《微积分A1》第十三讲

教师 杨利军

清华大学数学科学系

2025年11月03日

Theorem

定理 (带 Peano 余项的 Taylor 公式): 设 $f(x)$ 在 $(x_0 - r, x_0 + r)$ 上定义. 若 $f^{(n)}(x_0)$ 存在, 则 $f(x)$ 可表为 $f(x) = T_n(x) + o(x - x_0)^n$, 其中

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$

$$+ \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Definition

定义: (i) 定理中的多项式 $T_n(x)$ 称为 $f(x)$ 在点 x_0 处的 n 阶(次) Taylor 多项式.

(ii) 函数 $f(x)$ 的表达式 $f(x) = T_n(x) + o(x - x_0)^n$, 称为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处, 带 Peano 余项的 n 阶 Taylor 展式, 高阶无穷小量 $o(x - x_0)^n$ 称为 Peano 余项.

当 $x_0 = 0$ 时, Taylor 展式又称作 Maclaurin 展式.

回忆: $\sin x$ 的 Maclaurin 展式

记 $f(x) = \sin x$，则

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sin x, & f(0) &= 0,\\
f'(x) &= \cos x, & f'(0) &= 1,\\
f''(x) &= -\sin x, & f''(0) &= 0,\\
f'''(x) &= -\cos x, & f'''(0) &= -1,\\
f^{(4)}(x) &= \sin x, & f^{(4)}(0) &= 0.
\end{aligned}
$$

注意导数已经出现了循环，即 $f^{(4n+k)}(x) = f^{(k)}(x)$，$k = 0, 1, 2, 3$. 因此我们不难写出函数 $\sin x$ 的 Maclaurin 展式

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}).$$

$\cos x$ 的 Maclaurin 展式

类似对 $\sin x$ 的处理，我们可以构造 $\cos x$ 的 Maclaurin 展式. 不过根据关系式 $\cos x = [\sin x]'$，我们可以更加快捷得到 $\cos x$ 的 Maclaurin 展式如下

$$\cos x = (\sin x)' = \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})\right)'$$

$$= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}),$$

这里用到了结论 $[o(x^{2n+1})]' = o(x^{2n})$. (见下页说明). 由 Taylor 展式的唯一性(稍后介绍)知，上式就是函数 $\cos x$ 的 Maclaurin 展式.

关于等式 $[o(x^{2n+1})]' = o(x^{2n})$ 的说明

注：以下说明展式 $\sin x = T_{2n+1}(x) + o(x^{2n+1})$ 中的 $o(x^{2n+1})$ 满足 $[o(x^{2n+1})]' = o(x^{2n})$. 注意 $o(x^{2n+1}) = \sin x - T_{2n+1}(x) = \frac{\sin x - T_{2n+1}(x)}{x^{2n+1}} \cdot x^{2n+1}$, $x \neq 0$. 令

$$h(x) = \begin{cases} \frac{\sin x - T_{2n+1}(x)}{x^{2n+1}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

以下证明 $h(x)$ 是 C^1 的，(实际上可以证明 $h(x)$ 是 C^∞). 由 $\sin x$ 的 $2n+3$ 阶 Maclaurin 展式 $\sin x = T_{2n+3}(x) + o(x^{2n+3})$ 知，当 $x \neq 0$ 时，

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{\sin x - T_{2n+1}(x)}{x^{2n+1}} = \frac{T_{2n+3}(x) + o(x^{2n+3}) - T_{2n+1}(x)}{x^{2n+1}} \\ &= \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!} x^{2n+3} + o(x^{2n+3})}{x^{2n+1}} = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!} x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

由此不难看出 $h(x)$ 是 C^1 的. 于是

$$[o(x^{2n+1})]' = [x^{2n+1} h(x)]' = x^{2n}[(2n+1)h(x) + xh'(x)] = o(x^{2n}).$$

我们来求函数 $f(x) = \arctan x$ 的 Maclaurin 展式，为此我们需要计算各阶导数 $f^{(k)}(0)$，$k = 1, 2, \cdots$. 对 $f(x) = \arctan x$ 求导得

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{或} \quad (1+x^2)f'(x) = 1.$$

由此得 $f'(0) = 1$. 进一步关于上面第二个等式取 n 阶导数，并利用求高阶导数的 Leibniz 公式得

$$(1+x^2)f^{(n+1)}(x) + 2nxf^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) = 0.$$

将 $x = 0$ 代入上式得

$$f^{(n+1)}(0) = -n(n-1)f^{(n-1)}(0), \quad \forall n \geq 1.$$

由此得

$$
\begin{aligned}
f^{(1)}(0) &= 1,\\
f^{(2)}(0) &= -1(1-1)f(0) = 0,\\
f^{(3)}(0) &= -2(2-1)f'(0) = -2,\\
f^{(4)}(0) &= -3(3-1)f^{(2)}(0) = 0,\\
&\vdots\\
f^{(2n)}(0) &= 0,\\
f^{(2n+1)}(0) &= (-1)^n(2n)!.
\end{aligned}
$$

于是我们得到所求的 Maclaurin 展式

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + o(x^{2n+1}).$$

注：稍后我们将证明如下展式成立

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n}). \quad (*)$$

对式 (*) 两边积分，从 0 到 x，即得

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$$

$$= \int_0^x dt - \int_0^x t^2 dt + \int_0^x t^4 dt + \cdots + (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt + o(x^{2n+1})$$

$$= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}).$$

于是我们再次得到 arctan x 的 Maclaurin 展式.

记 $f(x)=\sin x$，则

$$\begin{aligned}
f(x)&=\sin x, & f(\tfrac{\pi}{3})&=\tfrac{\sqrt{3}}{2},\\
f'(x)&=\cos x, & f'(\tfrac{\pi}{3})&=\tfrac{1}{2},\\
f''(x)&=-\sin x, & f''(\tfrac{\pi}{3})&=-\tfrac{\sqrt{3}}{2},\\
f'''(x)&=-\cos x, & f'''(\tfrac{\pi}{3})&=-\tfrac{1}{2},\\
f^{(4)}(x)&=\sin x, & f^{(4)}(\tfrac{\pi}{3})&=\tfrac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

导数同样出现了循环. 函数 $\sin x$ 在点 $\frac{\pi}{3}$ 处的 Taylor 展式

$$\sin x=f(\frac{\pi}{3})+\frac{f'(\frac{\pi}{3})}{1!}(x-\frac{\pi}{3})+\frac{f''(\frac{\pi}{3})}{2!}(x-\frac{\pi}{3})^2$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(\frac{\pi}{3})}{n!}(x-\frac{\pi}{3})^n+o(x-\frac{\pi}{3})^n$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{1!}(x - \frac{\pi}{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2!}(x - \frac{\pi}{3})^2 - \frac{1}{2}\frac{1}{3!}(x - \frac{\pi}{3})^3$$

$$+ \cdots + \frac{f^{(n)}(\frac{\pi}{3})}{n!}(x - \frac{\pi}{3})^n + o(x - \frac{\pi}{3})^n,$$

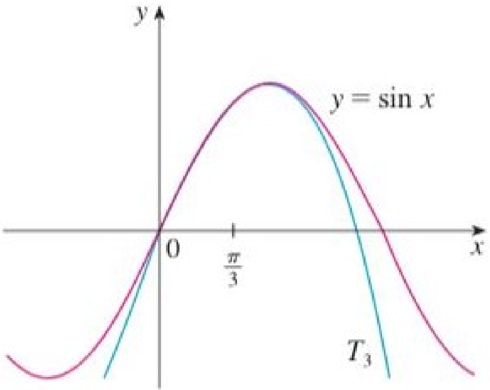
其中 $f^{(n)}(\frac{\pi}{3})$ 根据 $n = 4k + r$ 的余数 $r = 0, 1, 2, 3$ 分别取值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{2}$. 函数 $\sin x$ 在点 $\frac{\pi}{3}$ 处的前三项 Taylor 多项式分别为

$$T_1(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2\cdot 1!}(x - \frac{\pi}{3}),$$

$$T_2(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2\cdot 1!}(x - \frac{\pi}{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2\cdot 2!}(x - \frac{\pi}{3})^2,$$

$$T_3(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2\cdot 1!}(x - \frac{\pi}{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2\cdot 2!}(x - \frac{\pi}{3})^2 - \frac{1}{2\cdot 3!}(x - \frac{\pi}{3})^3$$

三阶 Taylor 多项式逼近图示



Theorem

定理 (带 Peano 余项的 Taylor 公式)：设 $f(x)$ 在 (x_0-r, x_0+r) 上定义．若 $f^{(n)}(x_0)$ 存在，则 $f(x)$ 可表为 $f(x)=T_n(x)+o(x-x_0)^n$，其中

$$T_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

证：要证展式 $f(x)=T_n(x)+o(x-x_0)^n$，即要证

$$\frac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^n}\to 0, \quad x\to x_0.$$

以下用归纳法证．情形 $n=1$:

$$\frac{f(x)-T_1(x)}{x-x_0}=\frac{f(x)-\Big[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\Big]}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0).$$

证明，续一

当 $x \to x_0$ 时，上式趋于零．结论成立．假设命题对正整数 n 成立，即当 $f^{(n)}(x_0)$ 存在时，等式

$$\frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^n} \to 0, \quad x \to x_0.$$

考虑 $n + 1$ 情形．假设 $f^{(n+1)}(x_0)$ 存在，要证

$$\frac{f(x) - T_{n+1}(x)}{(x - x_0)^{n+1}} \to 0, \quad x \to x_0.$$

注意 $T'_{n+1}(x) = T'_{n+1}(f, x) = T_n(f', x)$．例如当 $n = 3$ 时，

$$T_3(f, x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x - x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2!} + \frac{f'''(x_0)(x - x_0)^3}{3!}.$$

于是 $T'_3(f, x) = f'(x_0) + \dfrac{f''(x_0)(x - x_0)}{1!} + \dfrac{f'''(x_0)(x - x_0)^2}{2!} = T_2(f', x).$

由于极限函数 $\frac{f(x)-T_{n+1}(x)}{(x-x_0)^{n+1}}$ 为 $\frac{0}{0}$ 型的，可应用 L'Hospital 法则求极限得

$$\frac{\left[f(x)-T_{n+1}(x)\right]'}{\left[(x-x_0)^{n+1}\right]'}=\frac{f'(x)-T'_{n+1}(x)}{(n+1)(x-x_0)^n}$$

$$=\frac{1}{n+1}\,\frac{f'(x)-T_n(f',x)}{(x-x_0)^n}\xrightarrow{(*)}0.$$

因此

$$\frac{f(x)-T_{n+1}(x)}{(x-x_0)^{n+1}}\to 0,\quad x\to x_0,$$

即情形 $n+1$ 时，结论成立. □

注：极限式 (*) 之所以成立，是因为对导函数 $f'(x)$ 应用关于 n 的归纳假设.

Theorem

定理 (带 Lagrange 余项的 Taylor 公式)：设 $f(x)$ 在 (a,b) 上处处有 $n+1$ 阶导数，对任意 $x_0 \in (a,b)$，$f(x)$ 可表为

$$f(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

其中 $\xi \in (x_0, x)$ 或 $\xi \in (x, x_0)$，$T_n(x)$ 为 $f(x)$ 在点 x_0 处的 n 次 Taylor 多项式，即

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Definition

定义: (i) 函数 $f(x)$ 的表达式

$$f(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

称作 $f(x)$ 在点 x_0 处，带 Lagrange 余项的 n 阶 Taylor 展式.

(ii) 上述展式中，最后一项

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

称为 Lagrange 余项，其中 ξ 可写作 $\xi = x_0 + \theta(x-x_0)$，$\theta \in (0,1)$.

例一: 由于 $[e^x]^{(n)} = e^x$, 故容易得到 e^x 的 n 阶, 带 Lagrange 余项的 Maclaurin 展式

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1},$$

其中 ξ 为介于 0 和 x 之间的一个不确定的点.

例二: 由于 $[\sin x]^{(2n)} = \sin(x + \frac{2n\pi}{2}) = \sin(x + n\pi) = (-1)^n \sin(x)$, 故函数 $\sin x$ 在 $x = 0$ 处, 带 Lagrange 余项的 $2n-1$ 次 Maclaurin 展式为

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{(-1)^n \sin\xi}{(2n)!}x^{2n}.$$

例三: 由于 $[\cos x]^{(2n+1)} = \cos(x + \frac{(2n+1)\pi}{2}) = (-1)^{n+1}\sin x$, 故 $\cos x$ 的 $2n$ 阶, 带 Lagrange 余项的 Maclaurin 展式为

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \frac{(-1)^{n+1}\sin\xi}{(2n+1)!}x^{2n+1}.$$

证明: 记 $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$, 即

$$R_n(x) = f(x) - \left(f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \right.$$

$$\left. + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \right).$$

$$\Rightarrow \quad R_n(x_0) = 0, \quad R_n'(x_0) = 0, \quad \cdots, \quad R_n^{(n)}(x_0) = 0.$$

考虑 $\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}$. 反复应用 Cauchy 中值定理可得

$$\frac{R_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{R_n(x) - R_n(x_0)}{(x - x_0)^{n+1} - 0} = \frac{R_n'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1 - x_0)^n}$$

$$= \frac{R_n'(\xi_1) - R_n'(x_0)}{(n+1)[(\xi_1 - x_0)^n - 0]} = \frac{R_n''(\xi_2)}{(n+1)n(\xi_2 - x_0)^{n-1}} = \cdots$$

证明，续

$$= \frac{R_n^{(n)}(\xi_n)}{(n+1)!(\xi_n - x_0)} = \frac{f^{(n)}(\xi_n) - f^{(n)}(x_0)}{(n+1)!(\xi_n - x_0)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

其中当 $x > x_0$ 时，$x > \xi_1 > \xi_2 > \cdots > \xi_n > \xi > x_0$. 当 $x < x_0$ 时，$x_0 > \xi > \xi_n > \xi_{n-1} > \cdots > \xi_1 > x$. 定理得证. □

对数函数 $\ln(1+x)$ 的 Maclaurin 展式

考虑函数 $\ln(1+x)$ 的 Maclaurin 展式. 记 $f(x)=\ln(1+x)$, 则

$$
\begin{array}{ll}
f(x)=\ln(1+x), & f(0)=0, \\
f'(x)=\frac{1}{1+x}, & f'(0)=1, \\
f''(x)=\frac{-1}{(1+x)^2}, & f''(0)=-1, \\
f'''(x)=\frac{2!}{(1+x)^3}, & f'''(0)=2!, \\
f^{(4)}(x)=\frac{-3!}{(1+x)^4}, & f^{(4)}(0)=-3!, \\
\quad\vdots & \quad\vdots \\
f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}, & f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!
\end{array}
$$

对数函数 $\ln(1+x)$ 的 Maclaurin 展式，续

由此不难写出函数 $\ln(1+x)$ 的 n 阶 Maclaurin 展式如下

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + R_n(x),$$

其中 $R_n(x)$ 为余项. 可取 Peano 余项 $R_n(x) = o(x^n)$，或取为 Lagrange 余项

$$R_n(x) = \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}x^{n+1},$$

其中 ξ 介于 0 和 x 之间.

考虑二项式函数 $f(x)=(1+x)^a$，其中 $a\in\mathbb{R}$ 为任意实数.

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1+x)^a, & f(0) &= 1,\\
f'(x) &= a(1+x)^{a-1}, & f'(0) &= a,\\
f''(x) &= a(a-1)(1+x)^{a-2}, & f''(0) &= a(a-1),\\
&\vdots & &\vdots\\
f^{(n)}(x) &= (a)_n(1+x)^{a-n}, & f^{(n)}(0) &= (a)_n,
\end{aligned}$$

其中 $(a)_n \overset{\text{def}}{=} a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)$. 故函数 $(1+x)^a$ 的 n 阶 Maclaurin 展式为

$$(1+x)^a = 1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{(a)_n}{n!}x^n+R_n(x),$$

其中 $R_n(x)$ 为余项.

注一: 若记

$$C_k^a = \frac{(a)_k}{k!} = \frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-k+1)}{k!},$$

则二项式的 $(1+x)^a$ 的 Maclaurin 展式又可写作

$$(1+x)^a = \sum_{k=0}^{n} C_k^a x^k + R_n(x).$$

注二: 余项 $R_n(x)$ 可取 Peano 余项 $R_n(x) = o(x^n)$ 或取 Lagrange 余项

$$R_n(x) = \frac{(a)_{n+1}(1+\xi)^{a-n-1}}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Taylor 展式的唯一性

Theorem

定理: 设 $f(x)$ 在点 x_0 处 n 阶可导, 若存在 n 次多项式 $P_n(x)$, 使得 $f(x) = P_n(x) + o(x-x_0)^n$, 则 $P_n(x)$ 必为 $f(x)$ 在点 x_0 处的 n 次 Taylor 多项式, 即

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

定理为函数的 Taylor 展开提供了间接方法.

Taylor 展式的唯一性定理证明

证明: 不失一般性可设 $x_0 = 0$. 由带 Peano 余项的 Taylor 展式定理知 $f(x)$ 可表为 $f(x) = T_n(x) + o(x^n)$. 由假设 $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$ 知 $T_n(x) + o(x^n) = P_n(x) + o(x^n)$, 即 $P_n(x) - T_n(x) = o(x^n)$. 设

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$

$$T_n(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n,$$

其中 $b_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$, 则

$$(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)x^2 + \cdots + (a_n - b_n)x^n = o(x^n).$$

在上式中令 $x = 0$, 立刻得 $a_0 = b_0$. 于是

$$(a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)x^2 + \cdots + (a_n - b_n)x^n = o(x^n).$$

证明，续

两边同除 x 得

$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2)x + \cdots + (a_n - b_n)x^{n-1} = o(x^{n-1}).$$

令 $x \to 0$ 得 $a_1 = b_1$. 继续这种做法即可得 $a_k = b_k$, $k = 0, 1, 2, \cdots, n$. 此即 $P_n(x) = T_n(x)$. 命题证毕.

注一: 任意一个 n 次多项式 $p(x)$, 在任意点 $x_0 \in \mathbb{R}$, 均可唯一地表示为

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n,$$

且系数 $a_k = \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!}$, $k = 0, 1, 2, \cdots, n$.

注二: 将一个函数作 Taylor 展开, 最常用的方法是间接方式, 即对已知的展开式作微分, 积分, 四则运算所得到的展开式. 通过计算各阶导数求得 Taylor 展式的情形不多.

例子

例子: 求函数 $e^{\sin^2 x}$ 的四阶 Maclaurin 展式, 带 Peano 余项 $o(x^4)$.

解: 由于 $e^u = 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + o(u^2)$, 故令 $u = \sin^2 x$ 得

$$e^{\sin^2 x} = 1 + \sin^2 x + \frac{1}{2}\sin^4 x + o(\sin^4 x).$$

又 $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)$, 故 $o(\sin^4 x) = o(x^4)$, 且

$$\sin^2 x = \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)\right)^2 = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4),$$

$$\sin^4 x = \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)\right)^4 = x^4 + o(x^4).$$

于是

$$e^{\sin^2 x} = 1 + x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^4) = 1 + x^2 + \frac{1}{6}x^4 + o(x^4).$$

上述展式即为所求的四阶 Maclaurin 展式, 带 Peano 余项 $o(x^4)$. 解答完毕.

<u>例一</u>: 求 e 的近似值，要求误差小于 10^{-5}.

<u>解</u>: 已经求得 e^x 的带有 Lagrange 余项的 Maclaurin 展式为

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1},$$

其中 ξ 介于 0 和 x 之间. 取 $x = 1$ 得

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^\xi}{(n+1)!},$$

其中 $\xi \in (0, 1)$. 于是

$$0 < e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{e^\xi}{(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

例一，续

简单计算可知 $n = 8$ 时，

$$0 < \frac{3}{(8+1)!} = \frac{3}{362880} < \frac{1}{100000} = 10^{-5}.$$

因此所求近似值为

$$e \simeq \sum_{k=0}^{8} \frac{1}{k!}.$$

解答完毕.

例二：求常数 a, k，使得极限

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{ax^k} - \cos(x^2)}{x^8} \qquad (*)$$

存在(有限)，并求出这个极限.

解：对分子作 Maclaurin 展式得

$$e^{ax^k} = 1 + ax^k + \frac{1}{2!}(ax^k)^2 + \frac{1}{3!}(ax^k)^3 + o(x^{3k}),$$

$$\cos(x^2) = 1 - \frac{1}{2!}x^4 + \frac{1}{4!}x^8 + o(x^8).$$

由此可见若极限(*)存在，则必有 $k = 4$，$a = -\frac{1}{2}$. 此时

例二，续

$$e^{ax^k}-\cos(x^2)=e^{\frac{-1}{2}x^4}-\cos(x^2)=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}x^4\right)^2-\frac{1}{4!}x^8+o(x^8)$$

$$=\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{24}\right)x^8+o(x^8)=\frac{1}{12}x^8+o(x^8).$$

因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax^k}-\cos(x^2)}{x^8}=\frac{1}{12}.$$

解答完毕.

例三 (课本第 107 页例 4.3.11): 设 $f(x)$ 于 $[-1,1]$ 上三阶可导, 且 $f(1)=1$, $f(-1)=0$, $f'(0)=0$. 证明存在 $\xi\in(-1,1)$, 使得 $f'''(\xi)=3$.

证明: 考虑 $f(x)$ 的二阶 Maclaurin 展开, 并带 Lagrange 余项得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2+\frac{1}{3!}f'''(\eta)x^3,$$

其中 η 为介于 0 和 x 之间的某个点. 按上述展式计算 $f(1)$ 和 $f(-1)$ 得

$$1=f(1)=f(0)+f'(0)\cdot 1+\frac{1}{2}f''(0)\cdot 1^2+\frac{1}{3!}f'''(\xi_1)\cdot 1^3,$$

$$0=f(-1)=f(0)+f'(0)\cdot(-1)+\frac{1}{2}f''(0)\cdot(-1)^2+\frac{1}{3!}f'''(\xi_2)\cdot(-1)^3,$$

其中 $\xi_1\in(0,1)$, $\xi_2\in(-1,0)$. 再由假设 $f'(0)=0$ 可知

$$1 = f(0) + \tfrac{1}{2}f''(0) + \tfrac{1}{6}f'''(\xi_1),$$
$$0 = f(0) + \tfrac{1}{2}f''(0) - \tfrac{1}{6}f'''(\xi_2).$$

将上述两个式子相减得

$$1 = \frac{1}{6}[f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)] \quad 或 \quad \frac{1}{2}[f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)] = 3.$$

根据 Darboux 定理(导数的介值性) 可知存在 $\xi \in (\xi_2, \xi_1)$，使得 $f'''(\xi) = 3$.

解答完毕.

例四

课本第 109 页习题 4.3 题 12：设 $f(x)$ 于开区间 J 上二阶可导，$[a,b]\subset J$，且 $f'(a)=0$，$f'(b)=0$. 证明存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$|f''(\xi)|\geq\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

证明：将 $f(x)$ 分别在点 $x=a$ 和 $x=b$ 处作一阶 Taylor 展开，带 Lagrange 余项得

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)(x-a)^2,$$

$$f(x)=f(b)+f'(b)(x-b)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(x-b)^2,$$

其中 $\xi_1\in(a,x)$，$\xi_2\in(x,b)$. 根据上述两个等式计算函数值 $f(\frac{a+b}{2})$，并利用假设条件 $f'(a)=0$，$f'(b)=0$ 得

例四，续一

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)\left(\frac{a+b}{2}-a\right)^2,$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(b)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)^2,$$

其中 $\xi_1\in(a,\frac{a+b}{2})$，$\xi_2\in(\frac{a+b}{2},b)$. 将上述两个等式相减得

$$0=f(b)-f(a)+\frac{1}{2}\Big[f''(\xi_2)-f''(\xi_1)\Big]\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow\quad f(b)-f(a)=\frac{1}{2}\Big[f''(\xi_1)-f''(\xi_2)\Big]\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

例四，续二

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\Big[f''(\xi_1) - f''(\xi_2)\Big] = \frac{4\Big[f(b) - f(a)\Big]}{(b-a)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\Big|f''(\xi_1) - f''(\xi_2)\Big| = \frac{4\Big|f(b) - f(a)\Big|}{(b-a)^2}.$$

不妨设 $\Big|f''(\xi_1)\Big| \geq \Big|f''(\xi_2)\Big|$，则

$$\Big|f''(\xi_1)\Big| \geq \frac{1}{2}\Big[|f''(\xi_1)| + |f''(\xi_2)|\Big]$$

$$\geq \frac{1}{2}\Big|f''(\xi_1) - f''(\xi_2)\Big| = \frac{4\Big|f(b) - f(a)\Big|}{(b-a)^2}.$$

命题得证.

Example

课本第 93 页例 4.1.5：设函数 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 上可导。证明若 $f(a)=0=f(b)$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)+g'(\xi)f(\xi)=0$.

证明：考虑函数 $h(x)=f(x)e^{g(x)}$。显然 $h(a)=0=h(b)$。应用 Rolle 定理知存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $h'(\xi)=0$。计算得

$$h'(x)=[f(x)e^{g(x)}]'=f'(x)e^{g(x)}+f(x)e^{g(x)}g'(x)$$

$$=e^{g(x)}[f'(x)+g'(x)f(x)].$$

因此 $h'(\xi)=0$，当且仅当 $f'(\xi)+g'(\xi)f(\xi)=0$。证毕.

例二

Example

例: 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 (a,b) 上可导. 证明若 $f(a)=0$, 且 $f(b)=0$, 则存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f'(\xi)-f(\xi)=0$. 进一步证明函数 e^x-x^n (n 为正整数) 至多有三个不同的实根.

证: 在例一中取 $g(x)=-x$, 即考虑函数 $f(x)e^{-x}$ 在 $[a,b]$ 上的性质. 由例一结论知存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f'(\xi)-f(\xi)=0$. 第一个结论得证. 考虑 $f(x)$ $=e^x-x^n$. 由于 $f'(x)-f(x)=e^x-nx^{n-1}-[e^x-x^n]=x^{n-1}(x-n)$ 只有两个实根, 故若 $f(x)=e^x-x^n$ 有四个实零点的话, 则 $f'(x)-f(x)$ 至少有三个零点. 矛盾. 证毕.

回忆如下函数单调性定理.

Theorem

定理: 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导. 若对 $\forall x \in (a,b)$, $f'(x) \geq 0 (\leq 0)$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增(减).

以下是上述定理的推广.

Theorem

定理: 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调增(严格单调减) $\Longleftrightarrow$ $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) \leq 0)$, 且在 $[a,b]$ 的任何子区间上 $f'(x)$ 不恒为零.

证: 只证括号外结论. $\Rightarrow$: 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调增, 要证 (i) $f'(x) \geq 0$, (ii) 在 $[a,b]$ 的任何子区间上 $f'(x)$ 不恒为零. 结论 (i) 显然成立. 证 (ii). 反证. 假设存在区间 $(c,d) \subset (a,b)$, 使得 $f'(x) \equiv 0$, $\forall x \in (c,d)$. 于是 $f(x)$ 在区间 (c,d) 上为常数函数. 此与 $f(x)$ 的严格单调增性质相矛盾. 故结论(ii)成立.

$\Leftarrow$: 假设 (i) $f'(x) \geq 0$, (ii) 在 $[a,b]$ 的任何子区间上 $f'(x)$ 不恒为零, 要证 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调增. 由假设 (i) 知 $f(x)$ 单调增. 要证 $f(x)$ 严格单调增. 反证. 若不然则存在 $x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 < x_2$, 使得 $f(x_1) = f(x_2)$. 由于 $f(x)$ 单调增, 故 $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$, $\forall x \in (x_1,x_2)$. 这表明 $f(x)$ 在区间 (x_1,x_2) 上恒为常数. 于是 $f'(x) \equiv 0$, $\forall x \in (x_1,x_2)$. 此与 (ii) 矛盾. 定理得证.

注：设函数在一开区间上可导，在其中一点处导数为正的，并不能推出函数在这个点的邻域内单调上升．例如

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

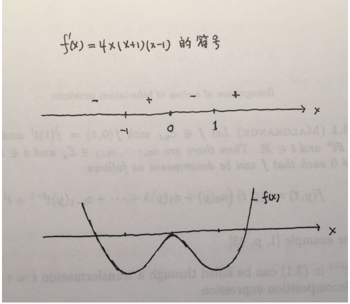
易证函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上处处可导，且

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + 4x\sin\frac{1}{x} - 2\cos\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

注意 $f'(0) = 1$，但在原点的每个邻域内，导数 $f'(x)$ 的符号不定，故函数在原点的每个邻域内不单调．

例一：讨论函数 $f(x) = x^4 - 2x^2$ 的单调区间.

解：先求驻点. 令 $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 0$. 解之得三个驻点 $x = 0$, $x = \pm 1$. 由此可确定 $f'(x)$ 的符号，以及函数的增减区间，如图所示.



例二

例二: 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导, $f(0)=0$, 且导数 $f'(x)$ 严格单调增. 证明 $\frac{f(x)}{x}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上也严格单调增.

证明: 一方面

$$\left[\frac{f(x)}{x}\right]' = \frac{1}{x}\left[f'(x) - \frac{f(x)}{x}\right].$$

另一方面

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(\xi),$$

其中 $\xi \in (0,x)$. 由假设 $f'(x)$ 严格单调增, 故 $f'(\xi) < f'(x)$. 因此 $[\frac{f(x)}{x}]' > 0$, $\forall x \in (0,+\infty)$. 这就证明了 $\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 也严格单调增. 证毕.

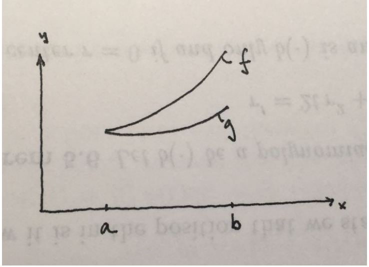
例三

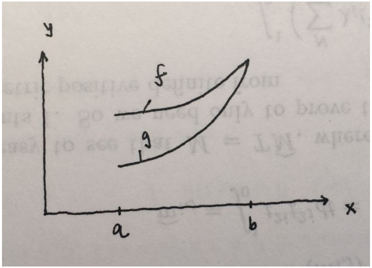
例三: 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导. 证明

i) 若 $f(a)=g(a)$ 且 $f'(x)>g'(x)$, 则 $f(x)>g(x)$, $\forall x\in(a,b]$;

ii) 若 $f(b)=g(b)$ 且 $f'(x)<g'(x)$, 则 $f(x)>g(x)$, $\forall x\in[a,b)$.

(起点时间相同, 速度快者一路领先; 到达终点时间相同, 速度慢者一路领先)





例三，续

证明：令 $F(x)=f(x)-g(x)$，则 $F'(x)=f'(x)-g'(x)$.

(i) 当 $f(a)=g(a)$ 且 $f'(x)>g'(x)$ 时，$F(a)=0$，$F'(x)>0$，$\forall x\in(a,b)$. 故 $F(x)$ 严格单调增. 因此 $F(x)>F(a)=0$，此即 $f(x)>g(x)$，$\forall x\in(a,b]$.

(ii) 当 $f(b)=g(b)$ 且 $f'(x)<g'(x)$ 时，$F(b)=0$，$F'(x)<0$，$\forall x\in(a,b)$. 故 $F(x)$ 严格单调减. 因此 $F(x)>F(b)=0$，此即 $f(x)>g(x)$，$\forall x\in[a,b)$.

证毕.

例一：证明 $e^x > x+1$, $\forall x \in (-\infty, +\infty)$, $x \neq 0$.

证：记 $F(x) = e^x - x - 1$，则 $F'(x) = e^x - 1$. 于是

(i) 在区间 $(0, +\infty)$ 上，$F'(x) > 0$. 从而 $F(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上严格单调增. 故 $F(x) > F(0) = 0$，即 $e^x > x+1$, $\forall x > 0$.

(ii) 在区间 $(-\infty, 0)$ 上，$F'(x) < 0$. 从而 $F(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上严格单调减. 故 $F(x) > F(0) = 0$，即 $e^x > x+1$, $\forall x < 0$. 命题得证.

例二：证明不等式 $\sin x < x$, $\forall x > 0$.

证：记 $F(x) = x - \sin x$，则 $F(0) = 0$, $F'(x) = 1 - \cos x \geq 0$. 显然 $F'(x)$ 在任何区间上不恒为零. 根据定理可知函数 $F(x)$ 在整个实轴上严格单调增. 于是 $F(x) > F(0) = 0$，即 $\sin x < x$, $\forall x > 0$. 命题得证.

例三: 证明 $\frac{2}{\pi} < \frac{\sin x}{x} < 1, \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

证: 定义函数 $F(x) = \frac{\sin x}{x}$, 当 $x \neq 0$, $F(0) = 1$. 显然 $F(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上连续, 在开区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上可导, 且对 $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$,

$$F'(x) = \frac{1}{x^2}(x\cos x - \sin x) = \frac{\cos x}{x^2}(x - \tan x).$$

回忆在证明 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 时, 证明了不等式 $x < \tan x$, $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$, 故 $F'(x) < 0$, $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$. 这表明 $F(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上严格单调下降. 因此 $F(\frac{\pi}{2}) < F(x) < F(0)$, 此即

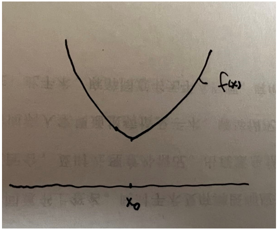
$$\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \text{亦即} \quad \frac{2}{\pi} < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

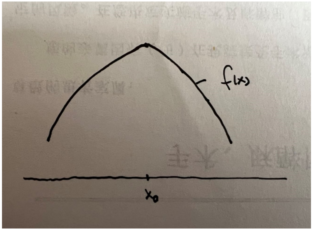
证毕.

定理: 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续，在 $(a,b)\setminus\{x_0\}$ 上可导，

(i) 若 $f'(x) < 0$, $\forall x \in (x_0-\delta, x_0)$，且 $f'(x) > 0$, $\forall x \in (x_0, x_0+\delta)$，则 x_0 是 $f(x)$ 的严格极小值点.

(ii) 若 $f'(x) > 0$, $\forall x \in (x_0-\delta, x_0)$，且 $f'(x) < 0$, $\forall x \in (x_0, x_0+\delta)$，则 x_0 是 $f(x)$ 的严格极大值点.





证: 只证结论(i). 结论(ii)的证明类似.

1) 由条件 $f'(x) < 0, \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 知 $f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 严格单调减, 故 $f(x) > f(x_0), \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$.

2) 完全类似, 由条件 $f'(x) > 0, \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 知 $f(x)$ 在 $(x_0, x_0 + \delta)$ 严格单调增, 故 $f(x) > f(x_0), \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$.

综上 $f(x) > f(x_0), \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), x \neq x_0$. 这就证明了 x_0 是 $f(x)$ 的严格极小值点. 证毕.

Example

<u>例一</u>: 考虑函数 $f(x) = |x|$. 显然 $f(x)$ 在开区间 $(-\infty, 0)$, 以及 $(0, +\infty)$ 上可导, 且 $f'(x) = -1 < 0$, $\forall x < 0$, $f'(x) = 1 > 0$, $\forall x > 0$. 根据定理知 $x = 0$ 是函数的极小点. 实际上还最小值点. 如图所示.

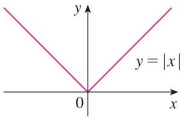


FIGURE 12
If $f(x) = |x|$, then $f(0) = 0$ is a minimum value, but $f'(0)$ does not exist.

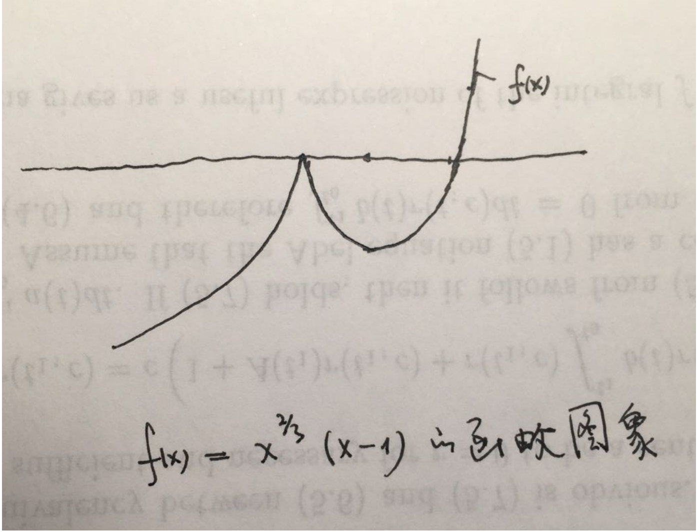
例二: 求函数 $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x-1)$ 的极值.

解: 对 $x \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x}}(5x-2).$$

于是函数有唯一驻点 $x = \frac{2}{5}$, 且当 $0 < x < \frac{2}{5}$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x > \frac{2}{5}$ 时, $f'(x) > 0$. 因此驻点 $x = \frac{2}{5}$ 为极小点. 相应的极小值为 $f(\frac{2}{5}) = -\frac{3}{5}(\frac{2}{5})^{2/3}$. 此外 $f(x)$ 有唯一一个不可微点 $x = 0$. 当 $x \in (0, \frac{2}{5})$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x < 0$ 时, $f'(x) > 0$. 故 $x = 0$ 是函数的极大值点. 相应的极大值为 $f(0) = 0$. 解答完毕.

函数 $y = x^{\frac{2}{3}}(x-1)$ 的函数图像

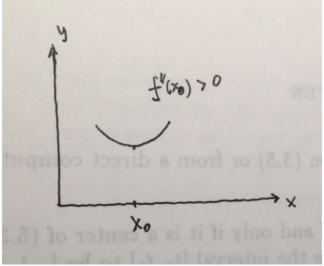


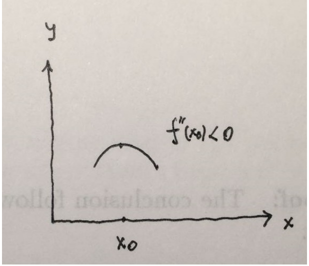
Theorem

定理: 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上可导, x_0 是 f 的驻点, 即 $f'(x_0)=0$. 假设 $f''(x_0)$ 存在, 则

(i) 当 $f''(x_0)>0$ 时, x_0 为严格极小点;

(ii) 当 $f''(x_0)<0$ 时, x_0 为严格极大点.





证: 只证情形(i). 情形(ii)的证明类似. 根据假设 $f''(x_0) > 0$ 可知

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} > 0,$$

由极限的保号性质知存在 $\delta > 0$, 使得

$$\frac{f'(x)}{x - x_0} > 0, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}.$$

故 $f'(x) < 0$, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$; $f'(x) > 0$, $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$. 再次根据上述定理可知 x_0 是严格极小点. 结论(i)得证. $\square$

注: 当 $f''(x_0) = 0$ 时, 我们需要更高阶导数判断驻点 x_0 是否为极值点.

Theorem

定理: 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续, 若 $x_0\in(a,b)$, 使得 $f^{(n+1)}(x_0)$ 存在, 且 $f^{(n+1)}(x_0)\neq 0$, $f^{(k)}(x_0)=0$, $k=1,2\cdots,n$.

(i) 若 $n+1$ 是偶数, 则 x_0 是极值点, 并且当 $f^{(n+1)}(x_0)>0$ 时, x_0 是极小点, 当 $f^{(n+1)}(x_0)<0$ 时, x_0 是极大点;

(ii) 若 $n+1$ 是奇数, 则 x_0 非极值点.

定理证明

证: 考虑 $f(x)$ 在 x_0 处带 Peano 余项的 $n+1$ 阶 Taylor 展式

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}+o(x-x_0)^{n+1}.$$

将上述展式写作

$$f(x)-f(x_0)=\left(\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}+\frac{o(x-x_0)^{n+1}}{(x-x_0)^{n+1}}\right)(x-x_0)^{n+1}.$$

注意括弧 $(\dots)$ 在 x_0 的充分小的邻域里保持定号, 而因子 $(x-x_0)^{n+1}$ 当 $n+1$ 为偶数时保持定号, 故此时 x_0 为极值点. 而因子 $(x-x_0)^{n+1}$ 当 $n+1$ 为奇数时, 在 x_0 的两侧变号, 故此时 x_0 非极值点. 命题得证. 证毕. □

利用高阶导数判断极值, 例子

Example

例一: 对于 $f(x) = x^3$, $x = 0$ 是驻点, 且 $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = 6 \neq 0$. 根据定理可知 $x = 0$ 不是极值点.

Example

例二: 对于 $g(x) = x^4$, $x = 0$ 是驻点, 且 $g^{(k)}(0) = 0$, $k = 1, 2, 3$, $g^{(4)}(0) = 24 > 0$. 根据定理可知 $x = 0$ 是极小值点.

Nov 03 作业，共八大题

习题一：课本第108页习题4.3题3：求下列函数在给定点处的Taylor 多项式.

(1) 求函数 $y=\sqrt{x}$ 在点 $x=1$ 处的 4 阶 Taylor 多项式.

(2) 求函数 $y=\sin x$ 在点 $x=\frac{\pi}{4}$ 处的 3 阶 Taylor 多项式.

(3) 求函数 $y=1+2x-4x^2+x^3+6x^4$ 在点 $x=1$ 处的 6 阶 Taylor 多项式.

(4) 求函数 $y=\tan x$ 在点 $x=\frac{\pi}{4}$ 处的 2 阶 Taylor 多项式.

习题二：课本第108页习题4.3题4(1)(3)(5)(7)：写出下列函数在给定点处的Taylor 多项式.

(1) 求函数 $y=\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$ 在点 $x=0$ 处的 4 阶 Taylor 多项式.

(3) 求函数 $y=\frac{x}{1-x}$ 在点 $x=2$ 处的 n 阶 Taylor 多项式.

(5) 求函数 $y=\arcsin x$ 在点 $x=0$ 处的 n 阶 Taylor 多项式.

(7) 求函数 $y=\frac{1}{(1-x)^2}$ 在点 $x=0$ 处的 n 阶 Taylor 多项式.

作业，续一

习题三：课本第108页习题4.3题5：求下列函数极限：

$$(1)\ \lim_{|x|\to+\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right];\quad (2)\ \lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin(x^2)};$$

$$(3)\ \lim_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right);(4)\ \lim_{x\to0}\frac{\sin(\sin x)-\tan(\tan x)}{\sin x-\tan x}.$$

习题四：课本第108页习题4.3题6：当 $x\to0$ 时，求如下无穷小量的阶

$$\ln\left[1+\sin\left(x^2\right)\right]+a\left(\sqrt[3]{2-\cos x}-1\right).$$

习题五：课本第109页习题4.3题8：证明对于任意 $x\geq1$, $y\geq1$, $x\neq y$，成立不等式

$$\left|\frac{\ln x-\ln y}{x-y}-\frac{1}{y}\right|<\frac{1}{2}|x-y|.$$

习题六：课本第109页习题4.3题9：设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的三阶导数，且 $f(0)=0$，$f'(\frac{1}{2})=0$，$f(1)=\frac{1}{2}$. 证明存在点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'''(\xi)=12$.

习题七：课本第109页习题4.3题10：设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，证明存在点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(a)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi).$$

习题八：课本第109页习题4.3题11：设 $f(x)$ 在 $[x_0-h,x_0+h]$ 上可导，$h>0$. 证明存在 $0<\theta<1$，使得

$$f(x_0+h)-f(x_0-h)=\Big[f'(x_0+\theta h)+f'(x_0-\theta h)\Big]h.$$