本次习题课主要内容如下:

一. 积分的几何应用

二. 积分估计

一. 几何应用. 以下三个题目是关于计算平面图形的面积.

题 1. 求阿基米德螺线 $r = a\theta$, $0 \le \theta \le 2\pi$ 与极轴所围图形的面积.

解: 根据极坐标下的面积公式知所求面积为

$$A = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2(\theta) d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2\theta^2 d\theta = \frac{4}{3}a^2\pi^3.$$

解答完毕.

题 2. 求封闭曲线 $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$ 所围图形的面积.

解: 在极坐标 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ 下, 曲线 $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$ 具有如下方程

$$r^2 = \frac{a^2}{\cos^4\theta + \sin^4\theta}, \quad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

由曲线的极坐标方程不难看出曲线的封闭性. 于是所求面积为

$$A = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2(\theta) d\theta = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^4\theta + \sin^4\theta} d\theta$$

$$= 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos^4\theta + \sin^4\theta} d\theta = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \tan^2\theta}{1 + \tan^4\theta} d\tan\theta.$$

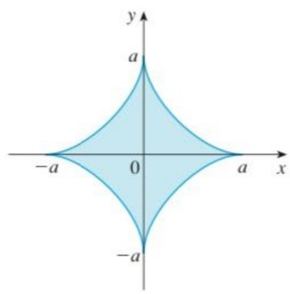
令 $u = \tan\theta$, 则

$$A = 2a^2 \int_0^{+\infty} \frac{1 + u^2}{1 + u^4} du = 2a^2 \int_0^{+\infty} \frac{\frac{1}{u^2} + 1}{\frac{1}{u^2} + u^2} du$$

$$= 2a^2 \int_0^{+\infty} \frac{d(u-\frac{1}{u})}{(u-\frac{1}{u})^2+2} = \sqrt{2}a^2 \arctan \frac{u-\frac{1}{u}}{\sqrt{2}}\Big|_0^{+\infty} = \sqrt{2}\pi a^2$$

解答完毕.

题 3. 求星形线 $x = a\cos^3 t$, $x = a\cos^3 t$, $0 \le t \le 2\pi$ 所围图形 S 的面积. (注: 星形线的直角坐标方程为 $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$). (这是课本第185页习题5.7题2(4))



解: 由星形线的直角坐标方程 $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ 可解得星形线在第一象限的部分是 $y = y(x) = (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2}$ 的函数图形, $0 \le x \le a$. 因此所求面积为

$$|S| = 4\int_0^a (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2} dx.$$

对上述积分, 作变量代换 $x = a\cos^3 t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$, 则 $y = a\sin^3 t$. 于是

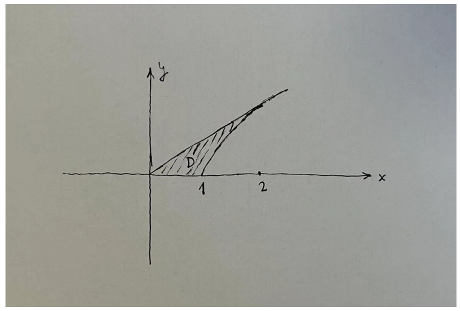
$$|S| = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 a\sin^3 t \cdot (a\cos^3 t)' dt = 12a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos^2 t dt$$

$$= 12a^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 t dt \right) = 12a^2 \left(\frac{3!!}{4!!} - \frac{5!!}{6!!} \right) \frac{\pi}{2} = \frac{3}{8}\pi a^2.$$

解答完毕.

以下五道题是关于计算旋转体体积和表面积.

题 4. 在曲线 $y = \sqrt{x-1}$ 的某点 (x_0, y_0) 处作切线, 使得该切线过原点. 求切点 (x_0, y_0) 的坐标和切线方程. 进一步求由切线, x 轴, 以及曲线本身所围的平面有界区域 D, 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的表面面积. 如图所示.



解: 曲线 $y=\sqrt{x-1}$ 在点 (x_0,y_0) 处的切线方程为

$$y-y_0=\frac{1}{2\sqrt{x_0-1}}(x-x_0).$$

由假设切线过原点, 即 $(x,y)=(0,0)$ 满足上述方程, 故

$$y_0=\frac{x_0}{2\sqrt{x_0-1}}.$$

再与方程 $y_0=\sqrt{x_0-1}$ 联立即可解得 $(x_0,y_0)=(2,1)$. 由此得切线方程为 $y=\frac{1}{2}x$. 再来考虑旋转体的表面积. 表面积由两部分组成, 一是由曲线 $y=\sqrt{x-1}$ 绕 x 轴旋转一周所得到的旋转体表面积, 记作 A_1; 另一部份是由切线绕 x 轴旋转一周所得到的旋转体表面积, 记作 A_2. 根据旋转面的计算公式, 我们有

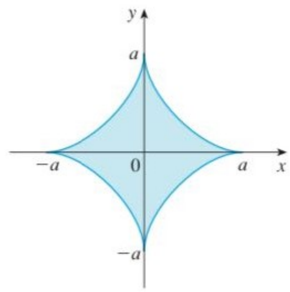
$$A_1=2\pi\int_1^2 y\sqrt{1+(y')^2}dx=2\pi\int_1^2\sqrt{x-1}\sqrt{1+\frac{1}{4(x-1)}}dx$$

$$=\pi\int_1^2\sqrt{4x-3}dx=\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1);$$

$$A_2=2\pi\int_0^2 y\sqrt{1+(y')^2}dx=2\pi\int_0^2\frac{1}{2}x\sqrt{1+\frac{1}{2^2}}dx=\sqrt{5}\pi$$

于是所求面积为 $A=A_1+A_2=\frac{\pi}{6}(11\sqrt{5}-1)$. 解答完毕.

题 5. 求由星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ $(a>0)$ 绕 x 轴旋转所得旋转体体积(如图).



解: 由方程 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 可解得 $y^2=(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^3$ 于是所求体积为

$$V=\pi\int_{-a}^{a}y^2(x)dx=2\pi\int_0^a(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^3dx$$

$$=2\pi\int_0^a\left(a^2-3a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}}+3a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}}-x^2\right)dx=\frac{32\pi a^3}{105}.$$

解答完毕.

题 6. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导且大于零, 且满足 $xf'(x)=f(x)+\frac{3a}{2}x^2$, 其中 a 为常数. 再设曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=0$ 和 $x=1$ 所围的图形 S 的面积为 2. (1) 求函数 $f(x)$; (2) 当 a 为何值时, 图形 S 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积最小.

提示: 由假设 $xf'(x)=f(x)+\frac{3a}{2}x^2$ 得

$$\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{3a}{2},\quad \text{此即}\quad \left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\frac{3a}{2},$$

故由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性, 对关系式两边求不定积分, 可确定 $f(x)$ 的含有任意常数的表达式, 再由已给的面积关系确定, 从而可以讨论旋转体的体积.

解: (1) 由已知条件 $xf'(x)=f(x)+\frac{3a}{2}x^2$ 可得

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{3a}{2}.\quad (x\neq 0).$$

由此得

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{3ax}{2}+C\quad \text{或}\quad f(x)=\frac{3ax^2}{2}+Cx,\quad x\in[0,1].$$

由假设图形 S 的面积为 2 可知

$$2=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(\frac{3ax^2}{2}+Cx\right)dx=\frac{a}{2}+\frac{C}{2}.$$

故 $C=4-a$. 因此 $f(x)=\frac{3ax^2}{2}+(4-a)x$.

(2). 求旋转体的体积

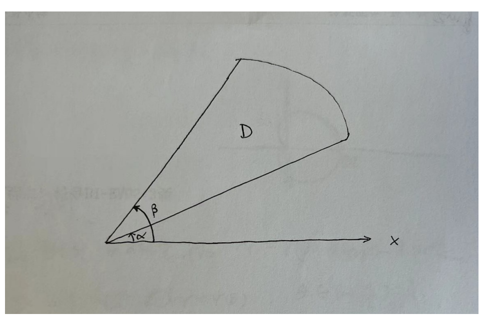
$$V=V(a)=\pi\int_0^1 f^2(x)dx=\pi\int_0^1\left(\frac{3ax^2}{2}+(4-a)x\right)^2dx=\left(\frac{a^2}{30}+\frac{a}{3}+\frac{16}{3}\right)\pi.$$

令 $V'(a)=0$, 即 $(\frac{a}{15}+\frac{1}{3})\pi=0$. 解之得唯一驻点 $a=-5$. 由于函数 $V(x)$ 的二阶导数在驻点 $x=-5$ 的值为 $V''(-5)=\frac{\pi}{15}>0$, 故 $a=-5$ 为体积 $V(a)$ 的唯一极小值点, 从而是最小值点. 因此当 $a=-5$ 时旋转体体积最小. 解答完毕.

题 7. 设 $r=r(\theta)$, $\alpha\le\theta\le\beta$, 为极坐标曲线, 记图形

$$D=\Big\{(r,\theta),\ 0\le r\le r(\theta),\alpha\le\theta\le\beta\Big\},$$

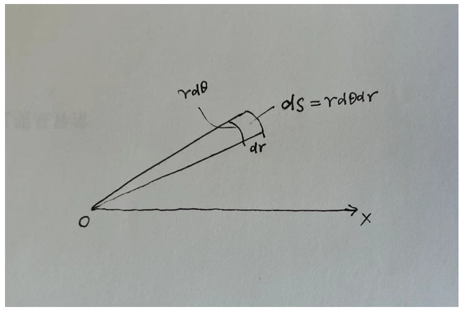
其中 $0\le\alpha<\beta\le\pi$, $r(\theta)$ 是区间 $[\alpha,\beta]$ 上非负的连续函数. 如图所示.



证明由图形 D 绕极轴(x轴)旋转一周所得旋转体的体积为

$$V=\frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\theta)\sin\theta d\theta.$$

<u>证明大意</u>: 利用微元法证明. 取面积微元 $dS=rd\theta dr$, 如图所示.



微元 dS 绕极轴旋转一周所得的环形立体的体积微元为

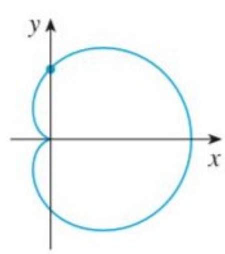
$$dV = 2\pi y dS = 2\pi r \sin\theta dS = 2\pi r \sin\theta \cdot r d\theta dr. = 2\pi r^2 \sin\theta d\theta dr.$$

于是所求立体体积(这里本质上是作二重积分, 下个学期介绍)

$$V = \int dV = 2\pi \int_\alpha^\beta \sin\theta d\theta \int_0^{r(\theta)} r^2 dr = \frac{2\pi}{3} \int_\alpha^\beta r^3(\theta) \sin\theta d\theta.$$

证毕

题 8. 求心脏线 $r = a(1+\cos\theta)$ 绕极轴旋转一周所得旋转体的体积, 如图所示.



解: 利用上题的体积公式计算:

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_0^\pi r^3 \sin\theta d\theta = \frac{2\pi}{3} \int_0^\pi a^3 (1+\cos\theta)^3 \sin\theta d\theta$$

$$= \frac{2\pi a^3}{3} \left[-\frac{(1+\cos\theta)^4}{4} \right]_0^\pi = \frac{8a^3\pi}{3}.$$

解答完毕.

二．积分估计(积分不等式) (续)

说明: 我们常常需要对积分做适当估计. 一方面我们所考虑的积分许多情况下很难给出精确地算出来, 另一方面, 精确计算也不必要. 在以前的习题课里, 我们讨论过类似问题. 由于这个论题的重要性, 我们继续这方面的讨论.

题 9. 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上二阶可导, $a>0$ 且 $f''(x)\geq 0$, $\forall x\in[0,a]$. 证明

$$\int_0^a f(x)dx \geq af\Big(\frac{a}{2}\Big).$$

证: 将 $f(x)$ 在点 $x=\frac{a}{2}$ 展开成一阶 Taylor 公式, 带 Lagrange 余项:

$$f(x)=f\Big(\frac{a}{2}\Big)+f'\Big(\frac{a}{2}\Big)\Big(x-\frac{a}{2}\Big)+\frac{1}{2}f''(\xi)\Big(x-\frac{a}{2}\Big)^2,$$

其中 ξ 介于 x 和 $\frac{a}{2}$ 之间. 由假设 $f''(x)\geq 0$ 知函数 $f(x)$ 于区间 $[0,a]$ 下凸. 因此

$$f(x)\geq f\Big(\frac{a}{2}\Big)+f'\Big(\frac{a}{2}\Big)\Big(x-\frac{a}{2}\Big),\quad x\in[0,a].$$

关于上述不等式两边从 0 到 a 积分, 并注意到 $\int_0^a(x-\frac{a}{2})dx=0$, 我们就得到

$$\int_0^a f(x)dx \geq af\Big(\frac{a}{2}\Big),\quad x\in[0,a].$$

证毕.

题 10. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 二阶可导且 $f''(x)\leq 0$, $\forall x\in[0,1]$. 证明 $\int_0^1 f(x^2)dx\leq f(\frac{1}{3})$.

证: 证明思想同上题. 由条件 $f''(x)\leq 0$ 可知函数 $f(x)$ 上凸. 于是

$$f(x)\leq f\Big(\frac{1}{3}\Big)+f'\Big(\frac{1}{3}\Big)\Big(x-\frac{1}{3}\Big),\quad \forall x\in[0,1].$$

于上式中用 x^2 替换 x 得

$$f(x^2)\leq f\Big(\frac{1}{3}\Big)+f'\Big(\frac{1}{3}\Big)\Big(x^2-\frac{1}{3}\Big),\quad \forall x\in[0,1].$$

对上式两边从 0 到 1 积分, 并注意到 $\int_0^1(x^2-\frac{1}{3})dx=0$. 因此我们就得到 $\int_0^1 f(x^2)dx \le f(\frac{1}{3})$.

推广: 在题目假设的条件下, 我们可以类似证明 $\int_0^1 f(x^n)dx \le f(\frac{1}{n+1})$, n 为任意正整数.

题 11. 设 $f(x)$ 为 $[0,2\pi]$ 上的单调减函数, 证明对任何正整数 n 成立

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx \ge 0.$$

证: 将积分区间按照 $\sin nx$ 的符号分段

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{\frac{2k\pi}{n}}^{\frac{(2k+1)\pi}{n}} f(x)\sin nx dx + \int_{\frac{(2k+1)\pi}{n}}^{\frac{(2k+2)\pi}{n}} f(x)\sin nx dx\right).$$

考虑上述括号里的两个积分. 对第一个积分

$$\int_{\frac{2k\pi}{n}}^{\frac{(2k+1)\pi}{n}} f(x)\sin nx dx$$

作变量代换 $nx=2k\pi+t$ 得

$$\int_{\frac{2k\pi}{n}}^{\frac{(2k+1)\pi}{n}} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{n}\int_0^{\pi} f\left(\frac{2k\pi+t}{n}\right)\sin t dt.$$

对第二个积分

$$\int_{\frac{(2k+1)\pi}{n}}^{\frac{(2k+2)\pi}{n}} f(x)\sin nx dx$$

作变量代换 $nx=(2k+1)\pi+t$ 得

$$\int_{\frac{(2k+1)\pi}{n}}^{\frac{(2k+2)\pi}{n}} f(x)\sin nx dx = -\frac{1}{n}\int_0^{\pi} f\left(\frac{(2k+1)\pi+t}{n}\right)\sin t dt.$$

由于 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调减少, 且 $\sin x$ 在 $[0,\pi]$ 上非负, 所以

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi}\left[f\left(\frac{2k\pi+t}{n}\right) - f\left(\frac{(2k+1)\pi+t}{n}\right)\right]\sin t dt \ge 0.$$

证毕.