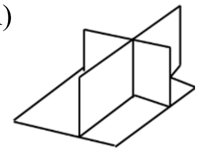
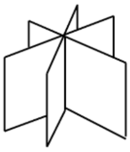
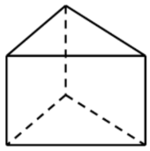
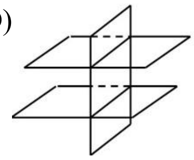
线性代数期末考---样题 A　　2025 年 12 月

一、填空题（每空 3 分，共 30 分）

1. 直线 $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z+3}{-2}$ 与 $\dfrac{x-9}{6}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-2}{-1}$ 的位置关系是________. （选择题）

   (A) 平行　　(B)重合　　(C)相交　　(D)异面

2. 设有三个平面 $\pi_i: a_i x+b_i y+c_i z=d_i$, $i=1,2,3$，它们组成的线性方程组的系数矩阵与增广矩阵的秩均为 2，则三平面可能的位置关系属于以下哪种情形__________（选择题）.

   (A) 　(B) 　(C) 　(D) 

3. 设向量 $\boldsymbol{u}_1=(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{u}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{u}_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{u}_3$ 沿 $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ 所张成平面的法向量方向投影的长度为______________.

4. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 3 阶非零方阵，伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*\neq\boldsymbol{0}$，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$，其中 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2a & 1-a & 2a\\ a & -a & a^2-2\end{bmatrix}$，则参数 $a=$____________.

5. 若向量组(i) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,3,0,5)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,1,4)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,4,-1,6)^{\mathrm{T}}$ 与向量组(ii) $\boldsymbol{\beta}_1=(a,b,6,-1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_2=(1,0,3,2)^{\mathrm{T}}$ 等价，则 $a^2+b^2=$___________.

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵，$\det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}_3)=\det(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}_3)=\det(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{I}_3)=0$，则 $\det(\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{I}_3)=$________.

7. 设方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-3 & 2 & 1\\ -5 & 3 & 1\\ 2 & a & 0\end{bmatrix}$ 的任意两个（复）特征向量均线性相关，则 $a=$___________.

8. 三元实二次型 $Q(x_1,x_2,x_3)=(x_1+2x_2+x_3)^2+[-x_1+(a+6)x_2+2x_3]^2+(2x_1+x_2+ax_3)^2$ 是正定的，则参数 a 的取值范围是______________.

9. 实二次型 $Q(x_1,\cdots,x_4)=4\sum\limits_{k=1}^{4}x_k^2-\left(\sum\limits_{k=1}^{4}x_k\right)^2$ 的正、负惯性指数的差为___________.

10. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 是线性空间 V 的两组基，过渡矩阵 $\boldsymbol{P}$ 满足 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{P}$，$\varphi$ 是 V 上的线性变换，且 φ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{P}$，则 $\varphi(\boldsymbol{\alpha}_1)+\varphi(\boldsymbol{\alpha}_2)+\varphi(\boldsymbol{\alpha}_3)$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标为_____________.

二、解答题（每题 10 分，共 70 分，需写出必要的步骤）

11. 设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$，试求 $\boldsymbol{A}^2,\boldsymbol{A}^4$，进而求 $\boldsymbol{A}^{2024}$.

12. 已知二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=3x_1^2+3x_3^2+4x_1x_2+8x_1x_3+4x_2x_3$，求正交矩阵$\boldsymbol{Q}$和对角矩阵$\boldsymbol{\varLambda}$，使得变量变换$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}$将二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)$ 化为标准形$\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varLambda}\boldsymbol{u}$，这里$\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$.

13. 设$\boldsymbol{A}$为三阶方阵，$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}9\\18\\-18\end{bmatrix}$，若方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有通解：$k_1\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix}$，$k_1,k_2\in\mathbb{R}$，试求$\boldsymbol{A}^{2025}$.

14. 已知三阶方阵$\boldsymbol{A}$满足$\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}_3\right)\left(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}_3\right)=4\boldsymbol{I}_3$，讨论$\det(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}_3)$所有可能的取值，并说明理由.

15. 设$M_2(\mathbb{R})$的两个子空间分别为$\boldsymbol{V}_1=\{\boldsymbol{A}\in M_2(\mathbb{R})|\ \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{bmatrix},x_1-x_2+x_3-x_4=0\}$，$\boldsymbol{V}_2$是由$\boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix},\boldsymbol{B}_2=\begin{bmatrix}0&2\\1&1\end{bmatrix},\boldsymbol{B}_3=\begin{bmatrix}1&2\\1&2\end{bmatrix}$张成的子空间，分别求和空间$\boldsymbol{V}_1+\boldsymbol{V}_2$与交空间$\boldsymbol{V}_1\cap\boldsymbol{V}_2$的维数以及$\boldsymbol{V}_1\cap\boldsymbol{V}_2$的一组基.（其中$V_1+V_2=\left\{W\mid W=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}\in V_1,\boldsymbol{B}\in V_2\right\}$.）

16. 设σ是n维线性空间$\boldsymbol{V}$的线性变换，$n>1$为奇数，若$\sigma^{n-1}\neq 0$，$\sigma^n=0$，证明：存在$\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{V}$，使得$\boldsymbol{\alpha}+\sigma(\boldsymbol{\alpha})$, $\sigma(\boldsymbol{\alpha})+\sigma^2(\boldsymbol{\alpha})$, $\cdots$, $\sigma^{n-2}(\boldsymbol{\alpha})+\sigma^{n-1}(\boldsymbol{\alpha})$, $\sigma^{n-1}(\boldsymbol{\alpha})+\boldsymbol{\alpha}$为$\boldsymbol{V}$的一组基.

17. 设$V=\mathbb{R}^n$（取标准内积）是一个欧氏空间，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\in V$满足$(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)=\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_j<0$, $i,j=1,2,3,4$, $i\neq j$. 证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$中任意三个向量必线性无关.