第五周习题参考解答　　　　杨利军　　Oct 13, 15, 2025

Oct 13 作业

习题一: 课本第51页习题2.3题7: 求下列极限

$$(1)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^3)}{[\sin(6x)]^3},\quad (2)\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}},\quad (3)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan(3x)}{x},\quad (4)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{2x},$$

$$(5)\quad \lim_{n\to+\infty}2^n\sin\frac{\pi}{2^n},\quad (6)\quad \lim_{x\to 9}\frac{\sin^2 x-\sin^2 9}{x-9},\quad (7)\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\cos(2x)},$$

$$(8)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3},\quad (9)\quad \lim_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2},\quad (10)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(4x)}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}},$$

$$(11)\quad \lim_{x\to 0}\frac{[\sin(ax)]^2-[\sin(bx)]^2}{x\sin x},\quad (12)\quad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2\sin\frac{1}{x}+2\sin x}{x}.$$

解(1): 由于

$$\frac{\sin(x^3)}{[\sin(6x)]^3}=\frac{\sin(x^3)}{x^3}\cdot\frac{x^3}{(6x)^3}\cdot\frac{(6x)^3}{[\sin(6x)]^3}=\frac{1}{6^3}\cdot\frac{\sin(x^3)}{x^3}\cdot\left(\frac{6x}{\sin(6x)}\right)^3$$

$$\to\frac{1}{216}\cdot 1\cdot 1^3=\frac{1}{216},$$

故所求极限为 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^3)}{[\sin(6x)]^3}=\frac{1}{216}$.

解(2): 作变换 $y=x-\frac{\pi}{2}$, 则 $x=y+\frac{\pi}{2}$, 且当 $x\to\frac{\pi}{2}$ 时, $y\to 0$. 于是

$$\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=\frac{-\sin y}{y}\to -1.$$

故所求极限为 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=-1$.

解(3): 当 $x\to 0$ 时,

$$\frac{\tan(3x)}{x}=3\cdot\frac{\tan(3x)}{3x}\to 3.$$

故所求极限为 $\lim_{x\to 0}\frac{\tan(3x)}{x}=3$.

解(4): 作变换 $y=\arctan x$, 则 $\tan y=x$, 且当 $x\to 0$ 时, $y\to 0$. 于是当 $x\to 0$ 时,

$$\frac{\arctan x}{2x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{y}{\tan y}\to\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

故所求极限为 $\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{2x}=\frac{1}{2}$.

解(5): 由于 $n\to+\infty$ 时, $\frac{\pi}{2^n}\to 0$. 于是

$$2^n\sin\frac{\pi}{2^n}=\pi\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^n}}\to\pi.$$

故所求极限为 $\lim_{n\to+\infty}2^n\sin\frac{\pi}{2^n}=\pi$.

解(6): 由于

$$\frac{\sin^2 x-\sin^2 9}{x-9}=\frac{\sin x-\sin 9}{x-9}\cdot(\sin x+\sin 9),$$

且 $\lim\limits_{x\to 9}(\sin x+\sin 9)=\sin 9+\sin 9=2\sin 9$. 故只需求极限

$$\lim_{x\to 9}\frac{\sin x-\sin 9}{x-9}.$$

根据三角函数的积化和差公式得

$$\sin x-\sin 9=\sin\left(\frac{x+9}{2}+\frac{x-9}{2}\right)-\sin\left(\frac{x+9}{2}-\frac{x-9}{2}\right)=2\sin\frac{x-9}{2}\cos\frac{x+9}{2}.$$

于是当 $x\to 9$ 时,

$$\frac{\sin x-\sin 9}{x-9}=\frac{2\sin\frac{x-9}{2}\cos\frac{x+9}{2}}{x-9}=\frac{\sin\frac{x-9}{2}}{\sin\frac{x-9}{2}}\cdot\cos\frac{x+9}{2}\to\cos 9.$$

因此所求极限为

$$\lim_{x\to 9}\frac{\sin^2 x-\sin^2 9}{x-9}=\lim_{x\to 9}\frac{\sin x-\sin 9}{x-9}\lim_{x\to 9}(\sin x+\sin 9)$$

$$=\cos 9\cdot 2\sin 9=\sin 18.$$

解(7): 作变换 $y=x-\frac{\pi}{4}$, 则 $x=y+\frac{\pi}{4}$. 当 $x\to\frac{\pi}{4}$ 时, $y\to 0$. 于是

$$\sin x-\cos x=\sin\left(y+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(y+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin y+\cos y-\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos y-\sin y)=\sqrt{2}\sin y,$$

$$\cos(2x) = \cos(2y + \frac{\pi}{2}) = -\sin(2y).$$

因此所求极限为

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos(2x)} = \lim_{y\to 0} \frac{\sqrt{2}\sin y}{-\sin(2y)}$$

$$= -\sqrt{2}\lim_{y\to 0}\left(\frac{\sin y}{y}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2y}{\sin(2y)}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

解(8): 将 $\frac{\tan x - \sin x}{x^3}$ 作如下变形

$$\frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^3} = \frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{1}{\cos x} - 1}{x^2} = \frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\frac{1-\cos x}{x^2}.$$

由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2},$$

故所求极限为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = 1\cdot 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

解(9): 作变换 $y = x - 1$, 则 $x = y + 1$, 且 $x \to 1$ 时, $y \to 0$. 于是

$$\tan\frac{\pi x}{2} = \tan\left((y+1)\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi y}{2})}{\cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi y}{2})} = \frac{\cos\frac{\pi y}{2}}{-\sin\frac{\pi y}{2}}.$$

因此所求极限为

$$(1-x)\tan\frac{\pi x}{2} = -y\cdot\frac{\cos\frac{\pi y}{2}}{-\sin\frac{\pi y}{2}} = \frac{y\cos\frac{\pi y}{2}}{\sin\frac{\pi y}{2}} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\frac{\pi y}{2}}{\sin\frac{\pi y}{2}}\cdot\cos\frac{\pi y}{2} \to \frac{2}{\pi}\cdot 1\cdot 1 = \frac{2}{\pi}.$$

解(10): 当 $x \to 0$ 时,

$$\frac{\sin(4x)}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}} = \frac{\sin(4x)}{4x}\cdot 4x\cdot\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}{x+2-2} = 4\cdot\frac{\sin(4x)}{4x}\cdot(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})$$

$$\to 4\cdot 1\cdot 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}.$$

故所求极限为 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(4x)}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}} = 8\sqrt{2}$.

解(11): 当 $a\neq 0$ 时,

$$\frac{[\sin(ax)]^2}{x\sin x}=\frac{[\sin(ax)]^2}{(ax)^2}\cdot\frac{a^2x^2}{x\sin x}=\left(\frac{[\sin(ax)]}{(ax)}\right)^2\cdot\frac{a^2x}{\sin x}\to 1^2\cdot a^2\cdot 1=a^2.$$

若 $a=0$, 则 $x\to 0$ 时, $\frac{[\sin(ax)]^2}{x\sin x}=0\to 0$. 因此对任意 $a\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{[\sin(ax)]^2}{x\sin x}\to a^2$. 同理对任意 $b\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{[\sin(bx)]^2}{x\sin x}\to b^2$. 于是所求极限为

$$\lim_{x\to 0}\frac{[\sin(ax)]^2-[\sin(bx)]^2}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{[\sin(ax)]^2}{x\sin x}-\lim_{x\to 0}\frac{[\sin(bx)]^2}{x\sin x}=a^2-b^2.$$

解(12): 当 $x\to\pm\infty$ 时, $\frac{1}{x}\to 0$. 于是

$$\frac{3x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=3x\sin\frac{1}{x}=3\cdot\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\to 3\cdot 1=3,$$

$$\frac{2\sin x}{x}\to 0.$$

因此所求极限为

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2\sin\frac{1}{x}+2\sin x}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2\sin\frac{1}{x}}{x}+\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2\sin x}{x}=3+0=3.$$

解答完毕.

习题二: 课本第51页习题2.3题8: 求下列极限

$$(1)\quad \lim_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}},\quad (2)\quad \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x+n}{x-n}\right)^x,\quad (3)\quad \lim_{x\to\pm\infty}(1+3\tan x)^{\cot x},$$

$$(4)\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan(2x)},\quad (5)\quad \lim_{x\to 1}(2x-1)^{\frac{1}{x-1}},\quad (6)\quad \lim_{x\to 0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}.$$

解(1): 若 $k\neq 0$, 则当 $x\to 0$ 时,

$$\left[(1+kx)^{\frac{1}{kx}}\right]^k\to e^k.$$

若 $k=0$, 则 $(1+kx)^{\frac{1}{x}}=1\to 1$, $x\to 0$. 因此对任意 $k\in\mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}}=e^k.$$

解(2): 当 $x\to\pm\infty$ 时, $\frac{2n}{x-n}\to 0$. 故

$$\left(\frac{x+n}{x-n}\right)^x=\left(1+\frac{2n}{x-n}\right)^{\frac{x-n}{2n}\cdot\frac{2nx}{x-n}}\to e^{2n}.$$

解(3): 当 $x\to\pm\infty$ 时, $\tan x\to 0$. 于是

$$(1+3\tan x)^{\cot x}=(1+3\tan x)^{\frac{3}{3\tan x}}\to e^3.$$

解(4): 作变换 $y=x-\frac{\pi}{4}$, 则 $x=y+\frac{\pi}{4}$, 且当 $x\to\frac{\pi}{4}$ 时, $y\to 0$, 从而 $\tan y\to 0$. 进一步

$$\tan x=\tan\left(y+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1+\tan y}{1-\tan y}=1+\frac{2\tan y}{1-\tan y},$$

$$\tan(2x)=\tan\left(2y+\frac{\pi}{2}\right)=-\cot(2y)=-\frac{1}{\tan(2y)}=-\frac{1-\tan^2 y}{2\tan y}.$$

于是

$$(\tan x)^{\tan(2x)}=\left(1+\frac{2\tan y}{1-\tan y}\right)^{-\frac{1-\tan^2 y}{2\tan y}}=\left(1+\frac{2\tan y}{1-\tan y}\right)^{\frac{1-\tan y}{2\tan y}\cdot(-1)(1+\tan y)}$$

$$\to e^{(-1)\cdot 1}=e^{-1}.$$

故所求极限为 $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan(2x)}=e^{-1}$.

解(5): 作变换 $y=x-1$, 则 $x=1+y$, 且当 $x\to 1$ 时, $y\to 0$. 于是

$$(2x-1)^{\frac{1}{x-1}}=[2(y+1)-1]^{\frac{1}{y}}=(1+2y)^{\frac{1}{2y}\cdot 2}\to e^2.$$

故所求极限为 $\lim_{x\to 1}(2x-1)^{\frac{1}{x-1}}=e^2$.

解(6): 记 $\delta(x)=2\sin x+\cos x-1$, 则当 $x\to 0$ 时, $\delta(x)\to 0$, 且

$$\frac{\delta(x)}{x}=\frac{2\sin x+\cos x-1}{x}=\frac{2\sin x}{x}-\frac{1-\cos x}{x}\to 2-0=2.$$

于是

$$(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}=(1+\delta)^{\frac{1}{x}}=(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}\cdot\frac{\delta}{x}}\to e^2.$$

故所求极限为 $\lim_{x\to 0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}=e^2$. 解答完毕.

习题三: 课本第51页习题2.3题9: 确定 a,b 的值, 使得下列两个极限式成立:

$$(1)\quad \lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=0,\quad (2)\quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0.$$

解(1): 令 $y=-x$, 则当 $x\to-\infty$ 时, $y\to+\infty$. 于是

$$\sqrt{x^2-x+1}-ax-b=\sqrt{y^2+y+1}+ay-b=y\left(\sqrt{1+\frac{1}{y}+\frac{1}{y^2}}+a\right)-b.$$

若 $a\neq 0$, 则当 $y\to+\infty$ 时,

$$y\left(\sqrt{1+\frac{1}{y}+\frac{1}{y^2}}+a\right)-b\to\pm\infty.$$

此与题设矛盾. 故 $a=-1$. 再来确定常数 b. 由假设

$$y\left(\sqrt{1+\frac{1}{y}+\frac{1}{y^2}}-1\right)-b\to 0,$$

此即

$$\frac{\sqrt{1+\frac{1}{y}+\frac{1}{y^2}}-1}{\frac{1}{y}}-b\to 0.\qquad (**)$$

回忆当 $\delta\to 0$ 时, $\frac{(1+\delta)^a-1}{\delta}\to a$. 记 $\delta=\frac{1}{y}+\frac{1}{y^2}$, 则当 $y\to+\infty$ 时, $\delta\to 0$. 于是

$$\frac{\sqrt{1+\frac{1}{y}+\frac{1}{y^2}}-1}{\frac{1}{y}}=\frac{(1+\delta)^{\frac{1}{2}}-1}{\delta}\cdot\frac{\frac{1}{y}+\frac{1}{y^2}}{\frac{1}{y}}$$

$$=\frac{(1+\delta)^{\frac{1}{2}}-1}{\delta}\cdot\left(1+\frac{1}{y}\right)\to\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

再根据假设 (**) 知 $b=\frac{1}{2}$.

解(2): 由假设可知极限

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax\right)=b \qquad (*)$$

存在. 由此得

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x(x+1)}-a\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{b}{x}=0.$$

这表明

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x(x+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}=1.$$

再由极限式 (*) 得

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x}{x+1}=-1.$$

解答完毕.

习题四: 课本第52页习题2.3题13: 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上定义. 假设 (i) $f(2x)=f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$; (ii) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$. 证明 $f(x)$ 为常数函数.

证明: 根据假设 (i) 知对任意 $x\in\mathbb{R}$, 以及任意正整数 n,

$$f(x)=f\left(\frac{x}{2}\right)=f\left(\frac{x}{2^2}\right)=\cdots=f\left(\frac{x}{2^n}\right).$$

再根据假设 (ii) 知 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(\frac{x}{2^n})=f(0)$. 因此 $f(x)=f(0)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. 命题得证.

习题五: 课本第56页习题2.4题7: 确定下列无穷小量(当 $x\to0^+$)的阶, 并按照阶由低到高排列这些无穷小量:

$$\sin(x^2),\quad 2\sqrt{x}+x^3,\quad e^{x^3}-1,\quad \sin(\tan x),\quad \ln(1+x^{\frac{2}{3}}),\quad 1-\cos(x^2),\quad \sqrt{x}-\sqrt[4]{x}.$$

解: 无穷小量 $\sin(x^2)$ 的阶为 2, 因为

$$\frac{\sin(x^2)}{x^2}\to1,\quad x\to0.$$

无穷小量 $2\sqrt{x}+x^3$ 的阶为 $\frac{1}{2}$, 因为

$$\frac{2\sqrt{x}+x^3}{\sqrt{x}} \to 2, \quad x \to 0^+.$$

无穷小量 $e^{x^3}-1$ 的阶为 3, 因为

$$\frac{e^{x^3}-1}{x^3} \to 1, \quad x \to 0.$$

无穷小量 $\sin(\tan x)$ 的阶为 1, 因为

$$\frac{\sin(\tan x)}{x} = \frac{\sin(\tan x)}{\tan x} \cdot \frac{\tan x}{x} \to 1 \cdot 1 = 1, \quad x \to 0.$$

无穷小量 $\ln(1+x^{\frac{2}{3}})$ 的阶为 $\frac{2}{3}$, 因为

$$\frac{\ln(1+x^{\frac{2}{3}})}{x^{\frac{2}{3}}} \to 1, \quad x \to 0.$$

无穷小量 $1-\cos(x^2)$ 的阶为 4, 因为

$$\frac{1-\cos(x^2)}{x^4} \to \frac{1}{2}, \quad x \to 0.$$

无穷小量 $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}$ 的阶为 $\frac{1}{4}$, 因为

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x}} = \sqrt[4]{x}+1 \to 1, \quad x \to 0^+.$$

根据上述无穷小量的计算结果, 将这些无穷小量按照它们的阶, 由低到高排列如下:

$$\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}, \quad 2\sqrt{x}+x^3, \quad \ln(1+x^{\frac{2}{3}}), \quad \sin(\tan x), \quad \sin(x^2), \quad e^{x^3}-1, \quad 1-\cos(x^2).$$

习题六: 课本第56页习题2.4题8: 将下列无穷大量(当 $n \to +\infty$), 按照它们的阶由低到高重新排列:

$$n^2, \quad e^n, \quad \ln(1+n^2), \quad \sqrt{n}, \quad 2^n, \quad \sqrt{n^3+\sqrt{n}}, \quad n^n, \quad n!.$$

解: 上述无穷大量按照它们的阶由低到高排列如下:

$$\ln(1+n^2), \quad \sqrt{n}, \quad \sqrt{n^3+\sqrt{n}}, \quad n^2, \quad 2^n, \quad e^n, \quad n!, \quad n^n.$$

习题七: 课本第56页习题2.4题9: 求下列极限

$$(1)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\tan x)}{\tan(\sin x)};\quad (2)\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\cos x-1};\quad (3)\quad \lim_{x\to 0}\frac{a^{\sin x}-1}{x},\ a>0;$$

$$(4)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\ln(1-x)};\quad (5)\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos(kx^2)}}{x^4};\quad (6)\quad \lim_{x\to\pm\infty}x^2\ln\left(\cos\frac{1}{x}\right);$$

$$(7)\quad \lim_{x\to\pm\infty}x(e^{\sin\frac{1}{x}}-1);\quad (8)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{e^x-1};$$

$$(9)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}{x^2};\quad (10)\quad \lim_{x\to 0^+}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{\cos\sqrt{x}-1+x};\quad (11)\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\tan x}}{x-\tan x};$$

$$(12)\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)}{x^3\ln(1+x)};\quad (13)\quad \lim_{x\to+\infty}x\big[\ln(x-2-\ln x)\big];$$

$$(14)\quad \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt[3]{x^3-x^2}\right).$$

解(1): 当 $x\to 0$ 时, $\sin x\to 0$ 且 $\tan x\to 0$. 于是

$$\frac{\sin(\tan x)}{\tan(\sin x)}=\frac{\sin(\tan x)}{\tan x}\cdot\frac{\tan x}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{\tan(\sin x)}\to 1\cdot 1\cdot 1=1.$$

故所求极限为 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\tan x)}{\tan(\sin x)}=1$.

解(2): 当 $x\to 0$ 时,

$$\frac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}=\frac{e^{x^2}-1}{x^2}\cdot\frac{x^2}{\cos x-1}\to 1\cdot(-2)=-2.$$

故所求极限为 $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}=-2$.

解(3): 当 $x\to 0$ 时,

$$\frac{a^{\sin x}-1}{x}=\frac{e^{(\ln a)\sin x-1}}{(\ln a)\sin x}\cdot\frac{(\ln a)\sin x}{x}\to 1\cdot\ln a=\ln a.$$

故所求极限为 $\lim_{x\to 0}\frac{a^{\sin x}-1}{x}=\ln a$.

解(4): 当 $x \to 0$ 时,

$$\frac{\arcsin \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\ln(1-x)} = \frac{\arcsin \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}} \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}\ln(1-x)} \to 1 \cdot (-1) = -1.$$

故所求极限为 $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\ln(1-x)} = -1$.

解(5): 若 $k=0$, 则当 $x \to 0$ 时,

$$\frac{1-\sqrt{\cos(kx^2)}}{x^4} = \frac{0}{x^4} = 0 \to 0.$$

设 $k \neq 0$. 当 $x \to 0$ 时,

$$\frac{1-\sqrt{\cos(kx^2)}}{x^4} = \frac{1-\cos(kx^2)}{k^2x^4} \cdot \frac{k^2}{1+\sqrt{\cos(kx^2)}} \to \frac{1}{2} \cdot \frac{k^2}{2} = \frac{k^2}{4}.$$

故对任意常数 $k \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{\cos(kx^2)}}{x^4} = \frac{k^2}{4}$.

解(6): 令 $y = \frac{1}{x}$, 则当 $x \to \pm\infty$ 时, $y \to 0$, 且

$$x^2 \ln\left(\cos\frac{1}{x}\right) = \frac{\ln(\cos y)}{y^2}.$$

记 $\delta(y) \cos y - 1$, 则当 $y \to 0$, $\delta(y) \to 0$, 且 $\frac{\delta(y)}{y^2} \to -\frac{1}{2}$. 于是

$$\frac{\ln(\cos y)}{y^2} = \frac{\ln(1+\delta)}{\delta} \cdot \frac{\delta}{y^2} \to 1 \cdot \frac{-1}{2} = \frac{-1}{2}.$$

故所求极限为

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^2 \ln\left(\cos\frac{1}{x}\right) = \frac{-1}{2}.$$

解(7): 作变换 $y = \frac{1}{x}$, 则当 $x \to \pm\infty$ 时, $y \to 0$. 于是当 $x \to \pm\infty$ 时,

$$x(e^{\sin\frac{1}{x}} - 1) = \frac{e^{\sin y}-1}{y} = \frac{e^{\sin y}-1}{\sin y} \cdot \frac{\sin y}{y} \to 1 \cdot 1 = 1.$$

故所求极限为

$$\lim_{x\to\pm\infty} x(e^{\sin\frac{1}{x}} - 1) = 1.$$

解(8): 当 $x \to 0$ 时,

$$\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{e^x-1}=\frac{1+\tan x-(1-\tan x)}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\tan x}}\cdot\frac{1}{e^x-1}$$

$$=\frac{2\tan x}{e^x-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\tan x}}=\frac{2\tan x}{x}\cdot\frac{x}{e^x-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\tan x}}$$

$$\to 2\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=1.$$

故所求极限为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{e^x-1}=1.$$

解(9): 当 $x \to 0$ 时,

$$\frac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}{x^2}=\frac{1+x\sin x-\cos^2 x}{\sqrt{1+x\sin x}+\cos x}\cdot\frac{1}{x^2}$$

$$=\left(\frac{1-\cos^2 x}{x^2}+\frac{x\sin x}{x^2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x\sin x}+\cos x}$$

$$=\left((1+\cos x)\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{\sin x}{x}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x\sin x}+\cos x}$$

$$\to\left(2\cdot\frac{1}{2}+1\right)\frac{1}{1+1}=1.$$

故所求极限为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}{x^2}=1.$$

解(10): 当 $x \to 0^+$ 时,

$$\frac{1-\sqrt{\cos x}}{\cos\sqrt{x}-1+x}=\frac{1}{1+\sqrt{\cos x}}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{x^2}{\cos\sqrt{x}-1+x}.$$

由于

$$\frac{x}{\cos\sqrt{x}-1+x}=\frac{1}{\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}+1}\to\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}=2,$$

故

$$\frac{1-\sqrt{\cos x}}{\cos\sqrt{x}-1+x}=\frac{1}{1+\sqrt{\cos x}}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{x}{\cos\sqrt{x}-1+x}\cdot x$$

$$\to\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 0=0.$$

因此所求极限为

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{\cos\sqrt{x}-1+x}=0.$$

解(11): 当 $x\to 0^+$ 时, $x-\tan x\to 0$. 于是

$$\frac{e^x-e^{\tan x}}{x-\tan x}=e^{\tan x}\cdot\frac{e^{x-\tan x}-1}{x-\tan x}\to e^0\cdot 1=1.$$

因此所求极限为

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\tan x}}{x-\tan x}=1.$$

解(12): 当 $x\to 0$ 时, $1-\cos\frac{x}{2}\to 0$. 于是

$$\frac{1-\cos\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)}{x^3\ln(1+x)}=\frac{1-\cos\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)}{\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\frac{\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)^2}{x^3\ln(1+x)}$$

$$=\frac{1-\cos\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)}{\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\frac{\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)^2}{\left(\frac{x}{2}\right)^4}\cdot\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{x^3\ln(1+x)}$$

$$\to\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{2^4}\cdot 1=\frac{1}{2^7}.$$

因此所求极限为

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)}{x^3\ln(1+x)}=\frac{1}{2^7}.$$

解(13): 当 $x\to+\infty$ 时,

$$x\big[\ln(x-2-\ln x)\big]=\frac{\ln\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\frac{-2}{x}}\cdot(-2)\to 1\cdot(-2)=-2.$$

因此所求极限为

$$\lim_{x\to+\infty}x\big[\ln(x-2-\ln x)\big]=-2.$$

解(14): 当 $x \to +\infty$ 时, $\frac{1}{x} \to 0^+$,

$$\sqrt{x^2+2x} - \sqrt[3]{x^3-x^2} = x\left[\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}}\right]$$

$$= \frac{\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{2}}-1}{\frac{1}{x}} - \frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}}-1}{\frac{1}{x}} \to \frac{1}{2}\cdot 2 - \frac{1}{3}\cdot(-1) = 1+\frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

因此所求极限为

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x} - \sqrt[3]{x^3-x^2}\right) = \frac{4}{3}.$$

习题八: 课本第56页习题2.4题11: 假设常数 α 使得当 $x \to 0$ 时, $(1+\alpha x^2)^{\frac{1}{3}} - 1$ 与 $1-\cos x$ 是等价无穷小, 求常数 α 的值.

解: 由于 $1-\cos x$ 与 $\frac{1}{2}x^2$ 为等价无穷小, $(1+\alpha x^2)^{\frac{1}{3}} - 1$ 与 $\frac{1}{3}\alpha x^2$ 为等价无穷小. 根据题设知, 当 $x \to 0$ 时,

$$\frac{(1+\alpha x^2)^{\frac{1}{3}}-1}{1-\cos x} \to 1.$$

由此可知 $\frac{1}{2} = \frac{1}{3}\alpha$, 即 $\alpha = \frac{3}{2}$. 解答完毕.

Oct 15 作业

习题一: 证明如下五个引理.

先回忆一下记号 f^n 的意义: $f^0 = id$, 即恒同映射, $f^1 = f$, $f^2 = f\circ f$, 即 $f^2(x) = f(f(x))$, $f^3 = f\circ f\circ f$. 一般 $f^n = f\circ f\circ f\cdots\circ f$ (n 次复合). 显然 $f^{n+m} = f^n\circ f^m$.

<u>引理一</u>: 设 x_0 为映射 $f: J \hookleftarrow$ 的 k 周期点, 则 k 个点 $x_0, f(x_0), \cdots, f^{k-1}(x_0)$ 两两互异.

<u>证</u>: 设 x_0 为映射 $f: J \hookleftarrow$ 的 k 周期点, 为了清楚地说明证明思想, 考虑情形 $k=5$. 以下我们来证明 x_0, $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f^2(x_0)$, $x_3 = f^3(x_0)$, $x_4 = f^4(x_0)$ 互异. 例如证明

$x_2 \neq x_4$. 反证. 假设 $x_2 = x_4$, 则 $x_3 = f(x_2) = f(x_4) = x_0$, 即 $f^3(x_0) = x_0$. 此与 x_0 是 5 周期点的假设矛盾. 命题得证.

<u>引理二</u>: 设 x_0 为映射 $f : J \hookleftarrow$ 的 k- 周期点, $k \geq 1$ 为正整数. 若 $f^n(x_0) = x_0$, 则 n 为 k 的倍数, 即 $n = mk$.

<u>证</u>: 设 $n = mk + r$, 其中 m 为正整数, $0 \leq r < k$ 为非负整数. 于是

$$x_0 = f^n(x_0) = f^{mk+r}(x_0) = f^r \circ f^{mk}(x_0)$$

由于 x_0 是 f 的 k 周期点, 故

$$\begin{aligned}
&f^k(x_0) = x_0, \\
&f^{2k}(x_0) = f^k \circ f^k(x_0) = f^k(x_0) = x_0, \\
&f^{3k}(x_0) = f^k \circ f^{2k}(x_0) = f^k(x_0) = x_0, \\
&\qquad\vdots \\
&f^{mk}(x_0) = f^k \circ f^{(m-1)k}(x_0) = f^k(x_0) = x_0
\end{aligned}$$

因此

$$x_0 = f^n(x_0) = f^{mk+r}(x_0) = f^r \circ f^{mk}(x_0) = f^r(x_0).$$

由于 k 是最小周期, 且 $0 \leq r < k$, 故 $r = 0$. 即 n 为 k 的倍数, 即 $n = mk$. 命题得证.

<u>引理三</u>: 设函数 $f : J = [a, b] \hookleftarrow$ 连续, 则 f 必有 1 - 周期点, 即不动点.

<u>证</u>: 由假设 $f : J = [a, b] \hookleftarrow$ 连续知, $f(a) \geq a$, $f(b) \leq b$. 根据连续函数的介值性质知, 存在 $\xi \in [a, b]$, 使得 $f(\xi) = \xi$. 命题得证.

<u>引理四</u>: 设 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 连续. 若 f 有 2 - 周期点, 则 f 有 1 - 周期点, 即不动点.

<u>证</u>: 假设 $x_1 < x_2$ 为 f 的一个 2 周期轨道, 即 $f(x_1) = x_2$, $f(x_2) = x_1$, 则 $f(x_1) - x_1 > 0$, $f(x_2) - x_2 < 0$, 故根据介值定理知, 存在 $\xi \in (x_1, x_2)$, 使得 $f(\xi) = \xi$. 命题得证.

引理五: 设函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 连续. 若 f 的值域包含其定义域, 即 $f([a,b])\supseteq[a,b]$, 则 f 有不动点.

证: 由假设条件 $f([a,b])\supseteq[a,b]$ 知, 存在两点 $c,d\in[a,b]$, 使得 $f(c)=a$, $f(d)=b$. 于是 $f(c)-c=a-c\le 0$, $f(d)-d=b-d\ge 0$. 故根据介值定理知, 存在 $\xi\in\langle c,d\rangle$, 使得 $f(\xi)=\xi$. 这里记号 $\langle c,d\rangle$ 记以 c,d 为端点的闭区间, 即 $\langle c,d\rangle=[c,d]$ 或 $[d,c]$. 命题得证.

习题二: 课本第59-60页习题2.5题2: 讨论下列函数在给定点处的连续性.

(1) 设

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

讨论函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

(3) 设 $f(x)=sgn(x)$, 其中 $sgn(x)$ 为符号函数, 即

$$sgn(x)=\begin{cases} -1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

讨论函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

(5) 设

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1-e^{\frac{x}{x-2}}}{x}, & x\neq 0,2,\\ 0, & x=2,\\ \frac{1}{2}, & x=0.\end{cases}$$

讨论函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 和 $x=2$ 处的连续性.

解(1): 由于

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}e^{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{e^{\frac{1}{x^2}}}=0=f(0),$$

故 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续.

解(3): 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处间断, 因为 $\lim_{x\to 0^+}f(x)=1\neq 0=f(0)$.

解(5): 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{\frac{x}{x-2}}}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-e^{\frac{x}{x-2}}}{\frac{x}{x-2}}\cdot\frac{\frac{x}{x-2}}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{\frac{x}{x-2}}}{\frac{x}{x-2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{x-2}}{x}$$

$$=-1\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)=\frac{1}{2}=f(0).$$

函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 处间断, 因为

$$\lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{1-e^{\frac{x}{x-2}}}{x}=-\infty,$$

即 $f(x)$ 在点 $x=2$ 处的右极限不存在.

习题三: 课本第60页习题2.5题3: 确定常数 a, 使得函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续.

$$(1)\quad f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x^2}, & x<0,\\ 3e^x+a, & x\geq 0;\end{cases}\qquad (2)\quad f(x)=\begin{cases}x+a, & x\leq 0,\\ \frac{\ln(1+x)}{x}, & x>0.\end{cases}$$

解(1): 为使 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 只需使 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续即可. 为此考虑 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处的左右极限:

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(3e^x+a)=3+a,$$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}-1}{x^2}+\lim_{x\to 0^-}\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}-1}{-x^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

因此常数 a 必满足 $\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^-}f(x)$, 即 $3+a=1$. 由此得 $a=-2$.

解(2): 为使 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 只需使 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续即可. 为此考虑 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处的左右极限:

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x+a) = a.$$

因此常数 a 必满足 $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$, 即 $1 = a$. 解答完毕.

习题四: 课本第60页习题2.5题4: 确定常数 a, b, 使得函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续.

$$(1)\quad f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x < -1, \\ ax+b, & -1 \le x \le 1, \\ x^2 - x & x > 1. \end{cases} \qquad (2)\quad f(x) = \begin{cases} \sin x - 2, & x < 0, \\ ax^2+b, & 0 \le x \le 1, \\ 2^x + x & x > 1. \end{cases}$$

解(1): 为使 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 只需使 $f(x)$ 在点 $x=-1$ 和点 $x=1$ 处连续即可. 先考虑 $f(x)$ 在点 $x=-1$ 处的左右极限:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} (2x+1) = -1,$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} (ax+b) = b-a.$$

函数 $f(x)$ 在点 $x=-1$ 处连续, 当且仅当 $b-a=-1$.
再考虑 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处的左右极限:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (ax+b) = a+b,$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x^2-x) = 0.$$

函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处连续, 当且仅当 $a+b=0$.
综上知, 要使 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 当且仅当 $b-a=-1, a+b=0$. 解之得 $a=\frac{1}{2}, b=-\frac{1}{2}$.

解(2): 为使 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 只需使 $f(x)$ 在点 $x=0$ 和点 $x=1$ 处连续即可. 先考虑 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处的左右极限:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (\sin x - 2) = -2,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(ax^2+b) = b.$$

函数 $f(x)$ 在点 $x=-1$ 处连续, 当且仅当 $b=-2$.
再考虑 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处的左右极限:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(ax^2-2) = a-2,$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(2^x+x) = 3.$$

函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处连续, 当且仅当 $a-2=3$, 即 $a=5$.
综上知, 要使 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 当且仅当 $a=5$, $b=-2$.

习题五: 课本第60页习题2.5题5: 指出下列函数的间断点及其类型

$$(1)\quad f(x)=\begin{cases} x+\frac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases} \qquad (2)\quad f(x)=[|\sin x|], \qquad (3)\quad f(x)=sgn(|x|),$$

其中 $[\cdot]$ 为取整函数.

解(1): 函数 $f(x)$ 有唯一的间断点 $x=0$, 其间断点类型为本性间断.
解(2): 熟知取整函数 $[y]$ 在整数点 $y=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 处间断, 且为第一型间断. 函数 $y=\sin x$ 在点 $x=\pm k\pi+\frac{\pi}{2}$ 处取值 ±1. 除了这些点外, 函数 $[|\sin x|]=0$. 因此复合函数 $[|\sin x|]$ 的间断点集合为

$$\Big\{\pm k\pi+\frac{\pi}{2}, \big| k=0,1,2,\cdots\Big\},$$

且每个间断点均为第一型间断.
解(3): 显然函数 $f(x)=sgn(|x|)$ 有唯一间断点 $x=0$, 且间断点为第一型间断.

习题六: 课本第60页习题2.5题6: 设

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{x^{2n+1}+1}{x^{2n+1}-x^{n+1}+x},$$

试确定函数 $f(x)$ 的表达式, 间断点及其类型.

解: (i) 当 $0<|x|<1$ 时, $\lim_{n\to+\infty} x^{2n+1}=0$, $\lim_{n\to+\infty} x^{n+1}=0$, 故 $f(x)=\frac{1}{x}$;
(ii) 当 $x=1$ 时, $f(1)=2$;
(iii) 当 $x=-1$ 时, $f(-1)=0$;
(iv) 当 $|x|>1$ 时,

$$\frac{x^{2n+1}+1}{x^{2n+1}-x^{n+1}+x}=\frac{1+\frac{1}{x^{2n+1}}}{1-\frac{1}{x^{2n+1}}+\frac{1}{x^{2n}}}\to 1, \qquad n\to+\infty.$$

故 $f(x)=1$. 因此函数 $f(x)$ 可写作

$$f(x)=\begin{cases} 1, & x<-1, \\ 0, & x=-1, \\ \frac{1}{x}, & 0<|x|<1, \\ 2, & x=1, \\ 1, & x>1. \end{cases}$$

由此可见, 函数 $f(x)$ 的间断点为 $x=-1$ 和 $x=1$, 且这两个间断点均为第一型间断. (注意函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处无定义, 故 $x=0$ 通常不算作函数的间断点.) 解答完毕.

习题七: 课本第63页习题2.6题1: 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续. 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上处处不等于零, 证明 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上不变号.

反证: 若不然, 则存在两点 $x_1,x_2\in[a,b]$, 使得 $f(x_1)$ 和 $f(x_2)$ 异号, 即 $f(x_1)f(x_2)<0$. 根据连续函数的介值定理知, 介于 x_1 和 x_2 之间存在一点 ξ, 使得 $f(\xi)=0$. 矛盾.

习题八: 课本第63页习题2.6题2: 证明实系数多项式 $x^{2m}+a_1x^{2m-1}+\cdots+a_{2m-1}x+a_{2m}$ 至少有两个零点, 其中 $a_{2m}<0$.

证明: 对任意 $x\neq 0$, 由于

$$p(x)=x^{2m}\left(1+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\cdots+\frac{a_{2m-1}}{x^{2m-1}}+\frac{a_{2m}}{x^{2m}}\right),$$

且当 $|x| \to +\infty$ 时, 圆括号中除常数项 1, 其余各项均趋于零. 因此存在 $M > 0$, 使得当 $|x| \geq M$ 时, $p(x) > 0$. 再由假设知 $p(0) = a_{2m} < 0$. 于是连续函数的介值定理知, 存在 $\xi_1 \in (-M, 0)$, $\xi_2 \in (0, M)$, 使得 $f(\xi_1) = 0$, $f(\xi_2) = 0$. 证毕.

习题九: 课本第63页习题2.6题3: 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in [a, b]$, 证明存在 $\xi \in [a, b]$, 使得

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

证明: 设

$$f(\eta_1) = \min\Big\{f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)\Big\}, \quad f(\eta_2) = \max\Big\{f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)\Big\},$$

则

$$f(\eta_1) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} \leq f(\eta_2).$$

再根据连续函数的介值定理知, 存在一点 ξ 介于 η_1 和 η_2, 使得

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

命题得证.

习题十: 课本第63页习题2.6题4: 设 $f(x)$ 在区间 $[0, 2a]$ 上连续, 且 $f(0) = f(2a)$. 证明存在 $\xi \in [0, a]$, 使得 $f(\xi) = f(\xi + a)$.

证明: 令 $g(x) = f(x) - f(x + a)$, 则

$$g(0) = f(0) - f(a), \quad g(a) = f(a) - f(2a) = f(a) - f(0) = -g(0).$$

(i) 若 $g(0) = 0$, 则取 $\xi = 0$, $f(\xi) = f(a + \xi)$;
(ii) 设 $g(0) \neq 0$, 则 $g(0)$ 和 $g(a)$ 异号, 根据连续函数的介值定理知, 存在 $\xi \in [0, a]$, 使得 $g(\xi) = 0$, 此即 $f(\xi) = f(\xi + a)$. 命题得证.

习题十一: 课本第63页习题2.6题5: 设 $a<b<c$, 证明函数

$$f(x)=\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}$$

在开区间 (a,b) 和 (b,c) 内各恰有一个零点.

证明: 对于任给 $x_0\in\mathbb{R}$, 函数 $\frac{1}{x-x_0}$ 在开区间 $(-\infty,x_0)$ 和 $(x_0,+\infty)$ 上均严格单调下降. (注: 稍后我们将学习导数. 对函数 $\frac{1}{x-x_0}$ 求导得

$$\left(\frac{1}{x-x_0}\right)'=\frac{-1}{(x-x_0)^2}<0.$$

根据导数性质知, 函数 $\frac{1}{x-x_0}$ 在其定义域内严格单调下降). 根据上述分析知 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 和 (b,c) 内严格单调下降. 由于

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to b^-}f(x)=-\infty,$$

故 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 有且仅有一个零点. 同理

$$\lim_{x\to b^+}f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to c^-}f(x)=-\infty,$$

故 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 有且仅有一个零点. 命题得证.

习题十二: 课本第63页习题2.6题6(有修改): 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $f(0)=f(1)$, 证明对任意正整数 n, 存在 $\xi\in[0,1-\frac{1}{n}]$, 使得 $f(\xi)=f(\xi+\frac{1}{n})$.

证明: 令 $g(x)=f(x)-f(x+\frac{1}{n})$, 则

$$\begin{aligned}
g(0)&=f(0)-f(\tfrac{1}{n}),\\
g(\tfrac{1}{n})&=f(\tfrac{1}{n})-f(\tfrac{2}{n}),\\
g(\tfrac{2}{n})&=f(\tfrac{2}{n})-f(\tfrac{3}{n}),\\
&\vdots,\\
g(\tfrac{n-1}{n})&=f(\tfrac{n-1}{n})-f(1).
\end{aligned}$$

将上述 n 个等式左右两边分别相加得

$$g(0)+g\Big(\frac{1}{n}\Big)+g\Big(\frac{2}{n}\Big)+\cdots+g\Big(\frac{n-1}{n}\Big)=f(0)-f(1)=0.$$

(i) 情形一: 若 $g(0)=0$, 则对 $\xi=0$, $f(\xi)=f(\xi+\frac{1}{n})$, 命题成立;
(ii) 情形二: 若 $g(0)\neq 0$, 则 n 个数 $g(0)$, $g(\frac{1}{n})$, $g(\frac{2}{n})$, $\cdots$, $g(\frac{n-1}{n})$ 存在两个符号相反的数 $g(\frac{i}{n})$ 和 $g(\frac{j}{n})$, $0\leq i<j\leq n-1$. 根据连续函数的介值定理知, 存在 $\xi\in(\frac{i}{n},\frac{j}{n})\subset[0,1-\frac{1}{n}]$, 使得 $g(\xi)=0$, 此即 $f(\xi)=f(\xi+\frac{1}{n})$. 命题得证.

习题十三: 课本第63页习题2.6题7: 设 $f(x)$ 在半开半闭区间 $[a,b)$ 上连续. 若极限点 $x=b$ 处的左极限 $\lim_{x\to b^-}f(x)$ 存在(有限), 证明 $f(x)$ 在区间 $[a,b)$ 上有界.

证明: 设左极限 $\lim_{x\to b^-}f(x)=A$, 故对于 $\varepsilon=1$, 存在 $\delta>0$ (不妨设 $\delta<b-a$), 使得对于任意 $x\in[b-\delta,b)$, $|f(x)-A|<1$. 由此得

$$|f(x)|<|A|+1,\quad \forall x\in[b-\delta,b)$$

由于 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b-\delta]$ 上有界, 故存在 $M>0$, 使得 $|f(x)|\leq M$, $\forall x\in[a,b-\delta]$. 综上得

$$|f(x)|\leq\max\Big\{|A|+1,M\Big\},\qquad \forall x\in[a,b).$$

命题得证.

习题十四: 课本第63页习题2.6题9: 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上, 且满足 $f(x^2)=f(x)$, $\forall x>0$. 证明若 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续, 则 $f(x)$ 为常数函数.

证明: 对任意 $x>0$ 且 $x\neq 1$, 则 $x^{\frac{1}{2^n}}\to 1$. 由假设 $f(x^2)=f(x)$ 知

$$f(x)=f(x^{\frac{1}{2}})=f(x^{\frac{1}{2^2}})=\cdots=f(x^{\frac{1}{2^n}})$$

再根据另一个假设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续知

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}f(x^{\frac{1}{2^n}})=f(1).$$

命题得证.

习题十五: 课本第63页习题2.6题10: 设 $f(x)$ 在实轴 $\mathbb{R}$ 上连续, 且 $\lim_{|x|\to+\infty} f(x)=+\infty$. 证明 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上存在最小值, 即存在 $\xi\in\mathbb{R}$, 使得 $f(\xi)\le f(x), \forall x\in\mathbb{R}$.

证明: 由假设 $\lim_{|x|\to+\infty} f(x)=+\infty$, 存在 $M>0$, 使得对任意 x 满足 $|x|>M$, 就有 $f(x)>f(0)$. 另一方面根据连续函数的最值性知, 存在 $\xi\in[-M,M]$, 使得 $f(\xi)\le f(x)$, $\forall x\in[-M,M]$. 显然 $f(\xi)$ 就是函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的最小值. 命题得证.

习题十六: 课本第63页习题2.6题14: 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有定义. 假设存在正常数 $0<L<1$, 使得对任意两点 $x,y\in\mathbb{R}$, $|f(x)-f(y)|\le L|x-y|$. 证明
(i) 对任意一点 $a_0\in\mathbb{R}$, 由迭代 $a_{n+1}=f(a_n), \forall n\ge 1$, 产生的序列 $\{a_n\}$ 收敛;
(ii) 设 $a_n\to a$, 则 a 是 $f(x)$ 的不动点, 即 $f(a)=a$, 且 $f(x)$ 的不动点唯一.

证明(i): 对任意正整数 n 和正整数 $p\ge 1$,

$$|a_{n+1}-a_n|=|f(a_n)-f(a_{n-1})|\le L|a_n-a_{n-1}|\le L^2|a_{n-1}-a_{n-2}|\le\cdots\le L^n|a_1-a_0|,$$

于是

$$\begin{aligned}|a_{n+p}-a_n|&\le|a_{n+p}-a_{n+p-1}|+|a_{n+p-1}-a_{n+p-2}|+\cdots+|a_{n+1}-a_n|\\&\le(L^{n+p}+L^{n+p-1}+\cdots+L^n)|a_1-a_0|=\frac{L^n-L^{n+p+1}}{1-L}|a_1-a_0|\le\frac{L^n}{1-L}|a_1-a_0|.\end{aligned}$$

对任给 $\varepsilon>0$, 存在正整数

$$N=\frac{1}{\ln L}\ln\left(\frac{\varepsilon(1-L)}{|a_1-a_0|}\right)+1,$$

(这里不妨设 $a_1-a_0\ne 0$. 若不然 $a_1=a_0$, 则 $a_n=a_0, \forall n\ge 1$, 故序列 $\{a_n\}$ 收敛) 使得对任意正整数 $n>N$, 正整数 $p\ge 1$

$$|a_{n+p}-a_n|\le\frac{L^n}{1-L}|a_1-a_0|<\frac{L^N}{1-L}|a_1-a_0|<\varepsilon.$$

这就证明了序列 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 列, 故收敛.

(ii) 设 $a_n \to a$. 在迭代式 $a_{n+1} = f(a_n)$ 中, 令 $n \to +\infty$ 并利用 $f(x)$ 的连续性得 $a = f(a)$, 即 a 是 $f(x)$ 的不动点. 假设 $f(x)$ 还有一个不动点 b: $f(b) = b$ 则

$$|a - b| = |f(a) - f(b)| \leq L|a - b|.$$

由于 $0 < L < 1$, 故 $|a - b| = 0$, 即 $b = a$. 这就证明了 $f(x)$ 的不动点唯一. 命题得证.