《微积分A1》第三十讲

教师 杨利军

清华大学数学科学系

2025年12月31日

考虑方程 $y'' + py' + qy = 0$，其中 $p, q \in \mathbb{R}$ 为常数.

情形一：$p^2 > 4q$. 此时方程有两个互异的实特征根 λ_1, λ_2，对应两个解 $e^{\lambda_1 x}$，$e^{\lambda_2 x}$. 显然它们线性无关. 因此它们构成方程的一个基本解组.

情形二：$p^2 < 4q$. 此时两个特征根为一对共轭复根，方程有一对共轭复函数解 $e^{\lambda_1 x}$ 和 $e^{\lambda_2 x}$. 若设 $\lambda_1 = a + ib$，则 $\lambda_2 = a - ib$，$a, b \in \mathbb{R}$，$b \neq 0$，则这对复函数解可写作 $e^{\lambda_1 x} = e^{ax}(\cos bx + i \sin bx)$，$e^{\lambda_2 x} = e^{ax}(\cos bx - i \sin bx)$. 易证它们的实部和虚部 $e^{ax} \cos bx$ 和 $e^{ax} \sin bx$ 都是方程的解，且线性无关. 因此它们构成方程的一个基本解组.

情形三

<u>情形三</u>: $p^2 = 4q$. 此时方程的两个特征根相等，或者说方程有一个二重特征根 $\lambda_1 = -p/2$. 于是 $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ 是方程的一个非平凡解. 当 λ_1 是其二重特征值时，Euler 用下述方法得到一个线性无关解 $xe^{\lambda_1 x}$. 设 λ_1, λ_2 是方程的两个互异的特征值. 于是 $e^{\lambda_1 x}$, $e^{\lambda_2 x}$ 为方程的解，其差也是解. 进而差商

$$\frac{e^{\lambda_2 x} - e^{\lambda_1 x}}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

也是解. 于上式令 $\lambda_2 \to \lambda_1$, 我们得到

$$\lim_{\lambda_2 \to \lambda_1} \frac{e^{\lambda_2 x} - e^{\lambda_1 x}}{\lambda_2 - \lambda_1} = xe^{\lambda_1 x}.$$

故可期待，当 λ_1 是方程的重特征值时，函数 $xe^{\lambda_1 x}$ 也是解. 此时将 $y = xe^{\lambda_1 x}$ 代入方程 $y'' + py' + qy = 0$, 容易验证它的确是解.

三个例子

例一: 求二阶线性常系数齐次方程 $y'' - 3y' + 2y = 0$ 的一般解.

解: 特征方程为 $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$. 分解因式得 $(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$. 由此得两个互异的实特征根为 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. 于是方程有基本解组 e^x, e^{2x}. 故方程的一般解为 $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$. 解答完毕.

例二: 求二阶线性常系数齐次方程 $y'' - 2y' + 2y = 0$ 的一般解.

解: 特征方程为 $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$. 分解因式得 $(\lambda - 1)^2 + 1 = 0$. 由此得一对共轭复特征根 $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$. 复解为 $e^{(1+i)x} = e^x(\cos x + i \sin x)$, 其实部和虚部为 $e^x \cos x$, $e^x \sin x$. 它们构成方程的一个基本解组. 因此方程的一般解为 $y = e^x(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$. 解答完毕.

例三: 求二阶线性常系数齐次方程 $y'' - 2y' + y = 0$ 的一般解.

解: 特征方程为 $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$. 特征根 $\lambda_1 = 1$ 为二重. 于是方程有基本解组 e^x, xe^x. 故方程的一般解为 $y = e^x(c_1 + c_2 x)$. 解答完毕.

一. 形如 $x^2y'' + a_1xy' + a_2y = 0$ 的方程称为二阶 Euler 方程，这里 a_1，a_2 为常数. 一般 n 阶 Euler 方程是指如下形式的方程

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0, \quad x > 0. \ (*)$$

二. 可以通过独立变量变换 $x = e^t$ (t 为新的独立变量) 将 Euler 方程 (*) 化为常系数线性方程求解.

三. 也可以直接求 Euler 方程 (*) 形如 x^λ 的解. 将 $y = x^\lambda$ 代入方程 (*) 并约去因子 x^λ，即可得到一个关于 λ 的 n 次多项式方程. 解这个多项式方程，即可求得 Euler (*) 方程形如 x^λ 的解.

例: 求解 Euler 方程 $x^2y''+2xy'-2y=0$, $x>0$.

解: 作代换 $x=e^t$, 并令 $z(t)=y(e^t)$, 则 $z'=y'e^t=y'x$, $z''=y'e^t+y''e^{2t}$ $=y'x+y''x^2$. 故 $xy'=z'$, $x^2y''=z''-z'$. 代入方程 $x^2y''+2xy'-2y=0$ 得 $z''-z'+2z'-2z=0$, 即 $z''+z'-2z=0$. 这是一个二阶线性常系数方程. 其特征方程为 $\lambda^2+\lambda-2=0$, 特征根为 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-2$. 于是关于 z 的方程 $z''+z'-2z=0$ 的一般解为 $z=c_1e^t+c_2e^{-2t}$. 由此得原 Euler 方程 $x^2y''+2xy'-2y=0$ 的一般解为 $y=c_1x+c_2x^{-2}$. 解答完毕.

另解：将 $y = x^\lambda$ 代入方程 $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$ 得

$$\lambda(\lambda - 1)x^\lambda + 2\lambda x^\lambda - 2x^\lambda = 0 \quad \text{or} \quad \lambda^2 + \lambda - 2 = 0.$$

令 $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$，即 $(\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0$ 解得 $\lambda = 1, -2$. 由此得到两个解 $y_1 = x$ 和 $y_2 = x^{-2}$. 易证这两个解在 $(0, +\infty)$ 上线性无关. 因此它们构成一个基本解组，一般解为 $y = c_1x + c_2x^{-2}$. 结果与第一个解法的结果相同. 解答完毕.

用待定系数法求特解，拟多项式情形

考虑二阶线性常系数非齐次方程

$$y'' + py' + qy = R(x). \quad (*)$$

我们已经会求对应齐次方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的基本解组．由这个基本解组，可以构造方程 (*) 的一个特解 $y_p(x) = \int_{x_0}^{x} H(s,x)R(s)ds$，其中 $H(s,x)$ 是基本解组所对应的 Cauchy 函数，从而求得方程 (*) 的一般解．当右端函数 $R(x)$ 为拟多项式情形时，即 $R(x) = P(x)e^{\lambda_0 x}$ 时，其中 $P(x)$ 为多项式，我们可以采用比较方便快捷的方法，即待定系数法求特解．具体说来，我们有如下定理：

Theorem

定理：设非齐次方程 (*) 的右端为拟多项式 $R(x) = P(x)e^{\lambda_0 x}$，则当 λ_0 为 k $(0 \leq k \leq 2)$ 重特征值时，方程 (*) 有唯一拟多项式特解 $y_p = x^k Q(x)e^{\lambda_0 x}$，其中 $\deg Q = \deg P$.

例一: 求方程 $y'' - 2y' + y = 6(x+1)e^x$ 的通解.

解: 对应齐次方程的特征多项式为 $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$, $\lambda = 1$ 为二重特征根, 故齐次方程 $y'' - 2y' + y = 0$ 有基本解组 e^x, xe^x. 为求通解, 需要求方程的一个特解. 因方程右端为拟多项式 $P(x)e^{\lambda_0 x}$, $P(x) = 6(1+x)$, $\lambda_0 = 1$, 它是二重特征根, 由定理知方程有唯一拟多项式解 $y = x^2Q(x)e^x$, 其中 $Q(x)$ 为 $P(x)$ 次数相同的多项式, 即为一次多项式, 待定. 故可设 $Q(x) = Ax + B$, A, B 为待定系数. 以下将这个拟多项式代入方程来确定 A, B. 由于待定解 $y = x^2(Ax+B)e^x = e^x(Ax^3 + Bx^2)$, 故

$$y' = e^x(Ax^3 + Bx^2) + e^x(3Ax^2 + 2Bx),$$

$$y'' = e^x(Ax^3 + Bx^2) + 2e^x(3Ax^2 + 2Bx) + e^x(6Ax + B)$$

例一，续

代入方程 $y'' - 2y' + y = 6(x+1)e^x$，并约去因子 e^x 得

$$(Ax^3 + Bx^2) + 2(3Ax^2 + 2Bx) + (6Ax + 2B)$$

$$-2(Ax^3 + Bx^2) - 2(3Ax^2 + 2Bx) + (Ax^3 + Bx^2) = 6x + 6$$

化简得 $6Ax + 2B = 6x + 6$. 比较系数得 $A = 1$, $B = 3$. 因此方程有特解 $y_p = x^2(x+3)e^x$. 从而其通解为

$$y = c_1e^x + c_2xe^x + x^2(x+3)e^x.$$

解答完毕.

例二: 求方程 $y'' - y' - 2y = 4x^2$ 的一般解.

解: 对应齐次方程 $y'' - y' - 2y = 0$ 的特征方程为 $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, 分解因式得 $(\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$. 齐次方程的一般解为 $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-x}$. 以下求非齐方程特解. 由于方程右端为 $4x^2$, 它可写作 $4x^2e^{\lambda_0 x}$, $\lambda_0 = 0$. 但 $\lambda_0 = 0$ 不是特征根, 故由定理知方程有唯一特解 $y_p = A + Bx + Cx^2$, 其中 A, B, C 为待定系数. 将 y_p 代入方程 $y'' - y' - 2y = 4x^2$ 得

$$2C - (B + 2Cx) - 2(A + Bx + Cx^2) = 4x^2,$$

$$\text{即} \quad -2Cx^2 + (-2C - 2B)x + (2C - B - 2A) = 4x^2.$$

并比较系数得 $-2C = 4$, $-2C - 2B = 0$, $2C - B - 2A = 0$. 解得 $C = -2$, $B = 2$, $A = -3$. 故特解为 $y_p = -3 + 2x - 2x^2$. 方程 $y'' - y' - 2y = 4x^2$ 的一般解为 $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-x} - 3 + 2x - 2x^2$, 其中 c_1, c_2 为任意常数. 解答完毕.

定理证明(可忽略)

定理回忆：设非齐次方程

$$y'' + py' + qy = R(x), \quad (*)$$

的右端为拟多项式 $R(x) = e^{\lambda_0 x}P(x)$，则当 λ_0 为 $k\,(0 \le k \le 2)$ 重特征值时，方程 (*) 有唯一拟多项式解 $y = x^k Q(x)e^{\lambda_0 x}$，其中 $\deg Q = \deg P$.

证：假设方程 (*) 有拟多项式特解 $y = e^{\lambda_0 x}Q(x)$，其中 $Q(x)$ 为多项式，待定. 求其一阶二阶导数得

$$y' = \lambda_0 e^{\lambda_0 x}Q(x) + e^{\lambda_0 x}Q'(x),$$
$$y'' = \lambda_0^2 e^{\lambda_0 x}Q(x) + 2\lambda_0 e^{\lambda_0 x}Q'(x) + e^{\lambda_0 x}Q''(x).$$

将其代入方程 $y'' + py' + qy = R(x)$ 得

$$\lambda_0^2 e^{\lambda_0 x}Q(x) + 2\lambda_0 e^{\lambda_0 x}Q'(x) + e^{\lambda_0 x}Q''(x) + p[\lambda_0 e^{\lambda_0 x}Q(x) + e^{\lambda_0 x}Q'(x)]$$
$$+ qe^{\lambda_0 x}Q(x) = e^{\lambda_0 x}P(x).$$

证明，续一

约去因子 $e^{\lambda_0 x}$ 并稍加整理得

$$(\lambda_0^2 + p\lambda_0 + q)Q(x) + (2\lambda_0 + p)Q'(x) + Q''(x) = P(x),$$

$$\text{即} \quad f(\lambda_0)Q(x) + f'(\lambda_0)Q'(x) + Q''(x) = P(x),$$

其中 $f(\lambda) = \lambda^2 + p\lambda + q$ 为齐次方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的特征多项式.

断言：当 λ_0 为 $k\,(0 \le k \le 2)$ 重特征根时，对任给多项式 $P(x)$，多项式方程

$$f(\lambda_0)Q(x) + f'(\lambda_0)Q'(x) + Q''(x) = P(x) \quad (*)$$

存在唯一多项式解 $Q(x) = x^k\widehat{Q}(x)$，其中 $\widehat{Q}(x)$ 为多项式，且 $\deg \widehat{Q} = \deg P$.

现详细讨论如下.

证明，续二

<u>情形一</u>: $k=0$, 即 λ_0 不是特征值，亦即 $f(\lambda_0)\neq 0$. 此时多项式方程 (*) 等价于多项式方程

$$Q(x)+bQ'(x)+cQ''(x)=\widehat{P}(x), \quad (**)$$

其中 $b=\frac{f'(\lambda_0)}{f(\lambda_0)}$, $c=\frac{1}{f(\lambda_0)}$, $\widehat{P}(x)=\frac{P(x)}{f(\lambda_0)}$. 设 $\widehat{P}(x)=p_mx^m+\cdots+p_1x+p_0$ 为任给的 m 次多项式. 将 $Q(x)=q_mx^m+\cdots+q_1x+q_0$ 代入方程 (**) 得

$$\left(q_mx^m+\cdots+q_1x+q_0\right)+b\left(mq_mx^{m-1}+\cdots+q_1\right)$$

$$+c\left(m(m-1)q_mx^{m-2}+\cdots+q_2\right)=p_mx^m+\cdots+p_1x+p_0.$$

比较等式两边关于 x^m, x^{m-1}, $\cdots$, x, 1 的系数得

$$\begin{aligned} q_m &= p_m \\ q_{m-1} + mbq_m &= p_{m-1} \\ q_{m-2} + (m-1)bq_{m-1} + m(m-1)cq_{m-2} &= p_{m-2} \\ &\vdots \\ q_0 + bq_1 + 2cq_2 &= p_0. \end{aligned}$$

将上述方程写作矩阵向量形式，则

证明，续四

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ * & 1 & & & & \\ * & * & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & * & * & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_m \\ q_{m-1} \\ q_{m-2} \\ \vdots \\ \vdots \\ q_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_m \\ p_{m-1} \\ p_{m-2} \\ \vdots \\ \vdots \\ p_0 \end{bmatrix}$$

显然系数矩阵非奇，对任意给定向量 $(p_m, \cdots, p_0)^T \in \mathbb{R}^{m+1}$，存在唯一解向量 $(q_m, \cdots, q_0)^T \in \mathbb{R}^{m+1}$. 这等价于对任给多项式 $\widehat{P}(x)$，方程 $Q(x) + bQ'(x) + cQ''(x) = \widehat{P}(x)$ 有唯一多项式解 $Q(x)$. 这说明结论对于 $k = 0$ 成立.

情形二: $k=1$, 即 λ_0 是单重特征值, 即 $f(\lambda_0)=0$, $f'(\lambda_0)\neq 0$. 此时多项式方程 $f(\lambda_0)Q(x)+f'(\lambda_0)Q'(x)+Q''(x)=P(x)$ 即为 $f'(\lambda_0)Q'(x)+Q''(x)=P(x)$. 这个方程等价于 $Q'(x)+aQ''(x)=\widehat{P}(x)$. 以下证, 对给定的多项式 $\widehat{P}(x)=p_mx^m+\cdots+p_1x+p_0$, 方程 $Q'(x)+aQ''(x)=\widehat{P}(x)$ 存在唯一多项式解

$$Q(x)=x(q_mx^m+\cdots+q_1x+q_0).\quad (**)$$

理由如下. 求多项式 (**) 一阶和二阶导数得

$$Q'(x)=(m+1)q_mx^m+mq_{m-1}x^{m-1}+\cdots+2q_1x+q_0,$$
$$Q''(x)=(m+1)mq_mx^{m-1}+m(m-1)q_{m-1}x^{m-2}+\cdots+6q_2x+2q_1.$$

将上式代入方程 $Q'(x)+aQ''(x)=\widehat{P}(x)$, 并比较幂 x^m, x^{m-1}, $\cdots$, x, 1 的系数得

$$\begin{aligned}
(m+1)q_m &= p_m \\
(m+1)maq_m + mq_{m-1} &= p_{m-1} \\
m(m-1)aq_{m-1} + (m-1)q_{m-2} &= p_{m-2} \\
&\vdots \\
3\cdot 2aq_2 + 2q_1 &= p_1 \\
2aq_1 + q_0 &= p_0.
\end{aligned}$$

可写成如下矩阵向量形式

$$\begin{bmatrix} m+1 & & & & & \\ * & m & & & & \\ & * & m-1 & & & \\ & & * & \ddots & & \\ & & & 6a & 2 & \\ & & & & 2a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_m \\ q_{m-1} \\ q_{m-2} \\ \vdots \\ q_1 \\ q_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_m \\ p_{m-1} \\ p_{m-2} \\ \vdots \\ p_1 \\ p_0 \end{bmatrix}$$

显然系数矩阵非奇，对任意给定向量 $(p_m, \cdots, p_0)^T \in \mathbb{R}^{m+1}$，存在唯一解向量 $(q_m, \cdots, q_0)^T \in \mathbb{R}^{m+1}$. 这表明方程 $Q'(x) + aQ''(x) = \widehat{P}(x)$ 有唯一解 $Q(x) = x(q_m x^m + \cdots + q_1 x + q_0)$. 结论对情形二成立.

<u>情形三</u>: $k=2$，即 λ_0 是二重特征值，即 $f(\lambda_0)=0$，$f'(\lambda_0)=0$. 此时，对任意给定的多项式 $P(x)$，方程 $Q''(x)=P(x)$ 方程显然存在唯一多项式解 $Q(x)=x^2(q_m x^m+\cdots+q_1 x+q_0)$，其中 $m=\deg P$. 证毕.

Theorem

定理: 考虑非齐次方程 $y'' + py' + qy = R(x)$ 的右端为拟三角多项式情形, 即 $R(x) = e^{ax}[P_1(x)\sin bx + P_2(x)\cos bx]$, 其中 $P_1(\cdot)$, $P_2(\cdot)$ 为实多项式. 设 $a + ib$ 是 $k\ (0 \leq k \leq 1)$ 重特征根, 则方程有唯一特解形如

$$e^{ax}x^k[Q_1(x)\sin bx + Q_2(x)\cos bx],$$

其中 $Q_1(\cdot)$, $Q_2(\cdot)$ 为实多项式, 且

$$\max\{\deg Q_1, \deg Q_2\} = \max\{\deg P_1, \deg P_2\}.$$

例一

例一: 求方程 (*) $y'' - y = 2x\cos x - 2(x-2)\sin x$ 的通解.

解: 齐次方程 $y'' - y = 0$ 有特征根 ± 1, 基本解组为 e^x, e^{-x}. 方程右端为拟三角多项式 $e^{ax}[2x\cos bx - 2(x-2)\sin bx]$, 其中 $a = 0$, $b = 1$, $a \pm ib = \pm i$ 不是特征值. 故由定理知方程 (*) 有特解 $y_p = (Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x$.

求其一阶二阶导数, 并加以化简得

$$y_p' = A\cos x + C\sin x + (Cx + D)\cos x - (Ax + B)\sin x,$$

$$y_p'' = 2C\cos x - 2A\sin x - (Ax + B)\cos x - (Cx + D)\sin x$$

代入方程 $y'' - y = 2x\cos x - 2(x-2)\sin x$ 得

例一，续

$$2C\cos x - 2A\sin x - 2(Ax+B)\cos x - 2(Cx+D)\sin x$$

$$= 2x\cos x - 2(x-2)\sin x. \quad (*)$$

比较项 $x\cos x$ 和 $x\sin x$ 的系数得 $-2A = 2$, $-2C = -2$. 由此得 $A = -1$, $C = 1$. 消去项 $x\cos x$ 和 $x\sin x$ 后，等式 (*) 就变为

$$2\cos x + 2\sin x - 2B\cos x - 2D\sin x = 4\sin x.$$

再比较两边 $\cos x$ 和 $\sin x$ 的系数得 $B = 1$, $D = -1$. 于是原方程有特解 $y_p = (-x+1)\cos x + (x-1)\sin x$. 从而所求通解为

$$y = c_1e^x + c_2e^{-x} + (-x+1)\cos x + (x-1)\sin x.$$

解答完毕.

例二: 求方程 $y''+y=\sin x$ 的特解.

解: 齐次方程的特征多项式为 λ^2+1, 特征根为 $\pm i$. 由定理知方程有唯一特解, 形如 $y_p=x(A\sin x+B\cos x)$. 于是

$$y_p'=A\sin x+B\cos x+x(A\cos x-B\sin x)$$

$$y_p''=2(A\cos x-B\sin x)+x(-A\sin x-B\cos x).$$

代入方程 $y''+y=\sin x$ 得

$$2(A\cos x-B\sin x)+x(-A\sin x-B\cos x)+x(A\sin x+B\cos x)=\sin x$$

$$\Rightarrow\quad 2(A\cos x-B\sin x)=\sin x.$$

比较 $\sin x$ 和 $\cos x$ 系数得 $A=0$, $B=-1/2$. 故方程有特解 $y_p=-\frac{x}{2}\cos x$.

于是方程 $y''+y=\sin x$ 的一般解 (通解) 为 $y=c_1\cos x+c_2\sin x-\frac{x}{2}\cos x$.

解答完毕.

Lemma

引理: 考虑方程 (*) $y''+py'+qy=R(x)$, 其中 p,q 为实常数, $R(x)=R_1(x)+iR_2(x)$ 为复函数. 若 $\phi(x)=\phi_1(x)+i\phi_2(x)$ 是方程 (*) 的解, 则 $\phi_j(x)$ 是方程 $y''+py'+qy=R_j(x)$ 的解, $j=1,2$.

证: 由于 ϕ 是方程 (*) 的解, 故 $\phi''+p\phi'+q\phi=R$, 即

$$(\phi_1+i\phi_2)''+p(\phi_1+i\phi_2)'+q(\phi_1+i\phi_2)=R_1+iR_2.$$

分离实部虚部得 $(\phi_1''+p\phi_1'+q\phi_1)+i(\phi_2''+p\phi_2'+q\phi_2)=R_1+iR_2$. 由此得 $\phi_j''+p\phi_j'+q\phi_j=R_j(x)$, $j=1,2$. 证毕.

证：考虑 $y''+py'+qy=R(x)$，其中 $R(x)=e^{ax}[P_1(x)\sin bx+P_2(x)\cos bx]$. 令 $\lambda_0=a+ib$，$P(x)=P_1(x)+iP_2(x)$，则

$$e^{\lambda_0 x}P(x)=e^{ax}[\cos bx+i\sin bx][P_1(x)+iP_2(x)]$$

$$=e^{ax}\Big([P_1(x)\cos bx-P_2(x)\sin bx]+i[P_1(x)\sin bx+P_2(x)\cos bx]\Big).$$

这表明 $R(x)$ 是复函数 $e^{\lambda_0 x}P(x)$ 的虚部. 根据求解右端函数为拟多项式的结果知，方程 $y''+py'+qy=e^{\lambda_0 x}P(x)$ 有唯一的复函数解形如 $e^{\lambda_0 x}x^kQ(x)$，其中 $k(0\le k\le 1)$ 为 λ_0 作为特征值的重数. 由引理知复解 $e^{\lambda_0 x}x^kQ(x)$ 的虚部为方程 $y''+py'+qy=R(x)$ 的解. 我们来考虑复解 $e^{\lambda_0 x}x^kQ(x)$ 的虚部. 设 $Q(x)=Q_1(x)+iQ_2(x)$，则

证明，续

$$e^{\lambda_0 x}x^kQ(x) = e^{ax}x^k[\cos bx + i\sin bx][Q_1(x) + iQ_2(x)]$$

$$= e^{ax}x^k\Big([Q_1(x)\cos bx - Q_2(x)\sin bx] + i[Q_1(x)\sin bx + Q_2(x)\cos bx]\Big).$$

这就证明了方程 $y'' + py' + qy = R(x)$ 有特解形如

$$e^{ax}x^k[Q_1(x)\sin bx + Q_2(x)\cos bx].$$

具有这个形式的特解是唯一的，因为方程 $y'' + py' + qy = e^{\lambda_0 x}P(x)$ 的复函数解 $e^{\lambda_0 x}x^kQ(x)$ 唯一。证毕. □

课本第 238 页习题 7.5 题 7: 已知连续函数 $y = f(x)$ 满足方程

$$f(x) = \sin x + \int_0^x (t - x) f(t) dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (*)$$

求 $f(x)$.

解: 解答思想是将积分方程转化为微分方程, 然后解这个微分方程, 从而求得函数 $f(x)$. 首先由方程 (*) 知 $f(0) = 0$. 为确定 $f(x)$ 我们需要这个初始条件. 为方便求导, 将方程 (*) 写作

$$f(x) = \sin x + \int_0^x t f(t) dt - x \int_0^x f(t) dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (**)$$

对上式两边求导并化简得 $f'(x) = \cos x - \int_0^x f(t) dt$. 由此得 $f'(0) = 1$. 对上式再次求导得 $f''(x) = -\sin x - f(x)$. 这说明函数 $f(x)$ 是如下初值问题的解

$$\begin{cases} y'' + y = -\sin x, \\ y(0) = 0, \ y'(0) = 1. \end{cases}$$

例三，续

我们先求方程 $y''+y=-\sin x$ 的通解．方程对应的齐次方程的特征多项式为 λ^2+1，特征根为 $\pm i$．故齐次方程 $y''+y=0$ 的基本解组为 $\cos x$，$\sin x$．之前已求得方程 $y''+y=\sin x$ 有特解 $-\frac{x}{2}\cos x$ (见第24页例二)．由此得 $y''+y=-\sin x$ 有特解 $\frac{x}{2}\cos x$．于是方程 $y''+y=-\sin x$ 的一般解为 $y=c_1\cos x+c_2\sin x+\frac{x}{2}\cos x$．令 $y(0)=0$ 得 $c_1=0$．于是 $y=c_2\sin x+\frac{x}{2}\cos x$．求导得 $y'=c_2\cos x+\frac{1}{2}\cos x-\frac{x}{2}\sin x$．令 $y'(0)=1$ 得 $c_2+\frac{1}{2}=1$．由此得 $c_2=\frac{1}{2}$．于是所求函数 $f(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{x}{2}\cos x$．解答完毕．

注：课本答案为 $f(x)=c_1\sin x+\frac{x}{2}\cos x$，似有误．

高阶线性方程，线性微分算子记号

为了讨论一般 n 阶线性方程的方便，我们引入 n 阶线性微分算子记号

$$L \overset{\text{def}}{=} \frac{d^n}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{d}{dx} + a_n(x),$$

其中 $a_j(x)$ 假设在某个开区间 J 上连续，$j = 1, 2, \cdots, n$. 此时我们也称微分算子 L 定义在区间 J 上. 于是 n 阶线性微分方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$$

可简写作 $Ly = f(x)$.

Theorem

定理: 考虑 n 阶线性方程 $Ly = f(x)$, 其中微分算子 L, 以及右端函数 $f(x)$ 在开区间 J 上连续, 则对 $\forall x_0 \in J$, 以及对 $\forall y_0, y_1, \cdots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$, Cauchy (初值) 问题

$$\begin{cases} Ly = f(x), \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

的解在整个区间 J 上存在唯一. 换言之, 存在一个在 J 上 n 次连续可微函数 $\phi(x)$ 满足方程 $Ly = f(x)$, 以及初值条件 $\phi^{(j)}(x_0) = y_j$, $j = 0, 1, \cdots, n-1$, 并且这样的解唯一.

定理证明略.

Theorem

n 阶齐次线性方程 $Ly = 0$ 解的全体构成一个 n 维线性空间.

证明思想与 $n = 2$ 的情形相同. 任意固定一点 $x_0 \in J$, 记 $\phi_k(x)$, $k = 1, 2, \cdots$, n, 为齐次方程 $Ly = 0$ 满足初值条件 $y^{(k-1)}(x_0) = 1$, $y^{(j)}(x_0) = 0$, $j \neq k-1$ 的唯一解. 证明(i) $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n$ 线性无关; (ii) 齐次方程 $Ly = 0$ 的任何解均可表示为 $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n$ 的线性组合.

Definition

定义: (i) n 阶齐次方程 $Ly = 0$ 的任意 n 个线性无关的解均称为方程 $Ly = 0$ 的一个基本解组 (fundamental solutions).

(ii) 设 $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\cdots$, $y_n(x)$ 是 n 阶齐次方程 $Ly = 0$ 的 n 个解, 称如下 n 阶行列式 $W(x)$ 为这 n 个解所对应的 Wronsky 行列式.

$$W(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Liouville 定理

Theorem

设 $W(x)$ 是齐次方程 $Ly=0$ 的任意一个 Wronsky 行列式，则 $W(x)$ 可表为

$$W(x)=W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x}a_1(s)ds},\quad \forall x_0,x\in J,$$

其中 $a_1(x)$ 是微分算子的第一个系数函数，即

$$L=\frac{d^n}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}+\cdots+a_n(x).$$

注：由上述定理知 Hill 方程 $y''+p(x)y=0$ 的每个 Wronsky 行列式均为常数.

定理证明

证明: 为清楚计, 考虑情形 $n=3$. 此时

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}.$$

注意行列式求导规则: 按行求导, 或按列求导. 于是按行求导得

$$W'(x)=\begin{vmatrix} y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1''' & y_2''' & y_3''' \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1''' & y_2''' & y_3''' \end{vmatrix}.$$

注意 y_k 是方程 $Ly = 0$ 的解，即满足 $y_k''' + a_1(x)y_k'' + a_2(x)y_k' + a_3(x)y_k = 0$，或写作 $y_k''' = -a_1(x)y_k'' - a_2(x)y_k' - a_3(x)y_k$，$k = 1, 2, 3$. 将它们代入

$$W'(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1''' & y_2''' & y_3''' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ -a_1y_1'' - a_2y_1' - a_3y_1 & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

$$= -a_1 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} = -a_1W(x),$$

即 Wronsky 行列式 W 满足一阶线性齐次方程 $W' + a_1(x)W = 0$，它的每个解 $W(x)$ 均满足 $W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(s)ds}$. Liouville 定理得证. $\square$

Wronsky 行列式与解的线性相关无关性

Theorem

设 $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\cdots$, $y_n(x)$ 是 n 阶齐次方程 $Ly=0$ 的 n 个解，它们所确定的 Wronsky 行列式记作 $W(x)$，则这 n 个解线性相关 (无关) $\Longleftrightarrow W(x)\equiv 0$ ($W(x)$ 处处非零).

证：只证括号外结论. $\Rightarrow$：显然. $\Leftarrow$：设 $W(x)\equiv 0$. 任取一点 $x_0\in J$，由 $W(x_0)=0$ 可知行列式 $W(x_0)$ 的 n 个列线性相关. 于是存在 n 个不全为零的数 c_k，$k=1,\cdots,n$，使得 $c_1Y_1(x_0)+\cdots+c_nY_n(x_0)=0$ (*)，其中 $Y_k(x_0)\overset{\text{def}}{=}(y_k(x_0),y_k'(x_0),\cdots,y_k^{(n-1)}(x_0))^T$，即 $Y_k(x_0)$ 为行列式 $W(x_0)$ 的第 k 个列向量，$k=1,\cdots,n$. 令 $y(x)\overset{\text{def}}{=}c_1y_1(x)+\cdots+c_ny_n(x)$，则 $y(x)$ 是方程 $Ly=0$ 的解，且由式 (*) 知 $y(x)$ 满足条件 $y^{(j)}(x_0)=0$, $j=0,1,\cdots,n-1$. 由初值问题解的唯一性可知，$y(x)$ 恒为零. 这表明解 $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\cdots$, $y_n(x)$ 线性相关. 证毕. $\square$

定义：假设 $y_1(x), \cdots, y_n(x)$ 是 n 阶齐次方程 $Ly = 0$ 的一个基本解组，它们所确定的 Cauchy 函数定义为

$$H(s, x) \overset{\text{def}}{=} \frac{W(s, x)}{W(s)},$$

这里 $W(s)$ 为基本解组 $y_1(s), \cdots, y_n(s)$ 对应的 Wronsky 行列式，$W(s, x)$ 是将行列式 $W(s)$ 的最后一行元素依次换为 $y_1(x), \cdots, y_n(x)$ 所得到行列式，即

Cauchy 函数定义，续

$$W(s)=\begin{vmatrix} y_1(s) & y_2(s) & \cdots & y_n(s) \\ y_1'(s) & y_2'(s) & \cdots & y_n'(s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(s) & y_2^{(n-1)}(s) & \cdots & y_n^{(n-1)}(s) \end{vmatrix},$$

$$W(s,x)=\begin{vmatrix} y_1(s) & y_2(s) & \cdots & y_n(s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(s) & y_2^{(n-2)}(s) & \cdots & y_n^{(n-2)}(s) \\ y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \end{vmatrix}.$$

非齐次方程的一般解，解的结构

Theorem

定理：考虑非齐次 n 阶线性方程 $Ly = f(x)$. 假设已知对应齐次方程 $Ly = 0$ 的一个基本解组 $y_1(x), \cdots, y_n(x)$, 则非齐次方程 $Ly = f(x)$ 的一般解为 $y(x) = y_g(x) + y_p(x)$, 其中 $y_g(x)$ 是齐次方程 $Ly = 0$ 的一般解, 即 $y_g(x) = c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x)$, $y_p(x) \overset{\text{def}}{=} \int_{x_0}^{x} H(s,x) f(s) ds$ 是非齐次方程 $Ly = f(x)$ 的一个特解. 这里 $H(s,x)$ 为基本解组 $y_1(x), \cdots, y_n(x)$ 确定的 Cauchy 函数.

定理证明基于 Cauchy 函数的性质. 证明细节从略.

例子

例: 求方程 $y''' - 3y'' + 2y' = 2e^x$ 的通解.

解: 稍后将讨论常系数线性齐次方程的基本解组的解法. 这里先应用这个解法来求 $y''' - 3y'' + 2y' = 0$ 的基本解组, 其特征方程为 $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda = 0$, 即 $\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$, 特征根为 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$. 由此得基本解 $y_1 = 1$, $y_2 = e^x$, $y_3 = e^{2x}$. 对应的 Wronsky 行列式为

$$W(s) = \begin{vmatrix} y_1(s) & y_2(s) & y_3(s) \\ y_1'(s) & y_2'(s) & y_3'(s) \\ y_1''(s) & y_2''(s) & y_3''(s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & e^s & e^{2s} \\ 0 & e^s & 2e^{2s} \\ 0 & e^s & 4e^{2s} \end{vmatrix} = 2e^{3s}, \quad W(s,x)$$

$$= \begin{vmatrix} y_1(s) & y_2(s) & y_3(s) \\ y_1'(s) & y_2'(s) & y_3'(s) \\ y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & e^s & e^{2s} \\ 0 & e^s & 2e^{2s} \\ 1 & e^x & e^{2x} \end{vmatrix} = e^{2x+s} - 2e^{x+2s} + e^{3s}.$$

于是 Cauchy 函数为

$$H(s,x)=\frac{W(s,x)}{W(s)}=\frac{e^{2x+s}-2e^{x+2s}+e^{3s}}{2e^{3s}}=\frac{1}{2}(e^{2x-2s}-2e^{x-s}+1).$$

于是方程 $y'''-3y''+2y'=2e^x$ 有如下特解

$$y_p=\int_0^x H(s,x)f(s)ds=\int_0^x \frac{1}{2}(e^{2x-2s}-2e^{x-s}+1)2e^s ds$$

$$=\int_0^x (e^{2x-s}-2e^x+e^s)ds=e^{2x}-2xe^x-1.$$

由于 1 和 e^{2x} 都是齐次方程 $y'''-3y''+2y'=0$ 的解，故从特解 y_p 中去掉它们后，即 $y_p=-2xe^x$ 仍是方程 $y'''-3y''+2y'=2e^x$ 的特解．于是所求通解为 $y=c_1+c_2e^x+c_3e^{2x}-2xe^x$，其中 c_1,c_2,c_3 为任意常数．解答完毕．

考虑高阶线性齐次常系数方程

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0, \quad (*)$$

其中 $a_1, \cdots, a_n$ 均为常数. 此时微分算子符号 L 为

$$L(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n,$$

其中 $D = \frac{d}{dx}$. 于是方程 (*) 可简单记作 $L(D)y = 0$. 我们将给出齐次方程 (*) 的一个显式的基本解组. 关于齐次方程 (*), 我们有以下三个简单事实:

(i) 每个解在 $(-\infty, +\infty)$ 上存在唯一;

(ii) 解空间是 n 维线性空间;

(iii) 每个 Wronsky 行列式 $W(x)$ 可表为 $W(x) = W(0)e^{-a_1 x}$.

指数函数解，特征方程与特征根

Theorem

指数函数 $e^{\lambda_0 x}$ 是齐次方程 $L(D)y = 0$ 的解 $\Leftrightarrow L(\lambda_0) = 0$.

Proof.

由于

$$L(D)e^{\lambda_0 x} = (D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_n)e^{\lambda_0 x}$$
$$= (\lambda_0^n + a_1 \lambda_0^{n-1} + \cdots + a_n)e^{\lambda_0 x} = L(\lambda_0)e^{\lambda_0 x},$$

故 $e^{\lambda_0 x}$ 是齐次方程 $L(D)y = 0$ 的解 $\Leftrightarrow$ $L(\lambda_0) = 0$. □

Definition

定义: $L(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n$ 称为齐次方程 $Ly = 0$ 的特征多项式，方程 $L(\lambda) = 0$ 称为特征方程，其根称为特征根.

例子

Example

例: 求解三阶常系数线性齐次方程 $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$.

解: 特征方程为 $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$. 分解因式 $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6$ $= \lambda^3 - 5\lambda^2 + 6\lambda - \lambda^2 + 5\lambda - 6 = \lambda(\lambda - 2)(\lambda - 3) - (\lambda - 2)(\lambda - 3)$ $= (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$. 从而方程有特征根 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$. 于是方程有三个指数函数解 e^x, e^{2x}, e^{3x}. 显然这三个解线性无关. 因此它们构成一个基本解组. 故方程的通解为 $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x}$, 其中 c_1, c_2, c_3 为任意常数.

Theorem

定理：如果 n 阶齐次方程 $L(D)y = 0$ 的 n 个特征根 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 互异，则方程有基本解组 $e^{\lambda_1 x}, \cdots, e^{\lambda_n x}$.

证：由之前定理知这 n 个指数函数都是解. 要证它们构成基本解组，只要证明它们线性无关即可. 简单计算可知它们对应的 Wronsky 行列式为

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \cdots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \cdots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & \cdots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix}.$$

证明，续

易见行列式 $W(x)$ 在 $x=0$ 处的值为 Vandermonde 行列式

$$W(0)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leq i<j\leq n}(\lambda_j-\lambda_i).$$

由假设特征根 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 互异，故 $W(0)\neq 0$. 因此这 n 个指数函数解线性无关. 定理得证. $\square$

Example

求齐次方程 $y''' - 4y'' + 6y' - 4y = 0$ 的基本解组.

<u>解</u>: 特征方程为 $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 6\lambda - 4 = 0$. 分解因式 $(\lambda - 2)[(\lambda - 1)^2 + 1] = 0$. 由此求得到三个互异的特征根 $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1 + i$, $\lambda_3 = 1 - i$. 于是方程有一组复基本解组 e^{2x}, $e^{(1+i)x}$ 和 $e^{(1-i)x}$. 取复函数解的实部和虚部就得到一组实的基本解祖 e^{2x}, $e^x \cos x$ 和 $e^x \sin x$. 解答完毕.

Theorem

设 λ_1 是齐次方程 $L(D)y = 0$ 的 $k \geq 2$ 重特征根，则 $e^{\lambda_1 x}$, $xe^{\lambda_1 x}$, $\cdots$, $x^{k-1}e^{\lambda_1 x}$ 是方程的 k 个线性无关解.

证：定理中的 k 个函数的线性无关性显而易见. 往下来证明它们是解. 即要证

$$L(D)[x^j e^{\lambda_1 x}] = 0, \quad j = 0, 1, \cdots, k-1.$$

由假设 λ_1 是 $k \geq 2$ 重特征根知，特征多项式可表为 $L(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^k L_1(\lambda)$, 其中 $L_1(\lambda_1) \neq 0$. 为证明式 $L(D)[x^j e^{\lambda_1 x}] = 0$, $j = 0, 1, \cdots, k-1$. 观察知 $xe^{\lambda x}$ 可以表示为 $xe^{\lambda x} = D_\lambda e^{\lambda x}$, 这里 $D_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{d\lambda}$ 代表关于 λ 的微分算子. 由于函数 $e^{\lambda x}$ 足够光滑，故 $DD_\lambda(e^{\lambda x}) = D_\lambda D(e^{\lambda x})$, 即二阶混合导数相等. (多元微积分有这样一个结论：如果两个二元混合导数 $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$ 均连续，则它们相等). 进一步不难证明

$$L(D)D_\lambda^j(e^{\lambda x}) = D_\lambda^j L(D)(e^{\lambda x}).$$

于是

$$L(D)[x^j e^{\lambda_1 x}] = L(D)[x^j e^{\lambda x}]\Big|_{\lambda=\lambda_1}$$

$$= L(D)[D_\lambda^j e^{\lambda x}]\Big|_{\lambda=\lambda_1} = D_\lambda^j L(D)e^{\lambda x}\Big|_{\lambda=\lambda_1}$$

$$= D_\lambda^j L(\lambda)e^{\lambda x}\Big|_{\lambda=\lambda_1} = D_\lambda^j\Big[(\lambda-\lambda_1)^k L_1(\lambda)\Big]e^{\lambda x}\Big|_{\lambda=\lambda_1} = 0.$$

这就证明了 $x^j e^{\lambda_1 x}$, $j = 0, 1, \cdots, k-1$, 是方程的 k 个解. □

一般结论

Theorem

定理: 设 n 阶线性齐次方程 $L(D)y=0$ 有 s 个互异的特征根 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$, 对应的重数为 $k_1,\cdots,k_s$, 其中 $k_1+\cdots+k_s=n$, 则如下 n 个函数组构成了齐次方程 $L(D)y=0$ 的一个基本解组.

$$\begin{array}{cccc} e^{\lambda_1 x}, & xe^{\lambda_1 x} & \cdots, & x^{k_1-1}e^{\lambda_1 x}, \\ e^{\lambda_2 x}, & xe^{\lambda_2 x} & \cdots, & x^{k_2-1}e^{\lambda_2 x}, \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{\lambda_s x}, & xe^{\lambda_s x} & \cdots, & x^{k_s-1}e^{\lambda_s x}. \end{array}$$

证明: 根据前一个定理可知上述 n 个函数都是解. 再根据本次课的选作题的结论, 可知它们的线性无关性. 证毕. □

例子

Example

例: 求方程 $y^{(5)} - 2y^{(4)} - 16y' + 32y = 0$ 的基本解组.

解: 方程的特征多项式为 $L(\lambda) = \lambda^5 - 2\lambda^4 - 16\lambda + 32$. 为求特征值, 需对 $L(\lambda)$ 作分解因式得 $L(\lambda) = \lambda^4(\lambda - 2) - 16(\lambda - 2) = (\lambda - 2)(\lambda^4 - 16)$ $= (\lambda - 2)^2(\lambda + 2)(\lambda^2 + 4)$. 故特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -2$, $\lambda_4 = 2i$, $\lambda_5 = -2i$. 进而得到方程实的基本解组为 e^{2x}, xe^{2x}, e^{-2x}, $\cos 2x$, $\sin 2x$. 解答完毕.

回忆对非齐次方程 $L(D)y = f(x)$, 若已知齐次方程 $L(D)y = 0$ 的一个基本解组, 那么 $y_p(x) = \int_{x_0}^{x} H(s,x)f(s)ds$ 就是非齐方程一个特解, 这里 $H(s,x)$ 是基本解组所对应的 Cauchy 函数.

以下针对函数类 $f(x) = e^{\lambda_0 x}\phi(x)$ (称作拟多项式), 用待定系数法, 直接求方程 $L(D)y = f(x)$ 的特解, 这里 $\phi(x)$ 为多项式. 这个待定系数法之所以有效, 是因为拟多项式关于求导运算是不变的, 即 $(e^{\lambda_0 x}\phi(x))'$ 仍然是拟多项式.

待定系数法常常比计算 Cauchy 形式的特解 $y_p(x) = \int_{x_0}^{x} H(s,x)f(s)ds$ 来得更简单快捷. 方法的理论基础是如下的两个定理.

待定系数法的理论基础

Theorem

定理一: 若 λ_0 不是齐次方程 $L(D)y = 0$ 的特征值, 则非齐次方程 $L(D)y = e^{\lambda_0 x}\phi(x)$ 有唯一解具有形式 $y_p(x) = e^{\lambda_0 x}\psi(x)$, 其中 $\psi(x)$ 为多项式, 且 $\deg\psi(x) = \deg\phi(x)$.

Theorem

定理二: 设 λ_0 是齐次方程 $L(D)y = 0$ 的 k 重特征值, 则非齐次方程 $L(D)y = e^{\lambda_0 x}\phi(x)$ 有唯一解有形式 $y_p(x) = e^{\lambda_0 x}x^k\psi(x)$, 其中 $\psi(x)$ 为多项式, 且 $\deg\psi(x) = \deg\phi(x)$.

上述两个定理的证明思想和二阶情形相同, 只是表述更复杂. 略去.

例一：求方程 $y'' - y = e^{2x}(x^2+1)$ 的通解.

解：对应齐次方程的特征多项式为 $L(\lambda) = \lambda^2 - 1$，特征值为 $\lambda_{1,2} = \pm 1$. 右端项 $f(x) = e^{2x}(x^2+1)$ 为拟多项式. 由于 $\lambda_0 = 2$ 不是特征值. 根据定理一可知，方程有唯一解具有形式 $y_p(x) = e^{2x}(ax^2+bx+c)$，其中 a, b, c 为待定常数. 将 $y_p(x)$ 代入方程 $y'' - y = e^{2x}(x^2+1)$，约去指数函数并加以整理得 $3ax^2 + (8a+3b)x + (2a+4b+3c) = x^2+1$. 比较两边的系数得到关于 a, b, c 的线性代数方程组

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

解之得 $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{-8}{9}$, $c = \frac{35}{27}$. 特解 $y_p = e^{2x}\left(\frac{x^2}{3} - \frac{8x}{9} + \frac{35}{27}\right)$. 因此方程 $y'' - y = e^{2x}(x^2+1)$ 的通解为 $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + e^{2x}\left(\frac{x^2}{3} - \frac{8x}{9} + \frac{35}{27}\right)$. #

例二：求方程 $(*)\ y'' - y = e^{-x}(x+1)$ 的一般解.

解：对应齐次方程的特征多项式为 $L(\lambda) = \lambda^2 - 1$，特征值为 $\lambda_1, \lambda_2 = \pm 1$，$\lambda_1 = -1$ 单重. 由定理二可知方程有唯一解具有形式 $y_p(x) = e^{-x}x(ax+b)$，其中 a, b 为待定常数. 将 $y_p(x)$ 代入方程 $(*)$，约去 e^{-x} 得 $-4ax + 2(a-b) = x + 1$. 比较两边的系数得到关于 $a = -\frac{1}{4}$，$b = -\frac{3}{4}$. 故所求特解为 $y_p(x) = -e^{-x}(\frac{x^2}{4} + \frac{3x}{4})$. 于是非齐次方程 $(*)$ 的一般解为

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - e^{-x}\left(\frac{x^2}{4} + \frac{3x}{4}\right).$$

解答完毕.

Dec 31 作业，共五道大题和一道选作题

习题一：课本第230页习题7.5题2：求解下列方程的初值问题(2)(3).

(2) $y'' - 6y' + 9y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1,$

(3) $y''' - 3y'' - 4y' = 1,\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0.$

习题二：课本第230页习题7.5题3：求解下列方程的一般解(1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8).

(1) $y'' - 4y' - 12y = x^2;$

(2) $y'' - 4y' - 12y = e^{-4x};$

(3) $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x};$

(4) $y'' + 2y' + y = \sin x;$

(5) $y'' + 2y' + y = e^x \cos x;$

(6) $y'' + 3y' + 2y = \sin x + x^2;$

(7) $y'' + 4y' + 5y = e^{-2x}\sin x$;

(8) $y'' - 4y' + 4y = 1 + \sin x + xe^{2x}$.

习题三：课本第230页习题7.5题4：求解下列Euler方程的一般解(1)(3)：

(1) $x^2y'' + 2xy' - n(n+1)y = 0$, $x > 0$;

(3) $xy'' + 2y' = 12\ln x$, $x > 0$.

习题四：课本第230页习题7.5题5：设 $y = y(x)$ 是方程 $4x^2y'' + 4xy' - y = 0$ 的解，并且曲线 $y = y(x)$ 经过点 $(1, 4)$，而且在点 $(1, 4)$ 处的切线与 x 轴的夹角为 $\frac{\pi}{4}$，求 $y(x)$.

习题五：课本第230页习题7.5题6：设 $y = e^{2x} + (1+x)e^x$ 是方程 $y'' + ay' + by = ce^x$ 的一个解，求常数 a, b, c，并求方程 $y'' + ay' + by = ce^x$ 的一般解.

选作题：设 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ 为 s 个互异的实数，设 $k_1, \cdots, k_s$ 为 s 个正整数. 证明以下 $k := k_1 + \cdots + k_s$ 个函数在 $\mathbb{R}$ 上线性无关

$$\begin{array}{cccc} e^{\lambda_1 x}, & xe^{\lambda_1 x}, & \cdots, & x^{k_1-1}e^{\lambda_1 x}, \\ e^{\lambda_2 x}, & xe^{\lambda_2 x}, & \cdots, & x^{k_2-1}e^{\lambda_2 x}, \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{\lambda_s x}, & xe^{\lambda_s x}, & \cdots, & x^{k_s-1}e^{\lambda_s x}. \end{array}$$

(提示：可考虑对 s 用归纳法.)