《微积分A1》第二十六讲

教师 杨利军

清华大学数学科学系

2025年12月17日

广义积分的绝对收敛性与条件收敛性，例子

Definition

定义：设 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上内闭可积，b 是 $f(x)$ 唯一的有限或无穷瑕点.

(i) 若广义积分 $\int_a^b |f|$ 收敛，则称广义积分 $\int_a^b f$ 绝对收敛；

(ii) 若广义积分 $\int_a^b f$ 收敛，但广义积分 $\int_a^b |f|$ 发散，则称广义积分 $\int_a^b f$ 条件收敛.

Example

例一：证明广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ 绝对收敛.

证：因为 $\frac{|\sin x|}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$，而积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} dx$ 收敛，由比较判别法知 $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^2} dx$ 收敛. 于是广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ 绝对收敛. 证毕. □

注：稍后我们将证明广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 条件收敛.

绝对收敛性蕴含收敛性

Theorem

定理: 设 $f(x)$ 于 $[a,b)$ 上内闭可积, b 是唯一一个有限或无穷瑕点. 若积分 $\int_a^b f(x)dx$ 绝对收敛, 即积分 $\int_a^b |f(x)|dx$ 收敛, 则广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ 也收敛.

Proof.

证: 只考虑 $b=+\infty$ 情形. 假设积分 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛, 则由 Cauchy 收敛准则知, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $M>a$, 使得 $\forall b''>b'\geq M$, $\int_{b'}^{b''}|f(x)|dx<\varepsilon$. 于是 $|\int_{b'}^{b''}f(x)dx|\leq\int_{b'}^{b''}|f(x)|dx<\varepsilon$, $\forall b''>b'\geq M$. 再次由 Cauchy 收敛准则知 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛. 证毕. □

Theorem

定理: 考虑广义积分 $\int_a^b f(x)g(x)dx$ 的收敛性, 其中 b 是 $f(x)$ 的唯一一个有限或无穷瑕点. 假设

(i) $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上内闭可积, 且变上限积分 $\int_a^{b'} f(x)dx$ 关于 $b' \in [a,b)$ 有界, 即存在 $M>0$, 使得 $|\int_a^{b'} f(x)dx| < M$, $\forall b' \in [a,b)$;

(ii) $g(x)$ 在 $[a,b)$ 上单调且 $\lim_{x\to b^-} g(x) = 0$,

则广义积分 $\int_a^b f(x)g(x)dx$ 收敛.

稍后证明定理.

例子

例: 证明广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 条件收敛. (这个积分常称作 Dirichlet 积分, 收敛, 以后证明它的积分值为 $\frac{\pi}{2}$).

证: 要证积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 条件收敛, 只需证 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 条件收敛. 注意 $x=0$ 不是瑕点. 因为 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. 令 $f(x)=\sin x$, $g(x)=\frac{1}{x}$. 显然 $\int_1^b \sin xdx$ $=\cos 1-\cos b$ 关于 $b\in[1,+\infty)$ 有界, 且 $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$. 故 Dirichlet 判别法的两个条件均满足. 因此积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 收敛. 以下证 $\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}dx$ 发散. 由于 $\frac{|\sin x|}{x}\geq\frac{\sin^2 x}{x}$, $\forall x\geq 1$, 故只要证 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx$ 发散即可. 将函数 $\frac{\sin^2 x}{x}$ 写作 $\frac{\sin^2 x}{x}=\frac{1-\cos 2x}{2x}$. 由此得 $\frac{1}{x}=\frac{2\sin^2 x}{x}+\frac{\cos 2x}{x}$. 由 Dirichlet 判别法知, 广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x}dx$ 收敛. 假设积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx$ 收敛, 则广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$ 收敛. 这显然是个矛盾. 因此积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx$ 发散. 这就证明了积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 条件收敛. 证毕.

Theorem

定理: 考虑广义积分 $\int_a^b f(x)g(x)dx$ 的收敛性, 其中 b 是 $f(x)$ 的唯一一个有限或无穷瑕点. 假设

(i) $f(x)$ 在 $[a,b)$ 内闭可积, 且广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛;

(ii) $g(x)$ 在 $[a,b)$ 上单调有界,

则广义积分 $\int_a^b f(x)g(x)dx$ 收敛.

<u>证</u>: 由于 $g(x)$ 在 $[a, b)$ 上单调且有界, 故极限 $\lim_{x\to b^-} g(x)$ 存在, 记作 C. 令 $g_1(x) = g(x) - C$, 则易证 $f(x)$ 和 $g_1(x)$ 分别满足 Dirichlet 判别法中的条件 (i) 和 (ii), 因此积分 $\int_a^b f(x)g_1(x)dx$ 收敛. 于是对于任意 $b' < b$,

$$\int_a^{b'} f(x)g_1(x)dx = \int_a^{b'} f(x)g(x)dx - C\int_a^{b'} f(x)dx,$$

$$\Rightarrow \quad \int_a^{b'} f(x)g(x)dx = \int_a^{b'} f(x)g_1(x)dx + C\int_a^{b'} f(x)dx.$$

当 $b' \to b^-$ 时, 上式右端有极限, 且极限为 $\int_a^b f(x)g_1(x)dx + C\int_a^b f(x)dx$. 因此广义积分 $\int_a^b f(x)g(x)dx$ 收敛, 且

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b f(x)g_1(x)dx + C\int_a^b f(x)dx.$$

定理得证. $\square$

Example

例一: 考虑下述广义积分的收敛性

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \arctan x dx. \quad (*)$$

解: 记 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $g(x) = \arctan x$, 则广义积分 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 且 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调有界. 根据 Abel 判别法知广义积分 (*) 收敛.

注: 对于上述例子, 也可应用 Dirichlet 判别法来证明广义积分 (*) 收敛. 记 $f(x) = \sin x$, $g(x) = \frac{\arctan x}{x}$, 则易证 (i) 广义积分 $\int_0^b \sin x dx$ 关于 $b \in [0, +\infty)$ 有界, (ii) $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调下降且趋向于零. 于是根据 Dirichlet 判别法知广义积分 (*) 收敛.

例二: 设 $\max\{p,q\}>1$, 证明广义积分 $J=\int_1^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^p+x^q}dx$ 收敛.

证: 不妨设 $p\geq q$, 且 $p>1$. 于是积分 J 可写作

$$J=\int_1^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^p(1+\frac{1}{x^{p-q}})}dx=\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^{p-1}(1+\frac{1}{x^{p-q}})}dx.$$

令 $f(x)=\frac{\cos x}{x^{p-1}}$, $g(x)=\frac{1}{1+\frac{1}{x^{p-q}}}$. 由 Dirichlet 判别法知, 积分 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 收敛, 而函数 $g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调有界. 于是再利用 Abel 判别法可知积分 J 收敛. 证毕.

另证: 考虑积分 J. 令 $f(x)=\cos x$, $g(x)=\frac{x}{x^p+x^q}$. 显然变上限积分 $\int_1^b f(x)dx$ 关于 $b\in[1,+\infty)$ 有界. 此外在假设 $\max\{p,q\}>1$ 下, 易证存在 $M\geq 1$, 使得 $g(x)$ 在区间 $[M,+\infty)$ 上单调下降, 并且趋向于零. 因此根据 Dirichlet 判别法知积分 $\int_M^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^p+x^q}dx$ 收敛, 从而原积分 $J=\int_1^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^p+x^q}dx$ 收敛. 证毕.

回忆: (第一)积分中值定理

Theorem

定理: 设 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号, 则

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx,$$

其中 $m_f \le \mu \le M_f$, M_f 和 m_f 分别记 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 的上下确界. 特别当 $f(x)$ 连续时, 存在 $\xi \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

第二积分中值定理

Theorem

定理：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调，则存在 $\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx + g(b)\int_\xi^b f(x)dx.$$

证：我们加强假设，即 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调且连续可微，来证明定理。一般情形下的证明稍微复杂些，这里从略。令 $F(x)=\int_a^x f(s)ds$，则 $F(x)$ 连续可导，故由分部积分法得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b g(x)dF(x) = F(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx.$$

证明，续

因 g 单调且连续可微，故 g' 不变号，因而存在 $\xi \in [a,b]$，使得

$$\int_a^b F(x)g'(x)dx = F(\xi)\int_a^b g'(x)dx = F(\xi)[g(b) - g(a)].$$

$$\Rightarrow \quad \int_a^b f(x)g(x)dx = F(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx$$

$$= F(b)g(b) - F(a)g(a) - F(\xi)[g(b) - g(a)].$$

注意 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$，故 $F(a) = 0$. 因此

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(b)\int_a^b f(x)dx - g(b)\int_a^\xi f(x)dx + g(a)\int_a^\xi f(x)dx$$

$$= g(a)\int_a^\xi f(x)dx + g(b)\int_\xi^b f(x)dx. \qquad \square$$

证：对于 b 为有限和无穷情形的证明类似. 以下只证无穷情形，即证明积分 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛. 由假设 (i) 知存在 $M > 0$，使得

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le M, \quad \forall b \in [a, +\infty).$$

于是对任意 $b, b' \in [a, +\infty)$，

$$\left|\int_b^{b'} f(x)dx\right| = \left|\int_a^{b'} f(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\le \left|\int_a^{b'} f(x)dx\right| + \left|\int_a^b f(x)dx\right| \le 2M.$$

再由假设 (ii) 知，对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $C > a$，使得 $|g(x)| < \varepsilon$, $\forall x \ge C$. 于是对任意 $b' > b \ge C$，应用第二积分中值定理得

证明，续

$$\int_b^{b'} f(x)g(x)dx = g(b)\int_b^{\xi} f(x)dx + g(b')\int_{\xi}^{b'} f(x)dx,$$

其中 $\xi \in [b, b']$. 于是

$$\left|\int_b^{b'} f(x)g(x)dx\right| \le |g(b)|\left|\int_b^{\xi} f(x)dx\right| + |g(b')|\left|\int_{\xi}^{b'} f(x)dx\right|$$

$$\le \varepsilon 2M + \varepsilon 2M = 4M\varepsilon.$$

由 Cauchy 收敛准则知，广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛. □

例一

例一: 考虑广义积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{[x]}}{x - \ln x} dx$$

的收敛性.

解: 我们将应用 Dirichlet 判别法, 来证明上述积分收敛. 记 $f(x) = (-1)^{[x]}$, $g(x) = \frac{1}{x - \ln x}$. 显然 $g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 单调下降且趋于零. 还需验证 $\int_1^b f(x)dx$ 关于 $b \in [1, +\infty)$ 有界. 对于任意 $b > 1$,

$$\int_1^b (-1)^{[x]} dx = \int_1^{[b]} (-1)^{[x]} dx + \int_{[b]}^b (-1)^{[b]} dx$$

$$= \sum_{k=1}^{[b]-1} (-1)^k + (-1)^{[b]}(b - [b]).$$

于是 $\left|\int_1^b (-1)^{[x]} dx\right| \le 1 + 1 = 2$. 由 Dirichlet 判别法知积分 $\int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{[x]}}{x - \ln x} dx$ 收敛. 解答完毕.

例二: 考虑广义积分

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}dx$$

的绝对收敛性.

解: 这是瑕积分, 瑕点为 $x=0$. 取 $a\in(0,1)$, 在区间 $[a,1]$ 上作变换 $y=\frac{1}{x}$ 或 $x=\frac{1}{y}$, 则 $dx=-\frac{dy}{y^2}$. 于是

$$\int_a^1 \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}dx=\int_{\frac{1}{a}}^1 y\cdot\sin y\cdot\frac{-dy}{y^2}=\int_1^{\frac{1}{a}}\frac{\sin y}{y}dy.$$

已证广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin y}{y}dy$ 条件收敛. 故

$$\lim_{a\to0^+}\int_a^1 \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{\sin y}{y}dy=\int_1^{+\infty}\frac{\sin y}{y}dy.$$

因此广义积分 $\int_0^1\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}dx$ 条件收敛. 解答完毕.

例二：考虑积分 $J=\int_a^b \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}dx$. (之前我们计算过相应的不定积分. 参见 Dec 03 讲义第 3-4 页)

解：显然上述积分是瑕积分，积分上下限 $x=a$ 和 $x=b$ 均为瑕点. 易证这两个瑕点处的积分均收敛. 因此广义积分 J 收敛. 为计算积分 J，作变量代换 $x=a\cos^2 t+b\sin^2 t$, $0\le t\le \pi/2$，则

$$dx=(-2a\cos t\sin t+2b\sin t\cos t)dt=2(b-a)\cos t\sin t dt,$$

$$(x-a)(b-x)=(a\cos^2 t-a+b\sin^2 t)(b-b\sin^2 t-a\cos^2 t)$$

$$=(b-a)\sin^2 t\cdot(b-a)\cos^2 t=(b-a)^2\sin^2 t\cos^2 t.$$

$$\Rightarrow \quad J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2(b-a)\cos t\sin t}{(b-a)\cos t\sin t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2dt=\pi. \quad \#$$

例一：计算 $E=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x dx$ (积分 E 常称为 Euler 积分).

解：这是瑕积分，瑕点为 $x=0$. 积分的收敛性是显然的. 因为取 $\varepsilon\in(0,1)$, $y^{\varepsilon}\ln y\to 0$, $y\to 0^{+}$. 因此

$$x^{\varepsilon}\ln\sin x=\left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\varepsilon}(\sin x)^{\varepsilon}\ln\sin x\to 0,\quad x\to 0^{+}.$$

而积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{x^{\varepsilon}}$ 显然收敛. 于是根据比较判别法的极限形式可知，Euler 积分 E 收敛. 以下来计算 Euler 积分. 对积分 E，作变量代换 $x=2t$，则

$$E=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin 2t)d(2t)=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(2\sin t\cos t)dt$$

$$=\frac{\pi}{2}\ln 2+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin t dt+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos t dt.$$

对积分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos t dt$，作变换 $t=\frac{\pi}{2}-s$，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos t dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos\left(\frac{\pi}{2}-s\right) d\left(\frac{\pi}{2}-s\right)$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin s ds = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin t dt.$$

于是 $$E = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin t dt + 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin t dt$$

$$= \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x dx = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2E.$$

故

$$E = -\frac{\pi}{2}\ln 2. \qquad \square$$

例一: 计算 $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos xdx$.

解: 作变量代换 $x=\frac{\pi}{2}-t$, 则

$$J=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\ln\cos\Big(\frac{\pi}{2}-t\Big)d\Big(\frac{\pi}{2}-t\Big)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin tdt=-\frac{\pi}{2}\ln 2.\qquad \#$$

例二: 计算 $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\cos xdx}{\sin x}$.

解:

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{xd\sin x}{\sin x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}xd\ln\sin x=x\ln\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin xdx=\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

这里 $x\ln\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$ 理解为

$$x\ln\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}x\ln\sin x\Big|_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}}=-\lim_{\varepsilon\to 0^+}\varepsilon\ln\sin\varepsilon=0.$$

往下对于瑕积分作分部积分时, 均这样理解, 不再另作说明. #

例三: 计算 $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 dx$.

解:

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 d\left(\frac{-\cos x}{\sin x}\right)=-\frac{x^2\cos x}{\sin x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x}2x dx$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\cos x}{\sin x}dx=\pi\ln 2. \quad \#$$

例四：计算

$$J=\int_0^{+\infty}\left(\frac{\arctan x}{x}\right)^3 dx.$$

解：作变量代换 $x=\tan t$ 或 $t=\arctan x$，则

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{t}{\tan t}\right)^3 d(\tan t)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t^3\cos t}{\sin^3 t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t^3 d\sin t}{\sin^3 t}$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^3 d\left(\frac{1}{\sin^2 t}\right)=-\frac{1}{2}\frac{t^3}{\sin^2 t}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^2 t}\cdot 3t^2 dt$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3+\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{t}{\sin t}\right)^2 dt=\frac{3}{2}\pi\ln 2-\frac{\pi^3}{16}. \quad \#$$

例五: 计算

$$J = \int_0^{\pi} x\ln\sin x dx.$$

解: 作变量代换 $x = \pi - t$, 则

$$J = \int_{\pi}^{0} (\pi - t)\ln\sin(\pi - t)d(\pi - t)$$

$$= \int_0^{\pi} (\pi - t)\ln\sin t dt = \pi\int_0^{\pi} \ln\sin t dt - \int_0^{\pi} t\ln\sin t dt.$$

于是 $2J = \pi\int_0^{\pi}\ln\sin t dt$. 故

$$J = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\ln\sin t dt = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t dt = -\frac{\pi^2}{2}\ln 2.$$

例六：计算

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\ln\sin x dx.$$

解：将 $\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ 代入积分式得

$$J=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2x)\ln\sin x dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x dx-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\ln\sin x dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\ln 2\right)-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x d\sin 2x=-\frac{\pi}{4}\ln 2-\frac{1}{4}\sin 2x\ln\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$+\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x(\ln\sin x)'dx=-\frac{\pi}{4}\ln 2+\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos x\sin x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}dx$$

$$=-\frac{\pi}{4}\ln 2+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x dx=\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{4}\ln 2.\quad \#$$

例七: 计算

$$J=\int_0^{\pi}\ln(1+\cos x)dx$$

解: 令 $x=\pi-t$, 则

$$J=\int_{\pi}^{0}\ln[1+\cos(\pi-t)]d(\pi-t)=\int_0^{\pi}\ln(1-\cos t)dt.$$

于是 $\quad 2J=\int_0^{\pi}\ln(1+\cos x)dx+\int_0^{\pi}\ln(1-\cos x)dx$

$$=\int_0^{\pi}\ln(1+\cos x)(1-\cos x)dx=\int_0^{\pi}\ln(1-\cos^2 x)dx$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin^2 x dx=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x dx=4\left(-\frac{\pi}{2}\ln 2\right)=-2\pi\ln 2.$$

因此 $J=-\pi\ln 2.$ #

例七另解

另解:

$$J = \int_0^{\pi} \ln(1+\cos x)dx = \int_0^{\pi} \ln\left[2\cos^2(x/2)\right]dx$$

$$= \pi \ln 2 + \int_0^{\pi} \ln\cos^2(x/2)dx = \pi \ln 2 + 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos t dt$$

$$= \pi \ln 2 + 4\left(-\frac{\pi}{2}\ln 2\right) = -\pi \ln 2.$$

解答完毕.

课本第 206 页第六章总复习题第 5 题: 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续, 且广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛. 证明 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.

证: 反证. 假设 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ 不成立, 那么存在 $\varepsilon_0>0$, 使得对任意 $A>a$, 存在 $x_A>A$, $|f(x_A)|\geq\varepsilon_0$. 一方面, 由函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上的一致连续性知, 对于 $\varepsilon_0>0$, 存在 $\delta_0>0$, 使得当 $x',x''\geq a$, $|x'-x''|<\delta_0$ 时, 成立 $|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon_0}{2}$. 于是对 $\forall x\in[x_A,x_A+\delta_0]$,

$$|f(x)|=|f(x_A)+f(x)-f(x_A)|$$

$$\geq|f(x_A)|-|f(x)-f(x_A)|>\varepsilon_0-\frac{\varepsilon_0}{2}=\frac{\varepsilon_0}{2}.$$

这说明 $f(x)$ 在 $[x_A,x_A+\delta_0]$ 上定号. 因此

例子，续

$$\left|\int_{x_A}^{x_A+\delta_0} f(x)dx\right| = \int_{x_A}^{x_A+\delta_0} |f(x)|dx \geq \frac{1}{2}\varepsilon_0\delta_0 > 0. \quad (*)$$

另一方面由于广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，故由 Cauchy 收敛准则知，对 $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}\varepsilon_0\delta_0 > 0$，存在 $M_1 > a$，使得 $|\int_b^{b'} f(x)dx| < \varepsilon_1, \forall b, b' \geq M_1$. 取 $A \geq M_1$，则 x_A，$x_A + \delta_0 > A > M_1$，故

$$\left|\int_{x_A}^{x_A+\delta_0} f(x)dx\right| < \varepsilon_1 = \frac{1}{2}\varepsilon_0\delta_0.$$

此与式 (*) 相矛盾. 命题得证.

一般而言，广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，并不意味着 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$，即使 $f(x)$ 是非负连续的. 例如可以证明广义积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{1+x^6\sin^2 x}$$

收敛. 参见谢惠民等人编写的《数学分析习题课讲义》第2版(上册)第386页. 显然被积函数，记作 $f(x)$，非负，且当 $x\to+\infty$ 时并不趋于零. 实际上 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上无界. 因为 $f(k\pi) = k\pi$，$k = 1, 2, \cdots$. 函数 $f(x)$ 的函数图像如下:

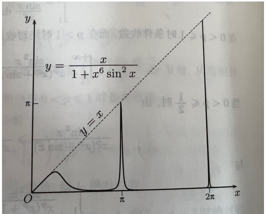


图 12.1

考虑广义积分

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}dx.$$

因积分可能有一个有限瑕点 $x=0$, 以及一个无穷瑕点 $x=+\infty$, 故将积分分成两个部分 $\Gamma(s)=J_1+J_2$, 其中

$$J_1=\int_0^1 x^{s-1}e^{-x}dx,\quad J_2=\int_1^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}dx.$$

考虑积分 J_1. 显然积分 J_1 与积分 $\int_0^1 x^{s-1}dx$ 的收敛性相同. 这两个积分收敛, 当且仅当 $s>0$. 再考虑积分 J_2. 对任意 $s>0$, 由于

$$\frac{x^{s-1}e^{-x}}{\frac{1}{x^2}}=\frac{x^{s+1}}{e^x}\to 0,\quad x\to+\infty.$$

根据比较判别法的极限形式可知积分 J_2 收敛. 因此积分 $\Gamma(s)$ 作为函数对 $s>0$ 有定义. 函数 $\Gamma(s)$ 称作 Gamma 函数.

考虑广义积分

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx.$$

这个积分可能有瑕点 $x=0$ 和 $x=1$. 将积分一分为二 $B(p,q)=J_1+J_2$, 其中

$$J_1=\int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx,\quad J_2=\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx.$$

考虑广义积分 J_1. 由于

$$\frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{x^{p-1}}\to 1,\quad x\to 0^+,$$

故由比较判别法的极限形式知, 积分 $J_1=\int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ 和积分 $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}dx$ 有相同的收敛性.

Beta 函数，续

显然积分 $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}dx$ 收敛，当且仅当 $p>0$. 因此积分 J_1 收敛，当且仅当 $p>0$. 同理可证积分 $J_2=\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ 收敛，当且仅当 $q>0$. 因此积分

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

可看作定义在 $p>0$, $q>0$ 的函数，称作 Beta 函数.

注：以下介绍 $\Gamma(s)$ 和 $B(p,q)$ 的一些性质. 它们的证明，可参见常庚哲史济怀的《数学分析教程》(下)，第三版，第383-400页.

Theorem

定理一: $\Gamma(s)$ 函数满足如下三个性质:

(i) $\Gamma(s) > 0$, $\forall s > 0$ 且 $\Gamma(1) = 1$;

(ii) $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$, $\forall s > 0$.

(iii) $\ln \Gamma(s)$ 是开区间 $(0, +\infty)$ 内的下凸函数.

证: 只证 (i) 和 (ii). 证 (i). 显然 $\Gamma(s) > 0$, $\forall s > 0$, 且 $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$. 证 (ii): 分部积分得

$$\Gamma(s+1) = \int_0^{+\infty} x^s e^{-x} dx = -e^{-x} x^s \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x} (x^s)' dx$$

$$= s \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx = s\Gamma(s). \quad \square$$

注: 由性质 (ii) 知, 对任意正整数 n, $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \cdots = n!$. 因此 $\Gamma(n+1) = n!$.

Theorem

定理二(Bohr, Mollerup, 1922)：假设 $(0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足定理一中的三个性质，即

(i) $\forall x>0$, $f(x)>0$ 且 $f(1)=1$;

(ii) $\forall x>0$, $f(x+1)=xf(x)$;

(iii) $\ln f(x)$ 是开区间 $(0,+\infty)$ 内的下凸函数，

则 $f(x)=\Gamma(x)$.

Theorem

定理三(余元公式)：对 $\forall p\in(0,1)$, $\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin(p\pi)}$.

注：如果已知 $\Gamma(s)$ 在 $(0,\frac{1}{2})$ 上的值，则由余元公式可知 $\Gamma(s)$ 在 $(0,1)$ 上的值. 再根据公式 $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$，可知 $\Gamma(s)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的值.

函数 $B(p,q)$ 的性质

Theorem

定理: (i) $B(p,q)$ 在 $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$ 上连续, 且有各阶连续的偏导数;

(ii) $B(p,q)=B(q,p)$, $\forall p>0, q>0$;

(iii) $B(p+1,q+1)=\frac{pq}{(p+q+1)(p+q)}B(q,p)$, $\forall p>0, q>0$;

(iv) $B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$, $\forall p>0, q>0$.

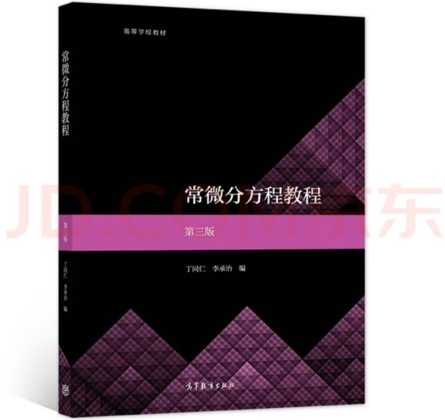
Definition

<u>定义</u>: (i) 含有未知函数之导数的方程 (等式) 称为微分方程 (Differential Equations, DE);

(ii) 如果一个微分方程的未知函数是<u>单变量</u>函数，那么这个方程就称为常微分方程 (Ordinary Differential Equations, ODE);

(iii) 如果一个微分方程的未知函数是<u>多变量</u>函数，则称这个方程为偏微分方程 (Partial Differential Equations, PDE).

常微分方程的参考书



Example

例一: Malthas 人口 (物种) 模型 $x' = ax$, 这里 $x = x(t)$ 代表未知函数, $t \in \mathbb{R}$ 代表独立变量, 通常可看作时间变量. 符号 $'$ 代表关于变量 t 的导数, $a \in \mathbb{R}$ 为某个是实常数.

Example

例二: Logistic 方程 $x' = ax(1 - \frac{x}{K})$, 其中正常数 K 可解释为最大人口承载量. 作尺度变换 (scaling) $y = \frac{x}{K}$, 则原方程可化为 $y' = ay(1 - y)$. 故不妨设 $K = 1$, 即 $x' = ax(1 - x)$. 这个方程可看作方程 Malthas 方程 $x' = ax$ 的一个修正或摄动.

Example

例三: 方程 $x'' + x = 0$ 常称为简谐振动方程, 这里 x'' 代表未知函数 $x(t)$ 的二阶导数. 这是描述物体(质点)在弹簧的作用下无摩擦的运动方程.

例四，例五，例六

Example

例四：非线性振动方程 $x'' + \sin x = 0$. 这是单摆在重力作用下的运动方程. 确切地说，单摆与垂直方向所成的角度 x (弧度) 满足这个方程.

Example

例五：Airy 方程 $x'' - tx = 0$. 方程描述光波在弯曲光学元件中的传播行为，如透镜和棱镜等. Airy 方程也可以描述粒子在不同势场中的运动.

Example

例六：Riccati 方程 $x' = x^2 - t$. Liouville 于 1841 年证明了这类方程的解不能用初等函数表示，即这类方程不可积.

Definition

定义: 如果一个常微分方程中, 未知函数导数的最高阶为 n, 则称该方程为 n 阶方程.

Example

例: 方程 $x' = ax$ 和 $x' = x - x^2$ 均为一阶的; 方程 $x'' + x = 0$ 和 $x'' - tx = 0$ 均为二阶的.

一般正规 n 阶方程是指如下形式的 n 阶方程

$$x^{(n)} = f(x, x', \cdots, x^{(n-1)}, t).$$

某些方程可以写成正规方程. 例如方程 $1 + (x')^2 = x^2$ 等价于两个正规方程 $x' = \sqrt{x^2 - 1}$ 和 $x' = -\sqrt{x^2 - 1}$. 往后我们基本上只考虑正规方程.

线性与非线性方程

形如 $x^{(n)} = a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + a_{n-2}(t)x^{(n-2)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x + b(t)$ 的方程称为 n 阶线性方程，其中系数函数 $a_0(t)$, $a_1(t)$, $\cdots$, $a_{n-1}(t)$, $b(t)$ 为某开区间上的连续函数. 换言之，方程 $x^{(n)} = f(x, x', \cdots, x^{(n-1)}, t)$ 的右端函数 $f(x, x', \cdots, x^{(n-1)}, t)$ 关于变量 $x, x', \cdots, x^{(n-1)}$ 是线性时，则称作线性方程. 否则方程称作非线性方程. 例如方程 $x' = a(t)x + b(t)$ 为一阶线性方程，方程 $x'' = a(t)x' + b(t)x + c(t)$ 为二阶线性方程. 而方程 $x' = a(t)x^2 + b(t)x + c(t)$ 为一阶非线性方程 (Riccati 方程)，假设 $a(t)$ 不恒为零.

方程的解，例一

Definition

定义：我们称 n 阶正规方程 $x^{(n)} = f(x, x', \cdots, x^{(n-1)}, t)$ 有解 $x = \phi(t)$，$t \in J$，意思是函数 $x = \phi(t)$ 在区间 J 上 n 阶连续可微，且

$$\phi^{(n)}(t) \equiv f\big(\phi(t), \phi'(t), \cdots, \phi^{(n-1)}(t), t\big), \quad \forall t \in J.$$

Example

例一：方程 $x' = ax$ 有解 $\phi(t) = e^{at}$，$\forall t \in \mathbb{R}$. 因为左边 $= (e^{at})' = ae^{at} =$ 右边，$\forall t \in \mathbb{R}$. 显然对任意常数 $c \in \mathbb{R}$，ce^{at} 也是解. 以下证明方程的每个解都有这种形式. 假设 $x(t)$ 是方程的解，即 $x'(t) - ax(t) = 0$. 方程两边同乘 e^{-at} (称作积分因子) 得 $e^{-at}[x'(t) - ax(t)] = 0$，即 $[e^{-at}x(t)]' = 0$. 故 $e^{-at}x(t) = C$. 因此 $x(t) = Ce^{at}$. 这表明 $x = Ce^{at}$，$\forall C \in \mathbb{R}$，囊括了方程 $x' = ax$ 的所有解，无一遗漏.

例二

Example

<u>例二</u>: 考虑方程 $x''+x=0$. 不难验证方程有解 $\phi_1(t)=\cos t$, $\phi_2(t)=\sin t$, $\forall t\in\mathbb{R}$, 并且对任意常数 $c_1,c_2\in\mathbb{R}$, 线性组合 $c_1\cos t+c_2\sin t$ 都是解. 因为

$$(c_1\cos t+c_2\sin t)''+(c_1\cos t+c_2\sin t)$$

$$=c_1[(\cos t)''+\cos t]+c_2[(\sin t)''+\sin t]=0.$$

我们将证明线性组合 $\{c_1\cos t+c_2\sin t, c_1,c_2\in\mathbb{R}\}$ 构成了方程 $x''+x=0$ 的全部解, 无一遗漏. 因此 $x''+x=0$ 的全部解构成一个二维线性空间, ϕ_1 和 ϕ_2 是空间的基底, 称为方程的基本解组. 因此方程的每个解 (一般解) 可表为 $c_1\cos t+c_2\sin t$.

Dec 17 作业, 共七大题

习题一: 课本第204页习题6.2题3: 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上内闭可积. 问下列两个命题是否成立? 为什么?

(1) 若极限 $\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}f(x)dx$ 存在, 则广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 收敛;

(2) 若极限 $\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}|f(x)|dx$ 存在, 则广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 收敛.

习题二: 课本第205页习题6.2题4. 判断下列积分的敛散性 (1) (3) (5) (7) (9) (11):

$$(1)\ \int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}dx;\quad (3)\ \int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{x\sqrt{x^2+1}}dx;\quad (5)\ \int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1}{x^p\ln(1+\frac{1}{x^2})}dx;$$

$$(7)\ \int_{-2}^{0}\frac{1}{x-\sin x}dx;\quad (9)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos x}{x^n}dx;\quad (11)\ \int_1^{2}\frac{dx}{\ln x}dx.$$

习题三：课本第205页习题6.2题5. 讨论下列积分的敛散性(2)(4)(6)(8):

$$(2)\ \int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x^p}dx;\quad (4)\ \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}};$$

$$(6)\ \int_3^{+\infty}\frac{dx)}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r};\qquad (8)\ \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p+(\ln x)^q},\ p>0.$$

习题四：课本第205页习题6.2题6：设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上内闭可积，且广义积分

$$\int_a^{+\infty}f^2(x)dx \quad 和 \quad \int_a^{+\infty}g^2(x)dx$$

均收敛，证明

(1) 积分 $\int_a^{+\infty}f(x)g(x)dx$ 绝对收敛；

(2) 积分 $\int_a^{+\infty}[f(x)+g(x)]^2dx$ 收敛.

习题五：课本第205页习题6.2题7(有修改)：设

(i) $f(x)$，$g(x)$ 和 $h(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上内闭可积；

(ii) $g(x) \le f(x) \le h(x)$，$\forall x \in [a, +\infty)$；

(iii) 两个积分 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 和 $\int_a^{+\infty} h(x)dx$ 均收敛，

证明积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 也收敛。

习题六：课本第205页习题6.2题8(有修改)：假设积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，且极限 $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 存在(有限)，证明 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

习题七：课本第205页习题6.2题9：考虑下列广义积分的绝对收敛性和条件收敛性

(1) $\int_0^{+\infty} \sin(x^2)dx$;

(2) $\int_0^{+\infty} x\cos(x^3)dx$;

(3) $\int_1^{+\infty} x\left(\arctan\frac{2}{x} - \arctan\frac{1}{x}\right)dx$.