本次习题课有两部分内容:

第一部分: 关于序列极限补充讨论;

第二部分: 关于函数极限

第一部分: 关于序列极限补充讨论. 以下两道题与自然对数的底 e 有关.

说明: 数 e 的定义为

$$e \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

在课堂上我们得到了与 e 有关的两个结论:

(i) 数 e 还可以表示为

$$e=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\overset{\text{def}}{=}\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!},$$

这里约定 $0!=1$.

(ii) 记 $\varepsilon_n \overset{\text{def}}{=} e-\sum_{k=0}^n\frac{1}{k!}$, 则 $\lim_{n\to+\infty}(n+1)!\varepsilon_n=1$. (利用 Stolz 定理证明.)

讨论题 1: 证明数 e 与 $\sum_{k=0}^n\frac{1}{k!}$ 的误差有如下估计

$$\frac{1}{(n+1)!}<e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}<\frac{1}{n!n}.$$

证明: 第一个不等式显然成立. 因为

$$e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k!}>\frac{1}{(n+1)!}.$$

对于任意 $m>n$, 我们有

$$\frac{1}{(n+1)!}+\cdots+\frac{1}{m!}<\frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)^2}\cdots+\frac{1}{(n+2)^{m-n}}\right)$$

$$< \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{1-\frac{1}{n+2}} = \frac{1}{(n+1)!}\frac{n+2}{n+1} < \frac{1}{n!n}.$$

即对于任意 $m > n$ 我们有

$$\frac{1}{(n+1)!} + \cdots + \frac{1}{m!} < \frac{1}{(n+1)!}\frac{n+2}{n+1} < \frac{1}{n!n}.$$

令 $m \to +\infty$ 即得

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{(n+1)!}\frac{n+2}{n+1} < \frac{1}{n!n}.$$

于是

$$e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} < \frac{1}{n!n}.$$

命题得证.

讨论题 2. 证明数 e 是无理数.

证明: 反证. 假设数 e 是有理数, 即 e 可表为 $e = \frac{p}{q}$, 其中 p, q 均为正整数. 由于数 e 可表为 $e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$, 故

$$\frac{p}{q} = e = \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} + \varepsilon_q,$$

其中 $\varepsilon_q \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=q+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$. 由此得

$$q!\varepsilon_q = q!\left(\frac{p}{q} - \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!}\right).$$

可见数 $q!\varepsilon_q$ 是正整数. 但根据讨论题1的结论

$$\frac{1}{(q+1)!} < \varepsilon_q < \frac{1}{q!q},$$

我们有

$$\frac{1}{q+1} < q!\varepsilon_q < \frac{1}{q}.$$

这又说明数 $q!\varepsilon_q$ 不是正整数. 矛盾. 矛盾表明了自然对数的底 e 不是有理数, 而是无理数. 证毕.

以下讨论题 3 说明, 利用上下极限技术求极限有时很给力. 我们列出一些关于上下极限的性质. 它们的证明有些比较容易, 如 (i) 的证明. 根据上下极限的极限点定义, 结论是显而易见的. 课堂上证明了性质 (ii). 这些性质得证明都可以在吉米多维奇数学分析习题解答的六本解答书中, 可以找到证明.

设序列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 均有界, 则下列结论成立.
(i) (保序性) 若 $x_n \le y_n, \forall n \ge n_0$, 则 $\overline{\lim} x_n \le \overline{\lim} y_n$, $\underline{\lim} x_n \le \underline{\lim} y_n$;
(ii) $\underline{\lim} x_n + \underline{\lim} y_n \le \underline{\lim}(x_n + y_n) \le \overline{\lim}(x_n + y_n) \le \overline{\lim} x_n + \overline{\lim} y_n$;
(iii) $\overline{\lim}(-x_n) = -\underline{\lim} x_n$, $\overline{\lim}(-y_n) = -\underline{\lim} y_n$;
(iv) 若 $x_n, y_n \ge 0$, 则 $\underline{\lim} x_n \cdot \underline{\lim} y_n \le \underline{\lim}(x_n y_n) \le \overline{\lim}(x_n y_n) \le \overline{\lim} x_n \cdot \overline{\lim} y_n$;
(v) 若极限 $\lim x_n$ 存在, 则 $\underline{\lim}(x_n + y_n) = \lim x_n + \underline{\lim} y_n$, $\overline{\lim}(x_n + y_n) = \lim x_n + \overline{\lim} y_n$;
(vi) 若 $x_n > 0$, 则 $\underline{\lim} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\overline{\lim} x_n}$, $\overline{\lim} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\underline{\lim} x_n}$;
(vii) 若 $x_n \ge a > 0$, 且极限 $\lim x_n$ 存在, 则 $\underline{\lim}(x_n y_n) = (\lim x_n)(\underline{\lim} y_n)$, $\overline{\lim}(x_n y_n) = (\lim x_n)(\overline{\lim} y_n)$.

讨论题 3：设两个序列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 由关系式 $b_n = a_n + 2a_{n+1}$ 相联系. 证明若序列 $\{b_n\}$ 收敛, 则序列 $\{a_n\}$ 也收敛.

<u>证法一</u>: 我们将证明序列 $\{a_n\}$ 的上下极限相等. 记

$$\underline{A} \stackrel{\text{def}}{=} \underline{\lim}\, a_n, \quad \overline{A} \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\lim}\, a_n, \quad B \stackrel{\text{def}}{=} \lim b_n.$$

将关系式 $b_n = a_n + 2a_{n+1}$ 写作 $2a_{n+1} = b_n - a_n$. 对关系式 $2a_{n+1} = b_n - a_n$ 分别取上下极限, 并利用上下极限的性质(iii)和(v)即得到

$$2\overline{A} = B - \underline{A}, \quad 2\underline{A} = B - \overline{A}.$$

由此立刻得到 $\underline{A} = \overline{A}$, 即序列 $\{a_n\}$ 的上下极限相等. 从而序列 $\{a_n\}$ 收敛. 证毕. (注: 若直接对关系式 $b_n = a_n + 2a_{n+1}$ 取上极限, 那么我们只能得到 $B \le \overline{A} + 2\overline{A} = 3\overline{A}$. 若取下极限得到不等式 $B \ge 3\underline{A}$. 这两个不等式看上去用处不大)

证法二: 根据关系式 $b_n = a_n + 2a_{n+1}$ 可知, 若 $a_n \to a$, $b_n \to b$, 则 $b = 3a$. 故 $a = \frac{b}{3}$, 即 a_n 的极限是 $\frac{b}{3}$. 设 $b_n \to b$. 记 $\hat{a}_n = a_n - \frac{b}{3}$, $\hat{b}_n = b_n - b$, 则

$$\hat{b}_n \to 0, \quad \hat{b}_n = \hat{a}_n + 2\hat{a}_{n+1}, \quad \forall n \geq 1.$$

由于 $\hat{b}_n \to 0$, 故对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得 $|\hat{b}_n| < \varepsilon, \forall n > N$. 于是对任意 $n > N$

$$|\hat{a}_{n+1}| = \frac{1}{2}\left|(\hat{a}_n + 2\hat{a}_{n+1}) - \hat{a}_n\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2}|\hat{a}_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \frac{1}{2^2}|\hat{a}_{n-1}|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \cdots + \frac{\varepsilon}{2^{n-N}} + \frac{1}{2^{n-N}}|\hat{a}_{N+1}| < \varepsilon + \frac{1}{2^{n-N}}|\hat{a}_{N+1}|.$$

于是存在 $N_1 > N$, 使得 $\frac{1}{2^{n-N}}|\hat{a}_{N+1}| < \varepsilon, \forall n \geq N_1$. 因此对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N_1, 使得对任意 $n \geq N_1$, $|\hat{a}_{n+1}| < 2\varepsilon$. 这就证明了 $\hat{a}_n \to 0$, 此即 $a_n \to \frac{b}{3}$, 其中 b 是序列 $\{b_n\}$ 的极限.

证法三: 利用 Stolz 定理. 设 $b_n \to b$. 记 $\hat{a}_n = a_n - \frac{b}{3}$, 则

$$b_n - b = a_n - \frac{b}{3} + 2\left(a_{n+1} - \frac{b}{3}\right) = \hat{a}_n + 2\hat{a}_{n+1} \to 0.$$

考虑 $(-1)^n\hat{a}_n$ 的极限. 将 $(-1)^n\hat{a}_n$ 写作

$$(-1)^n\hat{a}_n = \frac{(-2)^n a_n}{2^n}.$$

于是

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-2)^n\hat{a}_n}{2^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(-2)^{n+1}\hat{a}_{n+1} - (-2)^n\hat{a}_n}{2^{n+1} - 2^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{n+1}\left(2\hat{a}_{n+1} + \hat{a}_n\right)}{2-1} = 0.$$

这就证明了 $(-1)^n\hat{a}_n \to 0$, 即 $\hat{a}_n \to 0$, 亦即 $a_n \to \frac{b}{3}$. 解答完毕.

利用 Euler 常数可求解某些极限问题, 如以下两个讨论题所示. 根据课本习题1.4第17题的结果可知, 调和级数 $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k}$ 的部分和可以表示为

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + \varepsilon_n, \qquad (*)$$

其中 γ 称为 Euler 常数或 Euler - Mascheroni 常数, 它有近似值 $\gamma \simeq 0.577$, 序列 $\{\varepsilon_n\}$ 为无穷小量, 即 $\varepsilon_n \to 0$.

讨论题 4 (课本第24页第1章总复习题第11题) 求极限

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n}\right).$$

解: 记

$$a_n \overset{\text{def}}{=} 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n},$$

则利用表达式(*)可知 a_n 可表示为 $a_n = \gamma + \ln n + \varepsilon_n$, 其中 $\varepsilon_n \to 0$. 于是

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n} = a_{3n}-a_n = \gamma+\ln(3n)+\varepsilon_{3n}-(\gamma+\ln n+\varepsilon_n)$$

$$= \ln 3+\varepsilon_{3n}-\varepsilon_n \to \ln 3.$$

解答完毕.

讨论题 5. 求极限

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right).$$

解: 记

$$b_n \overset{\text{def}}{=} 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n},$$

则 $b_{2n+1} = b_{2n} + \frac{1}{2n+1}$. 如果能求出 $\lim_{n\to+\infty} b_{2n}$ 的极限, 那么 $\lim_{n\to+\infty} b_{2n+1}$ 有相同的极限, 从而 $\lim_{n\to+\infty} b_n$ 也有相同的极限. 继续沿用上题解答中的记号

$$b_{2n} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+(-1)^{2n-1}\frac{1}{2n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

$$= a_{2n}-a_n = \gamma+\ln(2n)+\varepsilon_{2n}-(\gamma+\ln n+\varepsilon_n) = \ln 2+\varepsilon_{2n}-\varepsilon_n \to \ln 2.$$

即 $\lim_{n\to+\infty} b_{2n} = \ln 2$. 因此

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right) = \ln 2.$$

解答完毕.

以下三道题是关于求序列极限的杂题:

讨论题 6: 求极限 $\lim_{n\to+\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}$.

解法一: 由于 $n! \le n^n$, 故

$$1 \le (n!)^{\frac{1}{n^2}} \le (n^n)^{\frac{1}{n^2}} = n^{\frac{1}{n}} \to 1.$$

于是极限 $\lim_{n\to+\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}} = 1$.

解法二: 令 $a_n = (n!)^{\frac{1}{n^2}}$, 则 $\ln a_n = \frac{1}{n^2}\ln(n!)$. 根据 Stolz 定理知

$$\lim_{n\to+\infty}\ln a_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n+1)! - \ln(n!)}{(n+1)^2 - n^2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n+1)}{2n+1} = 0.$$

因此 $a_n = e^{\ln a_n} \to e^0 = 1$. 解答完毕.

讨论题 7: 求极限 $\lim_{n\to+\infty}(n!)^{\frac{1}{n}}$.

解: 令 $a_n = (n!)^{\frac{1}{n}}$, 则 $\ln a_n = \frac{1}{n}\ln(n!)$. 根据 Stolz 定理得

$$\lim_{n\to+\infty}\ln a_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n+1)! - \ln(n!)}{n+1-n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n+1)}{1} = +\infty.$$

因此 $a_n \to +\infty$.

讨论题 8. 求下列极限

(i) $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$;

(ii) $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$;

(iii) $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n$.

解: (i) $\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = \left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{\frac{1}{2}} \to e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$.

(ii) $1 < \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}} < e^{\frac{1}{n}} \to 1$. 因此根据两边夹法则可知

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = 1.$$

(iii) 由于

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1}, \quad \forall n \geq 2,$$

故

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n.$$

而

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right) \to e\cdot 1 = e.$$

根据序列极限的两边夹法则可知

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n = e.$$

解答完毕.

第二部分: 关于函数的极限问题. 目前我们求极限的主要方法是将所考虑的极限转化为结论明显的极限形式, 即转化为一些标准极限模式. 例如

(i) $\frac{\sin x}{x} \to 1$, $x \to 0$;

(ii) $(1+\frac{1}{x})^x \to e$, $x \to +\infty$ 或 $x \to -\infty$;

(iii) $(1+x)^{\frac{1}{x}} \to e$, $x \to 0$;

(iv) $\frac{\ln(1+x)}{x} \to 1$, $x \to 0$;

(v) $\frac{1-\cos x}{x^2} \to \frac{1}{2}$, $x \to 0$;

(vi) $\frac{\tan x}{x} \to 1$, $x \to 0$;

(vii) $\frac{a^x-1}{x} \to \ln a$, $x \to 0$, 其中 $a > 0$;

(viii) $\frac{(1+x)^a-1}{x} \to a$, $x \to 0$.

同学们应该牢记上述标准极限模式. 最好还能记住如何证明基本极限(i)和(ii), 以及根据极限(i)和(ii)得到其他极限, 而不需要借助课本或参考书. 因为知道如何证明才能记得牢. 此外, 我们还有如下复合极限模式:

(1) 若 $f(x)\to 0\ (x\to x_0)$, 且 $f(x)\neq 0$, 当 $x\neq x_0$ 时, 则

$$\frac{\sin f(x)}{f(x)}\to 1,\quad x\to x_0;$$

(2) 若 $g(x)\to +\infty$ 或 $g(x)\to -\infty\ (x\to x_0)$, 则

$$\left[1+\frac{1}{g(x)}\right]^{g(x)}\to e\quad (x\to x_0).$$

相应于(iii)至(viii)的复合极限模式, 这里不一一列出. 根据上述标准极限模式以及复合极限模式, 我们可以求解许多复杂的极限问题. 以后我们还会学习更加快捷有效的求极限方法, 即 L'Hospital 法则(洛必达法则)和 Taylor 展式.

讨论题 9. 求极限

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\sqrt{\frac{1}{x-1}+1}-\sqrt{\frac{1}{x-1}-1}\right).$$

解: 令 $y=\frac{1}{x-1}$, 则当 $x\to 1^+$ 时, $y\to+\infty$. 于是

$$\left(\sqrt{\frac{1}{x-1}+1}-\sqrt{\frac{1}{x-1}-1}\right)=\sqrt{y+1}-\sqrt{y-1}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{y+1}+\sqrt{y-1}}\to 0,\quad y\to+\infty.$$

故

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\sqrt{\frac{1}{x-1}+1}-\sqrt{\frac{1}{x-1}-1}\right)=0.$$

解答完毕.

讨论题 10 (课本第51页习题2.3题8(6)). 求极限

$$\lim_{x\to 0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}.$$

解: 所考虑的极限是 1^∞ 型的不定式. 故可将函数 $(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$ 写作

$$(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}=\left([1+f(x)]^{\frac{1}{f(x)}}\right)^{g(x)},$$

其中
$$f(x)=2\sin x+\cos x-1,\quad g(x)=\frac{2\sin x+\cos x-1}{x}.$$
易见当 $x\to 0$ 时, $f(x)\to 0$ 且 $g(x)\to 2$. 于是
$$\lim_{x\to 0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left([1+f(x)]^{\frac{1}{f(x)}}\right)^{g(x)}=\left(\lim_{x\to 0}[1+f(x)]^{\frac{1}{f(x)}}\right)^{\lim_{x\to 0}g(x)}=e^2.$$
解答完毕.

讨论题 11. 求极限 $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$.

解: 所考虑的极限仍是 1^∞ 型的不定式. 在考虑当 $x\to x_0$ 的极限问题时, 通过变量替换将 x_0 转化成 0 或 $+\infty$ 比较方便. 这是因为许多标准极限是以 $x\to 0$ 或 $x\to+\infty$ 的方式给出. 对于本题也是这样. 令 $y=x-\frac{\pi}{4}$, 则当 $x\to\frac{\pi}{4}$ 时, $y\to 0$. 于是
$$(\tan x)^{\tan 2x}=\left[\tan(y+\frac{\pi}{4})\right]^{\tan(2y+\frac{\pi}{2})}=\left(\frac{1+\tan y}{1-\tan y}\right)^{-\frac{1}{\tan 2y}}.$$
再将上式最右端的函数写作如下形式
$$\left(\frac{1+\tan y}{1-\tan y}\right)^{-\frac{1}{\tan 2y}}=(1+f(y))^{\frac{g(y)}{f(y)}},$$
其中
$$f(y)\overset{\text{def}}{=}\frac{2\tan y}{1-\tan y},\quad g(y)\overset{\text{def}}{=}\frac{2\tan y}{1-\tan y}\frac{-1}{\tan 2y}.$$
显然当 $y\to 0$ 时, $f(y)\to 0$ 且 $g(y)\to -1$. 于是
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}=\lim_{y\to 0}(1+f(y))^{\frac{g(y)}{f(y)}}=\left[\lim_{y\to 0}(1+f(y))^{\frac{1}{f(y)}}\right]^{\lim_{y\to 0}g(y)}=e^{-1}.$$
解答完毕.

讨论题 12 (课本第57页习题2.4题12). 设 $a>0$, 试确定 $p>0$ 的值, 使得如下极限存在(有限)
$$\lim_{x\to+\infty}x^p(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{1+x}}).$$

解: 如果 $a=1$, 则所考虑的极限对任何 p 均存在, 且极限值为零. 以下考虑情形 $a\neq 1$. 由于函数 $x^p(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{1+x}})$ 可表为

$$x^p(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{1+x}})=x^p(a^{\frac{1}{x(x+1)}}-1)a^{\frac{1}{1+x}},$$

故极限 $\lim_{x\to+\infty}x^p(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{1+x}})$ 存在, 当且仅当极限 $\lim_{x\to+\infty}x^p(a^{\frac{1}{x(1+x)}}-1)$ 存在, 并且当它们存在时, 它们的极限值相等. 这是因为 $a^{\frac{1}{1+x}}\to 1$, $x\to+\infty$. 将 $x^p(a^{\frac{1}{x(1+x)}}-1)$ 写作

$$x^p(a^{\frac{1}{x(1+x)}}-1)=\frac{x^p}{x(1+x)}\cdot\frac{a^{\frac{1}{x(1+x)}}-1}{\frac{1}{x(1+x)}},$$

并注意到标准极限

$$\lim_{y\to 0}\frac{(a^y-1)}{y}=\ln a,$$

我们有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^{\frac{1}{x(1+x)}}-1}{\frac{1}{x(1+x)}}=\ln a.$$

因此极限 $\lim_{x\to+\infty}x^p(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{1+x}})$ 存在, 当且仅当极限 $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^p}{x(1+x)}$ 存在. 由此可知
(i) 当 $p\in(0,2)$ 时, 极限 $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^p}{x(1+x)}=0$, 故极限 $\lim_{x\to+\infty}x^p(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{1+x}})=0$.
(ii) 当 $p=2$ 时, 极限 $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^p}{x(1+x)}=1$, 故极限 $\lim_{x\to+\infty}x^p(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{1+x}})$ 存在且 $\lim_{x\to+\infty}x^p(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{1+x}})=\ln a$.
(iii) 当 $p>2$ 时, 极限 $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^p}{x(1+x)}=+\infty$, 故极限 $\lim_{x\to+\infty}x^p(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{1+x}})$ 不存在. 更确切地说, 当 $a>1$ 时, $\lim_{x\to+\infty}x^p(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{1+x}})=+\infty$; 当 $a\in(0,1)$ 时, $\lim_{x\to+\infty}x^p(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{1+x}})=-\infty$. 解答完毕.

讨论题 13 (课本第50页习题2.3题3(2)). 设函数 $f(x)\geq 0$ 且 $\lim_{x\to x_0}f(x)=A$. 用 ε,δ 语言证明 $\lim_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{A}$.

注: 证明不难. 选择这道题作为一道讨论题, 目的在于进一步学习 ε,δ 语言. 掌握这套语言是学习微积分的一项基本功.

证明: 因为 $f(x)\geq 0$ 且 $\lim_{x\to x_0}f(x)=A$, 所以 $A\geq 0$. 分两种情况讨论.

(i) 设 $A=0$. 由假设 $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ 知, 对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得

$$|f(x)|<\varepsilon^2,\quad \forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\backslash\{x_0\}.$$

此即

$$\sqrt{f(x)}<\varepsilon,\quad \forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\backslash\{x_0\}.$$

依定义知 $\lim_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=0$.
(ii) 设 $A>0$. 根据假设 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$ 知, 对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得

$$|f(x)-A|<\sqrt{A}\varepsilon,\quad \forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\backslash\{x_0\}.$$

于是

$$\left|\sqrt{f(x)}-\sqrt{A}\right|=\frac{|f(x)-A|}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{A}}<\frac{\sqrt{A}\varepsilon}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{A}}<\varepsilon,\quad \forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\backslash\{x_0\}.$$

这就证明了, 当 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$ 时, $\lim_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{A}$. 证毕.

讨论题 14 (课本第65页第二章总复习题题8(6)). 设 m 和 n 均为自然数, 求极限

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right).$$

解: 记 $y=x-1$, 则当 $x\to 1$ 时, $y\to 0$. 于是

$$\begin{aligned}\frac{m}{1-x^m}=\frac{m}{1-(1+y)^m}&=\frac{m}{1-(1+my+m(m-1)y^2/2+h.o.t.)}\\&=\frac{-1}{y+(m-1)y^2/2+h.o.t.}\end{aligned}$$

这里 $h.o.t.$ 是 higher order terms 的缩写, 表示高阶项. 这里高阶是相对于它附近的项而言的. 高阶项 $h.o.t.$ 在不同的环境下意义自然是不同的. 对于上式而言, 高阶项 $h.o.t.$ 代表三阶无穷小量 $O(y^3)$. 通常这些高阶项的具体表达式对于解决问题不重要. 写出这些项, 还可能干扰读者的注意力. 因此用符号 $h.o.t.$ 代表它们是合适的. 同理我们有

$$\frac{n}{1-x^n}=\frac{-1}{y+(n-1)y^2/2+h.o.t.}$$

于是

$$\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}=\frac{-1}{y+(m-1)y^2/2+h.o.t.}-\frac{-1}{y+(n-1)y^2/2+h.o.t.}$$

$$=\frac{1}{y}\frac{\Big[1+(m-1)y/2+h.o.t.\Big]-\Big[1+(n-1)y/2+h.o.t.\Big]}{\Big[1+(m-1)y/2+h.o.t.\Big]\Big[1+(n-1)y/2+h.o.t.\Big]}$$

$$=\frac{(m-1)/2-(n-1)/2+h.o.t.}{\Big[1+(m-1)y/2+h.o.t.\Big]\Big[1+(n-1)y/2+h.o.t.\Big]}$$

$$\to\frac{m-1}{2}-\frac{n-1}{2}=\frac{m-n}{2}.$$

因此

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right)=\frac{m-n}{2}.$$

解答完毕.

讨论题 15. 设 $a>0$, $b>0$. 求极限

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

进一步求极限

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}},$$

这里 $a_1,\cdots,a_n>0$ 为任意正数.

解: 这是 1^∞ 型的极限问题. 与此相关的标准极限模式应该是

$$(1+y)^{\frac{1}{y}}\to e,\quad y\to 0.$$

我们将

$$\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$$

写作

$$\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=[1+f(x)]^{\frac{1}{f(x)}\frac{f(x)}{x}},\quad f(x)\overset{\text{def}}{=}\frac{a^x-1}{2}+\frac{b^x-1}{2}.$$

由于

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{a^x-1}{2x}+\frac{b^x-1}{2x}\to\frac{1}{2}[\ln a+\ln b]=\ln\sqrt{ab},\quad x\to 0.$$

于是

$$\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=(1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}\frac{f(x)}{x}}\to e^{\ln\sqrt{ab}}=\sqrt{ab}.$$

利用同样的方法可证

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

解答完毕.

讨论题 16 (课本第65页第二章总复习题题8(3)). 求极限

$$\lim_{n\to+\infty}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2^2}\right)\cdots\cos\left(\frac{x}{2^n}\right).$$

解: 记

$$f_n(x)\overset{\text{def}}{=}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2^2}\right)\cdots\cos\left(\frac{x}{2^n}\right),$$

则逐次利用正弦函数的倍角公式 $\sin 2t=2\sin t\cos t$ 可知

$$\begin{aligned}f_n(x)\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)&=\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2^2}\right)\cdots\cos\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)\\&=\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2^2}\right)\cdots\cos\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)\sin\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)\frac{1}{2}\\&=\cdots=\left(\frac{1}{2^n}\right)\sin x.\end{aligned}$$

于是对于 $x\neq 0$

$$f_n(x)=\frac{\sin x}{2^n\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}=\frac{\sin x}{x}\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}\to\frac{\sin x}{x},\quad n\to+\infty.$$

即

$$\lim_{n\to+\infty}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2^2}\right)\cdots\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)=\frac{\sin x}{x}.$$

解答完毕.

注: 根据上述表达式, 我们可以得到一个关于 $\frac{\pi}{2}$ 的无穷乘积公式. 首先在上述等式中, 取 $x=\frac{\pi}{2}$ 即可得

$$\frac{2}{\pi}=\lim_{n\to+\infty}\cos(\frac{\pi}{2^2})\cos(\frac{\pi}{2^4})\cdots\cos(\frac{\pi}{2^{n+1}}).$$

反复利用半角公式, 我们有

$$\begin{aligned}
&\cos(\tfrac{\pi}{2^2})=\sqrt{\tfrac{1}{2}},\\
&\cos(\tfrac{\pi}{2^3})=\sqrt{\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}},\\
&\cos(\tfrac{\pi}{2^4})=\sqrt{\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}}},\\
&\quad\vdots\\
&\cos(\tfrac{\pi}{2^{n+1}})=\sqrt{\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}+\cdots\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}}},\ (n\text{重根号})
\end{aligned}$$

于是我们得到关于 $\frac{\pi}{2}$ 的无穷乘积公式:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots}$$

这是 Vieta 于 1593 年所得的结果. 这个 Vieta 就是同学们在中学就熟知的关于一元二次方程的根与系数关系的韦达定理的那个韦达.

讨论题 17* (课本第65页第2章总复习题第17题). 设函数 $f(x)$ 定义在开区间 J 上只有可去间断点, 令 $g(x)=\lim_{t\to x}f(t), \forall x\in J$. 证明 $g(x)$ 在 J 上连续.

证: 要证 $g(x)$ 在开区间 J 上连续, 即要证 $g(x)$ 在 J 上的每个点均连续. 以下证对 $\forall x_0\in J$, $g(x)$ 在 x_0 处连续.

(1) 依定义 $g(x_0)=\lim_{t\to x_0} f(t)$ 知, 对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得

$$|g(x_0)-f(t)|<\varepsilon,\quad \forall t\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\backslash\{x_0\}.$$

(2) 对 $\forall x\in(x_0-\frac{\delta}{2},x_0+\frac{\delta}{2})$, 由 $g(x)=\lim_{t\to x} f(t)$ 知, 存在 $\delta_1>0$, (不妨设 $\delta_1\le\frac{\delta}{2}$), 使得

$$|g(x)-f(t)|<\varepsilon,\quad \forall t\in(x-\delta_1,x+\delta_1)\backslash\{x\}.$$

(3) 对(1)中的 $\varepsilon>0$ 和 $\delta>0$, 可使得当 $|x-x_0|<\frac{\delta}{2}$ 时, 取一个 $t\in(x-\frac{\delta_1}{2},x+\frac{\delta_1}{2})$, 则 $t\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$. 于是

$$|g(x)-g(x_0)|\le|g(x)-f(t)|+|f(t)-g(x_0)|<2\varepsilon.$$

这表明 $g(x)$ 在 x_0 处连续. 证毕.

讨论题 18* (课本第65页第2章总复习题第18题(3)). 设 $f\in C[a,b]$, 对任意 $x\in[a,b]$, 定义

$$M(x)\overset{\text{def}}{=}\max\{f(t),a\le t\le x\},\quad m(x)\overset{\text{def}}{=}\min\{f(t),a\le t\le x\}.$$

证明函数 $M(x)$ 和 $m(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

证明: 只证明 $M(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 函数 $m(x)$ 的连续性证明类似. 以下证明 $M(x)$ 在任意点 $x_0\in(a,b)$ 处连续. 函数 $M(x)$ 在端点处的单侧连续性的证明类似. 显然 $M(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调上升. 因此 $M(x_0^-)\le M(x_0)\le M(x_0^+)$. 要证 $M(x)$ 在 x_0 处连续, 只要证 $M(x_0^-)=M(x_0^+)$, 即要证 $M(x)$ 在点 x_0 处左极限等于右极限. 由于 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 故对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,\quad \forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta).$$

对 $\forall x_1\in(x_0-\delta,x_0)$, $\forall x_2\in(x_0,x_0+\delta)$, 则对 $t\in(x_1,x_2)$,

$$|f(t)-f(x_1)|\le|f(t)-f(x_0)|+|f(x_0)-f(x_1)|<2\varepsilon.$$

于是

$$f(t)=f(t)-f(x_1)+f(x_1)\le|f(t)-f(x_1)|+f(x_1)<f(x_1)+2\varepsilon.$$

根据 $M(x)$ 的定义知

$$M(x_2)=\max\left\{M(x_1),\max\{f(t),x_1\le t\le x_2\}\right\}\le M(x_1)+2\varepsilon.$$

由此得 $0\le M(x_2)-M(x_1)<2\varepsilon$, $\forall x_1\in(x_0-\delta,x_0)$, $\forall x_2\in(x_0,x_0+\delta)$. 令 $x_2\to x_0^+$, $x_1\to x_0^-$ 即得

$$0\le M(x_0^+)-M(x_0^-)\le 2\varepsilon.$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性知 $0\le M(x_0^+)-M(x_0^-)\le 0$, 即 $M(x_0^-)=M(x_0^+)$. 从而证明了 $M(x)$ 在 x_0 处连续. 证毕.

讨论题 19*. 证明命题: 任何非常数连续的周期函数必有最小正周期. 也就是说, 如果函数 $f(x)$ 满足条件: (i) $f(x)$ 是周期函数; (ii) $f(x)$ 在整个实数轴上连续; (iii) $f(x)$ 不是常数函数, 则函数 $f(x)$ 必有最小的正周期.

<u>证明</u>: 记 P 为 连续周期函数 $f(x)$ 的所有周期 (包括正的和负的周期) 集合, 并称之为周期集. 记 P^+ 为函数 $f(x)$ 的所有正周期集合, 并称之为正周期集. 记 $T_0\overset{\text{def}}{=}\inf P^+$, 则 $T_0\ge 0$.

<u>情形一</u>: $T_0>0$. 此时我们断言 T_0 就是函数 $f(x)$ 的最小正周期. 如果 T_0 是 $f(x)$ 的周期, 那么 T_0 显然是最小正周期. 以下证 T_0 是 $f(x)$ 的周期. 即要证 $f(x+T_0)=f(x)$, $\forall x\in R$. 根据确界性质, 存在 $T_n\in P^+$, 使得 $T_n\to T_0$. 于是对 $\forall x\in\mathbb{R}$,

$$f(x+T_0)=f(x+\lim_{n\to+\infty}T_n)=\lim_{n\to+\infty}f(x+T_n)=\lim_{n\to+\infty}f(x)=f(x).$$

注意上式第二个等式成立, 是根据函数 $f(x)$ 的连续性, 上式第三个等式成立是因为 T_n 是 $f(x)$ 的周期. 故结论对于情形一得证.

<u>情形二</u>: $T_0=0$. 我们将证明这种情况不会发生. 为此我们将证明三件事情:

1) 正周期集 P^+ 在区间 $[0,+\infty)$ 上稠密;

2) 周期集 P 在整个实数集 $\mathbb{R}$ 上稠密;

3) $f(x)=f(0)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

证1): 由假设 $T_0 = \inf P^+ = 0$ 知, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $T_\varepsilon \in P^+$, 使得 $0 < T_\varepsilon < \varepsilon$. 对 $\forall x \geq 0$, 存在自然数 n, 使得 $(n-1)T_\varepsilon \leq x < nT_\varepsilon$. 这表明 $|nT_\varepsilon - x| < \varepsilon$. 由于 $nT_\varepsilon \in P^+$, 故结论1)成立.

证2): 显然周期集 P 关于原点对称. 也就是说, 若 $T \in P$, 则 $-T \in P$. 理由如下: 当 $T \in P$ 时, 即 $f(x+T) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. 在这个等式中, 以 $x - T$ 代替 x 即得 $f(x) = f(x-T)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. 这表明 $-T \in P$. 根据周期集 P 关于原点的对称性, 以及正周期集 P^+ 在区间 $[0, +\infty)$ 上稠密性, 我们立即得到周期集 P 在整个实数集 $\mathbb{R}$ 上稠密性.

证3): 根据结论2)以及稠密性的性质可知, 对 $x \in \mathbb{R}$, 存在一个序列 $\{T_n\} \subset P$, 使得 $T_n \to x$. 于是

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(T_n) = \lim_{n\to+\infty} f(0) = f(0).$$

这表明函数 $f(x)$ 是常数函数. 此与假设矛盾. 因此情形二, 即 $T_0 = 0$ 的事情不会出现. 命题得到. 证毕.