本次习题课的主要内容是关于 Riemann 积分. 具体有四项内容:

一. 利用 Riemann 积分计算某些数列极限

二. 积分估值

三. 积分不等式与零点问题

四. 积分与极限

一. 利用 Riemann 积分计算某些数列极限

题 1. 求极限

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}\frac{k}{n}}.$$

解:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}\frac{k}{n}}=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}\frac{k}{n}}\cdot\frac{\pi}{4n}\to\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^2 x}=\frac{4}{\pi}\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{4}{\pi}.$$

解答完毕.

题 2. 求极限

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{1}{n+\frac{k}{n}}.$$

解: 虽然

$$J_n=\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{1}{n+\frac{k}{n}}$$

不是某个函数的 Riemann 和, 但它可以介于两个 Riemann 和之间, 即

$$\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{\pi}\cdot\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{\pi}{n}<J_n<\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{\pi}{n}.$$

注意上述不等式的两端, 当 $n \to +\infty$ 时, 有相同的极限

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin x dx = \frac{2}{\pi}.$$

因此所求极限为

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n \sin\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{1}{n+\frac{k}{n}} = \frac{2}{\pi}.$$

解答完毕.

题 3. 设 $p>0$, 求极限

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}.$$

解: 我们将

$$\frac{1+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$$

写作如下形式

$$\frac{1+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\left(\frac{k}{n}\right)^p.$$

上式右边可看作是函数 x^p 在区间 $[0,1]$ 上的一个 Riemann 和. 因此

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}} = \int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1}.$$

解答完毕.

二．积分估值

题 3. 试比较如下两个积分值的大小

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\sin x)dx \quad \text{和} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\sin x)dx.$$

解: 当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时, $\sin x < x$ 且 $\sin x$ 严格单调增, 故 $\sin(\sin x) < \sin x$, $\forall x\in(0,\frac{\pi}{2})$. 因此 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\sin x)dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx = 1$. 另一方面 $\cos x$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上严格单调下降, 故

$\cos(\sin x) > \cos x$, $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$. 因此 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\sin x)dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 1$. 由此可知

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\sin x)dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\sin x)dx.$$

解答完毕.

题 4. 估计积分 $\int_0^2 e^{x^2-2x}dx$ 的值.

<u>解</u>: 经过简单计算可知

$$\max_{0\le x\le 2}\{x^2-2x\} = 0, \quad \min_{0\le x\le 2}\{x^2-2x\} = -1.$$

于是 $e^{-1} \le e^{x^2-2x} \le 1$. 因此

$$\frac{2}{e} = \int_0^2 e^{-1}dx \le \int_0^2 e^{x^2-2x}dx \le \int_0^2 e^0 dx = 2.$$

这当然是一个比较粗糙的估计. 解答完毕.

题 5. 试比较以下三个积分值的大小

$$\int_{-1}^1 x\ln^2(\sqrt{1+x^2}+x)dx, \quad \int_{-1}^1 \frac{x^3+|x|}{\sqrt{1+x^2}}dx, \quad \int_{-1}^1 \frac{\sqrt[3]{x}-1}{(1+x^2)^2}dx. \tag{1}$$

<u>解</u>: 注意

$$(\sqrt{1+x^2}+x)(\sqrt{1+x^2}-x) = 1,$$

故

$$\ln^2(\sqrt{1+x^2}+x) = \ln^2(\sqrt{1+x^2}-x),$$

即函数 $\ln^2(\sqrt{1+x^2}+x)$ 是偶函数. 由此可见式(1)中的第一个积分中的被积函数为奇函数. 所以其积分值为零, 即

$$\int_{-1}^1 x\ln^2(\sqrt{1+x^2}+x)dx = 0.$$

注意另外两个积分的被积函数均可表为一个偶函数和一个奇函数之和. 因此

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^3+|x|}{\sqrt{1+x^2}}dx = 2\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = 2\sqrt{1+x^2}\Big|_0^1 = 2(\sqrt{2}-1) > 0,$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{(1+x^2)^2}dx = -2\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2} < 0.$$

故

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{(1+x^2)^2}dx < 0 = \int_{-1}^{1} x\ln^2(\sqrt{1+x^2}+x)dx < \int_{-1}^{1} \frac{x^3+|x|}{\sqrt{1+x^2}}dx.$$

解答完毕.

三．积分不等式与零点问题

题 6．设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 且恒正即 $f(x)>0, \forall x\in[a,b]$. 证明函数

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + \int_b^x \frac{dt}{f(t)}$$

在 $[a,b]$ 上有且仅有一个零点. (注: 这是课本第146页习题5.3题9(3))

<u>证明</u>: 由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且恒大于零, 故函数 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且可导且

$$F'(x) = \frac{1}{f(x)} + f(x) > 0, \quad \forall x\in[a,b].$$

这表明 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调增. 又由于

$$F(a) = \int_b^a \frac{dt}{f(t)} < 0, \quad F(b) = \int_a^b f(t)dt > 0.$$

根据连续函数的介值定理可知, 函数 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上有且仅有一个零点. 解答完毕.

题 7.(课本第188页第五章总复习题第17题) 已知函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且单调上升. 证明

$$\int_a^b xf(x)dx \ge \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx.$$

证明: 记 $c=\frac{a+b}{2}$. 由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调上升, 故有

$$(x-c)(f(x)-f(c))\geq 0 \quad \text{或} \quad (x-c)f(x)\geq (x-c)f(c), \quad \forall x\in[a,b]$$

对上述不等式在区间 $[a,b]$ 上积分得

$$\int_a^b (x-c)f(x)dx\geq f(c)\int_a^b (x-c)dx=0.$$

由此立刻得到

$$\int_a^b xf(x)dx\geq c\int_a^b f(x)dx.$$

命题得证. 证毕.

另证: 令

$$F(y)=\int_a^y xf(x)dx-\frac{a+y}{2}\int_a^y f(x)dx, \quad \forall y\in[a,b].$$

对上式求导得

$$F'(y)=yf(y)-\frac{1}{2}\int_a^y f(x)dx-\frac{a+y}{2}f(y)=\frac{y-a}{2}f(y)-\frac{1}{2}\int_a^y f(x)dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_a^y [f(y)-f(x)]dx\geq 0.$$

因此函数 $F(y)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调上升. 于是 $F(b)\geq F(a)$. 此即

$$\int_a^b xf(x)dx\geq \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx.$$

证毕.

题 8.(课本第188页第五章总复习题第18题) 设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续且 $\int_0^\pi f(x)\sin x dx=0$ 和 $\int_0^\pi f(x)\cos x dx=0$. 证明函数 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上至少有两个零点.

证明: 反证. 假设所证命题不成立, 则函数 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上, 或者 (i) 无零点, 或者 (ii) 有且仅有一个零点且 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 不变号; 或 (iii) 有且仅有一个零点, 且在 $[0,\pi]$ 上变号. 对于情形 (i) 和 (ii), 由于 $f(x)$ 和 $\sin x$ 在 $[0,\pi]$ 上不变号, 并且它们的乘积不恒为零,

此与假设 $\int_0^\pi f(x)\sin x dx = 0$ 矛盾. 以下考虑情形 (iii). 假设 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上有且仅有一个零点 $x_0 \in (0,\pi)$, 且 $f(x)$ 在 x_0 的两侧反号. 于是 $f(x)\sin(x-x_0)$ 在 $[0,\pi]$ 不变号. 因此 $\int_0^\pi f(x)\sin(x-x_0)dx \neq 0$. 另一方面

$$\int_0^\pi f(x)\sin(x-x_0)dx = \int_0^\pi f(x)(\sin x\cos x_0 - \cos x\sin x_0)dx$$

$$= \cos x_0 \int_0^\pi f(x)\sin x dx - \sin x_0 \int_0^\pi f(x)\cos x dx = 0$$

矛盾. 证毕.

题 9. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可微. 证明

$$\max_{a\le x\le b}\{|f(x)|\} \le \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| + \int_a^b |f'(x)|dx.$$

证: 由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 故 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上可取得最值, 即存在 $\xi,\eta \in [a,b]$, 使得

$$|f(\xi)| = \max_{a\le x\le b}\{|f(x)|\}, \quad |f(\eta)| = \min_{a\le x\le b}\{|f(x)|\}.$$

于是

$$\max_{a\le x\le b}\{|f(x)|\} - \min_{a\le x\le b}\{|f(x)|\} = |f(\xi)| - |f(\eta)| \le |f(\xi) - f(\eta)|$$
$$= \left|\int_\eta^\xi f'(x)dx\right| \le \int_a^b |f'(x)|dx.$$

另一方面由积分中值定理可知存在 $x_0 \in [a,b]$, 使得

$$f(x_0) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

于是

$$|f(\eta)| = \min_{a\le x\le b}\{|f(x)|\} \le |f(x_0)| = \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|.$$

因此

$$\max_{a\le x\le b}\{|f(x)|\} = |f(\xi)| - |f(\eta)| + |f(\eta)| \le \int_a^b |f'(x)|dx + \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|.$$

命题得证. 证毕.

题 10. (Hadamard 不等式) 设函数 $f(x)$ 于 $[a,b]$ 可导且下凸. 证明

$$f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a). \tag{2}$$

注: 一个类似的结论见课本第141页习题5.2第10题.

<u>证明</u>: 根据函数 $f(x)$ 下凸的假设有

$$f\Big(tb+(1-t)a\Big) \leq tf(b)+(1-t)f(a), \forall t\in[0,1].$$

于是对积分 $\int_a^b f(x)dx$ 作变量替换 $x=tb+(1-t)a$ 得

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\int_0^1 f(tb+(1-t)a)dt \leq (b-a)\int_0^1 \Big(tf(b)+(1-t)f(a)\Big)dt$$

$$= (b-a)\left(f(b)\int_0^1 tdt + f(a)\int_0^1 (1-t)dt\right) = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a).$$

即式 (2) 的第二个不等式成立. 回忆下凸函数的一个性质： 下凸函数的图像位于其任意点切线的上方. (见第七次习题课的讨论题2). 因此图像位于区间中点处切线的上方, 即

$$f(x) \geq f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) + f'\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\Big(x-\frac{a+b}{2}\Big), \quad x\in[a,b].$$

于是

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)dx + f'\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\int_a^b (x-\frac{a+b}{2})dx = (b-a)f\Big(\frac{a+b}{2}\Big).$$

我们得到式 (2) 中的第一个不等式. 至此不等式 (2) 得证.

注: (i) 对于上凸函数, 我们有相应不等式, 即将不等式 (2) 的不等号反向即可. (ii) 假设条件函数 $f(x)$ 于 $[a,b]$ 的可微性可以去掉. 实际上下凸函数(不必可导)有如下性质： 若函数 $f(x)$ 于 $[a,b]$ 下凸, 则对任意点 $x_0\in[a,b]$, 存在数 $k(x_0)$, 使得

$$f(x) \geq f(x_0) + k(x_0)(x-x_0), \quad \forall x\in[a,b].$$

直线 $y = f(x_0) + k(x_0)(x - x_0)$ 称作下凸函数 $f(x_0)$ 在点 x_0 处的支撑线。 证毕.

四. 积分与极限

注: 考虑极限问题 $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx$. 当极限 $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ 对每个 $x \in [a, b]$ 都存在, 且极限函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 我们自然期待

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \Big[\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\Big]dx = \int_a^b f(x)dx. \tag{3}$$

但上述等式并不总是成立. 也就是说, 存在闭区间 $[a, b]$ 上连续函数列 $f_n(x)$ 收敛于某个可积函数 $f(x)$, 使得 (3) 不成立. 例如, 函数列 $f_n(x) = 2n^2xe^{-n^2x^2}$ 在 $[0, 1]$ 上收敛于 $f(x) \equiv 0$, 但

$$\int_0^1 f_n(x)dx = 1 - e^{-n^2} \to 1 \neq 0 = \int_0^1 f(x)dx.$$

等式 (3) 成立的一个充分条件涉及函数的一致收敛性. 这表明对于函数列 $f_n(x)$ 作积分运算和极限运算的先后次序不同, 所得的结果可能不同. 下个学期我们将给出一致收敛性定义, 并仔细研究这个问题. 以下我们考虑极限 $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx$ 的两个例子.

题 11. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续. 证明

$$\lim_{n\to+\infty} (n + 1) \int_0^1 x^n f(x)dx = f(1). \tag{4}$$

证: 注意我们可以将 $f(1)$ 表示为 $f(1) = (n + 1) \int_0^1 x^n f(1)dx$. 于是要证等式 (4) 即要证

$$\lim_{n\to+\infty} (n + 1) \int_0^1 x^n [f(x) - f(1)]dx = 0.$$

根据函数 $f(x)$ 的连续性知 $f(x)$ 有界, 即存在正数 $M > 0$, 使得 $|f(x)| \leq M, \forall x \in [0, 1]$. 再根据函数 $f(x)$ 在点 $x = 1$ 处的左连续性可知, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得 $|f(x) - f(1)| < \varepsilon, \forall x \in (1 - \delta, 1]$. 于是

$$\left|(n + 1) \int_0^1 x^n [f(x)dx - f(1)]dx\right| \leq (n + 1) \left|\int_0^1 x^n |f(x) - f(1)|dx\right|$$

$$\leq (n+1)\int_0^{1-\delta} x^n|f(x)-f(1)|dx + (n+1)\int_{1-\delta}^1 x^n|f(x)-f(1)|dx$$
$$\leq 2M(n+1)\int_0^{1-\delta} x^n dx + (n+1)\int_{1-\delta}^1 x^n|f(x)-f(1)|dx$$
$$\leq 2M(1-\delta)^{n-1} + \varepsilon\Big[1-(1-\delta)^{n+1}\Big] \leq 2M(1-\delta)^{n+1} + \varepsilon.$$

由 $\lim_{n\to+\infty}(1-\delta)^{n+1}=0$ 可知, 对于上述给定的 $\varepsilon>0$, 存在正整数 $N>0$， 使得当 $n\geq N$ 时, $2M(1-\delta)^{n+1}<\varepsilon$. 于是我们就证明了对于任意 $\varepsilon>0$, 存在正整数 N, 使得当 $n\geq N$ 时,

$$\left|(n+1)\int_0^1 x^n[f(x)-f(1)]dx\right| \leq 2\varepsilon.$$

此即

$$\lim_{n\to+\infty}(n+1)\int_0^1 x^n[f(x)dx-f(1)]=0.$$

亦即

$$\lim_{n\to+\infty}(n+1)\int_0^1 x^n f(x)dx = f(1).$$

证毕.

注: 类似可证, 若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 则

$$\lim_{h\to 0}\int_0^1 \frac{h}{h^2+x^2}f(x)dx = \frac{f(0)\pi}{2}.$$

题 12. (课本第141页习题5.2第7题) 证明

(i) $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{x^n dx}{1+x}=0$;

(ii) $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}=1$;

(iii) $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \sin^n x dx=0$.

证明: (i) 对积分 $\int_0^1 \frac{x^n dx}{1+x}=0$ 利用积分中值定理得

$$\int_0^1 \frac{x^n dx}{1+x} = \frac{1}{1+\xi_n}\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{1+\xi_n}\frac{1}{1+n} \leq \frac{1}{1+n} \to 0, \quad n\to+\infty,$$

其中 $\xi_n\in[0,1]$. 由此可知极限 (i) 成立.

(ii) 由于

$$1=\frac{1+x^n}{1+x^n}=\frac{1}{1+x^n}+\frac{x^n}{1+x^n}$$

故

$$1=\int_0^1\frac{dx}{1+x^n}+\int_0^1\frac{x^n dx}{1+x^n}$$

因此极限 $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{dx}{1+x^n}=1$, 当且仅当

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{x^n dx}{1+x^n}=0.$$

由于

$$0<\int_0^1\frac{x^n dx}{1+x^n}<\int_0^1 x^n dx=\frac{1}{1+n}\to 0,\quad n\to+\infty.$$

由此可见积分 (ii) 成立.

(iii) 要证极限(iii), 即要证对于 $\varepsilon>0$, 存在正整数 $N>0$, 使得

$$0<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx<\varepsilon,\quad \forall n\geq N.$$

由于 $\sin^n(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)\to 0$, $n\to+\infty$, 故存在正整数 $N=N_\varepsilon$, 使得 $\sin^n(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)<\varepsilon, \forall n\geq N$. 于是对任意 $\varepsilon>0$, 存在正整数 $N=N_\varepsilon$, 使得对任意正整数 $n\geq N$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\sin^n x dx+\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx$$

$$\leq\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\sin^n(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)dx+\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}dx\leq\varepsilon(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)+\varepsilon\leq 3\varepsilon.$$

这就证明了极限 (iii). 证毕.