1 线性代数习题集

> ## 练习 1.5.24
>
> 给定 n 阶实反对称矩阵 A，求证：$I_n - A$ 可逆。
> **提示：** 反证法，考虑 $Ax = x$。

证明. 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是实反对称矩阵，即满足 $A^T = -A$。我们要证明 $I_n - A$ 可逆。根据提示，采用**反证法**。

假设 $I_n - A$ 不可逆（即奇异），则齐次线性方程组 $(I_n - A)x = 0$ 必存在非零解 $x \in \mathbb{R}^n$（即 $x \neq 0$）。

由 $(I_n - A)x = 0$ 可得：

$$I_n x - Ax = 0 \implies Ax = x \tag{1}$$

在等式 (1) 两边同时左乘向量 x 的转置 x^T，得到：

$$x^T A x = x^T x = \|x\|^2 \tag{2}$$

由于 x 是非零实向量，其长度的平方严格大于 0，即 $x^T A x > 0$。

另一方面，利用 A 的反对称性（$A^T = -A$）来考察标量 $x^T A x$。因为 $x^T A x$ 是一个实数，其转置等于自身：

$$x^T A x = (x^T A x)^T = x^T A^T (x^T)^T = x^T A^T x$$

代入 $A^T = -A$，可得：

$$x^T A^T x = x^T(-A)x = -(x^T A x)$$

这意味着 $x^T A x = -x^T A x$，即：

$$2x^T A x = 0 \implies x^T A x = 0 \tag{3}$$

矛盾分析：

- 由 (2) 式推导得出 $x^T A x > 0$；
- 由 (3) 式推导得出 $x^T A x = 0$。

两者矛盾。因此假设不成立，方程 $(I_n - A)x = 0$ 仅有零解，故矩阵 $I_n - A$ 可逆。 □

练习 1.6.10

给定 $m \times n, n \times m$ 矩阵 A, B，求证：$I_m + AB$ 可逆当且仅当 $I_n + BA$ 可逆。
提示： 考虑分块矩阵。

证明. 我们要证明 $I_m + AB$ 可逆 $\iff$ $I_n + BA$ 可逆。这等价于证明它们的行列式同时为零或同时不为零。

构造如下 $(m+n) \times (m+n)$ 的分块矩阵 P：

$$P = \begin{pmatrix} I_m & A \\ -B & I_n \end{pmatrix}$$

第一步： 构造矩阵 $L = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ B & I_n \end{pmatrix}$ 并左乘 P：

$$\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ B & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & A \\ -B & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & A \\ 0 & I_n + BA \end{pmatrix}$$

对等式两边取行列式。由于 $\det(L) = 1$，且右侧为上三角分块矩阵，我们得到：

$$\det(P) = \det(I_n + BA) \tag{4}$$

第二步： 构造矩阵 $U = \begin{pmatrix} I_m & -A \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$ 并左乘 P：

$$\begin{pmatrix} I_m & -A \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & A \\ -B & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m + AB & 0 \\ -B & I_n \end{pmatrix}$$

对等式两边取行列式。由于 $\det(U) = 1$，且右侧为下三角分块矩阵，我们得到：

$$\det(P) = \det(I_m + AB) \tag{5}$$

结论： 比较 (4) 式和 (5) 式，可得 $\det(I_m + AB) = \det(I_n + BA)$。因此，$I_m + AB$ 可逆当且仅当 $I_n + BA$ 可逆。 □

第 16 题

设 $A \in M_n$，如果对任意 n 元列向量 α 都有 $\alpha^T A \alpha = 0$，则 $A^T = -A$，即 A 是反对称矩阵。

证明. 对任意两个 n 元列向量 $x, y \in \mathbb{R}^n$，取 $\alpha = x + y$。根据题目已知条件，有：

$$(x+y)^T A(x+y) = 0$$

展开上式左边：

$$x^T Ax + x^T Ay + y^T Ax + y^T Ay = 0$$

由已知条件可知 $x^T Ax = 0$ 且 $y^T Ay = 0$，代入上式可得：

$$x^T Ay + y^T Ax = 0 \tag{6}$$

注意 $y^T Ax$ 是一个标量，标量的转置等于其自身，即 $y^T Ax = x^T A^T y$。将此代入 (6) 式：

$$x^T (A + A^T) y = 0$$

由于上式对任意 x, y 都成立，因此 $A + A^T = 0$，即 $A^T = -A$。 □

> **第 17 题**
>
> 设 A 是 n 阶非零对称矩阵，证明存在 n 元列向量 α，使得 $\alpha^T A\alpha \neq 0$。

证明. 因为 $A \neq 0$，分两种情况讨论：

情形 1： A 的主对角线上存在非零元素。设 $a_{kk} \neq 0$，取 $\alpha = e_k$，则 $\alpha^T A\alpha = a_{kk} \neq 0$。

情形 2： A 的主对角线元素全为 0。此时必存在非对角元素 $a_{ij} \neq 0$ $(i \neq j)$。取 $\alpha = e_i + e_j$，计算得：

$$\alpha^T A\alpha = a_{ii} + a_{ij} + a_{ji} + a_{jj} = 0 + a_{ij} + a_{ij} + 0 = 2a_{ij} \neq 0$$

综上，结论成立。 □

2 克拉底鲁流变论的拓扑学诠释

2.1 引言

古希腊哲学家克拉底鲁（Cratylus）提出了一个著名的激进命题："人连一次也不能踏进同一条河流"。这比赫拉克利特的"人不能两次踏进同一条河流"更为极端。在数学上，这可以被形式化为一个关于**时间连续性**、**状态变化**与**同一性定义**的拓扑学问题。

2.2 数学建模

定义 2.1 (河流的状态). 设 M 为一个度量空间（Metric Space），$d : M \times M \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 为度量（距离函数）。定义河流随时间演化的函数为 $R : \mathbb{R} \to M$。$R(t)$ 表示 t 时刻河流的微观状态（水分子的位置、速度等）。

定义 2.2 (踏入动作). “踏入”不是一个瞬时事件，而是一个具有非零测度的时间区间。设动作发生的时间段为闭区间 $I = [t_0, t_0 + \delta]$，其中 $\delta > 0$ 为动作持续时间。

公理 2.1 (克拉底鲁流变公理). 万物皆流，无物常驻。对于任意的时间增量 $\Delta t \neq 0$，河流的状态必然发生改变。即：

$$\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}, \quad t_1 \neq t_2 \implies d(R(t_1), R(t_2)) > 0 \tag{7}$$

更进一步，若假设 $R(t)$ 可微，则其变化率恒非零：$\|R'(t)\| > 0$。

2.3 利用 $\epsilon - \delta$ 语言的证明

命题 2.1. 在动作区间 $[t_0, t_0 + \delta]$ 内，不存在一个恒定的客体“同一条河流”。

证明. 我们要考察的是，是否存在一个固定的状态 R_{id}（Identity），使得在整个踏入过程中，河流都保持在这个状态。

假设存在“同一条河流”，记为 $R(t_0)$。根据克拉底鲁的观点，要“踏入”它，意味着在动作持续时间 δ 内，河流状态与初始状态的差异必须为 0。

然而，根据流变公理，对于任意微小的时间步长 $\tau \in (0, \delta]$：

$$d(R(t_0), R(t_0 + \tau)) > 0$$

1. 同一性的破坏： 如果我们将“同一条河流”定义为状态差异小于某个阈值 ϵ。由于 $R(t)$ 是持续变化的，对于任意给定的同一性容忍度 $\epsilon > 0$（无论多么微小），只要时间 δ 足够长，或者变化率足够快，累积的差异就会超出 ϵ。克拉底鲁实际上认为同一性的容忍度 $\epsilon = 0$。

2. 积分视角的矛盾： “踏入”这个动作可以看作是人与河流在时间段 I 上的相互作用的积分。

$$\text{Interaction} = \int_{t_0}^{t_0+\delta} \langle \text{Person}(t), R(t) \rangle \, dt$$

如果 $R(t)$ 在区间内不是常数函数（即 $R(t) \not\equiv C$），那么人接触的对象就不是一个单一的实体，而是一个连续变化的流形（Manifold）。用极限语言表述：

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{R(t + \Delta t) - R(t)}{\Delta t} \neq 0$$

这意味着在任意时刻 t，河流都在“逃离”它自身。 $\square$

2.4 结论

克拉底鲁的命题在数学上等价于断言：

> *若状态函数 $R(t)$ 严格单调变化（Strictly Monotonic）或无驻点，则对于任意 $\delta > 0$，集合 $\{R(t) \mid t \in [t_0, t_0 + \delta]\}$ 包含无穷多个不同的元素。*

因此，当你的脚后跟落地时（$t_0 + \delta$），脚尖触碰的那条河（$R(t_0)$）在物理状态空间中已经不复存在了。你踏入的不是“一条”河，而是“无穷多条”河的集合序列。