习题材料（四）答案

注 1：本次习题课包含内容：线性相关性、矩阵的秩、维数公式等

注 2：带 ♡ 号的习题有一定的难度、比较耗时, 请量力为之.

注 3：本节考虑的矩阵均为实矩阵.

注 4：本节 $N(A)$ 指 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解集构成的子空间，称作 A 的零空间；$C(A)$ 指 A 的列向量张成的子空间，称作列空间.

习题 1. 复习：矩阵的列秩和行秩的概念，说明为什么矩阵的初等行变换不改变这两个秩，以及列秩为什么等于行秩.

注意：有了这个结论才有矩阵**秩**的概念，请结合秩的定义，注意其中的逻辑顺序，切勿循环论证.

习题 2. 复习：设 $m\times n$ 矩阵 A 的秩是 r，取出 A 的 r 线性无关的列向量，构成新的矩阵 B. 那么矩阵 B 的列秩是 r，所以 B 的行秩也是 r. 于是可以再取出 B 的 r 个线性无关的行，构成新的矩阵 C，那么矩阵 C 的行秩是 r，所以 C 的列秩也是 r. 此时，C 是秩为 r 的 r 阶方阵，所以 C 可逆.

反之，假设 A 存在 r 阶可逆子方阵 C，则 C 所在的列向量线性无关，所以 A 的列秩大于等于 r.

综上所述，A 的秩等于其可逆子矩阵的最高阶数.

习题 3. 本章的公式中最重要的是维数公式：设 A 是 $m\times n$ 矩阵，则

$$\dim C(A)+\dim N(A)=n.$$

其中，$C(A)$ 是 A 的列向量张成的子空间，简称列空间. 由于 $\dim C(A)=\operatorname{rank}(A)$，所以该公式等价于

$$\operatorname{rank}(A)+\dim N(A)=n.$$

酌情可以拓展：设 $f:V\to W$ 是线性映射，则 $\dim V=\dim\ker(f)+\dim\operatorname{Im}(f)$

习题 4. $m\times n$ 矩阵 A 的秩为 r，则下列正确的有（　　）

(A). A 中存在 $r+1$ 阶子式不为零

(B). A 中存在 $r-1$ 阶子式不为零

(C). A 的列向量组中存在 r 个线性无关的向量

(D). A 的行向量组的极大线性无关组所含向量的个数是 r

答案 (A) 说明 $\operatorname{rank}(A)\geq r+1$，因此是错误的.

(B) 是正确的，和习题 2 一样的推导，找出 A 的线性无关的 $r-1$ 列，再从这 $r-1$ 列中找出线性无关的 $r-1$ 行，这样得到的 $r-1$ 阶方阵时可逆的.

(C)(D) 都是列秩、行秩定义的直接推论.

习题 5. 下列各陈述中，正确的是（　　）

(A). 若两组向量的秩相等，则两组向量可互相线性表出

(B). 若一组向量可由另一组向量线性表出，则两组向量的秩相等，则两组向量等价

(C). 若向量组（*1*）可由向量组（*2*）线性表出，则向量组（*1*）的秩一定小于向量组（*2*）的秩

(D). 以上都不对

答案 (B) 正确，(A) 错误. 关键点就在于"一组向量可由另一组向量线性表出". (B) 证明如下：设两组向量为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 和 $\beta_1,\cdots,\beta_n$. 令 $V=\mathrm{Span}(\alpha_1,\cdots,\alpha_m), W=\mathrm{Span}(\beta_1,\cdots,\beta_n)$. $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 能被 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 线性表出，等价于"$V\subseteq W$"；而要证的"向量组等价"实际上等价于"$V=W$". 那么结论就很显然了：

$$(V\subseteq W)+(\dim V=\dim W)\Leftrightarrow V=W.$$

习题 6. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，求向量组 $\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\cdots,\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s$ 的秩.

答案 我们断言：向量组 $\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\cdots,\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s$ 线性无关. 作为推论，该向量组的秩是 s.

现在来证明这个断言：假设 $k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1+\alpha_2)+\cdots+k_n(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)=\mathbf{0}$；那么 $(k_1+k_2+\cdots+k_n)\alpha_1+(k_2+\cdots+k_n)\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=\mathbf{0}$. 根据 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关可知：

$$\begin{cases} k_1+k_2+\cdots+k_n &=0\\ \quad\quad k_2+\cdots+k_n &=0\\ \quad\quad\quad\quad\quad\vdots & \\ \quad\quad\quad\quad\quad k_n &=0\end{cases}$$

因此 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$.

习题 7. 已知：$A\in M_{n\times m},B\in M_{m\times n}$ 且 $n<m, AB=I_n$. 求证：B 的列向量线性无关.

答案 B 的列向量线性无关，当且仅当方程组 $B\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 只有零解.

假设 $B\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，那么 $AB\boldsymbol{x}=A\mathbf{0}=\mathbf{0}$，而 $AB=I_n$，因此 $\boldsymbol{x}=AB\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$.

习题 8. A 是 n 阶方阵.

1. $|A^*|=|A|^{n-1}$
2. 求 $\mathrm{rank}(A^*)$.
3. 求 $(A^*)^*$

答案 由伴随矩阵的定义，$AA^*=|A|I_n$.

若 A 可逆，则 $|A|\neq 0$，那么 $|A||A^*|=|A|^n$，所以 $|A^*|=|A|^{n-1}$，且 $A^*=|A|A^{-1}$，此时 A^* 也可逆，因此 $\mathrm{rank}(A)(A^*)=n$. 又 $(A^*)(A^*)^*=|A^*|I_n=|A|^{n-1}I_n$，所以 $(A^*)^*=|A|^{n-1}A$.

若 A 不可逆，则 $\mathrm{rank}(A)\leq n-1$.

如果 $\mathrm{rank}(A)\leq n-2$，那么 A 没有非零的 $n-1$ 阶子式，这意味着 A^* 的所有元素都是零，即 $A^*=\mathbf{0}$，所以 $|A^*|=0=|A|^{n-1}$，$\mathrm{rank}(A^*)=0$，$(A^*)^*=\mathbf{0}$.

如果 $\operatorname{rank}(A)=n-1$，那么根据维数公式，$\dim N(A)=1$. 另一方面，此时 $AA^*=\mathbf{0}$，因此 A^* 的列向量均属于 A 的零空间，所以 $C(A^*)\subseteq N(A)$，即 $\operatorname{rank}(A^*)\le 1$. 又因为 A 存在非零的 $n-1$ 阶子式，所以 $A^*\neq\mathbf{0}$，所以 $\operatorname{rank}(A^*)=1$. 所以 $(A^*)^*=\mathbf{0}$，且 $|A^*|=0=|A|^{n-1}$.

习题 9 (♡♡). *给定向量组：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，其中 $\alpha_1\neq\mathbf{0}$. 证明：以下两条等价：*

1. *$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性相关.*
2. *存在 $1\le i\le n$ 使得 α_i 可被 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{i-1}$ 唯一地线性表出.*

答案 (2) $\Rightarrow$ (1)：由 (2) 可知存在 $k_1,\cdots,k_{i-1}$ 使得 $\alpha_i=k_1\alpha_1+\cdots+k_{i-1}\alpha_{i-1}$. 令

$$k_j'=\begin{cases}k_j & 1\le j\le i-1\\ -1 & j=i\\ 0 & i+1\le j\le n\end{cases}$$

因为 $k_1',k_2',\cdots,k_n'$ 不全为零，且 $k_1'\alpha_1+\cdots+k_{i-1}'\alpha_{i-1}+k_i'\alpha_i+\cdots+k_n'\alpha_n=\mathbf{0}$，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性相关.

(1) $\Rightarrow$ (2)：由于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性相关，那么一定存在 i 使得 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{i-1}$ 线性无关但 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{i-1},\alpha_i$ 线性相关. 这样的 i 可以逐步验证找出来：

- 由于 $\alpha_1\neq\mathbf{0}$，α_1 线性无关；如果 α_1,α_2 线性相关，则取 $i=2$.
- 如果 α_1,α_2 线性无关，且 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，则取 $i=3$.
- 如果 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，且 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，则取 $i=4$.
- $\cdots$

这个步骤最终能停止：停止不了就意味着 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关.

由于我们已经找出来了 i 使得 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{i-1}$ 线性无关但 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{i-1},\alpha_i$ 线性相关，那么存在不全为零的 $k_1,\cdots,k_i$ 使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_i\alpha_i=\mathbf{0}.$$

如果 $k_i=0$，则 $k_1,k_2,\cdots,k_{i-1}$ 不全为零，且 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{i-1}\alpha_{i-1}=\mathbf{0}$，这意味着 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{i-1}$ 线性无关，矛盾，因此

$$\alpha_i=-k_i^{-1}(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{i-1}\alpha_{i-1}),$$

即 α_i 可以被 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{i-1}$ 线性表出. 我们还需要线性表出的唯一性：假设

$$\alpha_i=a_1\alpha_1+\cdots+a_{i-1}\alpha_{i-1}=b_1\alpha_1+\cdots+b_{i-1}\alpha_{i-1},$$

那么 $(a_1-b_1)\alpha_1+(a_2-b_2)\alpha_2+\cdots+(a_{i-1}-b_{i-1})\alpha_{i-1}=\mathbf{0}$，有 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{i-1}$ 的线性无关性知

$$a_1-b_1=a_2-b_2=\cdots=a_{i-1}-b_{i-1}=0\text{，即}\quad a_1=b_1,a_2=b_2,\cdots,a_{i-1}=b_{i-1}.$$

这就证明了唯一性.

习题 10. *判断正误，正确的简述其理由，错误的给出反例.*

1. *设 A 是 $m\times n$ 矩阵，若 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 有非零解，则 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解*
2. *设 A 是 $m\times n$ 矩阵，若 $r(A)=n$，则非齐次方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解*

3. 已知 η_1,η_2 是 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 不同的两个解，ξ_1,ξ_2 是其对应的齐次方程组 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的基础解析，k_1,k_2 是两个任意常数，则 $k_1\xi_1+k_2(\xi_1-\xi_2)+\dfrac{\eta_1+\eta_2}{2}$ 是方程 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的通解

4. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times p$ 矩阵，$\operatorname{rank}(A)=n, AB=\mathbf{0}$，则 $B=\mathbf{0}$

5. 已知 $A=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{bmatrix}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta(\beta\neq 0)$ 线性相关，则非齐次方程组 $A\boldsymbol{x}=\beta$ 有解.

6. 已知 A 是 $m\times n$ 矩阵，则存在矩阵 B，使得 $AB=\mathbf{0}$ 且有 $\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)=n$.

7. 在分块矩阵 $X=\begin{bmatrix}A & C\\ \mathbf{0} & B\end{bmatrix}$ 中，$\operatorname{rank}(A)=r,\operatorname{rank}(B)=s$，则 $\operatorname{rank}(X)=r+s$.

答案

1. 错误. 反例如：$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$. 要使得 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解，首先必须保证解的存在性.
2. 错误，反例如 $A=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$. 原因和上面类似，首先得保证解的存在性.
3. 正确. 所谓通解，即一个特解加上零空间的一组基的任意线性组合. 因此只需要注意到如下两个事实：一是 $\dfrac{\eta_1+\eta_2}{2}$ 是方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解，二是 $\xi_1,\xi_1-\xi_2$ 是齐次方程组的解空间的一组基.
4. 正确. 原方程组意味着 B 的任意列向量都是方程组 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解；而 $\operatorname{rank}(A)=n$ 说明 A 的列向量线性无关，方程组 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 只有零解.
5. 错误，反例如：A 本身是零矩阵. 如果加上一个条件“$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性无关”，则命题就成立了.
6. 正确. 取 $N(A)$ 的一组基，排成矩阵 B，则 $\operatorname{rank}(B)=\dim N(A)$. 根据维数公式知 $\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)=n$.
7. 错误，反例如：$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$. 则 $r=s=1$，而 $X=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，
   从而 $\operatorname{rank}(X)=3>r+s$. 正确的结论应该是 $\operatorname{rank}(X)\geq r+s$. 因为 A 的极大线性无关列向量组所在的列和 B 的极大线性无关列向量组所在的列放在一起是线性无关的向量组，但是不能保证它们构成 X 的极大线性无关列向量组.

习题 11. *1. 已知 A 是 $m\times n$ 矩阵, B 是 $n\times p$ 矩阵, 且 $\operatorname{rank}(A)=n$. 证明: $\operatorname{rank}(AB)=\operatorname{rank}(B)$.*

2. 若 A,B 均为 n 阶方阵, 且 $A^2=B^2=\mathbf{0}$. 若 $A+B$ 可逆, 证明: $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)$.

答案

1. 根据维数公式，$\operatorname{rank}(AB)=p-\dim N(AB),\operatorname{rank}(B)=p-\dim N(B)$，因此我们只需要证明 $\dim N(B)=\dim N(AB)$.

   对任意 $\boldsymbol{x}\in N(B)$，$B\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，于是 $AB\boldsymbol{x}=A\mathbf{0}=\mathbf{0}$，因此 $\boldsymbol{x}\in N(AB)$. 这说明 $N(B)\subseteq N(AB)$. 另一方面，对任意 $\boldsymbol{x}\in N(AB)$，则 $A(B\boldsymbol{x})=(AB)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$；因为 $\operatorname{rank}(A)=n$，所以它的列向量线性无关，因此 $B\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，这说明 $N(AB)\subseteq N(B)$. 总而言之，$N(B)=N(AB)$，它们的维数自然相等.

2. 首先需要说明，一个矩阵，左乘可逆矩阵或者右乘可逆矩阵所得的矩阵与原矩阵有相同的秩. 因此

$$\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(A(A+B))=\operatorname{rank}(AB)=\operatorname{rank}((A+B)B)=\operatorname{rank}(B).$$

习题 12 (♡)**.** 设 A,B,C 分别为 $m\times n, n\times k, k\times s$ 矩阵，证明：

$$\operatorname{rank}(AB)+\operatorname{rank}(BC)\leq \operatorname{rank}(ABC)+\operatorname{rank}(B).$$

答案 我们提供两个解法.

方法一. 利用分块矩阵

$$\operatorname{rank}(ABC)+\operatorname{rank}(B)=\operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} ABC & \\ & B\end{bmatrix}\right)=\operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} ABC & \\ BC & B\end{bmatrix}\right)=\operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} 0 & -AB \\ BC & B\end{bmatrix}\right).$$

只需要注意到 $\operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} 0 & -AB \\ BC & B\end{bmatrix}\right)\geq \operatorname{rank}(AB)+\operatorname{rank}(BC)$ 即可.

方法二. 首先，我们有列空间的包含关系：

$$C(BC)\subseteq C(B),\quad C(ABC)\subseteq C(AB),$$

因此我们可以改造一下需要证明的不等式：$\dim C(BC)-\dim C(ABC)\leq \dim C(B)-\dim C(AB)$，即较小的两个子空间的维数之差不大于较大的两个子空间的维数之差.

我们有线性映射 $C(B)\to C(AB), \boldsymbol{x}\mapsto A\boldsymbol{x}$. 这是因为 $\boldsymbol{x}\in C(B)$ 的意思即它可以写成 $\boldsymbol{x}=B\boldsymbol{y}$，那么 $A\boldsymbol{x}=AB\boldsymbol{y}\in C(AB)$. 这个映射是满射，因为任意 $\boldsymbol{z}\in C(AB)$ 都可以写成 $\boldsymbol{z}=AB\boldsymbol{y}$，那么 $\boldsymbol{z}$ 就是 $\boldsymbol{x}=B\boldsymbol{y}\in C(B)$ 的像；这个映射的核是 $N(A)\cap C(B)$. 根据拓展的维数公式，则有：

$$\dim C(B)-\dim C(AB)=\dim(N(A)\cap C(B)).$$

同理，

$$\dim C(BC)-\dim C(ABC)=\dim(N(A)\cap C(BC)).$$

显然 $N(A)\cap C(BC)\subseteq N(A)\cap C(B)$，所以不等式就证完了.

习题 13 (♡)**.** 对于 n 阶方阵，求证：$A^2=A$ 当且仅当 $\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(I_n-A)=n$.

答案 方法一. 对分块对角矩阵 $\begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_n-A\end{bmatrix}$ 做初等行（列）变换

$$\begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_n-A\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ A & I_n-A\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{列}}\begin{bmatrix} A & A \\ A & I_n\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{bmatrix} A-A^2 & \mathbf{0} \\ A & I_n\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{列}}\begin{bmatrix} A-A^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_n\end{bmatrix}$$

初等行（列）变换不改变矩阵的秩，那么原命题就很明显了

方法二. 根据维数公式，只需要证明 $A^2=A$ 当且仅当 $\operatorname{rank}(I_n-A)=\dim N(A)$.

“$\Rightarrow$” 假设 $A^2=A$，若 $\boldsymbol{x}\in N(A)$，则令 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}$，那么 $(I_n-A)\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}-A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$，这说明 $N(A)\subseteq C(I_n-A)$.

另一方面，若 $\boldsymbol{x}\in C(I_n-A)$，那么存在 $\boldsymbol{y}$ 使得 $\boldsymbol{x}=(I_n-A)\boldsymbol{y}$，所以

$$A\boldsymbol{x}=A(I_n-A)\boldsymbol{y}=(A-A^2)\boldsymbol{y}=\mathbf{0},$$

这说明 $C(I_n-A)\subseteq N(A)$. 两者结合即得 $N(A)=C(I_n-A)$.

"$\Leftarrow$" 假设 $\operatorname{rank}(I_n - A) = \dim N(A)$. 首先需要说明的是：由于对任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ 都有 $\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} + (I_n - A)\boldsymbol{x}$，那么当 $\boldsymbol{x} \in N(A)$ 时，有 $\boldsymbol{x} = (I_n - A)\boldsymbol{x} \in C(I_n - A)$，即有 $N(A) \subseteq C(I_n - A)$.

而 $\operatorname{rank}(I_n - A) = \dim N(A)$ 说明 $\dim N(A) = \dim C(I_n - A)$，此时 $N(A) = C(I_n - A)$. 对任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, (I_n - A)\boldsymbol{x} \in C(I_n - A)$，因此 $(I_n - A)\boldsymbol{x} \in N(A)$，即 $(A - A^2)\boldsymbol{x} = A(I_n - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. 由 $\boldsymbol{x}$ 的任意性知 $A - A^2 = \boldsymbol{0}$.

方法三. 根据维数公式，$\operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(I_n - A) = n$ 等价于 $\dim N(A) + \dim N(I_n - A) = n$.

"$\Rightarrow$" 只需要证明两点：$N(A) + N(I_n - A) = \mathbb{R}^n$ 和 $N(A) \cap N(I_n - A) = \{\boldsymbol{0}\}$. 因为这两点保证了 $\mathbb{R}^n$ 是这两个子空间的直和，维数自然等于两个子空间维数直和.

首先任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ 都可以写成：$\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} + (I_n - A)\boldsymbol{x}$ 而 $(I_n - A)A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}, A(I_n - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，所以 $A\boldsymbol{x} \in N(I_n - A), (I_n - A)\boldsymbol{x} \in N(A)$，所以 $\boldsymbol{x} \in N(A) + N(I_n - A)$. 若 $\boldsymbol{x} \in N(A) \cap N(I_n - A)$，则 $\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} + (I_n - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

"$\Leftarrow$" 因为 $N(A) \cap N(I_n - A) = \{\boldsymbol{0}\}$，因此 $\dim N(A) + \dim N(I_n - A) = \dim(N(A) + N(I_n - A)) = n$，这说明 $N(A) + N(I_n - A) = \mathbb{R}^n$，也就是说，任意 $\boldsymbol{x}$ 都可以分解为 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$ 的形式，其中 $\boldsymbol{y} \in N(A), \boldsymbol{z} \in N(I_n - A)$，那么

$$(A - A^2)\boldsymbol{x} = (I_n - A)A\boldsymbol{y} + A(I_n - A)\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0},$$

所以 $A - A^2 = \boldsymbol{0}$.

习题 14 ($\heartsuit$). *(Fredhelm 二则一定理)*: 设 A 是 $m \times n$ 矩阵. 线性方程组 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有解当且仅当 $\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0}_m \\ 1 \end{bmatrix}$ 无解.

答案 根据高斯消元法，$\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0}_m \\ 1 \end{bmatrix}$ 无解，当且仅当 $\operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0}_m \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix}\right) = \operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}\right) + 1$，当且仅当 $\operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix}\right) = \operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{bmatrix}\right) + 1$.

而对 $\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix}$ 做初等行变换（倍加）可得：$\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} A & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix}$，所以

$$\operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix}\right) = \operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} A & \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix}\right) = \operatorname{rank}(A) + 1$$

于是：$\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0}_m \\ 1 \end{bmatrix}$ 无解，当且仅当 $\operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{bmatrix}\right) = \operatorname{rank}(A)$，当且仅当 $\boldsymbol{b} \in C(A)$，当且仅当 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有解.