《微积分A1》第六讲

教师 杨利军

清华大学数学科学系

2025年10月11日

回忆函数极限的性质: 唯一性, 有界性, 保序性

以下函数极限的若干性质之证明, 与相应序列极限性质的证明类似, 故从略.

Theorem

定理(唯一性): 若极限 $\lim_{x\to a} f(x)$ 存在, 则极限值唯一.

Theorem

定理(有界性): 若极限 $\lim_{x\to a} f(x)$ 存在, 则函数 $f(x)$ 在点 a 附近有界, 即存在 $\delta > 0$, 以及存在 $M > 0$, 使得对 $\forall x \in U^0(a,\delta)$, $|f(x)| \le M$.

Theorem

定理(保序性): 设 $\lim_{x\to a} f(x) = A$ 且 $\lim_{x\to a} g(x) = B$.

(i) 若 $A < B$, 则存在 $\delta > 0$, 使得对 $\forall x \in U^0(a,\delta)$, $f(x) < g(x)$.

(ii) 若存在 $\rho > 0$, 使得 $f(x) \le g(x)$, $\forall x \in U^0(a,\delta)$, 则 $A \le B$.

Sandwich 定理(两边夹法则), 四则运算定理

Theorem

Sandwich 定理(两边夹法则):

设对于 $\forall x \in U^0(a, r)$, $f(x) \le g(x) \le h(x)$. 若极限 $\lim_{x\to a} f(x)$ 和极限 $\lim_{x\to a} h(x)$ 均存在且相等, 它们共同的极限记作 L, 则极限 $\lim_{x\to a} g(x)$ 存在且等于 L.

Theorem

定理(四则运算): 设 $\lim_{x\to a} f(x) = A$ 且 $\lim_{x\to a} g(x) = B$, 则和差极限 $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)]$, 乘积极限 $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)]$, 以及商极限 $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ (补充假设 $B \neq 0$) 均存在, 并且

(i) $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = A \pm B$;

(ii) $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = AB$;

(iii) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{A}{B}$.

Example

例: 显然 $\lim_{x\to x_0} x = x_0$. 根据函数极限的四则运算可知, $\lim_{x\to x_0} x^n = x_0^n$. 进而对多项式 $P(x)$ 有 $\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$, 对分式函数 $\frac{P(x)}{Q(x)}$, 假设 $Q(x_0) \neq 0$, 有 $\lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.

注: 若 $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, 我们称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续. (稍后正式定义). 上述结论表明, 多项式函数 $P(x)$ 处处连续, 有理分式函数 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 在其定义域上处处连续.

Theorem

定理: 设 $\lim_{x\to x_0} g(x) = u_0$ 且 $\lim_{u\to u_0} f(u) = A$. 再设 (*) $g(x) \neq u_0$, $\forall x \in U^0(x_0, \rho)$, 则 $\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = A$.

注: 条件 (*) 是必要的. 缺少它结论可以不成立. 考虑课本第51-52页习题 2.3 题 10(1). 设

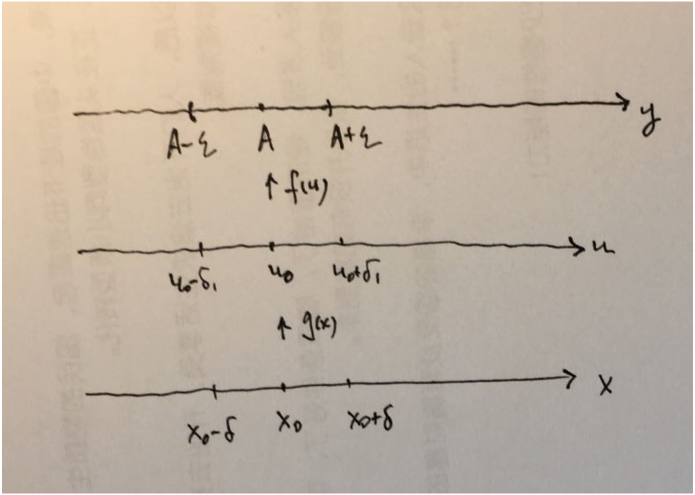
$$f(u) = \begin{cases} 1, & u = 0, \\ 0, & u \neq 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1, & x = 1, \\ 0, & x \neq 1. \end{cases}$$

显然 $\lim_{u\to 0} f(u) = 0$, $\lim_{x\to 1} g(x) = 0$. 而 $\lim_{x\to 1} f(g(x)) = 1 \neq 0$.

定理证明

证: 要证当 $|x-x_0|$ 充分小时, $|f(g(x))-A|$ 充分小. 已知 (1) 当 $|u-u_0|$ 充分小时, $|f(u)-A|$ 充分小; (2) 当 $|x-x_0|$ 充分小时, $|g(x)-u_0|$ 充分小. 由 (1) 知对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta_1>0$, 使得 $|f(u)-A|<\varepsilon$, $\forall u\in U^0(u_0,\delta_1)$. 根据 (2), 以及条件 (*), 可知对于 $\delta_1>0$, 存在 $\delta>0$, 使得 $g(x)\in U^0(u_0,\delta_1)$, $\forall x\in U^0(x_0,\delta)$. 因此 $|f(g(x))-A|<\varepsilon$, $\forall x\in U^0(x_0,\delta)$. 命题得证. □

证明图示



Example

例一: 设 $g(x) = \sin x$, $f(u) = u^2$, 则

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \sin x = \sin 0 = 0,$$

$$\lim_{u \to 0} f(u) = \lim_{u \to 0} u^2 = 0^2 = 0.$$

此外 $\sin x \neq 0$, $\forall x \in (-\delta, \delta)$, $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$. 故根据复合函数的极限定理知

$$\lim_{x \to 0} f(g(x)) = \lim_{x \to 0} [\sin x]^2 = 0.$$

解答完毕.

例二

Example

例二: 证明 $\lim_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0$.

证: 可利用复合函数极限定理证明. 由于 $\cos x=1-2\sin^2\frac{x}{2}$, 故

$$\lim_{x\to x_0}\cos x=\lim_{x\to x_0}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)$$

$$=1-2\lim_{x\to x_0}\sin^2\frac{x}{2}=1-2\sin^2\frac{x_0}{2}=\cos x_0.$$

命题得证.

注一: 极限 $\lim_{x\to x_0}\sin^2\frac{x}{2}$ 可看作三重复合函数的极限 $\lim_{x\to x_0}f(g(h(x)))$, 同样可应用复合函数极限定理, 其中 $h(x)=\frac{x}{2}$, $g(y)=\sin y$, $f(z)=z^2$.

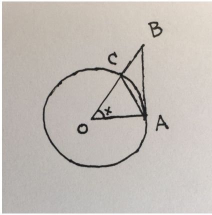
注二: 也可利用三角函数的和差化积公式证 $\lim_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0$. 与证明极限 $\lim_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$ 类似.

一个重要的函数极限

Theorem

定理: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$

证: 由于函数 $\frac{\sin x}{x}$ 是偶函数, 故只需证 $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$. 如图作单位圆.



取弧度 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$. 由图可知, $\triangle AOC$ 面积 $<$ 扇形 AOC 面积 $<$ $\triangle AOB$ 面积, 即 $\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\tan x$. 亦即 $\sin x<x<\tan x$, $0<x<\frac{\pi}{2}$.

证明，续

由 $\sin x < x$ 得 $\frac{\sin x}{x} < 1$. 再由 $x < \tan x$ 得 $\frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$，即 $\cos x < \frac{\sin x}{x}$. 总结得

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

回忆结论 $\lim_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$，故 $\lim_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1$. 再由函数极限的两边夹法则知 $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$. 因 $\frac{\sin x}{x}$ 是偶函数，故 $\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$. 于是 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. 证毕. □

例子

Example

例: 求极限 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}$, 其中 a, b 为非零常数.

解:

$$\frac{\sin ax}{\sin bx}=\frac{\sin ax}{ax}\cdot\frac{ax}{bx}\cdot\frac{1}{\frac{\sin bx}{bx}}\to 1\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{1}=\frac{a}{b},\quad x\to 0.$$

解答完毕.

Theorem

定理: $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

证明分三步. 第一步: 证明 $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]} = e$, 这里 $[x]$ 为取整函数.
已证 $(1+\frac{1}{n})^n \uparrow e$ 严格, 即 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}^*$, 使得 $0<e-(1+\frac{1}{n})^n<\varepsilon$, $\forall n\geq N$. 故对任意 $x\geq N$, 则 $[x]\geq N$, 从而

$$0<e-\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]}\leq e-\left(1+\frac{1}{N}\right)^N<\varepsilon.$$

这就证明了 $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]} = e$.

第二步：证明

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}=e,\quad \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}=e.$$

这是因为

$$\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}=\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)\to e\cdot 1=e;$$

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}=\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+1}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{-1}\to e\cdot 1^{-1}=e.$$

证明，续二

第三步，证 $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$. 显然对任意 $x\in\mathbb{R}$ 有 $[x]\le x<[x]+1$. 因此对任意 $x>1$,

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}.$$

根据第二步的结论知，上式两端的极限均为 e. 故由函数极限的两边夹法则可知，中间项的极限也存在且等于 e. 即

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

证毕. $\square$

Corollary

推论: (i) $\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$; (ii) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

证 (i). 令 $y=-x$, 则当 $x\to-\infty$ 时, $y\to+\infty$. 于是

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(1+\frac{1}{-y}\right)^{-y} = \left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} = \left(\frac{y}{y-1}\right)^y$$

$$= \left(1+\frac{1}{y-1}\right)^y = \left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)$$

$$\to e\cdot 1 = e, \quad y\to+\infty.$$

结论 (i) 得证.

证明，续

证 (ii). 要证 $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$, 考虑两个单侧极限. 当 $x\to 0^+$ 时, $y=\frac{1}{x}\to +\infty$. 于是

$$(1+x)^{\frac{1}{x}}=\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\to e,\quad y\to +\infty.$$

当 $x\to 0^-$ 时, $y=\frac{1}{x}\to -\infty$. 于是

$$(1+x)^{\frac{1}{x}}=\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\to e,\quad y\to -\infty.$$

即两个单侧极限存在且均等于 e. 结论 (ii) 得证. □

Example

例一: 求极限 $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

解:

$$\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\to\frac{1}{2}1^2=\frac{1}{2}.$$

故 $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$. 解答完毕.

注: 极限 $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ 属于基本极限模式. 需熟记.

Example

例二: 求极限 $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{a^x}$, 其中 $a>1$.

解: 已证 $\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{a^n}=0$. 故 $\lim_{x\to+\infty}\frac{[x]}{a^{[x]}}=0$. 由于

$$0<\frac{x}{a^x}<\frac{[x]+1}{a^{[x]}}\le\frac{[x]}{a^{[x]}}+\frac{1}{a^{[x]}}\to 0,\quad x\to+\infty.$$

故 $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{a^x}=0$. 解答完毕.

注: 极限 $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{a^x}=0\ (a>1)$ 属于基本极限模式. 需熟记.

例三

Example

例三: 求极限 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$.

解: 由 $\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n}=0$, 知 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln[x]}{[x]}=0$. 因此对 $x>1$

$$0<\frac{\ln x}{x}\le\frac{\ln([x]+1)}{[x]}=\frac{\ln([x]+1)}{[x]+1}\cdot\frac{[x]+1}{[x]}\to 0\cdot 1=0.$$

根据函数极限的两边夹法则可知 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$. 解答完毕.

注: 极限 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ 属于基本极限模式. 需熟记.

Theorem

Heine 定理: 函数极限 $\lim_{x\to a} f(x)$ 存在 $\Longleftrightarrow$ 对任意序列 $x_n \to a$ $(x_n \neq a)$, 序列 $\{f(x_n)\}$ 均收敛, 且收敛于相同的极限值.

注: 定理也可这样表述: 函数极限 $\lim_{x\to a} f(x)$ 存在 $\Longleftrightarrow$ 对任意序列 $x_n \to a$ $(x_n \neq a)$, 序列 $\{f(x_n)\}$ 均收敛. 因为可以断言: 若对任意一个序列 $x_n \to a$ $(x_n \neq a)$, 序列 $\{f(x_n)\}$ 均收敛, 则序列 $\{f(x_n)\}$ 均收敛于同一个极限值. 理由: 对于任意两个序列 $x_n \to a$, $x_n' \to a$, $(x_n \neq a$, $x_n' \neq a)$, 构造一个新序列 $\{x_n''\} = \{x_1, x_1', x_2, x_2', \cdots\}$. 显然 $x_n'' \to a$. 如果三个序列 $\{f(x_n)\}$, $\{f(x_n')\}$ 和 $\{f(x_n'')\}$ 均收敛, 那么序列 $\{f(x_n)\}$ 和 $\{f(x_n')\}$ 必收敛于相同的极限值. 因为前两个序列 $\{f(x_n)\}$ 和 $\{f(x_n')\}$ 均为第三个序列 $\{f(x_n'')\}$ 的子列.

Example

<u>例一</u>: 证明极限 $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在.

<u>证</u>: 取 $x_k=\frac{1}{2k\pi}$, $x_k'=\frac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}$. 显然 $x_k\to 0$, $x_k'\to 0$. 但 $\sin\frac{1}{x_k}=\sin(2k\pi)=0\to 0$, $\sin\frac{1}{x_k'}=\sin(2k\pi+\frac{\pi}{2})=1\to 1$. 如果极限 $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 存在, 那么根据上述定理可知, 两个序列 $\{\sin\frac{1}{x_k}\}$ 和 $\{\sin\frac{1}{x_k'}\}$ 收敛于相同的极限值. 这就导出了矛盾. 证毕.

Example

例二：设 $\lim_{x\to x_0} u(x) = u_0$，证明

(i) $\lim_{x\to x_0} e^{u(x)} = e^{\lim_{x\to x_0} u(x)} = e^{u_0}$;

(ii) $\lim_{x\to x_0} \ln u(x) = \ln\left[\lim_{x\to x_0} u(x)\right] = \ln u_0$，其中 $u(x) > 0$ 且 $u_0 > 0$. 特别 $\lim_{x\to x_0} e^x = e^{x_0}$. 这表明指数函数 e^x 在任意点 x_0 处连续 (稍后定义).

证(i)：由上述定理可知对于任意 $x_n \to x_0$，序列 $u_n \stackrel{\text{def}}{=} u(x_n)$ 收敛于同一个极限 u_0. 已证对于任意 $u_n \to u_0$，则有 $e^{u_n} \to e^{u_0}$. 于是 $e^{u(x_n)} = e^{u_n} \to e^{u_0}$. 再次利用根据上述定理可知 $e^{u(x)} \to e^{u_0}$, $x \to x_0$. 结论 (i) 得证. 结论 (ii) 的证明类似. 细节略去. $\square$

例三

Example

例三: 求极限 $\lim_{x\to+\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

解: 记 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$. 取对数得

$$\ln f(x)=\frac{1}{x}\ln(1+x)=\frac{\ln(1+x)}{1+x}\cdot\frac{1+x}{x}\to 0\cdot 1=0,\quad x\to+\infty.$$

利用上述例二 (i) 的结论得 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=e^{\lim_{x\to+\infty}\ln f(x)}=e^0=1$. □

注一: 已证 $\lim_{x\to\pm\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$, 以及 $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$. 这两个极限均属于 1^∞ 形式的不定式. 但是极限 $\lim_{x\to+\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 属于 ∞^0 形式的不定式.

注二: 极限 $\lim_{x\to+\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=1$ 也属于基本极限模式. 需熟记.

Example

例四: 证明 (i) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$;

(ii) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$;

(iii) $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$, 其中 $a>0$.

注: 这三个极限均属于基本极限模式. 需熟记.

证(i). 回忆例二(ii)的结论: 设 $\lim_{x\to x_0}u(x)=u_0$, 其中 $u(x)>0$ 且 $u_0>0$, 则 $\lim_{x\to x_0}\ln u(x)=\ln\left[\lim_{x\to x_0}u(x)\right]=\ln u_0$. 于是 $\frac{\ln(1+x)}{x}=\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\to\ln e=1$, $x\to 0$.

证(ii). 令 $y=e^x-1$, 则当 $x\to 0$ 时, $y\to 0$ 且 $e^x=1+y$, 即 $x=\ln(1+y)$. 于是 $\frac{e^x-1}{x}=\frac{y}{\ln(1+y)}=\frac{1}{\frac{\ln(1+y)}{y}}\to\frac{1}{1}=1$.

证(iii). $\frac{a^x-1}{x}=\frac{e^{x\ln a}-1}{x\ln a}\cdot\ln a\to 1\cdot\ln a=\ln a$. 证毕.

Heine 定理的证明

证明 $\Rightarrow$: 设 $\lim_{x\to a} f(x) = A$ 存在, 则对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得 $|f(x) - A| < \varepsilon$, $\forall x \in U^0(a, \delta)$. 对于任意序列 $x_n \to a$, $x_n \neq a$, 则对于上述 $\delta > 0$, 存在正整数 N, 使得 $|x_n - a| < \delta$, $\forall n \geq N$. 于是 $|f(x_n) - A| < \varepsilon$, $\forall n \geq N$. 即序列 $\{f(x_n)\}$ 收敛且收敛于同一个极限值.

$\Leftarrow$: 设对任意序列 $x_n \to a\ (x_n \neq a)$, 序列 $\{f(x_n)\}$ 均收敛, 且收敛于相同的极限值 A. 要证 $\lim_{x\to a} f(x)$ 存在, 且等于 A. 反证. 若不然, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得对任意正整数 n, 存在 $x_n \neq a$, $|x_n - a| < \frac{1}{n}$, $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$. 故存在序列 $x_n \to a\ (x_n \neq a)$, 序列 $\{f(x_n)\}$ 不收敛于 A. 矛盾. 证毕. $\square$

Theorem

<u>定理</u>: 极限 $\lim_{x\to a} f(x)$ 存在 $\iff$ $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 使得 $|f(x)-f(x')|<\varepsilon$, $\forall x,x'\in U^0(a,\delta)$.

<u>证</u> $\Rightarrow$: 设 $\lim_{x\to a} f(x)=A$, 则对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 使得 $|f(x)-A)|<\varepsilon$, $\forall x\in U^0(a,\delta)$. 故 $\forall x,x'\in U^0(a,\delta)$, $|f(x)-f(x')|=|f(x)-A+A-f(x')|$ $\le|f(x)-A|+|A-f(x')|<2\varepsilon$. 故 Cauchy 准则成立.

$\Leftarrow$: 设 Cauchy 准则成立, 则对任意序列 $\{x_n\}\subset U^0(a,\delta)$, $x_n\to a$, 则易知 $\{f(x_n)\}$ 是 Cauchy 列, 从而收敛. 利用函数极限与序列极限定理知, 极限 $\lim_{x\to a} f(x)$ 存在. $\square$

Definition

定义：设函数 $f(x)$ 在 $U^0(a,\rho)$ 上定义.

(i) 若 $f(x)\to 0$ $(x\to a)$，则称 $f(x)$ 当 $x\to a$ 时为无穷小量;

(ii) 若 $|f(x)|\to +\infty$, $x\to a$，则称函数 $f(x)$ 当 $x\to a$ 时为无穷大量. 依据 $f(x)\to +\infty$ 或 $f(x)\to -\infty$，还称 $f(x)$ 当 $x\to a$ 时为正无穷大量，或负无穷大量.

(iii) 若存在 $M>0$ 以及 $\delta\in(0,\rho]$，使得对任意 $x\in U^0(a,\delta)$, $|f(x)|\le M$，则称函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 附近有界.

(iv) 类似可定义函数 $f(x)$ 当 $x\to +\infty$ 时为无穷小量，(正负) 无穷大量，以及在 $x=+\infty$ 附近有界.

例子

Example

1) 当 $x \to 0$ 时, $\sin x$, x^n (n 为正整数), $e^x - 1$ 均为无穷小量.

2) 当 $x \to +\infty$ 时, $\ln x$, x^n (n 为正整数), e^x 均为正无穷大量.

3) 设 $f(x) \neq 0$, $\forall x \in U^0(a, \rho)$, 则当 $x \to a$ 时, $f(x)$ 为无穷小量 $\Longleftrightarrow$ $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大量.

有界量，符号大欧 O 的意义

Definition

<u>定义</u>: 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 a 的一个去心邻域定义. 若存在 $M>0$, 以及 $\delta>0$, 使得

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \le M, \quad \forall x \in U^0(a,\delta),$$

则称函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相比为有界量, 记作 $f(x)=O(g(x))$, $x\to a$. 特别 $f(x)=O(1)$ 表示 $f(x)$ 当 $x\to a$ 时有界, 即 $f(x)$ 在 a 附近有界. 当 $a=\pm\infty$ 时, $f(x)=O(g(x))$ 的意义类似.

<u>例一</u>: $\sin x = O(x)$, $x\to 0$.

<u>例二</u>: $3x^2-x+10=O(x^2)$, $x\to+\infty$.

Definition

定义: 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均为无穷小 $(x \to a)$, 且在点 $x = a$ 附近 $g(x) \neq 0$.

(i) 若 $\frac{f(x)}{g(x)} \to 0 \ (x \to a)$, 则称当 $x \to a$ 时, $f(x)$ 是 $g(x)$ 的高阶无穷小量, 记作 $f(x) = o(g(x)) \ (x \to a)$.

(ii) 若 $\frac{f(x)}{g(x)} \to C \neq 0$, $x \to a$, 则称函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 为同阶无穷小 $(x \to a)$. 特别当 $C = 1$ 时, 称 $f(x)$ 和 $g(x)$ 为等价无穷小, 记作 $f(x) \sim g(x) \ (x \to a)$.

(iii) 若 $f(x)$ 与 $(x-a)^k$ 为同阶无穷小量 (k 为正整数), 则称 $f(x)$ 为 k 阶无穷小量.

Definition

<u>定义</u>: 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 当 $x \to a$ 时均为无穷大量.

(i) 若 $\frac{f(x)}{g(x)} \to 0\ (x \to a)$, 则称 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的高阶无穷大量, 或者说 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的低阶无穷大量. 也记作 $f(x) = o(g(x))$, $x \to a$.

(ii) 若 $\frac{f(x)}{g(x)} \to C \neq 0$, $x \to a$, 则称函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 为同阶无穷大量 $(x \to a)$. 特别当 $C = 1$ 时, 称 $f(x)$ 和 $g(x)$ 为等价无穷大, 记作 $f(x) \sim g(x)\ (x \to a)$.

与无穷小量类似, 当 $x \to a$ 时, 通常取 $\frac{1}{x-a}$ 为标准无穷大量. 当 $x \to +\infty$ 时, 取 x 为标准无穷大量.

Example

例: (i) 当 $x \to 0$ 时, $x^2 + x^3 = o(x)$;

(ii) 当 $x \to 0$ 时, $\sin(x^2) = o(x)$; 但不能写作 $o(x) = \sin(x^2)$;

(iii) $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = o(x^{n+1})$, $x \to \infty$;

(iv) $x^n = o(e^x)$, $x \to +\infty$.

Example

例：当 $x \to 0$ 时，

(i) $\sin x \sim x$;

(ii) $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$;

(iii) $\tan x \sim x$;

(iv) $\ln(1+x) \sim x$;

(v) $e^x - 1 \sim x$;

(vi) $a^x - 1 \sim x \ln a$;

(vii) $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$.

证明

结论 (i) 至 (vi) 已证. 以下证 (vii): $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$. 令 $y = (1+x)^\alpha - 1$, 则当 $x \to 0$ 时 $y \to 0$ 且 $1+y = (1+x)^\alpha$. 故 $\ln(1+y) = \alpha\ln(1+x)$. 于是

$$\frac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha x} = \frac{y}{\ln(1+y)} \cdot \frac{\alpha\ln(1+x)}{\alpha x} \to 1 \cdot 1 = 1.$$

这就证明了结论 (vii), 即 $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$.

Example

例一：求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\left(1-\cos x\right)}{x^4}.$$

解：

$$\frac{1-\cos\left(1-\cos x\right)}{x^4}=\frac{1-\cos\left(1-\cos x\right)}{\frac{1}{2}(1-\cos x)^2}\cdot\frac{\frac{1}{2}(1-\cos x)^2}{x^4}$$

$$=\frac{1-\cos\left(1-\cos x\right)}{\frac{1}{2}(1-\cos x)^2}\cdot\left(\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}\right)^2\cdot\frac{1}{2\cdot 4}\to 1\cdot 1^2\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{8}.$$

例二：求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x^4}-\sqrt[3]{1-x^4}}{(\sin^2 x)(1-\cos x)}.$$

解：

$$\frac{\sqrt{1+2x^4}-\sqrt[3]{1-x^4}}{(\sin^2 x)(1-\cos x)}$$

$$=\frac{(\sqrt{1+2x^4}-1)-(\sqrt[3]{1-x^4}-1)}{x^4}\cdot\frac{x^4}{(\sin^2 x)(1-\cos x)}$$

$$=\left(\frac{(1+2x^4)^{1/2}-1}{x^4}-\frac{(1-x^4)^{1/3}-1}{x^4}\right)\cdot\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\cdot\frac{2\cdot\frac{x^2}{2}}{1-\cos x}$$

$$\to\left(\frac{1}{2}\cdot 2-\frac{1}{3}\cdot(-1)\right)\cdot 1^2\cdot 2\cdot 1=(1+\frac{1}{3})\cdot 2=\frac{8}{3}.$$

例三: 求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^2\ln(1+x)}.$$

解:

$$\frac{\tan x-\sin x}{x^2\ln(1+x)}=\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{1}{\cos x}-1}{x\ln(1+x)}=\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{x\ln(1+x)}$$

$$=\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{x}{\ln(1+x)}\to 1\cdot 1\cdot 1/2\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

故所求极限为 1/2.

注: 虽然 $\tan x\sim\sin x$, 但不能取 $\tan x-\sin x=0$. 稍后利用 Taylor 展开定理知 $\tan x-\sin x=\frac{1}{2}x^3+o(x^3)$. 求极限时慎用无穷小代换!

例四

课本第57页习题2.4第9题(14): 求极限

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt[3]{x^3-x^2}\right).$$

解:

$$\sqrt{x^2+2x}-\sqrt[3]{x^3-x^2}=x\left(1+\frac{2}{x}\right)^{1/2}-x\left(1-\frac{1}{x}\right)^{1/3}$$

$$=x\left[\left(1+\frac{2}{x}\right)^{1/2}-1\right]-x\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)^{1/3}-1\right]$$

$$=\frac{\left(1+\frac{2}{x}\right)^{1/2}-1}{\frac{2}{x}}\cdot 2-\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{1/3}-1}{-\frac{1}{x}}\cdot(-1)$$

$$\to\frac{1}{2}\cdot 2-\frac{1}{3}\cdot(-1)=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}.$$

故所求极限为 4/3.

Definition

定义: 设 $f(x)$ 在 $U(x_0, r) \overset{\text{def}}{=} (x_0 - r, x_0 + r)$ 上有定义.

(i) 若 $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, 即 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, $\forall x \in U(x_0, \delta)$, 则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

(ii) 若极限 $\lim_{x \to x_0} f(x)$ 不存在, 或虽存在但不等于 $f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处间断, 或不连续.

(iii) 若函数 $f(x)$ 在其定义域 J 处处连续, 则称 $f(x)$ 为 J 上的连续函数.

几个连续函数类

由函数极限的讨论可知，

1. 多项式在 $\mathbb{R}$ 上连续；
2. 分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 在分母非零处连续，其中 $P(x)$, $Q(x)$ 为多项式；
3. 函数 $\sin x$, $\cos x$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数；
4. 函数 $\tan x$ 是 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上的连续函数，ctanx 是 $(0, \pi)$ 上的连续函数；
5. 指数函数 a^x $(a > 0)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续；
6. 对数函数 $\ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续.

左连续，右连续

Definition

定义：(i) 若 $f(x_0^+) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续；
(ii) 若 $f(x_0^-) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续.

Theorem

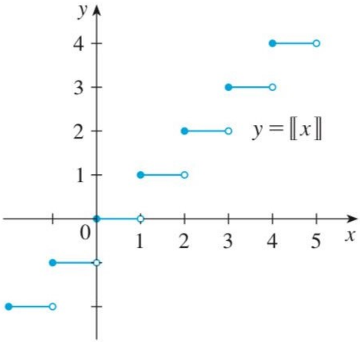
定理：函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续 $\Longleftrightarrow f(x)$ 在点 x_0 处既右连续又左连续.

Proof.

证明：由相应的函数极限结论立得. □

取整函数的连续性

回忆取整函数 [x] 的值定义为不大于 x 的最大整数. 因此对于函数 [x] 在非整数处连续. 显然在整数 $x = N$ 处间断, 但右连续. 函数 [x] 的图像如下.



间断点类型

Definition

定义: 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处间断, 则可能出现如下情形之一.

(1) (可去间断) 极限 $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ 存在, 但 $L \neq f(x_0)$.

(2) (跳跃间断) 左右极限 $\lim_{x\to x_0^{\pm}} f(x)$ 均存在, 但不相等.

(3) (本性间断) 至少有一个单侧极限不存在.

有时称可去间断和跳跃间断为第一类间断, 称本性间断为第二类间断.

可去间断，例子

对于可去间断点，若补充或修改 $f(x)$ 在点 x_0 处的值为 L，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处就连续了. 例如函数

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

在点 $x=0$ 处有可去间断. 因为 $\lim_{x\to 0} f(x)$ 极限存在且等于 1，不等于 $f(0)=0$. 如果改变 $f(0)=0$ 为 $f(0)=1$，则函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

Heaviside 函数定义如下

$$H(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 1, & t\geq 0.\end{cases}$$

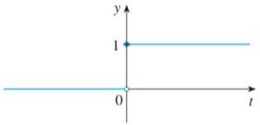
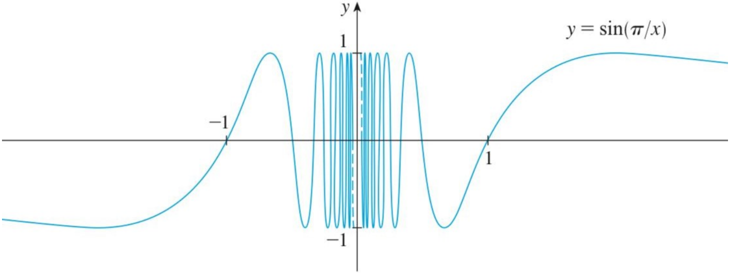


FIGURE 8
The Heaviside function

显然 $t=0$ 是函数 $H(t)$ 的跳跃间断点. 因为 $\lim_{t\to 0^+} H(t)=1$, $\lim_{t\to 0^-} H(t)=0$, 即两个单侧极限存在, 但不相等.

本性间断，例子

定义函数 $f(x) = \sin\frac{\pi}{x}$, $\forall x \neq 0$, $f(0) = 0$. 显然 $x = 0$ 是函数 $f(x)$ 的本性间断点. 因为左右极限 $\lim_{x\to 0^\pm} f(x)$ 都不存在. 如图所示.



Theorem

定理：单调函数的间断点均为跳跃间断.

证：因为单调函数在其定义域每一点处的左右极限均存在. 证毕.

Theorem

定理：设函数 f 和 g 在点 x_0 处连续，则它们的和差函数 $f \pm g$，乘积函数 fg，商函数 f/g (补充假设 $g(x_0) \neq 0$) 在点 $x = x_0$ 处也连续.

证：根据函数极限的四则运算定理立得.

Theorem

定理: 设函数 $g(x)$ 在点 x_0 处连续, 设 $f(u)$ 在点 $u_0 = g(x_0)$ 处连续, 则它们的复合函数 $f \circ g$ 在点 x_0 处也连续.

Proof.

证: 由 $f(u)$ 在 u_0 的连续性知, 对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得对 $\forall u \in U(u_0, \delta)$, $|f(u) - f(u_0)| < \varepsilon$. 由 $g(x)$ 在点 x_0 处的连续性知对上述 $\delta > 0$, 存在 $\delta_1 > 0$, 使得 $|g(x) - g(x_0)| < \delta$, $\forall x \in U(x_0, \delta_1)$. 于是 $|f(g(x)) - f(g(x_0))| < \varepsilon$, $\forall x \in U(x_0, \delta_1)$. 此即 $f \circ g$ 在点 x_0 处连续. 证毕. □

Theorem

定理: 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续. 若 $f(x_0)>0(<0)$, 则存在 $\delta_0>0$, 使得 $f(x)>0(<0)$, $\forall x\in U(x_0,\delta_0)$.

证: 只证括号外的情形, 即情形 $f(x_0)>0$. 由 $f(x)$ 在 x_0 处的连续性知, 对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 使得对 $\forall x\in U(x_0,\delta)$, $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. 取 $\varepsilon=\frac{f(x_0)}{2}>0$, 则存在 $\delta_0>0$, 使得对 $\forall x\in U(x_0,\delta_0)$, $|f(x)-f(x_0)|<\frac{f(x_0)}{2}$, 即

$$f(x_0)-\frac{f(x_0)}{2}<f(x)<f(x_0)+\frac{f(x_0)}{2},$$

$$\text{亦即}\quad 0<\frac{f(x_0)}{2}<f(x),\quad \forall x\in U(x_0,\delta_0).\qquad\square$$

(回忆两个平行结论: 序列极限保号性, 函数极限保号性).

Definition

定义: 称函数 $f(x)$ 在有界闭区间 $[a,b]$ 上连续, 如果 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上每一点均连续, 且在左端点 $x=a$ 处右连续, 在右端点 $x=b$ 处左连续.

记号: $C[a,b]$ 表示闭区间 $[a,b]$ 上连续函数的全体.

作业，共九大题

习题一：课本第35页习题2.1题3：设 $f(x)=\frac{2-3x}{1+x}$，求 $f(-x)$, $f(2+\frac{1}{x})$, $f(f(x))$, $f(f(f(x)))$.

习题二：课本第35页习题2.1题4：设 $f(x)=2^x$, $g(x)=x\ln x$，求复合函数 $f\circ g$ 和 $g\circ f$.

习题三：课本第35页习题2.1题5：设函数

$$f(x)=\begin{cases} x+2, & x\geq 0, \\ 0, & x<0, \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} x, & x<0, \\ x^2, & x\geq 0. \end{cases}$$

求 $f\circ g$ 和 $g\circ f$，并验证是否成立 $f\circ g=g\circ f$.

作业，续一

习题四：课本第35页习题2.1题9：判断下列函数的奇偶性：

$$(1)\quad y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right),\qquad (2)\quad y=\frac{x(1-e^x)}{1+e^x},\qquad (3)\quad y=3x-x^3,$$

$$(4)\quad y=\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|,\qquad (5)\quad y=\ln\left(e^x+1\right)-\frac{1}{x}+1,$$

$$(6)\quad y=R(x)=\begin{cases}\frac{1}{n}, & x=\frac{m}{n}, m,n\text{ 互质}, n>0,\\ 0, & x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q},\end{cases}$$

其中 $\mathbb{Q}$ 代表有理数集合.

习题五：课本第36页习题2.1题10：设 $f(x)$ 的定义域关于原点对称，证明 $f(x)$ 可以表示为一个奇函数和一个偶函数之和.

习题六：课本第42页习题2.2题1: (i) 用 ε, δ 语言表述 $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq A$;
(ii) 用 ε, M 语言表述 $\lim_{x\to+\infty} f(x) \neq A$.

习题七：课本第42页习题2.2题2(有修改)：判断下列四个说法是否与 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ 等价. 若不等价，请举反例.

(i) 对于无穷多个正数 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得只要 $0 < |x - x_0| < \delta$，则成立 $|f(x) - A| \leq \varepsilon$;

(ii) 对于任意 $\varepsilon \in (0, 1)$，存在 $\delta > 0$，使得只要 $0 < |x - x_0| < \delta$，则成立 $|f(x) - A| \leq 8\varepsilon$;

(iii) 对于任意正整数 k，存在 $\delta_k > 0$，使得只要 $0 < |x - x_0| < \delta_k$，则成立 $|f(x) - A| \leq 2^{-k}$;

(iv) 对于任意正整数 n，只要 $0 < |x - x_0| < \frac{1}{n}$，则成立 $|f(x) - A| < \frac{1}{n}$.

习题八：课本第42页习题2.2题3：用函数极限的定义证明如下极限：

$$(1)\quad \lim_{x\to 2}\sqrt{x^2+5}=3,\qquad (2)\quad \lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x^2-9}=\frac{1}{5},$$

$$(3)\quad \lim_{x\to 2}\frac{x^2-3}{x^2-4x+3}=-1,\qquad (4)\quad \lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}=0.$$

习题九：课本第50页习题2.3题6：求下列函数极限

$$(2)\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x},\qquad (4)\quad \lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1},\qquad (5)\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1-x-4x^3}{1+x^2+2x^3},$$

$$(6)\quad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-\arctan x}{x+\arctan x},\qquad (7)\quad \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h},$$

作业，续四

$$(8)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}\right),\qquad (9)\ \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+p^2}-p}{\sqrt{x^2+q^2}-q},\ (p,q>0)$$

$$(10)\quad \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x},\qquad (11)\quad \lim_{x\to1}\frac{x^m-1}{x-1},$$

$$(12)\quad \lim_{x\to1}\frac{x^m-1}{x^n-1},\qquad (13)\quad \lim_{x\to1}\frac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1},$$

$$(14)\quad \lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{m}}-1}{x},\qquad (15)\quad \lim_{x\to0}\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2},$$

$$(16)\ \lim_{x\to0}\frac{(1+nx)^{\frac{1}{m}}-(1+mx)^{\frac{1}{n}}}{x},\ (17)\ \lim_{x\to0}x\left[\frac{1}{x}\right],\ (18)\ \lim_{x\to2^-}\frac{[x]^2+4}{x^2+4},$$

上述极限中，m,n 均为正整数.