Linear Algebra 2025 Fall

Sample Solution

TA: Zhuohan Cai *Week 1-1*

《线性代数入门》Exercise 0.3.1-0.3.5

Exercise 0.3.1 判断下列映射是否是单射、满射、双射，并写出双射的逆映射。

1. **Solution:** 双射。逆映射为 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto x-1$.
2. **Solution:** 双射。逆映射为 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto \dfrac{x}{2}$.
3. **Solution:** 既不是单射，也不是满射。
4. **Solution:** 既不是单射，也不是满射。
5. **Solution:** 单射。
6. **Solution:** 双射。逆映射为 $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ x\mapsto \log x$.
7. **Solution:** 双射。逆映射为

$$f:[-1,1]\to\left[-\tfrac{3\pi}{2},-\tfrac{\pi}{2}\right],\quad x\mapsto -\arcsin(x)-\pi.$$

（说明：标准 $\arcsin:[-1,1]\to[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 是 $\sin:[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\to[-1,1]$ 的逆映射。需将 f 分解为 $g:\left[-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $g(x)=-x-\pi$, 与 $h:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$, $h(x)=\sin x$, 再取逆映射。）

Exercise 0.3.2 对复合映射 $f=g\circ h$，证明或举出反例。

1. **Solution:** 正确。设 $g\circ g'=id$, $h\circ h'=id$，则

$$f\circ(h'\circ g')=g\circ h\circ h'\circ g'=g\circ id\circ g'=g\circ g'=id.$$

故 f 是满射。

2. **Solution:** 正确。设 $g'\circ g=id$, $h'\circ h=id$，则

$$(h'\circ g')\circ f=h'\circ g'\circ g\circ h=h'\circ id\circ h=h'\circ h=id.$$

故 f 是单射。

3. **Solution:** 错误。反例：$h:\{0\}\to\{0,1\}$, $0\mapsto 0$；$g:\{0,1\}\to\{0\}$, $0,1\mapsto 0$。则 $f=id_{\{0\}}$.

4. **Solution:** 正确。考虑逆否命题：若 f 是满射，则 g 是满射。设 $f\circ f'=id$，即 f' 为 f 右逆。$id=f\circ f'=g\circ h\circ f'=g\circ(h\circ f')=g\circ g'$，可知 g 有右逆 $g'=h\circ f'$，因此 g 是满射。

5. **Solution:** 错误。反例：$h:\{0\}\to\{0,1\}$, $0\mapsto 0$；$g:\{0,1\}\to\{0\}$, $0,1\mapsto 0$。则 $f=id_{\{0\}}$.

6. **Solution:** 正确。考虑逆否命题：若 f 是单射，则 h 是单射。设 $f'\circ f=id$，即 f' 为 f 左逆。$id=f'\circ f=f'\circ g\circ h=(f'\circ g)\circ h=h'\circ h$，可知 h 有左逆 $h'=f'\circ g$，因此 h 是单射。

7. **Solution:** 错误。反例：$h:\{0\}\to\{0,1\}$, $0\mapsto 0$；$g:\{0,1\}\to\{0\}$, $0,1\mapsto 0$。则 $f=id_{\{0\}}$.

Remark 1. *第 4 和第 6 小题利用了结论“映射 f 是单射当且仅当左可逆，是满射当且仅当右可逆”。网络学堂讨论区有同学讨论过本题的一般情况拓展，即映射 $f=g_1\circ g_2\circ\cdots\circ g_n$，证明思路类似。*

Exercise 0.3.3

1. **Solution:** 陪域 $[2,\infty)$.

2. **Solution:** 反证：假设 f 不是单射，则 $\exists x_1\neq x_2\in[0,1]$，有 $f(x_1)=f(x_2)\in\mathbb{R}$，但是由于 $x_1=f(x_1)=f(x_2)=x_2$，得 $x_1=x_2$，矛盾.

Exercise 0.3.4 下列 $\mathbb{R}$ 上的变换，哪些满足交换律 $f\circ g=g\circ f$?

Solution: 2、4 满足，其余不满足.

Exercise 0.3.5 对 $f(x)=2x+1$, $g(x)=ax+b$，求实数 a,b 使得 $f\circ g=g\circ f$。

Solution:

$$(f\circ g)(x)=2(ax+b)+1,\quad (g\circ f)(x)=a(2x+1)+b.$$

解得当且仅当 $a=b+1$.