本次习题课的内容是关于函数的连续性.

讨论题 1: 开区间上的连续函数的值域必为开区间吗? 若是, 请给予证明; 若否, 请举反例.

解: 回答是否定的. 开区间上的连续函数的值域有各种可能性.
例1: 设 $I=(0,1)$, $f(x)=x$, 则 $f(I)=(0,1)$.
例2: 设 $I=(-1,1)$, $f(x)=x^2$, 则 $f(I)=[0,1)$.
例3: 设 $I=(0,2\pi)$, $f(x)=\sin x$, 则 $f(I)=[-1,1]$.
解答完毕.

讨论题 2: 定义函数

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{2x}, & x<0,\\ a, & x=0,\\ (1+bx)^{\frac{1}{x}}, & x>0.\end{cases}$$

试确定常数 a 和 b, 使得函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续.

解: 熟知函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续, 当且仅当 $f(0^-)=f(0)=f(0^+)$. 简单计算得

$$f(0^-)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2},$$

$$f(0^+)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(1+bx)^{\frac{1}{x}}=e^b.$$

故函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续, 当且仅当 $\frac{1}{2}=a=e^b$. 即 $a=\frac{1}{2}$, $b=-\ln 2$. 解答完毕.

讨论题 3: 设函数 $f(x)$ 由如下极限定义

$$f(x)\overset{\text{def}}{=}\lim_{n\to+\infty}\frac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}.$$

试确定常数 a,b, 使得 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上处处连续.

解: 先考虑变量 x 在不同位置时, $f(x)$ 的表达式. 不难看出

(i) 当 $x>1$ 时, $f(x)=\frac{1}{x}$;

(ii) 当 $x=1$ 时, $f(1)=\frac{1}{2}(1+a+b)$;

(iii) 当 $-1<x<1$ 时, $f(x)=ax^2+bx$;

(iv) 当 $x=-1$ 时, $f(-1)=\frac{1}{2}(a-b-1)$;

(v) 当 $x<-1$ 时, $f(x)=\frac{1}{x}$.

于是

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}, & x<-1, \\ \frac{1}{2}(a-b-1), & x=-1, \\ ax^2+bx, & -1<x<1, \\ \frac{1}{2}(1+a+b), & x=1, \\ \frac{1}{x}, & x>1. \end{cases}$$

显然对任意的常数 a,b, 函数 $f(x)$ 在开区间 $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$, $(1,+\infty)$ 上处处连续. 为使 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上处处连续, 只需 $f(x)$ 在两个点 $x=\pm 1$ 处均连续即可. 而 $f(x)$ 在两个点 $x=\pm 1$ 处均连续, 当且仅当

$$\begin{cases} f(1^+)=f(1)=f(1^-), \\ f(-1^+)=f(-1)=f(-1^-). \end{cases}$$

根据 $f(x)$ 在不同区间上的表达式, 我们不难求得

$$\begin{aligned} &f(1^+)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\tfrac{1}{x}=1, \\ &f(1^-)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(ax^2+bx)=a+b, \\ &f(-1^+)=\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}\tfrac{1}{x}=-1, \\ &f(-1^-)=\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^+}(ax^2+bx)=a-b. \end{aligned}$$

于是 $f(x)$ 在两个点 $x=\pm 1$ 处均连续, 当且仅当

$$\begin{cases} 1=\frac{1}{2}(1+a+b)=a+b, \\ a-b=\frac{1}{2}(a-b-1)=-1, \end{cases}$$

$$\text{或}\begin{cases} a+b=1, \\ a-b=-1. \end{cases}$$

解之得 $a=0, b=1$. 解答完毕.

讨论题 4: 说明函数 $f(x)=x^3+x+1$ 有且仅有一个实根 $\xi\in\mathbb{R}$. 进一步确定一个开区间包含 ξ, 且区间长度不超过 1.

解: 一方面, 由于 $f(-\infty)=-\infty$, $f(+\infty)=+\infty$, 故函数 $f(x)$ 至少有一个实根. 另一方面, 函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上是严格单调上升的. 这是因为对于 $x_1,x_2\in\mathbb{R}$, $x_1<x_2$, 我们有

$$f(x_2)-f(x_1)=x_2^3+x_2+1-(x_1^3+x_1+1)=x_2^3-x_1^3+x_2-x_1$$

$$=(x_2-x_1)(x_2^2+x_2x_1+x_1^2)(x_2-x_1)+(x_2-x_1)$$

$$=(x_2-x_1)(x_2^2+x_2x_1+x_1^2+1)>0.$$

因此函数 $f(x)$ 有且仅有一个实根 $\xi\in\mathbb{R}$. 由于 $f(0)=1$, $f(-1)=-1$, 故 $\xi\in(-1,0)$. 即所求的区间可取为 $(-1,0)$. 解答完毕.

讨论题 5 (课本第64页习题2.6题10). 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 且 $\lim_{|x|\to+\infty}f(x)=+\infty$. 证明 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上存在最小值, 即存在 $x_0\in\mathbb{R}$, 使得 $f(x_0)\le f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

证明: 由假设 $\lim_{|x|\to+\infty}f(x)=+\infty$ 可知, 对于 $f(0)$ (取任意点的函数值均可), 存在 $M>0$, 使得

$$f(x)>f(0),\quad \forall x\in\mathbb{R},|x|\ge M.$$

再由连续函数的最值性质可知, $f(x)$ 在闭区间 $[-M,M]$ 上存在最小值, 即存在 $x_0\in[-M,M]$, 使得 $f(x_0)\le f(x)$, $\forall x\in[-M,M]$. 由于 $f(x_0)\le f(0)$, 故

$$f(x_0)\le f(x),\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

命题得证.

讨论题 6. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 假设存在实数 $q \in (0,1)$, 使得对任意 $x \in [a,b]$, 存在 $y \in [a,b]$ 满足 $|f(y)| \le q|f(x)|$. 证明存在 $x_0 \in [a,b]$, 使得 $f(x_0) = 0$.

证明: 由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 故 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上也连续. 由连续函数的最值性质知, $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上可取得最小值, 即存在 $x_0 \in [a,b]$, 使得 $|f(x_0)| \le |f(x)|$, $\forall x \in [a,b]$. 现可断言 $f(x_0) = 0$. 反证如下. 若 $f(x_0) \ne 0$, 则由假设知存在 $y_0 \in [a,b]$, 使得 $|f(y_0)| \le q|f(x_0)|$. 由此得 $|f(y_0)| < |f(x_0)|$. 此与 $|f(x_0)|$ 是 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上的最小值矛盾. 这就证明了 $f(x_0) = 0$. 证毕.

讨论题 7: 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续. 假设对于任意整数 n, 方程 $f(x) = n$ 有实根, 证明对于任意实数 $r \in \mathbb{R}$, 方程 $f(x) = r$ 也有实根.

解: 对实数 $r \in \mathbb{R}$, 存在整数 n, 使得 $r \in [n, n+1)$. 根据假设存在两个点 $x_n, x_{n+1} \in \mathbb{R}$, 使得 $f(x_n) = n$, $f(x_{n+1}) = n+1$. 根据连续函数的介值性可知, 存在 $\xi \in I$, 使得 $f(\xi) = r$, 这里 I 记以 x_n, x_{n+1} 为端点的闭区间. 证毕.

讨论题 8: 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 且 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. 若 $f(x)$ 在某点处取正值, 证明 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上必有正的最大值.

证明: 由假设知 $f(x)$ 在一点 x_0 处取正值, 即 $f(x_0) > 0$. 再根据假设 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, 可知对 $\varepsilon = f(x_0) > 0$, 存在 $M > 0$, 使当 $|x| > M$ 时, $|f(x)| < \varepsilon = f(x_0)$. 不妨设 $M > |x_0|$, 因为 $M > 0$ 可以取任意大. 另一方面, 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-M, M]$ 上连续, 故 $f(x)$ 在某处 $\xi \in [-M, M]$ 处取得最大值, 即 $f(\xi) \ge f(x)$, $\forall x \in [-M, M]$. 特别 $f(\xi) \ge f(x_0) > 0$. 根据 M 的取法可知, $f(\xi) \ge f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. 即 $f(\xi)$ 也是函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的最大值. 命题得证.

讨论题 9 (课本第65页第二章总复习题题20). 设函数 $f(x)$ 定义在 $\mathbb{R}$ 上满足

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

进一步假设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续. 证明 (1) $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上处处连续; (2) 存在常数 $a\in\mathbb{R}$, 使得 $f(x)=ax, \forall x\in\mathbb{R}$.

证(1): 首先注意 $f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)$. 这说明 $f(0)=0$. 对 $x_0\in\mathbb{R}$, 由于 $f(x)=f(x_0+x-x_0)=f(x_0)+f(x-x_0)$, 并且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 故

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} f(x_0)+\lim_{x\to x_0} f(x-x_0)=f(x_0)+f(0)=f(x_0).$$

这就证明了函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续. 由于点 x_0 是任意的, 因此函数在 $\mathbb{R}$ 上处处连续.
证(2): 对任意正整数 n, 由假设条件知

$$f(n)=f(1)+f(1)+\cdots+f(1)=nf(1).$$

进一步

$$f(1)=f\Big(\frac{1}{n}\Big)+f\Big(\frac{1}{n}\Big)+\cdots+f\Big(\frac{1}{n}\Big)=nf\Big(\frac{1}{n}\Big),\quad 即\quad f\Big(\frac{1}{n}\Big)=\frac{1}{n}f(1).$$

于是对任意正整数 m,n,

$$f\Big(\frac{m}{n}\Big)=mf\Big(\frac{1}{n}\Big)=\frac{m}{n}f(1).$$

记 $a=f(1)$, 则对任意正有理数 $r>0$, $f(r)=ar$. 由于无理数可以被有理数任意逼近, 即对于任意正无理数 x_0, 存在正有理数序列 $\{p_n\}$, 使得 $p_n\to x_0$, 故根据结论(1)知

$$f(x_0)=f\big(\lim_{n\to+\infty} p_n\big)=\lim_{n\to+\infty} f(p_n)=\lim_{n\to+\infty} ap_n=ax_0.$$

这说明 $f(x_0)=ax_0$. 这样我们就证明了 $f(x)=ax$, $\forall x\in[0,+\infty)$. 对于任意负实数 $x<0$,

$$0=f(0)=f(x-x)=f(x)+f(-x)=f(x)+a(-x)\quad 即\quad f(x)=ax.$$

因此 $f(x)=ax, \forall x\in\mathbb{R}$. 命题得证.

讨论题 10*: 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内至多只有第一类间断点, 且满足如下凸性条件

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\le\frac{f(x)+f(y)}{2},\quad \forall x,y\in(a,b). \tag{1}$$

证明函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上处处连续.

证明: 对 $\forall x_0\in(a,b)$, 要证 $f(x)$ 在 x_0 处连续. 由假设知 $f(x)$ 在 x_0 处的左右极限均存在, 且等于 $f(x_0)$. 记 $A=\lim_{x\to x_0^-}f(x)$, $B=\lim_{x\to x_0^+}f(x)$. 要证 $A=B=f(x_0)$. 在式(1) 中, 取 $y=x_0$ 得

$$f\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\le\frac{f(x)+f(x_0)}{2},\quad \forall x\in(a,b).$$

于上式中令 $x\to x_0^+$ 得

$$B\le\frac{B+f(x_0)}{2}\quad 即\quad B\le f(x_0).$$

同理可证 $A\le f(x_0)$. 取 $h>0$ 并在式(1)中, 取 $x=x_0-h$, $y=x_0+h$ 得

$$f(x_0)=f\left(\frac{x_0-h+x_0+h}{2}\right)\le\frac{f(x_0-h)+f(x_0+h)}{2}.$$

令 $h\to0$ 得

$$f(x_0)\le\frac{A+B}{2}.$$

由于 $A\le f(x_0)$, 故 $f(x_0)\le\frac{A+B}{2}\le\frac{f(x_0)+B}{2}$. 由此得 $f(x_0)\le B$, 从而得到 $f(x_0)=B$. 同理可证 $f(x_0)=A$. 命题得证.

讨论题 11: 设 $f(x)=a_n\cos nx+a_{n-1}\cos(n-1)x+\cdots+a_1\cos x+a_0$, 其中系数满足 $a_n>|a_{n-1}|+\cdots+|a_1|+|a_0|$. 证明函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2\pi]$ 内至少有 $2n$ 个根.

证明: 在点 $x_k=\frac{k\pi}{n}$, $k=0,1,\cdots,2n$ 处的函数值 $f(x_k)$ 作如下估计

$$f(x_0)=a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0\ge a_n-\Big(|a_{n-1}|+\cdots+|a_1|+|a_0|\Big)>0,$$

$$f(x_1)=a_n\cos\pi+a_{n-1}\cos(n-1)x_1+\cdots+a_1\cos x_1+a_0\le -a_n+\Big(|a_{n-1}|+\cdots+|a_0|\Big)<0,$$

$$f(x_2)=a_n\cos2\pi+a_{n-1}\cos(n-1)x_2+\cdots+a_1\cos x_2+a_0\ge a_n-\Big(|a_{n-1}|+\cdots+|a_0|\Big)>0,$$

$$\vdots$$

$$f(x_{2n-1}) = a_n \cos(2n-1)\pi + \cdots + a_0 \le -a_n + \Big(|a_{n-1}| + \cdots + |a_0|\Big) < 0,$$

$$f(x_{2n}) = a_n \cos 2n\pi + \cdots + a_0 \ge a_n - \Big(|a_{n-1}| + \cdots + |a_0|\Big) > 0.$$

由连续函数的介值性可知, 在每个小开区间 (x_k, x_{k+1}) 内, 函数 $f(x)$ 至少有一个零点, 共有 $2n$ 个, $k = 0, 1, \cdots, 2n-1$. 因此 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 内至少有 $2n$ 个根. 证毕.

讨论题 12 (课本第64页第二章总复习题题 7). 设常数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$. 求极限

$$\lim_{x\to+\infty} \Big(a_1 \sin\sqrt{x+1} + a_2 \sin\sqrt{x+2} + \cdots + a_n \sin\sqrt{x+n}\Big).$$

解: 由假设 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$ 知 $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\sin\sqrt{x} = 0$. 因此

$$a_1 \sin\sqrt{x+1} + a_2 \sin\sqrt{x+2} + \cdots + a_n \sin\sqrt{x+n}$$

$$= a_1\Big(\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x}\Big) + a_2\Big(\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x}\Big) + \cdots + a_n\Big(\sin\sqrt{x+n} - \sin\sqrt{x}\Big).$$

根据三角函数的和差化积公式得

$$\sin\sqrt{x+k} - \sin\sqrt{x} = 2\cos\left(\frac{\sqrt{x+k}+\sqrt{x}}{2}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{x+k}-\sqrt{x}}{2}\right).$$

由此得

$$|\sin\sqrt{x+k} - \sin\sqrt{x}| \le 2\left|\sin\left(\frac{\sqrt{x+k}-\sqrt{x}}{2}\right)\right|$$

$$\le |\sqrt{x+k} - \sqrt{x}| = \frac{k}{\sqrt{x+k}+\sqrt{x}} \to 0, \quad x \to +\infty.$$

于是

$$|a_1 \sin\sqrt{x+1} + a_2 \sin\sqrt{x+2} + \cdots + a_n \sin\sqrt{x+n}|$$

$$\le |a_1||\sqrt{x+1} - \sqrt{x}| + |a_2||\sqrt{x+2} - \sqrt{x}| + \cdots + |a_n||\sqrt{x+n} - \sqrt{x}|$$

$$= \frac{|a_1|}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} + \frac{2|a_2|}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}} + \cdots + \frac{n|a_n|}{\sqrt{x+n}+\sqrt{x}} \to 0, \quad x \to +\infty.$$

故所求极限为

$$\lim_{x\to+\infty}\left(a_1\sin\sqrt{x+1}+a_2\sin\sqrt{x+2}+\cdots+a_n\sin\sqrt{x+n}\right)=0.$$

解答完毕.

讨论题 13: 设 $f(x)$ 在整个实轴 $\mathbb{R}$ 上定义且满足 $f(x)=f(2x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 证明 $f(x)$ 是常数函数. (注: 本题与课本64页课本习题2.6题9类似)

证: 对 $\forall x\in\mathbb{R}$, 根据假设我们有

$$f(x)=f\left(\frac{x}{2}\right)=\cdots=f\left(\frac{x}{2^n}\right)\to f(0),\quad n\to+\infty.$$

由此得 $f(x)=f(0)$. 即 $f(x)$ 是常数函数. 证毕.

讨论题 14 (课本第64页习题2.6题12). 假设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 其值域 $f([a,b])\subset[a,b]$, 且单调增加. 证明对 $\forall x_0\in[a,b]$, 由迭代 $x_{n+1}=f(x_n)$, $\forall n\geq 0$, 所得到的序列 $\{x_n\}$ 收敛, 且极限值 x^* 是 $f(x)$ 的一个不动点, 即 $f(x^*)=x^*$.

证: 对于 $\forall x_0\in[a,b]$.
情形一: $x_1=f(x_0)=x_0$, 即 x_0 是 $f(x)$ 的不动点. 于是 $x_n=x_0\to x_0$. 结论成立.
情形二: $x_1=f(x_0)>x_0$. 此时不难用归纳法证明, 序列 $\{x_n\}$ 是单调增加的. 显然序列 $\{x_n\}$ 有上界, 因为 $x_n\leq b$. 因此序列 $\{x_n\}$ 收敛. 设 $x_n\to x^*$. 在迭代格式 $x_{n+1}=f(x_n)$ 的两边取极限即得 $x^*=f(x^*)$. 结论得证.
情形三: $x_1=f(x_0)<x_0$. 此时不难用归纳法证明序列 $\{x_n\}$ 是单调减少的. 显然该序列有下界, 因为 $x_n\geq a$. 因此序列 $\{x_n\}$ 收敛. 设 $x_n\to x^*$. 在迭代格式 $x_{n+1}=f(x_n)$ 的两边取极限即得 $x^*=f(x^*)$. 结论得证.

<u>注记</u>: 讨论题14的条件中, 若将 $f(x)$ 单调增加改为 $f(x)$ 单调减少, 则结论不再成立. 比如取 $f(x)=1-x$, 它满足在 $[0,1]$ 上连续, 单调减少且值域也包含于 $[0,1]$. 取 $x_0=\frac{1}{3}$, 则 $x_1=\frac{2}{3}$, $x_2=\frac{1}{3}$, $\cdots$. 就会得到这样一个序列 $\{\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\cdots\}$, 这个序列显然是不收敛的.

讨论题 15. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且其值域 $f([a,b]) \subset [a,b]$. 假设 $f(x)$ 还满足 $|f(x)-f(y)| \leq |x-y|, \forall x,y \in [a,b]$, 证明对于任意 $x_1 \in [a,b]$,

(1) 迭代 $x_{n+1} = \frac{1}{2}\big(x_n + f(x_n)\big) \in [a,b], \forall n \geq 1$;

(2) 迭代序列 $\{x_n\}$ 收敛;

(3) 设 $x_n \to x_0$, 则 x_0 是 $f(x)$ 的一个不动点, 即 $f(x_0) = x_0$.

证明: (1) 由于 $x_1 \in [a,b]$, 且 $f(x_1) \in [a,b]$, 故 $x_2 = \frac{1}{2}\big(x_1 + f(x_1)\big) \in [a,b]$. 假设 $x_n \in [a,b]$, 则 $f(x_n) \in [a,b]$, 从而 $x_{n+1} = \frac{1}{2}\big(x_n + f(x_n)\big) \in [a,b]$. 结论 (1) 得证.

(2) 判断一个序列的收敛性, 首选方法是利用单调有界定理. 我们先考虑迭代序列 $\{x_n\}$ 的单调性. 依定义

$$x_2 - x_1 = \frac{1}{2}\big(x_1 + f(x_1)\big) - x_1 = \frac{1}{2}\big(f(x_1) - x_1\big).$$

若 $f(x_1) = x_1$, 即 x_1 是 $f(x)$ 不动点, 则 $x_n = x_1, \forall n \geq 1$. 结论成立. 设 $f(x_1) \neq x_1$. 此时作如下讨论.

情形一: $f(x_1) > x_1$. 此时 $x_2 > x_1$. 假设 $x_n > x_{n-1}$, 则

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{1}{2}\big(x_n + f(x_n)\big) - \frac{1}{2}\big(x_{n-1} + f(x_{n-1})\big) \\ &= \frac{1}{2}\Big((x_n - x_{n-1}) + \big[f(x_n) - f(x_{n-1})\big]\Big) \\ &\geq \frac{1}{2}\Big((x_n - x_{n-1}) - \big|f(x_n) - f(x_{n-1})\big|\Big) \\ &\geq \frac{1}{2}\Big((x_n - x_{n-1}) - |x_n - x_{n-1}|\Big) = 0, \end{aligned}$$

即 $x_{n+1} \geq x_n$. 这就证明了迭代序列 $\{x_n\}$ 单调增加. 由结论 (1) 知 $\{x_n\}$ 有上界, 故 $\{x_n\}$ 收敛.

情形二: $f(x_1) < x_1$. 此时 $x_2 < x_1$. 假设 $x_n \leq x_{n-1}$, 则

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{1}{2}\big(x_n + f(x_n)\big) - \frac{1}{2}\big(x_{n-1} + f(x_{n-1})\big) \\ &= \frac{1}{2}\Big((x_n - x_{n-1}) + \big[f(x_n) - f(x_{n-1})\big]\Big) \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{2}\Big((x_n - x_{n-1}) + \big|f(x_n) - f(x_{n-1})\big|\Big)$$
$$\leq \frac{1}{2}\Big((x_n - x_{n-1}) + |x_n - x_{n-1}|\Big) = 0,$$

即 $x_{n+1} \leq x_n$. 这就证明了迭代序列 $\{x_n\}$ 单调下降. 由结论 (1) 知 $\{x_n\}$ 有下界, 故 $\{x_n\}$ 收敛.

(3) 设 $x_n \to x_0$. 在迭代式 $x_{n+1} = \frac{1}{2}\big(x_n + f(x_n)\big)$ 中, 令 $n \to +\infty$ 即得 $x_0 = \frac{1}{2}\big(x_0 + f(x_0)\big)$. 此即 $f(x_0) = x_0$. 命题得证.

讨论题 16*: 设 $f(x)$ 为区间 I 上定义的函数. 一个点 x_0 称作函数 $f(x)$ 的极大值(极小值)点, 如果存在正数 $\delta > 0$, 使得 $f(x) \leq f(x_0)$, $(f(x) \leq f(x_0))$, $\forall x \in I \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. 函数 $f(x)$ 极大点和极小点都称作极值点. 证明命题: 设函数 $f(x)$ 在有界闭区间 $[a, b]$ 上连续. 若 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 上无极值点, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上严格单调. (有点难可忽略)

证明: 根据最值定理可知, 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可取得最大值 M 和最小值 m. 由于最大值点和最小值点都是极值点, 根据假设, 在开区间 (a, b) 上无极值点. 因此 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值点和最小值点只能是区间端点 a 和 b. 我们分两种情况讨论如下：

情形一: $f(a) = f(b)$. 即 $M = m$. 此时函数 $f(x)$ 为常数函数. 于是开区间 (a, b) 上的每个点都是 $f(x)$ 的极值点. 与假设相矛盾. 不可能.

情形二: $f(a) \neq f(b)$. 此时 $M > m$. 不妨设 $m = f(a)$, $M = f(b)$. 我们来证明 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上严格单调上升. 反证. 假设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上不是严格单调上升. 那么存在两点 $x_1 < x_2$, 使得 $f(x_1) \geq f(x_2)$. 若 $f(x_1) = f(x_2)$, 则应用上述情形一的结论于闭区间 $[x_1, x_2]$, 可知这个情况不可能发生. 因此必有 $f(x_1) > f(x_2)$. 我们来考虑 $f(x)$ 在闭区间 $[x_1, b]$ 上的最小值. 由于 $M = f(b) > f(x_1) > f(x_2)$. 故 $x_2 < b$. 因此 $x_2 \in (x_1, b)$. 由此可断言, 在闭区间 $[x_1, b]$ 上的最小值必在开区间 (x_1, b) 的某个点处取得. 而这个点同时也是 $f(x)$ 在 (x_1, b) 上的极值点. 矛盾. 证毕.