清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程 **微积分 A1**　　A 卷　　2025 年 1 月 9 日 9:00-11:00

系名________ **班级**________ **姓名**________ **学号**________

一．填空题（每个空 3 分，共 10 题）（请将答案直接填写在答题卡上!）

1. 曲线 $y = x + x^2 \sin\dfrac{1}{x^2+1}$ 的渐近线为________.

答案：$y = x+1$.

2. 曲线段 $y = \dfrac{2}{3}x\sqrt{x}\ \ (0 \le x \le 8)$ 的弧长为________.

答案：$\dfrac{52}{3}$

3. 函数 $f(x) = x(1-x)^{\frac{2}{3}}\ (0 < x < 1)$ 在 $x =$________处取得极大值.

答案：$\dfrac{3}{5}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{\int_0^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t} =$________.

答案：$\dfrac{1}{2}$

5. $\int_0^x |\mathrm{e}^t - 1|\,\mathrm{d}t =$________.

答案：$\begin{cases} \mathrm{e}^x - x - 1, & x \ge 0 \\ x - \mathrm{e}^x + 1, & x < 0 \end{cases}$

6. 广义积分 $\int_0^1 \dfrac{(-\ln x)^p}{\sqrt{x}(1-x)^2}\mathrm{d}x$ 收敛，则 p 的取值范围为________.

答案：$p > 1$

7. 微分方程初值问题 $\begin{cases} (1+\mathrm{e}^x)yy' = \mathrm{e}^x \\ y(0) = \sqrt{2\ln 2} \end{cases}$ 的解为 $y(x) =$________.

答案：$\sqrt{2\ln(1+\mathrm{e}^x)}$

8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{3\sin^2 x+\cos^2 x}=$________.

答案：$\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$

9. 微分方程 $x^2y''+xy'-4y=0$ 的通解为________.

答案：$y=C_1x^2+C_2x^{-2}$

10. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n(1^2+2^2+\cdots+n^2)}=$________.

答案：$\frac{3}{4}$

二. 解答题（请写出详细的计算过程和必要的根据！）

11. （12 分）设 $f(x)=x\mathrm{e}^{-x^2}\ (x>0)$.

(I) 求 $f(x)$ 的单调区间、极值点与极值、凸凹性区间、拐点和渐近线；

(II) 画出曲线 $y=f(x)$ 的草图.

解：(I) $f(x)=x\mathrm{e}^{-x^2}\ (x>0)$ ，

$$f'(x)=(1-2x^2)\mathrm{e}^{-x^2},\qquad f'(x)=0\Rightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

所以 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$ 单调增，$(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty)$ 单调减. $x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 为 $f(x)$ 的极大（最大）值点，极大（最大）值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{\frac{-1}{2}}$.

$$f''(x)=2x(2x^2-3)\mathrm{e}^{-x^2},\qquad f''(x)=0\Rightarrow x=\frac{\sqrt{6}}{2},$$

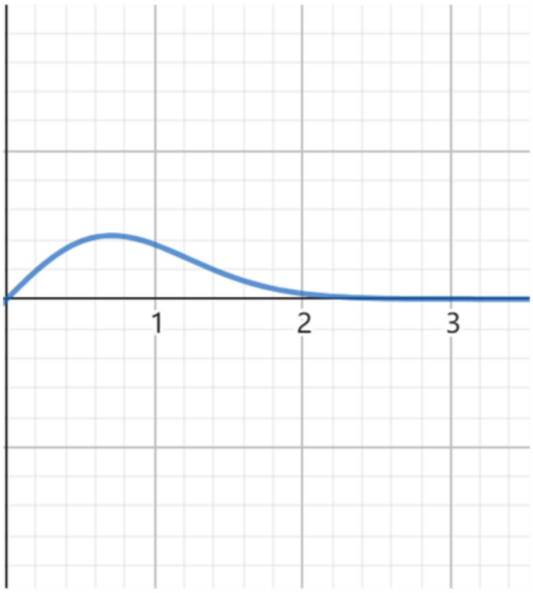
所以曲线 $y=f(x)$ 在 $(0,\frac{\sqrt{6}}{2})$ 上凸，在 $(\frac{\sqrt{6}}{2},+\infty)$ 下凸. $(\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2}\mathrm{e}^{\frac{-3}{2}})$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}=0,\quad y=0$ 是曲线 $y=f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时的渐近线.

（没有竖直渐近线和斜渐近线）

(II)

x	$(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2})$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$(\frac{\sqrt{6}}{2},+\infty)$
$y'(x)$	+	0	−		−
$y''(x)$	−	−	−	0	+
$y(x)$	单调增，上凸	极大	单调减，上凸	拐点	单调减，下凸



（表格非必须，可以只画示意图）

12. （10 分）当参数 $p>0$ 满足什么条件时广义积分 $\int_1^{+\infty}\left(\frac{x}{x^2+p}-\frac{p}{x+1}\right)\mathrm{d}x$ 收敛？并求此时的广义积分值.

解：$\int_1^{+\infty}\left(\frac{x}{x^2+p}-\frac{p}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{(1-p)x^2+x-p^2}{(x+1)(x^2+p)}\mathrm{d}x$，

所以当 $p=1$ 时，被积函数与 $\frac{1}{x^2}$ 同阶，广义积分 $\int_1^{+\infty}\left(\frac{x}{x^2+p}-\frac{p}{x+1}\right)\mathrm{d}x$ 收敛.

当 $p>0$ 且 $p\neq 1$ 时，被积函数与 $\frac{1}{x}$ 同阶，广义积分 $\int_1^{+\infty}\left(\frac{x}{x^2+p}-\frac{p}{x+1}\right)\mathrm{d}x$ 发散.

当 $p=1$ 时广义积分

$$\int_1^{+\infty}\left(\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty}\int_1^{A}\left(\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{A\to+\infty}\left(\ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}\Bigg|_1^A\right)=\frac{\ln 2}{2}.$$

13. （10 分）通过变量代换 $x=\sin t, t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, 化简以下微分方程并求其通解

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=0\ (-1<x<1).$$

解：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{\cos t}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$,

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{\cos t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\left(\frac{\sin t}{\cos^2 t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{\cos t}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right)\frac{1}{\cos t},$$

所以微分方程 $(1-x^2)\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=0$ 在变量代换 $x=\sin t$ 下化为

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+y=0,$$

其通解为 $y=C_1\sin t+C_2\cos t$.故微分方程 $(1-x^2)\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=0\ (-1<x<1)$ 的通解为

$$y=C_1x+C_2\sqrt{1-x^2}.$$

14. （10 分）记圆周 $\begin{cases}x=2+\cos t\\ y=\sin t\end{cases}(0\le t\le 2\pi)$ 绕 y 轴旋转一周所得的旋转面为 S .

(I) 求 S 的面积；

(II) 求由 S 所包围旋转体体积.

解：(I) 法一: 圆周 $\begin{cases}x=2+\cos t\\ y=\sin t\end{cases}(0\le t\le 2\pi)$ 绕 y 轴旋转一周所得的旋转面 S 的面积为

$$S=\int_0^{2\pi}2\pi\,x(t)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t=2\pi\int_0^{2\pi}(2+\cos t)\mathrm{d}t=8\pi^2.$$

法二：由 Guldin 第一定理知旋转面 S面积,等于圆周 $(x-2)^2+y^2=1$的弧长 2π, 乘以圆心(形心) (2,0) 绕 y 轴旋转一周的周长 $2\pi\cdot 2=4\pi$, 即面积为 $2\pi\cdot 4\pi=8\pi^2$.

(II) **法一:** $\begin{cases}x=2+\cos t\\ y=\sin t\end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$ 即圆周 $(x-2)^2+y^2=1$. 因此 S 所包围旋转体体积

$$V=2\int_1^3 2\pi\,x\sqrt{1-(x-2)^2}\,\mathrm{d}x=4\pi\int_1^3 x\sqrt{1-(x-2)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=4\pi\int_{-1}^1(t+2)\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}x=8\pi\int_{-1}^1\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}x=4\pi^2.$$

法二: $V=\int_{-1}^1\pi(2+\sqrt{1-y^2})^2\mathrm{d}y-\int_{-1}^1\pi(2-\sqrt{1-y^2})^2\mathrm{d}y=8\pi\int_{-1}^1\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}y=4\pi^2.$

法三: $V=\int_0^{2\pi}\pi\,x^2(t)y'(t)\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\pi(2+\cos t)^2\cos t\mathrm{d}t$

$$=\pi\int_0^{2\pi}(4\cos t+4\cos^2 t+\cos^3 t)\mathrm{d}t=\pi\int_0^{2\pi}4\cos^2 t\mathrm{d}t=\pi\int_0^{2\pi}2(1+\cos 2t)\mathrm{d}t=4\pi^2.$$

法四：由 Guldin 第二定理知, 所求旋转体的体积, 等于圆盘 $(x-2)^2+y^2\le 1$的面积 π， 乘以圆盘的圆心(形心) (2,0) 绕 y 轴旋转一周的周长 $2\pi\cdot 2=4\pi$, 即所求体积为 $\pi\cdot 4\pi=4\pi^2$.

15. （10 分）设 $I=\int_0^2\frac{x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2-x}}\mathrm{d}x$.

(I) 证明 $I=\int_0^2\frac{1}{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{2-t}}\mathrm{d}t$；

(II) 求积分 I 的值.

证明：解法一：

(I) 令 $t=2-x$，则

$$I=\int_0^2\frac{2-t}{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{2-t}}\mathrm{d}t=\int_0^2\frac{2}{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{2-t}}\mathrm{d}t-I,$$

因此 $I=\int_0^2\frac{1}{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{2-t}}\mathrm{d}t$.

(II) $I=\int_0^2\frac{1}{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{2-t}}\mathrm{d}t=\int_0^2\frac{\mathrm{e}^{t-2}}{\mathrm{e}^{2t-2}+1}\mathrm{d}t=\frac{1}{\mathrm{e}}\int_0^2\frac{1}{\mathrm{e}^{2(t-1)}+1}\mathrm{d}\mathrm{e}^{t-1}$

$$=\frac{1}{\mathrm{e}}\arctan \mathrm{e}^{t-1}\Big|_0^2=\frac{1}{\mathrm{e}}\left(\arctan \mathrm{e}-\arctan\frac{1}{\mathrm{e}}\right).$$

解法二：

(I) $\int_0^2 \frac{x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2-x}}\mathrm{d}x-\int_0^2 \frac{1}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2-x}}\mathrm{d}x=\int_0^2 \frac{x-1}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2-x}}\mathrm{d}x=\int_{-1}^1 \frac{t}{\mathrm{e}^{1+t}+\mathrm{e}^{1-t}}\mathrm{d}t=0$，（奇函数积分）

所以 $I=\int_0^2 \frac{1}{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{2-t}}\mathrm{d}t$.

(II) 同解法一.

16. （10 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导, $f(0)=1$, 且满足

$$(x^2+1)f'(x)+(x^2+1)f(x)-2\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t=0.$$

(I) 求 $f'(x)$ 的表达式；

(II) 证明当 $x\in[0,+\infty)$ 时， $\mathrm{e}^{-x}\le f(x)\le 1$.

解：(I) 等式 $(x^2+1)f'(x)+(x^2+1)f(x)-2\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t=0$ 两边对 x 求导，得

$$(x^2+1)f''(x)+(x+1)^2 f'(x)=0,$$

解得
$$f'(x)=\frac{C\mathrm{e}^{-x}}{x^2+1}.$$

在等式 $(x^2+1)f'(x)+(x^2+1)f(x)-2\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t=0$ 中令 $x=0$，得

$$f'(0)+f(0)=0,$$

已知 $f(0)=1$, 所以 $f'(0)=-f(0)=-1$， $f'(x)=-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^2+1}$.

(II) 当 $x\in[0,+\infty)$ 时， $f'(x)<0$，而 $f(0)=1$，所以当 $x\in[0,+\infty)$ 时， $f(x)\le 1$.

当 $x\in[0,+\infty)$ 时， $f'(x)=-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^2+1}>-\mathrm{e}^{-x}$，所以

$$f(x)\ge -\int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x}+1=\frac{1}{\mathrm{e}^x}.$$

故当 $x\in[0,+\infty)$ 时， $\mathrm{e}^{-x}\le f(x)\le 1$.

17. （8 分）设 $x\in(0,1)$, 证明：

(I) 对任意正整数 n, 都有 $\frac{n^x\cdot n!}{(x+1)\cdots(x+n)}<1$;

(II) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^x\cdot n!}{(x+1)\cdots(x+n)}$ 存在（有限）.

证明：(I) $\frac{n^x\cdot n!}{(x+1)\cdots(x+n)}<1 \Leftrightarrow ln(1+x)+ln(1+\frac{x}{2})+\cdots+ln(1+\frac{x}{n})>x\,ln\,n.$

令 $f(x)=ln(1+x)+ln(1+\frac{x}{2})+\cdots+ln(1+\frac{x}{n-1})-x\,ln\,n, x\in[0,1].$

则

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2+x}+\cdots+\frac{1}{n-1+x}-ln\,n,$$

$$f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{(2+x)^2}-\cdots-\frac{1}{(n-1+x)^2}<0,$$

故 $f(x)$ 严格上凸，而 $f(0)=f(1)=0,$ 因此 $f(x)>0,\forall x\in(0,1).$

故 $f(x)+\ln(1+\frac{x}{n})>0,\forall x\in(0,1),$ 即

$$ln(1+x)+ln(1+\frac{x}{2})+\cdots+ln(1+\frac{x}{n})>x\,ln\,n.$$

(II) 记 $a_n=\frac{n^x\cdot n!}{(x+1)\cdots(x+n)}$,由(I)知 $a_n<1,$ 要证 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$ 存在（有限），只要证 $\{a_n\}$ 单调递增.

注意到对任意 $x\in(0,1)$ 及正整数 $n,$ 有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\ge1\Leftrightarrow(\frac{n+1}{n})^x\ge\frac{x+n+1}{n+1}\Leftrightarrow x\ln(1+\frac{1}{n})\ge\ln\frac{x+n+1}{n+1},$$

令 $g(x)=x\ln(1+\frac{1}{n})-\ln\frac{x+n+1}{n+1},x\in[0,1],$ 则

$$g'(x)=\ln(1+\frac{1}{n})-\frac{1}{n+1+x}>\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+1+x}\ge0,$$

故 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增， $g(x)\ge g(0)=0,\ \forall x\in(0,1).$ 即 $\frac{a_{n+1}}{a_n}\ge1$. 命题得证.

证法二：(I)对任意 $x\in(0,1)$ 及 $t>0,$ 由带 Lagrange 余项的 Taylor 公式，$\exists\xi\in(0,t),$ 使得

$$(1+t)^x = 1 + xt + \frac{x(x-1)}{2}(1+\xi)^{x-2}t^2 < 1 + xt.$$

因此, 对任意 $x \in (0,1)$ 及正整数 n, 有

$$n^x < (n+1)^x = \left(1+\frac{1}{1}\right)^x \cdot \left(1+\frac{1}{2}\right)^x \cdots \left(1+\frac{1}{n}\right)^x$$

$$< (1+x)(1+\frac{x}{2})\cdots(1+\frac{x}{n}) = \frac{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}{n!}.$$

故 $\frac{n^x \cdot n!}{(x+1)\cdots(x+n)} < 1.$

(II) 同证法一.

三. 附加题（本题全对才给分，其分数不计入总评，仅用于评判 A+）

18. 已知定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足如下条件：

(I) $f(x) > 0$; (II) $f(1) = 1, f(x+1) = xf(x)$; (III) $\varphi(x) = \ln f(x)$ 是下凸函数.

试证：$f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^x \cdot n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$ $(0 < x < 1)$.

证明：由性质(II)可得， $\forall x \in (0,1)$ 及任意正整数 n, 有

$$\varphi(n+1) = \ln(n!), \quad \varphi(x+n+1) = \varphi(x) + ln[x(x+1)\cdots(x+n)].$$

$\varphi(x)$ 为下凸函数，而 $n+1 < n+1+x < n+2$, 比较割线的斜率得

$$\frac{\varphi(n+1)-\varphi(n)}{(n+1)-n} \le \frac{\varphi(x+n+1)-\varphi(n+1)}{(x+n+1)-(n+1)} \le \frac{\varphi(n+2)-\varphi(n+1)}{(n+2)-(n+1)},$$

即
$$\ln n \le \frac{\varphi(x+n+1)-\ln(n!)}{x} \le \ln(n+1),$$

$$x\ln n + \ln(n!) \le \varphi(x+n+1) \le x\ln(n+1) + \ln(n!).$$

上式各项同时减去 $ln[x(x+1)\cdots(x+n)]$,得

$$ln\frac{n^x \cdot n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \le \varphi(x) \le ln\frac{(n+1)^x \cdot n!}{x(x+1)\cdots(x+n)},$$

$$0 \le \varphi(x) - ln\frac{n^x \cdot n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \le x\,ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

令 $n \to \infty$, 由夹挤原理得

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\varphi(x) - ln\frac{n^x \cdot n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}\right) = 0.$$

已知$\forall x \in (0,1)$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^x \cdot n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$存在（第 17 题结论），因此

$$f(x) = e^{\varphi(x)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^x \cdot n!}{x(x+1)\cdots(x+n)},\ \forall x \in (0,1).$$