线性代数第六周第一次作业解答

《线性代数入门》

Exercise 1.4.14 证明：若 A 是 n 阶上三角矩阵，则 $A^n = 0$ 当且仅当 A 是严格上三角矩阵。

必要性： 若 $A^n = 0$，则 A 不可能有非零特征值。但上三角矩阵的特征值就是其对角元，因此若存在某个 $a_{ii} \neq 0$，则

$$A^k(v_i) = a_{ii}^k v_i \neq 0,$$

这与 $A^n = 0$ 矛盾。故 $a_{ii} = 0$ 对所有 i 必须成立。

充分性： 反之，设 A 是严格上三角矩阵（即 $a_{ii} = 0$）。我们想证明：严格上三角矩阵的幂每乘一次，其非零元素带状向右上移动一层，因此 $A^n = 0$。

当 $k = 1$ 时，矩阵 A 的元素满足

$$a_{ij} = 0 \quad \text{当} i \geq j.$$

假设该命题对 k 成立，即

$$A^k = (b_{ij}), \qquad b_{ij} = 0 \quad \text{当} i \geq j - k.$$

考虑 $A^{k+1} = A^k A$ 的元素：

$$A^{k+1}(i,j) = \sum_{m=1}^{n} a_{im} b_{mj}.$$

当 $i \geq j - (k+1)$ 时，讨论每一项：

- 若 $m \leq i$，则 $a_{im} = 0$（因为 A 上三角）- 若 $m \geq j - k$，则 $b_{mj} = 0$（归纳假设）

因此求和中每一项均为 0，于是

$$A^{k+1}(i,j) = 0 \quad \text{当} i \geq j - (k+1).$$

即严格上三角的“零带”向右移动了一列。

特别地，当 $k = n - 1$ 时，

$$A^n(i,j) = 0 \quad \text{对所有} i, j.$$

因此

$$A^n = 0.$$

结论： 严格上三角矩阵的 n 次幂必为零矩阵，因此

$$A^n = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad A \text{ 为严格上三角矩阵}.$$

Exercise 1.4.15 设 A 为 n 阶矩阵且 $A^n = 0$。证明：

$$(I_n - A)\,(I_n + A + A^2 + \cdots + A^{n-1}) \;=\; I_n.$$

证明：记

$$S := I_n + A + A^2 + \cdots + A^{n-1}.$$

利用分配律与结合律，有

$$(I_n - A)S = S - AS = \Big(\sum_{k=0}^{n-1} A^k\Big) - A\Big(\sum_{k=0}^{n-1} A^k\Big) = \sum_{k=0}^{n-1} A^k - \sum_{k=1}^{n} A^k.$$

两式相减时除首尾两项外两两相消，得到

$$(I_n - A)S = I_n - A^n.$$

由假设 $A^n = 0$，于是

$$(I_n - A)\,(I_n + A + \cdots + A^{n-1}) = I_n.$$

同理可证右乘也成立：因为

$$S(I_n - A) = S - SA = \sum_{k=0}^{n-1} A^k - \sum_{k=0}^{n-1} A^{k+1} = I_n - A^n = I_n.$$

于是 $I_n - A$ 可逆，且

$$(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + \cdots + A^{n-1}.$$

Exercise 1.4.16 (3, 4) 设 A 为 n 阶矩阵,定义其交换子集合(centralizer)

$$\mathrm{Comm}(A) = \{\, B \mid AB = BA \,\}.$$

(3) 证明：若 $B, C \in \mathrm{Comm}(A)$，则 $I_n, kB + \ell C \in \mathrm{Comm}(A)$ $BC \in \mathrm{Comm}(A)$。

(i) 线性组合仍与 A 可交换 已知 $AB = BA$、$AC = CA$，则

$$A(kB + \ell C) = kAB + \ell AC = kBA + \ell CA = (kB + \ell C)A.$$

故 $kB + \ell C \in \mathrm{Comm}(A)$。

(ii) 两矩阵的乘积仍与 A 可交换 由 $AB = BA$、$AC = CA$ 得

$$A(BC) = (AB)C = (BA)C = B(AC) = B(CA) = (BC)A.$$

故 $BC \in \mathrm{Comm}(A)$。

(iii) I_n 与 A 相乘可交换 显然 $I_nA = A = AI_n$，所以 $I_n \in Comm(A)$ 由此可见，$\mathrm{Comm}(A)$ 对加法、数乘、乘法均封闭。

(4) 对 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，求证：$J_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in Comm(A)$，$Comm(A) = \{k_1I_3 + k_2J_3 + k_3J_3^2 | k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}\}$

注意到

$$A = I_3 + J_3, \qquad J_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad J_3^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

首先验证 $J_3 \in \mathrm{Comm}(A)$：

$$AJ_3 = (I_3 + J_3)J_3 = J_3 + J_3^2 = J_3^2 + J_3 = J_3(J_3 + I_3) = J_3A,$$

因此 $AJ_3 = J_3A$，故 $J_3 \in \mathrm{Comm}(A)$。

由于 $A = I_3 + J_3$，只要与 J_3 可交换，也就与 A 可交换。

因此：

$$\mathrm{Comm}(A) = \mathrm{Comm}(J_3).$$

设一般矩阵

$$X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

计算交换关系 $XJ_3 = J_3X$：

首先

$$J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

则

$$XJ_3 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & d & e \\ 0 & g & h \end{pmatrix}.$$

另一方面，

$$J_3X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

令 $XJ_3 = J_3X$，得到：

$$\begin{cases} 0 = d, \\ a = e, \\ b = f, \\ 0 = g, \\ d = h = 0. \end{cases}$$

即

$$X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

注意到

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故任意满足交换关系的 X 均可写成

$$X = k_1 I_3 + k_2 J_3 + k_3 J_3^2, \qquad k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}.$$

因此

$$\boxed{\mathrm{Comm}(A) = \{\, k_1 I_3 + k_2 J_3 + k_3 J_3^2 \mid k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R} \,\}.}$$

Exercise 1.4.25 右图含有 4 个顶点 v_1, v_2, v_3, v_4，顶点之间有边连接。对称邻接矩阵 A 称为该图的邻接矩阵，其 v_i 与 v_j 之间相邻，则 $A(i,j)=1$，若 v_i 与 v_j 之间没有边，则为 0。

邻接矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\0&1&1&0\end{pmatrix}.$$

1. 从 v_3 出发，三次通过边，最终回到 v_3 的路径有多少？

由于 $A^3(i,j)$ 表示从 i 到 j 的长度为 3 的通路条数，因此所求为 $A^3(3,3)$。

$$A^2=\begin{pmatrix}2&1&1&2\\1&3&2&2\\1&3&2&2\\2&1&1&2\end{pmatrix},\qquad A^3=\begin{pmatrix}2&5&5&2\\5&4&5&5\\5&5&4&5\\2&5&5&2\end{pmatrix}.$$

因此

$$A^3(3,3)=4.$$

所以从 v_3 出发，通过恰好三条边并回到 v_3 的路径共有

$$\boxed{4\text{ 条}}.$$

2. 求图的邻接矩阵的三次幂

已计算如下：

$$A^3=\begin{pmatrix}2&5&5&2\\5&4&5&5\\5&5&4&5\\2&5&5&2\end{pmatrix}.$$

3. 分析产生的 4 条回路

根据 $A^3(3,3)=4$，路径如下（均从 v_3 出发、经过 3 步并回到 v_3）：

$$v_3 \to v_1 \to v_2 \to v_3,$$

$$v_3 \to v_2 \to v_1 \to v_3,$$

$$v_3 \to v_4 \to v_2 \to v_3,$$

$$v_3 \to v_2 \to v_4 \to v_3.$$

这四条即为所有满足条件的长度为 3 的闭合通路。

Exercise 1.4.28 注意：m 维向量是 $m \times 1$ 的矩阵。

(1)

对 $v \in \mathbb{R}^m$，$k \in \mathbb{R}$，kv 是一个 1×1 矩阵和 $m \times 1$ 乘法，所以不能看作矩阵乘法；vk 是一个 $m \times 1$ 矩阵和 1×1 乘法, 所以看作矩阵乘法

(2)

对 $v \in \mathbb{R}^m$，$w \in \mathbb{R}^n$，$v_{m\times 1}w_{1\times n}^T$ 是良定义的，乘积有 m 行 n 列

(3) 计算

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ . \\ . \\ . \\ 100 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 10, 9, 8, \cdots, 1 \end{pmatrix},$$

求 $(12, 7)$ 的结果。

$$AB(12, 7) = A(12, 1)B(1, 7) = 12 \times 4 = 48.$$

(4) 求 v, w，使得 $vw^T = [(-1)^{i+j}]$。

（此处假设 v, w 与前述一致，即 $v \in \mathbb{R}^m, w \in \mathbb{R}^n$ 使得 vw^T 为 $m \times n$ 矩阵。）

$$v=\begin{pmatrix}(-1)^1\\(-1)^2\\\vdots\\(-1)^m\end{pmatrix},\qquad w=\begin{pmatrix}(-1)^1\\(-1)^2\\\vdots\\(-1)^n\end{pmatrix}.$$

则

$$(vw^T)_{ij}=v_iw_j=(-1)^i\,(-1)^j=(-1)^{i+j},$$

满足题意。

更一般地，对任意非零常数 $c\in\mathbb{R}$，令

$$v=c\begin{pmatrix}(-1)^1\\\vdots\\(-1)^m\end{pmatrix},\qquad w=c^{-1}\begin{pmatrix}(-1)^1\\\vdots\\(-1)^n\end{pmatrix},$$

同样有 $vw^T=\big[(-1)^{i+j}\big]_{m\times n}$。

(5) 求 v,w 使得 $vw^T=[\frac{i}{j}]$

矩阵元素满足

$$(vw^T)_{ij}=v_iw_j=\frac{i}{j}.$$

可取

$$v=\begin{pmatrix}1\\2\\\vdots\\m\end{pmatrix},\qquad w=\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\\vdots\\\frac{1}{n}\end{pmatrix}.$$

因为此时

$$v_iw_j=i\cdot\frac{1}{j}=\frac{i}{j},$$

满足题意。

更一般地，对任意非零常数 $c\in\mathbb{R}$，令

$$v=c\begin{pmatrix}1\\2\\\vdots\\m\end{pmatrix},\qquad w=c^{-1}\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\\vdots\\\frac{1}{n}\end{pmatrix},$$

也有

$$vw^T = \begin{bmatrix} \frac{i}{j} \end{bmatrix}_{m\times n}.$$

(6) 令 $A = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n]$ **，B=** $\begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^T \\ \mathbf{b}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{b}_n^T \end{bmatrix}$**，证明** $AB = \sum_{i=1}^n a_i b_i^T$

注意 A 的列向量为 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$，$B$ 的行向量分别为 $\mathbf{b}_1^T, \ldots, \mathbf{b}_n^T$。
矩阵乘积 AB 可按列展开：

$$AB = A \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^T \\ \mathbf{b}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{b}_n^T \end{bmatrix} = \mathbf{a}_1\mathbf{b}_1^T + \mathbf{a}_2\mathbf{b}_2^T + \cdots + \mathbf{a}_n\mathbf{b}_n^T.$$

因为对任意矩阵乘法，按列分块有

$$A \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1^T \\ \mathbf{b}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{b}_n^T \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i\mathbf{b}_i^T.$$

故证得：

$$\boxed{AB = \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i\mathbf{b}_i^T.}$$

Exercise 1.5.1

Exercise 1.5.1 （矩阵乘法与对应的行列变换）

(1) 先交换行再交换列

设

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

则左乘 P 为“倒置行次序”，右乘 Q 为“倒置列次序”，

$$PAQ = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{行交换}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{列交换}} = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) 用初等行变换将首行消去到下两行

取

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

则

$$EB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

(3) 循环置换矩阵的幂

令

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

则 C 的幂在模 4 意义下循环:

$$C^k = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & k \equiv 1 \pmod 4, \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & k \equiv 2 \pmod 4, \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & k \equiv 3 \pmod 4, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & k \equiv 0 \pmod 4. \end{cases}$$

(4) 2×2 情形：伴随矩阵恒等式

设

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

则

$$A \operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = (ad - bc) I_2.$$

(5)

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\-1&1&0&0&0\\-1&0&1&0&0\\-1&0&0&1&0\\-1&0&0&0&1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\1&1&0&0&0\\1&2&1&0&0\\1&3&3&1&0\\1&4&6&4&1\end{pmatrix}.$$

其乘积为

$$AB=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&2&1&0&0\\0&3&3&1&0\\0&4&6&4&1\end{pmatrix}.$$

《线性代数与几何》

Exercise 2.25

(1) $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$,

$$|A|=4-6=-2\neq 0\quad\Rightarrow \text{可逆}.$$

$$A^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}4&-2\\-3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&1\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

(2) $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&6\end{bmatrix}$,

$$|A|=6-6=0\quad\Rightarrow \text{不可逆}.$$

(3) $A=\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$,

$$|A|=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1\quad\Rightarrow \text{可逆}.$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}.$$

(4) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$,

$$|A| = ad - bc \neq 0 \quad \Rightarrow \text{可逆}.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

(5)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad |A| = (-1)(1) - (-2)(-1) = -3 \neq 0 \Rightarrow \text{可逆}.$$

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A^{-1} = \frac{1}{3}A^* = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

(6)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad |A| = 2 \times 3 + 2 - 3 = 5 \neq 0 \Rightarrow \text{可逆}.$$

$$A^* = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A^{-1} = \frac{A^*}{5} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}.$$

Exercise 2.27 证明：

若 $(A+I)$ 可逆，

则

$$A^2 + A = A + I = (A+I)A$$

从而

$$(A+I)(A-I) = 0.$$

又因为 $A+I$ 可逆，左乘 $(A+I)^{-1}$，得

$$A - I = 0 \quad \Rightarrow \quad A = I.$$

，矛盾！

故 $(A+I)$ 不可逆。