习题材料（六）答案

注 1：本次习题课包含内容：正交性，特征值，特征向量

注 2：带 ♡ 号的习题有一定的难度、比较耗时, 请量力为之.

注 3：本节考虑的矩阵均为实矩阵.

习题 1. 对向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

进行 *Gram-Schmidt* 正交化.

答案

1. 第一步：令 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1$，则 $\boldsymbol{u}_1 = \dfrac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{bmatrix}$
2. 第二步：令 $\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - (\boldsymbol{\alpha_2} \cdot \boldsymbol{u}_1)\, \boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{u}_2 = \dfrac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 0 \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$
3. 第三步：令 $\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 - (\boldsymbol{\alpha}_3 \cdot \boldsymbol{u}_1)\, \boldsymbol{u}_1 - (\boldsymbol{\alpha}_3 \cdot \boldsymbol{u}_2)\, \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{u}_3 = \dfrac{\boldsymbol{\beta}_3}{\|\boldsymbol{\beta}_3\|} = \begin{bmatrix} -2/3\sqrt{5} \\ 5/3\sqrt{5} \\ 4/3\sqrt{5} \end{bmatrix}$

习题 2. 求矩阵 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ 的 *QR* 分解.

答案 设原矩阵为 $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_3 \end{bmatrix}$，QR 分解也分三部曲：先对列向量进行 Gram-Schmidt 正交化，再用正交向量表示出元向量，最后用矩阵写出分解式. 但是要注意，为了做 QR 分解而进行的 Gram-Schmidt 正交化，要记录中间的系数，以方便写出分解式.

1. 第一步，令 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\beta}_1$，因为 $\|\boldsymbol{\beta}_1\| = 3$，所以 $\boldsymbol{u}_1 = \dfrac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$. 同时，
$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{\beta}_1 = \|\boldsymbol{\beta}_1\| \boldsymbol{u}_1 = 3\boldsymbol{u}_1.$$
2. 第二步，令 $\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - (\boldsymbol{\alpha}_2 \cdot \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1$，而 $\boldsymbol{\alpha}_2 \cdot \boldsymbol{u}_1 = 1(2/3) + (-1)(2/3) = 0$，所以 $\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2$，$\|\boldsymbol{\beta}_2\| = \sqrt{2}$，故 $\boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$，同时
$$\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\beta}_2 = \|\boldsymbol{\beta}_2\| \boldsymbol{u}_2 = \sqrt{2}\boldsymbol{u}_2.$$

3. 第三步，令 $\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 - (\boldsymbol{\alpha}_3 \cdot \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1 - (\boldsymbol{\alpha}_3 \cdot \boldsymbol{u}_2)\boldsymbol{u}_2$，而 $\boldsymbol{\alpha}_3 \cdot \boldsymbol{u}_1 = 2, \boldsymbol{\alpha}_3 \cdot \boldsymbol{u}_2 = -2\sqrt{2}$，那么

$$\boldsymbol{\beta}_3 = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 4/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}, \quad \|\boldsymbol{\beta}_3\| = \sqrt{2}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} -1/3\sqrt{2} \\ 4/3\sqrt{2} \\ -1/3\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

同时

$$\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\beta}_3 + (\boldsymbol{\alpha}_3 \cdot \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1 + (\boldsymbol{\alpha}_3 \cdot \boldsymbol{u}_2)\boldsymbol{u}_2 = \sqrt{2}\boldsymbol{u}_3 + 2\boldsymbol{u}_1 - 2\sqrt{2}\boldsymbol{u}_2.$$

所以

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3\boldsymbol{u}_1 & \sqrt{2}\boldsymbol{u}_2 & 2\boldsymbol{u}_1 - 2\sqrt{2}\boldsymbol{u}_2 + \sqrt{2}\boldsymbol{u}_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2/3 & 1/\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} \\ 1/3 & 0 & 4/3\sqrt{2} \\ 2/3 & -1/\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

习题 3. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的标准正交基. 证明：$\beta_1 = \frac{1}{3}(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3), \beta_2 = \frac{1}{3}(2\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3), \beta_3 = \frac{1}{3}(\alpha_1 - 2\alpha_2 - 2\alpha_3)$ 也是 $\mathbb{R}^3$ 的标准正交基。

答案 设 $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 & \boldsymbol{\beta}_2 & \boldsymbol{\beta}_3 \end{bmatrix}$. 据题意，$A$ 是正交矩阵，我们只需要证明 B 也是正交矩阵. 根据条件，

$$\boldsymbol{\beta}_1 = A \begin{bmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta}_2 = A \begin{bmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta}_3 = A \begin{bmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ -2/3 \end{bmatrix}$$

因此

$$B = A \begin{bmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 & -2/3 \\ -1/3 & 2/3 & -2/3 \end{bmatrix}$$

所以

$$\begin{aligned} B^{\mathrm{T}}B &= \begin{bmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 & -2/3 \\ -1/3 & 2/3 & -2/3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}A \begin{bmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 & -2/3 \\ -1/3 & 2/3 & -2/3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 & -2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 & -2/3 \\ -1/3 & 2/3 & -2/3 \end{bmatrix} \\ &= I_3 \end{aligned}$$

习题 4. 证明，分块上三角矩阵 $X = \begin{bmatrix} c & \boldsymbol{\alpha}^T \\ \mathbf{0} & Q \end{bmatrix}$ 是正交矩阵时，其中 c 为一个常数，必有 $c = \pm 1$, $\alpha = 0$, Q 是正交矩阵。

答案 由于 $X^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} c & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\alpha} & Q^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$，那么 X 是正交矩阵，当且仅当 $X^{\mathrm{T}}X=I$，即

$$I=\begin{bmatrix} c & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\alpha} & Q^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{0} & Q \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c^2 & c\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \\ c\boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+Q^{\mathrm{T}}Q \end{bmatrix}$$

也就是说

$$\begin{cases} c^2=1 \\ c\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0} \\ \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+Q^{\mathrm{T}}Q=I \end{cases}$$

由此直接得到结论.

习题 5. *1.* *设 A 是正交矩阵，$\det(A)<0$。证明 I_n+A 不可逆.*

2. *设 A 为奇数阶正交矩阵，$\det(A)>0$。证明 I_n-A 不可逆.*

答案

1. I_n+A 不可逆，当且仅当 $\det(I_n+A)=0$. 事实上

$$\det(I_n+A)=\det(AA^{\mathrm{T}}+A)=\det(A)\det(A^{\mathrm{T}}+I_n)=\det(A)\det(A+I_n),$$

根据条件，$\det(A)<0$，则 $\det(A)\neq 1$，所以 $\det(I_n+A)=0$.

2. I_n-A 不可逆，当且仅当 $\det(I_n-A)=0$. 事实上

$$\det(I_n-A)=\det(AA^{\mathrm{T}}-A)=\det(A)\det(A^{\mathrm{T}}-I_n)=(-1)^n\det(A)\det(I_n-A),$$

根据条件，$\det(A)>0$ 且 n 是奇数，则 $(-1)^n\det(A)\neq 1$，所以 $\det(I_n-A)=0$.

习题 6. *设 n 阶实方阵 A 满足 $A=-A^T$。*

1. *证明 I_n+A, I_n-A 可逆.*

2. *证明 $(I_n-A)(I_n+A)^{-1}$ 是正交方阵。*

答案

1. 设 $(I_n+A)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，那么 $\boldsymbol{x}=-A\boldsymbol{x}$. 进而，一方面，

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(-A\boldsymbol{x})=-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x},$$

另一方面，

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=(-A\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x},$$

故而 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$，所以 $\|\boldsymbol{x}\|=0$, 即 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，所以 I_n+A 可逆.

设 $(I_n-A)\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$，那么 $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{y}$. 进而，一方面，

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(A\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{y},$$

另一方面，

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=(A\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=-\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{y},$$

故而 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=-\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$，所以 $\|\boldsymbol{y}\|=0$, 即 $\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$，所以 I_n-A 可逆.

2. 设 $B=(I_n-A)(I_n+A)^{-1}$，那么 B 也是可逆矩阵，且

$$B^{\mathrm{T}}=((I_n+A)^{-1})^{\mathrm{T}}(I_n-A)^{\mathrm{T}}=((I_n+A)^{\mathrm{T}})^{-1}(I_n-A^{\mathrm{T}})=(I_n-A)^{-1}(I_n+A)$$

那么

$$\begin{aligned}B^{\mathrm{T}}B&=(I_n-A)^{-1}(I_n+A)(I_n-A)(I_n+A)^{-1}\\&=(I_n-A)^{-1}(I_n-A)(I_n+A)(I_n+A)^{-1}\\&=I_n,\end{aligned}$$

因此 B 是正交矩阵.

习题 7 ($\heartsuit$)**. 设可逆矩阵 $A\in M_n(\mathbb{R})$ 满足：对任意的 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$，有 $\frac{(A\boldsymbol{x})\cdot(A\boldsymbol{y})}{\|A\boldsymbol{x}\|\|A\boldsymbol{y}\|}=\frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|}$，称为 A 是保角变换。证明 A 是正交矩阵的常数倍。**

答案 设 $\boldsymbol{e}_i(1\le i\le n)$ 是第 i 个分量是 1，其余分量为 0 的向量，那么 $\alpha_i=A\boldsymbol{e}_i$ 是 A 的第 i 个列向量，即 $A=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n\end{bmatrix}$. 令 $c_i=\|A\boldsymbol{e}_i\|>0$. 根据条件，

$$\frac{(A\boldsymbol{e}_i)\cdot(A\boldsymbol{e}_j)}{c_ic_j}=\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j,$$

这说明 $\{A\boldsymbol{e}_i:1\le i\le j\}$ 是两两正交的向量组. 对任意 $1\le i\ne j\le n$，令 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{y}=\boldsymbol{e}_i-\boldsymbol{e}_j$，那么

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=0,$$

所以由题意，

$$\frac{(A\boldsymbol{x})\cdot(A\boldsymbol{y})}{\|A\boldsymbol{x}\|\|A\boldsymbol{y}\|}=\frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|}=0,$$

故 $(A\boldsymbol{x})\cdot(A\boldsymbol{y})=0$. 而等号左边为：

$$(A\boldsymbol{x})\cdot(A\boldsymbol{y})=(A(\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j))\cdot(A(\boldsymbol{e}_i-\boldsymbol{e}_j))=c_i^2-c_j^2,$$

故 $c_i=c_j$. 所以 $c_1=c_2=\cdots=c_n=c$. 这就说明 $\dfrac{1}{c}A$ 的列向量两两正交且长度为 1，即 $\dfrac{1}{c}A$ 是正交矩阵.

习题 8. 判断下列结论是否正确，并说明理由：

1. 设 A 是 n 阶方阵，若 $A^m=\mathbf{0}$，则 A 的特征值只能是 0.

2. 设 A 是 n 阶实方阵，若 $A^2=A$，则 A 的特征值只能是 1 或 0.

3. 设 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 是 n 阶方阵 A 的属于不同特征值的特征向量，则必有 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}=0$.

4. 设 A 是 n 阶方阵，λ 是 A 的一个特征值，$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 是 $(\lambda I-A)\boldsymbol{x}=0$ 的基础解系，则 A 的属于特征值 λ 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{x}+k_2\boldsymbol{y}$，其中 k_1,k_2 是两个任意常数.

5. 设 A 是 3 阶方阵，A 的特征值为 $0,0,1$，$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$ 是 $A\boldsymbol{x}=0$ 的基础解系，$\boldsymbol{x}_3$ 是 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$ 的一个非零解，则 A 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2+k_3\boldsymbol{x}_3$，其中 k_1,k_2,k_3 是不全为零的任意常数.

6. 设 $\boldsymbol{x}$ 是 n 阶方阵 A 的特征向量，P 是 n 阶可逆方阵，则 $P^{-1}\boldsymbol{x}$ 是 $P^{-1}AP$ 的特征向量.

7. 设 $\boldsymbol{x}$ 是 n 阶方阵 A 的特征向量，若 A 可逆，则 $A^{-1}\boldsymbol{x}$ 是 A^{-1} 的特征向量.

8. 设 A 是 n 阶方阵，若 $A^2+A+I=0$, 则 A 没有实的特征值.

9. 若 A, B 的特征值分别为 λ, μ，则

   (a) A^T 与 A 有相同的特征值与特征向量；

   (b) $A+A^T$ 及 AA^T 的特征值分别为 2λ 及 λ^2；

   (c) $A+B$ 及 AB 的特征值分别为 $\lambda+\mu$ 及 $\lambda\mu$；

   (d) 以上结论都不正确.

答案

1. 正确 设 λ 是 A 的特征值，$A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$，那么
$$\mathbf{0}=A^m\boldsymbol{x}=\lambda^m\boldsymbol{x},$$
因此 $\lambda^m=0$，即 $\lambda=0$.

2. 正确 设 λ 是 A 的特征值，$A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$，那么
$$\lambda\boldsymbol{x}=A\boldsymbol{x}=A^2\boldsymbol{x}=A(\lambda\boldsymbol{x})=\lambda^2\boldsymbol{x},$$
因此 $\lambda=\lambda^2$，即 $\lambda=0$ 或 1.

3. 错误 例如：设 $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}$，那么 $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$ 属于特征值 1 的特征向量，$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$ 属于特征值 2 的特征向量. 而 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=1$.
一般的矩阵，属于不同特征值的特征向量线性无关. 只有对于实对称矩阵，属于不同特征值的特征向量才是正交的.

4. 错误 本题唯一的例外是零向量，因为我们要求特征向量都是非零向量. 因此正确结论是：A 的属于特征值 λ 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{x}+k_2\boldsymbol{y}$, 其中 k_1, k_2 是任意两个**非零**常数.

5. 错误 $\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_3$ 就不是 A 的特征向量. 可以用反正法：假设 $A(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_3)=\lambda(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_3)$，那么 $\lambda\boldsymbol{x}_1+(\lambda-1)\boldsymbol{x}_3=0$. 而属于不同特征值的特征向量线性无关，所以 $\lambda=\lambda-1=0$，矛盾.

6. 正确 设 $A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$，那么
$$(P^{-1}AP)(P^{-1}\boldsymbol{x})=P^{-1}A\boldsymbol{x}=P^{-1}\lambda\boldsymbol{x}=\lambda(P^{-1}\boldsymbol{x}).$$

7. 正确 设 $\boldsymbol{y}=A^{-1}\boldsymbol{x}$. 首先注意到，因为 A 可逆，$A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$，故 $\lambda\neq 0$ 且 $\boldsymbol{y}=A^{-1}\boldsymbol{x}=\lambda^{-1}\boldsymbol{x}$. 那么
$$A^{-1}\boldsymbol{y}=A^{-1}(\lambda^{-1}\boldsymbol{x})=\lambda^{-1}A^{-1}\boldsymbol{x}=\lambda^{-1}\boldsymbol{y}$$
即：$\boldsymbol{y}$ 是 A^{-1} 的属于特征值 λ^{-1} 的特征向量.

8. 正确 设 λ 是 A 的实特征值，且 $\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$ 使得 $A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$，那么
$$\mathbf{0}=(A^2+A+I)\boldsymbol{x}=(\lambda^2+\lambda+1)\boldsymbol{x}$$
故 $\lambda^2+\lambda+1=0$. 但此方程没有实数根，矛盾.

9. 选 (d)

   (a) A^{T} 和 A 有相同的特征值，因为两者有相同的特征多项式. 但是不一定有相同的特征向量，反例如：取 $A=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ 是它的特征向量，但不是 A^{T} 的特征向量.

   (b) 错误. 反例如：取 $A=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$, A 和 A^{T} 的特征值都是 0，但是 $A+A^{\mathrm{T}}$ 的特征值是 ± 1. 后者的反例如：取 $A=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$, A 和 A^{T} 的特征值都是 1，但是 $AA^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}2&1\\1&1\end{bmatrix}$ 的特征值是 $\dfrac{3\pm 5}{2}$.

   (c) 错误 反例可取 A 同 (b) 选项，B 同 (b) 选项中 A^{T}

习题 9. 设 $A=\begin{bmatrix}a&0&b\\0&1&0\\b&0&a\end{bmatrix}$，存在正交矩阵 Q 使得 $Q^{\mathrm{T}}AQ=\begin{bmatrix}c&0&0\\0&2&0\\0&0&5\end{bmatrix}$

答案 法一. 因为 Q 是正交矩阵，所以 $Q^{\mathrm{T}}=Q^{-1}$，那么 $B=Q^{\mathrm{T}}AQ$ 和 A 是相似的，从而两者有相同的特征多项式. B 是对角矩阵，其特征多项式为

$$(\lambda-c)(\lambda-2)(\lambda-5)=\lambda^3-(7+c)\lambda^2+(10+7c)\lambda-10c,$$

而 A 的的特征多项式为

$$\begin{vmatrix}\lambda-a&0&-b\\0&\lambda-1&0\\-b&0&\lambda-a\end{vmatrix}=(\lambda-1)((\lambda-a)^2-b^2)=\lambda^3-(1+2a)\lambda^2+(a^2-b^2+2a)\lambda-(a^2-b^2)$$

比较系数得

$$\begin{cases}7+c&=1+2a\\10+7c&=a^2-b^2+2a\\10c&=a^2-b^2\end{cases}$$

解得 $c=1,a=\frac{7}{2}$.

法二. 注意到 1 是 A 的特征值，那么它也是 $Q^{\mathrm{T}}AQ$ 的特征值，而 $Q^{\mathrm{T}}AQ$ 的特征值是 $c,2,5$，因此必有 $c=1$. 再比较迹，则有 $1+2a=7+c$，故 $a=\frac{7}{2}$.

习题 10. 设 $A=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 是秩 1 矩阵，其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是 n 维非零列向量，求 A 的特征值和特征向量.

答案 设 λ 是 A 的特征值，$\boldsymbol{x}$ 是属于 λ 的特征向量：$A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$，将 $A=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 代入，得：

$$\left(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\right)\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{x}.$$

- 若 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0$，那么 $\lambda\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，因此 $\lambda=0$. 也就是说，所有和 $\boldsymbol{\beta}$ 正交的非零向量都是属于特征值 $\lambda=0$ 的特征向量是.

  反之，若 $\boldsymbol{x}$ 是属于特征值 $\lambda=0$ 的特征向量，那么 $\left(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\right)\boldsymbol{\alpha}=0$，而 $\alpha\neq\mathbf{0}$，所以 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0$，即 $\boldsymbol{x}$ 和 β 正交.

- 若 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \neq 0$，则等号左边是 α 的非零常数倍，从而是非零向量，因此 $\lambda \neq 0$，且 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}$ 只相差非零常数倍，因此我们不妨取 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\alpha}$，此时 $\lambda = \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\alpha \neq 0$.

  反之，如果 $\lambda = \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\alpha \neq 0$，那么直接验证可知 α 是属于特征值 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\alpha$ 的特征向量.

综上所述，

1. 0 是 A 的特征值，A 的属于特征值 0 的特征向量是和 β 正交的全体向量.
2. 如果 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\alpha \neq 0$，则它也是 A 的特征值，α 的非零常数倍即属于该特征值的全体特征向量.