线性代数习题解答

《线性代数与几何-上》

习题 5.1

题目：检验以下集合对于所指定的加法和数乘运算是否构成线性空间. 若是线性空间, 求出基与维数.

(1) 全体 n 阶对称矩阵 (反对称矩阵、上三角阵、对角矩阵), 对于矩阵的加法和数乘;

(2) 平面上全体向量, 关于通常的加法及如下定义的数乘: $k\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}$;

(3) 平面上全体向量, 两个运算定义为

$\boldsymbol{\alpha} \oplus \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}$,

$k \circ \boldsymbol{\alpha} = k\boldsymbol{\alpha}$;

(4) 全体正实数 $\mathbb{R}^+$, 两个运算定义为

$a \oplus b = ab$,

$k \circ a = a^k$.

解答：

(1)

- **结论：**对称矩阵、反对称矩阵、上三角矩阵、对角矩阵在矩阵加法和数乘下均构成线性空间。
- **对称矩阵：**维数为 $\frac{n(n+1)}{2}$，基为形如 E_{ii} 的矩阵（共 n 个）和 $E_{ij} + E_{ji}$ $(i < j)$ 的矩阵（共 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个）。
- **反对称矩阵：**维数为 $\frac{n(n-1)}{2}$，基为形如 $E_{ij} - E_{ji}$ $(i < j)$ 的矩阵。
- **上三角矩阵：**维数为 $\frac{n(n+1)}{2}$，基为形如 E_{ij} $(i \leq j)$ 的矩阵。
- **对角矩阵：**维数为 n，基为形如 $\{E_{ii} \mid i = 1, \dots, n\}$。

(2)

- **结论：**不构成线性空间。
- **理由：**不满足分配律 $(k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha$。按定义左边为 α，右边为 $\alpha + \alpha = 2\alpha$，仅当 $\alpha = 0$ 时成立。

(3)

- **结论：**不构成线性空间。

- **理由**：不满足交换律 $\boldsymbol{\alpha} \oplus \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}$，而 $\boldsymbol{\beta} \oplus \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}$。显然两者不等。

(4)

- **结论**：构成线性空间。
- **维数与基**：维数为 1，基可取**任意非** 1 的正实数。

习题 5.3

题目：在 $\mathbb{R}^4$ 中，求向量 $\boldsymbol{\beta}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 下的坐标.

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix};$

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$

解答：

(1) 设 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$，解方程组 $AX = \beta$。

- **结果**：坐标为 $X = \left(\frac{5}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)^{\mathrm{T}}$。

(2) 设 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$，解方程组 $AX = \beta$。

- **结果**：坐标为 $X = (1, 0, -1, 0)^{\mathrm{T}}$。

习题 5.4

题目：求由基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3, \boldsymbol{\varepsilon}_4$ 到基 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3, \boldsymbol{\eta}_4$ 的过渡矩阵.
(1) $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3 = \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{\varepsilon}_4 = \boldsymbol{e}_4$ 是自然基,
$\boldsymbol{\eta}_1 = (2, 1, -1, 1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\eta}_2 = (0, 3, 1, 0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\eta}_3 = (5, 3, 2, 1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\eta}_4 = (6, 6, 1, 3)^{\mathrm{T}};$
(2) $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = (1, 1, 1, 1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\varepsilon}_2 = (1, 2, 1, 1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\varepsilon}_3 = (1, 1, 2, 1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\varepsilon}_4 = (1, 3, 2, 3)^{\mathrm{T}},$
$\boldsymbol{\eta}_1 = (1, 0, 3, 3)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\eta}_2 = (-2, -3, -5, -4)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\eta}_3 = (2, 2, 5, 4)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\eta}_4 = (-2, -3, -4, -4)^{\mathrm{T}}.$

解答：

(1) 由于第一组基是自然基，过渡矩阵 P 即为由第二组基向量作为列构成的矩阵。

- **结果**： $P = [\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3, \boldsymbol{\eta}_4] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$。

(2) 设第一组基构成的矩阵为 A，第二组为 B，过渡矩阵 P 满足 $B = AP$，即 $P = A^{-1}B$。

- **结果：** $P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$。

习题 5.5

题目： 在次数小于或等于 n 的多项式空间 $\mathbb{R}_{n+1}[x]$ 中，有两组基

$1, x, x^2, \cdots, x^n;\quad 1, x-a, (x-a)^2, \cdots, (x-a)^n.$

求由基 $1, x, x^2, \cdots, x^n$ 到基 $1, x-a, (x-a)^2, \cdots, (x-a)^n$ 的过渡矩阵，并求 $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ 在这两组基下的坐标.

解答：

- **过渡矩阵 P：**

  根据二项式展开 $(x-a)^k = \sum_{i=0}^{k} C_k^i x^i (-a)^{k-i}$，

$$P = \begin{bmatrix} C_0^0 & C_1^0(-a) & C_2^0(-a)^2 & C_3^0(-a)^3 & \cdots & C_n^0(-a)^n \\ 0 & C_1^1 & C_2^1(-a) & C_3^1(-a)^2 & \cdots & C_n^1(-a)^{n-1} \\ 0 & 0 & C_2^2 & C_3^2(-a) & \cdots & C_n^2(-a)^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & C_3^3 & \cdots & C_n^3(-a)^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & C_n^n \end{bmatrix}.$$

- **坐标：**
  - 在基 $1, x, \ldots, x^n$ 下：坐标为 $(a_0, a_1, \ldots, a_n)^{\mathrm{T}}$。
  - 在基 $1, (x-a), \ldots, (x-a)^n$ 下：根据泰勒展开，坐标为 $\left(f(a), f'(a), \frac{f''(a)}{2!}, \ldots, \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\right)^{\mathrm{T}}$。

习题 5.6

题目： 在所有 2×2 矩阵构成的线性空间中，证明

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

构成一组基，并求矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ 在这组基下的坐标.

解答：

- **证明：**

  在所有 2×2 矩阵构成的线性空间 $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ 中，维数 $\dim(M_{2\times 2}) = 4$。给定四个矩阵：

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_4 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

要证明它们构成一组基，只需要证明这四个矩阵**线性无关**即可。设存在常数 x_1, x_2, x_3, x_4 使得：

$$x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3 + x_4A_4 = \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

对应元素相加得到线性方程组：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

解得 $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$，所以这四个矩阵线性无关。因此 A_1, A_2, A_3, A_4 构成 $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ 的一组基。

- **求坐标：**

  设 $\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ 在该基下的坐标为 $(x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}}$。则需满足：

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

  解得：$(x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}} = \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, -1, 0\right)^{\mathrm{T}}$。

《线性代数入门》

习题 7.1.1

题目：在所有正实数构成的集合 $\mathbb{R}^+$ 上，定义加法和数乘运算：

$$a \oplus b := ab, \quad k \odot a := a^k, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^+, k \in \mathbb{R}.$$

判断 $\mathbb{R}^+$ 对这两个运算是否构成 $\mathbb{R}$ 上的线性空间.

解答：

结论： $\mathbb{R}^+$ 对这两个运算构成 $\mathbb{R}$ 上的线性空间。

证明：我们需要验证线性空间的八条运算法则：

1. **加法结合律：** $(a \oplus b) \oplus c = (ab)c = a(bc) = a \oplus (b \oplus c)$。
2. **加法交换律：** $a \oplus b = ab = ba = b \oplus a$。
3. **零元素**：取 $0_V = 1$，则 $1 \oplus a = 1 \cdot a = a$。
4. **负元素**：对于任意 a，取其负元素为 a^{-1}，则 $a \oplus a^{-1} = a \cdot a^{-1} = 1 = 0_V$。
5. **单位数：** $1 \cdot a = a^1 = a$。
6. **数乘结合律：** $k \odot (l \odot a) = (a^l)^k = a^{kl} = (kl) \odot a$。

7. **数乘对数的分配律：** $(k+l)\odot a = a^{k+l} = a^k \cdot a^l = (k\odot a)\oplus(l\odot a)$。

8. **数乘对向量的分配律：** $k\odot(a\oplus b) = (ab)^k = a^k \cdot b^k = (k\odot a)\oplus(k\odot b)$。

习题 7.1.5

题目：设 $\mathcal{V}$ 是以 0 为极限的实数序列全体：$\mathcal{V} = \{\{a_n\} \mid \lim_{n\to\infty} a_n = 0\}$。定义加法和数乘分别为

$$\{a_n\}+\{b_n\} = \{a_n+b_n\}; \quad k\{a_n\} = \{ka_n\}, k\in\mathbb{R}.$$

证明 $\mathcal{V}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间。

解答：

证明：

1. **封闭性：**
   - **加法的封闭性：**设 $\{a_n\}\in\mathcal{V}$ 且 $\{b_n\}\in\mathcal{V}$，则 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 且 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$。考虑它们的和序列 $\{a_n+b_n\}$，根据极限的加法运算法则：

     $$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = 0+0 = 0.$$

     因此，$\{a_n+b_n\}\in\mathcal{V}$。
   - **数乘的封闭性：**设 $\{a_n\}\in\mathcal{V}$，$k\in\mathbb{R}$。根据极限的数乘运算法则：

     $$\lim_{n\to\infty}(ka_n) = k\cdot\lim_{n\to\infty} a_n = k\cdot 0 = 0.$$

     因此，$\{ka_n\}\in\mathcal{V}$。

2. **八条法则：**
   - **加法交换律：** $\{a_n\}+\{b_n\} = \{a_n+b_n\} = \{b_n+a_n\} = \{b_n\}+\{a_n\}$。
   - **加法结合律：** $(\{a_n\}+\{b_n\})+\{c_n\} = \{a_n\}+(\{b_n\}+\{c_n\})$。
   - **存在零元：**考虑常数序列 $\mathbf{0} = \{0,0,0,\dots\}$。显然 $\lim_{n\to\infty} 0 = 0$，所以 $\mathbf{0}\in\mathcal{V}$。且对于任何 $\{a_n\}\in\mathcal{V}$，有 $\{a_n\}+\{0\} = \{a_n\}$。
   - **存在负元：**对于 $\{a_n\}\in\mathcal{V}$，取 $\{-a_n\}$。因为 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$，所以 $\lim_{n\to\infty}(-a_n) = 0$，即 $\{-a_n\}\in\mathcal{V}$。且 $\{a_n\}+\{-a_n\} = \{0\} = \mathbf{0}$。
   - **数乘单位元：** $1\cdot\{a_n\} = \{1\cdot a_n\} = \{a_n\}$。
   - **数乘结合律：** $k(l\{a_n\}) = (kl)\{a_n\}$。
   - **数乘对向量的分配律：** $k(\{a_n\}+\{b_n\}) = k\{a_n\}+k\{b_n\}$。
   - **数乘对标量的分配律：** $(k+l)\{a_n\} = k\{a_n\}+l\{a_n\}$。

结论：集合 $\mathcal{V}$ 对定义的加法和数乘运算封闭，且满足线性空间的所有公理。因此，$\mathcal{V}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间。

习题 7.1.7

题目： 对 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，令 $P(\boldsymbol{A}) = \{f(\boldsymbol{A}) \mid f(x) \in \mathbb{F}[x]\}$。证明 $P(\boldsymbol{A})$ 关于矩阵的加法和数乘构成 $\mathbb{F}$ 上的线性空间。

解答：

证明： 这实际上是要证明 $P(A)$ 是 $M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 的子空间；等价于证明：$\forall X, Y \in P(A), a, b \in \mathbb{F}, aX + bY \in P(A)$。

$X, Y \in P(A)$，则存在 $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$ 使得 $X = f(A), Y = g(A)$，那么令 $h(x) = af(x)+bg(x)$，则 $aX + bY = h(A) \in P(A)$。

习题 7.2.2

题目： 求练习 7.1.1 中线性空间 $\mathbb{R}^+$ 的一组基和维数。

解答：

选择自然对数的底数 e 作为一组基。

对于任意的 $a \in \mathbb{R}^+$：我们可以写成 $a = e^{\ln a}$。

根据数乘定义 $k \odot v = v^k$，令 $v = e$，$k = \ln a$，则有：

$$(\ln a) \odot e = e^{\ln a} = a.$$

由于任意正实数 a 都可以由单个向量 e 经数乘运算得出，且 $e \neq 1$（1 是该空间的零向量，因为 $a \oplus 1 = a \cdot 1 = a$），所以 $\{e\}$ 是该空间的一组基。

其实**任何不等于 1 的正实数** b 都可以作为基，因为 $a = b^{\log_b a} = (\log_b a) \odot b$。

在上述过程中，我们发现只需要**一个**向量（如 e）就可以张成整个空间 $\mathbb{R}^+$，因此，该空间的维数是 $\mathbf{1}$。

习题 7.2.4

题目： 判断练习 7.1.5 中线性空间的维数是否有限。

解答：

维数不是有限的。

证明： 对于任意 $k \geq 1$，定义序列 $A_k = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{k\text{ 个}}, 0, 0, \ldots)$。这些序列都属于 $\mathcal{V}$，且对于任意有限个 A_k 都是线性无关的，故维数无限。

习题 7.2.5

题目： 判断 $\mathbb{R}$ 上的线性空间 $C[-\pi, \pi]$ 内的下列向量组是否线性相关，并求其秩：

1. $\cos^2 x, \sin^2 x$。
2. $\cos^2 x, \sin^2 x, 1$。
3. $\cos 2x, \sin 2x$。
4. $1, \sin x, \sin 2x, \ldots, \sin nx$。
5. $1, \sin x, \sin^2 x, \ldots, \sin^n x$。

解答：

1. 线性无关
   - **分析**：假设存在常数 k_1, k_2 使得 $k_1\cos^2 x + k_2\sin^2 x = 0$ 对任意 $x \in [-\pi, \pi]$ 成立。
     令 $x = 0$，得 $k_1(1) + k_2(0) = 0 \Rightarrow k_1 = 0$。
     令 $x = \pi/2$，得 $k_1(0) + k_2(1) = 0 \Rightarrow k_2 = 0$。
   - **结论**：只有全为 0 的系数能使组合为 0，所以线性无关。**秩为 2**。

2. 线性相关
   - **分析**：根据基本的三角恒等式：$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ 即 $1 \cdot \cos^2 x + 1 \cdot \sin^2 x + (-1) \cdot 1 = 0$。
   - **结论**：存在不全为 0 的系数（1, 1, -1）使得组合为 0。因为前两个向量线性无关，**秩为 2**。

3. 线性无关
   - **分析**：这是三角函数系中的两个不同函数。
     令 $x = 0$，得 $k_1\cos 0 + k_2\sin 0 = 0 \Rightarrow k_1 = 0$。
     令 $x = \pi/4$，得 $k_1\cos(\pi/2) + k_2\sin(\pi/2) = 0 \Rightarrow k_2 = 0$。
   - **结论**： **秩为 2**。

4. 线性无关
   - **分析**：这是正弦正交函数族的一部分。在 $C[-\pi, \pi]$ 上，利用内积定义 $\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$，可以证明：
     $$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin kx dx = \begin{cases} \pi & m = k \neq 0 \\ 0 & m \neq k \end{cases}.$$
     由于它们是正交向量组（且均不为零向量），它们必然线性无关。
   - **结论**： **秩为** $n + 1$。

5. 线性无关
   - **分析**：这是一个关于 $\sin x$ 的多项式形式。设 $t = \sin x$，则该组函数等价于多项式空间中的基 $\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$。如果 $\sum_{i=0}^{n} a_i \sin^i x = 0$ 对整个区间成立，这意味着该 n 次多项式在 $[-\pi, \pi]$ 对应的值域 $[-1, 1]$ 内有无数个根。根据代数基本定理，非零多项式最多只有 n 个根。因此系数 a_i 必须全为 0。
   - **结论**： **秩为** $n + 1$。

习题 7.2.7

题目：给定 $\mathbb{F}$ 中两两不等的数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$。

1. 在线性空间 $\mathbb{F}[x]_n$ 中，令

$$f_i(x) = (x - a_1)\cdots\widehat{(x - a_i)}\cdots(x - a_n), \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

其中 $\widehat{(x - a_i)}$ 表示不含该项。证明，$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ 是 $\mathbb{F}[x]_n$ 的一组基。

2. 设 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 是 $\mathbb{F}$ 中任意 n 个数，找出 $f(x) \in \mathbb{F}[x]_n$，使得 $f(a_i) = b_i, i = 1, 2, \cdots, n$。

解答：

1. 设 $t_1f_1(x)+t_2f_2(x)+\cdots+t_nf_n(x)=0$。取 $x=a_i$，因为 $f_i(a_i)\neq 0$，而对于所有的 $j\neq i$ 有 $f_j(a_i)=0$，则得 $t_i=0$。因此 $f_1(x),\ldots,f_n(x)$ 线性无关。另一方面，显然 $1,x,\ldots,x^{n-1}$ 是 $\mathbb{F}[x]_n$ 的一组基，所以 $\dim_{\mathbb{F}}\mathbb{F}[x]_n=n$。那么 $f_1(x),\ldots,f_n(x)$ 也是 $\mathbb{F}[x]_n$ 的一组基。

2. 我们可以思考这个问题：如果我们能找到 $g_i(x)$ 使得 $g_i(a_i)=1, g_i(a_j)=0\ (\forall j\neq i)$，那么我们令 $f(x)=b_1g_1(x)+\cdots+b_ng_n(x)$ 即可。按照这个思路，答案就明显了：

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{f_i(a_i)}f_i(x).$$