# 线性代数第五周第二次作业答案

2025 年 11 月 7 日

## 1 第 5 题

给定矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

### (1) $E + C$

由于 $E$ 和 $C$ 都是 $3 \times 3$ 矩阵，可以直接相加：

$$E + C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 8 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

### (2) $AB$ 和 $BA$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ -1 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

### (3) $D - CB$

不可能，因为矩阵 $D$ 是 $2 \times 2$，而 $CB$ 是 $3 \times 2$，维度不匹配。

**(4)** $AB + DF$

- $AB$ 是 $2\times 2$，$DF$ 是 $2\times 2$，因此它们可以相加：

$$AB = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad DF = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ -1 & -12 \end{bmatrix}$$

$$AB + DF = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ -1 & -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 9 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

**(5)** $EF + 2A$

不可能，因为 $E$ 是 $3\times 3$，$F$ 是 $2\times 2$，矩阵乘法 $EF$ 维度不匹配。

**(6)** $EB - FA$

不可能，因为 $EB$ 是 $3\times 2$，而 $FA$ 是 $2\times 3$，维度不匹配，无法相减。

**(7)** $(D + F)A$

- $D + F$ 是 $2\times 2$，$A$ 是 $2\times 3$，因此它们可以相乘：

$$D + F = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(D + F)A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 5 & 11 & -3 \end{bmatrix}$$

**(8)** $A(B + D)$

不可能，因为 $B$ 是 $3\times 2$，$D$ 是 $2\times 2$，维度不匹配，无法相加。

**(9)** $B^TC + A$

- $B^T$ 是 $2\times 3$，$C$ 是 $3\times 3$，它们可以相乘，结果是 $2\times 3$，再加上 $A$（也是 $2\times 3$）：

$$B^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B^TC = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 9 & 0 \\ 5 & 19 & 15 \end{bmatrix}$$

$$B^TC + A = \begin{bmatrix} 0 & 9 & 0 \\ 5 & 19 & 15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 11 & -1 \\ 5 & 20 & 17 \end{bmatrix}$$

**(10)** $(3C-2E)^T B$

- $3C$ 和 $2E$ 都是 $3\times 3$，它们可以相减并转置，再与 $B$ 相乘：

$$3C=\begin{bmatrix}-3&9&9\\3&12&0\\3&6&9\end{bmatrix},\quad 2E=\begin{bmatrix}4&0&-8\\0&8&2\\6&2&4\end{bmatrix}$$

$$3C-2E=\begin{bmatrix}-7&9&17\\3&4&-2\\-3&4&5\end{bmatrix},\quad (3C-2E)^T=\begin{bmatrix}-7&3&-3\\9&4&4\\17&-2&5\end{bmatrix}$$

$$(3C-2E)^T B=\begin{bmatrix}-7&3&-3\\9&4&4\\17&-2&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\2&2\\-1&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-13\\13&33\\8&33\end{bmatrix}$$

**(11)** $A^T(D+F)$

- $A^T$ 是 $3\times 2$，$D+F$ 是 $2\times 2$，因此它们可以相乘：

$$A^T=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\\-1&2\end{bmatrix},\quad D+F=\begin{bmatrix}3&2\\5&1\end{bmatrix}$$

$$A^T(D+F)=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2\\5&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&2\\11&5\\7&0\end{bmatrix}$$

**(12)** $F(A^T-B)^T C$

- 计算 $A^T-B$ 并进行转置，然后与 $F$ 和 $C$ 相乘：

$$A^T-B=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\\-1&2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&1\\2&2\\-1&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1\\0&-1\\0&-2\end{bmatrix},\quad (A^T-B)^T=\begin{bmatrix}0&0&0\\-1&-1&-2\end{bmatrix}$$

$$F(A^T-B)^T=\begin{bmatrix}1&-2\\2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\-1&-1&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&2&4\\-3&-3&-6\end{bmatrix}$$

$$F(A^T-B)^T C=\begin{bmatrix}2&2&4\\-3&-3&-6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&3&3\\1&4&0\\1&2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&22&18\\-6&-33&-27\end{bmatrix}$$

## 第 12 题

设 $A=\begin{bmatrix}2&2\\3&-1\end{bmatrix}$, $f(x)=x^2-x-8$, $g(x)=x^3-3x^2-2x+4$, 求 $f(A),g(A)$.

解:

首先计算 $A^2$:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

计算 $f(A) = A^2 - A - 8I$:

$$f(A) = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} - 8 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以 $f(A) = 0$.

计算 $A^3 = A \cdot A^2$:

$$A^3 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 & 18 \\ 27 & -1 \end{bmatrix}$$

计算 $g(A) = A^3 - 3A^2 - 2A + 4I$:

$$g(A) = \begin{bmatrix} 26 & 18 \\ 27 & -1 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 8 \\ 12 & -16 \end{bmatrix}$$

所以 $g(A) = \begin{bmatrix} -4 & 8 \\ 12 & -16 \end{bmatrix}$.

## 第 13 题

已知 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $f(\lambda) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc)$, 验证 $f(A) = 0$.

解:

计算 $f(A) = A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I$.

首先计算 $A^2$:

$$A^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{bmatrix}$$

计算 $(a+d)A$:

$$(a+d)A = (a+d) \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + ad & ab + bd \\ ac + cd & ad + d^2 \end{bmatrix}$$

计算 $(ad-bc)I$:

$$(ad-bc)I = (ad-bc) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{bmatrix}$$

现在计算 $f(A) = A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I$:

$$f(A) = \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a^2 + ad & ab + bd \\ ac + cd & ad + d^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以 $f(A) = 0$.

## 第 15 题

设 $A \in M_{m,n}$, 如果对任意列向量 $a = [a_1, a_2, \cdots, a_n]^T$ 都有 $Aa = 0$, 则 $A = 0$.

证明:

假设对任意列向量 $a$, 有 $Aa = 0$. 特别地, 取 $a$ 为标准基向量 $e_j$ (其中第 $j$ 个分量为 1, 其余为 0), 则 $Ae_j$ 就是 $A$ 的第 $j$ 列. 由于 $Ae_j = 0$, 所以 $A$ 的第 $j$ 列为零向量. 这对所有 $j = 1, 2, \cdots, n$ 都成立, 因此 $A$ 的所有列都是零向量, 即 $A = 0$.

## 第 18 题

设 $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, 证明: $A = 0 \Leftrightarrow A^T A = 0$.

证明:

充分性：如果 $A = 0$, 则 $A^T = 0$, 所以 $A^T A = 0 \cdot 0 = 0$. 或者, 对于任意向量 $x$, 有 $Ax = 0$, 则 $(A^T A)x = A^T(Ax) = A^T 0 = 0$, 所以 $A^T A = 0$.

必要性：如果 $A^T A = 0$, 则对于任意向量 $x$, 有 $x^T A^T Ax = 0$, 所以 $(Ax)^T Ax = 0$, 也即 $Ax = 0$, 所以 $A = 0$.

## 第 19 题

设 $A, B$ 都是 $n$ 阶对称矩阵, 证明: $AB$ 对称 $\Leftrightarrow AB = BA$.

证明:

- ($\Rightarrow$) 假设 $AB$ 对称, 即 $(AB)^T = AB$. 但 $(AB)^T = B^T A^T = BA$ (因为 $A$ 和 $B$ 对称), 所以 $BA = AB$, 即 $AB = BA$. - ($\Leftarrow$) 假设 $AB = BA$, 则 $(AB)^T = B^T A^T = BA = AB$, 所以 $AB$ 对称.

## 第 20 题

证明任一 $n$ 阶矩阵都可表示成一个对称矩阵与一个反对称矩阵的和.

证明:

设 $M$ 是任意 $n$ 阶矩阵. 定义:

$$P = \frac{1}{2}(M + M^T), \quad Q = \frac{1}{2}(M - M^T)$$

则 $P^T = \frac{1}{2}(M^T + M) = P$, 所以 $P$ 对称；$Q^T = \frac{1}{2}(M^T - M) = -Q$, 所以 $Q$ 反对称. 且:

$$M = P + Q$$

因此, $M$ 可表示为对称矩阵 $P$ 与反对称矩阵 $Q$ 的和.

## 第 23 题

设 $A$ 是一个 $n$ 阶对称矩阵, $B$ 是一个 $n$ 阶反对称矩阵, 证明 $AB + BA$ 是一个反对称矩阵.

证明:

需要证明 $(AB + BA)^T = -(AB + BA)$. 计算:

$$(AB + BA)^T = (AB)^T + (BA)^T = B^T A^T + A^T B^T$$

由于 $A$ 对称, $A^T = A$; $B$ 反对称, $B^T = -B$. 所以:

$$(AB+BA)^T = (-B)A + A(-B) = -BA - AB = -(AB+BA)$$

因此, $AB+BA$ 是反对称矩阵.

## 第 34 题

设 $A, B \in M_n$，$k$ 为常数。

### (1) $(A+B) = (A) + (B)$

**证明：** 设 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$，则

$$(A+B) = \sum_{i=1}^{n}(a_{ii}+b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = (A) + (B).$$

### (2) $(kA) = k(A)$

**证明：**

$$(kA) = \sum_{i=1}^{n} k a_{ii} = k \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = k(A).$$

### (3) $(AB) = (BA)$

**证明：** 设 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$，则

$$(AB) = \sum_{i=1}^{n}(AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki},$$

$$(BA) = \sum_{i=1}^{n}(BA)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{ki}.$$

交换求和顺序，令 $j = k$，则

$$(BA) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ji}a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji} = (AB).$$

### (4) $(A^T) = (A)$

**证明：**

$$(A^T) = \sum_{i=1}^{n}(A^T)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = (A).$$

### (5) $(A^TA) \geq 0$，且等号成立当且仅当 $A = 0$

**证明：**

$$(A^TA) = \sum_{i=1}^{n}(A^TA)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(A^T)_{ij}A_{ji} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ji}a_{ji} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ji}^2.$$

这是 $A$ 的所有元素的平方和，故 $(A^TA) \geq 0$。等号成立当且仅当所有 $a_{ji} = 0$，即 $A = 0$。

## 第 35 题：用分块矩阵的乘法计算乘积 $AB$

### (1) 计算 $AB$，其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

将 $A$ 和 $B$ 分块为:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

其中

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}, \quad B_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

计算:

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

- $A_{11}B_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 19 \\ 18 & 70 \end{bmatrix}$
- $A_{12}B_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
- $A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = \begin{bmatrix} 5 & 19 \\ 18 & 70 \end{bmatrix}$
- $A_{11}B_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
- $A_{12}B_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
- $A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

- $A_{21}B_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
- $A_{22}B_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 9 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$
- $A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 9 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$
- $A_{21}B_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
- $A_{22}B_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 14 & 11 & 10 \\ 8 & 4 & 6 \end{bmatrix}$
- $A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 14 & 11 & 10 \\ 8 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

因此，

$$AB = \begin{bmatrix} 5 & 19 & 0 & 0 & 0 \\ 18 & 70 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 6 & 9 & 14 & 11 & 10 \\ 5 & 4 & 8 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

## (2) 计算 $AB$，其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

将 $A$ 和 $B$ 分块为：

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix}$$

其中

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B_{22} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

计算：

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} & 0 \\ 0 & A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

- $A_{11}B_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$
- $A_{22}B_{22} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -8 & -4 \end{bmatrix}$

因此，

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -4 \end{bmatrix}$$