# 《微积分A1》第十一讲

教师 杨利军

清华大学数学科学系

2025年10月27日

# 回忆: Rolle 中值定理

**Theorem**

定理 [Michel Rolle, 1652-1719]：设函数 $f$ 满足如下三个条件:

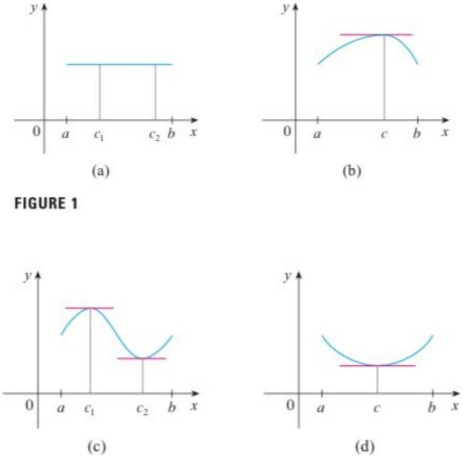
(i) $f$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续;

(ii) $f$ 在开区间 $(a, b)$ 上可导;

(iii) $f(a) = f(b)$,

则存在一点 $c \in (a, b)$，使得 $f'(c) = 0$.

# Rolle 定理图示



## Rolle 定理的应用，例一

**Example**

例一：证明方程 $x^2 = x\sin x + \cos x$ 在实轴上恰有两个实根.

证：记 $f(x) = x^2 - x\sin x - \cos x$，则 $f(-\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2} > 0$，$f(0) = -1$，$f(\frac{\pi}{2}) = f(-\frac{\pi}{2}) > 0$. 由介值定理知 $f$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 和 $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ 上各至少有一个零点. 故方程 $x^2 = x\sin x + \cos x$ 在实轴上至少有两个不同的实根. 假设 $f$ 有三个零点，则 $f'(x)$ 至少有两个零点. 但是

$$f'(x) = 2x - \sin x - x\cos x + \sin x = x(2 - \cos x)$$

在实轴上仅有一个零点. 因此方程 $x^2 = x\sin x + \cos x$ 在实轴上恰有两个不同的实根. 证毕.

# 例二

**Example**

例二: 证明方程 $4ax^3+3bx^2+2cx=a+b+c$ 在区间 $(0,1)$ 上至少存在一个实根.

证: 将方程改写为 $4ax^3+3bx^2+2cx-(a+b+c)=0$. 观察知左端是函数

$$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2-(a+b+c)x$$

的导数, 即 $f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx-(a+b+c)$. 由于 $f(0)=0$, $f(1)$ $=a+b+c-(a+b+c)=0$, 故根据 Rolle 定理知, 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)=0$, 即方程 $4ax^3+3bx^2+2cx=a+b+c$ 在区间 $(0,1)$ 上至少存在一个实根. 证毕.

# 例三

**Example**

例: 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续, 在开区间 $(0,1)$ 上可导. 进一步假设 $f(0)=f(1)=0$, $f(\frac{1}{2})=1$, 证明存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)=1$.

证: 考虑函数 $F(x)=f(x)-x$. 要证存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)=1$, 只要证 $F'(x)$ 在 $(0,1)$ 上有零点即可. 由假设条件知 $F(0)=0$, $F(\frac{1}{2})=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0$, $F(1)=0-1<0$. 由介值定理知存在 $x_0\in(\frac{1}{2},1)$, 使得 $F(x_0)=0$. 再对函数 $F(x)$ 在闭区间 $[0,x_0]$ 上应用 Rolle 定理, 知存在 $\xi\in(0,x_0)$, 使得 $F'(\xi)=0$, 此即 $f'(\xi)=1$. 证毕.

**Theorem**

定理 [Joseph-Louis Lagrange, 1736-1813]: 设函数 $f(x)$ 满足如下两个条件

(i) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续;

(ii) 在开区间 $(a,b)$ 上可导,

则存在点 $c \in (a,b)$, 使得 $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$, 或等价地

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

注: 当 $f(a)=f(b)$ 时, Lagrange 中值定理就是 Rolle 定理. 因此 Lagrange 中值定理可看作 Rolle 定理的推广.

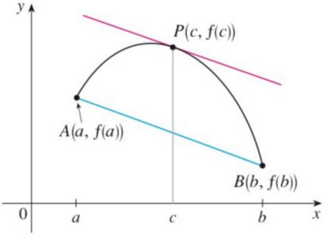



FIGURE 3

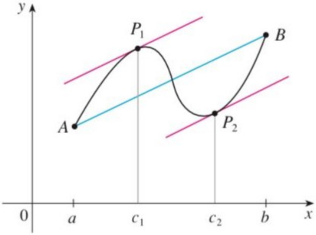
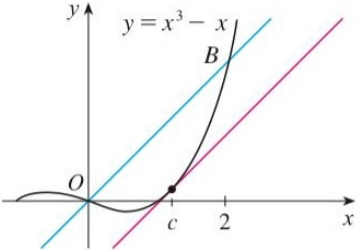



FIGURE 4

**Example**

例一: 考虑 $f(x) = x^3 - x$. 显然 $f$ 在 $\mathbb{R}$ 上处处可导. 对 $f$ 和区间 $[0, 2]$ 应用 Lagrange 中值定理知存在 $c \in (0, 2)$, 使得 $f(2) - f(0) = f'(c)(2 - 0)$, 即 $2^3 - 2 = (3c^2 - 1)(2 - 0)$ 即 $6 = 6c^2 - 2$. 解之得 $c^2 = \frac{4}{3}$, 即 $c = \frac{2}{\sqrt{3}}$.



**Example**

例二: 设 $f(x)$ 在实轴上可导. 假设 $f(0) = -3$, 且 $f'(x) \le 5$, $\forall x \in \mathbb{R}$. 问 $f(2)$ 可能有多大?

解: 在区间 $[0, 2]$ 上应用 Lagrange 中值定理得 $f(2) - f(0) = f'(c)(2 - 0)$, 即

$$f(2) = f(0) + f'(c)(2 - 0) \le -3 + 5 \times 2 = 7.$$

这表明 $f(2)$ 的值不可能超过 7.

Example

例三: 设 $0 < a < b$, 证明

$$\frac{b-a}{b} < \ln\frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}.$$

证明: 根据 Lagrange 中值定理得

$$\ln\frac{b}{a} = \ln b - \ln a = \left(\ln x\right)'_{x=c}(b-a) = \frac{b-a}{c},$$

其中 $c \in (a,b)$. 于是

$$\frac{b-a}{b} < \frac{b-a}{c} < \frac{b-a}{a}.$$

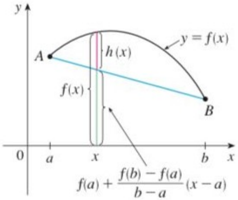
由此即得结论. 证毕.

证：两点 $(a, f(a))$，$(b, f(b))$ 确定的直线方程为 $y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$.

令

$$h(x) \overset{\text{def}}{=} f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

函数 $h(x)$ 的几何意义如图所示.




不难验证函数 $h(x)$ 满足 Rolle 定理的条件. 特别 $h(a) = 0 = h(b)$. 于是存在 $c \in (a, b)$，使得 $0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$，即 $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. 证毕. □

# 推论一

**Corollary**

推论一：设函数 $f$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 $(a,b)$ 上可导，则 $f$ 为常数函数 $\Longleftrightarrow f'(x) \equiv 0,\ \forall x \in (a,b)$.

**Proof.**

证明：$\Rightarrow$：已证常数函数的导数恒为零.

$\Leftarrow$：设 $f'(x) \equiv 0,\ \forall x \in (a,b)$. 要证 $f(x)$ 为常数函数. 对于任意两点 $x_1, x_2 \in [a,b]$，由 Lagrange 中值定理得 $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) = 0$，其中 $\xi \in (x_1, x_2)$. 这说明 $f(x_2) = f(x_1)$，即 $f(x)$ 为常数函数. 命题得证. $\square$

# 推论二

**Corollary**

推论二: 设函数 $f, g$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 $(a, b)$ 上可导. 若 $f'(x) \equiv g'(x)$, $\forall x \in (a, b)$, 则 $g(x) \equiv f(x) + C$, 其中 $C$ 为常数. 换言之, 导数恒等的函数彼此相差一个常数.

# Lagrange 中值定理的另一种表现形式

Lagrange 中值定理断言，存在 $c \in (a,b)$，使得

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a),$$

其中不确定点 $c$ 可写作 $c = a + \theta(b-a)$，$\theta \in (0,1)$，即不确定点 $c$ 转化为另一个不确定数 $\theta \in (0,1)$. 对函数 $f(x)$ 在区间 $[x_0, x_0 + \triangle x]$ 上应用 Lagrange 中值定理，则可得到这个定理的一个常用的形式

$$\frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x} = f'(x_0 + \theta \triangle x), \quad \theta \in (0,1)$$

$$\text{或} \quad f(x_0 + \triangle x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta \triangle x)\triangle x.$$

这个等式可与微分式 $f(x_0 + \triangle x) - f(x_0) = f'(x_0)\triangle x + o(\triangle x)$ 相比较.

# 导数非负(非正) $\Rightarrow$ 函数单调增(减)

**Theorem**

定理: 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 $(a,b)$ 上可导. 若对任意 $x \in (a,b)$, $f'(x) \geq 0 (\leq 0)$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增(减).

**Proof.**

只证括号外情形: 对任意 $x_1, x_2 \in [a,b]$, $x_1 < x_2$, 应用 Lagrange 中值定理得 $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \geq 0$, $\xi \in (x_1, x_2)$. 故 $f(x_2) \geq f(x_1)$. 因此 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增. 对于括号里的情形 $f'(x) \leq 0$, 证明完全类似. □

注: 当导数条件加强为 $f'(x) > 0 (< 0)$, $\forall x \in (a,b)$, 则结论也加强为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调增(严格单调减).

**Example**

例: 证明 $\ln(1+x) < x,\ \forall x > -1,\ x \neq 0.$

证: 令 $F(x) = x - \ln(1+x)$, 则

$$F'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}.$$

(i) 当 $x > 0$ 时, $F'(x) > 0$, 于是 $F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格单调增. 因此 $0 = F(0) < F(x)$, 此即 $\ln(1+x) < x$.

(ii) 当 $x \in (-1, 0)$ 时, $F'(x) < 0$, 于是 $F(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上严格单调减. 因此 $0 = F(0) < F(x)$, 故 $\ln(1+x) < x$. 此即结论成立. 证毕.

**Example**

例二: 证明函数 $\frac{\ln x}{x}$ 在开区间 $(e, +\infty)$ 上严格单调减.

证: 考虑函数的导数

$$\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1-\ln x}{x^2} < 0, \quad \forall x \in (e, +\infty)$$

因此函数 $\frac{\ln x}{x}$ 在开区间 $(e, +\infty)$ 上严格单调减. □

# 例三

例三: 证明恒等式 $2\arctan x + \arcsin\frac{2x}{1+x^2} = \pi, \forall x \in (1, +\infty)$.

证: 对上述恒等式左边的函数求导得

$$\left(2\arctan x + \arcsin\frac{2x}{1+x^2}\right)'$$

$$= \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{2x}{1+x^2})^2}}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)'$$

$$= \frac{2}{1+x^2} + \frac{1+x^2}{\sqrt{(1+x^2)^2-4x^2}}\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{2}{1+x^2} - \frac{2}{1+x^2} = 0, \quad \forall x \in (1, +\infty).$$

故函数恒为常数，即 $2\arctan x + \arcsin\frac{2x}{1+x^2} = C$. 令 $x \to +\infty$ 可知 $C = \pi$.

令 $x = 1$ 也可得同样的结论. 命题得证.

例四：证明

$$\frac{2}{2x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right), \quad \forall x > 0.$$

证：记 $f(x) = \frac{2}{2x+1} - \ln(1+\frac{1}{x})$，则

$$f'(x) = \frac{-4}{(2x+1)^2} - \frac{1}{1+x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{(2x+1)^2 x(1+x)} > 0, \quad \forall x > 0.$$

这表明函数 $f(x)$ 在开区间 $(0,+\infty)$ 上严格单调增. 由于

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{2x+1} - \ln\left[1+\frac{1}{x}\right]\right) = 0,$$

故可断言 $f(x) < 0$, $\forall x \in (0,+\infty)$. 此即 $\frac{2}{2x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$, $\forall x > 0$.

断言证明：反证. 假设存在 $x_0 > 0$，使得 $f(x_0) \geq 0$. 于是 $f(x_0+1) > f(x_0) \geq 0$. 因此对于 $\forall x > x_0+1$, $f(x) > f(x_0+1) > 0$. 此与 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ 矛盾. 故断言得证. $\square$

例五: 设 $b > a > 1$, 证明 $\frac{b}{a} > \frac{b^a}{a^b}$.

证:

$$\frac{b}{a} > \frac{b^a}{a^b} \iff \ln b - \ln a > a\ln b - b\ln a$$

$$\iff (b-1)\ln a > (a-1)\ln b$$

$$\iff \frac{\ln a}{a-1} > \frac{\ln b}{b-1}.$$

考虑函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$, $x > 1$. 对 $f(x)$ 求导得

$$f'(x) = \frac{1}{x(x-1)} - \frac{\ln x}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x\ln x}{x(x-1)^2}.$$

# 例五，续

再记 $g(x)=x-1-x\ln x$，则 $g(1)=0$ 且 $g'(x)=-\ln x<0$, $\forall x>1$. 故 $g(x)$ 严格单调减，从而 $g(x)<g(1)=0$, $\forall x>1$. 于是 $f'(x)=\frac{g(x)}{x(x-1)}<0$, $\forall x>1$. 可见 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上严格单调减. 因此 $f(a)>f(b)$, $b>a>1$. 此即

$$\frac{\ln a}{a-1}>\frac{\ln b}{b-1}.$$

根据前述的等价性可知不等式 $\frac{b}{a}>\frac{b^a}{a^b}$ 成立. 证毕.

**Theorem**

定理: 设函数 $f$ 和 $g$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 $(a,b)$ 上可导, 且 $g'(x) \neq 0,\ \forall x \in (a,b)$, 则存在一点 $c \in (a,b)$, 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

# 定理证明

**Proof.**

证明: 对函数 f 和 g 分别应用 Lagrange 定理得

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a),$$

$$g(b) - g(a) = g'(c)(b - a).$$

将上述两个式子相除即得结论. $\square$

找出上述证明的漏洞.

Proof.

证: 令 $F(x) = f(x) - f(a) - \lambda\big[g(x) - g(a)\big]$, 其中

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)},$$

则 $F(a) = 0 = F(b)$. 根据 Rolle 定理知存在一点 $c \in (a, b)$, 使得 $F'(c) = 0$.

此即 $f'(c) - \lambda g'(c) = 0$, 即

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

$\square$

# Cauchy 定理的另一证明

另证: 由假设 $g'(x)\neq 0$, $\forall x\in(a,b)$, 以及 Darboux 定理(导函数具有介值性质, 稍后介绍)可知, $g'(x)$ 保持定号. 这说明 $g(x)$ 严格单调, 从而有反函数. 不妨设 $y=g(x)$ 严格递增, 其反函数记作 $x=g^{-1}(y)$, $y\in[A,B]$, $A=g(a)$, $B=g(b)$. 对 $F(y)=f(g^{-1}(y))$ 在 $[A,B]$ 上应用 Lagrange 中值定理得

$$F(B)-F(A)=F'(\eta)(B-A),\quad \eta\in(A,B).\quad (*)$$

注意 $F(A)=f(g^{-1}(A))=f(a)$, 同理 $F(B)=f(b)$. 再根据复合函数求导的链规则, 以及反函数导数定理知

$$F'(y)=[f(g^{-1})(y)]'=f'(x)[g^{-1}(y)]'=\frac{f'(x)}{g'(x)},\quad x=g^{-1}(y).$$

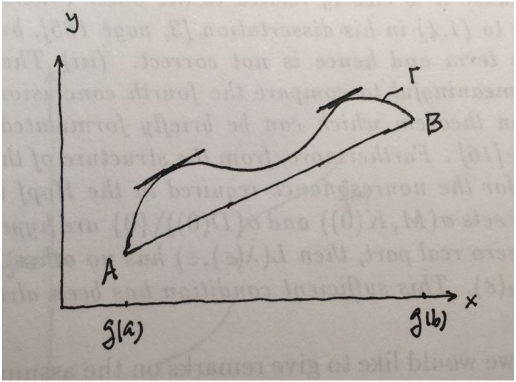
记 $c=g^{-1}(\eta)$, $\eta=g(c)$, 则由式(*)得

$$f(b)-f(a)=\frac{f'(c)}{g'(c)}[g(b)-g(a)].$$

这就得到 Cauchy 中值定理.

# Cauchy 中值定理的几何解释

考虑平面曲线 $\Gamma$: $x = g(t)$, $y = f(t)$, $t \in [a, b]$. 在 Cauchy 定理的条件下，曲线 $\Gamma$ 上必存在点 $P = (g(c)), f(c))$, $c \in (a, b)$, 使得点 $P$ 处的切线平行于直线 $\overline{AB}$, 其中 $A = (g(a), f(a))$, $B = (g(b)), f(b))$. 如图所示.



# 应用例子

**Example**

例: 设 $b > a > 0$, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 $(a, b)$ 上可导, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $2\xi[f(b) - f(a)] = (b^2 - a^2)f'(\xi)$.

证: 将要证明的等式改写作

$$\frac{f(b) - f(a)}{b^2 - a^2} = \frac{f'(\xi)}{2\xi}.$$

将 Cauchy 中值定理应用于函数 $f(x)$ 和 $g(x) = x^2$ 即可得到结论.

# L'Hospital 法则, $\frac{0}{0}$ 型

**Theorem**

<u>定理</u>: 假设 (i) $f(x)$, $g(x)$ 在区间 $(a, a+h)$ 上可导,

(ii) $\lim_{x\to a^+} f(x) = 0$, $\lim_{x\to a^+} g(x) = 0$,

(iii) $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a, a+h)$,

(iv) $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在, 记作 $A$, 允许 $A = +\infty$ 或 $-\infty$,

则 $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

<u>注</u>: 上述 L'Hospital 法则可与序列情形的 Stolz 定理相比较.

# L'Hospital 法则应用，例一

**Example**

例一：求极限 $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

解：之前我们求过类似的极限，即 $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^2\ln(1+x)}$. 见 Oct11 讲义第38页(课本第55页)。这是 $\frac{0}{0}$ 型极限。注意函数 $\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$ 是偶函数，只需求函数的单侧极限。比如说右极限。以下用 L'Hospital 法则来求之。

$$\frac{\left(\tan x-\sin x\right)'}{(x^3)'}=\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-\cos x}{3x^2}=\frac{1-\cos^3 x}{3x^2\cos^2 x}$$

$$=\frac{1+\cos x+\cos^2 x}{3\cos^2 x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\to\frac{3}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2},\quad x\to 0^+.$$

因此 $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{2}$.

# 例二

## Example

例二: 求 $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

解: 这也是 $\frac{0}{0}$ 型极限. 同样函数 $\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$ 是偶函数. 因此我们只需求右极限.

考虑使用 L'Hospital 法则:

$$\frac{\left(e^x-e^{-x}-2x\right)'}{\left(x-\sin x\right)'}=\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}.$$

导数之比仍为 $\frac{0}{0}$ 型. 继续用 L'Hospital 法则:

$$\frac{\left(e^x+e^{-x}-2\right)'}{\left(1-\cos x\right)'}=\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x},\quad \text{仍为 } \frac{0}{0}.$$

$$\text{继续}\quad \frac{\left(e^x-e^{-x}\right)'}{\left(\sin x\right)'}=\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}\to 2,\quad x\to 0^+.$$

故原函数极限为 $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=2$.

# L'Hospital 法则证明, $\frac{0}{0}$ 型

**Proof.**

证: 令 $f(a)=0$, $g(a)=0$, 则 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,a+h)$ 上连续. 对任意 $x\in(a,a+h)$, 在区间 $[a,x]$ 上应用 Cauchy 中值定理得

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},\quad \xi\in(a,x).$$

令 $x\to a^+$, 则 $\xi\to a$. 于是

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\to A,\quad x\to a^+$$

证毕. $\square$

# 推论

**Corollary**

推论：假设

(i) $f(x)$, $g(x)$ 在 $(a-h, a+h)$ 上连续，在 $(a-h, a+h)\setminus\{a\}$ 上可导，

(ii) $f(a)=0$, $g(a)=0$,

(iii) $g'(x)\neq 0$, $\forall x\in(a-h,a+h)\setminus\{a\}$,

(iv) $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在，记作 $A$，允许 $A=+\infty$ 或 $-\infty$,

则 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=A$.

# 证明

<u>证</u>: 应用 Cauchy 中值定理知, 对 $x \in (a, a+h)$,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \to A, \quad x \to a^+,$$

其中 $\xi \in (a, x)$. 对 $x \in (a-h, a)$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\eta)}{g'(\eta)} \to A, \quad x \to a^-,$$

其中 $\eta \in (x, a)$. 此即函数 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 在点 $x = a$ 处的左右极限均存在且相等. 因此极限 $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$. 证毕.

例：(i) 求 $\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$. (ii) 证明由 $a_{n+1}=\ln(1+a_n)$ 所产生的序列 $\{a_n\}$，其中 $a_1>0$，满足 $na_n\to 2$, $n\to+\infty$.

解(i)：极限 $\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$ 是 $\frac{0}{0}$ 型的. 可用 L'Hospital 法则：

$$\frac{\big(x-\ln(1+x)\big)'}{\big(x\ln(1+x)\big)'}=\frac{1-\frac{1}{1+x}}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}}=\frac{x}{(1+x)\ln(1+x)+x}.$$

上式仍为 $\frac{0}{0}$ 型. 继续使用 L'Hospital 法则：

$$\frac{(x)'}{\Big[(1+x)\ln(1+x)+x\Big]'}=\frac{1}{\ln(1+x)+1+1}\to\frac{1}{2}.$$

因此两次应用 L'Hospital 法则即得 $\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=\frac{1}{2}$.

# 例子，续一

证(ii)．对于 $a_1 > 0$，$a_{n+1} = \ln(1+a_n)$，$\forall n \geq 1$，不难用归纳法证明 $a_n > 0$，$\forall n \geq 1$，且序列 $\{a_n\}$ 严格单调减．(利用不等式 $\ln(1+x) < x$，$\forall x > 0$)．因此序列 $\{a_n\}$ 有极限，记作 $a$．在迭代式 $a_{n+1} = \ln(1+a_n)$ 中，令 $n \to +\infty$ 取极限得 $a = \ln(1+a)$．故 $a = 0$，即 $a_n \downarrow 0$ 严格．为求极限 $\lim_{n\to+\infty} na_n$，考虑用 Stolz 定理．为此将 $na_n$ 表示为 $na_n = \frac{n}{\frac{1}{a_n}}$．由结论(i)得

$$\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_n a_{n+1}} = \frac{a_n - \ln(1+a_n)}{a_n \ln(1+a_n)} \to \frac{1}{2}.$$

于是

$$\frac{n+1-n}{\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}} \to \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

故 $na_n \to 2$．结论(ii)得证．

注：另证结论(ii). 利用结论 $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\to\frac{1}{2}$，并回忆一个结论：若 $b_n\to b$，则 $\frac{b_1+\cdots+b_n}{n}\to b$，得

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_{k+1}}-\frac{1}{a_k}\right)\to\frac{1}{2},\quad n\to+\infty.$$

注意上式左端可表为

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_{k+1}}-\frac{1}{a_k}\right)=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_1}\right)\to\frac{1}{2}.$$

由此可得

$$\frac{1}{na_{n+1}}\to\frac{1}{2}\quad 即\quad na_{n+1}\to 2,\quad n\to+\infty.$$

于是

$$(n+1)a_{n+1}=\frac{n+1}{n}\cdot na_{n+1}\to 1\cdot 2=2,\quad n\to+\infty.$$

结论(ii)得证.

**Theorem**

定理: 假设

(i) $f(x), g(x)$ 在开区间 $(a, a+h)$ 上可导,

(ii) $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, a+h)$,

(iii) $\lim_{x \to a^+} |g(x)| = +\infty$,

(iv) $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在, 记作 A, 允许 $A = +\infty$ 或 $-\infty$,

则 $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

注: 上述结论可以推广到无穷区间情形 $[a, +\infty)$ 和 $(-\infty, b]$. 即当 x 趋于正无穷或负无穷时, 定理中的四个条件均成立, 那么 $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$. 稍后将详细讨论.

# 例一

**Example**

例一: 求 $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\sin 2x}{\ln x}$.

解: 这是 $\frac{*}{\infty}$ 型极限. 应用 L'Hospital 法则:

$$\frac{\left(\ln\sin 2x\right)'}{\left(\ln x\right)'} = \frac{\frac{1}{\sin 2x}\cdot\cos 2x\cdot 2}{\frac{1}{x}} = \cos 2x\cdot\frac{2x}{\sin 2x} \to 1,$$

当 $x\to 0^+$. 因此 $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\sin 2x}{\ln x} = 1$. 解答完毕.

**Example**

例二: 求极限 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^a}$, 其中 $a>0$.

解: 由 $\frac{*}{\infty}$ 型的 L'Hospital 法则得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^a}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\ln x\right)'}{\left(x^a\right)'}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{ax^{a-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{ax^a}=0.$$

解答完毕.

# $\frac{*}{\infty}$ 型 L'Hospital 法则之证明(可忽略)

证: 只证 A 为有限情形. 其他情形证明类似. 要证 $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=A$, 即要证对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得

$$A-\varepsilon<\frac{f(x)}{g(x)}<A+\varepsilon,\quad \forall x\in(a,a+\delta).$$

由假设 $\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$ 可知存在 $\delta_1\in(a,a+h)$, 使得

$$A-\varepsilon<\frac{f'(x)}{g'(x)}<A+\varepsilon,\quad \forall x\in(a,a+\delta_1].$$

记 $c=a+\delta_1$, 则对 $\forall x\in(a,c)$, 由 Cauchy 中值定理得

$$A-\varepsilon<\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}<A+\varepsilon,$$

其中 $\xi\in(a,c)$.

于是对 $\forall x \in (a, c]$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)} \cdot \frac{g(x)-g(c)}{g(x)} + \frac{f(c)}{g(x)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)} \cdot \left(1 - \frac{g(c)}{g(x)}\right) + \frac{f(c)}{g(x)}.$$

由假设 $\lim_{x\to a^+} |g(x)| = +\infty$ 知，存在 $\delta_2 \in (0, \delta_1)$，使得 $|g(c)| < |g(x)|$，$\forall x \in (a, a+\delta_2)$. 于是对任意 $x \in (a, a+\delta_2)$，

$$\frac{f(c)}{g(x)} + (A-\varepsilon)\left(1 - \frac{g(c)}{g(x)}\right) < \frac{f(x)}{g(x)} < (A+\varepsilon)\left(1 - \frac{g(c)}{g(x)}\right) + \frac{f(c)}{g(x)}.$$

将上式中 $(A \pm \varepsilon)(\cdots)$ 拆开得

$$\frac{f(c)-Ag(c)}{g(x)}-\varepsilon\left(1-\frac{g(c)}{g(x)}\right)+A<\frac{f(x)}{g(x)}$$

$$<A+\varepsilon\left(1-\frac{g(c)}{g(x)}\right)+\frac{f(c)-Ag(c)}{g(x)}.$$

再次由假设 $|g(x)|\to+\infty,\ x\to a^+$，存在 $\delta\in(0,\delta_2)$，使得

$$\frac{|g(c)|}{|g(x)|}<\frac{1}{2},\quad \frac{|f(c)-Ag(c)|}{|g(x)|}<\frac{\varepsilon}{2},\quad \forall x\in(a,a+\delta).$$

$$\Rightarrow\quad A-2\varepsilon<\frac{f(x)}{g(x)}<A+2\varepsilon,\quad \forall x\in(a,a+\delta).$$

定理得证. □

**Theorem**

定理: 假设

(i) 函数 $f, g$ 在区间 $(a, +\infty)$ 上可导;

(ii) $f(x) \to 0$ 且 $g(x) \to 0$, $x \to +\infty$;

(iii) $g'(x) \neq 0$, $\forall x > a$;

(iv) $\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$, 允许 $A = +\infty$ 或 $A = -\infty$,

则 $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

**Proof.**

证明大意: 令 $u = \frac{1}{x}$, $\hat{f}(u) = f(\frac{1}{u})$, $\hat{g}(u) = g(\frac{1}{u})$, $u \in (0, \frac{1}{a})$, 这里我们已经假设 $a > 0$. 因为我们考虑 $x \to +\infty$ 时的极限, 故可设 $a > 0$. 于是 $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\hat{f}(u)}{\hat{g}(u)}$. 对 $\frac{\hat{f}(u)}{\hat{g}(u)}$ 的极限, 应用通常的 L'Hospital 法则即可. $\square$

**Example**

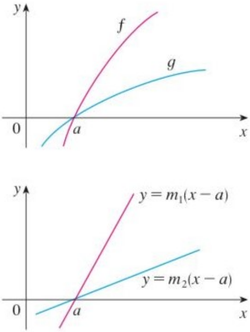
例: 求极限 $\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)$.

解: 将函数写作 $\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}$. 考虑导数的比值

$$\frac{\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\frac{x^2}{1+x^2}\to 1,\quad x\to+\infty.$$

根据上述定理知极限 $\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)=1$.

假设 $f(x)$, $g(x)$ 在区间 $(a-h, a+h)$ 上连续可微, 且 $f(a)=0$, $g(a)=0$, $g'(a)\neq 0$, 则 $f(x)=m_1(x-a)+o(x-a)$, $g(x)=m_2(x-a)+o(x-a)$. 如图所示.



# L'Hospital 法则为什么成立，续

于是

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{m_1(x-a)+o(x-a)}{m_2(x-a)+o(x-a)}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{m_1+\frac{o(x-a)}{x-a}}{m_2+\frac{o(x-a)}{x-a}}=\frac{m_1}{m_2}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

故 **L'Hospital 法则当然应该成立.**

# L'Hospital 法则为什么成立？另一个解释

假设 $f(x)$, $g(x)$ 在区间 $(a-h, a+h)$ 上连续可微，且 $f(a)=0$, $g(a)=0$, $g'(a)\neq 0$, 那么

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}=\frac{\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}.$$

例：设 $a>0$，求极限

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{2a^3x-x^4}-a\sqrt[3]{a^2x}}{a-\sqrt[4]{ax^3}}.$$

解：

$$\frac{\left(\sqrt{2a^3x-x^4}-a\sqrt[3]{a^2x}\right)'}{\left(a-\sqrt[4]{ax^3}\right)'}=\frac{\frac{1}{2}(2a^3x-x^4)^{-\frac{1}{2}}(2a^3-4x^3)-\frac{1}{3}a^{\frac{5}{3}}x^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{3}{4}a^{\frac{1}{4}}x^{-\frac{1}{4}}}$$

$$\to\frac{\frac{1}{2}(a^4)^{-\frac{1}{2}}(-2a^3)-\frac{1}{3}a^{\frac{5}{3}}a^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{3}{4}a^{\frac{1}{4}}a^{-\frac{1}{4}}}=-\frac{4}{3}\left(-a-\frac{1}{3}a\right)$$

$$=\frac{16a}{9},\quad x\to a.\quad \text{故所求极限为}\ \frac{16a}{9}.$$

# 例子为何特别?

1696 年 L'Hospital 出版了他的微积分教科书 Analyse des Infiniment Petits (无穷小分析). 这是本书应用 L'Hospital 法则, 计算极限的第一个例子. 这本教科书封面如图所示.

例: 当 $x \to +\infty$ 时, 可依照无穷大量级, 由小到大将如下函数 (无穷大量) 排列为 $\ln x$, $x^a$, $e^x$, $x^x$, 即后一个函数是前一个函数的高阶无穷大, 其中 $a > 0$. 证明如下.

(i) $x^a$ 是 $\ln x$ 的高阶无穷大, 因为

$$\lim \frac{\ln x}{x^a} = \lim \frac{\frac{1}{x}}{ax^{a-1}} = \lim \frac{1}{ax^a} = 0.$$

(ii) $e^x$ 是 $x^a$ 的高阶无穷大. 理由如下. 假设 $n-1 \le a < n$, 则

$$\lim \frac{x^a}{e^x} = \lim \frac{ax^{a-1}}{e^x} = \cdots = a(a-1)\cdots(a-n+1) \lim \frac{x^{a-n}}{e^x} = 0.$$

(iii) $x^x$ 是 $e^x$ 的高阶无穷大, 因为

$$\lim \frac{e^x}{x^x} = \lim e^{x - x\ln x} = \lim e^{x(1-\ln x)} = 0.$$

# L'Hospital 法则应用，更多例子

例一：考虑 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\cot x}{x}\right)$.

解：这是 $\infty-\infty$ 型的极限．将其转化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{*}{\infty}$ 型的极限．

$$\frac{1}{x^2}-\frac{\cot x}{x}=\frac{1}{x^2}-\frac{\cos x}{x\sin x}=\frac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x}$$

上式最右边的分式是 $\frac{0}{0}$ 型的不定式．故可以使用 L'Hospital 法则．但为了简化计算，可按如下方式将分母中的因子 $\sin x$ 用 $x$ 替换：

$$\frac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x}=\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}.$$

以下用 L'Hospital 法则求极限 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}$：

$$\frac{[\sin x-x\cos x]'}{[x^3]'}=\frac{\cos x-\cos x+x\sin x}{3x^2}$$

$$=\frac{x\sin x}{3x^2}=\frac{1}{3}\frac{\sin x}{x}\to\frac{1}{3},\quad x\to 0.$$

因此极限 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\cot x}{x}\right)=\frac{1}{3}$．解答完毕．

# 例二

例二: 求极限 $\lim_{x\to0^+} x^x$.

解: 这是 $0^0$ 型极限. 将 $x^x$ 写作 $x^x = e^{x\ln x}$. 再将 $x\ln x$ 写作 $x\ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$. 这是 $\frac{*}{\infty}$ 型极限. 可用 L'Hospital 法则求其极限.

$$\frac{[\ln x]'}{[\frac{1}{x}]'} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = -x \to 0, \quad x \to 0^+.$$

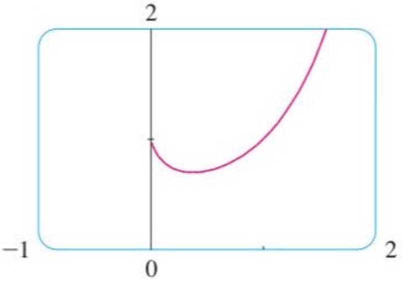
$$\text{故} \quad \lim_{x\to0^+} x^x = \lim_{x\to0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim_{x\to0^+} x\ln x} = e^0 = 1.$$

另解: 也可不用 L'Hospital 法则, 直接求极限 $\lim_{x\to0^+} x\ln x$.

$$x\ln x = \frac{-\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = -\frac{\ln y}{y} \to 0, \quad y \to +\infty,$$

其中 $y = \frac{1}{x}$. 因此原极限为 $\lim_{x\to0^+} x^x = 1$. 解答完毕.

The graph of the function $y = x^x$, $x > 0$, is shown in Figure 7. Notice that although $0^0$ is not defined, the values of the function approach 1 as $x \to 0^+$. This confirms the result of Example 10.



**例三**: 求极限 $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$.

**解**: 这是 $\infty-\infty$ 型极限. 化为 $\frac{0}{0}$ 型后, 可多次应用 L'Hospital 法则求得极限.

通分得

$$\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}=\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}$$

$$\frac{(x\ln x-x+1)'}{\left[(x-1)\ln x\right]'}=\frac{\ln x}{\frac{x-1}{x}+\ln x}=\frac{x\ln x}{x-1+x\ln x}$$

$$\frac{(x\ln x)'}{(x-1+x\ln x)'}=\frac{\ln x+1}{1+1+\ln x}\to\frac{1}{2},\quad x\to 1.$$

故原极限为 $\frac{1}{2}$.

例四：求极限 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\tan x)^{\frac{\pi}{2}-x}$.

解：这是 $\infty^0$ 型极限．先做变换 $y=\frac{\pi}{2}-x$，则当 $x\to\frac{\pi}{2}^-$ 时，$y\to 0^+$．于是

$$(\tan x)^{\frac{\pi}{2}-x}=\left[\tan\left(\frac{\pi}{2}-y\right)\right]^y=(\cot y)^y=\left(\frac{\cos y}{\sin y}\right)^y$$

令 $z=\left(\frac{\cos y}{\sin y}\right)^y$，则

$$\ln z=y(\ln\cos y-\ln\sin y)=\frac{\ln\cos y-\ln\sin y}{\frac{1}{y}}.$$

这是 $\frac{*}{\infty}$ 型不定式．可用 L'Hospital 法则：

$$\frac{(\ln\cos y-\ln\sin y)'}{\left(\frac{1}{y}\right)'}=\frac{-\frac{\sin y}{\cos y}-\frac{\cos y}{\sin y}}{-\frac{1}{y^2}}=\frac{y^2}{\sin y\cos y}\to 0,\quad y\to 0^+.$$

因此极限

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\tan x)^{\frac{\pi}{2}-x}=\lim_{y\to 0^+}\left(\frac{\cos y}{\sin y}\right)^y=\lim_{y\to 0^+}e^{\ln z}\to e^0=1.\quad \#$$

# 例五

**Example**

例五: 设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上可导, $\lim_{x\to+\infty}[f'(x)+f(x)]=A$, 证明 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=A$ 且 $\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

证明: 将 $f(x)$ 写作 $f(x)=\frac{e^xf(x)}{e^x}$, 对后者可应用 L'Hospital 求极限:

$$\frac{\left[e^xf(x)\right]'}{(e^x)'}=\frac{e^x\left[f'(x)+f(x)\right]}{e^x}=f'(x)+f(x)\to A.$$

因此 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=A$. 进一步得 $f'(x)=[f'(x)+f(x)]-f(x)\to A-A$ $=0$. □

**Example**

例六: 设 $\varepsilon > 0$, 求极限 $\lim_{x\to 0^+} x^\varepsilon \ln x$

解:

$$\lim x^\varepsilon \ln x = \lim \frac{\ln x}{x^{-\varepsilon}} = \lim \frac{\frac{1}{x}}{-\varepsilon x^{-\varepsilon-1}} = \lim \frac{x^\varepsilon}{-\varepsilon} = 0.$$

注: 上述极限 $\lim_{x\to 0^+} x^\varepsilon \ln x = 0$ 可与极限 $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\varepsilon} = 0$ 相比较. 粗略地说, 对于任意 $\varepsilon > 0$,

(i) 当 $x \to +\infty$, $\ln x$ 是 $x^\varepsilon$ 的低阶无穷大;

(ii) 当 $x \to 0^+$, $\ln x$ 是 $\frac{1}{x^\varepsilon}$ 的低阶无穷大.

例七：求极限 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

解：记 $y=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$，则

$$\lim \ln y=\lim\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x^2}=\lim\frac{\ln|\sin x|-\ln|x|}{x^2}$$

$$=\lim\frac{\left(\ln|\sin x|-\ln|x|\right)'}{(x^2)'}=\lim\frac{\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}}{2x}$$

$$=\lim\frac{x\cos x-\sin x}{2x^2\sin x}=\lim\frac{x}{2\sin x}\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}$$

$$=\frac{1}{2}\lim\frac{\left(x\cos x-\sin x\right)'}{(x^3)'}=\frac{1}{2}\lim\frac{-x\sin x}{3x^2}=-\frac{1}{6}.$$

因此原极限为 $e^{-1/6}$.　　#

# 慎用 L'Hospital 法则！

**一. L'Hospital 法则不能用于非不定式极限**

**例:** 极限 $\lim_{x\to 1}\frac{x}{1+x}=\frac{1}{2}$. 这是正常极限，非不定式情形. 若用 L'Hospital 法则，则得到错误的结论

$$\frac{[x]'}{[1+x]'}=\frac{1}{1}\to 1,\quad x\to 1.$$

**二. 使用 L'Hospital 法则可能出现死循环.**

**例:**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\frac{1}{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}=\lim\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$$

$$=\lim\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{1}=\lim\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\qquad \text{死循环!}$$

实际上无需使用L'Hospital 法则就可求出极限为 1.

# 慎用 L'Hospital 法则，续

三. 极限 $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在 $\not\Rightarrow$ 极限 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ 不存在.

例: 极限 $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{2x-\sin x}$ 存在且等于 $\frac{1}{2}$. 但

$$\frac{(x+\sin x)'}{(2x-\sin x)'}=\frac{1+\cos x}{2-\cos x}\quad \text{极限不存在,}\quad x\to+\infty.$$

# Oct 27 作业，共十二大题

习题一：课本第87页习题3.3题1：求下列函数的二阶导数：

(1) $y = e^{x^2}$;

(2) $y = \frac{x-1}{(x+1)^2}$;

(3) $y = x(\arcsin x)^2$;

(4) $y = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$;

(5) $y = x\left[\sin(\ln x) + \cos(\ln x)\right]$;

(6) $y = \ln f(x)$，其中 $f(x)$ 为二阶可导.

习题二：课本第87页习题3.3题2：设 $f(x)$ 三阶可导，求 $y''$, $y'''$

(1) $y = f(x^2)$;

(2) $y = f(e^x)$;

(3) $y = f(\ln x)$

# 作业，续一

习题三：课本第87-88页习题3.3题3：求下列函数指定阶的导数：

(1) $y=\sqrt{x}$，求 $y^{(10)}$；

(2) $y=e^{x}x^{4}$，求 $y^{(4)}$；

(3) $y=\frac{\ln x}{x}$，求 $y^{(5)}$；

(4) $y=x^{2}\sin(2x)$，求 $y^{(50)}$；

(5) $y=x\sinh(x)$，求 $y^{(100)}$；

(6) $y=\frac{1}{2-x-x^{2}}$，求 $y^{(20)}$；

(7) $y=e^{ax}\sin(bx)$，求 $y^{(n)}$；

(8) $y=e^{ax}\cos(bx)$，求 $y^{(n)}$；

(9) $y=x^{3}e^{x}$，求 $y^{(n)}$；

(10) $y=\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$，求 $y^{(n)}$.

# 作业，续二

习题四：课本第87-88页习题3.3题4：设可导函数 $y(x)$ 由下列参数方程确定，求 $y''(x)$.

(1) $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$;

(2) $x = e^{2t}\cos^2 t,\ y = e^{2t}\sin^2 t$;

(3) $x = f'(t),\ y = tf'(t) - f(t)$，其中 $f(t)$ 为三阶可导且 $f''(t) \neq 0$.

习题五：课本第87-88页习题3.3题5(1)(3)：求下列隐函数的二阶导数

(1) $e^y + xy - e = 0$,

(3) $y - 2x = (x - y)\ln(x - y)$.

习题六：课本第87-88页习题3.3题6：设 $f(x) = \arctan x$. 证明对任意正整数 $n$，成立

$$(1 + x^2)f^{(n+2)}(x) + 2(n + 1)xf^{(n+1)}(x) + n(n + 1)f^{(n)}(x) = 0.$$

习题七：课本第87-88页习题3.3题7：设 $f(x)=(\arcsin x)^2$. 证明对任意正整数 $n$，成立

$$(1-x^2)f^{(n+2)}(x)-(2n+1)xf^{(n+1)}(x)-n^2f^{(n)}(x)=0,$$

并求 $f^{(n)}(0)$.

习题八：课本第94页习题4.1题1：设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 上二阶可导，且存在一点 $c\in(a,b)$，使得 $f(a)=f(c)=f(b)=0$，证明存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=0$.

习题九：课本第94页习题4.1题2(有修改)：若多项式 $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$ 的系数满足条件

$$\frac{a_n}{n+1}+\frac{a_{n-1}}{n}+\cdots+\frac{a_1}{2}+a_0=0,$$

证明多项式 $p(x)$ 在开区间 $(0,1)$ 上内有一个零点.

习题十：课本第94页习题4.1题3：设函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有 $n$ 阶导数，设 $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ $(a_n \neq 0)$ 为 $n$ 次多项式. 若存在 $n+1$ 个互异的点 $x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+1}$，使得 $f(x_j) = p(x_j)$，$j = 1, 2, \cdots, n+1$，证明存在一点 $\xi \in \mathbb{R}$，使得 $a_n = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$.

习题十一：课本第94页习题4.1题4：若函数 $f(x)$ 在一个开区间 $J$ 上的 $n$ 阶导数恒为零，证明 $f(x)$ 为一多项式，且次数至多为 $n-1$ 次.

习题十二：课本第94页习题4.1题5：设函数 $f(x)$ 在区间 $(a, b)$ 上满足条件 $|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|^2$, $\forall x, y \in (a, b)$，其中 $M$ 为一个正常数. 证明 $f(x)$ 为常数函数.