第九周习题参考解答　　　　　　　　　　杨利军　　Nov 10 and 12, 2025

Nov 10 作业

习题一: 课本第119页习题4.5题1: 确定下列函数的上凸域下凸区间, 以及拐点.

$$(1)\quad y=3x^2-x^3;\quad (2)\quad y=\ln(x^2+1);\quad (3)\quad y=x+\sin x;$$

$$(4)\quad y=xe^{-x};\quad (5)\quad y=(x-1)x^{\frac{2}{3}};\quad (6)\quad y=2+(x-4)^{\frac{1}{3}}.$$

解(1): 对函数 $y=3x^2-x^3$ 两次求导得

$$y'=6x-3x^2,\quad y''=6-6x=6(1-x).$$

易见当 $x<1$ 时, $y''>0$, 故函数在区间 $(-\infty,1)$ 内下凸; 当 $x>1$ 时, $y''<0$, 故函数在区间 $(1,+\infty)$ 内上凸. 由于在 $x=1$ 附近, 函数的凸性有变化, 故点 $(1,y(1))=(1,2)$ 是拐点.

解(2): 对函数 $y=\ln(x^2+1)$ 两次求导得

$$y'=\frac{2x}{x^2+1},\quad y''=\frac{2}{x^2+1}-\frac{4x^2}{x^2+1}=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

易见当 $|x|<1$ 时, $y''>0$, 故函数在区间 $(-1,1)$ 内下凸, 当 $|x|>1$ 时, $y''<0$, 故函数在区间 $(-\infty,-1)$ 和 $(1,+\infty)$ 内上凸, 且函数有两个拐点 $(-1,\ln 2)$ 和 $(1,\ln 2)$.

解(3): 对函数 $y=x+\sin x$ 两次求导得

$$y'=1+\cos x,\quad y''=-\sin x.$$

由此可见, 对 $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$, 当 $x\in(2k\pi,2k\pi+\pi)$ 时, $y''<0$, 故在区间 $(2k\pi,2k\pi+\pi)$ 内函数上凸; 当 $x\in(2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi)$ 时, $y''>0$, 故在区间 $(2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi)$ 内函数下凸. 点 $x=k\pi$ 是拐点.

解(4): 对函数 $y = xe^{-x}$ 两次求导得

$$y' = e^{-x} - xe^{-x}, \quad y'' = e^{-x}(x-2).$$

由此可见当 $x < 2$ 时, $y'' < 0$, 故函数在区间 $(-\infty, 2)$ 内上凸 当 $x > 2$ 时, $y'' > 0$, 故函数在区间 $(2, +\infty)$ 内下凸, 在 $x = 2$ 附近, 函数的凸性发生变化. 因此函数有唯一的拐点 $(2, 2e^{-2})$.

解(5): 对函数 $y = (x-1)x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{5}{3}} - x^{\frac{2}{3}}$ 两次求导得

$$y' = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}, \quad y'' = \frac{10}{9}x^{\frac{-1}{3}} + \frac{2}{9}x^{\frac{-4}{3}} = \frac{1}{9x^{\frac{4}{3}}}(10x+2).$$

由此可见当 $x < -\frac{1}{5}$ 时, $y'' < 0$, 故函数在区间 $(-\infty, -\frac{1}{5})$ 内上凸. 当 $x > -\frac{1}{5}$ 时, $y'' > 0$, 故函数在区间 $(-\frac{1}{5}, +\infty)$ 内下凸, 在 $x = -\frac{1}{5}$ 附近, 函数的凸性发生变化. 因此函数有唯一的拐点 $(-\frac{1}{5}, -\frac{6}{5\sqrt[3]{25}})$.

解(6): 对函数 $y = 2 + (x-4)^{\frac{1}{3}}$ 两次求导得

$$y' = \frac{1}{3}(x-4)^{\frac{-2}{3}}, \quad y'' = -\frac{2}{9}(x-4)^{\frac{-5}{3}}.$$

由此可见当 $x < 4$ 时, $y'' > 0$, 故函数在区间 $(-\infty, 4)$ 内下凸 当 $x > 4$ 时, $y'' < 0$, 故函数在区间 $(4, +\infty)$ 内上凸, 在 $x = 4$ 附近, 函数的凸性发生变化. 因此函数有唯一的拐点 $(4, 2)$. 解答完毕.

习题二: 课本第119页习题4.5题2:
求常数 a, b, 使得点 $(1, 3)$ 是曲线 $y = ax^3 + bx^2$ 的拐点.

解: 对函数 $y = ax^3 + bx^2$ 求二阶导得

$$y' = 3ax^2 + 2bx, \quad y'' = 6ax + 2b.$$

由于拐点 $(1, 3)$ 应该在曲线 $y = ax^3 + bx^2$ 上, 且在拐点处 $y'' = 0$, 故 $3 = a + b$, $0 = 6a + 2b$. 解之得 $a = \frac{-3}{2}$, $b = \frac{9}{2}$. 解答完毕.

习题三: 课本第119页习题4.5题3:

求一个六次多项式 $f(x)$, 使得曲线 $y=f(x)$ (i) 经过原点 $(0,0)$; (ii) 有拐点 $(-1,1)$ 和 $(1,1)$; (iii) 在原点和两个拐点处有水平的切线.

解: 设待定多项式为 $f(x)=a_6x^6+a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$. 由条件 (i) 知 $f(0)=0$, 即 $a_0=0$. 故

$$f(x)=a_6x^6+a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x. \tag{1}$$

由于拐点 $(-1,1)$ 和 $(1,1)$ 在曲线 $y=f(x)$ 上, 故

$$a_6-a_5+a_4-a_3+a_2-a_1=1,$$
$$a_6+a_5+a_4+a_3+a_2+a_1=1.$$

对上述两个等式相加和相减得

$$a_6+a_4+a_2=1, \tag{2}$$

$$a_5+a_3+a_1=0. \tag{3}$$

对多项式 (1) 两次求导得

$$f'(x)=6a_6x^5+5a_5x^4+4a_4x^3+3a_3x^2+2a_2x+a_1, \tag{4}$$

$$f''(x)=30a_6x^4+20a_5x^3+12a_4x^2+6a_3x+2a_2. \tag{5}$$

由条件 (iii) 函数在原点和两个拐点处有水平的切线可知 $f'(0)=0$, $f'(-1)=0$, $f'(1)=0$, 即 $a_1=0$, 以及

$$f'(-1)=-6a_6+5a_5-4a_4+3a_3-2a_2=0,$$

$$f'(1)=6a_6+5a_5+4a_4+3a_3+2a_2=0.$$

将上述两个等式相加和相减即可得

$$5a_5+3a_3=0, \tag{6}$$

$$3a_6 + 2a_4 + a_2 = 0. \tag{7}$$

根据方程 (3) 和 (6) 知 $a_3 = 0$, $a_5 = 0$, 即多项式 $f(x)$ 为偶多项式, 即 $f(x) = a_6x^6 + a_4x^4 + a_2x^2$. 再由拐点条件 $f''(\pm 1) = 0$ 得

$$30a_6 + 12a_4 + 2a_2 = 0 \quad \text{即} \quad 15a_6 + 6a_4 + a_2 = 0. \tag{8}$$

将方程 (2), (7) 和 (8) 联立得

$$\begin{aligned} &a_6 + a_4 + a_2 = 1, \\ &3a_6 + 2a_4 + a_2 = 0, \\ &15a_6 + 6a_4 + a_2 = 0. \end{aligned}$$

易解得 $a_6 = 1$, $a_4 = -3$, $a_2 = 3$. 于是所求多项式为 $f(x) = x^6 - 3x^4 + 3x^2$. 解答完毕.

习题四: 课本第120页习题4.5题4:

设函数 $y = f(x)$ 由参数方程 $x = 3\cos^3 t$, $y = 3\sin^3 t$ $(0 < t < \pi)$ 确定, 讨论函数 $y = f(x)$ 的凸性.

解: 函数 $y = y(x)$ 的一阶和二阶导数分别为

$$f'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{9\sin^2 t\cos t}{-9\cos^2 t\sin t} = -\frac{\sin t}{\cos t} = -\tan t,$$

$$\begin{aligned} f''(x) = \frac{d}{dx}f'(x) &= \frac{d}{dt}\big(-\tan t\big)\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{\cos^2 t}\cdot\frac{1}{x'(t)} \\ &= -\frac{1}{\cos^2 t}\cdot\frac{-1}{9\cos^2 t\sin t} = \frac{1}{9\cos^4 t\sin t}. \end{aligned}$$

由此可见 $f''(x) > 0, \forall t \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$. 因此函数 $y = f(x)$ 下凸. 解答完毕.

习题五: 课本第120页习题4.5题5: 利用凸函数的性质, 证明下列不等式

(1) 设 $a > 0$ 则对任意 $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, 成立 $a^{\frac{x_1+x_2}{2}} \le \frac{1}{2}(a^{x_1} + a^{x_2})$;

(2) 对 $\forall x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0$, $p \geq 1$, 则

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)^p \leq \frac{x_1^p + x_2^p + \cdots + x_n^p}{n}.$$

(3) 对 $\forall x_1, x_2, \cdots, x_n > 0$, $\forall a_1, a_2, \cdots, a_n \geq 0$, $\sum_{k=1}^n a_k = 1$, 成立

$$x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n} \leq a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n. \tag{9}$$

证(1): 考虑函数 a^x 的二阶导数:

$$(a^x)' = \ln a a^x, \quad (a^x)'' = (\ln a)^2 a^x > 0.$$

由此空间函数 a^x 在 $\mathbb{R}$ 上严格下凸函数. 故对任意 $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, 成立

$$a^{\frac{x_1 + x_2}{2}} \leq \frac{1}{2}(a^{x_1} + a^{x_2}).$$

证(2): 考虑函数 x^p, 其二阶导数为

$$(x^p)' = p x^{p-1}, \quad (x^p)'' = p(p-1) x^{p-2} \geq 0.$$

由此可见函数 x^p 在区间 $(0, +\infty)$ 内下凸, 故$\forall x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0$, $p \geq 1$, 则

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)^p \leq \frac{x_1^p + x_2^p + \cdots + x_n^p}{n}.$$

证(3): 要证不等式 (9), 只需证

$$a_1 \ln x_1 + a_2 \ln x_2 + \cdots + a_n \ln x_n \leq \ln(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n). \tag{10}$$

为证不等式 (10), 考虑函数 $\ln x$. 易见函数 $\ln x$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内上凸, 因为

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad (\ln x)'' = -\frac{1}{x^2} < 0.$$

于是

$$\ln(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n) \geq a_1 \ln x_1 + a_2 \ln x_2 + \cdots + a_n = \ln(x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}).$$

此即不等式 (9) 成立. 证毕.

习题六: 课本第120页习题4.5题6:
设 (i) f, g 均为区间 $[a, b]$ 上的下凸函数; (ii) 函数 f 单调上升; (iii) 复合函数 $f \circ g$ 有意义, 即 $g[a, b] \subset [a, b]$, 证明复合函数 $f \circ g$ 是区间 $[a, b]$ 上的下凸函数.

证明: 对任意 $x_1, x_2 \in [a, b]$, $\lambda, \mu > 0$ 且 $\lambda + \mu = 1$, 由条件 (i) 和 (ii) 得

$$f \circ g(\lambda x_1 + \mu x_2) = f[g(\lambda x_1 + \mu x_2)] \leq f\big[\lambda g(x_1) + \mu g(x_2)\big]$$

$$\leq \lambda f\big[g(x_1)\big] + \mu f\big[g(x_2)\big] = \lambda f \circ g(x_1) + \mu f \circ g(x_2).$$

命题得证.

习题七: 课本第120页习题4.5题7: 设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 内的下凸函数, 证明

$$\max_{a \leq x \leq b} f(x) = \max\Big\{f(a), f(b)\Big\}.$$

证明: 对任意 $\forall x \in (a, b)$, 存在 $\lambda, \mu > 0$, $\lambda + \mu = 1$, 使得 $x = \lambda a + \mu b$. 于是根据 $f(x)$ 的凸性得

$$f(x) = f(\lambda a + \mu b) \leq \lambda f(a) + \mu f(b) \leq (\lambda + \mu) \max\Big\{f(a), f(b)\Big\} = \max\Big\{f(a), f(b)\Big\}.$$

命题得证.

习题八: 课本第120页习题4.5题8: 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可微, 且为下凸. 若存在 $x_0 \in (a, b)$, 使得 $f'(x_0) = 0$, 证明 x_0 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最小值点.

证明: 根据凸性与一阶导数的关系知, 当 $f(x)$ 可导且下凸时, 导数 $f'(x)$ 为单调上升的函数. 于是
当 $x < x_0$ 时, $f'(x) \leq f'(x_0) = 0$, 即 $f(x)$ 在点 x_0 的左侧单调下降,

当 $x > x_0$ 时, $f'(x) \geq f'(x_0) = 0$, 即 $f(x)$ 在点 x_0 的右侧单调上升.
故 x_0 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值点. 命题得证.

习题九: 课本第120页习题4.5题9:
设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 证明 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是下凸的, 当且仅当

$$\forall x_0, x \in (a,b), \quad f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{11}$$

(注: 上述不等式的几何意义是, 曲线 $y = f(x)$ 上任意点处的切线, 均位于曲线的下方).

证明: $\Leftarrow$: 假设条件 (11) 成立, 要证 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 内下凸. 对任意 $x_1, x_2 \in [a,b]$, $x_1 < x_2$, 由条件 (11) 知

$$f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1),$$

$$f(x_1) \geq f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2).$$

不难根据上述两个不等式得

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2).$$

这就证明了导数 $f'(x)$ 单调上升, 从而 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 内下凸.
$\Rightarrow$: 假设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 内下凸, 要证对任意 $x_0, x \in [a,b]$, 条件 (11) 成立.
证法一: 回忆当 $f(x)$ 可导时, $f(x)$ 下凸, 当且仅当导函数 $f'(x)$ 单调上升. 若 $x > x_0$, 则由中值定理存在 $\xi \in (x_0, x)$, 使得

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0) \geq f'(x_0)(x - x_0);$$

若 $x < x_0$, 则由中值定理存在 $\eta \in (x, x_0)$, 使得

$$f(x) - f(x_0) = f'(\eta)(x - x_0) \geq f'(x_0)(x - x_0).$$

即条件 (11) 成立.

证法二: 对任意 $x_0, x \in [a,b]$,

当 $x < x_0$ 时, 取 $x_1 \in (x, x_0)$, 根据 $f(x)$ 的凸性知

$$\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x} \le \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}.$$

于是上式中, 令 $x_1 \to x_0^-$ 得

$$\frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x} \le f'(x_0).$$

由此可推出不等式 (11).

当 $x > x_0$ 时, 用同样的方法可证不等式 (11)成立. 命题得证.

补充题: 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为 n 个正数. 证明

$$\text{(i)} \quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}} = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\};$$

$$\text{(ii)} \quad \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}} = \min\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}.$$

证(i): 设 $a = \max\left\{a_1, a_2, \cdots, a_n\right\}$, 则

$$\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}} \le \left(\frac{a^x+a^x+\cdots+a^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{na^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}} = a.$$

另一方面,

$$\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}} \ge \left(\frac{a^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}} = n^{\frac{1}{x}}a.$$

于是

$$n^{\frac{1}{x}}a \le \left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}} \le a.$$

根据极限的两边夹法则知

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}} = a.$$

即结论(i)成立.

证(ii): 记 $b_j = a_j^{-1}$, $j = 1, 2, \cdots, n$, $b = \min\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$. 再记 $y = -x$, 则 $x \to -\infty$, 则 $y \to +\infty$. 于是

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{a_1^{-y} + a_2^{-y} + \cdots + a_n^{-y}}{n}\right)^{\frac{1}{-y}}$$

$$= \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{b_1^y + b_2^y + \cdots + b_n^y}{n}\right)^{\frac{1}{-y}} = \frac{1}{\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{b_1^y + b_2^y + \cdots + b_n^y}{n}\right)^{\frac{1}{y}}}$$

$$= \frac{1}{\max\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}} = \frac{1}{\max\{\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \cdots, \frac{1}{a_n}\}} = \frac{1}{\frac{1}{b}} = b.$$

解答完毕.

Nov 12 作业

证明如下不等式:

(1) $\cos x > 1 - \frac{1}{2}x^2$, $\forall x > 0$;

(2) $\sin x > x - \frac{1}{3!}x^3$, $\forall x > 0$;

(3) $\cos x < 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4$, $\forall x > 0$;

(4) $\sin x < x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5$, $\forall x > 0$.

证明(1): $\cos x > 1 - \frac{1}{2}x^2$, $\forall x > 0$. 令 $f(x) = \cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2$, 则 $f(0) = 0$, $f'(x) = -\sin x + x$. 根据熟知的不等式 $\sin x < x$, $\forall x > 0$ 知, $f'(x) > 0$, $\forall x > 0$. 这表明 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格单调上升. 因此对 $\forall x > 0$, $f(x) > f(0) = 0$. 此即 $\cos x > 1 - \frac{1}{2}x^2$, $\forall x > 0$. 命题得证.

证明(2): $\sin x > x - \frac{1}{3!}x^3$, $\forall x > 0$. 令 $f(x) = \sin x - x + \frac{1}{3!}x^3$, 则 $f(0) = 0$, $f'(x) = \cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2$. 根据结论(1)知 $f'(x) > 0$, $\forall x > 0$. 这表明 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格单调上升. 因此对 $\forall x > 0$, $f(x) > f(0) = 0$. 此即 $\sin x > x - \frac{1}{3!}x^3$, $\forall x > 0$. 命题得证.

证明(3): $\cos x < 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4$, $\forall x > 0$. 令 $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cos x$, 则 $f(0) = 0$, $f'(x) = -x + \frac{1}{3!}x^3 + \sin x$. 根据结论(2)知 $f'(x) > 0$, $\forall x > 0$. 这表明 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上

严格单调上升. 因此对 $\forall x>0$, $f(x)>f(0)=0$. 此即 $\cos x<1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4$, $\forall x>0$. 命题得证.

证明(4): $\sin x<x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5$, $\forall x>0$. 令 $f(x)=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\sin x$, 则 $f(0)=0$, $f'(x)=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\cos x$. 根据结论(3)知 $f'(x)>0$, $\forall x>0$. 这表明 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格单调上升. 因此对 $\forall x>0$, $f(x)>f(0)=0$. 此即 $\sin x<x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5$, $\forall x>0$. 命题得证.