本次习题课讨论题涉及 ODE 理论中的一些最基本的知识. 具体有以下五个方面的内容:

一. 变量分离型方程
二. 一阶线性方程
三. 高阶线性常系数方程
四. 解的定性分析
五. 一阶方程的应用

一. 变量分离型方程

题 1. 求方程 $y' = 1 + x + y^2 + xy^2$ 的通解.

解: 所给方程为可分离变量型方程. 先将方程写成变量分离形式

$$\frac{dy}{1+y^2} = (1+x)dx.$$

再对上式两端积分得方程的通解 $\arctan y = x + \frac{1}{2}x^2 + C$ 或 $y = \tan(x + \frac{1}{2}x^2 + C)$. 其中 C 为任意常数. 解答完毕.

题 2. 求 Cauchy 问题

$$y' + \frac{2xy}{x^2+4} = 0, \quad y(0) = 1$$

的解.

解: 上述方程既是变量分型方程, 也是一阶线性方程. 这两类方程都可以求出显式解. 以下按变量分离型方程求解. 将所给的分离变量型方程写作

$$\frac{dy}{y} = -\frac{2x}{x^2+4}$$

上式两端积分得 $\ln|y| = -\ln(x^2+4)+C$, 或 $y = \frac{C_1}{x^2+4}$, 其中 $C_1 = \pm e^C$. 再根据初值条件 $y(0)=1$ 可得 $C_1 = 4$. 于是所求 Cauchy 问题的解为

$$y = \frac{4}{x^2+4}$$

解答完毕.

题 3. 求方程 $xy' = \sqrt{x^2-y^2}+y$ 的通解, 其中 $x>0$.

解: 当 $x>0$ 时, 原方程写作

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x^2-y^2}}{x} + \frac{y}{x}.$$

这是齐次方程, 可化为变量分离型方程, 从而得到显式解. 作标准变量代换 $y = ux$ 得新方程为 $u + xu' = \sqrt{1-u^2}+u$, 或 $xu' = \sqrt{1-u^2}$. 新的方程为变量分离型方程. 先分离变量

$$\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{dx}{x},$$

然后两边积分即得通解 $\arcsin u = \ln x + C$, 或写作 $u = \sin(\ln x + C)$. 再将 $u = \frac{y}{x}$ 代入即得原方程的通解为 $y = x\sin(\ln x + C)$. 解答完毕.

二．一阶线性方程

题 4. 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续且 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. 证明一阶线性方程 $y'+y=f(x)$ 的每个解 $y(x)$ 都满足 $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$.

证: 根据一阶线性方程的通解公式知, 方程的每个解 $y(x)$ 可表示为

$$y(x) = \frac{y(0)}{e^x} + \frac{\int_0^x f(s)e^s ds}{e^x}.$$

取极限并利用 L'Hospital 法则得

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{y(0)}{e^x} + \lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(s)e^s ds}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)e^x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

证毕.

题 5. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上连续, 并且满足 $f(x)\int_0^x f(s)ds = 1, \forall x > 0$. 求 $f(x)$.

解: 由等式 $f(x)\int_0^x f(s)ds = 1$ 可知 $f(x)$ 处处非零, 恒正或恒负. 由此得

$$\int_0^x f(s)ds = \frac{1}{f(x)}, \quad \forall x > 0. \qquad (*)$$

由上式可知函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续可微. 对式 (*) 两边关于 x 求导可知 $f(x)$ 满足微分方程

$$y = \left(\frac{1}{y}\right)' = -\frac{y'}{y^2}.$$

这是变量分离型方程. 分离变量得

$$-\frac{dy}{y^3} = dx.$$

积分得

$$\frac{1}{2y^2} = x + c \quad \text{或} \quad y^2 = \frac{1}{2x + c_1}.$$

故所求函数 $f(x)$ 具有形式

$$f(x) = \pm\frac{1}{\sqrt{2x + c_1}}.$$

解答完毕.

题 6. 设 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, 且满足积分方程

$$f(x) = \sin x + \int_0^x e^t f(x-t)dt. \qquad (*)$$

求 $f(x)$.

解: 由于 $f(x)$ 连续, 并且满足上述积分方程 (*). 由此可知 $f(x)$ 连续可微. 为了对方程 (*) 求导方便, 我们对方程 (*) 中的积分作变量替换 $u = x - t$ 即得

$$\int_0^x e^t f(x-t)dt = e^x \int_0^x e^{-u} f(u)du.$$

因此 $f(x)$ 满足方程

$$f(x) = \sin x + e^x \int_0^x e^{-u} f(u) du, \qquad f(0) = 0.$$

上述方程可写作

$$e^{-x} f(x) = e^{-x} \sin x + \int_0^x e^{-u} f(u) du, \qquad f(0) = 0.$$

记 $F(x) = \int_0^x e^{-u} f(u) du$, 则 $F(x)$ 满足

$$F'(x) = F(x) + e^{-x} \sin x, \quad F(0) = 0.$$

这是一阶线性方程的 Cauchy 问题. 根据求解公式(也可用常数变易法求解)得

$$F(x) = e^x \int_0^x e^{-2t} \sin t dt = \frac{e^x}{5} \left(1 - e^{-2x} \cos x - 2e^{-2x} \sin x\right)$$

$$= \frac{1}{5} \left(e^x - e^{-x} \cos x - 2e^{-x} \sin x\right).$$

由此得

$$e^{-x} f(x) = \left(\int_0^x e^{-s} f(s) ds\right)' = F'(x) = \frac{1}{5} \left(e^x - e^{-x} \cos x - 2e^{-x} \sin x\right)'$$

$$= \frac{1}{5} \left(e^x - e^{-x} \cos x + 3e^{-x} \sin x\right).$$

进一步得

$$f(x) = \frac{1}{5} \left(e^{2x} - \cos x + 3 \sin x\right).$$

解答完毕.

题 7*. 证明一阶线性方程 $xy' - (2x^2 + 1)y = x^2$ $(x > 0)$ 有且仅有一个解 $y^*(x)$, 使得极限 $\lim_{x \to +\infty} y^*(x)$ 存在(有限). 进一步写出解 $y^*(x)$ 的表达式, 并求这个极限.

解: 将方程 $xy' - (2x^2 + 1)y = x^2$ $(x > 0)$ 写成标准形式 $y' = a(x)y + b(x)$, 其中 $a(x) = 2x + \frac{1}{x}$, $b(x) = x$. 回忆一阶线性方程的通解公式

$$y(x) = e^{\int_{x_0}^x a(s)ds}\left(y_1 + \int_{x_0}^x b(s)e^{-\int_{x_0}^s a(t)dt}ds\right)$$

注意初始点 x_0 可以在 $(0,+\infty)$ 中里任意选取. 为了方便我们取 $x_0 = 1$. 经简单计算

$$\int_1^x a(s)ds = \int_1^x \left(2s + \frac{1}{s}\right)ds = x^2 - 1 + \ln x, \quad e^{\int_1^x a(s)ds} = xe^{x^2-1},$$

$$\int_1^x b(s)e^{\int_1^s a(t)dt}ds = \int_1^x \frac{s}{se^{s^2-1}}ds = \int_1^x e^{1-s^2}ds.$$

记方程满足初始条件 $y(1) = y_1$ 的解为 $\phi(x, y_1)$, 则根据上述求解公式得

$$\phi(x, y_1) = xe^{x^2-1}\left(y_1 + \int_1^x e^{1-s^2}ds\right) = xe^{x^2}\left(y_1e^{-1} + \int_1^x e^{-s^2}ds\right).$$

当 y_1 从 $-\infty$ 变到 $+\infty$ 时, 解 $\phi(x, y_1)$ 囊括了方程的所有解. 易见极限 $\lim_{x\to+\infty}\phi(x, y_1)$ 存在(有限)的一个必要条件是

$$\lim_{x\to+\infty}\left(y_1e^{-1} + \int_1^x e^{-s^2}ds\right) = 0,$$

因为 $\lim_{x\to+\infty} xe^{x^2} = +\infty$. 因此只有当初值

$$y_1 = y_1^* \stackrel{\text{def}}{=} -e\int_1^{+\infty} e^{-s^2}ds$$

时, 极限 $\lim_{x\to+\infty}\phi(x, y_1)$ 才可能存在. 解 $\phi(x, y_1^*)$ 是唯一可能的解. 以下我们考虑极限 $\lim_{x\to+\infty}\phi(x, y_1^*)$. 为方便我们将解 $\phi(x, y_1^*)$ 写作

$$\phi(x, y_1^*) = xe^{x^2}\left(-\int_1^{+\infty} e^{-s^2}ds + \int_1^x e^{-s^2}ds\right)$$

$$= -xe^{x^2}\int_x^{+\infty} e^{-s^2}ds = \frac{-\int_x^{+\infty} e^{-s^2}ds}{\frac{1}{xe^{x^2}}}$$

由此可见, 极限 $\lim_{x\to+\infty}\phi(x, y_1^*)$ 是 $\frac{0}{0}$ 型极限. 考虑使用 L'Hospital 法则求这个极限:

$$\frac{\left(-\int_x^{+\infty} e^{-s^2}ds\right)'}{\left(\frac{1}{xe^{x^2}}\right)'} = \frac{e^{-x^2}}{-\frac{e^{-x^2}}{x^2} + \frac{e^{-x^2}}{x}(-2x)} = -\frac{x^2}{1+2x^2} \to -\frac{1}{2}.$$

因此

$$\lim_{x\to+\infty}\phi(x,y_1^*)=-\frac{1}{2}.$$

综上所求的解为

$$y^*(x)=\phi(x,y_1^*)=-xe^{x^2}\int_x^{+\infty}e^{-s^2}ds.$$

这是唯一使得极限 $\lim_{x\to+\infty}y(x)$ 存在的解, 其极限为 $-\frac{1}{2}$. 解答完毕.

三. 高阶线性常系数方程

题 8. 求方程 $y''-4y'+4y=3e^{2x}$ 的通解.

解: 对应的齐次方程的特征方程为 $\lambda^2-4\lambda+4=0$, 特征值为 $\lambda=2$, 二重. 于是对应的齐次方程通解为 $y=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}$, 其中 c_1,c_2 为任意常数. 根据一般理论可知, 方程 $y''-4y'+4y=3e^{2x}$ 有形如 $y_p=Ax^2e^{2x}$ 的特解. 为确定系数 A, 我们将特解 $y_p=Ax^2e^{2x}$ 代入方程 $y''-4y'+4y=3e^{2x}$. 先求导

$$y_p'=(Ax^2e^{2x})'=2A(x+x^2)e^{2x},\qquad y_p''=(Ax^2e^{2x})'=2A(1+4x+2x^2)e^{2x}$$

代入方程得

$$2A(1+4x+2x^2)e^{2x}-4\cdot 2A(x+x^2)e^{2x}+4Ax^2e^{2x}=3e^{2x}$$

化简得 $2Ae^{2x}=3e^{2x}$. 解得 $A=\frac{3}{2}$. 由此得所求通解为

$$y=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}+\frac{3}{2}x^2e^{2x}.$$

解答完毕.

题 9. 求方程 $y''+3y'+2y=3\sin x$ 的通解.

解: 对应的特征方程为 $\lambda^2+3\lambda+2=0$, 两个特征值为 $\lambda_1=-2$, $\lambda_1=-1$. 于是对应的齐次方程通解为 $y=c_1e^{-2x}+c_2e^{-x}$, 其中 c_1,c_2 为任意常数. 由线性方程的一般理论知, 方

程 $y''+3y'+2y=3\sin x$ 有形如 $y_p=A\sin x+B\cos x$ 的特解. 将解 y_p 代入方程得

$$(-A\sin x-B\cos x)+3(A\cos x-B\sin x)+2(A\sin x+B\cos x)=3\sin x.$$

稍加整理得

$$(A-3B)\sin x+(3A+B)\cos x=3\sin x.$$

比较函数 $\cos x$ 和 $\sin x$ 的系数得 $A-3B=3, 3A+B=0$. 解之得 $A=\frac{3}{10}, B=-\frac{9}{10}$. 于是我们得到一个特解 $y_p=\frac{3}{10}\sin x-\frac{9}{10}\cos x$. 由此得题给方程的通解为

$$y=c_1e^{-2x}+c_2e^{-x}+\frac{3}{10}\sin x-\frac{9}{10}\cos x,$$

其中 c_1, c_2 为任意常数. 解答完毕.

题 10. 求方程 $x''-4x'+4x=1+e^t+e^{2t}$ 的通解.

解: 特征方程为 $\lambda^2-4\lambda+4=0$. 对应特征值为 $\lambda=2$, 二重. 因此对应的齐次方程有基本解组 e^{2t} 和 te^{2t}. 为求非齐次方程的特解, 我们将原方程分解成三个方程

$$x''-4x'+4x=1, \tag{1}$$

$$x''-4x'+4x=e^t, \tag{2}$$

$$x''-4x'+4x=e^{2t}, \tag{3}$$

对于方程 (1), 因为 $\lambda=0$ 不是特征根, 故方程 (1) 有形如 $x_1=A$ (常数解) 的特解. 将 $x_1=A$ 代入方程 (1) 得 $x_1=A=\frac{1}{4}$.

对于方程 (2), 因为 $\lambda=1$ 不是特征根, 故方程 2 有形如 $x_2=Be^t$ 的特解. 将其代入方程 (2) 得 $B=1$, 从而特解 $x_2=e^t$.

对于方程 (3), $\lambda=2$ 二重特征根, 故方程 3 有形如 $x_3=Ct^2e^{2t}$ 的特解. 将其代入方程 (3) 得 $C=\frac{1}{2}$, 从而方程 3 有特解 $x_3=\frac{1}{2}e^{2t}$.

因此原方程 $x''-4x'+4x=1+e^t+e^{2t}$ 有特解 $x_p=x_1+x_2+x_3=x_2=\frac{1}{4}+e^t+\frac{1}{2}e^{2t}$, 故其通解为

$$x=c_1e^{2t}+c_2e^t+x_p,$$

其中 c_1, c_2 为任意常数. 解答完毕.

题 11. 确定一个二阶线性齐次常系数 ODE, 使得它有通解 $y = c_1e^x + c_2xe^x$, 其中 c_1, c_2 为任意常数.

解: 依题意所求 ODE 有基本解组 e^x 和 xe^x. 根据一般理论, 所求 ODE 有二重特征值 $\lambda = 1$, 也就是说所求方程的的特征多项式为 $\lambda^2 - 2\lambda + 1$. 由此立刻得到所求方程为 $y'' - 2y' + y = 0$. 解答完毕.

题 12. 设一个二阶线性齐次常系数 ODE 的基本解组为 $1, x$, 求其满足初始条件 $y(1) = 1$ 和 $y'(1) = 2$ 的特解.

解: 由于已知基本解组 $1, x$, 我们得到 ODE 的通解为 $y = c_1 + c_2x$. 代入初始条件 $y(1) = 1$ 和 $y'(1) = 2$ 得 $c_1 + c_2 = 1$, $y'(1) = c_2 = 2$. 故 $c_1 = -1$. 故所求特解为 $y = 2x - 1$. 解答完毕.

四. 解的定性分析

题 13. 设 $y(x)$ 是 Cauchy 问题 $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 0$ 的解, 其定义区间为 (α, β), $\alpha < 0 < \beta$. 研究解 $y(x)$ 的增减性, 凸性, 拐点, 和奇偶性.

解: (i) 单调性. 由于 $y'(x) = x^2 + y^2(x) \geq 0$, 故解 $y(x)$ 是严格单调增的.
(ii) 凸性. 对方程 $y'(x) = x^2 + y^2(x)$ 求导得

$$y''(x) = 2x + 2yy' = 2x + 2y(x^2 + y^2).$$

当 $x > 0$ 时, 二阶导数 $y''(x) > 0$, 故解 $y(x)$ 严格下凸;
当 $x < 0$ 时, 由于 $y(x) < y(0) = 0$, 故 $y''(x) < 0$. 因此解 $y(x)$ 在 $(\alpha, 0)$ 严格上凸.
(iii) 根据 (ii) 的结论知, $(x, y) = (0, 0)$ 是拐点.

(iv) 奇偶性. 令 $z(x)=-y(-x)$, 则 $z(0)=y(0)=0$, 并且

$$z'(x)=-y'(-x)(-1)=(-x)^2+y^2(-x)=x^2+z^2(x),\quad \forall x\in(\alpha,\beta).$$

这表明 $z(x)$ 也是 Cauchy 问题 $y'=x^2+y^2$, $y(0)=0$ 的解, 由初值问题解的存在唯一性定理可得 $z(x)=y(x)$, 即 $-y(-x)=y(x)$. 这表明解 $y(x)$ 是奇函数 $y(-x)=-y(x)$. 因此解的最大存在区间应是对称区间 $(-\beta,\beta)$. 解答完毕.

题 14. 设 $y(x)$ 是 Cauchy 问题 $y'=x^3+xy^2$, $y(0)=0$ 的解, 其定义区间为 (α,β), $\alpha<0<\beta$. 研究解 $y(x)$ 的增减性, 极值点, 凸性, 拐点, 和奇偶性.

解: 根据解 $y(x)$ 所满足的微分方程

$$y'(x)=x^3+xy^2(x)=x\left(x^2+y^2(x)\right),\qquad \forall x\in(\alpha,\beta).$$

及初值条件 $y(0)=0$ 可知

(i) 单调性. 当 $x>0$ 时, $y'(x)>0$. 这表明, 解 $y(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上, 严格单调上升;
当 $x<0$ 时, $y'(x)<0$. 这表明, 解 $y(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上, 严格单调下降;
(ii) 极值. 由结论 (ii) 知, 解 $y(x)$ 是非负的, 在点 $x=0$ 处在取得最小值 $y(0)=0$.
(iii) 凸性. 对恒等式

$$y'(x)=x^3+xy^2(x)=x\left(x^2+y^2(x)\right)$$

两边再次求导得

$$y''(x)=x^2+y^2(x)+x(2x+2yy')=3x^2+y^2+2x^4y+2x^2y^3\geq 0.$$

由此可见解 $y(x)$ 在其整个定义区间 (α,β) 上是下凸的. 解答完毕.

题 15. 设 $y(x)$ 是二阶方程的初值问题

$$\begin{cases} y''+3(y')^2=h(x),\\ y(0)=0,\ y'(0)=0\end{cases}$$

的解, 且在区间 $[0,\beta)$ 上存在, 其中

$$h(x)=\begin{cases}\frac{1-e^x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

证明 $y(x)\leq -\frac{1}{2}x^2, \forall x\in(0,\beta)$.

证: 记 $z(x)=-\frac{1}{2}x^2$, 则 $z(0)=z'(0)=0$. 要使 $y(x)\leq z(x), \forall x\in(0,\beta)$, 一个充分条件是 $y''(x)\leq z''(x), \forall x\in(0,\beta)$. 由于

$$y''(x)=\frac{1-e^x}{x}-3[y'(x)]^2\leq\frac{1-e^x}{x}.$$

要使 $y''(x)\leq z''(x)=-1$ 成立, 只需

$$\frac{1-e^x}{x}\leq -1, \qquad \forall x\in(0,\beta).$$

上述不等式成立, 当且仅当 $e^x\geq 1+x, \forall x>0$. 后一个不等式显然成立. 命题得证.

五. 一阶方程的应用

题 16. 求与曲线族 $\{\Gamma_a: y=ax^3, a\in\mathbb{R}\}$ 的每条曲线均垂直相交的曲线族.

解: 设曲线 $y=z(x)$ 于题目中的曲线族垂直相交, 则

$$z(x)=y(x)=ax^3 \quad 且 \quad z'(x)=\frac{-1}{y'(x)}=\frac{-1}{3ax^2}.$$

第一个方程代表曲线相交条件, 第一个方程代表曲线垂直条件. 由这两个方程消去参数 a 得 $z'=-\frac{x}{3z}$. 这是变量分离型方程. 分离变量得 $3zdz=-xdx$. 积分得 $x^2+3z^2=c$. 故所求的曲线族是一个椭圆曲线族. 解答完毕.

题 17. 假设光滑曲线 $\Gamma: y=y(x)$ 过点 $(x,y)=(1,0)$, 并且过任意曲线 Γ 上任意点 $(x,y(x))$ 处切线的斜率与 $\frac{y(x)}{x}$ 之差, 等于 ax, 其中 a 为常数.
(1) 求函数 $y(x)$;

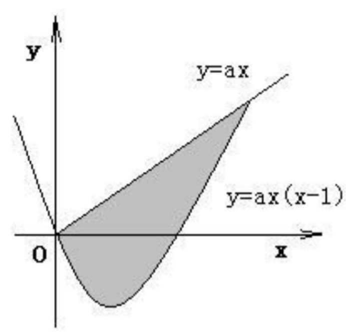
(2) 当曲线 Γ 与直线 $y=ax$ 所围成平面图形的面积为 $\frac{8}{3}$ 时, 确定 a 的值.

解: (1) 由假设可知函数 $y(x)$ 满足 $y(1)=0$, 并且 $y'(x)-\frac{y(x)}{x}$. 换言之, $y(x)$ 是如下一阶线性方程 Cauchy 问题

$$\begin{cases} y'=\frac{y}{x}+ax, \\ y(1)=0 \end{cases}$$

的解. 我们用常数变易法求解. 对应齐次方程 $y'=\frac{y}{x}$ 的通解为 $y=Cx$. 假设 $y=C(x)x$ 是方程 $y'=\frac{y}{x}+ax$ 的解, 则 $C'x+C=C+ax$, 即 $C'x=ax$ 或 $C'=a$. 解得 $C=ax+C_1$. 由此得方程 $y'=\frac{y}{x}+ax$ 的通解为 $y=ax^2+C_1x$. 再根据初值条件 $y(1)=0$ 得 $a+C_1=0$, 即 $C_1=-a$. 故所求函数 $y(x)=ax^2-ax$.

(2) 因曲线 Γ 与直线 $y=ax$ 的交点满足方程 $ax^2-ax=ax$, 即 $ax(x-2)=0$, 故得 $x=0$ 和 $x=2$. 如图所示.



于是曲线 Γ 与直线 $y=ax$ 所围成平面图形的面积为

$$\int_0^2 \Big[ax-(ax^2-ax)\Big]dx = a\int_0^2 (2x-x^2)dx = \frac{4a}{3}.$$

再由题目所给条件得 $\frac{4a}{3}=\frac{8}{3}$. 故 $a=2$. 解答完毕.

显然a=-2也是可以的。因此a=±2。