清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程　微积分 A(1)　(B)　2021 年 12 月 29 日

系名______________ 班级______________ 姓名______________ 学号

一．填空题（每空 3 分，共 10 题）（请将答案直接填写答题卡相应横线上！）

1. $y = x\ln(\mathrm{e}+\frac{1}{x^2})$ 的斜渐近线为______________。

2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}\right)=$______________。

3. 记 $F(x)=\int_0^{x^2}\cos(\pi t^2)\mathrm{d}t$，则 $F'(1)=$______________。

4. 设 $f(x)=\min\{x^2,1\}$，则 $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=$______________。

5. 常微分方程 $y'+2xy=2x$ 的通解为______________。

6. $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+1}=$______________。

7. 常微分方程 $x^2y''+xy'-4y=0\quad(x>0)$ 的通解为______________。

8. 设 $p>0$，广义积分 $\int_1^{+\infty}x^2\ln(1+\sin\frac{1}{x^p})\mathrm{d}x$ 收敛，则实数 p 的取值范围为______________。

9. 由曲线段 $y=\sqrt{x-\frac{1}{4}}$，$x\in[1,4]$ 绕 x 轴旋转一周所成旋转面的面积为______________。

10. 设连续函数 $f(x)$ 满足 $2\int_1^x f(t)\mathrm{d}t = xf(x)+x^2$，则 $f'(1)=$______________。

二．解答题 （请写出详细的解答过程和必要的根据！）

11. （10 分）求积分 $\int_0^{e}\cos(\ln x)\,\mathrm{d}x$ 的值。

12. （10 分）求常微分方程 $y''-3y'+2y=\mathrm{e}^x$ 的通解。

13. （15 分）求函数 $y=4\mathrm{e}^{-x}(2x^2+x+1)-5$ 的单调区间，极值，上凸区间与下凸区间，以及拐点的横坐标。

14. （10 分）设 D 为 $y=\sqrt{x(1-x)}$ 与 x 轴围成的有界区域。

（Ⅰ）求 D 的面积；

（Ⅱ）求 D 绕 x 轴一周所成旋转体体积。

15. （10 分）设平面曲线 $y=y(x)$ 满足 $y(0)=1, y'(0)=0$，且对曲线上任意点 $P(x,y)$（$x>0$），沿曲线从点 $(0,1)$ 到点 $P(x,y)$ 的弧长等于该曲线在点 $P(x,y)$ 的切线斜率，求 $y(x)$（$x>0$）。

16. （8 分）设 $f(x)$ 是 R 上以 T 为周期的周期函数，且连续，证明：

（Ⅰ）函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\frac{x}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$ 是以 T 为周期的周期函数；

（Ⅱ）$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$。

17. （7 分）设可导函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=1$，且对 $x\geq 1$ 时，有 $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+f^2(x)}$。

（Ⅰ）证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在且有限；

（Ⅱ）证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\leq 1+\frac{\pi}{4}$。

附加题（本题为附加题，全对才给分，其分数不计入总评，仅用于评判 A+）

设 $f\in C[0,1]$，g 为非负的周期函数，周期为1，且 $g\in R[0,1]$，求证：

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f(x)g(nx)\mathrm{d}x=\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x\right)。$$