Linear Algebra	2025 Fall

Sample Solution

TA: Zening Xie — *Week 13-2*

《线性代数与几何》习题 7：1、2、3、4、5(2、3)、6(3、4)、7、8、9

Exercise 7.1 将下列二次型表示成矩阵形式 x^TAx：

1. $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2+\frac{1}{3}x_3^2+4x_1x_2+5x_1x_3+6x_2x_3$。根据二次型矩阵定义，主对角线元素为平方项系数，非对角线元素 a_{ij} 为 x_ix_j 系数的一半。

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & \frac{5}{2}\\ 2 & \frac{1}{2} & 3\\ \frac{5}{2} & 3 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

2. $Q(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_1x_2-2x_2x_3$。注意 x_2^2,x_3^2 及 x_1x_3 的系数为 0。

$$A=\begin{bmatrix}2 & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

3. $Q(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1x_2+3x_1x_3+5x_1x_4+7x_2x_3+9x_2x_4+11x_3x_4$。此二次型无平方项，主对角线全为 0。

$$A=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{7}{2} & \frac{9}{2}\\ \frac{3}{2} & \frac{7}{2} & 0 & \frac{11}{2}\\ \frac{5}{2} & \frac{9}{2} & \frac{11}{2} & 0\end{bmatrix}$$

4. $Q(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n-2}(x_i-x_{i+2})^2=\sum_{i=1}^{n-2}(x_i^2-2x_ix_{i+2}+x_{i+2}^2)$。

   - 对角元素 a_{kk}：当 $k=1,2$ 或 $k=n-1,n$ 时，该项在求和式中只出现一次（作为 x_i 或 x_{i+2}），系数为 1；当 $3\le k\le n-2$ 时，该项在 $i=k$ 和 $i=k-2$ 时各出现一次，系数为 $1+1=2$。

- 非对角元素：仅当 $|i-j|=2$ 时有交叉项 $-2x_ix_j$（对应于 x_i 和 x_{i+2}），故 $a_{i,i+2} = a_{i+2,i} = -1$，其余均为 0。

矩阵形式为（以 $n \geq 5$ 为例）：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & 0 & 2 & \ddots & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercise 7.2 写出下列对称矩阵对应的二次型 $f(x) = x^T Ax$：

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix}$。根据二次型展开公式 $\sum a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{i<j} a_{ij}x_ix_j$，可得：

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 + 10x_1x_3 + 12x_2x_3$$

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ -3 & -4 & 4 & -1 \end{bmatrix}$。同理展开，注意交叉项系数为矩阵非对角元素的 2 倍：

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_1x_4 + 6x_2x_3 - 8x_2x_4 + 8x_3x_4$$

3. A 为三对角矩阵，主对角线元素均为 a，次对角线元素均为 b。

$$f(x_1, \cdots, x_n) = a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2b\sum_{i=1}^{n-1} x_ix_{i+1}$$

4. 观察矩阵 A 的规律：主对角元 $a_{ii} = i$；对于上方三角区域 $(i < j)$，第 i 行的元素均为 $\frac{1}{i+1}$（例如第 1 行均为 1/2，第 2 行均为 1/3）。

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} ix_i^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} \frac{1}{i+1}x_ix_j$$

或者写成嵌套求和形式：

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} kx_k^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{2}{i+1}x_i(x_{i+1} + x_{i+2} + \cdots + x_n)$$

Exercise 7.3 证明：

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \text{与} \quad \begin{bmatrix} \lambda_{i_1} & & & \\ & \lambda_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{i_n} \end{bmatrix}$$

相似，其中 $(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列。

Proof:

记题中两个对角矩阵分别为 A 和 B，即 $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$，$B = \mathrm{diag}(\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \cdots, \lambda_{i_n})$。设 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的标准基向量，即 e_k 是第 k 个分量为 1，其余分量为 0 的列向量。对于对角矩阵 A，有 $Ae_k = \lambda_k e_k$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$。构造置换矩阵 P，其列向量为标准基向量按照排列 $(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 的顺序排列，即：

$$P = \begin{bmatrix} e_{i_1} & e_{i_2} & \cdots & e_{i_n} \end{bmatrix}$$

由于 $e_{i_1}, \cdots, e_{i_n}$ 只是 $e_1, \cdots, e_n$ 的重新排列，它们仍然线性无关，因此 P 是可逆矩阵（事实上是正交矩阵）。考察乘积 AP：

$$AP = A \begin{bmatrix} e_{i_1} & e_{i_2} & \cdots & e_{i_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ae_{i_1} & Ae_{i_2} & \cdots & Ae_{i_n} \end{bmatrix}$$

利用特征值关系 $Ae_k = \lambda_k e_k$，可得：

$$AP = \begin{bmatrix} \lambda_{i_1} e_{i_1} & \lambda_{i_2} e_{i_2} & \cdots & \lambda_{i_n} e_{i_n} \end{bmatrix}$$

再考察乘积 PB：利用矩阵乘法的列分块规则，

$$PB = \begin{bmatrix} e_{i_1} & e_{i_2} & \cdots & e_{i_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{i_1} & & & \\ & \lambda_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{i_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{i_1} e_{i_1} & \lambda_{i_2} e_{i_2} & \cdots & \lambda_{i_n} e_{i_n} \end{bmatrix}$$

对比可知 $AP = PB$。因为 P 可逆，所以两边同时左乘 P^{-1} 得：

$$P^{-1}AP = B$$

根据矩阵相似的定义，矩阵 A 与 B 相似。

Exercise 7.4 设 A, B, C, D 是 n 阶对称阵，已知 A 与 B 相合，C 与 D 相合，试问以下命题哪些是正确的？如果正确，试证明之。

(1) $A + C$ 与 $B + D$ 相合；

(2) AC 与 BD 相合；

(3) $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}$ 相合；

(4) $\begin{bmatrix} A & I \\ 0 & C \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} B & I \\ 0 & D \end{bmatrix}$ 相合。

Solution:

命题 (3) 是正确的，命题 (1)、(2)、(4) 是错误的。

1. 证明命题 (3) 正确：

因为 A 与 B 相合，存在可逆矩阵 P 使得 $P^TAP = B$。因为 C 与 D 相合，存在可逆矩阵 Q 使得 $Q^TCQ = D$。构造分块矩阵 $S = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}$。由于 P, Q 可逆，则 $\det(S) = \det(P)\det(Q) \neq 0$，故 S 可逆。考察矩阵 $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$ 在合同变换 S 下的结果：

$$S^T \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} S = \begin{bmatrix} P^T & 0 \\ 0 & Q^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}$$

利用分块矩阵乘法展开：

$$= \begin{bmatrix} P^TA & 0 \\ 0 & Q^TC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P^TAP & 0 \\ 0 & Q^TCQ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

根据合同矩阵的定义，$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}$ 相合。

2. 举反例说明 (1)、(2)、(4) 错误：

- **对于 (1)：** 取 $A = I, B = I$（相合），$C = -I, D = -4I$（相合，取 $Q = 2I$）。则 $A + C = O$（零矩阵），$B + D = -3I$。零矩阵只与零矩阵相合，显然 O 与 $-3I$ 不相合。故 (1) 错误。

- **对于 (2)：** 取 $A = \mathrm{diag}(1, -1), B = \mathrm{diag}(1, -1)$。取 $C = \mathrm{diag}(1, -1), D = \mathrm{diag}(-1, 1)$（$C, D$ 特征值相同，仅顺序不同，故相合）。则乘积 $AC = I$，而 $BD = \mathrm{diag}(-1, -1) = -I$。单位矩阵 I 正定，$-I$ 负定，由惯性定理知它们不相合。故 (2) 错误。

- **对于 (4)：** 取 $n = 1$，令 $A = I, B = I, C = I, D = 4I$。设 $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$。$\det(M_1) = 1, \det(M_2) = 4$。若存在可逆矩阵 S 使得 $S^TM_1S = M_2$，则对等式两边取行列式得 $(\det S)^2 \cdot 1 = 4$，即 $\det S = \pm 2$。另一方面，考察 2×2 矩阵在合同变换下反对称部分的

变化。M_1 的反对称部分对应的标量为 $(M_1)_{12}-(M_1)_{21}=1-0=1$。$M_2$ 的反对称部分对应的标量为 $(M_2)_{12}-(M_2)_{21}=1-0=1$。对于 2×2 矩阵，有性质 S^TMS 的反对称标量等于原矩阵的反对称标量乘以 $\det(S)$。故需满足 $1\cdot\det S=1$，即 $\det S=1$。这与 $\det S=\pm 2$ 矛盾，故不存在这样的 S。故 (4) 错误。

Exercise 7.5 求正交线性替换 $x=Py$, 化下列实二次型为标准形：

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$

(3) $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+3x_3^2+4x_1x_2+8x_1x_3+4x_2x_3$

Solution:

(2) 解：二次型的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$$

计算特征多项式：

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&-1\\-1&\lambda&-1\\-1&-1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+1)^2$$

求得特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=-1$。

- 当 $\lambda_1=2$ 时，解方程 $(2I-A)x=0$，得基础解系 $\xi_1=(1,1,1)^T$。单位化得 $p_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$。
- 当 $\lambda_2=\lambda_3=-1$ 时，解方程 $(-I-A)x=0$，即 $x_1+x_2+x_3=0$。选取两个正交的基础解系：$\eta_2=(1,-1,0)^T$ 和 $\eta_3=(1,1,-2)^T$。单位化得 $p_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^T,p_3=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)^T$。

令 $P=[p_1,p_2,p_3]=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&-\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$。作正交线性替换 $x=Py$，二次型化为标准形：

$$f=2y_1^2-y_2^2-y_3^2$$

(3) 解：二次型的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}3&2&4\\2&0&2\\4&2&3\end{bmatrix}$$

计算特征多项式：

$$|\lambda I - A| = (\lambda - 8)(\lambda + 1)^2$$

求得特征值为 $\lambda_1 = 8, \lambda_2 = \lambda_3 = -1$。

- 当 $\lambda_1 = 8$ 时，解方程 $(8I - A)x = 0$，得基础解系 $\xi_1 = (2, 1, 2)^T$。单位化得 $p_1 = \dfrac{1}{3}(2, 1, 2)^T$。
- 当 $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ 时，解方程 $(-I - A)x = 0$，化简得 $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$。选取两个正交的基础解系：取 $\eta_2 = (1, -2, 0)^T$，再取 $\eta_3 = \xi_1 \times \eta_2 = (4, 2, -5)^T$。单位化得 $p_2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(1, -2, 0)^T, p_3 = \dfrac{1}{3\sqrt{5}}(4, 2, -5)^T$。

令 $P = [p_1, p_2, p_3] = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{5}{3\sqrt{5}} \end{bmatrix}$。作正交线性替换 $x = Py$，二次型化为标准形：

$$f = 8y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$$

Exercise 7.6 (3) & (4) (Matrix Method) 用初等变换法（矩阵法）将下列二次型化为标准形，并求可逆线性替换及二次型的符号差：

(3) $Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 3x_2x_3 + 4x_1x_3$

(4) $Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_4^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 - 6x_2x_4 + 2x_3x_4$

Solution:

(3) 解：二次型的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 2 & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$。构造分块矩阵 $\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix}$，对该矩阵的列进行初等变换，同时对 A 部分进行相应的行变换（以保持对称性，得到对角阵 $\Lambda = C^T AC$）。

$$\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 2 & \frac{3}{2} & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_1 + r_2]{c_1 + c_2} \left(\begin{array}{ccc} 2 & 1 & \frac{7}{2} \\ 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

接下来消去第一行和第一列的非对角元：

$$\xrightarrow[r_3-\frac{7}{4}r_1]{c_3-\frac{7}{4}c_1}\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -\frac{1}{4}\\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{49}{8}\\ \hline 1 & 0 & -\frac{7}{4}\\ 1 & 1 & -\frac{7}{4}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2-\frac{1}{2}r_1]{c_2-\frac{1}{2}c_1}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{49}{8}\\ \hline 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{4}\\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{4}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

消去第二行和第二列的非对角元：

$$\xrightarrow[r_3-\frac{1}{2}r_2]{c_3-\frac{1}{2}c_2}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & -6\\ \hline 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2}\\ 1 & \frac{1}{2} & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Lambda\\ C\end{pmatrix}$$

得到标准形 $2y_1^2-\dfrac{1}{2}y_2^2-6y_3^2$。正惯性指数 $p=1$，负惯性指数 $q=2$，符号差 $s=1-2=-1$。可逆线性替换为 $x=Cy$，即：

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2}\\ 1 & \frac{1}{2} & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}$$

(4) 解：二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & -1\\ 2 & 3 & -1 & -3\\ 0 & -1 & 0 & 1\\ -1 & -3 & 1 & 4\end{pmatrix}$。构造分块矩阵 $\begin{pmatrix}A\\ I\end{pmatrix}$：

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & -1\\ 2 & 3 & -1 & -3\\ 0 & -1 & 0 & 1\\ -1 & -3 & 1 & 4\\ \hline 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_2-2r_1\\ r_4+r_1}]{\substack{c_2-2c_1\\ c_4+c_1}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1 & 3\\ \hline 1 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

利用 $a_{22}=-1$ 消去非对角元：

$$\xrightarrow[\substack{r_3-r_2\\ r_4-r_2}]{\substack{c_3-c_2\\ c_4-c_2}}\left(\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&2\\0&0&2&4\\\hline 1&-2&2&3\\0&1&-1&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right)$$

利用 $a_{33}=1$ 消去非对角元：

$$\xrightarrow[r_4-2r_3]{c_4-2c_3}\left(\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\\hline 1&-2&2&-1\\0&1&-1&1\\0&0&1&-2\\0&0&0&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\Lambda\\C\end{pmatrix}$$

得到标准形 $y_1^2-y_2^2+y_3^2$。正惯性指数 $p=2$，负惯性指数 $q=1$，符号差 $s=2-1=1$。可逆线性替换为 $x=Cy$，即：

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2&2&-1\\0&1&-1&1\\0&0&1&-2\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}$$

Exercise 7.7 用初等变换法将下列二次型化成标准形，并求可逆线性替换：

1. $Q(x)=x^T\begin{bmatrix}2&1&1\\1&3&2\\1&2&1\end{bmatrix}x$
2. $Q(x)=x^T\begin{bmatrix}0&-1&0\\-1&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}x$
3. $Q(x)=x^T\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&-1\\1&-1&0\end{bmatrix}x$

4. $Q(x) = x^T \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} x$

Solution:

(1) 解:构造分块矩阵 $\left(\dfrac{A}{I}\right)$,对列进行初等变换,同时对 A 部分进行对应的行变换(记为 $r \sim, c \sim$)。

$$\left(\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2-\frac{1}{2}r_1, r_3-\frac{1}{2}r_1]{c_2-\frac{1}{2}c_1, c_3-\frac{1}{2}c_1} \left(\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-\frac{3}{5}r_2]{c_3-\frac{3}{5}c_2} \left(\begin{array}{c|c|c} 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ \hline 0 & 0 & -\frac{2}{5} \\ \hline 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

故标准形为 $2y_1^2 + \frac{5}{2}y_2^2 - \frac{2}{5}y_3^2$。可逆线性替换为 $x = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} y$。

(2) 解:

$$\left(\begin{array}{ccc} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_1 \leftrightarrow r_2]{c_1 \leftrightarrow c_2} \left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-r_1]{c_3-c_1} \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3+r_2]{c_3+c_2} \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

故标准形为 $y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$。可逆线性替换为 $x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} y$。

(3) 解：

$$\left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_1+r_2]{c_1+c_2} \left(\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2-\frac{1}{2}r_1]{c_2-\frac{1}{2}c_1} \left(\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-2r_2]{c_3-2c_2} \left(\begin{array}{c|c|c} 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \\ \hline 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

故标准形为 $2y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 + 2y_3^2$。可逆线性替换为 $x = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} y$。

(4) 解：

二次型对应的对称矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

利用初等变换法，构造分块矩阵 $(A \mid I)$。对 A 进行合同变换（即做行变换时，对 A 的列和下方的 I 的列做同样的列变换），将 A 化为对角矩阵。

第一步：$r_1 \leftrightarrow r_4, c_1 \leftrightarrow c_4$（交换行列，使 $a_{11} \neq 0$）：

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

第二步：$r_2 + r_1, r_3 - 2r_1, r_4 - r_1$（消去第一列/行其余元素）：

$$\xrightarrow[c_2+c_1,c_3-2c_1,c_4-c_1]{r_2+r_1,r_3-2r_1,r_4-r_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & 1 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

第三步：r_3+3r_2, r_4+2r_2（消去第二列/行其余元素）：

$$\xrightarrow[c_3+3c_2,c_4+2c_2]{r_3+3r_2,r_4+2r_2}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

第四步：$r_4-\dfrac{3}{5}r_3$（消去第三列/行其余元素）：

$$\xrightarrow[c_4-\frac{3}{5}c_3]{r_4-\frac{3}{5}r_3}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6}{5} & 1 & 1 & 1 & \frac{2}{5} \end{array}\right)$$

此时，A 已化为对角矩阵 $\Lambda=\operatorname{diag}(1,-1,5,\dfrac{6}{5})$，右侧即为变换矩阵 C^T（注意：若构造的是 $(A \mid I)$ 形式，对 I 做列变换得到的是 C；若这里是上方 A 下方 I 的形式则直接是 C。根据上述增广矩阵的写法，右侧块即为所求变换矩阵 C）。

故标准形为

$$Q(y)=y_1^2-y_2^2+5y_3^2+\frac{6}{5}y_4^2$$

所求的可逆线性变换为 $x=Cy$，其中变换矩阵为

$$C=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} \\ 1 & 1 & 1 & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

Exercise 7.8 设 A 是一个秩为 r 的 n 阶对称矩阵，试证明 A 可表示为 r 个秩为 1 的对称矩阵之和。

Proof:

默认对称矩阵指的是实对称的。因为 A 是 n 阶实对称矩阵，根据谱分解定理（实对称矩阵必可正交对角化），存在正交矩阵 Q 使得：

$$A=Q\Lambda Q^T$$

其中 $\Lambda=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ 是以 A 的特征值为对角元的对角矩阵。已知 A 的秩为 r，这意味着 A 恰有 r 个非零特征值。不失一般性，设前 r 个特征值非零，即 $\lambda_i\neq 0$ $(1\leq i\leq r)$，其余特征值

为零 $\lambda_j = 0$ $(r < j \le n)$。将正交矩阵 Q 按列分块为 $Q = [q_1, q_2, \cdots, q_n]$，其中 q_i 是 $\mathbb{R}^n$ 中的标准正交基（即 A 的单位特征向量）。利用矩阵乘法的展开式，A 可以表示为：

$$A = Q\Lambda Q^T = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i q_i q_i^T$$

由于当 $i > r$ 时 $\lambda_i = 0$，求和式只需保留前 r 项：

$$A = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i q_i q_i^T$$

令 $E_i = \lambda_i q_i q_i^T$ $(i = 1, 2, \cdots, r)$。我们需要证明 E_i 是秩为 1 的对称矩阵。

1. **对称性：**

$$E_i^T = (\lambda_i q_i q_i^T)^T = \lambda_i (q_i^T)^T q_i^T = \lambda_i q_i q_i^T = E_i$$

   所以 E_i 是对称矩阵。

2. **秩为 1：**由于 q_i 是非零向量（它是特征向量），矩阵 $q_i q_i^T$ 的每一列都是 q_i 的倍数，其列空间由 q_i 生成，因此秩为 1。又因为 $\lambda_i \neq 0$，乘以非零常数不改变矩阵的秩，所以 $\operatorname{rank}(E_i) = \operatorname{rank}(\lambda_i q_i q_i^T) = 1$。

综上所述，$A = E_1 + E_2 + \cdots + E_r$，即 A 被表示为了 r 个秩为 1 的对称矩阵之和。

Exercise 7.9 设 A 是一个 n 阶对称阵，如果对任意 n 维向量 $x \in \mathbb{R}^n$，有 $x^T A x = 0$，那么 $A = 0$。

Proof:

设矩阵 A 的元素为 a_{ij}。首先，取 x 为单位坐标向量 e_k（即第 k 个分量为 1，其余分量为 0 的列向量，其中 $k = 1, 2, \cdots, n$）。根据题设条件 $x^T A x = 0$，代入计算得：

$$e_k^T A e_k = a_{kk} = 0$$

这说明矩阵 A 的对角线元素全为零。其次，对于任意 $i \neq j$，取 $x = e_i + e_j$。代入条件 $x^T A x = 0$ 并展开：

$$(e_i + e_j)^T A (e_i + e_j) = e_i^T A e_i + e_i^T A e_j + e_j^T A e_i + e_j^T A e_j = 0$$

由于已经证明对角元 $e_i^T A e_i = a_{ii} = 0$ 和 $e_j^T A e_j = a_{jj} = 0$，且由矩阵乘法定义知 $e_i^T A e_j = a_{ij}$，$e_j^T A e_i = a_{ji}$。于是上式简化为：

$$a_{ij} + a_{ji} = 0$$

因为 A 是对称矩阵，满足 $a_{ij} = a_{ji}$。将此代入上式得：

$$2a_{ij} = 0 \implies a_{ij} = 0$$

这意味着矩阵 A 的所有非对角线元素也全为零。综上所述，A 的所有元素均为零，即 $A = 0$。