《微积分A1》第二十九讲

教师 杨利军

清华大学数学科学系

2025年12月29日

Definition

定义：(i) 形如 $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ 的方程称为一阶对称常微分方程，简称一阶对称方程．它可看作一阶方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{-P}{Q}$ 或 $\frac{dx}{dy} = \frac{-Q}{P}$．

(ii) 对于二元函数 $f(x,y)$，若固定变量 y，函数 $f(x,y)$ 作为 x 可导，其导数记作 $f_x(x,y)$ 称为 f 关于 x 的偏导数．类似地，若固定变量 x，函数 $f(x,y)$ 作为 y 可导，其导数记作 $f_y(x,y)$ 称为 f 关于 y 的偏导数；若两个两个偏导数 $f_x(x,y)$ 和 $f_x(x,y)$ 均为连续函数，则称二元函数 $f(x,y)$ 为 C^1 函数．

(iii) 对一阶方程 $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$，若存在 C^1 的二元函数 $f(x,y)$，使得 $f_x(x,y) = P(x,y)$，$f_y(x,y) = Q(x,y)$，则称方程 $Pdx + Qdy = 0$，即方程 $f_xdx + f_ydy = 0$ 为全微分方程或恰当方程 (exact equations)，函数 $f(x,y)$ 称为方程 $Pdx + Qdy = 0$ 的原函数，且称 $f(x,y) = C$ 是方程 $Pdx + Qdy = 0$ 的一般解（或称通解）．

例子

Example

例一: 考虑一阶对称方程 $xdx + ydy = 0$. 令 $f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, 则 $f_x = x$, $f_y = y$. 因此一阶对称方程 $xdx + ydy = 0$ 的一般解(通解)为 $f(x,y) = C$, 即 $x^2 + y^2 = C_1$, 其中 $C_1 = 2C > 0$ 为任意正数. 亦即方程 $xdx + ydy = 0$ 的解曲线为以原点 $(0,0)$ 为圆心的同心圆族.

Example

例二: 考虑一阶对称方程 $ydx + xdy = 0$. 令 $f(x,y) = xy$, 则 $f_x = y$, $f_y = x$. 因此一阶对称方程 $ydx + xdy = 0$ 的一般解(通解)为 $xy = C$, 即解曲线为双曲线族.

Example

<u>例三</u>: 可以证明一阶对称方程 $(3+2xy)dx+(x^2-3y^2)dy=0$ 是恰当方程. 往下我们来求方程的原函数, 即求 $f(x,y)$, 使得 $f_x=3+2xy$, $f_y=x^2-3y^2$. 对第一个方程两边关于 x 积分得 $f(x,y)=3x+x^2y+g(y)$, 其中 $g(y)$ 为待定的可微函数. 再将 $f(x,y)=3x+x^2y+g(y)$ 代入第二个方程得 $x^2+g'(y)$ $=x^2-3y^2$, 即 $g'(y)=-3y^2$. 两边积分得 $g(y)=-y^3+K$. 故 $f(x,y)=3x$ $+x^2y-y^3+K$. 因此方程 $(3+2xy)dx+(x^2-3y^2)dy=0$ 的一般解为 $3x+x^2y-y^3=C$. 解答完毕.

例一：求解方程 $xy''' - 3y'' = 2x - 3$，其中 $x > 0$.

解：记 $p = y''$，则原方程变为 $xp' - 3p = 2x - 3$. 将方程写作关于 p 的一阶线性方程形式 $p' = \frac{3}{x}p + 2 - \frac{3}{x}$. 对应齐次方程 $p' = \frac{3}{x}p$ 有通解 $p = Ce^{\int \frac{3dx}{x}} = Cx^3$. 将 $p = C(x)x^3$ 代入方程 $p' = \frac{3}{x}p + 2 - \frac{3}{x}$ 得

$$C'x^3 + 3Cx^2 = \frac{3}{x}Cx^3 + 2 - \frac{3}{x} \quad 或 \quad C'x^3 = 2 - \frac{3}{x} \quad 或 \quad C' = \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^4}.$$

积分得 $C = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + C_1$. 于是方程 $p' = \frac{3}{x}p + 2 - \frac{3}{x}$ 的通解为

$$p = (C_1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3})x^3 = C_1x^3 - x + 1.$$

此即 $p = y'' = C_1x^3 - x + 1$. 积分得 $y' = \frac{C_1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + x + C_2$. 再次积分得 $y = C_4x^5 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C_2x + C_3$，其中 $C_4 = \frac{C_1}{20}$，C_2，C_3 均为任意常数. 解答完毕.

例二: 求解 $xy'' - y' = x^2$, $x > 0$.

解: 令 $p = y'$, 则 $xp' = p + x^2$ 或 $p' = \frac{1}{x}p + x$. 这是一阶线性方程, 可用公式或常数变易法求解. 细节略.

另解: 将方程 $xy'' - y' = x^2$ 写作

$$\frac{xy'' - y'}{x^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{y'}{x}\right)' = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y'}{x} = x + C_1 \quad \Rightarrow \quad y' = x^2 + C_1 x$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{3}x^3 + C_2 x^2 + C_3,$$

其中 $C_2 = \frac{C_1}{2}$, C_3 为任意常数. 解答完毕.

考虑不显含 x 的二阶正规方程 $y'' = f(y, y')$. 记 $p = y'$, 且将 p 看作 y 的函数, 即 $p = p(y)$, 则

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p'p.$$

故二阶方程 $y'' = f(y, y')$ 降为一阶方程 $pp' = f(y, p)$. 而方程 $pp' = f(y, p)$ 的独立变量为 y, 未知函数为 $p = p(y)$. 假设 $p = p(y)$ 是方程 $pp' = f(y, p)$ 的解, 那么解方程 $y' = p(y)$ 即可得原二阶方程 $y'' = f(y, y')$ 的解.

注: 视 $p = p(y)$ 的合理性: 对于 $y'(x) \neq 0$ 的 x, 可局部反解 $x = x(y)$. 因此至少对于这样 x, $p = p(x) = p(x(y))$.

<u>例</u>: 求解 $yy'' = 2(y')^2$.

<u>解</u>: 将 $y' = p$, $y'' = p'p$ 代入方程 $yy'' = 2(y')^2$ 得 $ypp' = 2p^2$, 并视 y 为独立变量解这个方程. 令 $q = p^2$ 则 $yq' = 4q$. 解这个变量分离型方程得 $q = Cy^4$, 即 $p^2 = Cy^4$. 故 $y' = p = C_1y^2$. 以下解这个方程, 它也是变量分离型方程:

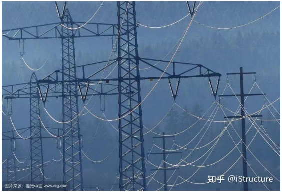
$$\frac{y'}{y^2} = C_1 \quad \Rightarrow \quad -(1/y)' = C_1$$

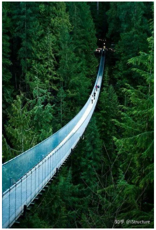
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{y} = -C_1x + C_2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{C_1'x + C_2},$$

其中 C_1', C_2 为任意常数. 显然 $y = C$, 即 y 为任意常数函数是方程的特解. 解答完毕.

悬链线(the hanging chain)

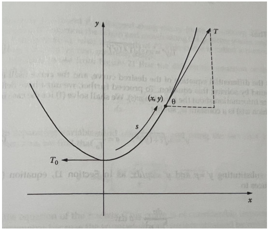
<u>问题</u>: 求一根索链的形状, 其两端固定, 可以自由弯曲的, 仅受自身重力的作用.





悬链线，续一

解：建立平面坐标系，使得 y 轴通过索链的最低点，如图所示.



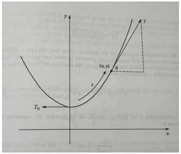
设曲线 $y = y(x)$ 代表索链的形状. 记 s 表示由最低点到动点 (x, y) 的弧长，$w(s)$ 代表索链的线密度. 我们来推导出函数 $y(x)$ (索链)所满足的微分方程.

首先我们来分析弧段 s 的受力情况. 弧段 s 受三个力的作用

1) 设在最低点处所受的拉力为 T_0，其方向为切向，即水平方向；

2) 在动点 (x, y) 处受到的拉力 T，其方向为切向；

3) 弧段自身重力，方向垂直朝下.



由于弧段s所受力在水平方向，以及垂直方向的合力为零，故

$$T\cos\theta = T_0 \quad \text{and} \quad T\sin\theta = \int_0^s w(u)du.$$

由此得

$$\int_0^s w(u)du = T\sin\theta = T_0\tan\theta = T_0\frac{dy}{dx}.$$

即 $T_0 y' = \int_0^s w(u)du$. 为了消去积分，两边关于x求导得

$$T_0 y'' = \frac{d}{dx}\int_0^s w(u)du = \left(\frac{d}{ds}\int_0^s w(u)du\right)\frac{ds}{dx} = w(s)\sqrt{1+(y')^2}.$$

这就得到了函数 $y = y(x)$ 应该满足的微分方程

$$T_0 y'' = w(s)\sqrt{1 + (y')^2}.$$

假设线密度是常数，即 $w(s) = w_0$，则方程为

$$y'' = a\sqrt{1 + (y')^2}, \quad a = \frac{w_0}{T_0},$$

即二阶方程. 它可看作关于 $p = y'$ 的一阶变量分离型方程 $p' = a\sqrt{1 + p^2}$.

分离变量得

$$\frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = a dx. \qquad (*)$$

注意到当 $s = 0$ 时，即位于最低点时，$p(0) = y'(0) = 0$. 于是在微分方程 (*) 两边，从 0 到 x 积分得

$$\int_0^p \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = a\int_0^x du \quad 得 \quad \ln\left(p + \sqrt{1 + p^2}\right) = ax.$$

根据 $\ln\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)=ax$ 可解得 $p=\frac{1}{2}(e^{ax}-e^{-ax})$，即

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}(e^{ax}-e^{-ax})=\sinh(ax).$$

由此解得

$$y(x)=\frac{1}{a}\cosh(ax)-\frac{1}{a}+y(0).$$

如果我们适当取原点，使得 $y(0)=\frac{1}{a}$，则所求函数 y 为

$$y=\frac{1}{2a}(e^{ax}+e^{-ax})=\frac{1}{a}\cosh(ax).$$

解答完毕.

二阶线性方程，注记

Definition

定义：一般二阶线性方程是指如下形式的方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$，其中 $P(x)$, $Q(x)$ 和 $R(x)$ 均假设在某个开区间上连续.

注一：熟知一阶线性方程 $y' + P(x)y = Q(x)$ 有显式通解

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int \left(Q(x)e^{\int P(x)dx}\right)dx + C\right).$$

但对于一般二阶线性方程而言，不存在这样的显式通解公式. 这是一阶线性方程与二阶以及高阶线性方程的本质区别.

注二：二阶线性常系数方程 $y'' + py' + qy = R(x)$ 有显式通解，这里 p, q 均为常数. 稍后详细讨论.

注三：处理二阶线性方程的思想和方法，原则上可以推广到处理 n 阶线性方程 $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = q(x)$.

二阶线性方程解的整体存在唯一性，例子

Theorem

定理: 考虑 $y''+P(x)y'+Q(x)y=R(x)$. 假设 $P(x)$, $Q(x)$ 和 $R(x)$ 均假设在开区间 J 上连续，则对于任意点 $x_0\in J$，以及任意 $y_0, y_1\in\mathbb{R}$，二阶线性方程的初值问题 (也称为 Cauchy 问题)

$$\begin{cases} y''+P(x)y'+Q(x)y=R(x), \\ y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_1, \end{cases}$$

存在唯一解，并且这个解的最大存在区间为开区间 J.

证明不易. 略去.

例: 考虑二阶线性方程 $y''+y=0$. 不难验证 $y_1(x)=\cos x$, $y_2(x)=\sin x$ 是方程的两个解，且满足初值条件 $y_1(0)=1$, $y_1'(0)=0$, 以及 $y_2(0)=0$, $y_2'(0)=1$.

注: 稍后我们将学习如何求出这类常系数高阶线性方程的解.

Definition

定义: 当二阶线性方程的右端函数 $R(x)$ 恒为零时, 即方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \qquad (*)_{齐}$$

称作二阶线性齐次方程 (homogeneous equation). 当 $R(x)$ 不恒为零时, 方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x), \qquad (*)_{非}$$

称作二阶线性非齐次方程 (nonhomogeneous equation).

二阶齐次方程解集构成二维线性空间，基本解组，例子

Theorem

定理：二阶线性齐次方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \qquad (*)_{齐}$$

解的全体构成一个二维线性空间.

Definition

齐次方程 $(*)_{齐}$ 的任意两个线性无关的解均称作方程 $(*)_{齐}$ 的一个基本解组.

Example

例：已说明函数 $y_1(x) = \cos x$, $y_2(x) = \sin x$ 是方程 $y'' + y = 0$ 的两个解. 显然它们线性无关. 故它们构成方程的一个基本解组. 于是方程 $y'' + y = 0$ 的每个解 $y(x)$ 均可表为它们的线性组合，即 $y(x) = c_1\cos x + c_2\sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

证: 记 $\mathcal{S}$ 为方程 $(*)_{齐}$ 解的全体, 则 $\mathcal{S}$ 是一个线性空间, 即对任意 $\phi,\psi\in\mathcal{S}$, 则 $\lambda\phi+\mu\psi\in\mathcal{S}$, 对任意 $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. 以下要证 $\dim\mathcal{S}=2$. 固定一点 $x_0\in J$, 记 $\phi_1(x)$ 和 $\phi_2(x)$ 分别是如下两个初值问题的解

$$\begin{cases} y''+P(x)y'+Q(x)y=0, \\ y(x_0)=1,\ y'(x_0)=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y''+P(x)y'+Q(x)y=0, \\ y(x_0)=0,\ y'(x_0)=1. \end{cases}$$

往下证 $\phi_1(x)$ 和 $\phi_2(x)$ 构成解空间 $\mathcal{S}$ 的一个基底. 先证 ϕ_1, ϕ_2 线性无关. 令 $c_1\phi_1+c_2\phi_2=0$, 即 $c_1\phi_1(x)+c_2\phi_2(x)=0$, $\forall x\in J$. 令 $x=x_0$ 可知 $c_1=0$. 进一步得 $c_2=0$. 故 ϕ_1 和 ϕ_2 线性无关. 再证线性空间 $\mathcal{S}$ 中的每个元素, 即方程 $(*)_{齐}$ 的每个解都可由 $\phi_1(x)$ 和 $\phi_2(x)$ 线性表出. 设 $y(x)\in\mathcal{S}$ 是方程 $(*)_{齐}$ 的任意一个解. 令 $\phi(x)=c_1\phi_1(x)+c_2\phi_2(x)$, 这里 $c_1\stackrel{\text{def}}{=}y(x_0)$, $c_2\stackrel{\text{def}}{=}y'(x_0)$.

显然 $\phi(x)$ 是解，且

$$\phi(x_0) = c_1 = y(x_0),$$

$$\phi'(x_0) = c_1\phi_1'(x_0) + c_2\phi_2'(x_0) = c_2 = y'(x_0).$$

这说明两个解 $y(x)$ 和 $\phi(x)$ 满足相同的初值条件. 根据解的唯一性知，它们恒同. 此即 $y(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x)$. 这就证明了 $\mathcal{S}$ 中的每个元素，即方程 $(*)_{齐}$ 的每个解都可以由 $\phi_1(x)$ 和 $\phi_2(x)$ 线性表出. 定理得证. □

<u>注</u>: 同理我们不难证明一般 n 阶线性齐次方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$$

的解空间是 n 维的.

Theorem

定理: 考虑二阶线性非齐次方程, 及其相应的齐次方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x), \qquad (*)_{非}$$

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0. \qquad (*)_{齐}$$

非齐方程 $(*)_{非}$ 一般解可表示为 $y(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + y_p(x)$, 其中 $\phi_1(x)$ 和 $\phi_2(x)$ 为对应齐次方程方程 $(*)_{齐}$ 的两个线性无关的解, $y_p(x)$ 是方程 $(*)_{非}$ 的一个特解.

一般解的含义: 我们说方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$ 的一般解 (general solutions) 由式 $y(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + y_p(x)$ 给出有两个意思:

(i) 方程的每个解都可以表示为这样的形式;

(ii) 每个这样形式的函数均为方程的解.

定理证明

证(i): 每个形如 $y = y_g + y_p$ 都是方程 $(*)_{\text{非}}$ 的解，这里 $y_g = c_1\phi_1 + c_2\phi_2$. 直接验证

$$
\begin{aligned}
& y'' + P(x)y' + Q(x)y \\
&= (y_g'' + y_p'') + P(x)(y_g' + y_p') + Q(x)(y_g + y_p) \\
&= [y_g'' + P(x)y_g' + Q(x)y_g] + [y_p'' + P(x)y_p' + Q(x)y_p] = R(x).
\end{aligned}
$$

(ii) 证方程 $(*)_{\text{非}}$ 的每个解都可以表示为形式 $y = y_g + y_p$. 设 $y(x)$ 是方程 $(*)_{\text{非}}$ 的一个解. 根据解 $y(x)$ 和 $y_p(x)$ 所满足的方程

$$
\begin{aligned}
y'' + P(x)y' + Q(x)y &= R(x) \\
y_p'' + P(x)y_p' + Q(x)y_p &= R(x)
\end{aligned}
$$

可得 $(y - y_p)'' + P(x)(y - y_p)' + Q(x)(y - y_p) = 0$. 这表明 $y - y_p$ 是齐次方程 $(*)_{\text{齐}}$ 的一个解. 故 $y - y_p$ 可表为 $y - y_p = c_1\phi_1 + c_2\phi_2$，于是任意解 $y(x)$ 可以表为 $y(x) = c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + y_p(x)$. 定理得证.

例：求齐次方程 $y''+y'=0$ 的一个基本解组.

解：观察知 $y_1=1$ 是解，且 $y_2=e^{-x}$ 也是解. 显然函数 $1, e^{-x}$ 在实轴上线性无关. 故解 $1, e^{-x}$ 构成方程的一个基本解组. 其一般解为 $y(x)=c_1+c_2e^{-x}$.

注：稍后将会看到，如果已知齐次方程 $(*)_{齐}$ 的一个基本解组 $\phi_1(x)$ 和 $\phi_2(x)$，则可以利用这个基本解组，构造出非齐次方程 $(*)_{非}$ 的一个特解 y_p，从而求得方程 $(*)_{非}$ 的一般解. 因此问题的关键在于求齐次方程 $(*)_{齐}$ 的一个基本解组. 但目前尚不存在求齐次方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 基本解组的一般方法.

Definition

<u>定义</u>：设 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是二阶线性齐次方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (*)_{齐}$$

的两个解，称

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$$

为解 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 所对应的 Wronsky 行列式.

Theorem

定理: 设 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是方程$(*)_{齐}$ 的两个解, 则它们所对应的 Wronsky 行列式 $W(x)$ 可表为 $W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} P(t)dt}$, $\forall x \in J$.

注: 上述定理常称为 Liouville 定理. 公式 $W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} P(t)dt}$ 称为 Liouville 公式. 由这个公式可知, $W(x) \equiv 0$ 或者 $W(x) \neq 0$, $\forall x \in J$.

证明: 对 Wronsky 行列式

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

两边求导得

$$W'(x) = \begin{vmatrix} y_1'(x) & y_2'(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) \end{vmatrix}.$$

再由两个恒等式

$$y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1 = 0,$$
$$y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2 = 0,$$

$$\Rightarrow \quad W'(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ -P(x)y_1' & -P(x)y_2' \end{vmatrix} = -P(x)W(x).$$

即 $W(x)$ 满足方程 $W' + P(x)W = 0$. 故 $W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} P(s)ds}$. 于是 $W(x) \equiv 0$ 或者 $W(x) \neq 0$, $\forall x \in J$. 结论得证. □

Theorem

定理: 设 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是二阶线性齐次方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (*)_{齐}$$

的两个解, 记它们对应的 Wronsky 行列式为 $W(x)$, 则

(i) $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 线性相关 $\Longleftrightarrow W(x) \equiv 0, \forall x \in J$;

(ii) $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 线性无关 $\Longleftrightarrow W(x) \neq 0, \forall x \in J$.

定理证明

证: 显然结论 (i) 和 (ii) 等价. 故只需只证 (i). $\Rightarrow$: 设 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 线性相关, 则 $y_1(x) = ky_2(x)$ 或 $y_2(x) = ky_1(x)$. 此时有 $W(x) \equiv 0$. $\Leftarrow$: 设 $W(x) \equiv 0$. 若 $y_1(x)$ 为平凡解 (即零解), 则显然 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 线性相关. 结论成立. 设 $y_1(x)$ 为非平凡解, 则存在一个子区间 $J_1 \subset J$, 使得 $y_1(x) \neq 0$, $\forall x \in J_1$. 于是

$$\left[\frac{y_2}{y_1}\right]' = \frac{y_1y_2' - y_2y_1'}{y_1^2} = \frac{W(y_1, y_2)}{y_1^2} \equiv 0, \quad \forall x \in J_1.$$

这表明 $y_2(x) = ky_1(x)$, 从而 $y_2'(x) = ky_1'(x)$, $\forall x \in J_1$. 由解的唯一性可知 $y_2(x) = ky_1(x)$, $\forall x \in J$. 即 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 线性相关. 证毕. $\square$

例子

<u>例</u>: 已知方程 $y''+y=0$ 有两个解 $y_1=\cos x$, $y_2=\sin x$, 并且已经说明它们线性无关. 考虑它们对应的 Wronsky 行列式:

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}=1\neq 0.$$

利用 Wronsky 行列式, 我们再次说明解 $y_1=\cos x$ 和 $y_2=\sin x$ 线性无关.

考虑二阶线性方程

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x), \qquad (*)_{非}$$

以及对应的齐次方程

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0, \qquad (*)_{齐}$$

其中 $a(x), b(x), f(x)$ 为某开区间 J 上的连续函数.

情形一: 假设已知齐次方程 $(*)_{齐}$ 的一个非零解 $\phi(x)$. 往下利用常数变易法求非齐次方程 $(*)_{非}$ 的一般解. 设非齐方程 $(*)_{非}$ 有解形如 $y = C(x)\phi(x)$, 其中函数 $C(x)$ 待定, 则 $y' = C'\phi + C\phi'$, $y'' = C''\phi + 2C'\phi' + C\phi''$. 将解 $y = C(x)\phi(x)$ 代入非齐方程 $(*)_{非}$ 得

$$C''\phi + 2C'\phi' + C\phi'' + a(x)(C'\phi + C\phi') + b(x)C\phi = f(x).$$

续一

重新组合上式得

$$C''\phi + C'(2\phi' + a(x)\phi) + C(\phi'' + a(x)\phi' + b(x)\phi) = f(x).$$

注意 ϕ 是 $(*)_{齐}$ 的解，故 $\phi'' + a(x)\phi' + b(x)\phi = 0$. 于是待定函数 $C(x)$ 满足方程

$$C''\phi + C'(2\phi' + a(x)\phi) = f(x). \qquad (*)$$

注意二阶线性方程 (*) 可降阶，它可看作关于 C' 的一阶线性方程. 可解.

<u>例</u>: 已知二阶线性齐次方程 $x^2y'' - 2y = 0$ 的一个非零解 $\phi(x) = x^2$, $x > 0$, 利用常数变易法，求非齐次二阶线性方程 $x^2y'' - 2y = x^4$ 的一般解.

<u>解</u>: 设非齐方程 $x^2y'' - 2y = x^4$ 有解 $y = C(x)x^2$, $C(x)$ 待定，则

$$y' = C'x^2 + 2Cx, \quad y'' = C''x^2 + 2C'x + 2C'x + 2C = C''x^2 + 4C'x + 2C.$$

续二

将解 $y = C(x)x^2$ 代入非齐方程 $x^2y'' - 2y = x^4$ 得 $x^2(C''x^2 + 4C'x + 2C)$ $-2Cx^2 = x^4$. 化简得 $C''x^4 + 4C'x^3 = x^4$. 将其写作标准形式

$$C'' + \frac{4}{x}C' = 1. \qquad (*)$$

方程 (*) 可以看作关于 C' 的一阶线性方程. 我们可以用常数变易法求解 (*). 注意现在我们有两层常数变易法, 内层是求解方程 (*), 外层是为了求解非齐方程 $x^2y'' - 2y = x^4$. 方程 (*) 对应的齐次方程为 $C'' + \frac{4}{x}C' = 0$ 的一般解为 $C' = \frac{C_1}{x^4}$. 假设 $C' = \frac{C_1(x)}{x^4}$ 非齐方程 (*) 的解, 则 $C'' = \frac{C_1'}{x^4} - \frac{4C_1}{x^5}$. 于是

$$\frac{C_1'}{x^4} - \frac{4C_1}{x^5} + \frac{4}{x}\frac{C_1}{x^4} = 1.$$

化简得 $C_1' = x^4$. 由此解得 $C_1(x) = \frac{1}{5}x^5 + C_2$. 于是我们得到方程 (*) 的一般解

$$C'(x) = \frac{C_1(x)}{x^4} = \frac{1}{x^4}\left(\frac{1}{5}x^5 + C_2\right) = \frac{1}{5}x + \frac{C_2}{x^4}.$$

对上式积分得

$$C(x) = \frac{1}{10}x^2 - \frac{C_2}{3x^3} + C_3 = \frac{1}{10}x^2 + \frac{C_4}{x^3} + C_3,$$

其中 C_3, C_4 为任意常数, $C_4 = -\frac{C_2}{3}$. 至此我们就得到方程 $x^2y'' - 2y = x^4$ 的一般解

$$y = C(x)x^2 = x^2\left(\frac{1}{10}x^2 + \frac{C_4}{x^3} + C_3\right) = \frac{C_4}{x} + C_3x^2 + \frac{1}{10}x^4,$$

其中 C_3, C_4 为任意常数.

考虑二阶线性方程

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x), \qquad (*)_{\text{非}}$$

以及对应的齐次方程

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0, \qquad (*)_{\text{齐}}$$

其中 $a(x), b(x), f(x)$ 为某开区间 J 上的连续函数.

情形二: 假设已知齐次方程 $(*)_{\text{齐}}$ 的一个基本解组 $y_1(x)$, $y_2(x)$. 为得到非齐方程 $(*)_{\text{非}}$ 的一般解，还需要方程 $(*)_{\text{非}}$ 的一个特解 $y_p(x)$. 往下将利用基本解组 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 来构造一个特解 $y_p(x)$. 其构造方法与一阶线性方程情形类似，也称作常数变易法，或参数变易法. 由假设 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 为齐次方程 $(*)_{\text{齐}}$ 的一个基本解组，故线性组合 $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ 均为方程 $(*)_{\text{齐}}$ 的解，其中 c_1 和 c_2 为任意常数. 现假设方程 $(*)_{\text{非}}$ 有形如 $y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$ 的特解，其中 $c_1(x)$ 和 $c_2(x)$ 为两个待定函数. 常数变易法由此而得名.

常数变易法的由来

对 $y=c_1y_1+c_2y_2$ 求导得 $y'=(c_1'y_1+c_2'y_2)+(c_1y_1'+c_2y_2')$. 进一步求导将出现二阶导数 c_1'' 和 c_2''. 这可能造成不便. Euler 尝试提出关于待定函数 c_1, c_2 的第一个限制条件

$$c_1'y_1+c_2'y_2=0. \qquad (\Delta).$$

于是 $y'=c_1y_1'+c_2y_2'$. 再次求导得 $y''=c_1'y_1'+c_2'y_2'+c_1y_1''+c_2y_2''$. 将 y' 和 y'' 的表达式代入非齐方程 $(*)_{非}$ 得

$$(c_1'y_1'+c_2'y_2'+c_1y_1''+c_2y_2'')+a(x)(c_1y_1'+c_2y_2')$$

$$+b(x)(c_1y_1+c_2y_2)=f(x).$$

重新组合得

$$c_1[y_1''+a(x)y_1'+b(x)y_1]+c_2[y_2''+a(x)y_2'+b(x)y_2]$$

$$+(c_1'y_1'+c_2'y_2')=f(x).$$

注意到 y_1 和 y_2 均为齐次方程 $(*)_{齐}$ 的解. 于是我们得到关于待定函数 c_1, c_2 的第二个限制条件

$$c_1'y_1' + c_2'y_2' = f(x). \qquad (\Delta\Delta).$$

将这两个限制条件 (Δ) 和 $(\Delta\Delta)$ 联立起来得

$$\begin{cases} c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0, \\ c_1'y_1' + c_2'y_2' = f(x), \end{cases} \text{或} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(x) \end{bmatrix}.$$

于是

$$\begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ f(x) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{W(x)} \begin{bmatrix} y_2' & -y_2 \\ -y_1' & y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ f(x) \end{bmatrix} = \frac{f(x)}{W(x)} \begin{bmatrix} -y_2 \\ y_1 \end{bmatrix},$$

这里 $W(x)$ 记基本解组 y_1, y_2 所对应的 Wronsky 行列式. 因此

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \int \frac{f(x)}{W(x)} \begin{bmatrix} -y_2(x) \\ y_1(x) \end{bmatrix} dx.$$

因只需一个特解, 故可取定积分

$$\begin{bmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{bmatrix} = \int_{x_0}^{x} \frac{f(s)}{W(s)} \begin{bmatrix} -y_2(s) \\ y_1(s) \end{bmatrix} ds,$$

这里 $x_0 \in J$ 为一个固定点. 至此我们得到一个特解

$$y_p(x) = y_1(x) \int_{x_0}^{x} \frac{-y_2(s)f(s)}{W(s)} ds + y_2(x) \int_{x_0}^{x} \frac{y_1(s)f(s)}{W(s)} ds,$$

或写作

$$y_p(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{y_1(s)y_2(x) - y_2(s)y_1(x)}{W(s)} f(s) ds.$$

若定义

$$\mathbf{H}(\mathbf{s},\mathbf{x}) \overset{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{W}(\mathbf{s},\mathbf{x})}{\mathbf{W}(\mathbf{s})}, \quad \mathbf{W}(\mathbf{s},\mathbf{x}) \overset{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} \mathbf{y}_1(\mathbf{s}) & \mathbf{y}_2(\mathbf{s}) \\ \mathbf{y}_1(\mathbf{x}) & \mathbf{y}_2(\mathbf{x}) \end{vmatrix},$$

函数 $\mathbf{H}(\mathbf{s},\mathbf{x})$ 常称为基本解组 $\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2$ 所对应的 **Cauchy** 函数，则上述特解还可写作如下 **Cauchy** 形式

$$\mathbf{y}_p(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \mathbf{H}(\mathbf{s},\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{s})\mathbf{ds}. \qquad (*)$$

于是我们得到如下结论.

Theorem

<u>定理</u>: 假设已知齐次方程 $\mathbf{y}'' + \mathbf{a}(\mathbf{x})\mathbf{y}' + \mathbf{b}(\mathbf{x})\mathbf{y} = 0$ 的一个基本解组 $\mathbf{y}_1(\mathbf{x})$, $\mathbf{y}_2(\mathbf{x})$，则由式 (*) 给出的 $\mathbf{y}_p(\mathbf{x})$ 是非齐次方程 $\mathbf{y}'' + \mathbf{a}(\mathbf{x})\mathbf{y}' + \mathbf{b}(\mathbf{x})\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ 的一个特解，其中 $\mathbf{H}(\mathbf{s},\mathbf{x})$ 是基本解组 $\mathbf{y}_1(\mathbf{x})$, $\mathbf{y}_2(\mathbf{x})$ 所确定的 **Cauchy** 函数.

例一: 已知齐次方程 $xy'' - (x+1)y' + y = 0\ (x > 0)$ 的两个线性无关的解 $y_1 = 1 + x$, $y_2 = e^x$, 求非齐次线性方程 $xy'' - (x+1)y' + y = x^2e^x\ (x > 0)$ 的一般解.

解: 将非齐次线性方程 $xy'' - (x+1)y' + y = x^2e^x$ 写作标准形式

$$y'' - \left(1 + \frac{1}{x}\right)y' + \frac{1}{x}y = xe^x, \quad x > 0. \quad (*)$$

由 Cauchy 特解公式得非齐方程 (*) 的一个特解为

$$y_p(x) = \int_1^x \frac{W(s,x)}{W(s)} se^s ds,$$

其中

$$W(s) = \begin{vmatrix} y_1(s) & y_2(s) \\ y_1'(s) & y_2'(s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+s & e^s \\ 1 & e^s \end{vmatrix} = se^s,$$

$$W(s,x)=\begin{vmatrix} y_1(s) & y_2(s) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1+s & e^s \\ 1+x & e^x \end{vmatrix}=e^x(1+s)-e^s(1+x).$$

于是所求特解为

$$y_p(x)=\int_1^x \frac{W(s,x)}{W(s)} se^s ds=\int_1^x \frac{e^x(1+s)-e^s(1+x)}{se^s} se^s ds$$

$$=e^x\int_1^x (1+s)ds-(1+x)\int_1^x e^s ds$$

$$=\frac{1}{2}e^x[(1+x)^2-4]-(1+x)(e^x-e)$$

$$=\frac{1}{2}x^2e^x-\frac{5}{2}e^x-e(1+x).$$

例一，续二

由于 e^x, $1+x$ 是齐次方程的解，故从上述 $y_p(x)$ 的表达式中，去掉 $-\frac{5}{2}e^x$ 和 $-e(1+x)$ 之后，所得函数 $\frac{1}{2}x^2e^x$ 仍然是非齐方程 (*) 的特解．因此二阶线性非齐次方程 $xy''-(x+1)y'+y=x^2e^x$ $(x>0)$ 的一般解为

$$y=c_1(1+x)+c_2e^x+\frac{1}{2}x^2e^x.$$

解答完毕．

<u>例二</u>: 求方程 $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$, $x \in (0, \pi)$.

<u>解</u>: 显然对应齐次方程 $y'' + y = 0$ 有基本解 $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$, 对应的 Cauchy 函数为

$$H(s,x) \overset{\text{def}}{=} \frac{W(s,x)}{W(s)} = \begin{vmatrix} y_1(s) & y_2(s) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1(s) & y_2(s) \\ y_1'(s) & y_2'(s) \end{vmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos s & \sin s \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix} = \sin x \cos s - \cos x \sin s.$$

由此可得方程 $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$ 的特解如下

$$y_p(x) = \int_{x_0}^{x} H(s,x) f(s) ds = \int_{\pi/2}^{x} (\sin x \cos s - \cos x \sin s) \frac{ds}{\sin s}$$

例子，续

$$= \sin x \int_{\pi/2}^{x} \frac{\cos s ds}{\sin s} - \cos x \int_{\pi/2}^{x} ds = \sin x \ln \sin x - x\cos x + \frac{\pi}{2}\cos x.$$

注意 $\frac{\pi}{2}\cos x$ 是齐次方程的解. 故去掉 $\frac{\pi}{2}\cos x$ 后 y_p 仍然是特解. 于是方程 $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$ 的一般解为

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \sin x \ln \sin x - x\cos x.$$

解答完毕.

考虑 $y'' + py' + qy = 0$，其中 $p, q \in \mathbb{R}$ 为常数. 受指数函数导数性质 $(e^{\lambda x})' = \lambda e^{\lambda x}$ 的启发，我们寻求指数函数解. 将 $y = e^{\lambda x}$ 代入方程得 $\lambda^2 e^{\lambda x} + p\lambda e^{\lambda x} + qe^{\lambda x} = 0$. 约去 $e^{\lambda x}$ 得 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$. 这个一元二次方程称为微分方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的特征方程；其根称作特征根 或特征值；一元二次多项式 $\lambda^2 + p\lambda + q$ 称作特征多项式. 由此就得到如下定理

Theorem

定理：指数函数 $e^{\lambda_0 x}$ 是微分方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的解，当且仅当 λ_0 是其特征根，即方程 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 的根.

基本解组，情形一和情形二

为了求方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的基本解组，需要对特征方程和特征根作进一步讨论. 熟知特征方程 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 的两个根，即特征根可表为 $\lambda_1, \lambda_2 = \frac{1}{2}\big(-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}\big)$.

<u>情形一</u>: $p^2 > 4q$. 此时方程有两个互异的实特征根 λ_1, λ_2. 它们对应两个解 $e^{\lambda_1 x}$, $e^{\lambda_2 x}$. 显然它们线性无关，因为它们的比值 $\frac{e^{\lambda_1 x}}{e^{\lambda_2 x}} = e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x}$ 不是常数. 因此解 $e^{\lambda_1 x}$, $e^{\lambda_2 x}$ 构成了方程的一个基本解组.

<u>情形二</u>: $p^2 < 4q$. 此时两个特征根为一对共轭复根，方程有一对共轭复函数解 $e^{\lambda_1 x}$ 和 $e^{\lambda_2 x}$. 若设 $\lambda_1 = a + ib$，则 $\lambda_2 = a - ib$，$a, b \in \mathbb{R}$，$b \neq 0$，则这对复函数解可写作 $e^{\lambda_1 x} = e^{ax}(\cos bx + i \sin bx)$，$e^{\lambda_2 x} = e^{ax}(\cos bx - i \sin bx)$. 不难验证，其实部 $e^{ax}\cos bx$ 和虚部 $e^{ax}\sin bx$ 都是方程的实函数解. 显然它们线性无关，从而构成方程的一个基本解组. 故此时方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的一般 (实函数) 解为 $y = e^{ax}(c_1 \cos bx + c_2 \sin bx)$.

情形三: $p^2 = 4q$. 此时方程的两个特征根相等, 或者说方程有一个二重特征根 $\lambda_1 = -p/2$. 于是 $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ 是方程的一个非平凡解. 当 λ_1 是其二重特征值时, Euler 用下述方法得到一个线性无关解 $xe^{\lambda_1 x}$. 设 λ_1, λ_2 是方程的两个互异的特征值. 于是 $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}$ 为方程的解, 其差也是解. 进而差商

$$\frac{e^{\lambda_2 x} - e^{\lambda_1 x}}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

也是解. 于上式令 $\lambda_2 \to \lambda_1$, 我们得到

$$\lim_{\lambda_2 \to \lambda_1} \frac{e^{\lambda_2 x} - e^{\lambda_1 x}}{\lambda_2 - \lambda_1} = xe^{\lambda_1 x}.$$

故可期待, 当 λ_1 是方程的重特征值时, 函数 $xe^{\lambda_1 x}$ 也是解. 此时将 $y = xe^{\lambda_1 x}$ 代入方程 $y'' + py' + qy = 0$, 容易验证它的确是解.

例一：求二阶线性常系数齐次方程 $y'' - 3y' + 2y = 0$ 的一般解.

解：特征方程为 $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$. 分解因式得 $(\lambda-1)(\lambda-2) = 0$. 由此得两个互异的实特征根为 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. 于是方程有基本解组 e^x, e^{2x}. 故方程的一般解为 $y = c_1e^x + c_2e^{2x}$. 解答完毕.

例二：求二阶线性常系数齐次方程 $y'' - 2y' + 2y = 0$ 的一般解.

解：特征方程为 $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$. 分解因式得 $(\lambda-1)^2 + 1 = 0$. 由此得一对共轭复特征根 $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$. 复解为 $e^{(1+i)x} = e^x(\cos x + i\sin x)$, 其实部和虚部为 $e^x\cos x$, $e^x\sin x$. 它们构成方程的一个基本解组. 因此方程的一般解为 $y = e^x(c_1\cos x + c_2\sin x)$. 解答完毕.

例三：求二阶线性常系数齐次方程 $y'' - 2y' + y = 0$ 的一般解.

解：特征方程为 $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$. 特征根 $\lambda_1 = 1$ 为二重. 于是方程有基本解组 e^x, xe^x. 故方程的一般解为 $y = e^x(c_1 + c_2x)$. 解答完毕.

一. 形如 $x^2y''+a_1xy'+a_2y=0$ 的方程称为二阶 Euler 方程, 这里 a_1, a_2 为常数. 一般 n 阶 Euler 方程是指如下形式的方程

$$x^ny^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}xy'+a_ny=0,\quad x>0.\ (*)$$

二. 可以通过独立变量变换 $x=e^t$ (t 为新的独立变量) 将 Euler 方程 (*) 化为常系数线性方程求解.

三. 也可以直接求 Euler 方程 (*) 形如 x^λ 的解. 将 $y=x^\lambda$ 代入方程 (*) 并约去因子 x^λ, 即可得到一个关于 λ 的 n 次多项式方程. 解这个多项式方程, 即可求得 Euler (*) 方程形如 x^λ 的解.

二阶线性 Euler 方程, 例子

例: 求解 Euler 方程 $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$, $x > 0$.

解: 作代换 $x = e^t$, 并令 $z(t) = y(e^t)$, 则 $z' = y'e^t = y'x$, $z'' = y'e^t + y''e^{2t}$ $= y'x + y''x^2$. 故 $xy' = z'$, $x^2y'' = z'' - z'$. 代入方程 $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$ 得 $z'' - z' + 2z' - 2z = 0$, 即 $z'' + z' - 2z = 0$. 这是一个二阶线性常系数方程. 其特征方程为 $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, 特征根为 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$. 于是关于 z 的方程 $z'' + z' - 2z = 0$ 的一般解为 $z = c_1e^t + c_2e^{-2t}$. 由此得原 Euler 方程 $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$ 的一般解为 $y = c_1x + c_2x^{-2}$. 解答完毕.

另解: 将 $y = x^\lambda$ 代入方程 $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$ 得

$$\lambda(\lambda-1)x^\lambda + 2\lambda x^\lambda - 2x^\lambda = 0 \quad \text{or} \quad \lambda^2 + \lambda - 2 = 0.$$

令 $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, 即 $(\lambda-1)(\lambda+2) = 0$ 解得 $\lambda = 1, -2$. 由此得到两个解 $y_1 = x$ 和 $y_2 = x^{-2}$. 易证这两个解在 $(0, +\infty)$ 上线性无关. 因此它们构成一个基本解组, 一般解为 $y = c_1x + c_2x^{-2}$. 结果与第一个解法的结果相同. 解答完毕.

用待定系数法求特解，拟多项式情形

考虑二阶线性常系数非齐次方程

$$y'' + py' + qy = R(x). \quad (*)$$

我们已经会求对应齐次方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的基本解组．由这个基本解组，可以构造方程 (*) 的一个特解 $y_p(x) = \int_{x_0}^{x} H(s,x)R(s)ds$，其中 $H(s,x)$ 是基本解组所对应的 Cauchy 函数，从而求得方程 (*) 的一般解．当右端函数 $R(x)$ 为拟多项式情形时，即 $R(x) = P(x)e^{\lambda_0 x}$ 时，其中 $P(x)$ 为多项式，我们可以采用比较方便快捷的方法，即待定系数法求特解．具体说来，我们有如下定理:

Theorem

定理：设非齐次方程 (*) 的右端为拟多项式 $R(x) = P(x)e^{\lambda_0 x}$，则当 λ_0 为 k $(0 \le k \le 2)$ 重特征值时，方程 (*) 有唯一拟多项式解 $y = x^k Q(x)e^{\lambda_0 x}$，其中 $\deg Q = \deg P$.

例一: 求方程 $y'' - 2y' + y = 6(x+1)e^x$ 的通解.

解: 对应齐次方程的特征多项式为 $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$, $\lambda = 1$ 为二重特征根. 故齐次方程 $y'' - 2y' + y = 0$ 有基本解组 e^x, xe^x. 为求通解, 需要求方程的一个特解. 因方程右端为拟多项式 $P(x)e^{\lambda_0 x}$, $P(x) = 6(1+x)$, $\lambda_0 = 1$, 它是二重特征根, 由定理知方程有唯一拟多项式解 $y = x^2Q(x)e^x$, 其中 $Q(x)$ 为 $P(x)$ 次数相同的多项式, 待定. 故可设 $Q(x) = Ax + B$, A, B 为待定系数. 以下将这个拟多项式代入方程来确定 A, B. 由于待定解 $y = x^2(Ax+B)e^x$ $= e^x(Ax^3 + Bx^2)$, 故

$$y' = e^x(Ax^3 + Bx^2) + e^x(3Ax^2 + 2Bx),$$
$$y'' = e^x(Ax^3 + Bx^2) + 2e^x(3Ax^2 + 2Bx) + e^x(6Ax + B)$$

代入方程 $y'' - 2y' + y = 6(x+1)e^x$，并约去因子 e^x 得

$$(Ax^3 + Bx^2) + 2(3Ax^2 + 2Bx) + (6Ax + 2B)$$

$$-2(Ax^3 + Bx^2) - 2(3Ax^2 + 2Bx) + (Ax^3 + Bx^2) = 6x + 6$$

化简得 $6Ax + 2B = 6x + 6$. 比较系数得 $A = 1$, $B = 3$. 因此方程有特解 $y_p = x^2(x+3)e^x$. 从而其通解为

$$y = c_1e^x + c_2e^{-x} + x^2(x+3)e^x.$$

解答完毕.

例二: 求方程 $y'' - y' - 2y = 4x^2$ 的一般解.

解: 对应齐次方程 $y'' - y' - 2y = 0$ 的特征方程为 $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, 分解因式得 $(\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$. 齐次方程的一般解为 $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-x}$. 以下求非齐方程特解. 由于方程右端为 $4x^2$, 它可写作 $4x^2e^{\lambda_0 x}$, $\lambda_0 = 0$. 但 $\lambda_0 = 0$ 不是特征根, 故由定理知方程有唯一特解 $y_p = A + Bx + Cx^2$. 将其代入方程 $y'' - y' - 2y = 4x^2$ 得

$$2C - (B + 2Cx) - 2(A + Bx + Cx^2) = 4x^2,$$

即 $$-2Cx^2 + (-2C - 2B)x + (2C - B - 2A) = 4x^2.$$

并比较系数得 $-2C = 4$, $-2C - 2B = 0$, $2C - B - 2A = 0$. 解得 $C = -2$, $B = 2$, $A = -3$. 故特解为 $y_p = -3 + 2x - 2x^2$. 方程 $y'' - y' - 2y = 4x^2$ 的一般解为 $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-x} - 3 + 2x - 2x^2$, 其中 c_1, c_2 为任意常数. 解答完毕.

Dec 29 作业，共八大题

习题一：课本第230页习题7.4题1(有修改)．设 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 分别是

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f_1(x) \tag{1}$$

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f_2(x) \tag{2}$$

的解，证明对任意常数 k_1 和 k_2，函数 $y(x) = k_1y_1(x) + k_2y_2(x)$ 是方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = k_1f_1(x) + k_2f_2(x) \tag{3}$$

的解．

习题二：课本第230页习题7.4题2．设 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上连续函数，且为以 $T > 0$ 为周期的周期函数．再设 $y = \phi(x)$ 是一阶线性周期方程 $y' + y = f(x)$ 满足条件 $\phi(0) = \phi(T)$ 的解．证明 $\phi(x)$ 是以 T 为周期的周期解．

习题三：课本第230页习题7.4题3．证明 n 阶线性非齐次方程

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x)$$

最多有 $n+1$ 个线性无关的解，其中 $f(x)$ 为某开区间上不恒为零的连续函数．

习题四：课本第230页习题7.4题4(有修改)．设 $y_1(x)$，$y_2(x)$ 和 $y_3(x)$ 为二阶线性非齐次方程

$$y''+a(x)y'+b(x)y=c(x) \qquad (*)$$

的三个特解．问在什么条件下，由这三个特解可以构造出方程 (*) 的一般解．

习题五：课本第230页习题7.4题5(1)(2)(3)(4). 求解下列微分方程

(1) 验证 e^x 是齐次方程 $y'' - 2y' + y = 0$ 的解，并求非齐次方程 $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$, $x > 0$, 的一般解.

(2) 验证 x 是齐次方程 $\frac{1}{2}x^2y'' - xy' + y = 0\,(x > 0)$ 的解，并求非齐次方程 $\frac{1}{2}x^2y'' - xy' + y = x^3\,(x > 0)$ 的一般解.

(3) 验证 e^x 和 e^{-x} 是齐次方程 $y'' - y = 0$ 的基本解，并求非齐次方程 $y'' - y = \cos x$ 的一般解.

(4) 验证 x^2 和 $\frac{1}{x}$ 是齐次方程 $x^2y'' - 2y = 0\,(x > 0)$ 的基本解，并求非齐次方程 $x^2y'' - 2y = 4x^3$ 的一般解.

习题六：课本第230页习题7.4题6. 已经证明 e^x 和 e^{-x} 构成方程 $y'' - y = 0$ 的一个基本解组. 分别求方程 $y'' - y = 0$ 满足如下三组初值条件的解

(i) $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;

(ii) $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

(iii) $y(0) = a$, $y'(0) = b$, 其中 a, b 为任意给定的两个实数.

习题七：课本第230页习题7.4题7(有修改).

(i) 求二阶线性齐次常系数方程 $y'' + ay' + by = 0$, 使得 $y = (c_1 + c_2 x)e^x$ 为其一般解, 其中 c_1, c_2 为两个任意常数;

(ii) 求三阶线性齐次常系数方程 $y''' + ay'' + by' + cy = 0$, 使得 $y = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x$ 为其一般解, 其中 c_1, c_2, c_3 为三个任意常数.

习题八：课本第230页习题7.4题8(有修改). 假设已知三阶线性方程

$$y''' + a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x) \qquad (*)$$

有两个特解 $x + x^2$ 和 $x^2 + x^3$，还已知对应齐次方程

$$y''' + a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$$

有两个解 1 和 x. 求方程 (*) 的一般解.