线性代数习题解答

题目 23：用施密特正交化方法构造标准正交向量组

解：

(1) 取

$$\alpha_1=(0,0,1)^{\mathrm{T}},\quad \alpha_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}},\quad \alpha_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}.$$

施密特正交化得到

$$\beta_1=(0,0,1)^{\mathrm{T}},\qquad \beta_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\qquad \beta_3=(1,0,0)^{\mathrm{T}}.$$

单位化即得标准正交基 $(0,0,1)^{\mathrm{T}}$，$(0,1,0)^{\mathrm{T}}$，$(1,0,0)^{\mathrm{T}}$。

(2) 取

$$\alpha_1=(1,2,2,-1)^{\mathrm{T}},\quad \alpha_2=(1,1,-5,3)^{\mathrm{T}},\quad \alpha_3=(3,2,8,-7)^{\mathrm{T}}.$$

正交化得到

$$\beta_1=(1,2,2,-1)^{\mathrm{T}},\quad \beta_2=(2,3,-3,2)^{\mathrm{T}},\quad \beta_3=(2,-1,-1,-2)^{\mathrm{T}}.$$

单位化可得 $\frac{1}{\sqrt{10}}\beta_1$，$\frac{1}{\sqrt{26}}\beta_2$，$\frac{1}{\sqrt{10}}\beta_3$。

题目 24：验证正交性并扩充为标准正交基

解：

(1) 对

$$\alpha_1=(2,1,2)^{\mathrm{T}},\qquad \alpha_2=(1,2,-2)^{\mathrm{T}}$$

计算 $(\alpha_1,\alpha_2)=2+2-4=0$，因此正交。外积

$$\alpha_3=\alpha_1\times\alpha_2=(-6,6,3)^{\mathrm{T}}.$$

它与 $(-2,2,1)^{\mathrm{T}}$ 共线，可取后者与前二向量正交。归一化得到

$$\frac{1}{3}(2,1,2)^{\mathrm{T}},\quad \frac{1}{3}(1,2,-2)^{\mathrm{T}},\quad \frac{1}{3}(-2,2,1)^{\mathrm{T}}.$$

(2) 对

$$\alpha_1=(1,1,1,2)^{\mathrm{T}},\qquad \alpha_2=(1,2,3,-3)^{\mathrm{T}}$$

有 $(\alpha_1,\alpha_2)=1+2+3-6=0$。求解 $Ax=0$（行向量为 α_1,α_2）得到基础解系

$$v_1=(1,-2,1,0)^{\mathrm{T}},\qquad v_2=(-7,5,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

对 v_1,v_2 施密特正交化并与 α_1,α_2 一并单位化，得到

$$\frac{\alpha_1}{\sqrt{7}},\quad \frac{\alpha_2}{\sqrt{23}},\quad \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1,0)^{\mathrm{T}},\quad \frac{1}{\sqrt{966}}(-25,-4,17,6)^{\mathrm{T}}.$$

题目 31：QR 分解

解：

(1)

$$A=\begin{bmatrix}3&0\\4&5\end{bmatrix},\qquad Q=\begin{bmatrix}0.6&-0.8\\0.8&0.6\end{bmatrix},\qquad R=\begin{bmatrix}5&4\\0&3\end{bmatrix}.$$

(2)

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&3&0\\2&1&1\end{bmatrix},$$

其 QR 分解为（分母有理化形式）：

$$Q=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&0&\frac{2\sqrt{2}}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{6}\\\frac{2}{3}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{6}\end{bmatrix},\qquad R=\begin{bmatrix}3&3&1\\0&\sqrt{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\0&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}.$$

(3)

$$A=\begin{bmatrix}1&-3&7\\-2&0&-2\\-2&-6&-1\end{bmatrix},$$

经施密特正交化计算，得到：

$$Q=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&-2&2\\-2&1&2\\-2&-2&-1\end{bmatrix},\qquad R=\begin{bmatrix}3&3&\frac{13}{3}\\0&6&-\frac{14}{3}\\0&0&\frac{11}{3}\end{bmatrix}.$$

练习 3.1.13：证明 b_1, b_2, b_3 是标准正交基

证明. 题设

$$b_1 = \tfrac{1}{3}(2,2,1)^{\mathrm{T}}, \qquad b_2 = \tfrac{1}{3}(2,-1,-2)^{\mathrm{T}}, \qquad b_3 = \tfrac{1}{3}(1,-2,2)^{\mathrm{T}}.$$

直接计算可得

$$\|b_1\|^2 = \tfrac{1}{9}(4+4+1) = 1, \quad \|b_2\|^2 = \tfrac{1}{9}(4+1+4) = 1, \quad \|b_3\|^2 = \tfrac{1}{9}(1+4+4) = 1.$$

三对内积也都为零：

$$(b_1, b_2) = \tfrac{1}{9}(4-2-2) = 0, \quad (b_1, b_3) = \tfrac{1}{9}(2-4+2) = 0, \quad (b_2, b_3) = \tfrac{1}{9}(2+2-4) = 0.$$

因此 b_1, b_2, b_3 互相正交且模长均为 1，它们组成一组标准正交基。 □

练习 3.1.14：求 $\mathrm{span}(b_1, b_2, b_3)$ 的一组标准正交基

解：

设 $\{a_i\}$ 为一组标准正交基，且

$$b_1 = a_1 + a_5, \qquad b_2 = a_1 - a_2 + a_4, \qquad b_3 = 2a_1 + a_2 + a_3.$$

对 b_1, b_2, b_3 施密特正交化：

$$\begin{aligned}
&\beta_1 = b_1 = a_1 + a_5, && \|\beta_1\|^2 = 2,\\
&\beta_2 = b_2 - \frac{(b_2,\beta_1)}{\|\beta_1\|^2}\beta_1 = (a_1 - a_2 + a_4) - \frac{1}{2}(a_1 + a_5) = \frac{1}{2}a_1 - a_2 + a_4 - \frac{1}{2}a_5, && \|\beta_2\|^2 = \frac{5}{2},\\
&\beta_3 = b_3 - \frac{(b_3,\beta_1)}{\|\beta_1\|^2}\beta_1 - \frac{(b_3,\beta_2)}{\|\beta_2\|^2}\beta_2 = (2a_1 + a_2 + a_3) - (a_1 + a_5) - 0 = a_1 + a_2 + a_3 - a_5, && \|\beta_3\|^2 = 4.
\end{aligned}$$

单位化得到

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 + a_5), \qquad \boldsymbol{u}_2 = \sqrt{\frac{2}{5}}\left(\frac{1}{2}a_1 - a_2 + a_4 - \frac{1}{2}a_5\right), \qquad \boldsymbol{u}_3 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3 - a_5),$$

它们构成 $\mathrm{span}(b_1, b_2, b_3)$ 的一组标准正交基。

练习 3.1.15：求齐次线性方程组解空间的一组标准正交基

解：

设方程组的系数矩阵为 A。经行初等变换可得其行最简形式

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix},$$

即对未知量 $x = (x_1, \ldots, x_5)^{\mathrm{T}}$ 有关系 $x_1 = x_3 - x_4$、$x_2 = x_4 + 3x_5$。取基础解系

$$\xi_1 = (-1, 1, 0, 1, 0)^{\mathrm{T}}, \quad \xi_2 = (1, 0, 1, 0, 0)^{\mathrm{T}}, \quad \xi_3 = (0, 3, 0, 0, 1)^{\mathrm{T}}.$$

对 $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ 执行施密特正交化并归一化，得到

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 0, 1, 0)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{15}}(2, 1, 3, 1, 0)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \frac{\sqrt{10}}{40}(3, 9, -3, -6, 5)^{\mathrm{T}}.$$

向量 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ 彼此正交且模长为 1，构成解空间的一组标准正交基。（注：本题答案较多，取决于基础解系的初始选择及正交化的顺序）。

练习 3.1.18：勾股定理的高维推广

解：

(1) 对任意向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$，记它们夹角为 θ。在由这两条边构成的三角形中，从 $\boldsymbol{a}$ 的终点向边 $\boldsymbol{b}$ 作高，得到高 $h = \|\boldsymbol{a}\| \sin\theta$。因此面积

$$S = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{b}\|h = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| \sin\theta.$$

由 $\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|}$ 可得

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \frac{(\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b})^2}{\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2}.$$

代入面积表达式便得到

$$S^2 = \frac{1}{4}\left(\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2 - (\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b})^2\right).$$

(2) 设直角四面体的三条直角边分别在 x, y, z 轴上，长度为 p, q, r，则 $S_{xy} = \frac{1}{2}pq$、$S_{yz} = \frac{1}{2}qr$、$S_{zx} = \frac{1}{2}pr$。斜面三角形的单位法向量 $\boldsymbol{n} = (n_x, n_y, n_z)^{\mathrm{T}}$ 由三条边决定，并满足 $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$。三角形在 xy 平面的投影面积等于自身面积乘以法向量与 z 轴夹角余弦，即 $S_{xy} = S_{斜}|n_z|$；对另外两个平面同理，有 $S_{yz} = S_{斜}|n_x|$、$S_{zx} = S_{斜}|n_y|$。因此

$$S_{斜}^2(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) = S_{xy}^2 + S_{yz}^2 + S_{zx}^2 = S_{斜}^2,$$

于是 $S_{斜}^2 = S_{xy}^2 + S_{yz}^2 + S_{zx}^2$。这便是 De Gua 定理。

练习 3.1.22

解：

(1) 平行四边形法则：

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = (v + w)^{\mathrm{T}}(v + w) + (v - w)^{\mathrm{T}}(v - w) = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2.$$

(2) 极化公式：

$$\frac{1}{4}\Big[(\|v\|^2 + 2v^{\mathrm{T}}w + \|w\|^2) - (\|v\|^2 - 2v^{\mathrm{T}}w + \|w\|^2)\Big] = v^{\mathrm{T}}w.$$

(3) 4-范数不满足。取 $v = (1, 0),\ w = (0, 1)$，则 $2(\|v\|^2 + \|w\|^2) = 4$，而

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = (\sqrt[4]{2})^2 + (\sqrt[4]{2})^2 = 2\sqrt{2} \neq 4.$$

(4) ∞-范数同样不满足。取 $v = (1, 0),\ w = (0, 1)$，有

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \neq 4.$$

练习 3.2.8：证明存在正交矩阵 Q

证明. 设

$$A = [\boldsymbol{a}_1\ \dots\ \boldsymbol{a}_n], \qquad B = [\boldsymbol{b}_1\ \dots\ \boldsymbol{b}_n].$$

由题意 A, B 均为正交矩阵，满足 $A^{\mathrm{T}}A = I$, $B^{\mathrm{T}}B = I$。令 $Q = BA^{\mathrm{T}}$，则

$$QA = (BA^{\mathrm{T}})A = B(A^{\mathrm{T}}A) = B.$$

因此 $Q\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{b}_i$。又因为

$$QQ^{\mathrm{T}} = BA^{\mathrm{T}}AB^{\mathrm{T}} = BIB^{\mathrm{T}} = I,$$

可知 Q 为正交矩阵，命题得证。 □

练习 3.2.19：Gram 矩阵的性质

证明. 设 $G_{ij} = \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_j$，即 $G = A^{\mathrm{T}}A$，其中 $A = [\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n]$。

(1) **$G = I$ 的充要条件：** 若 $\{\boldsymbol{a}_i\}$ 标准正交，则 $A^{\mathrm{T}}A = I$，也就是 $G = I$。反方向，若 $G = I$，说明 $\|\boldsymbol{a}_i\|^2 = G_{ii} = 1$ 且 $\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_j = G_{ij} = 0$（$i \neq j$），故 $\{\boldsymbol{a}_i\}$ 为标准正交基。

(2) **G 的半正定性：** 任取 $x \in \mathbb{R}^n$，可得

$$x^{\mathrm{T}}Gx = x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}Ax = (Ax)^{\mathrm{T}}(Ax) = \|Ax\|^2 \geq 0,$$

因此 G 一定是半正定矩阵。

(3) **G 可逆当且仅当列向量线性无关：** 若 $\{\boldsymbol{a}_i\}$ 线性无关，则 $Ax = 0$ 仅有零解，进而 $Gx = A^{\mathrm{T}}Ax = 0$ 也只能得到 $x = 0$，故 G 可逆。反之若 G 可逆且 $Ax = 0$，两边左乘 A^{T} 得 $Gx = 0$，利用 G^{-1} 即得 $x = 0$，从而 $\{\boldsymbol{a}_i\}$ 线性无关。

□

练习 3.3.9：求 b 在 M 上的正交投影

解：

令 $A = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2] = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$，则

$$A^{\mathrm{T}}A = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}, \qquad A^{\mathrm{T}}b = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

解线性方程 $A^{\mathrm{T}}Ax = A^{\mathrm{T}}b$ 得 $x_1 = -\frac{1}{9}$, $x_2 = \frac{5}{9}$。故投影

$$p = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 = -\frac{1}{9}\begin{bmatrix}2\\-1\\-2\end{bmatrix} + \frac{5}{9}\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}8/9\\11/9\\7/9\end{bmatrix}.$$

练习 3.3.10：求 b 在直线 $\mathcal{L}$ 上的正交投影

解：

两平面的法向量为 $n_1 = (1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 与 $n_2 = (2,-1,-2)^{\mathrm{T}}$，故直线方向向量

$$d = n_1 \times n_2 = (-1,4,-3)^{\mathrm{T}}.$$

对 $b = (1,0,1)^{\mathrm{T}}$，投影为

$$p = \frac{b^{\mathrm{T}}d}{d^{\mathrm{T}}d}d = \frac{-1+0-3}{1+16+9}d = -\frac{4}{26}d = -\frac{2}{13}\begin{bmatrix}-1\\4\\-3\end{bmatrix}.$$