$ (即 $-\lambda$ 就是相应的极值), 因此椭圆的长半轴为 1, 短半轴为 $\frac{1}{\sqrt{6}}$.
3. $\iint_D y dx dy = \int_0^2 dy \int_{-2}^{-\sqrt{2y-y^2}} y dx = 4 - \int_0^2 y \sqrt{2y-y^2} dy \stackrel{\sin t = y-1}{=} 4 - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin t) \cos^2 t dt = 4 - \frac{\pi}{2}$.
4. (1) 易放缩得 $p > 0$ 时 $f(x, y)$ 在原点连续. (2) 由定义得 $p > \frac{1}{2}$ 时, $f'_x(0, 0)$ 和 $f'_y(0, 0)$ 都存在, 且均为 0. (3) $p > \frac{1}{2}$ 时, $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{(f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0)) - (0 \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$, 故函数在原点可微.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题)

1. 易见 $f''_{uu} + f''_{vv} = g''_{vu} - g''_{uv} = 0$, 同理 $g''_{uu} + g''_{vv} = 0$. (1) $\frac{\partial^2(fg)}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial u}(f'_u g + g'_u f) = f''_{uu} g + 2f'_u g'_u + g''_{uu} f$, 同理 $\frac{\partial^2(fg)}{\partial v^2} = f''_{vv} g + 2f'_v g'_v + g''_{vv} f$, 相加得 $\frac{\partial^2(fg)}{\partial u^2} + \frac{\partial^2(fg)}{\partial v^2} = g(f''_{uu} + f''_{vv}) + f(g''_{uu} + g''_{vv}) + 2(f'_u g'_u + f'_v g'_v) = 0$.
- (2) $\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}$, 故 $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = (h''_{xx} f'_u + h''_{xy} g'_u) f'_u + (h''_{xy} f'_u + h''_{yy} g'_u) g'_u + h'_x f''_{uu} + h'_y g''_{uu}$. 同理可得 $\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}$ (仅需将下标中所有 u 改为 v). 同 (1) 相加并合并同类项即得待证式.
2. 令 $g(x, y) := f(x, y) + 2(x^2 + y^2)$, 则在单位圆上 $g(x, y) \geq 1$, 但 $g(0, 0) \leq 1$. 故 $g(x, y)$ 在单位圆内部某极值点 (x_0, y_0) 处取最小值, 从而 $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right| = 4|x_0|, \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right| = 4|y_0|$. 平方相加即得待证式.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f' \cdot \frac{1}{y}$$

清华大学 2017 级微积分 A(2) 期中考试试题

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f' \cdot x$$

2018.4.21

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空) [请将答案直接填写在横线上]

1. 设 $f(u)$ 可导, 函数 $z = f\left(\ln x + \frac{1}{y}\right)$, 则 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = \underline{0}$.
2. 曲面 $(x+y+z)e^{xyz} = 3e$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处的切平面方程为 $\underline{x+y+z=3}$.
3. 设 $f(x, y) = x^2 \cos y + y(x-1) \arcsin(\tan x)$, 则 $f'_x(1, 0) = \underline{2}$.
4. 极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(xy)}{x^2 + y^2} = \underline{\quad\quad\quad}$.
5. 极限 $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} \frac{x+y}{x^2 - xy + y^2} = \underline{\quad\quad\quad}$.
6. 极限 $\lim_{y \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{x dx}{(1+xy)^{\frac{1}{y}}} = \underline{\quad\quad\quad}$.
7. 设 $f(x)$ 可导, $I(y) = \int_0^y (x-y)f(x)dx$, 则 $I''(y) = \underline{\quad\quad\quad}$.
8. 计算累次积分: $I = \int_0^{+\infty} dx \int_1^2 e^{-tx} dt = \underline{\quad\quad\quad}$.
9. 设 $z = \arccos \frac{x}{y}$, 则其微分 $dz = \underline{\quad\quad\quad}$.
10. 设 $f(x, y) = x^y y^x$, 则函数 f 在点 $(1, 1)$ 处的微分为 $df(1, 1) = \underline{\quad\quad\quad}$.
11. 曲线 $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ 2x^2 y + 2y - z^2 = 0 \end{cases}$ 在点 $(1, 1, 2)$ 处的切线方程为 $\underline{\quad\quad\quad}$.
12. 曲面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处的法线方程为 $\underline{\quad\quad\quad}$.
13. 函数 $u = x^2 - 2xy + 3y^2$ 在点 $(1, 1)$ 处方向导数的最大值为 $\underline{\quad\quad\quad}$.
14. 设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $z^3 - 3xyz = 1$ 确定的隐函数, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} = \underline{\quad\quad\quad}$.
15. 函数 $\cos(x+y)$ 在点 $(0, 0)$ 处带 Peano 余项 $o(x^2 + y^2)$ 的 Taylor 展开式为 $\underline{\quad\quad\quad}$.

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题) [请写出详细的计算过程和必要的依据]

1. 求函数 $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ 在闭单位圆盘 $x^2 + y^2 \leq 1$ 上的最大值和最小值.
2. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上连续, 在开区间 $(0, 1)$ 上连续可微. 记 $F(y) = \int_0^1 f(x)|y-x|dx$, 证明函数 $F(y)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上连续, 在开区间 $(0, 1)$ 上二次连续可微, 并求 $F''(y)$.
3. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 y)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, 回答以下问题 (要求说明理由):
 - (1) 函数 f 在原点 $(0, 0)$ 处是否连续?
 - (2) 函数 f 在原点 $(0, 0)$ 处的两个偏导数 $f'_x(0, 0)$ 和 $f'_y(0, 0)$ 是否存在? 求出存在的偏导数.
 - (3) 函数 f 在原点 $(0, 0)$ 处是否可微? 若可微, 求出 f 在原点 $(0, 0)$ 处的微分.

4. 计算广义积分 $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} \sin x dx$.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题) [请写出详细的证明过程]

- (8 分) 证明函数 $f(x, y) = x^2 e^{-x^2 - y^2}$ 在全平面 \mathbb{R}^2 上存在最大值, 即存在点 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, 使得 $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$. 进而求出 $f(x, y)$ 的一切最大值点.
- (7 分) 设函数 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 二阶连续可微, 且其 Hesse 矩阵处处正定 (即实对称矩阵 $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x, y) & f''_{xy}(x, y) \\ f''_{yx}(x, y) & f''_{yy}(x, y) \end{pmatrix}$ 正定, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$). 证明: 函数 $f(x, y)$ 至多有一个驻点.

答案与提示

(说明: 本卷参考答案未公开, 以下答案仅供参考, 使用时务必谨慎核验.)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空)

- 0
- $x + y + z = 3$ (提示: 对称性.)
- 2 (提示: 先代入 y 化简.)
- 0
- 0 (提示: 放缩法.)
- $\frac{e-2}{e}$
- $-f(y)$
- $\ln 2$
- $\frac{xdy - ydx}{|y|\sqrt{y^2 - x^2}}$
- $dx + dy$
- $\begin{cases} 2(x-1) + 2(y-1) - (z-2) = 0 \\ (x-1) + (y-1) - (z-2) = 0 \end{cases}$
- $x + 2y + 3z = 6$
- 4
- $\frac{yz}{z^2 - xy}$
- $1 - \frac{1}{2}(x^2 + 2xy + y^2) + o(x^2 + y^2)$

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题)

- 有界闭域上的连续函数必有最值. 在圆盘内部, 最值点必为极值点, 解得函数有唯一驻点 $(0, 0)$. 在单位圆边界上, 构造 Lagrange 函数 $L := x^2 - xy + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$, 求偏导得条件极值点 $\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. 依次检验各极值点, 得最大值 $f_{\max} = \frac{3}{2}$ (在 $\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 处取) 和最小值 $f_{\min} = 0$ (在 $(0, 0)$ 处取).
- 由被积函数连续知常义含参积分 $F(y)$ 连续. 由定义: $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(y+h) - F(y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_0^1 f(x)(|x - (y+h)| - |x - y|)dx = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left[\int_0^y f(x)dx - \int_{y+h}^1 f(x)dx + \frac{1}{h} \int_y^{y+h} f(x)(2y+h-2x)dx \right] \xrightarrow{\exists \xi \in [y, y+h]} \left[\int_0^y - \int_y^1 \right] f(x)dx + \lim_{h \rightarrow 0^+} f(\xi)(2y - 2\xi + h) = \left[\int_0^y - \int_y^1 \right] f(x)dx$, 故函数左可导. 同理知函数右可导, 且双侧导数相等, 因此 $F(y)$ 可导且 $F'(y) = \left[\int_0^y - \int_y^1 \right] f(x)dx$. 由变限积分性质, $F'(y)$ 显然可导, 且 $F''(y) = 2f(y)$ (从而 $F(y) \in C^{(2)}(0, 1)$).
- $|f(x, y)| \sim \frac{x^2}{x^2 + y^2} |y| \leq |y| \rightarrow 0, (x, y) \rightarrow (0, 0)$, 故 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点连续. 两偏导数显然存在且均为 0, 而 $\frac{(f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0)) - (0 \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \frac{\sin[(\Delta x)^2 \Delta y]}{[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]^{\frac{3}{2}}}$ 在 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 时极限不存在, 故不可微.
- 引入参变量 t , 记 $I(t) := \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-tx}}{x} \sin x dx$, 则 $y = \frac{e^{-x} - e^{-tx}}{x} \sin x \in C(\mathbb{R}_+^2)$, $\frac{\partial y}{\partial t} = e^{-tx} \sin x \in C(\mathbb{R}_+^2)$, 且广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\partial y}{\partial t} dx$ 关于 $t \in [1, +\infty)$ 一致收敛 (Weierstrass 判别法), 故可求导得 $\frac{dI}{dt} = \int_0^{+\infty} \sin x e^{-tx} dx = -\frac{e^{-tx}(\cos x + t \sin x)}{t^2 + 1} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{t^2 + 1}$, 从而 $I(2) = I(1) + \int_1^2 \frac{dt}{t^2 + 1} = \arctan 2 - \frac{\pi}{4}$ 即为所求.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题)

- 考察辅助函数 $\varphi(t) := t^2 e^{-t^2}$, 由于 $\varphi'(t) = -2e^{-x^2} x(1 - x^2)$, 容易验证函数有最大值 $\varphi(\pm 1) = \frac{1}{e}$. 现注意到 $f(x, y) \leq (x^2 + y^2)e^{-x^2 - y^2} \leq \frac{1}{e}$, 等号当且仅当 $(x, y) = (\pm 1, 0)$ 时取到. 因此, 函数在全平面上存在最大值 $\frac{1}{e}$, 并且一切最大值点为 $(\pm 1, 0)$.
- 假设函数有两个相异驻点 (x_1, y_1) 与 (x_2, y_2) , 则在两驻点处作 Taylor 展开 (带 Lagrange 余项), 得 $f(x, y) = f(x_1, y_1) + H_f(x_1 + \theta_1 \Delta x, y_1 + \theta_1 \Delta y)(\Delta x, \Delta y)^\top = f(x_2, y_2) + H_f(x_2 + \theta_2 \Delta x, y_2 + \theta_2 \Delta y)(\Delta x, \Delta y)^\top$, $\theta_1, \theta_2 \in (0, 1)$. 由 Hesse 矩阵的正定性, $f(x_1, y_1) > f(x_2, y_2) > f(x_1, y_1)$, 矛盾. 故假设不成立, 命题得证.

清华大学 2018 级微积分 A(2) 期中考试试题

2019.4.20

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空) [请将答案直接填写在横线上]

- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (1+x^2+y^2)^{\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}} = \underline{\hspace{2cm}}.$
- 设 $z = y^x$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1, e) = \underline{\hspace{2cm}}.$
- 已知 $f(x, y)$ 在点 $(2, 1)$ 处的微分 $df = 2dx + dy$, 则 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(2+2t, 1+t) - f(2, 1)}{t} = \underline{\hspace{2cm}}.$
- 设函数 f 可导且 $f'(0) = 1$, 则函数 $z(x, y) = xy + f\left(\frac{y}{x}\right)$ 在点 $(1, 0)$ 处的微分 $dz = \underline{\hspace{2cm}}.$
- 设函数 $f(u, v) \in C^{(1)}$, 函数 $w(x, y, z) = f(x - y, x - z)$, 则 $\text{grad } w = \underline{\hspace{2cm}}.$
- 已知函数 $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ 在点 $(1, 1)$ 处沿单位向量 ℓ 的方向导数 $\frac{\partial f}{\partial \ell}(1, 1) = 0$, 则单位向量 $\ell = \underline{\hspace{2cm}}.$
- 设从 $(u_0, v_0) = (2, 1)$ 的邻域到 $(x_0, y_0) = (3, 4)$ 的邻域中, 向量值函数 $\begin{cases} x = u + v \\ y = u^2 v^2 \end{cases}$ 有可微的逆
向量值函数 $\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$, 则 $\frac{\partial u}{\partial x}(3, 4) = \underline{\hspace{2cm}}.$
- 函数 $\frac{1}{x+y}$ 在点 $(0, 1)$ 处带 Peano 余项的二阶 Taylor 展开式为 $\underline{\hspace{2cm}}.$
- 曲线 $\begin{cases} x = e^t \\ y = 2 \sin t + \cos t \\ z = 1 + e^{3t} \end{cases}$ 在 $t = 0$ 所对应点处的切线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}.$
- 曲面 $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 9$ 和曲面 $3x^2 + y^2 - z^2 = 0$ 的交线在点 $(1, -1, 2)$ 处的法平面方程为 $\underline{\hspace{2cm}}.$
- 曲面 $e^z + xy - z = 3$ 在点 $(2, 1, 0)$ 处的法线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}.$
- 已知 $z = z(x, y)$ 是由方程 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy - z - 7 = 0$ 确定的隐函数, 则 $z(x, y)$ 的驻点为 $(x_0, y_0) = \underline{\hspace{2cm}}.$
- 设 $I(y) = \int_y^{y^2} e^{x^2 y} dx$, 则 $I'(1) = \underline{\hspace{2cm}}.$
- $\lim_{y \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xy}}{1+x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$
- 已知所有二阶实方阵 $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ 构成一个 4 维线性空间 V . 定义向量值函数 $f: V \rightarrow V$, $f(X) = X^2$, 则 $f(X)$ 在 $X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 处的全微分为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题) [请写出详细的计算过程和必要的依据]

1. 设 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, 回答以下问题:

(1) 函数 $f(x, y)$ 在原点处是否连续? 说明理由.

(2) 函数 $f(x, y)$ 在原点处沿任意给定的方向 $\mathbf{u} = (a, b)$ ($a^2 + b^2 = 1$) 的方向导数是否存在? 若存在, 求出这个方向导数; 若不存在, 说明理由.

(3) 函数 $f(x, y)$ 在原点处是否可微? 若可微, 求出这个微分; 若不可微, 说明理由.

2. 已知方程 $2z - e^z + 1 + \int_y^{x^2} \sin(t^2) dt = 0$ 在 $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 0)$ 的某个邻域中确定了一个隐函数 $z = z(x, y)$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1, 1)$.

3. 设实数 $a \geq 0$, 求 $\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-ax}}{xe^x} dx$.

4. 设 $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

(1) 求 f 在平面 \mathbb{R}^2 上的所有极值; (2) 求 f 在曲线 $x^2 - xy + y^2 = 1$ 上的最大值和最小值.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题) [请写出详细的证明过程]

1. (8 分) 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 连续, 且满足 $f(0) \neq -1$, $\int_0^1 f(x) dx = 0$.

(1) 求证: 存在 $t_0 = 1$ 的邻域 U , $x_0 = 0$ 的邻域 V 以及 $C^{(1)}$ 类函数 $g: U \rightarrow V$, 使得对任意 $(t, x) \in U \times V$, 都有 $\int_x^t f(u) du = x$ 当且仅当 $x = g(t)$.

(2) 求 $g'(1)$.

2. (7 分) 设 $\alpha > 0$, $f \in C[0, 1]$ 且 $f(x) > 0$. 根据参数 α 的不同取值, 研究函数 $g(y) = \int_0^1 \frac{y^\alpha f(x)}{x^2 + y^2} dx$ ($y \in [0, +\infty)$) 的连续性, 并证明这一结论.

答案与提示

(说明: 本卷参考答案未公开, 以下答案仅供参考, 使用时务必谨慎核验.)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空)

1. e^2 2. 2 3. 5 (提示: 方向导数定义.) 4. $2dy$ 5. $(f'_1 + f'_2, -f'_1, -f'_2)$ 6. $\pm \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$

7. 2 8. $\frac{1}{x+y} = 1 - [(x-1)+y] + [(x-1)+y]^2 + o((x-1)^2 + y^2)$ (展开亦可) 9. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{3}$

10. $8(x-1) + 10(y+1) + 7(z-2) = 0$ 11. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-0}{0}$ (此式理解为 $\begin{cases} 2(x-2) = y-1 \\ z=0 \end{cases}$)

12. $(0, 0)$ 13. e 14. 0 15. $df|_{X_0} = \begin{pmatrix} 2dx_{11} & dx_{12} \\ dx_{21} & 0 \end{pmatrix}$ (提示: 其他合理写法均可.)

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题)

1. (1) $|f(x, y)| = \frac{y^2}{x^2 + y^2} |xy| \leq |xy| \rightarrow 0, (x, y) \rightarrow (0, 0)$, 故 $f(x, y)$ 在原点处连续. (2) 由方向导数定义得 $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(ta, tb) - f(0, 0)}{t\sqrt{a^2 + b^2}} = 0$, 故沿任意方向的方向导数存在且为 0. (3) 易求得 $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$, 而 $\left| \frac{f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0) - 0}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \right| = \left| \frac{\Delta x(\Delta y)^3}{[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]^{\frac{3}{2}}} \right| \leq |\Delta x| \rightarrow 0, (\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$, 故在原点处可微且 $df = 0$.

2. $\frac{\partial z}{\partial x}(1, 1) = -2 \sin 1$, $\frac{\partial z}{\partial y}(1, 1) = \sin 1$, 故 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1, 1) = \frac{e^z \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}}{2 - e^z} \Big|_{(1,1)} = -2 \sin^2 1$.

3. 记 $f(a, x) := \frac{1 - e^{-ax}}{xe^x} \in C[0, +\infty)$, 则 $\frac{\partial f}{\partial a} = e^{-(a+1)x} \in C[0, +\infty)$, 且 $\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial a} dx$ 关于 $a \in [0, +\infty)$ 一致收敛 (注意到 $\frac{\partial f}{\partial a} \leq e^{-x}$). 这里由 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(a, x) = a$ 知 0 不是瑕点. 因此, $I'(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial a} dx = -\frac{e^{-(a+1)x}}{a+1} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{a+1}$.

而 $I(0) = 0$, 故 $I(a) = \int_0^a I'(t) dt = \ln(a+1)$.

4. (1) 由方程 $\nabla f = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x) = \mathbf{0}$ 解得驻点 $(x, y) = (0, 0), (1, 1)$, 其 Hesse 矩阵 $\mathcal{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$.

由 $\mathcal{H}_f(1, 1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ 正定知 f 在 $(1, 1)$ 处有极小值 -1 . 而 $\mathcal{H}_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ 半负定, 且 $f(\varepsilon, \varepsilon) = \varepsilon^2(2\varepsilon - 3) < 0$, $f(\varepsilon, -\varepsilon^2) = \varepsilon^3(4 - \varepsilon^3) > 0, \forall \varepsilon \in (0, 1)$, 故在 $(0, 0)$ 点的任意邻域内 f 既取正值又取负值, 从而不是极值点. 综上, f 有唯一极小值 -1 (在 $(1, 1)$ 处取到). (2) 注意到在此曲线上, $f(x, y) = x + y - 3xy$, 故可构造 Lagrange 函数 $\mathcal{L} := x + y - 3xy + \lambda(x^2 - xy + y^2 - 1)$, 由 $\nabla \mathcal{L} = \mathbf{0}$ 解得 $(x, y) = (\pm 1, \pm 1), \left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}, \frac{1 \mp \sqrt{5}}{4}\right)$.

依次检验知条件极大值为 $f\left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}, \frac{1 \mp \sqrt{5}}{4}\right) = \frac{5}{4}$, 条件极小值为 $f(-1, -1) = -5$.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题)

1. (1) 即要证明方程 $F(x, t) := \int_x^t f(u) du - x = 0$ 在 (t_0, x_0) 附近确定了隐函数 $x = g(t)$. 仅需注意到 $\frac{\partial F}{\partial x} = -f(x) - 1 \neq 0$ 及 $F(0, 1) = 0$, 则由隐函数定理立得. (2) 对方程两端求导得 $f(t) - f(x) \cdot \frac{dx}{dt} - \frac{dx}{dt} = 0$, 因此 $g'(1) = \frac{dx}{dt} \Big|_{t=1} = \frac{f(1)}{1 + f(0)}$.

2. 在一切 $y_0 > 0$ 处, $g(y)$ 为常义积分, 其被积函数为 y_0 邻域内连续函数的复合, 故对一切 α 仍为连续函数. 现在考察 $y = 0$ 处的情形. 易见 $g(0) = 0$, 且由连续性知 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有最小值 m 和最大值 M ($0 < m \leq M$). 因此 $my^\alpha \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + y^2} \leq g(y) \leq My^\alpha \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + y^2}$, 其中 $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + y^2} = \frac{1}{y} \arctan \frac{1}{y}$, 故 $my^{\alpha-1} \arctan \frac{1}{y} \leq g(y) \leq My^{\alpha-1} \arctan \frac{1}{y}$. 对上式两端取极限 $y \rightarrow 0^+$, 即得: (i) $\alpha > 1$ 时, $g(y) \rightarrow 0$, 故在 $y = 0$ 处连续; (ii) $\alpha = 1$ 时, $\lim_{y \rightarrow 0^+} g(y) \geq \frac{\pi m}{2} > 0$, 故在 $y = 0$ 处间断; (iii) $\alpha < 1$ 时, $g(y) \rightarrow +\infty$, 同样在 $y = 0$ 处间断. 综上所述, $g(y)$ 在

$y \in (0, +\infty)$ 上总是连续, 而在 $y = 0$ 处 $\begin{cases} \text{连续} & \alpha \in (1, +\infty) \\ \text{间断} & \alpha \in (0, 1] \end{cases}$.

清华大学 2005 级多元微积分期末考试试题

2006.6.15

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空) [请将答案直接填写在横线上]

1. 将三重积分 $\iiint_{\Omega} f(x^2 + y^2 + z^2) dV$ (其中 $\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$) 化为球坐标下的累次积分: _____.
2. 将三重积分 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ (其中 $\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}\}$) 化为柱坐标下的累次积分: _____.
3. 设 L 是由点 $A(1, 0)$ 到点 $B(0, 1)$ 的有向线段, 则 $\int_L (x + y) d\ell =$ _____, $\int_{L(A)}^{(B)} (2x - y) dx + (x - 2y) dy =$ _____.
4. 设 S 为单位球面 (取外侧为正), 则 $\iint_{S^+} z^2 dx \wedge dy =$ _____, $\iint_S z^2 dS =$ _____.
5. 向量场 $\mathbf{A}(x, y, z) = (2x + y + z)\mathbf{i} + (x + 2y + z)\mathbf{j} + (x + y + 2z)\mathbf{k}$ 的旋度 $\text{rot } \mathbf{A} =$ _____.
6. 向量场 $\mathbf{A}(x, y, z) = yz(2x + y + z)\mathbf{i} + zx(x + 2y + z)\mathbf{j} + xy(x + y + 2z)\mathbf{k}$ 的散度 $\text{div } \mathbf{A} =$ _____.
7. 设 S^+ 为上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (z \geq 0)$ 的上侧, 则 $\iint_{S^+} x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy =$ _____.
8. 当常数 $\alpha =$ _____ 时, 积分 $\int_A^B (x^4 + \alpha xy^3) dx + (6x^2 y^2 - 5y^4) dy$ 与路径无关, 此时上述被积式 $(x^4 + \alpha xy^3) dx + (6x^2 y^2 - 5y^4) dy$ 的原函数为 _____.
9. 设 L 为闭曲线 $|x| + |y| = 2$ (取逆时针为正向), 则曲线积分 $\oint_{L^+} \frac{ax dy - by dx}{|x| + |y|} =$ _____.
10. 微分方程 $y'' + y' = 1$ 的通解为 $y(x) =$ _____.
11. 设 S 是三个坐标面与平面 $x + y + z = 1$ 围成四面体的外表面, 则 $\iint_{S^+} x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy =$ _____.
12. 设二阶非齐次线性常微分方程有解 3 及 $3 + x^2$, 其对应的齐次线性常微分方程有解 e^x , 则此非齐次线性常微分方程的通解为 _____.

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题) [请写出详细的计算过程和必要的依据]

1. 计算 $I = \iint_{S^+} (x + z) dy \wedge dz + 3z dx \wedge dy$, 其中 S^+ 为 $z = x^2 + y^2$ 在 $0 \leq z \leq 1$ 部分的外侧.
2. 设 L 是平面 $x + y + z = 0$ 与球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的交线, 从 z 轴正向看去正向为逆时针方向. 求第二类曲线积分 $\oint_{L^+} \frac{(y + 1) dx + (z + 2) dy + (x + 3) dz}{x^2 + y^2 + z^2}$.
3. 求二阶连续可微函数 $f(x)$, 使 $f'(0) = 0$ 且 $[f(x) + y(x - f(x))] + f'(x) dy$ 为全微分, 并使该微分式由 $A(0, 0)$ 到 $B(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 沿逐段光滑曲线 L 的积分值为 $\frac{\pi}{8}$.
4. 求常系数线性齐次常微分方程组 $\frac{dy}{dx} = A y$ 的通解, 其中 $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题) [请写出详细的证明过程]

1. (7 分) 设齐次线性常微分方程组 $\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$ 的系数 $a_{ij}(x) \in C(a, b)$,

$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix}$ 是方程组的两个线性无关解. 证明: Wronsky 行列式 $W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & z_1(x) \\ y_2(x) & z_2(x) \end{vmatrix}$

满足 $W(x) = W(x_0) \exp \left[\int_{x_0}^x (a_{11}(t) + a_{22}(t)) dt \right], \forall x \in (a, b)$, 其中 $x_0 \in (a, b)$ 为常数.

2. (8 分) 设 $B = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$, $u \in C^{(2)}(B)$ 是调和函数 (即 $\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$). 记

$L_\rho: x^2 + y^2 = \rho^2$ 是半径为 ρ ($\rho < R$) 的圆周. 求证:

(1) $\oint_{L_\rho} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} d\ell = 0$;

(2) 定义 $f(\rho) = \frac{1}{2\pi\rho} \oint_{L_\rho} u(x, y) d\ell$, 则 $f(\rho) \equiv u(0, 0), \forall 0 < \rho < R$. (提示: 证明 $f'(\rho) \equiv 0$.)

答案与提示

(说明: 本卷参考答案未公开, 以下答案仅供参考, 使用时务必谨慎核验.)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空)

1. $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^4 \rho d\rho \int_0^\pi f(\rho^2) \rho^2 \sin \theta d\theta$ 2. $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho \int_0^\rho f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) dz$ 3. $\sqrt{2}; -1$ 4. 0;

$\frac{4\pi}{3}$ (提示: 利用对称性.) 5. $(0, 0, 0)$ 6. $2(xy + yz + zx)$ 7. $2\pi a^3$ 8. $4; \frac{x^5}{5} + 2x^2 y^3 - y^5 + C$

9. 0 10. $C_1 e^{-x} + C_2 + x$ 11. $\frac{1}{2}$ (提示: Gauss 公式.) 12. $y = C_1 e^x + C_2 x^2 + 3$

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题)

1. 曲面在 xOy 平面上的投影区域为 $D_{xy} := \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, 且 $(A, B, C) = (2x, 2y, -1)$. 故所求积分可化为 $I = \iint_{D_{xy}} [A(x+z) + 3Cz] dx dy = \iint_{D_{xy}} [-x^2 - 3y^2 + 2x(x^2 + y^2)] dx dy$. 进而由对称性, $\iint_{D_{xy}} x^2 dx dy = \iint_{D_{xy}} y^2 dx dy$, 故 $I \stackrel{\text{对称性}}{=} \iint_{D_{xy}} -2(x^2 + y^2) dx dy \stackrel{\text{极坐标}}{=} -2 \iint_{D_{\rho\varphi}} \rho^3 d\rho d\varphi = -2 \cdot \frac{\pi}{2} = -\pi$.

2. 取 S^+ 为平面 $x + y + z = 1$ 被 L 所截区域 (取上侧为正向), 则 $L^+ = \partial S^+$. 因此有 $I \stackrel{\text{Stokes}}{=} \iint_{S^+} \text{rot}(y+1, z+2, x+3) \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S^+} (-1, -1, -1) \cdot \frac{(1, 1, 1)}{\sqrt{3}} dS = -\sqrt{3} \cdot \sigma(S) = -\sqrt{3}\pi$ (S 为单位球大圆及其内部).

3. 由题意, $0 = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = f''(x) - x + f(x)$, 即 $f''(x) + f(x) = x$, 解得通解 $f(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x$. 又 $\frac{\pi}{8} = \int_{L(A)}^B X dx + Y dy = \left[\frac{1}{2} x^2 + (1-y)(C_1 \sin x - C_2 \cos x) \right]_{(0,0)}^{(\frac{\pi}{2}, \pi)} = C_1(1-\pi) + \frac{\pi^2}{8} \Rightarrow C_1 = \frac{\pi}{8}, 0 = f'(0) = C_2 + 1 \Rightarrow C_2 = -1$, 故所求函数为 $f(x) = \frac{\pi}{8} \cos x - \sin x + x$.

4. 设 $\mathbf{y} = (u, v)^\top$, 则由 $v' = -5u + 3v$ 得 $u = \frac{3}{5}v - \frac{1}{5}v'$, $u' = \frac{3}{5}v' - \frac{1}{5}v''$, 代入 $u' = 3u + 5v$ 得 $v'' - 6v' + 34v = 0$, 解得 $v = e^{3x}(C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x)$, 进而 $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = e^{3x} \begin{pmatrix} C_1 \sin 5x - C_2 \cos 5x \\ C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x \end{pmatrix}$.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题)

1. $(\ln W)' = \frac{W'}{W} = \frac{1}{W} (y_1' z_2 + y_1 z_2' - y_2' z_1 - y_2 z_1') = \frac{1}{W} [(a_{11} y_1 + a_{12} y_2) z_2 + y_1 (a_{21} z_1 + a_{22} z_2) - (a_{21} y_1 + a_{22} y_2) z_1 - y_2 (a_{11} z_1 + a_{12} z_2)] = \frac{(y_1 z_2 - y_2 z_1)(a_{11} + a_{22})}{W} = a_{11} + a_{22}$, 故 $\ln \frac{W(x)}{W(x_0)} = \int_{x_0}^x [a_{11}(t) + a_{22}(t)] dt$, 即得命题.

2. (1) $\oint_{L_\rho} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} d\ell = \oint_{L_\rho} \nabla u \cdot \mathbf{n} d\ell \stackrel{\text{Green}}{=} \iint_{B_\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy = 0$, 其中 B_ρ 是 L_ρ 所围的闭圆盘 $x^2 + y^2 \leq \rho^2$.

(2) 作极坐标代换 $\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$, 则弧长微分为 $d\ell = \rho d\varphi$, 因此 $f(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u d\varphi$. 由 $u \in C^{(2)}(B)$ 知 $f'(\rho) =$

$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial \rho} d\varphi = \frac{1}{2\pi\rho} \oint_{L_\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} d\ell$, 其中 $\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \varphi = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}$ (这里 \mathbf{n} 是小弧段的单位外法向量), 因此

$f'(\rho) = 0$, 即 $f(\rho)$ 在 $[0, R]$ 上恒为常数. 又 $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} f(\rho) \stackrel{\exists(\xi, \eta) \in L_\rho}{=} \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{2\pi\rho \cdot u(\xi, \eta)}{2\pi\rho} = u(0, 0)$, 故命题得证.

清华大学 2006 级多元微积分期末考试试题

2007.6.28

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空) [请将答案直接填写在横线上]

1. 设 $F(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+xy)}{y} dy$, 则 $F'(x) =$ _____.
2. 设函数 $f(x, y)$ 在 \mathbb{R}^2 上连续, 交换累次积分的顺序 $\int_{-1}^2 dy \int_{y^2}^{y+2} f(x, y) dx =$ _____.
3. 设函数 $f(x, y)$ 在 \mathbb{R}^2 上连续, 将直角坐标系下的累次积分化为极坐标系下的累次积分:
 $\int_0^{\frac{R}{2}} dx \int_0^{\sqrt{3}x} f(x, y) dy + \int_{\frac{R}{2}}^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x, y) dy =$ _____.
4. 锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被柱面 $(x - 2007)^2 + (y + 2008)^2 = 4$ 所截的面积等于_____.
5. $\oint_{L^+} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} =$ _____, 其中 $L^+ : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 逆时针为正.
6. 已知 S 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, 则 $\iint_S x^2 dS =$ _____.
7. 设 L 为曲线 $x^2 + y^2 = 2x (y \geq 0)$, 则 $\int_L \sqrt{2-x} dl =$ _____.
8. 设 S 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ (取外侧为正) 的一部分, 且 S 不与坐标平面相交, 则 S 上的点 (x, y, z) 处的单位外法向量为_____; 如果 S 的面积等于 A , 则 $\iint_{S^+} \frac{dy \wedge dz}{x} + \frac{dz \wedge dx}{y} + \frac{dx \wedge dy}{z} =$ _____.
9. 如果平面向量场 $\frac{x}{y}(x^2 + y^2)^\lambda \mathbf{i} - \frac{x^2}{y^2}(x^2 + y^2)^\lambda \mathbf{j}$ 为半平面 $y > 0$ 内的保守场, 则 $\lambda =$ _____.
10. 设 $\mathbf{A}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + e^{yz}\mathbf{j} + \sin(zx)\mathbf{k}$, 则 $\operatorname{div} \mathbf{A}(x, y, z) =$ _____.
11. 设常微分方程 $y'' + (\cos x)y' + (\sin x)y = \sin 2x$ 有三个线性无关解 $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$, 则常微分方程 $y'' + (\cos x)y' + (\sin x)y = 0$ 的通解是_____.
12. 一阶常微分方程组 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = -x + 4y \end{cases}$ 的通解为_____.
13. 全微分方程 $(x + 2y)dx + (2x - y)dy = 0$ 的通解为_____.
14. 设 Ω 是由锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与平面 $z = h$ 所围的闭区域 (其中 $h > 0$), 则三重积分 $\iiint_{\Omega} z dx dy dz =$ _____.

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题) [请写出详细的计算过程和必要的依据]

1. 计算二重积分 $\iint_D |x - y^2| dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.
2. 已知 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x dx}{1+x^2} = 0$, 求 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2 + a^2)}{1+x^2} dx$ 的值 ($a \in [0, 1)$). (不要求讨论广义含参积分的一致收敛性.)

3. 计算第二类曲面积分 $\iint_{S^+} (2y+z)dz \wedge dx + zdx \wedge dy$, 其中 S^+ 为曲面 $z = x^2 + y^2 (0 \leq z \leq 1)$, 其正法向量与 z 轴正向成锐角.
4. 设二阶连续可微函数 $f(x)$ 满足 $f(1) = -2, f'(1) = 1$. 若对于右半平面 $\{(x, y) | x > 0\}$ 内任意简单光滑闭曲线 L , 恒有 $\oint_L 2yf(x)dx + x^2f'(x)dy = 0$, 求 $f(x)$.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题) [请写出详细的证明过程]

1. (8 分) 考虑二阶线性方程 $\frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + 7x = f(t)$, 其中 $f(t) \in \mathcal{C}(-\infty, +\infty)$ 满足 $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$.
 (1) 求该方程的通解 (提示: 可以使用常数变易法);
 (2) 证明: 该方程的每个解 $x(t)$ 满足 $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$.
2. (7 分) 设函数 $f(x, y) \in \mathcal{C}^{(2)}(\mathbb{R}^2)$ 满足: $f''_{xx}(x, y) + f''_{yy}(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$. 证明:
 (1) $\oint_{\Gamma_r} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} d\ell = \pi(1 - e^{-r^2})$, 其中 Γ_r 为圆周 $x^2 + y^2 = r^2$ (取逆时针为正向), 向量 \mathbf{n} 为 Γ_r 的外法向量, 且 $r > 0$;
 (2) $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} [xf'_x(x, y) + yf'_y(x, y)] dx dy = \frac{\pi}{2e}$.

答案与提示

(说明: 本卷参考答案未公开, 以下答案仅供参考, 使用时务必谨慎核验.)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空)

1. $\frac{2\ln(1+x^2)}{x}$ 2. $\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy + \int_1^4 dx \int_{x-2}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy$ 3. $\int_0^R \rho d\rho \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) d\varphi$
 4. $4\sqrt{2}\pi$ 5. 2π (提示: Green 公式.) 6. $\frac{4}{3}\pi a^4$ 7. $2\sqrt{2}$ 8. $\frac{(x, y, z)}{2}; 48\pi$ (提示: Gauss 公式.)
 9. $-\frac{1}{2}$ 10. $y + ze^{yz} + x \cos(zx)$ 11. $y = C_1(y_2 - y_1) + C_2(y_3 - y_1)$ 12. ? $\begin{cases} x = 2C_1e^{2x} + C_2e^{3x} \\ y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} \end{cases}$
 13. $x^2 + 4xy - y^2 = C$ 14. $\frac{\pi}{4}$

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题)

1. 设 $D_1 := \{(x, y) \in D | x \leq y^2\}$, $D_2 = D \setminus D_1$, 则积分化为 $\iint_{D_1} (y^2 - x) dx dy + \iint_{D_2} (x - y^2) dx dy = \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^1 (y^2 - x) dy + \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} (x - y^2) dy = \frac{1}{3} \int_0^1 (1 - 3x + 4x^{\frac{3}{2}}) dx = \frac{11}{30}$.
2. 置参变量 t , 记 $I(t) := \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+x^2} dx$. 由于 $y = \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+x^2} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+)$, $\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{2t}{(1+x^2)(t^2+x^2)} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^2)$, 且广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\partial y}{\partial t} dx$ 关于 $t \in [0, +\infty)$ 一致收敛 (可用 Weierstrass 判别法), 故 $I'(t) = \frac{2t}{t^2-1} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{t^2+x^2} \right) dx = \frac{2t}{t^2-1} \left[\arctan x - \frac{1}{t} \arctan \frac{x}{t} \right]_0^{+\infty} = \frac{2t}{t^2-1} \cdot \frac{\pi(t-1)}{2t} = \frac{\pi}{t+1}$. 而 $I(0) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\ln x dx}{1+x^2} = 0$, 故所求含参广义积分为 $I(a) = I(0) + \int_0^a I'(t) dt = \pi \ln(a+1)$.
3. 曲面在 xOy 平面上的投影区域为 $D_{xy} := \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$, 且 $(A, B, C) = (-2x, -2y, 1)$. 故所求积分可化为 $I = \iint_{D_{xy}} [B(2y+z) + Cz] dx dy = \iint_{D_{xy}} [x^2 - 3y^2 - 2y(x^2 + y^2)] dx dy$. 进而由对称性, $\iint_{D_{xy}} x^2 dx dy = \iint_{D_{xy}} y^2 dx dy$, 故 $I \stackrel{\text{对称性}}{=} \iint_{D_{xy}} -(x^2 + y^2) dx dy \stackrel{\text{极坐标}}{=} -\iint_{D_{\rho\varphi}} \rho^3 d\rho d\varphi = -\frac{\pi}{2}$.
4. 由题意, 记 $u := f(x)$, 则 $\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y} \Rightarrow x^2 u'' + 2xu' - 2u = 0$. 这是 Euler 方程, 作代换 $t := \ln x$, 则有 $xu'(x) = u'(t)$, $x^2 u''(x) = u''(t) - u'(t)$. 因此 $u''(t) + u'(t) - 2u = 0$, 解得通解 $u = C_1 e^t + C_2 e^{-2t} = C_1 x + \frac{C_2}{x^2}$. 代入定解条件, 解得 $C_1 = C_2 = -1$, 因此所求函数为 $f(x) = -x - \frac{1}{x^2}$.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题)

1. (1) 此方程对应的齐次线性方程有通解 $x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-7t}$, 取 $x_1(t) = e^{-t}$, $x_2(t) = e^{-7t}$ 为齐次方程的一组线性无关特解, 可设非齐次方程有形如 $X(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t)$ 的特解, 其中待定函数 c_1, c_2 满足限制条件 $c_1'x_1 + c_2'x_2 = 0$. 同时, 原微分方程可化为 $c_1'x_1' + c_2'x_2' = f(t)$. 联立得一线性方程组, 解得 $c_1'(t) = -\frac{x_2(t)f(t)}{W(t)}$, $c_2'(t) = \frac{x_1(t)f(t)}{W(t)}$, 其中 $W(t) := W[x_1, x_2] = x_1x_2' - x_2x_1'$ 为 Wronsky 行列式. 代入原形式, 知非齐次方程的特解

可取为 $X(t) = x_1(t) \int_{t_0}^t c_1'(u)du + x_2(t) \int_{t_0}^t c_2'(u)du = \int_{t_0}^t \frac{x_2(t)x_1(u) - x_1(t)x_2(u)}{x_1(u)x_2'(u) - x_2(u)x_1'(u)} f(u)du$. 因此, 非齐次方程的通解为 $x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-7t} + \int_{t_0}^t \frac{e^{-7t}e^{-u} - e^{-t}e^{-7u}}{-7e^{-8u} - e^{-8u}} f(u)du = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-7t} - \frac{1}{8} \int_{t_0}^t (e^{7(u-t)} - e^{u-t}) f(u)du$.

(2) 显然, 记 $I(t) := \int_{t_0}^t (e^{7(u-t)} - e^{u-t}) f(u)du$, 仅需证明 $\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = 0$. 由 $\lim_{u \rightarrow +\infty} f(u) = 0$ 知 $f(u)$ 在 $[t_0, +\infty)$ 上有界, 即 $\exists M > 0, \forall u \in [t_0, +\infty) : |f(u)| < M$. 又由定义知: $\forall \varepsilon > 0, \exists T > 0, \forall u > T : |f(u)| < \frac{\varepsilon}{2}$. 因此 $|I(t)| \leq \int_{t_0}^T (e^{u-t} - e^{7(u-t)}) |f(u)|du + \int_T^t (e^{u-t} - e^{7(u-t)}) |f(u)|du < M \left[e^{u-t} - \frac{1}{7} e^{7(u-t)} \right]_T^t + \frac{\varepsilon}{2} \left[e^{u-t} - \frac{1}{7} e^{7(u-t)} \right]_T^t = e^{-t} \cdot M \left(e^T - e^{t_0} - \frac{1}{7} e^{7t_0-6t} + \frac{1}{7} e^{7T-6t} \right) + \frac{\varepsilon}{2} \left[\frac{6}{7} - \left(e^{T-t} - \frac{1}{7} e^{7(T-t)} \right) \right] < e^{-t} \cdot MA + \frac{3}{7} \varepsilon$, 其中 $A := e^T + e^{t_0} + \frac{1}{7} (e^{7t_0} + e^{7T})$. 显然, $\exists T' > 0, \forall t > T' : e^{-t} < \frac{4}{7MA} \varepsilon$. 取 $T^* = \max\{T, T'\}$, 则 $\forall t > T^* : |I(t)| < \varepsilon$. 由此, $\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = 0$. 命题得证.

2. (1) 记 $D_{xy} := \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq r^2\}$ 为 Γ_r 所围的闭圆盘, 则 $\oint_{\Gamma_r} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} d\ell = \oint_{\Gamma_r^+} \nabla f \cdot \mathbf{n} d\ell \stackrel{\text{Green}}{=} \iint_{D_{xy}} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) dx dy = \iint_{D_{xy}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \stackrel{\text{极坐标}}{=} \iint_{D_{\rho\varphi}} e^{-\rho^2} \rho d\rho d\varphi = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r e^{-\rho^2} d(-\rho^2) = \pi(1 - e^{-r^2})$.

(2) 对被积函数作极坐标代换 $\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$, 则 $\frac{\partial f}{\partial \rho} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \rho} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \varphi$. 故 $\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} = x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}$, 从而 $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \left[x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right] dx dy = \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial \rho} \rho d\varphi$. 现考虑内层积分, 对任意固定的极径 ρ , 弧长微分为 $d\ell =$

$\sqrt{(x'(\varphi))^2 + (y'(\varphi))^2} d\varphi = \rho d\varphi$, 而 $\frac{\partial f}{\partial \rho} = \nabla f \cdot (\cos \varphi, \sin \varphi) = \nabla f \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}$ (这里 \mathbf{n} 是小弧段处的单位外法向量),

因此 $\int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial \rho} \rho d\varphi = \oint_{\Gamma_\rho} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} d\ell \stackrel{(1)}{=} \pi(1 - e^{-\rho^2})$. 从而原积分化为 $\pi \int_0^1 (1 - e^{-\rho^2}) \rho d\rho = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{e} \right) = \frac{\pi}{2e}$.

清华大学 2008 级多元微积分期末考试试题

2009.6

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空) [请将答案直接填写在横线上]

1. $\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} [(x-1)^2 + (y+1)^2 - 2z^2] dx dy dz =$ _____.
2. 设曲面 S 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ 在锥体 $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$ 中的部分, 则第一类曲面积分 $\iint_S \frac{z dS}{x^2 + y^2 + z^2} =$ _____.
3. 设 $f(x, y)$ 为 \mathbb{R}^2 上的连续函数, 交换累次积分的顺序: $\int_0^4 dy \int_{\sqrt{y}}^{6-y} f(x, y) dx =$ _____.
4. 设 D 为 xOy 平面上以 $(0, 0), (0, 1), (1, 1)$ 为顶点的三角形区域, 则 $\iint_D e^{y^2} dx dy =$ _____.
5. 设 $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 1\}$, 则 $\iint_D (x + |y|) dx dy =$ _____.
6. 设函数 $f(x, y)$ 连续, 且 $f(x, y) = xy + \iint_D f(u, v) du dv$, 其中 D 是由曲线 $v = 0, v = u^2, u = 1$ 所围的区域, 则 $f(x, y) =$ _____.
7. 设 L^+ 为曲线 $|x| + |y| = 1$ (取逆时针为正向), 则第二类曲线积分 $\oint_{L^+} \frac{dx + dy}{|x| + |y|} =$ _____.
8. 设 L 是由点 $A(-1, 0)$ 到点 $B(0, 1)$ 的直线段, 则 $\int_L (x + 3y) dl =$ _____.
9. 锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被柱面 $x^2 + y^2 = 2x$ 所截的锥面部分的面积为_____.
10. 设 S^+ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 的外侧, $\iint_{S^+} x^3 dy \wedge dz + y^3 dz \wedge dx + z^3 dx \wedge dy =$ _____.
11. 全微分方程 $(3x^2 + 2xy^3)dx + (3x^2y^2 - 6y^5)dy = 0$ 的通解为_____.
12. 二阶线性非齐次常微分方程 $y'' - 2y' + 2y = 1$ 的通解为_____.
13. 二阶线性齐次常微分方程 $t^2 \frac{d^2 x}{dt^2} - 4t \frac{dx}{dt} + 6x = 0$ 的通解为_____.
14. 设 $y_1 = 1 + 2x^2, y_2 = 1 + 2x^2 + e^{-x}$ 是某二阶线性非齐次微分方程的两个特解, 且其对应的齐次方程有一个特解 $y_3 = x$, 则该废弃此微分方程的通解为_____.
15. 设空间向量场 $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + z, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + x, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + y \right)$, 则 $\text{rot } \mathbf{F} =$ _____.

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题) [请写出详细的计算过程和必要的依据]

1. 设 $f(x)$ 是 \mathbb{R} 上的连续可微函数, 向量场 $\mathbf{F} = (xy^2 + x^2y - f(x)y, f(x)y + 2x, z)$ 是无旋的 (即 $\text{rot } \mathbf{F} = 0$). 求 $f(x)$ 以及向量场 \mathbf{F} 的势函数.
2. 计算 $I = \iint_{S^+} xz dy \wedge dz + 2zy dz \wedge dx + 3xy dx \wedge dy$, 其中 S^+ 为 $z = 1 - x^2 - \frac{y^2}{4}$ 在 $0 \leq z \leq 1$ 的部分 (取上侧为正向).
3. 设 $f(x)$ 是连续函数, 且有 $f(x) + \int_0^x (x-t)f(t)dt = e^x + 2x \int_0^1 f(xt)dt$, 求 $f(x)$.
4. 计算 $I = \oint_{L^+} \frac{y dx + z dy + x dz}{x^2 + y^2 + z^2}$, 其中 $L^+ : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + z = 1 \end{cases}$ (从 z 轴正向看逆时针为正向).

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题) [请写出详细的证明过程]

1. (8 分) 给定积分 $I = \iint_D \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$, 其中 $f(x, y)$ 在 \mathbb{R}^2 上连续可微. 设可逆的连续可微变换 $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$ 将平面 \mathbb{R}^2 上的区域 D 映成区域 D^* . 求证: 若变换满足条件 $\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\partial y}{\partial u}$, 则 $I = \iint_{D^*} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right)^2 \right] du dv$.
2. (7 分) 设在上半平面 $D = \{(x, y) \mid y > 0\}$ 内, 函数 $f(x, y)$ 有连续偏导数, 且对任意的 $t > 0$ 都有 $f(tx, ty) = t^{-2}f(x, y)$. 证明: 对上半平面 D 内任意分段光滑的有向简单闭曲线 L , 都有 $\oint_L yf(x, y)dx - xf(x, y)dy = 0$.

答案与提示

(说明: 本卷参考答案未公开, 以下答案仅供参考, 使用时务必谨慎核验.)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空)

1. $\frac{8}{3}\pi$ 2. $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$ 3. $\int_0^2 dx \int_0^{x^2} f(x, y)dy + \int_2^6 dx \int_0^{6-x} f(x, y)dy$ 4. $\frac{e-1}{2}$ 5. 1 (提示: 对称性.)
 6. $\frac{1}{8}$ (提示: 函数确定后积分为常数.) 7. 0 8. $\sqrt{2}$ 9. $\sqrt{2}\pi$ 10. $4\pi R^5$ (提示: Gauss 公式.)
 11. $x^3 + x^2y^3 - y^6 = C$ 12. $C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x + \frac{1}{2}$ 13. $y = C_1 t^2 + C_2 t^3$ (提示: 此为 Euler 方程.)
 14. $y = C_1 e^{-x} + C_2 x + 1 + 2x^2$ 15. (1, 1, 1)

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题)

1. 计算得 $\text{rot } \mathbf{F} = (0, 0, f'(x)y + 2 - 2xy - x^2 + f(x))$, 故 $yf'(x) + f(x) = 2xy + x^2 - 2, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$. 取 $y = 0$ 得 $f(x) = x^2 - 2$, 代入检验知符合题意. 用凑微分法得 \mathbf{F} 的势函数为 $U(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2y^2 - y^2 + 2xy + \frac{1}{2}z^2 + C$.
2. 曲面在 xOy 平面上的投影区域为 $D_{xy} := \left\{ (x, y) \mid x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1 \right\}$, 且 $(A, B, C) = \left(2x, \frac{y}{2}, 1 \right)$. 故所求积分可化为 $\iint_{D_{xy}} (2x^2z + y^2z + 3xy) dx dy \xrightarrow{\text{极坐标}} 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 [(2\rho^2 \cos^2 \varphi + 4\rho^2 \sin^2 \varphi)(1 - \rho^2) + 3\rho^2 \cos \varphi \sin \varphi] \rho d\rho \xrightarrow{\text{周期性}} 4\pi \int_0^1 3\rho^3(1 - \rho^2) d\rho = \pi$. 因此第二类曲面积分的值为 π .
3. 注意到 $f(x) \xrightarrow{u:=xt} e^x + 2 \int_0^x f(u) du - \int_0^x (x-t)f(t) dt$ 可导, 两边求导得 $f'(x) = e^x + 2f(x) - \int_0^x f(t) dt$ 仍可导, 再求得 $f''(x) - 2f'(x) + f(x) = e^x$. 此方程对应的齐次方程有通解 $y = (C_1 + C_2 x)e^x$, 可猜得非齐次方程有特解 $\frac{1}{2}x^2 e^x$, 因此 $f(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 + C_2 x + C_1 \right) e^x$. 代入原等式得 $(C_1 - 1) + (C_2 - C_1 - 1)x = 0$, 故 $C_1 = 1, C_2 = 2$, 从而所求函数为 $f(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1 \right) e^x$.

4. 取 S^+ 为平面 $x+z=1$ 被 L 所截区域 (取上侧为正向), 则 $L^+ = \partial S^+$. 因此有 $I \xrightarrow{\text{Stokes}} \iint_{S^+} \text{rot}(y, z, x) \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (-1, -1, -1) \cdot \frac{(1, 0, 1)}{\sqrt{2}} dS = -2 \cdot \sigma(S) = -2\pi$ (这里平面过原点, 故 S 为单位球的大圆及其内部).

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题)

1. $I = \iint_{D^*} [(f'_x)^2 + (f'_y)^2] \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv = \iint_{D^*} [(f'_x x'_u)^2 + (f'_x x'_v)^2 + (f'_y y'_u)^2 + (f'_y y'_v)^2] du dv = \iint_{D^*} [(f'_x x'_u + f'_y y'_u)^2 + (f'_x x'_v + f'_y y'_v)^2 - 2f'_x f'_y (x'_u y'_v - x'_v y'_u)] du dv = \iint_{D^*} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right)^2 \right] du dv$.
2. 条件两端对 t 求偏导得 $xf'_1(tx, ty) + yf'_2(tx, ty) = -2t^{-3}f(x, y)$, 取 $t = 1$ 得 $xf'_1(x, y) + yf'_2(x, y) + 2f(x, y) = 0$. 进而有 $\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = -f(x, y) - xf'_1(x, y) - f(x, y) - yf'_2(x, y) = 0$, 从而由 Green 公式即证得命题.

清华大学 2009 级多元微积分期末考试试题

2010.6

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空) [请将答案直接填写在横线上]

1. 设 $0 < a < b$, 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx =$ _____.
2. 设函数 $f(x, y)$ 在 \mathbb{R}^2 上连续, 交换累次积分的顺序: $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x, y) dx =$ _____.
3. 设 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2x\}$, 则 $\iint_D (y + \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy =$ _____.
4. 设 Ω 是锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 和球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 所围成的区域, 则 $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz =$ _____.
5. 圆柱面 $x^2 + y^2 = 2x$ 被曲面 $z = x^2 + y^2$ 及平面 $z = 0$ 所截部分的面积为_____.
6. 设 $A(1, 0, 0), B(1, 0, 2\pi)$ 为曲线 $L: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases}$ 上两点, 则 $\int_{L(A)}^{(B)} y dx + x dz =$ _____.
7. 设第二类曲线积分 $\int_{L^+} (1 + x^k e^{2y}) dx + (x^2 e^{2y} - y^2) dy$ 与路径无关, 则 $k =$ _____.
8. 微分方程 $e^y dx + (xe^y - 2y) dy = 0$ 的通解为_____.
9. 设 S 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, 则 $\iint_S \frac{x + y + z}{x^2 + y^2 + z^2} dS =$ _____.
10. 设 S 为 \mathbb{R}^3 中的闭圆域 $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ z = 0 \end{cases}$ (取下侧为正向), 则 $\iint_{S^+} (x^2 + y^2) dx \wedge dy =$ _____.
11. 曲面 S 是中心在原点且半径为 a 的球面 (取外侧为正向), 则第二类曲面积分 $\iint_{S^+} x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy =$ _____.
12. 设 $A(x, y, z) = x\mathbf{i} + e^y\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$, 则 $\text{rot } A(x, y, z) =$ _____.
13. 三阶常系数齐次线性常微分方程有两个解为 xe^x, e^{-x} , 则该常微分方程的通解为_____.
14. 一阶常微分方程组 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y \\ \frac{dy}{dt} = x + y \end{cases}$ 的通解为_____.
15. 微分方程 $x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0$ 的通解为_____.

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题) [请写出详细的计算过程和必要的依据]

1. 设 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 和 $z = 2 - x^2 - y^2$ 包围的空间区域, 求 $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz$.
2. 计算积分 $\oint_{L^+} (y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz$, 其中 L^+ 是柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 与平面 $\frac{x}{a} + \frac{z}{b} = 1$ ($a, b > 0$) 的交线 (从 z 轴正向向下看正向为逆时针方向).
3. 设 S^+ 为椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (取内侧为正向), 求 $\iint_{S^+} \frac{(x, y, z) \cdot d\mathbf{S}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$.
4. 设函数 $\varphi(x), \psi(x)$ 连续可导, 且 $\varphi(0) = -2, \psi(0) = 1$. 已知对平面上任意一条分段光滑曲线 L , 积分 $I = \int_{L^+} [2x\varphi(y) + \psi(y)] dx + [x^2\psi(y) + 2xy^2 - 2x\varphi(y)] dy$ 与路径无关, 求函数 $\varphi(x), \psi(x)$.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题) [请写出详细的证明过程]

- (7 分) 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上连续, 证明: $2 \int_0^1 f(x) dx \int_x^1 f(y) dy = \left[\int_0^1 f(x) dx \right]^2$.
- (8 分) 设 Ω 为 \mathbb{R}^3 中的有界闭区域, 其边界面 $\partial\Omega$ 为光滑闭曲面, 函数 $u(x, y, z), v(x, y, z)$ 在 Ω 上二阶连续可微.
 - 试证明: $\iint_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS = \iiint_{\Omega} v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) dx dy dz + \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) dx dy dz$, 其中 \mathbf{n} 为 $\partial\Omega$ 的外法向量;
 - 若 $u(x, y, z)$ 为调和函数 (即 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \forall (x, y, z) \in \Omega$), 且 $u(x, y, z)|_{\partial\Omega} \equiv 0$ (即函数 u 在边界面 $\partial\Omega$ 上取值恒为 0), 证明: $u(x, y, z) = 0, \forall (x, y, z) \in \Omega$.

答案与提示

(说明: 以下为官方提供的参考答案. 受篇幅所限, 计算题和证明题仅给出解答概要或思路.)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空)

- $\ln \frac{b}{a}$
- $\int_{-1}^1 dx \int_0^{1-x^2} f(x, y) dy$
- $\frac{32}{9}$ (提示: 极坐标代换.)
- $\frac{\pi R^5}{5} (2 - \sqrt{2})$ (提示: 球坐标代换.)
- 4π
- $-\pi$
- 1
- $xe^y - y^2 = C$
- 0 (提示: 对称性.)
- $\frac{\pi}{2}$
- $4\pi a^3$
- $(xz, -yz, 0)$
- $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{-x}$
- $\begin{cases} x = C_1 + C_2 e^{2t} \\ y = -C_1 + C_2 e^{2t} \end{cases}$
- $y = C_1 x + \frac{C_2}{x^2}$

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题)

- $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) dx dy \int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} dz \xrightarrow{\text{极坐标}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^3 (1 - \rho^2) d\rho = \frac{\pi}{3}$.
- 设平面被柱面所截部分为 S^+ (上侧为正), 则 $\partial S^+ = L^+$. 故有 $\oint_{\partial S^+} (y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz \xrightarrow{\text{Stokes}} \iint_{S^+} (-2, -2, -2) \cdot d\mathbf{S} = \frac{-2(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}} \iint_S dS = -\frac{2(a+b)}{a} \pi R^2$.
- 易见被积函数的散度为 0, 且单位球 $B^+ : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (内侧为正) 完全含于 S^+ 内, 故 $\iint_{S^+} \frac{(x, y, z) \cdot d\mathbf{S}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \xrightarrow{\text{Gauss}} \iint_{B^+} \frac{(x, y, z) \cdot d\mathbf{S}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \iint_{B^+} (x, y, z) \cdot d\mathbf{S} \xrightarrow{\text{Gauss}} -3 \cdot \frac{4\pi}{3} = -4\pi$.
- 由题设知 $\frac{\partial}{\partial x} [x^2 \psi(y) + 2xy - 2x\varphi(y)] = 2 \frac{\partial}{\partial x} [x\varphi(y) + \psi(y)]$, 即 $2x\psi(y) + 2y^2 - 2\varphi(y) = 2x\varphi'(y) + 2\psi'(y)$ 对一切 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ 均成立. 取 $x = 0$ 得 $\varphi(y) + \psi'(y) = y^2$, 代入原方程得 $\psi(y) = \varphi'(y)$ (取 $x \neq 0$), 进而得二阶常微分方程 $\varphi''(y) + \varphi(y) = y^2$. 解得 $\varphi(y) = C_1 \cos y + C_2 \sin y + y^2 - 2$, 由初值条件 $\varphi(0) = -2, \varphi'(0) = 1$ 得 $C_1 = 0, C_2 = 1$. 故所求函数为 $\varphi(x) = \sin x + x^2 - 2, \psi(x) = \cos x + 2x$.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题)

- 由 $\int_0^1 f(x) dx \int_x^1 f(y) dy \xrightarrow{\text{换序}} \int_0^1 f(y) dy \int_0^y f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx \int_0^x f(y) dy$ 知 $2 \int_0^1 f(x) dx \int_x^1 f(y) dy = \int_0^1 f(x) dx \left[\int_x^1 f(y) dy + \int_0^x f(y) dy \right] = \left[\int_0^1 f(x) dx \right]^2$. 命题得证.
- (1) $\iint_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS = \iint_{\partial\Omega^+} v \text{grad } u \cdot d\mathbf{S} \xrightarrow{\text{Gauss}} \iiint_{\Omega} \text{div}(v \text{grad } u) dx dy dz$, 展开即得右侧表达式. (2) 在 (1) 中取 $u = v$, 并注意: (i) 对调和函数 u , $\iiint_{\Omega} v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) dx dy dz = 0$; (ii) 由 $u(x, y, z)|_{\partial\Omega} \equiv 0$ 知 $\iint_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS = 0$, 故 $\iiint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz = 0$, 从而 $\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \equiv 0$ (由连续性), 故 u 在 Ω 上恒为常数. 再由边界 $\partial\Omega$ 上的取值, 即得 $u(x, y, z) \equiv 0$.

清华大学 2010 级微积分 A(2) 期末考试试题

2011.6

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空) [请将答案直接填写在横线上]

1. $\lim_{y \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{dx}{(1+xy)^{\frac{1}{y}}} =$ _____.
2. 交换累次积分的顺序: $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} dy \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx =$ _____.
3. 设平面区域 D 是以原点为圆心的闭单位圆, 则二重积分 $\iint_D y \sin(x^4 + y^4) dx dy =$ _____.
4. 由六个平面 $3x-y-z = \pm 1, x+3y-z = \pm 1, -x-y+3z = \pm 1$ 所围的立体体积 $V =$ _____.
5. 设曲线 L 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} (t \in [0, 2\pi])$, 则 $\oint_L \frac{y^2 d\ell}{(x-1)^2 + (y-1)^2} =$ _____.
6. $\int_{L^+} y dx - x dy =$ _____, 其中 L^+ 为曲线 $y = x^2 - 1$ 从 $A(0, -1)$ 到 $B(1, 0)$ 的部分.
7. $\iint_S (xy + yz + zx + 1) dS =$ _____, 其中 S 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被柱面 $x^2 + y^2 = 2$ 所截得的有限部分.
8. 柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 介于曲面 $z = 1 + x^2$ 与平面 $z = 0$ 之间的面积为_____.
9. 曲面 S^+ 为圆柱面 $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 2\}$ (取外侧为正向), 则 $\iint_{S^+} e^{x+y} dx \wedge dy + (y-z) dy \wedge dz =$ _____.
10. 设 $V(x, y, z) = (x + y + z, xy + yz + zx, xyz)$, 则 $\operatorname{div} V =$ _____.
11. 设 $f(x, y, z) = \sin(x + y + z)$, 则 $\operatorname{grad} f =$ _____, $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) =$ _____.
12. 微分方程组 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y \\ \frac{dy}{dt} = -2x + 3y \end{cases}$ 的通解为_____.
13. 设 $du = y \cos(xy) dx + x \cos(xy) dy + \sin z dz$, 则 $u(x, y, z) =$ _____.
14. 设 $x^2 e^{2x}$ 为三阶常系数线性齐次常微分方程的一个解, 则该微分方程的通解为_____.

二、计算题 (合计 40 分, 共 4 题) [请写出详细的计算过程和必要的依据]

1. (8 分) 设 L 为椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, 其周长为 a . 计算 $\oint_L (3x + 2y + 1)^2 d\ell$.
2. (10 分) 求 $\iint_{S^+} \frac{xdy \wedge dz + (z+1)^2 dx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}$, 其中 S^+ 为下半球面 $z = -\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的下侧.
3. (10 分) 求 $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$, 其中 $\Omega = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}\}$.
4. (12 分) 设 $f(x)$ 二阶可导, $f(1) = 0$ 且 $f'(1) = 0$. 已知在右半平面 ($x > 0$) 内第二类曲线积分

$$\int_{L(A)}^{(B)} \left(\frac{9}{x^2} - 2f(x) \right) y dx - (x^2 f'(x) + \sin y) dy \text{ 与路径无关, 求 } f(x).$$

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题) [请写出详细的证明过程]

- (7 分) 设 f 为连续函数, 证明: $\int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y f(z) dz = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-z)^2 f(z) dz$.
- (8 分) 设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 为单连通有界闭区域, 其边界 ∂D 逐段光滑, 且取逆时针为正向, 并设 \mathbf{n} 为其边界外法向量. 设二阶连续可微函数 $u(x, y)$ 为 D 内的调和函数 (即 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \forall (x, y) \in D$). 设 r_0 为 D 内任意一点, \mathbf{r} 为 r_0 到 ∂D 上某点的向量, 并记 $r = \|\mathbf{r}\|$. 证明:
 - (1) $u(r_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \left(u \frac{\cos \langle \mathbf{r}, \mathbf{n} \rangle}{r} - \ln r \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) d\ell$;
 - (2) 如果 L_R 是以 r_0 为圆心、 R 为半径的圆, 则 $u(r_0) = \frac{1}{2\pi R} \oint_{L_R} u(x, y) d\ell$.

答案与提示

(说明: 以下为官方提供的参考答案. 受篇幅所限, 计算题和证明题仅给出解答概要或思路.)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空)

1. $1 - \frac{1}{e}$
2. $\int_{\frac{1}{2}}^1 dx \int_{x^2}^x f(x, y) dy$
3. 0 (提示: 对称性.)
4. $\frac{1}{3}$ (提示: 坐标变换.)
5. 3π
6. $-\frac{4}{3}$
7. $2\sqrt{2}\pi$ (提示: 对称性.)
8. 3π
9. 0 (提示: 用投影法化简, 同时用对称性.)
10. $1 + x + z + xy$
11. $\cos(x + y + z)(1, 1, 1); 0$
12. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix}$
13. $\sin(xy) - \cos z + C$
14. $C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + C_3 x^2 e^{2x}$ (提示: 利用特征根重根时的结论.)

二、计算题 (合计 40 分, 共 4 题)

1. 由对称性知 $\oint_L x d\ell = \oint_L y d\ell = \oint_L xy d\ell = 0$, 故 $\oint_L (3x + 2y + 1)^2 d\ell = \oint_L [(9x^2 + 4y^2) + 1] d\ell = 37a$.
2. 设下半单位球为 Ω , 闭圆盘 $S_1^+ : x^2 + y^2 \leq 1 (z = 0)$ (上侧为正). 则 $S^+ \cup S_1^+ = \partial\Omega^+$, 故 $\iint_{S^+} x dy \wedge dz + (z+1)^2 dx \wedge dy = \left[\iint_{\partial\Omega^+} - \iint_{S_1^+} \right] x dy \wedge dz + (z+1)^2 dx \wedge dy \xrightarrow{\text{Gauss; 投影}} \iint_{\Omega} (3+2z) dx dy dz - \iint_{x^2+y^2 \leq 1} dx dy = \frac{\pi}{2}$.
3. $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz \xrightarrow{\text{球坐标}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 \rho \cdot \rho^2 \sin \theta d\rho = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$.
4. 由题意知 $\frac{\partial}{\partial x} [x^2 f'(x) + \sin y] = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{9y}{x^2} - 2yf(x) \right]$, 即得 $x^2 f''(x) + 2xf'(x) - 2f(x) = -\frac{9}{x^2}$, 为一 Euler 方程. 作代换 $t := \ln x, g(t) := f(x)$, 就得到二阶线性微分方程 $g'' + g' - 2g = -9e^{-2t}$, 解得 $g(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-2t} + 3te^{-2t}$, 从而 $f(x) = C_1 x + \frac{C_2}{x^2} + \frac{3 \ln x}{x^2}$. 由初值条件 $f(1) = f'(1) = 0$ 得 $C_1 = -1, C_2 = 1$, 故 $f(x) = -x + \frac{3 \ln x + 1}{x^2}$.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题)

1. 三重积分换序不宜一步完成. 可先交换内层, 再交换外层: $\int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y f(z) dz = \int_0^1 dx \int_0^x f(z) dz \int_z^x dy = \int_0^1 dx \int_0^x (x-z) f(z) dz = \int_0^1 f(z) dz \int_z^1 (x-z) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-z)^2 f(z) dz$.
2. (1) 不妨设 $r_0 = (0, 0)$. 则 $I := \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \left(u \frac{\cos \langle \mathbf{r}, \mathbf{n} \rangle}{r} - \ln r \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) d\ell = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \left[u \frac{(x, y)}{r} - \ln r \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \cdot \mathbf{n} d\ell$. 易证被积函数散度为 0, 记 $D_\varepsilon : x^2 + y^2 \leq \varepsilon^2$, 则 $I \xrightarrow{\text{Gauss}} \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D_\varepsilon} u \frac{(x, y)}{r} \cdot \mathbf{n} d\ell - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D_\varepsilon} \ln r \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cdot \mathbf{n} d\ell = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial D_\varepsilon} u d\ell - \frac{\ln \varepsilon}{2\pi \varepsilon} \int_{\partial D_\varepsilon} \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cdot \mathbf{n} d\ell \xrightarrow{\exists \xi_\varepsilon \in \partial D_\varepsilon; \text{Green}} \frac{L(\partial D_\varepsilon) \cdot u(\xi_\varepsilon)}{2\pi \varepsilon} - \frac{\ln \varepsilon}{2\pi \varepsilon} \iint_{D_\varepsilon} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy = u(\xi_\varepsilon)$. 取极限 $\varepsilon \rightarrow 0^+$, 即得 $I = u(0)$, 命题得证. (2) 实际上, 若忽略对曲线积分用中值定理的步骤, 则此式已由 (1) 得证. 注意到 $u(r_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \left(u \frac{\cos \langle \mathbf{r}, \mathbf{n} \rangle}{r} - \ln r \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) d\ell = \int_{\partial D_\varepsilon} u d\ell$, 仅需将 ε 改记为 $R, \partial D_\varepsilon$ 改记为 L_R 即可.

清华大学 2011 级微积分 A(2) 期末考试试题

2012.6

(本卷后用作期末考试样卷.)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空) [请将答案直接填写在横线上]

1. 交换累次积分的顺序: $\int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx + \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x, y) dx =$ _____.
2. 设曲线 L 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 - \sin t \\ y = 1 - \sqrt{2} \cos t \end{cases} (t \in [0, 2\pi])$, 则 $\oint_L \sqrt{x^2 - 2x + 2} dl =$ _____.
3. 设 S 为单位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, 则 $\iint_S (x+1)^2 dS =$ _____.
4. 设 $\mathbf{V}(x, y, z) = (x+y+z, xy+yz+zx, xyz)$, 则 $\operatorname{div} \mathbf{V} =$ _____.
5. 设 $f(x, y, z) = e^{x+y+z}$, 则 $\operatorname{grad} f =$ _____, $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) =$ _____.
6. 设函数 $f(x) = x^2 + x + 2$ 在区间 $[0, 2)$ 上的 Fourier 展开为 $S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n\pi x) + b_n \sin(n\pi x)]$, 则 $S(0) =$ _____.
7. 三重积分 $\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} x^{99} y^{100} z^{101} dx dy dz =$ _____.
8. 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{(n+1)!}$ 的和为_____.
9. 函数 $\frac{1}{1-x}$ 在 $x_0 = 2$ 点的 Taylor 级数为_____.
10. 已知 $\int_{L^+} \frac{x^\lambda dy - y dx}{x^2 + y^2} = 0$ 对上半平面任意光滑闭曲线 L 都成立, 则常数 $\lambda =$ _____.
11. 设 S^+ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的外侧, 则 $\iint_{S^+} x dy \wedge dz + \cos y dz \wedge dx + dx \wedge dy =$ _____.
12. 函数 $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ 在 $x_0 = 0$ 点的幂级数展开为_____.
13. 设幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-a)^n}{n}$ 在 $x = 3$ 处收敛, 且当 $x < 3$ 时发散, 则 $a =$ _____.
14. 设平面区域 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\}$, 则 D 的形心横坐标 $\bar{x} =$ _____.

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题) [请写出详细的计算过程和必要的依据]

1. 设 S^+ 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2} (0 \leq z \leq 1)$ 的下侧, 求 $\iint_{S^+} (x+y) dy \wedge dz + (2y-z) dz \wedge dx$.
2. 求两个球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ 与 $x^2 + y^2 + (z-2)^2 \leq 4$ 相交部分的体积.
3. 设 $f(x) = \sin^2(x^2)$.
(1) 求 $f(x)$ 在 $x_0 = 0$ 点的幂级数展开; (2) 求 $f^{(n)}(0) (n = 1, 2, 3, \dots)$.
4. 设 $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n e^{-nx} (x > 0)$, 求 $\int_{\ln 2}^{\ln 3} f(x) dx$.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题) [请写出详细的证明过程]

1. (8 分) (1) 以 2π 为周期的函数 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上定义为 $f(x) = \cos \alpha x$ ($\alpha \notin \mathbb{Z}$), 将其展成 Fourier 级数. (提示: $\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$);
- (2) 利用 (1) 证明: $\cot x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}$ ($x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$).
2. (7 分) 设函数 $P(x, y), Q(x, y) \in C^{(1)}(\mathbb{R}^2)$. 在以任意点 (x_0, y_0) 为中心, 任意正数 r 为半径的上半圆周 Γ 上, 总有 $\int_{\Gamma} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$. 求证: 在 \mathbb{R}^2 上有 $P(x, y) \equiv 0, \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \equiv 0$. (提示: 用 Green 公式.)

答案与提示

(说明: 以下为官方提供的参考答案. 受篇幅所限, 计算题和证明题仅给出解答概要或思路.)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空)

1. $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y)dy$ 2. 3π 3. $\frac{16}{3}\pi$ (提示: 对称性.) 4. $1+x+z+xy$ 5. $e^{x+y+z}(1, 1, 1)$;
 6. 5 7. 0 (提示: 对称性.) 8. $\frac{e^2-3}{2}$ 9. $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1}(x-2)^n, x \in (1, 3)$ (提示: 换元 $t := x-2$.)
 10. 1 11. $\frac{4}{3}\pi$ (提示: Gauss 公式.) 12. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1) \cdot (2n+1)!}$ 13. 4 14. $\frac{3}{8}$

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题)

1. 设圆盘 $S_1^+: x^2+y^2 \leq 1 (z=1)$ (上侧为正), Ω 为 S 与 S_1 所围锥体. 则 $\iint_{S^+} (x+y)dy \wedge dz + (2y-z)dz \wedge dx = \left[\iint_{\partial\Omega^+} - \iint_{S_1^+} \right] (x+y)dy \wedge dz + (2y-z)dz \wedge dx \xrightarrow{\text{Gauss; 投影}} 3 \iiint_{\Omega} dx dy dz - 0 = \pi$.
2. 联立两球方程得交线方程 $\begin{cases} x^2+y^2 = \frac{15}{16} \\ z = \frac{1}{4} \end{cases}$. 设平面区域 $D := \left\{ (x, y) \mid x^2+y^2 \leq \frac{15}{16} \right\}$, 则 $\iint_D \left[\sqrt{1-x^2-y^2} - (2 - \sqrt{4-x^2-y^2}) \right] dx dy \xrightarrow{\text{极坐标}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{\frac{15}{4}}} \left(\sqrt{1-\rho^2} + \sqrt{4-\rho^2} \right) \rho d\rho - \frac{15}{16} \cdot 2\pi = \frac{13}{24}\pi$.
3. (1) $f(x) = \frac{1 - \cos(2x^2)}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{4n}$. (2) $f^{(n)} = \begin{cases} 0 & n \neq 4k \\ (-1)^{k+1} \frac{2^{2k-1} \cdot (4k)!}{(2k)!} & n = 4k \end{cases} (k \in \mathbb{Z}^+)$.
4. 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-nx}$ 在 $[\ln 2, \ln 3]$ 上一致收敛, 故可交换积分与求和的顺序: $\int_{\ln 2}^{\ln 3} f(x)dx = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-nx} \right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\ln 2}^{\ln 3} ne^{-nx} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} \right) = \frac{1}{2}$.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题)

1. (1) $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos \alpha x \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [\cos(\alpha-n)x + \cos(\alpha+n)x] dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(\alpha-n)\pi}{\alpha-n} + \frac{\sin(\alpha+n)\pi}{\alpha+n} \right] = \frac{(-1)^n \cdot 2\alpha \sin \alpha \pi}{(\alpha^2 - n^2)\pi}$ ($n \in \mathbb{N}$), 故偶函数 $\cos \alpha x = \frac{\sin \alpha x}{\pi} \left[\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2} \cos nx \right]$, $x \in [-\pi, \pi]$. (2) 令 $x = \pi$, 则 $\cot \alpha \pi = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2} \right]$. 再令 $x = \alpha\pi$, 则 $\cot x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}$ ($x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$).
2. 取半圆直径 L , 并设 Γ 与 L 围成半圆域 D , 则 $\int_L (Pdx + Qdy) = \int_{\Gamma \cup L} (Pdx + Qdy) \xrightarrow{\text{Gauss}} \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \xrightarrow{\exists(\xi, \eta) \in D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)_{(\xi, \eta)} \cdot \frac{1}{2}\pi r^2$, 而 $\int_L (Pdx + Qdy) = \int_{x_0-r}^{x_0+r} P(x, y_0)dx \xrightarrow{\exists \zeta \in (x_0-r, x_0+r)} P(\zeta, y_0)2r$. 故 $P(x_0, y_0) = \lim_{r \rightarrow 0^+} P(\zeta, y_0) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\pi r}{4} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)_{(\xi, \eta)} = 0$, 故 $P(x, y) \equiv 0$, 进而再由上式得 $\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \equiv 0$.

清华大学 2012 级微积分 A(2) 期末考试试题

2013.6

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空) [请将答案直接填写在横线上]

1. 设区域 $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 1\}$, 则 $\iint_D \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} dx dy =$ _____.
2. 交换累次积分的顺序: $\int_{-2}^0 dx \int_{-1}^{x+1} f(x, y) dy + \int_0^{\sqrt{2}} dx \int_{x^2-1}^1 f(x, y) dy =$ _____.
3. 设区域 $D = \{(x, y) | -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, 则 $\iint_D x e^{x^2+y^2} dx dy =$ _____.
4. 曲线 $x + y = a, x + y = b, x - y = \alpha, x - y = \beta$ (其中 $a < b, \alpha < \beta$) 所围成区域的面积为_____.
5. 设 Ω 是由 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 和 $z = 2$ 围成的空间区域, 将三重积分 $I = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ 化为球坐标系下的累次积分: $I =$ _____.
6. 设 Γ 是空间圆柱螺线段 $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \quad (t \in [0, 2\pi]) \\ z = t \end{cases}$, 则 $\int_{\Gamma} \frac{z^2}{x^2 + y^2} d\ell =$ _____.
7. 设 S 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, 则 $\iint_S (x^2 + 2y^2 + 3z^2) dS =$ _____.
8. 设 Γ^+ 是平面上起点为 $(0, 0)$ 、终点为 $(1, 1)$ 的直线段, 则 $\int_{\Gamma^+} x^2 y dx + y^3 dy =$ _____.
9. 设 S^+ 为 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 的外侧, 则 $\iint_{S^+} \frac{x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy}{x^2 + y^2 + z^2} =$ _____.
10. 设 $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy, e^z \sin y, -yz)$, 则 $\operatorname{div} \mathbf{F} =$ _____.
11. 微分方程 $e^y dx + (xe^y - 2y) dy = 0$ 的通解为_____.
12. 已知级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^p \ln \frac{n+1}{n}$ 收敛, 则参数 p 的取值范围是_____.
13. 幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^n$ 的收敛域为_____.
14. 函数 $\int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt$ 在 $x_0 = 0$ 点的幂级数展开为_____.
15. 设 $f(x) = x^2, x \in [0, 1]$, 其形式 Fourier 级数为 $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin n\pi x$, 则 $S(-1) =$ _____.

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题) [请写出详细的计算过程和必要的依据]

1. 求曲面积分 $\iint_{S^+} \frac{x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$, 其中 S^+ 是曲面 $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$ 的外侧.
2. 已知 L^+ 是第 I 象限中从点 $(0, 0)$ 起, 沿上半圆周 $x^2 + y^2 = 2x$ 到点 $(2, 0)$, 再沿上半圆周 $x^2 + y^2 = 4$ 到点 $(0, 2)$ 的有向曲线段. 求第二类曲线积分 $\int_{L^+} e^y dx + (2xy + xe^y) dy$.

【下一页还有试题……】

3. 将函数 $f(x) = 1 - x^2 (0 \leq x \leq \pi)$ 展开成余弦 Fourier 级数, 并求 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 的和.

4. 求 $f(x) = \frac{x^2 + 5x + 5}{(x+1)(x+2)^2}$ 在 $x_0 = 0$ 点的幂级数展开, 并求其收敛半径.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题) [请写出详细的证明过程]

1. (8 分) (1) 证明: $\iint_{0 \leq x, y \leq 1} \frac{dx dy}{1+xy} = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx$; (2) 证明: $\iint_{0 \leq x, y \leq 1} \frac{dx dy}{1+xy} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

2. (7 分) 设 $D_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$, $D_\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varepsilon^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$, \hat{n} 为 ∂D_ε 的单位外法向量. 已知 $u(x, y)$ 在 D_0 上有二阶连续偏导数, 且满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4$. 证明:

(1) 对于任意的 $\varepsilon \in (0, 1)$, 均有等式 $\oint_{\partial D_\varepsilon} \left[\ln(x^2 + y^2) \frac{\partial u(x, y)}{\partial \hat{n}} - u(x, y) \frac{\partial \ln(x^2 + y^2)}{\partial \hat{n}} \right] d\ell = 4 \iint_{D_\varepsilon} \ln(x^2 + y^2) dx dy$ 成立;

(2) 如果 $u(x, y) = 4$, $\forall (x, y) \in \partial D_0$, 则有 $u(0, 0) = 3$.

答案与提示

(说明: 本卷参考答案未公开, 以下答案仅供参考, 使用时务必谨慎核验.)

一、填空题 (每空 3 分, 共 15 空)

1. 0 (提示: 对称性.) 2. $\int_{-1}^1 dy \int_{y-1}^{\sqrt{y+1}} f(x, y) dx$ 3. 0 (提示: 奇函数和对称性.) 4. $\frac{(b-a)(\beta-\alpha)}{2}$
 5. $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{2}{\cos \theta}} f(\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta) \cdot \rho^2 \sin \theta d\rho$ 6. $\frac{8\sqrt{2}}{3} \pi^3$ 7. $8\pi R^4$ (提示: 化为对称形式.)
 8. $\frac{1}{2}$ 9. $4\pi R$ (提示: Gauss 公式.) 10. $e^z \cos y$ 11. $xe^y - y^2 = C$ 12. $(0, +\infty)$
 13. $(-1, 1]$ 14. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} x^n$ (提示: 逐项求导与逐项积分.) 15. 0

二、计算题 (每题 10 分, 共 4 题)

1. 注意到 $\operatorname{div} \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$. 记 $\Omega := \{(x, y, z) \mid 2x^2 + 2y^2 + z^2 \leq 4\}$, $B := \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$, 则 $B \subset \Omega$ 且 $\partial B^+ = \partial \Omega^+$. 因此积分可化为 $I := \left[\iint_{\partial(\Omega \setminus B)^+} + \iint_{\partial B^+} \right] \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot dS \stackrel{\text{Gauss}}{=} \iint_{\partial B^+} (x, y, z) \cdot dS + \iiint_{\Omega \setminus B} 0 dV \stackrel{\text{Gauss}}{=} \iiint_B 3dV = 3V(B) = 4\pi R^2$.
2. 设 K^+ 表示从 $(2, 0)$ 到 $(0, 0)$ 的有向线段, D 是 $L^+ \cup K^+$ 包围的闭区域; $D_1 := \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, x, y \geq 0\}$ 为四分之一圆, $D_2 := \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2x, y \geq 0\}$ 为半圆, $D = D_1 \setminus D_2$. 又 $\int_{K^+} Xdx + Ydy = 0$, 故 $\int_{L^+} Xdx + Ydy = \int_{\partial D^+} Xdx + Ydy \stackrel{\text{Green}}{=} \iint_D 2y dx dy = \left[\iint_{D_1} - \iint_{D_2} \right] 2y dx dy \stackrel{\text{极坐标}}{=} 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^2 \rho \sin \varphi \cdot \rho d\rho - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} \rho \sin \varphi \cdot \rho d\rho = \frac{16}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^3 \varphi) \sin \varphi d\varphi \stackrel{t=\cos \varphi}{=} \frac{16}{3} \int_0^1 (1 - u^3) du = 4$.
3. $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (1 - x^2) dx = 2 \left(1 - \frac{\pi^2}{3} \right)$, $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (1 - x^2) \cos nx dx = \frac{4 \cdot (-1)^{n-1}}{n^2} (n \in \mathbb{Z}^+)$. 故 $f(x) \sim 1 - \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \cos nx dx$. 取 $x = 0$, 则 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.
4. $f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+2)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (n+1) \left(\frac{x}{2} \right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{n+1}{2^{n+2}} \right) x^n, x \in (-1, 1)$.

三、证明题 (合计 15 分, 共 2 题)

1. (1) 累次积分得 $\iint_{0 \leq x, y \leq 1} \frac{dx dy}{1+xy} = \int_0^1 \frac{dx}{x} \int_0^1 \frac{d(xy)}{1+xy} = \int_0^1 \frac{dx}{x} \cdot \ln(1+xy) \Big|_{y=0}^{y=1} = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx$. (2) 设

$$F(x) := \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt, \text{ 则 } xF'(x) = \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, \text{ 逐项积分得 } F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} x^n, x \in [-1, 1].$$

因此 $\iint_{0 \leq x, y \leq 1} \frac{dx dy}{1+xy} \stackrel{(1)}{=} \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = F(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$. 命题得证.

2. (1) $\oint_{\partial D_\varepsilon} \left[\ln(x^2+y^2) \frac{\partial u}{\partial \widehat{\mathbf{n}}} - u \frac{\partial \ln(x^2+y^2)}{\partial \widehat{\mathbf{n}}} \right] d\ell = \oint_{\partial D_\varepsilon} [\ln(x^2+y^2) \nabla u - u \nabla (\ln(x^2+y^2))] \cdot \widehat{\mathbf{n}} d\ell \stackrel{\text{Green}}{=} \iint_{D_\varepsilon} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\ln(x^2+y^2) \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial \ln(x^2+y^2)}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\ln(x^2+y^2) \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial \ln(x^2+y^2)}{\partial y} \right] \right\} dx dy = \iint_{D_\varepsilon} \left[\ln(x^2+y^2) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \cdot \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} + \ln(x^2+y^2) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - u \cdot \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \right] dx dy = 4 \iint_{D_\varepsilon} \ln(x^2+y^2) dx dy$. (2) 注意到条件类似于调和函数,

下证明形似调和函数均值性质的结论. 记 $C_\rho := \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq \rho\}$ 是半径为 ρ 的圆, $f(\rho) := \frac{1}{2\pi\rho} \oint_{\partial C_\rho} u(x, y) d\ell$.

为求 $f'(\rho)$, 作极坐标代换 $\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$, 则弧长微分为 $d\ell = \rho d\varphi$, 因此 $f(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u d\varphi$. 由 $u \in C^{(2)}(D_0)$

知 $f'(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial \rho} d\varphi = \frac{1}{2\pi\rho} \oint_{\partial C_\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} d\ell = \oint_{\partial C_\rho} \frac{\partial u}{\partial \widehat{\mathbf{n}}} d\ell \stackrel{\text{Green}}{=} \frac{1}{2\pi\rho} \iint_{C_\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dS = 2\rho$, 这里用到

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \varphi = \frac{\partial f}{\partial \widehat{\mathbf{n}}}. \text{ 又 } f(1) = 4, \text{ 故 } f(\rho) = 4 + \int_1^\rho 2r dr = 3 + \rho^2 \ (\rho > 0). \text{ 又 } \lim_{\rho \rightarrow 0^+} f(\rho) \stackrel{\exists(\xi, \eta) \in \partial C_\rho}{=}$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{2\pi\rho \cdot u(\xi, \eta)}{2\pi\rho} = u(0, 0), \text{ 即得 } u(0, 0) = 3. \text{ 命题得证.}$$