

《微积分A1》第二十三讲

教师 杨利军

清华大学数学科学系

2025年12月08日

带积分余项的 Taylor 展开

Theorem

定理: 设 $f(x)$ 在 (a, b) 上 $n+1$ 次连续可微, $x_0 \in (a, b)$, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 上可表为

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x),$$

其中 $R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x - u)^n f^{(n+1)}(u) du.$

注: 定理中的余项 $R_n(x)$ 常称作 Cauchy 积分余项.

由积分余项可推出 Lagrange 余项

由上述 Taylor 展开定理中的积分余项

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-u)^n f^{(n+1)}(u) du, \quad (*)$$

可立刻推出 Taylor 展开定理 Lagrange 余项. 我们首先注意这两个定理的假设相同, 即都是假设 $f(x)$ 在 (a, b) 上 $n + 1$ 次连续可微. 由于式 (*) 定义的积分余项 $R_n(x)$ 的被积函数中, $(x-u)^n$ 作为 u 的函数不变号, 故根据积分中值定理得

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-u)^n f^{(n+1)}(u) du \\ &= \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi) \int_{x_0}^x (x-u)^n du = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}, \end{aligned}$$

其中 ξ 为介于 x_0 和 x 之间的某个点. 这正是 Taylor 展开定理中的 Lagrange 余项.

定理证明

证：我们要证

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x), \quad (*)$$

其中 $R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x - u)^n f^{(n+1)}(u) du.$

当 $n = 0$ 时，等式 (*) 成立。因为此时等式 (*) 为

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(u) du,$$

即 Newton-Leibniz 公式。假设结论对 $n = m - 1$ 成立。此时等式 (*) 即为

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_{m-1}(x), \quad (**)$$

其中 $R_{m-1}(x) = \frac{1}{(m-1)!} \int_{x_0}^x (x - u)^{m-1} f^{(m)}(u) du.$

考虑当 $n = m$ 时的结论。此时等式 (**) 当然也成立。

证明, 续

注意此时的假设是 $f(x)$ 在 (a, b) 上 $m + 1$ 次连续可微, 故可对余项 $R_{m-1}(x)$ 作分部积分得

$$R_{m-1}(x) = \frac{1}{(m-1)!} \int_{x_0}^x (x-u)^{m-1} f^{(m)}(u) du$$

$$= \frac{1}{(m-1)!} \int_{x_0}^x f^{(m)}(u) \left[-\frac{(x-u)^m}{m} \right]'_u du$$

$$= -\frac{1}{m!} \left(f^{(m)}(u)(x-u)^m \Big|_{u=x_0}^{u=x} - \int_{x_0}^x (x-u)^m f^{(m+1)}(u) du \right)$$

$$= \frac{1}{m!} f^{(m)}(x_0)(x-x_0)^m + \frac{1}{m!} \int_{x_0}^x (x-u)^m f^{(m+1)}(u) du.$$

将上述余项 $R_{m-1}(x)$ 代入等式 $(**)$ 即可知结论对 $n = m$ 时成立. 定理得证.

积分应用：求平面图形的面积

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且 $g(x) \leq f(x), \forall x \in [a, b]$. 由积分几何意义知，由曲线 $y = f(x)$, $y = g(x)$, 以及直线 $x = a$, $x = b$ 所围图形 S 的面积可定义为 $A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$. 如图所示.

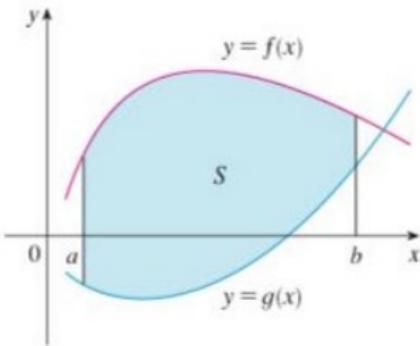


FIGURE 1

$$S = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

求平面图形的面积, 续

所求图形 S 的面积 A 也可看作

曲线 $y = f(x)$ 下的面积, 减去曲线 $y = g(x)$ 下的面积

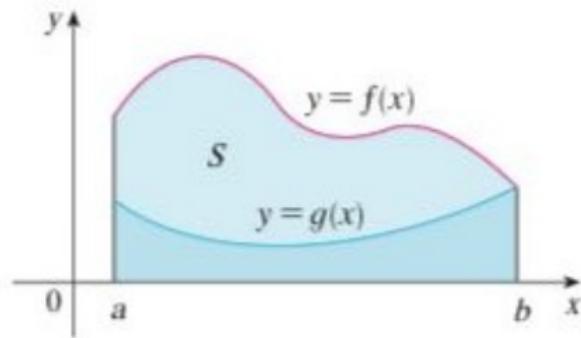
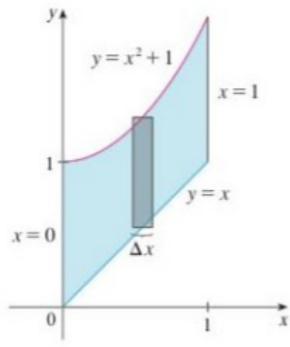


FIGURE 3

$$A = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

例一

例一: 求由曲线 $y = x^2 + 1$ 和直线 $y = x$ 在区间 $[0, 1]$ 上所围图形的面积. 如图所示.

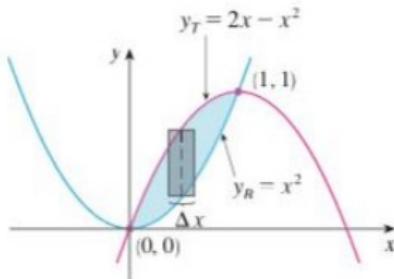


解: 根据面积公式知所求面积为

$$A = \int_0^1 (x^2 + 1 - x) dx = \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{2} = \frac{5}{6}. \quad \#$$

例二

例二: 求由抛物线 $y = x^2$ 和 $y = 2x - x^2$ 所围有界图形的面积. 如图所示.



解: 先求两个抛物线的交点. 令 $2x - x^2 = x^2$, 即 $2x(x - 1) = 0$. 由此可见它们的交点为 $(0, 0)$ 和 $(1, 1)$. 因此所求面积为

$$A = \int_0^1 (2x - x^2 - x^2) dx = \int_0^1 (2x - 2x^2) dx = \frac{2}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}. \quad \#$$

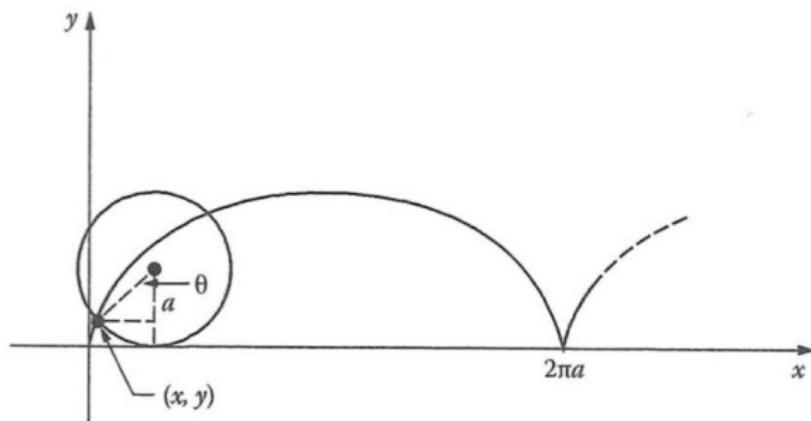
参数方程下平面图形的面积

假设函数 $y = f(x) \geq 0$ 是由参数方程 $x = x(t)$, $y = y(t)$ 确定, $\alpha \leq t \leq \beta$, 其中 $x(t)$ 连续可微且可逆, 且 $y(t) = f(x(t))$ 或 $f(x) = y(t(x))$, $t = t(x)$ 是 $x = x(t)$ 的反函数. 不妨设 $x(t)$ 严格单调增, 并记 $a = x(\alpha)$, $b = x(\beta)$, 则曲线 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 下的面积为

$$A = \int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t))x'(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt.$$

例子：旋轮线一拱的面积

例：求旋轮线 $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$, ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) 一拱与 x 轴所围图形的面积，如图所示。



例子, 续

解: 由参数方程所确定的平面图形的面积公式得所求面积为

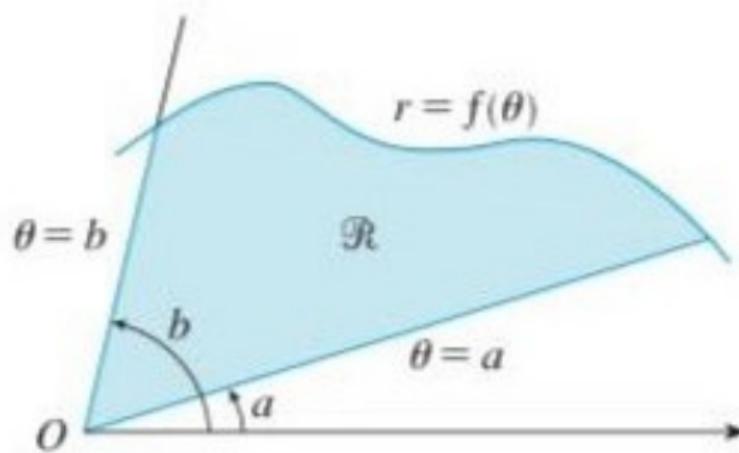
$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi a} f(x) dx = \int_0^{2\pi} y(\theta) x'(\theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} a(1 - \cos\theta) a(1 - \cos\theta) d\theta \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos\theta)^2 d\theta = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta) d\theta \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)\right) d\theta = a^2 \cdot \frac{3}{2} \cdot 2\pi = 3\pi a^2. \end{aligned}$$

注一: 回忆参数 $a > 0$ 代表生成旋轮线轮子的半径. 故上述结果表明, 旋轮线一拱与 x 轴所围面积为轮子面积的三倍.

注二: 设旋轮线在直角坐标下为函数曲线 $y = f(x)$, 则 $f(x) = y(\theta(x))$, 其中 $\theta(x)$ 为 $x = a(\theta - \sin\theta)$ 的反函数.

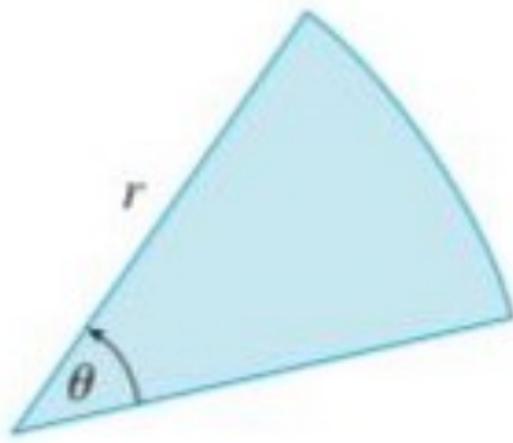
极坐标下平面图形的面积

设曲线由极坐标方程 $r = f(\theta)$, $a \leq \theta \leq b$ 给出. 考虑由曲线 $r = f(\theta)$, 以及两条射线 $\theta = a$ 和 $\theta = b$ 所围图形 \mathcal{R} 的面积. 如图所示.



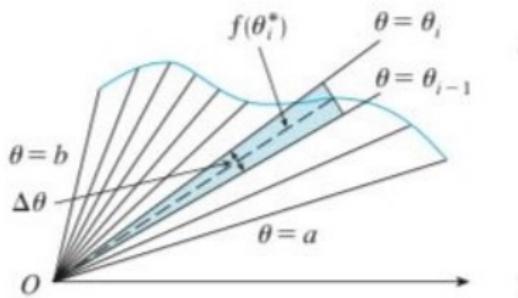
极坐标下平面图形的面积, 续一

一个简单情形, 即扇形面积为 $A = \frac{1}{2}r^2\theta$, 如图所示.



极坐标下平面图形的面积, 续二

考虑平面图形 \mathcal{R} 的面积. 假设 $0 < b - a \leq 2\pi$. 将区间 $[a, b]$ 的分割成 n 个等分, $\theta_0 = a < \theta_1 < \cdots < \theta_n = b$, 每个子区间的宽度为 $\theta_i - \theta_{i-1} = \Delta\theta = \frac{b-a}{n}$, $n+1$ 条射线 $\theta = \theta_i$ 将图形 \mathcal{R} 分割成 n 个部分, 每个部分近似于一个小扇形, 如图所示. 取点 $\theta_i^* \in [\theta_{i-1}, \theta_i]$, 则第 i 部分的面积近似于扇形面积 $\frac{1}{2}f^2(\theta_i^*)\Delta\theta$.



极坐标下平面图形的面积, 续三

于是整个图形 \mathcal{R} 由近似面积

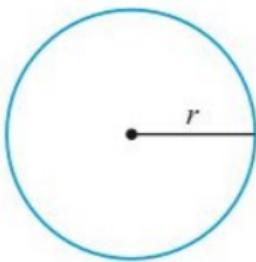
$$A \simeq \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} f^2(\theta_i^*) \Delta\theta.$$

上式右边为函数 $\frac{1}{2}f^2(\theta)$ 在区间 $[a, b]$ 上的 Riemann 和. 因此我们有理由定义图形 \mathcal{R} 的面积为

$$A = \int_a^b \frac{1}{2} f^2(\theta) d\theta.$$

例一：圆的面积

例一：求半径为 r 的圆盘的面积.

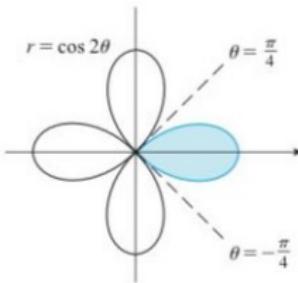


解：半径 r 的圆盘可以看作圆周 $r(\theta) = r, 0 \leq \theta \leq 2\pi$, 所围的图形. 由极坐标下平面面积公式得

$$A = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r(\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 d\theta = \frac{1}{2} r^2 \cdot 2\pi = \pi r^2. \quad \#$$

例二

例二: 求四叶玫瑰曲线 $r = \cos 2\theta$ 的一支所围图形的面积. 如图所示.

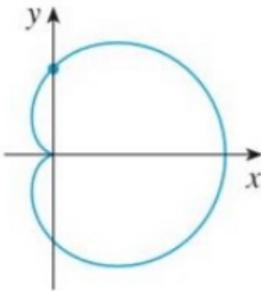


解: 根据极坐标下平面面积公式得所求面积为

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} r^2 d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} \cos^2 2\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2\theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 4\theta) d\theta = \frac{1}{2} \left[\theta + \frac{1}{4} \sin 4\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8}. \quad \# \end{aligned}$$

例三

例三: 求心脏线 $r = a(1 + \cos\theta)$ 所围图形的面积. 如图所示.



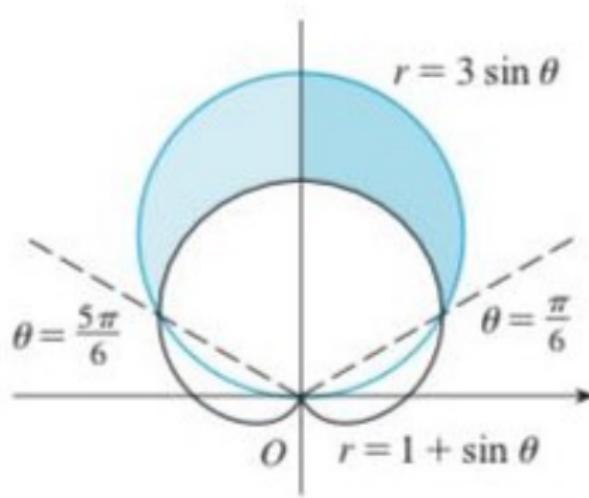
解: 根据极坐标下的面积公式知所求面积为

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [a(1 + \cos\theta)]^2 d\theta \\ &= \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta) d\theta = \frac{3}{2}\pi a^2. \quad \# \end{aligned}$$

例四

例四：求圆周 $r = 3\sin\theta$ 的内部与心脏线 $r = 1 + \sin\theta$ 外部交集图形的面积.

如图所示.



例四, 续

解: 先求圆周 $r = 3\sin\theta$ 和心形线 $r = 1 + \sin\theta$ 的交点, 以确定图形极角的范围. 令 $3\sin\theta = 1 + \sin\theta$, 即 $\sin\theta = \frac{1}{2}$. 解之得 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 和 $\theta = \frac{5\pi}{6}$. 于是所求面积可以表示为

$$A = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (3\sin\theta)^2 d\theta - \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (1 + \sin\theta)^2 d\theta$$

由于图形关于 y 轴对称, 故

$$\begin{aligned} A &= 2 \left[\frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 9\sin^2\theta d\theta - \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2\sin\theta + \sin^2\theta) d\theta \right] \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (8\sin^2\theta - 1 - 2\sin\theta) d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} [4(1 - \cos 2\theta) - 1 - 2\sin\theta] d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} [3 - 4\cos 2\theta - 2\sin\theta] d\theta = \left[3\theta - 2\sin 2\theta + 2\cos\theta \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi. \quad \# \end{aligned}$$

曲线的弧长定义

设平面曲线 Γ 由参数方程 $\vec{r} = \vec{r}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$ 给出. 设 Γ 不自相交, 即 $\vec{r}(t_1) \neq \vec{r}(t_2)$, $\forall t_1, t_2 \in (\alpha, \beta)$, $t_1 \neq t_2$. 当 $\vec{r}(\alpha) = \vec{r}(\beta)$ 时, Γ 为闭曲线. 设

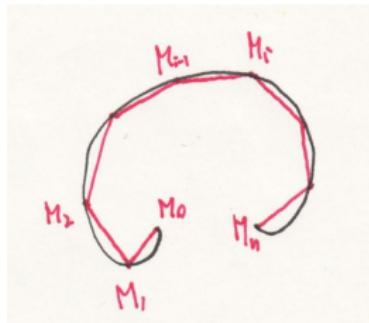
$$P : \alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$$

为区间 $[\alpha, \beta]$ 的一个分割, 相应地曲线 Γ 有一个分割

$$M_0, M_1, \dots, M_n, \quad M_i = \vec{r}(t_i) = (x(t_i), y(t_i)).$$

若以直线段 $\overline{M_{i-1}M_i}$ 的长度近似代替曲线段 $M_{i-1}M_i$ 的弧长, 如图所示.

曲线弧长的定义, 续



则曲线 Γ 的弧长有近似 $\sum_{i=1}^n |\overline{M_{i-1}M_i}|$. 若极限

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n |\overline{M_{i-1}M_i}|$$

存在, 则称曲线 Γ 可求长, 或曲线 Γ 有弧长, 其弧长定义为上述极限值, 其中 $\|P\|$ 为分割 P 的宽度, 即 $\|P\| = \max\{t_i - t_{i-1}\}$.

注: 空间曲线弧长类似定义.

弧长公式

Theorem

定理: 设曲线 Γ 有 C^1 表示 $\vec{r} = \vec{r}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$, 即 $x(t), y(t)$ 连续可微, 则曲线 Γ 可求长, 且其弧长为

$$|\Gamma| = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

注一: 定理中的条件 $x(t), y(t)$ 连续可微, 可减弱为 $x(t), y(t)$ 可微, 且 $x'(t), y'(t)$ 可积.

注二: 当曲线 Γ 为函数 $y = y(x)$ ($a \leq x \leq b$) 的函数图像时, 其弧长公式为

$$|\Gamma| = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} dx.$$

注三: 对于空间曲线 Γ : $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$, 成立类似的弧长公式 $|\Gamma| = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$.

例一：圆周的周长

例一：设圆周 Γ 由方程 $x = R \cos t$, $y = R \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$ 给出. 求其弧长.

解：由弧长公式得圆周 Γ 的弧长为

$$\begin{aligned} |\Gamma| &= \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-R \sin t)^2 + (R \cos t)^2} dt = \int_0^{2\pi} R dt = 2\pi R. \quad \# \end{aligned}$$

例二：旋轮线一拱的弧长

例二：求旋轮线 $\Gamma: x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ 一拱的弧长, 其中 $t \in [0, 2\pi]$.

解：简单计算得 $x'(t) = a(1 - \cos t)$, $y'(t) = a \sin t$. 由此得

$$\begin{aligned}x'(t)^2 + y'(t)^2 &= a^2(1 - \cos t)^2 + a^2(\sin t)^2 \\&= a^2[1 - 2 \cos t + (\cos t)^2 + (\sin t)^2] = 2a^2(1 - \cos t) = 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}|\Gamma| &= \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}} dt \\&= 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 4a \int_0^\pi \sin s ds = 8a.\end{aligned}$$

注：上述结果表明，旋轮线一拱的弧长，等于轮子直径的四倍。

例三：椭圆的弧长

例三：求椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的弧长，其中 $a > b > 0$.

解：为方便取椭圆 Γ 的参数方程为 $x = a \sin t$, $y = b \cos t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. 于是椭圆弧长为

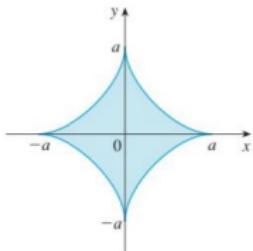
$$\begin{aligned} |\Gamma| &= \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(a \cos t)^2 + (-b \sin t)^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 t} dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt \\ &= 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt, \end{aligned}$$

其中 $k = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \in (0, 1)$ 为椭圆离心率. 文献上称变上限积分 $E(k, \phi) = \int_0^\phi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt$ 为椭圆积分(函数). 可以证明椭圆积分积不出来, 即不能用初等函数表示. 解答完毕.

例四

例四：求星形线 $\Gamma: x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$ 的弧长，其中 $a > 0, 0 \leq t \leq 2\pi$.

(注：星形线在直角坐标下的方程为 $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$).



解：计算得 $x' = -3a\cos^2 t \sin t, y' = 3a\sin^2 t \cos t$. 因此所求弧长为 $|\Gamma|$

$$\begin{aligned}&= \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-3a\cos^2 t \sin t)^2 + (3a\sin^2 t \cos t)^2} dt \\&= 3a \int_0^{2\pi} |\sin t \cos t| dt = 4 \cdot 3a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t dt = 12a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t d(\sin t) = 6a.\#\end{aligned}$$

弧长公式的证明

证：设 $P: \alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$ 为区间 $[\alpha, \beta]$ 的一个分割，记 $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, n$. 再记分割 P 的宽度为 $\|P\| = \max\{\Delta t_i\}$. 对应分割 P , 曲线 Γ 有分点 M_0, M_1, \dots, M_n , $M_i = (x(t_i), y(t_i)) = \vec{r}(t_i)$. 于是

$$\begin{aligned} |\overline{M_{i-1}M_i}| &= \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2} \\ &= \sqrt{x'(\xi_i)^2 + y'(\eta_i)^2} \Delta t_i, \end{aligned}$$

其中 $\xi_i, \eta_i \in (t_{i-1}, t_i)$. 这里使用了 Lagrange 中值定理. 于是

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^n |\overline{M_{i-1}M_i}| - \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \\ &= \sum_{i=1}^n \left(|\overline{M_{i-1}M_i}| - \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \right) \end{aligned}$$

证明, 续一

$$= \sum_{i=1}^n \left(\sqrt{x'(\xi_i)^2 + y'(\eta_i)^2} - \sqrt{x'(\tau_i)^2 + y'(\tau_i)^2} \right) \Delta t_i,$$

其中 $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$. 这里对积分 $\int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$ 使用了积分中值定理.

引理: 对于任意 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, 成立

$$\left| \sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{c^2 + d^2} \right| \leq |a - c| + |b - d|.$$

证明: 若 a, b, c, d 全为零, 则上述不等式显然成立. 假设它们不全为零, 则

$$\begin{aligned} & \left| \sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{c^2 + d^2} \right| = \frac{|a^2 + b^2 - c^2 - d^2|}{\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}} \\ & \leq \frac{|a - c||a + c|}{\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}} + \frac{|b - d||b + d|}{\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}} \leq |a - c| + |b - d|. \# \end{aligned}$$

证明, 续二

由上述引理得

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^n |\mathbf{M}_{i-1} \mathbf{M}_i| - \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \right| \\ & \leq \sum_{i=1}^n \left| \sqrt{x'(\xi_i)^2 + y'(\eta_i)^2} - \sqrt{x'(\tau_i)^2 + y'(\tau_i)^2} \right| \Delta t_i \\ & \leq \sum_{i=1}^n \left(|x'(\xi_i) - x'(\tau_i)| + |y'(\eta_i) - y'(\tau_i)| \right) \Delta t_i, \end{aligned}$$

这里 $\xi_i, \eta_i, \tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$. 因 $x'(t), y'(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续, 故一致连续, 即

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得当 $|t - t'| < \delta$, $|x'(t) - x'(t')| < \varepsilon$, $|y'(t) - y'(t')| < \varepsilon$. 因此当 $\|\mathbf{P}\| < \delta$ 时, $|x'(\xi_i) - x'(\tau_i)| < \varepsilon$, $|y'(\eta_i) - y'(\tau_i)| < \varepsilon$. 此时

证明, 续三

$$\begin{aligned}& \left| \sum_{i=1}^n |\overline{M_{i-1} M_i}| - \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \right| \\& \leq \sum_{i=1}^n (|x'(\xi_i) - x'(\tau_i)| + |y'(\eta_i) - y'(\tau_i)|) \Delta t_i \\& \leq \sum_{i=1}^n (\varepsilon + \varepsilon) \Delta t_i = 2\varepsilon(\beta - \alpha).\end{aligned}$$

这表明

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n |\overline{M_{i-1} M_i}| = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

弧长公式得证.



极坐标下曲线的弧长

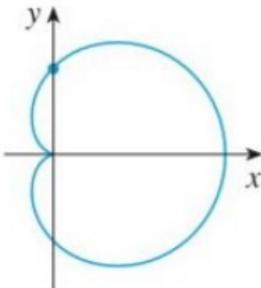
Theorem

定理: 设曲线 Γ 由极坐标形式 $r = r(\theta)$ 给出, 其中 $\alpha \leq \theta \leq \beta$, $r(\theta)$ 连续可微, 则曲线 Γ 可求长, 且其弧长为

$$|\Gamma| = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2} d\theta.$$

例：心脏线的弧长

例：求心脏线 $r = a(1 + \cos\theta)$ 的弧长，其中 $0 \leq \theta \leq 2\pi$.



解：计算得 $r(\theta)^2 + r'(\theta)^2 = [a(1 + \cos\theta)]^2 + [-a\sin\theta]^2 = 2a^2(1 + \cos\theta)$
 $= 4a^2\cos^2\theta/2$. 于是所求弧长为

$$|\Gamma| = \int_0^{2\pi} \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2} d\theta = 2a \int_0^{2\pi} |\cos(\theta/2)| d\theta = 8a. \quad \#$$

极坐标下弧长公式的证明

证明：由曲线 Γ 的极坐标方程 $r = r(\theta)$, 可得到 Γ 在直角坐标下的参数方程

$$\begin{cases} x = x(\theta) = r(\theta)\cos\theta \\ y = y(\theta) = r(\theta)\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = r'\cos\theta - r\sin\theta \\ y' = r'\sin\theta + r\cos\theta \end{cases} (*)$$

直接计算可得 $x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2 = r(\theta)^2 + r'(\theta)^2$. 也可如下证明这个等式. 将

(*) 中第二式写成如下矩阵和向量形式

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r' \\ r \end{bmatrix}$$

记上述系数矩阵为 Q , 则 Q 是正交矩阵, 即 $Q^T Q = E$. 正交矩阵或正交变换的一个重要性质是它保持向量的长度, 即 $r'(\theta)^2 + r(\theta)^2 = x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2$. 这个等式也可以直接证明:

证明, 续

$$\begin{aligned}x'^2 + y'^2 &= [x', y'][\begin{array}{c} x' \\ y' \end{array}] \\&= [r', r][\begin{array}{cc} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{array}][\begin{array}{cc} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{array}][\begin{array}{c} r' \\ r \end{array}] \\&= [r', r][\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}][\begin{array}{c} r' \\ r \end{array}] = r'^2 + r^2.\end{aligned}$$

因此曲线 Γ 的弧长为

$$|\Gamma| = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2} d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r'(\theta)^2 + r(\theta)^2} d\theta.$$

定理得证.



弧长与参数化无关

曲线可以由不同的参数化. 例如两个参数化 $\vec{r}_1(t) = (t, t^2)$, $1 \leq t \leq 2$, $\vec{r}_2(u) = (e^u, e^{2u})$, $0 \leq u \leq \ln 2$, 对应同一条曲线 Γ . 可以期待曲线 Γ 关于这两个参数化所得的弧长相等. 实际上

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 2} |\vec{r}'_2(u)| du &= \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^{2u} + 4e^{4u}} du = \int_0^{\ln 2} \sqrt{1 + 4e^{2u}} e^u du \\ &= \int_1^2 \sqrt{1 + 4t^2} dt = \int_1^2 |\vec{r}'_1(t)| dt.\end{aligned}$$

这表明由这两个不同参数化计算所得的弧长相同.

弧长函数, 曲线的弧长参数化

设曲线 Γ 有 C^1 参数化 $\vec{r} = r(t) = (x(t), y(t))$, $\alpha \leq t \leq \beta$. 称

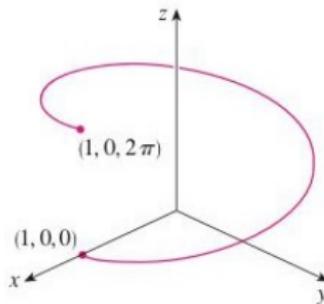
$$s(t) = \int_{\alpha}^t |\vec{r}'(\tau)| d\tau = \int_{\alpha}^t \sqrt{x'(\tau)^2 + y'(\tau)^2} d\tau$$

为曲线 Γ 的弧长函数, 它表示曲线从点 $r(\alpha)$ 到点 $r(t)$ 那一部分的弧长. 由 Newton-Leibniz 公式知函数 $s(t)$ 可微, 且 $s'(t) = |\vec{r}'(t)|$. 假设 $\vec{r}'(t) \neq 0$,
 $\forall t \in (\alpha, \beta)$, 则弧长函数满足 $s'(t) = |\vec{r}'(t)| > 0$. 因此弧长函数 $s(t)$ 有反函数 $t = t(s)$. 由此我们得到曲线 Γ 关于其弧长的参数化 $\vec{r} = \vec{r}(t(s))$.

例子

例：求螺线 $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ 的弧长，其中 $0 \leq t \leq 2\pi$ ，并以弧长为参数

将螺线重新参数化。



解：对 $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ 求导得 $\vec{r}'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$ 得 $|\vec{r}'(t)| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1} = \sqrt{2} > 0$. 因此螺线的弧长为

$$|\Gamma| = \int_0^{2\pi} |\vec{r}'(t)| dt = 2\sqrt{2}\pi.$$

例子, 续

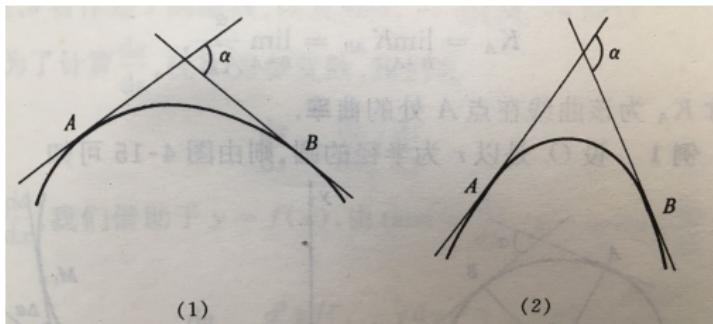
由定义 $s(t) = \int_0^t |\vec{r}'(\tau)| d\tau = \sqrt{2}t$. 由此解得 $t(s) = s/\sqrt{2}$. 于是螺线以弧长作为参数的方程为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t(s)) = \left(\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}} \right).$$

解答完毕.

曲线的弯曲程度

先来观察下图



上述两个图中的弧段 **AB** 的弧长大致相等. 由直觉知, 图(2)中的弧 **AB** 比图(1)中的弧 **AB** 的弯曲程度更大. 因为 **A**, **B** 两点的切线所成的夹角 α 更大.
角 α 可看作切线, 从点 **A** 出发, 沿着曲线移动至点 **B**, 所扫过的角度.

曲率的定义

Definition

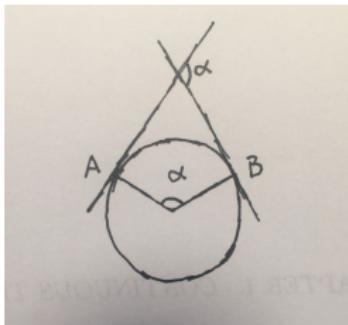
定义：在平面光滑曲线 Γ 上任取两点 $A, B \in \Gamma$. 若记 α_{AB} 表示 A, B 两点的切线所成的夹角. 记 L_{AB} 表示弧段 AB 的弧长, 则比值 $\frac{\alpha_{AB}}{L_{AB}}$ 可用作衡量弧段 AB 平均弯曲程度的一个量. 现固定点 A , 若极限

$$\lim_{B \rightarrow A} \frac{|\alpha_{AB}|}{L_{AB}}$$

存在, 则称极限值为曲线在点 A 处的曲率, 常记作 κ_A .

例子：圆周的曲率

考虑半径为 r 的圆周上，任意一点 A 处的曲率.



由图可知，角 $\alpha = \alpha_{AB}$ 等于弧 AB 所对应的圆心角。因此弧长 $L_{AB} = \alpha r$. 于是 $\frac{|\alpha_{AB}|}{L_{AB}} = \frac{\alpha}{\alpha r} = \frac{1}{r}$. 故 $\lim_{B \rightarrow A} \frac{|\alpha_{AB}|}{L_{AB}} = \frac{1}{r}$. 此即 $\kappa_A = \frac{1}{r}$. 这表明圆周上各点的曲率相同. 即各点的弯曲程度相同，且半径越大，弯曲程度越小. 这与我们的直觉一致.

曲率的计算公式

设曲线 Γ 由参数方程 $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in (a, b)$ 给出, 其中 $\vec{r}(t)$ 二次连续可微, 且 $\vec{r}'(t) \neq 0$. 记点 $A = \vec{r}(t)$, $B = \vec{r}(t + h)$, 则曲线 Γ 在 A 和 B 两点处的切线斜率分别为

$$\frac{y'(t)}{x'(t)}, \quad \frac{y'(t+h)}{x'(t+h)}.$$

记两切线与 x 轴的夹角分别为 θ_0 和 θ_h , 即

$$\tan\theta_0 = \frac{y'(t)}{x'(t)}, \quad \tan\theta_h = \frac{y'(t+h)}{x'(t+h)}.$$

两切线之间的夹角为

$$\alpha_{AB} = \theta_h - \theta_0 = \arctan \frac{y'(t+h)}{x'(t+h)} - \arctan \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

另一方面弧段 AB 的弧长为

$$L_{AB} = \int_t^{t+h} \sqrt{x'(\tau)^2 + y'(\tau)^2} d\tau = s(t+h) - s(t).$$

曲率的计算公式, 续一

于是

$$\begin{aligned}\frac{\alpha_{AB}}{L_{AB}} &= \frac{\arctan \frac{y'(t+h)}{x'(t+h)} - \arctan \frac{y'(t)}{x'(t)}}{s(t+h) - s(t)} \\ &= \frac{\arctan \frac{y'(t+h)}{x'(t+h)} - \arctan \frac{y'(t)}{x'(t)}}{h} \cdot \frac{1}{\frac{s(t+h) - s(t)}{h}} \\ &\rightarrow \frac{\left[\arctan \frac{y'(t)}{x'(t)} \right]'}{s'(t)}, \quad h \rightarrow 0.\end{aligned}$$

计算得

$$\begin{aligned}\left[\arctan \frac{y'}{x'} \right]' &= \frac{1}{1 + (\frac{y'}{x'})^2} \left[\frac{y'}{x'} \right]' \\ &= \frac{x'^2}{x'^2 + y'^2} \cdot \frac{x'y'' - y'x''}{x'^2} = \frac{x'y'' - y'x''}{x'^2 + y'^2}.\end{aligned}$$

曲率的计算公式, 续二

这表明曲线 Γ 在点 $A = \vec{r}(t)$ 处的曲率为

$$\kappa_A = \lim_{B \rightarrow A} \frac{|\alpha_{AB}|}{L_{AB}} = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

注: 上述公式也可以写作

$$\kappa_A = \frac{|\vec{r}' \times \vec{r}''|}{|\vec{r}'|^3}.$$

理由: 由 $\vec{r} = (x, y)$ 得 $\vec{r}' = (x', y')$, $\vec{r}'' = (x'', y'')$. 因此

$$|\vec{r}' \times \vec{r}''| = \text{abs} \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} = |x'y'' - y'x''|, \quad |\vec{r}'| = \sqrt{x'^2 + y'^2}.$$

$$\text{故 } \frac{|\vec{r}' \times \vec{r}''|}{|\vec{r}'|^3} = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

这里 $\text{abs} (*)$ 表示关于 * 取绝对值.

函数曲线 $y = f(x)$ 的曲率公式

当曲线 C 由 $y = f(x)$ 给出时, 则 x 可看作参数, C 由参数方程 $r(x) = (x, f(x))$ 给出. 于是 $x' = 1$, $y' = f'$, $x'' = 0$, $y'' = f''$, 进而 $|r'| = \sqrt{1 + f'^2}$. 因此

$$\kappa(x) = \frac{|x'y'' - x''y'|}{|r'|^3} = \frac{|f''(x)|}{[1 + f'(x)^2]^{3/2}}.$$

例一

课本第 185 页习题 5.7 题 4(4):

求曲线 $x = a(\cos t - t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$ 的曲率.

解:

$$\text{由 } \begin{cases} x = a(\cos t - t \sin t) \\ y = a(\sin t - t \cos t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = a(-2 \sin t - t \cos t) \\ y' = a t \sin t \end{cases}$$

$$\Rightarrow x'^2 + y'^2 = a^2(4 \sin^2 t + 4 t \sin t \cos t + t^2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'' = a(-3 \cos t + t \sin t) \\ y'' = a(\sin t + t \cos t) \end{cases}$$

例一, 续

$$x'y'' - x''y' = a^2(-2\sin t - t \cos t)(\sin t + t \cos t)$$

$$-a^2(-3\cos t + \sin t)(t \sin t) = -a^2(2\sin^2 t + t^2).$$

因此所求曲线的曲率为

$$\kappa(t) = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} = \frac{2\sin^2 t + t^2}{a(4\sin^2 t + 4t \sin t \cos t + t^2)^{3/2}}.$$

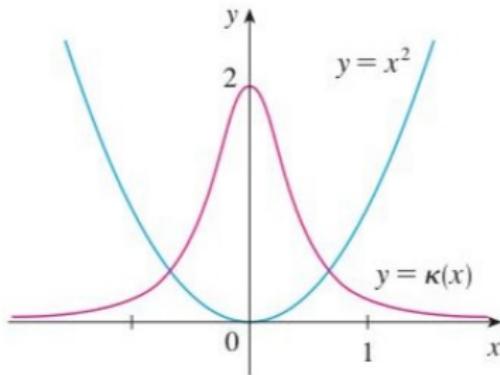
解答完毕.

例二

例二: 求抛物线 $y = x^2$ 的曲率.

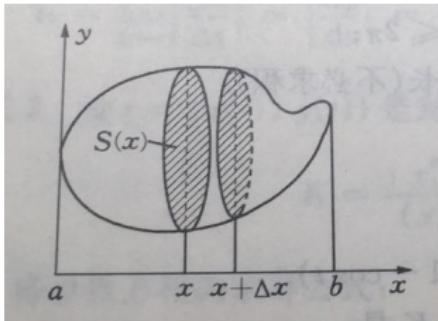
解: 由于 $f' = 2x$, $f'' = 2$, 故所求曲率

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{[1 + f'(x)^2]^{3/2}} = \frac{2}{[1 + 4x^2]^{3/2}}.$$



一般体积公式

设一个几何立体夹在平面 $x = a$ 和 $x = b$ 之间, 如图所示.



假设用平面 $x = x$ ($a \leq x \leq b$) 截这个立体所得的截面面积为 $S(x)$, 且函数 $S(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则该几何体体积可定义为

$$V = \int_a^b S(x) dx.$$

定义的合理性

定义的合理性：设 $P : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 是区间 $[a, b]$ 的一个分割.

于是立体分成了 n 个薄片，第 i 个薄片的体积近似为 $S(\xi_i)\Delta x_i$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$,

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, n$. 因此立体体积有近似

$$\sum_{i=1}^n S(\xi_i) \Delta x_i.$$

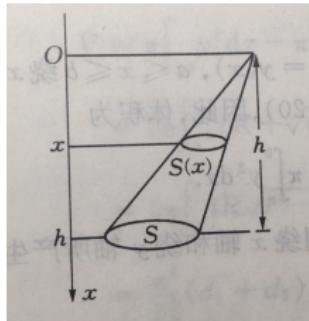
这是函数 $S(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的一个 Riemann 和. 故定义极限

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n S(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b S(x) dx$$

为立体体积是合理的.

例一

例一：求底面面积为 S , 高为 h 的圆锥体体积. 如图所示.



解：由相似三角形知识可知, $\frac{S(x)}{S} = \frac{x^2}{h^2}$, 故所求体积为

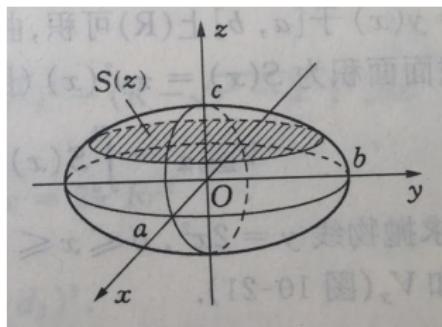
$$V = \int_0^h S(x) dx = \int_0^h S \frac{x^2}{h^2} dx = \frac{S}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{1}{3} Sh. \quad \#$$

例二

例二：求椭球面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a, b, c > 0$$

所围椭球体的体积. 如图所示.



解：用平面 $z = z \in (-c, c)$ 截椭球面，其截线是椭圆周 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z^2}{c^2}$, 或
写作

例二, 续

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}\right)^2} = 1.$$

这个椭圆周所围椭圆盘的面积为

$$S(z) = \pi \cdot a \sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}} \cdot b \sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}} = \pi ab \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right).$$

故所求体积为

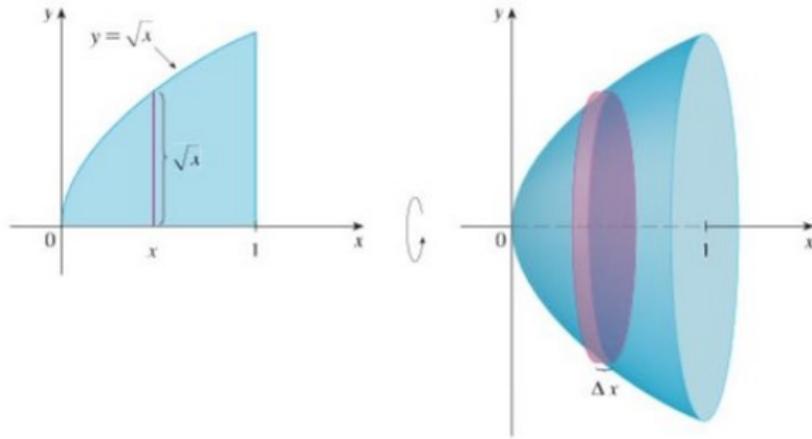
$$V = \int_{-c}^c S(z) dz = \int_{-c}^c \pi ab \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) dz = \frac{4}{3} \pi abc.$$

解答完毕.

旋转体定义

Definition

定义: 平面有界闭域(或称图形)绕一条直线(称为旋转轴)旋转一周(假设图形内部与旋转轴不相交), 所得到的立体称为旋转体.

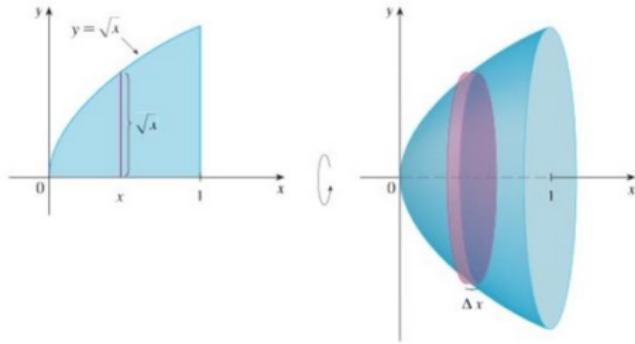


绕 x 轴旋转的旋转体体积

考慮曲邊梯形

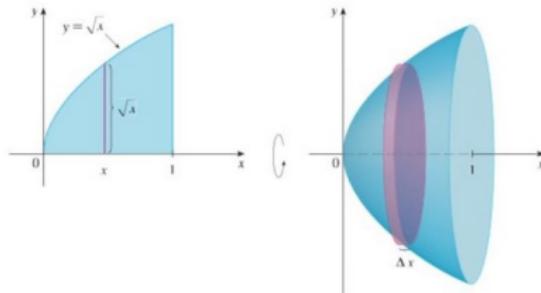
$$D = \{(x, y), 0 \leq y \leq f(x), a \leq x \leq b\}$$

绕 x 轴旋转所得到的旋转体体积. 如图为情形 $f(x) = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 1$.



对区间 $[a, b]$ 作分割 P : $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 则旋转体相应地分割成 n 个薄片. 每个薄片可近似地看作一个圆盘. 如图所示.

绕 x 轴旋转的旋转体体积, 续



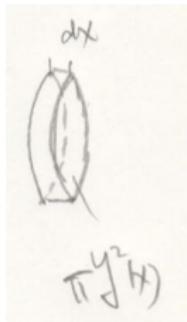
于是第 i 个薄片的体积近似为 $\pi y^2(\xi_i) \Delta x_i$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. 于是整个旋转体体积有近似 $\sum_{i=1}^n \pi y^2(\xi_i) \Delta x_i$. 注意这是函数 $\pi y^2(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的一个 Riemann 和. 因此我们有理由定义旋转体体积为

$$|V| = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \pi y^2(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b \pi y^2(x) dx.$$

这里当然假设极限存在, 即积分存在.

微元法

可将上述推导旋转体体积公式的方法，加以提炼简化成一个一般方法：微元法。

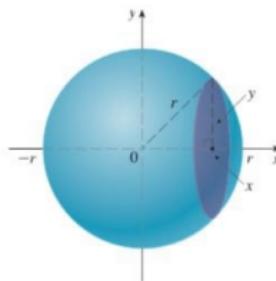


1. 取体积微元 $dV = \pi y^2(x)dx$, (圆盘面积 $\pi y^2(x)$ × 厚度 dx).
2. 积分即得所求体积 $V = \int_a^b dV = \int_a^b \pi y^2(x)dx$.

例一：求球体的体积

将半径为 $r > 0$ 的球体看作半圆盘 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体，其中

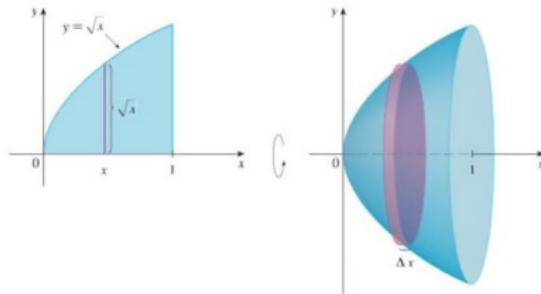
$D = \{(x, y), 0 \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2}, |x| \leq r\}$, 如图所示.



$$\begin{aligned} \text{故球体体积为 } V &= \int_{-r}^r \pi y^2 dx = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx \\ &= 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2) dx = 2\pi(r^3 - \frac{1}{3}r^3) = \frac{4}{3}\pi r^3. \quad \# \end{aligned}$$

例二

例：求旋转体V的体积，其中V是由抛物线 $y = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 1$, 以及直线 $x = 1$ 和 $y = 0$ 所围区域绕x轴旋转所得. 如图所示.

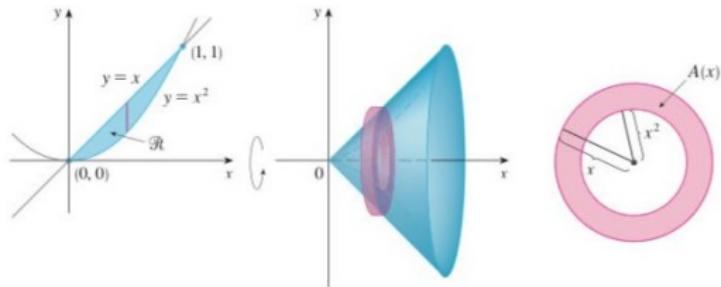


解：根据体积公式得所求立体V的体积为

$$|V| = \int_0^1 \pi y^2(x) dx = \pi \int_0^1 x dx = \frac{\pi}{2}. \quad \#$$

例三

例三：求旋转体 V 的体积 $|V|$, 其中 V 是由直线 $y = x$ 和抛物线 $y = x^2$ 所围有界区域 \mathcal{R} , 围绕 x 轴旋转一周所得. 如图所示.



解：根据体积公式得

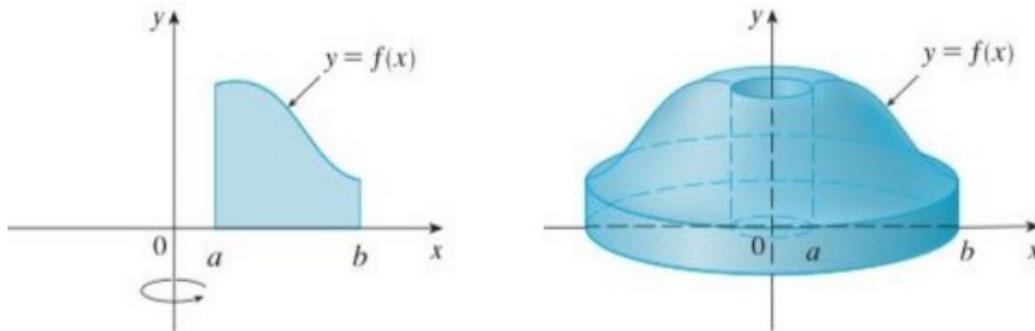
$$|V| = \int_0^1 \pi[y_2(x)^2 - y_1(x)^2]dx = \int_0^1 \pi(x^2 - x^4)dx = \frac{2\pi}{15}. \quad \#$$

绕 y 轴旋转的旋转体体积

考虑曲边梯形

$$D = \{(x, y), 0 \leq y \leq f(x), a \leq x \leq b\}$$

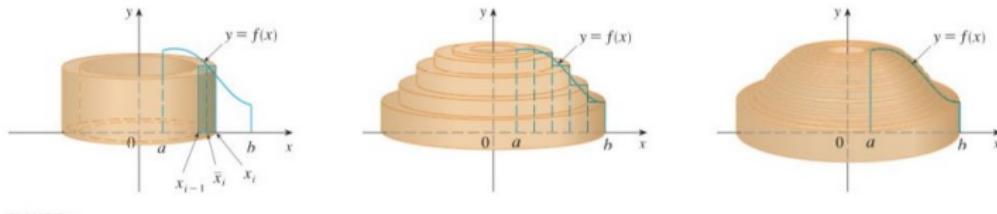
所围区域绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积，其中 $b > a \geq 0, f(x) \geq 0$,
 $x \in [a, b]$, 如图所示.



绕 y 轴旋转的旋转体体积, 续

用微元法推导旋转体体积公式.

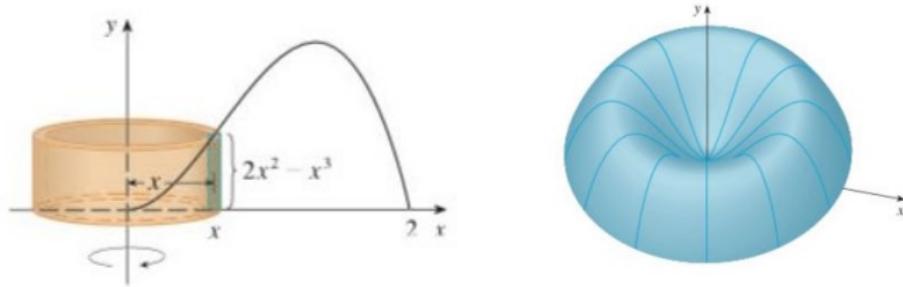
$$V_i = (2\pi \bar{x}_i) [f(\bar{x}_i)] \Delta x$$



1. 取体积微元 $dV = 2\pi x \cdot f(x) \cdot dx$, (周长 · 高 · 厚)
2. 积分 $V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx$. (圆柱壳方法或薄壁桶方法)

例一

例一: 求由区域 $\{(x, y), 0 \leq y \leq 2x^2 - x^3, 0 \leq x \leq 2\}$ 绕 y 轴旋转一周所得旋转体 V 的体积 |V|.

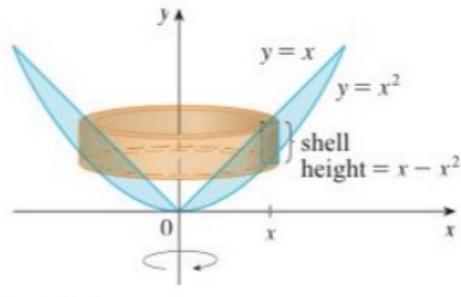


解: 根据上述体积公式得

$$|V| = \int_0^2 (2\pi x)(2x^2 - x^3) dx = 2\pi \int_0^2 (2x^3 - x^4) dx = \frac{16\pi}{5}. \quad \#$$

例二

例二: 求旋转体 V 的体积 $|V|$, 其中 V 是由直线 $y = x$ 和抛物线 $y = x^2$ 所围有界区域绕 y 轴旋转一周所得. 如图所示.

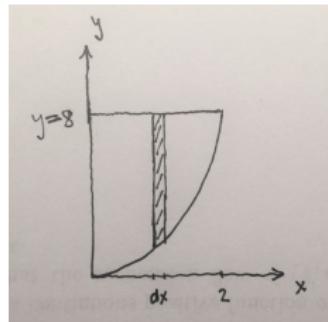


解: 根据体积公式得

$$|V| = \int_0^1 (2\pi x)(x - x^2) dx = 2\pi \int_0^1 (x^2 - x^3) dx = \frac{\pi}{6}. \quad \#$$

例三

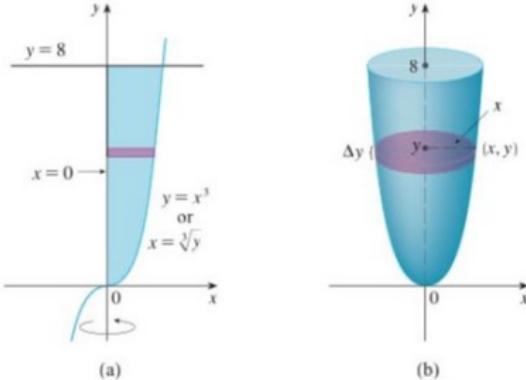
例三: 求旋转体 V 的体积 $|V|$, 其中 V 是由曲线 $y = x^3$ 和直线 $y = 8$, $x = 0$ 所围有界区域绕 y 轴旋转一周所得. 如图所示.



解: 由体积公式知所求体积为

$$\begin{aligned}|V| &= \int_0^2 (2\pi x)(8 - y)dx = 2\pi \int_0^2 x(8 - x^3)dx \\&= 2\pi \int_0^1 (8x - x^4)dx = \frac{96\pi}{5}.\end{aligned}$$

例三, 续

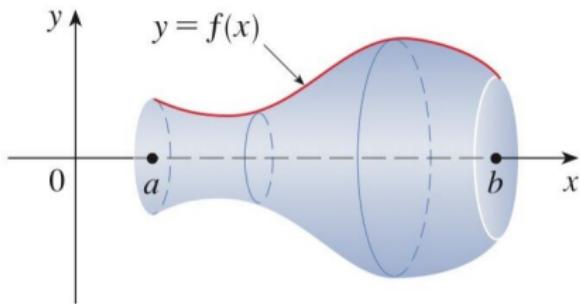


另解: 如图所示, 取体积微元 $dV = \pi x^2 dy$, 故所求体积为

$$V = \int_0^8 \pi x^2 dy = \pi \int_0^8 y^{\frac{2}{3}} dy = \frac{96\pi}{5}. \quad \#$$

旋转面

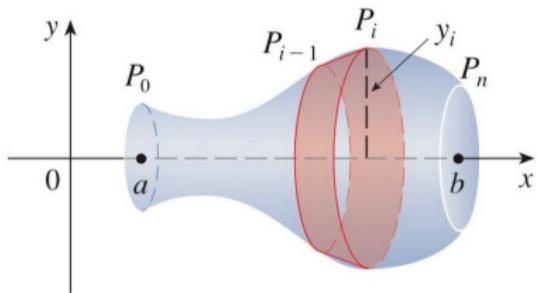
设曲线 $\Gamma: y = f(x)$, $x \in [a, b]$, 位于 x 轴上方, 即 $f(x) \geq 0$, 则曲线 Γ 绕 x 轴旋转一周所得到的曲面称为旋转面. 如图所示.



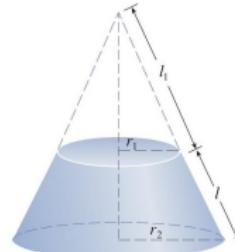
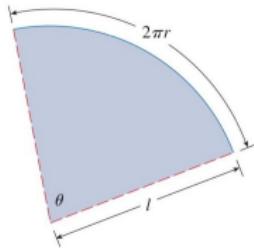
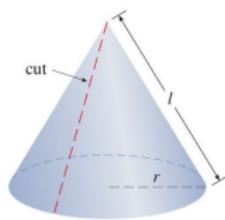
(a) Surface of revolution

旋转面面积的定义与计算

设旋转面 S 由曲线 $\Gamma: y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, 围绕 x 轴旋转一周所得, 设 $f(x)$ 连续可微, 且 $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$. 为定义 S 的面积, 考虑区间 $[a, b]$ 的分割 $P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. 记 $y_i = f(x_i)$, 则点 $P_i = (x_i, y_i) \in \Gamma$. 考虑由小弧段 $P_{i-1}P_i$ 绕 x 轴, 旋转一周所得旋转面 S_i 的面积, 即如图红色部分的面积. 如图所示.



圆锥和圆台的侧面积公式



如图所示，我们考虑圆锥的面积。圆锥按如图的方式剪开后为一个扇形，其圆心角为 $\theta = \frac{2\pi r}{\ell}$ 。于是扇形面积，也就是圆锥的面积为 $\frac{1}{2}\theta\ell^2 = \pi r\ell$ 。再考虑圆台的侧面积，如图所示。根据圆锥的面积公式，不难得到圆台侧面积为大圆锥面积，减去小圆锥面积，即 $\pi r_2(\ell_1 + \ell) - \pi r_1\ell_1$ 。根据相似三角形知识可得 $\frac{\ell_1}{r_1} = \frac{\ell_1 + \ell}{r_2}$ 。由此可得圆台侧面积为 $\pi r_2(\ell_1 + \ell) - \pi r_1\ell_1 = \pi(r_1 + r_2)\ell$ 。

旋转面面积的定义与计算, 续

由于 S_i 可近似看作圆台, 故 S_i 的面积有近似 $|S_i| \simeq \pi(y_{i-1} + y_i)|P_{i-1}P_i|$, 其中 $|P_{i-1}P_i|$ 代表小弧段 $P_{i-1}P_i$ 的弧长. 根据弧长公式, 以及积分中值定理有

$$|P_{i-1}P_i| = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = \sqrt{1 + f'(x_i^*)^2} \Delta x_i,$$

其中 $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$. 由介值定理知, 存在 $x_i^{**} \in [x_{i-1}, x_i]$, 使得

$$y_{i-1} + y_i = f(x_{i-1}) + f(x_i) = 2f(x_i^{**}).$$

于是 S_i 的面积有如下近似 $|S_i| \simeq 2\pi f(x_i^{**}) \sqrt{1 + f'(x_i^*)^2} \Delta x_i$. 因此旋转面 S 有近似

$$|S| = \sum_{i=1}^n |S_i| \simeq \sum_{i=1}^n 2\pi f(x_i^{**}) \sqrt{1 + f'(x_i^*)^2} \Delta x_i.$$

由如下引理知, 当 $\|P\| \rightarrow 0$ 时, 上式右边的和趋近于

$$\int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

因此我们有理由定义旋转面 S 的侧面积为上述定积分.

一个引理

Lemma

设函数 $f(x), g(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则对区间 $[a, b]$ 的任意分割 P :

$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 对任意两组样本点集 $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$,

$\eta = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n\}$, 极限

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)g(\eta_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

证: 由于 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 故下列三件事情成立:

(i) $f(x)$ 有界, 即存在正常数 $M > 0$, 使得 $|f(x)| \leq M, \forall x \in [a, b]$;

(ii) $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致连续, 即对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_1 > 0$, 使得当 $|x - x'| < \delta_1$,
 $|g(x) - g(x')| < \varepsilon$. 于是当 $\|P\| < \delta_1$ 时, $|g(\eta_i) - g(\xi_i)| < \varepsilon$.

引理证明, 续

(iii) 根据乘积函数 $f(x)g(x)$ 的连续性(可积性)知, 存在 $\delta_2 > 0$, 使得当 $\|P\| < \delta_2$ 时,

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i - \int_a^b f(x)g(x)dx \right| < \varepsilon.$$

于是当 $\|P\| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$ 时,

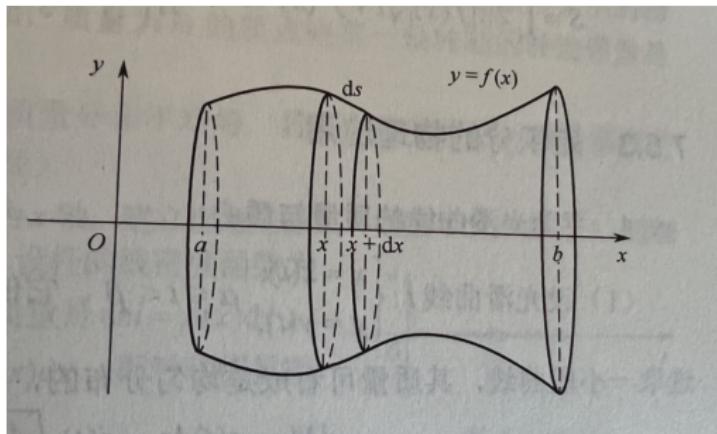
$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i)g(\eta_i)\Delta x_i - \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i - \int_a^b f(x)g(x)dx \right| + \left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i)[g(\eta_i) - g(\xi_i)]\Delta x_i \right| \\ &< \varepsilon + \sum_{i=1}^n |f(\xi_i)| |g(\eta_i) - g(\xi_i)| \Delta x_i < \varepsilon + M\varepsilon \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \varepsilon(1 + M(b-a)). \end{aligned}$$

命题得证. □

用微元法推导旋转面面积公式

- 取面积微元 $dS = 2\pi y \cdot d\ell = 2\pi f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$ (周长·弧长微元), 其中 $d\ell$ 为曲线的弧长微分;
- 积分即得旋转面面积

$$S = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$



Dec 08 作业, 共八大题

习题一: 课本第172页习题5.6题11: 设 $f(x)$ 在闭区间 $[-a, a]$ 上连续. 证明

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-a}^a [f(x) + f(-x)] dx,$$

并利用上述等式计算

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1 + e^{-x}} dx.$$

习题二: 课本第172页习题5.6题12: 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上连续, 单调不增(即单调下降), 证明对任意 $a \in [0, 1]$, 成立

$$\int_0^a f(x) dx \geq a \int_0^1 f(x) dx.$$

习题三: 课本第185页习题5.7题1: 求下列函数在区间 $[-a, a]$ 上的平均值, 其中 $a > 0$.

$$(1) f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad (2) f(x) = x^3, \quad (3) f(x) = \cos x.$$

作业, 续一

习题四: 课本第185页习题5.7题2: 求下列图形的面积(1)(3):

- (1) 抛物线 $x = y^2 - 2y$ 与 $x = 2y^2 - 8y + 6$ 所围成图形的面积;
- (3) 抛物线 $y = x^2 - 5x + 4$, 与抛物线在点 $x = 0$ 和点 $x = 5$ 处两条切线所围图形的面积.

习题五: 课本第185页习题5.7题3: 求下列曲线段的弧长 (1)(2)(5):

- (1) 曲线段 $y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^x \sqrt{\cos t} dt$, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$;
- (2) 曲线段 $x = \arctan t$, $y = \ln \sqrt{1+t^2}$, $0 \leq t \leq 1$;
- (5) 阿基米德螺线段 $\rho = a\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $a > 0$.

习题六: 课本第185页习题5.7题4: 求下列曲线的曲率(1)(2)

$$(1) y = x^3, \quad (2) x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t).$$

作业, 续二

习题七: 课本第185页习题5.7题5(1): 求极坐标曲线 $\rho = a(1 + \cos\theta)$ 的曲率, 其中 $a > 0$.

习题八: 课本第185页习题5.7题7(1)(2)(3):

(1) 求由曲线 $y = x^2$ 和 $y = x^3$ 所围图形绕 x 轴旋转生成的旋转体体积.

(2) 记曲线 $y = \sqrt{x}$, x 轴, 以及直线 $x = 4$ 所围图形为 S .

(i) 求图形 S 绕 $x = 4$ 轴旋转生成的旋转体体积.

(ii) 求图形 S 绕 y 轴旋转生成的旋转体体积.

(3) 记 S 为椭圆盘 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1$.

(i) 求图形 S 绕 x 轴旋转生成的旋转体体积;

(ii) 求图形 S 绕 y 轴旋转生成的旋转体体积.