线性代数期末考---样题A——参考解答

2025 年 12 月

一、填空题（每空 3 分，共 30 分）

1、D	2、B	3、$\sqrt{6}/3$	4、-1	5、10
6、6	7、-1	8、$a\neq 1,-7$	9、3	10、$(1,1,1)^{\mathrm{T}}$

二、计算与证明题（共 70 分，需写出必要的步骤）

11、解：试算$\boldsymbol{A}^2$， $\boldsymbol{A}^3$，$\boldsymbol{A}^4$……，归纳假设$\boldsymbol{A}^{2k}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{1}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{k}&\boldsymbol{1}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{k}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{1}\end{bmatrix}$，验证之，得

$$\boldsymbol{A}^{2024}=\begin{bmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{1012}&\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{1012}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\end{bmatrix}.$$

12、解：二次型的矩阵为$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{3}&\mathbf{2}&\mathbf{4}\\\mathbf{2}&\mathbf{0}&\mathbf{2}\\\mathbf{4}&\mathbf{2}&\mathbf{3}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}$的特征值$\boldsymbol{\lambda_1=\lambda_2=-1,\lambda_3=8}$；

求特征向量，做施密特正交化，得$\boldsymbol{\eta_1}=\dfrac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\begin{bmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{0}\\\mathbf{-1}\end{bmatrix},\boldsymbol{\eta_2}=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}\sqrt{\mathbf{2}}}\begin{bmatrix}\mathbf{-1}\\\mathbf{4}\\\mathbf{-1}\end{bmatrix},\boldsymbol{\eta_3}=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\begin{bmatrix}\mathbf{2}\\\mathbf{1}\\\mathbf{2}\end{bmatrix}$

故正交阵$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{3\sqrt{2}}&\frac{2}{3}\\0&\frac{4}{3\sqrt{2}}&\frac{1}{3}\\\frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{3\sqrt{2}}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}$，此时$\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}\mathbf{-1}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{-1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{8}\end{bmatrix}$.

13、解：$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$有两个基础解系向量$(-2,1,0)^T,(2,0,1)^T$，故$r(A)=1$，从而$\boldsymbol{A}$可表示为$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^3$。

设$0\neq\boldsymbol{x}\in\mathrm{N}(\boldsymbol{A})$,则$\boldsymbol{x}$为$\boldsymbol{A}$的属于特征值0的特征向量,即$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}=0\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,其中$\boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{0}$（否则$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$矛盾），从而$\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0$，即$\boldsymbol{v}\perp\mathrm{N}(\boldsymbol{A})$，故$\boldsymbol{v}=c(1,2,-2)^{\mathrm{T}}$.

由$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}=\boldsymbol{b}$，得到$\boldsymbol{u}=c^{-1}\boldsymbol{v}$. 从而$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}(1\quad 2\quad -2)=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&4&-4\\-2&-4&4\end{pmatrix}$.

因此，$\boldsymbol{A}^{2025}=(\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u})^{2024}\boldsymbol{A}=9^{2024}\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&4&-4\\-2&-4&4\end{pmatrix}$.

14、解：先说明一定有 $r(A-3I)+r(A+2I)=3$。

全部的可能有下列三种情形

情形 1：$A=3I$ 或者 $A=-2I$，此时对应$|A-I|$的取值分别为 8 和 −27；

情形 2：$r(A-3I)=1$且$r(A+2I)=2$，即$\lambda=3$和$\lambda=-2$别是矩阵A的二重和单特征值，此时对应$|A-I|=(3-1)^2(-2-1)=-12$；

情形 3：$r(A-3I)=2$且$r(A+2I)=1$，即$\lambda=3$和$\lambda=-2$别是矩阵A的单和二重特征值，此时对应$|A-I|=(3-1)(-2-1)^2=18$。

所以$|A-I|$一共有 4 个可能的取值，分别为−27, −12, 8, 18。

15、解：取$M_2(\mathbb{R})$的一组基为$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$，则$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$对应$(a,b,c,d)^{\mathrm{T}}$.

求解线性方程$x_1-x_2+x_3-x_4=0$，得一组基础解系为：$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1=(1,1,0,0)^T,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2=(0,1,1,0)^T$, $\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3=(0,0,1,1)^T$. 从而 $\dim V_1=3$.

由题设知$\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{B}_3$的坐标为 $\vec{\boldsymbol{\beta}}_1=(1,0,1,0)^T,\vec{\boldsymbol{\beta}}_2=(0,2,1,1)^T$, $\vec{\boldsymbol{\beta}}_3=(1,2,1,2)^T$，下求$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,-\boldsymbol{\beta}_1,-\boldsymbol{\beta}_2,-\boldsymbol{\beta}_3\}$的极大无关组，即用行变换化简：

$$\begin{pmatrix}1&0&0&-1&0&-1\\1&1&0&0&-2&-2\\0&1&1&-1&-1&-1\\0&0&1&0&-1&-2\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&-1&-2\\0&1&0&0&-1&0\\0&0&1&0&-1&-2\\0&0&0&1&-1&-1\end{pmatrix}.$$

故$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1\}$为其极大无关组，从而 $\dim(V_1+V_2)=4$.

下讨论$\boldsymbol{V}_1\cap\boldsymbol{V}_2$，令$t_1\boldsymbol{\alpha}_1+t_2\boldsymbol{\alpha}_2+t_3\boldsymbol{\alpha}_3=k_1\vec{\boldsymbol{\beta}}_1+k_2\vec{\boldsymbol{\beta}}_2+k_3\vec{\boldsymbol{\beta}}_3$.从上述简化阶梯形得，该齐次方程组的基础解系是$(1,1,1,1,1,0)^T,(2,0,2,1,0,1)^T$，对应了交空间$\boldsymbol{V}_1\cap\boldsymbol{V}_2$中两个矩阵的坐标：

$$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2=(1,2,2,1)^T,\quad 2\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_3=(2,2,2,2)^T.$$

从而$\dim \boldsymbol{V}_1 \cap \boldsymbol{V}_2 = 2$，其一组基为$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$（或$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$，或$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$）

（**注**：$\boldsymbol{V}_1 \cap \boldsymbol{V}_2$的基不唯一，各乘系数求和后应为$\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$的形式）

16、证明：因为$\boldsymbol{\sigma}^{n-1} \neq \boldsymbol{0}$，所以存在$\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{V}$，满足$\boldsymbol{\sigma}^{n-1}(\boldsymbol{\alpha}) \neq \boldsymbol{0}$，

易证$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}), \cdots, \boldsymbol{\sigma}^{n-1}(\boldsymbol{\alpha})$线性无关，是线性空间 $\boldsymbol{V}$ 的一组基。

记$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}) + \boldsymbol{\sigma}^2(\boldsymbol{\alpha}), \cdots, \boldsymbol{\beta}_{n-1} = \boldsymbol{\sigma}^{n-2}(\boldsymbol{\alpha}) + \boldsymbol{\sigma}^{n-1}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\beta}_n = \boldsymbol{\sigma}^{n-1}(\boldsymbol{\alpha}) + \boldsymbol{\alpha}$

则$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}), \cdots, \boldsymbol{\sigma}^{n-1}(\boldsymbol{\alpha})) \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix} = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}), \cdots, \boldsymbol{\sigma}^{n-1}(\boldsymbol{\alpha})) \boldsymbol{P}$

当$\boldsymbol{n}$为奇数时，$|\boldsymbol{P}| = \mathbf{2}$，所以$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}) + \boldsymbol{\sigma}^2(\boldsymbol{\alpha}), \cdots, \boldsymbol{\sigma}^{n-1}(\boldsymbol{\alpha}) + \boldsymbol{\alpha}$ 也为$\boldsymbol{V}$的一组基。

17、证明：反证法，不妨设$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$线性相关，则存在不全为零的实数$c_1, c_2, c_3$，使得

$c_1\boldsymbol{\alpha}_1 + c_2\boldsymbol{\alpha}_2 + c_3\boldsymbol{\alpha}_3 = 0$. 不妨设存在$c_i > 0$. 将此式按系数正负整理为：$\sum_{c_i>0} c_i\boldsymbol{\alpha}_i = \sum_{c_j<0} (-c_j)\boldsymbol{\alpha}_j$. 若

$\sum_{c_i>0} c_i\boldsymbol{\alpha}_i = \sum_{c_j<0} (-c_j)\boldsymbol{\alpha}_j = 0$, 则有如下矛盾：

$$0 = (\sum_{c_i>0} c_i\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_4) = \sum_{c_i>0} c_i(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_4) < 0.$$

若$\sum_{c_i>0} c_i\boldsymbol{\alpha}_i = \sum_{c_j<0} (-c_j)\boldsymbol{\alpha}_j \neq 0$, 则有 如下矛盾：

$$0 < (\sum_{c_i>0} c_i\boldsymbol{\alpha}_i, \sum_{c_i>0} c_i\boldsymbol{\alpha}_i) = (\sum_{c_i>0} c_i\boldsymbol{\alpha}_i, \sum_{c_j<0} (-c_j)\boldsymbol{\alpha}_j) = \sum_{c_i>0}\sum_{c_j>0} (-c_ic_j)(\boldsymbol{\alpha}_i, \quad \boldsymbol{\alpha}_j) < 0.$$

假设不成立，故$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$线性无关.