Reference Solution

TA: 林漓尽致 *Assignment 9-1*

《线性代数与几何-上》习题 4: 15,17,20,21

习题 4.15 设 $\mathbf{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,$\mathbf{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵,$m>n$. 证明:$|\mathbf{AB}|=0$.

解答: 由 $m>n$ 得 $\exists\mathbf{x}\in\mathbb{R}^m$ 使 $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ 且 $\mathbf{Bx}=\mathbf{0}$. 由 $\mathbf{ABx}=\mathbf{0}$ 得 $\mathbf{AB}$ 不可逆, 故 $|\mathbf{AB}|=0$.

习题 4.17 证明: 任意秩为 r 的矩阵可以表示成 r 个秩为 1 的矩阵之和, 但不能表示成少于 r 个秩为 1 的矩阵之和.

解答: 令 $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 使得 $\operatorname{rank}(\mathbf{A})=r$. 于是根据相抵标准形存在 $\mathbf{B}\in\mathbb{R}^{m\times m}$ 和 $\mathbf{C}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 使得 $\mathbf{A}=\mathbf{B}(\sum\limits_{i=1}^{r}e_ie_i^T)\mathbf{C}$. 故分解 $\mathbf{A}=\sum\limits_{i=1}^{r}\mathbf{B}e_ie_i^T\mathbf{C}$ 即为所求. 现假设 $\mathbf{A}=\sum\limits_{i=1}^{r-1}\mathbf{D}_i$, 其中 $\operatorname{rank}(\mathbf{D}_i)=1$. 则由之前讨论得 $\exists\mathbf{x}_i\in\mathbb{R}^m,\mathbf{y}_i\in\mathbb{R}^n$ 使得 $\mathbf{D}_i=\mathbf{x}_i\mathbf{y}_i^T(1\leq i\leq r-1)$. 则 $\mathbf{A}=\sum\limits_{i=1}^{r-1}\mathbf{x}_i\mathbf{y}_i^T=\sum\limits_{i=1}^{r-1}(\mathbf{x}_ie_i^T)\sum\limits_{i=1}^{r-1}(e_i\mathbf{y}_i^T)$; 此时由 $\operatorname{rank}(\sum\limits_{i=1}^{r-1}\mathbf{x}_ie_i^T)\leq r-1$ 得 $\operatorname{rank}(\mathbf{A})\leq r-1$, 矛盾. 故 $\mathbf{A}$ 无法分解为少于 r 个秩为 1 的矩阵之和.

习题 4.20 如 $\mathbf{A}$ 是 n 阶幂等矩阵, 即 $\mathbf{A}^2=\mathbf{A}$, 证明:$\operatorname{rank}(\mathbf{A})+\operatorname{rank}(\mathbf{A}-\mathbf{I})=n$.

解答:

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(\mathbf{A})+\operatorname{rank}(\mathbf{A}-\mathbf{I})=&\operatorname{rank}\left(\begin{pmatrix}\mathbf{A}&0\\0&\mathbf{A}-\mathbf{I}\end{pmatrix}\right)\\=&\operatorname{rank}\left(\begin{pmatrix}\mathbf{I}&\mathbf{A}\\0&\mathbf{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{I}&0\\-\mathbf{I}&\mathbf{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{A}&0\\0&\mathbf{A}-\mathbf{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{I}&\mathbf{I}\\0&\mathbf{I}\end{pmatrix}\right)\\=&\operatorname{rank}\left(\begin{pmatrix}0&0\\-\mathbf{A}&-\mathbf{I}\end{pmatrix}\right)\\=&n.\end{aligned}$$

习题 4.21 如 $\mathbf{A}$ 是 n 阶对合阵, 即 $\mathbf{A}^2=\mathbf{I}$, 证明:$\operatorname{rank}(\mathbf{A}+\mathbf{I})+\operatorname{rank}(\mathbf{A}-\mathbf{I})=n$.

解答:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rank}(\mathbf{A}+\mathbf{I})+\operatorname{rank}(\mathbf{A}-\mathbf{I}) =&\operatorname{rank}\left(\begin{pmatrix}\mathbf{A}+\mathbf{I} & 0\\ 0 & \mathbf{A}-\mathbf{I}\end{pmatrix}\right)\\
=&\operatorname{rank}\left(\begin{pmatrix}\mathbf{I} & 0\\ (\mathbf{I}-\mathbf{A})/2 & \mathbf{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{I} & -\mathbf{I}\\ 0 & \mathbf{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{A}+\mathbf{I} & 0\\ 0 & \mathbf{A}-\mathbf{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{I}\\ 0 & \mathbf{I}\end{pmatrix}\right)\\
=&\operatorname{rank}\left(\begin{pmatrix}\mathbf{A}+\mathbf{I} & 2\mathbf{I}\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)\\
=&n.
\end{aligned}
$$

《线性代数入门》习题 2.3: 20,21,22,23(1,2,3)

习题 2.3.20 多项式 $f(x)$ 满足 $f(0)=0$. 求证: 对任意方阵 A, 都有 $\operatorname{rank}(f(A))\le\operatorname{rank}(A)$.

解答: 由 $f(0)=0$ 得存在多项式 $g(x)$ 使得 $f(x)=xg(x)$. 于是 $\operatorname{rank}(f(A))=\operatorname{rank}(Ag(A))\le\operatorname{rank}(A)$.

习题 2.3.21

1. 证明反对称矩阵的秩不能是 1.
2. 对反对称矩阵 A, 去掉首行首列得到矩阵 B. 求证:B 也是反对称矩阵, 且 $\operatorname{rank}(B)$ 等于 $\operatorname{rank}(A)$ 或 $\operatorname{rank}(A)-2$.
3. 证明反对称矩阵的秩必然是偶数. 由此证明, 奇数阶反对称矩阵一定不可逆.

解答:

1. 令 A 为反对称矩阵. 若存在非零向量 x,y 使得 $A=xy^T$, 则 $0>-(y^Tx)(x^Ty)=-y^TAx=x^TAy=(x^Tx)(y^Ty)>0$, 矛盾. 故 $\operatorname{rank}(A)\ne 1$.
2. 对比元素可得 B 反对称. 记 $A=\begin{pmatrix}0 & -v^T\\ v & B\end{pmatrix}$. 若存在 w 使得 $v=Bw$, 则由 $w^TBw=0$ 和 $w^TB=-v^T$ 得
$$\begin{pmatrix}1 & -w^T\\ 0 & I\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}1 & 0\\ -w & I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & B\end{pmatrix},$$
故 $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)$. 若 v 不在 B 的列空间内, 则 $(0,-v^T)$ 不在 (v,B) 的行空间内. 此时 $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(\begin{pmatrix}v & B\end{pmatrix})+1=\operatorname{rank}(B)+2$.
3. 令 A 为反对称矩阵. 由归纳法可得 $2\mid\operatorname{rank}(A)$. 若 A 阶数奇, 则 A 不满秩, 故 A 不可逆.

习题 2.3.22 设 A 是 n 阶可逆实反对称矩阵,b 是 n 维实列向量. 求证:$\text{rank}(A+bb^T)=n$.

解答: 由 Sherman-Morrison 公式和 $1+b^TAb=1$ 得 $A+bb^T$ 可逆, 故 $\text{rank}(A+bb^T)=n$.

习题 2.3.23(1,2,3)

1. 求向量 u,v, 使得 $uv^T=\begin{pmatrix}3&6&6\\1&2&2\\4&8&8\end{pmatrix}$.
2. 设 A 是秩为 $r>0$ 得 $m\times n$ 的矩阵, 令 C 为 A 的主列按顺序组成的矩阵, 则 C 有几行几列? 令 R 为 A 的行简化阶梯形矩阵的非零行按顺序组成的矩阵, 则 R 有几行几列? 求证 $A=CR$.
3. 求证: 任意秩为 $r>0$ 的 $m\times n$ 矩阵 A 可以分解成列满秩矩阵和行满秩矩阵的乘积, 即分别存在 $m\times r$,$r\times n$ 矩阵 C,R. 且 $\text{rank}(C)=\text{rank}(R)=r$, 使得 $A=CR$.

解答:

1. $u=(3,1,4)^T,v=(1,2,2)^T$.
2. C 有 m 行 r 列,R 有 r 行 n 列. 令 BA 为 A 的简化阶梯形矩阵, 其中 $B\in\mathbb{R}^{m\times m}$ 可逆. 则 $BC=\begin{pmatrix}I_r\\0\end{pmatrix}$. 而 $R=\begin{pmatrix}I_r&0\end{pmatrix}BA$. 故
$$\begin{aligned}CR=&B^{-1}\begin{pmatrix}I_r\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_r&0\end{pmatrix}BA\\=&B^{-1}\left(\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}BA\right)\\=&B^{-1}BA\\=&A.\end{aligned}$$
3. 前问中的 C 和 R 即为所求 (注意到 $r\geq\text{rank}(C)\geq\text{rank}(BC)=r$,$\text{rank}(R)=\text{rank}(BA)=r$).