微积分A1第七次习题课讨论题参考解答 杨利军 Nov. 24 - 30, 2025

本次习题课主要有两个内容:
一. 关于凸函数. 关于凸函数的研究及其应用, 形成了数学的一大分支, 即凸分析. 这个分支与最优化理论密切相关. 以下我们以习题的形式, 再提供一些凸函数的性质和特征, 以拓展课本里关于凸函数的基本概念和性质.
二. Taylor 展式及其应用

一. 关于凸函数.

讨论题 1*: 设 $f(x)$ 于 (a,b) 上连续. 证明若 $f(x)$ 满足中间值(下)凸性条件即

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \le \frac{1}{2}\Big(f(x_1)+f(x_2)\Big), \quad \forall x_1, x_2 \in (a,b), \tag{1}$$

则 $f(x)$ 为区间 (a,b) 上的下凸函数, 即 $f(x)$ 满足凸性条件：

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in (a,b), \quad \forall \lambda \in (0,1). \tag{2}$$

注: 凸函数概念是由 Jensen (1859-1925, 丹麦数学家)引入的. 最初他定义满足中间值凸性条件 (1) 的函数称作(下)凸函数. 上述结论表明, 对于连续函数而言, 这两个凸性条件等价。
提示: 证明 (i) 对于任意正整数 n, 我们有

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right) \le \frac{1}{n}\left(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\right), \quad \forall x_1, x_2, \cdots, x_n \in (a,b). \tag{3}$$

(ii) 条件 (2) 当 λ 为有理数时成立.

证明: (i) 我们首先利用 Cauchy 的向前向后归纳法 (参见第一次习题课中关于 Cauchy 不等式的证明) 证明不等式 (3). 首先不难看出当凸性条件 (1) 成立时, 条件 (2) 对于 $n=4$ 成立. 证明如下. 对于 $\forall x_1, x_2, x_3, x_4 \in (a,b)$, 记

$$y_1 = \frac{x_1+x_2}{2}, \quad y_2 = \frac{x_3+x_4}{2}.$$

于是

$$f\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\right)=f\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)\le\frac{1}{2}\left(f(y_1)+f(y_2)\right)$$
$$=\frac{1}{4}\Big(f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)\Big).$$

由归纳法不难证明不等式 (3) 当 $n=2^k$ 时成立, 即

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{2^k}}{2^k}\right)\le\frac{1}{2^k}\Big(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{2^k})\Big),\quad\forall x_1,x_2,\cdots,x_{2^k}\in(a,b).$$

这只要反复利用凸性条件 (1) 即可. 现假设不等式 (3) 对 n 成立, 要证不等式 (3) 对 $n-1$ 成立. 对于任意 $n-1$ 个点 $\forall x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}\in(a,b)$, 令

$$x_n=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1},$$

则显然 $x_n\in(a,b)$, 且

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1}.$$

根据假设我们有

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\right)=f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\le\frac{1}{n}\Big(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\Big)$$
$$=\frac{1}{n}\Big(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{n-1})\Big)+\frac{1}{n}f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\right).$$

由此得

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)\le\frac{1}{n}\Big(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{n-1})\Big).$$

因此

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\right)\le\frac{1}{n-1}\Big(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{n-1})\Big).$$

(ii)　我们来证明凸性条件 (2) 对于 $\lambda=\frac{p}{q}\in(0,1)$ 为有理数时成立, 这里 p 和 q 均为正整数, 且 $p<q$. 对于 $x_1,x_2\in(a,b)$ 我们有

$$\frac{p}{q}x_1+\left(1-\frac{p}{q}\right)x_2=\frac{x_1+\cdots+x_1+x_2+\cdots+x_2}{q},$$

其中分子为 p 个 x_1 与 $q-p$ 个 x_2 之和. 于是

$$f\left(\frac{p}{q}x_1+\left(1-\frac{p}{q}\right)x_2\right)=f\left(\frac{x_1+\cdots+x_1+x_2+\cdots+x_2}{q}\right)$$

$$\le\frac{1}{q}\Big[pf(x_1)+(q-p)f(x_2)\Big]=\frac{p}{q}f(x_1)+(1-\frac{p}{q})f(x_2).$$

(iii) 对于任意 $\lambda\in(0,1)$, 可取一列有理数 $r_n\in(0,1)$, 使得 $r_n\to\lambda$. 利用 (ii) 中的结论知

$$f(r_nx_1+(1-r_n)x_2)\le r_nf(x_1)+(1-r_n)f(x_2),\quad \forall x_1,x_2\in(a,b).$$

在上式中令 $n\to+\infty$, 并利用函数 $f(x)$ 的连续性就得到

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\le\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2),\quad \forall x_1,x_2\in(a,b).$$

证毕.

讨论题 2: 设函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上可导, 则 $f(x)$ 于 (a,b) 下凸的一个充分必要条件是, 曲线 $y=f(x)$ 始终位于其上任意点切线的上方, 即对于任意点 $x_0\in(a,b)$, 成立

$$f(x)\ge f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0),\quad \forall x\in(a,b).\tag{4}$$

进一步 $f(x)$ 于 (a,b) 严格下凸的充分必要条件是, 不等式 (4) 对于 $x\ne x_0$ 严格成立. (这是课本第120页习题4.5第9题)

<u>证明</u>: 必要性. 设 $f(x)$ 于 (a,b) 下凸, 则其导函数 $f'(x)$ 单调上升(见课本第117页定理4.5.3). 于是对于任意给定的 $x\ne x_0$, 我们有

$$f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0)\ge f'(x_0)(x-x_0).$$

必要性得证.

充分性. 设不等式 (4) 成立. 对任意两点 $x_1,x_2\in(a,b)$, $x_1<x_2$, 我们有

$$f(x)\ge f(x_1)+f'(x_1)(x-x_1),\quad \forall x\in(a,b).\tag{5}$$

$$f(x)\ge f(x_2)+f'(x_2)(x-x_2),\quad \forall x\in(a,b).\tag{6}$$

分别于不等式 (5) 和 (6) 中, 令 $x = x_2$ 和 $x = x_1$, 则

$$f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1), \quad f(x_1) \geq f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2).$$

由此得

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq f'(x_1), \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2).$$

这表明导函数 $f'(x)$ 单调上升. 因此 $f(x)$ 于 (a, b) 下凸. 第一部分结论得证. 根据函数严格下凸的充要条件(导函数 $f'(x)$ 严格单调上升), 不难证明上述进一步的结论. 细节略.

讨论题 3: 设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上二次可导. 若 $f(a) > 0$, $f'(a) < 0$ 且 $f''(x) < 0$, $\forall x \in [a, +\infty)$, 则函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上恰有一个零点.

证明: 由假设 $f''(x) < 0, \forall x \in [a, +\infty)$, 可知函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 严格上凸. 从而一阶导数 $f'(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上严格单调下降. 从而 $f'(x) < f'(a) < 0, \forall x > a$. 进而可知函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上严格单调下降. 将题 2 的结论应用于上凸函数即得

$$f(x) < f(a) + f'(a)(x - a), \quad \forall x \in (a, +\infty).$$

这表明 $f(x) \to -\infty, x \to +\infty$ 故函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上恰有一个零点. 证毕.

讨论题 4: 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上二次可导. 若 (i) $f(x)$ 有上界, 即存在 M, 使得 $f(x) \leq M$, $\forall x \in \mathbb{R}$, (ii) $f''(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, 证明 $f(x)$ 为常数函数.

证明: 由假设 $f''(x) \geq 0$ 可知函数 $f(x)$ 于 $\mathbb{R}$ 下凸. 于是对任意点 $x_0 \in \mathbb{R}$, 我们有

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

由上式可知, 若 $f'(x_0) > 0$, 则 $f(+\infty) = +\infty$; 若 $f'(x_0) < 0$, 则 $f(-\infty) = +\infty$. 上述两种情形均与假设 $f(x)$ 有上界相矛盾. 因此必有 $f'(x_0) = 0$. 由于点 x_0 是任意取的. 因此一阶导函数 $f'(x) \equiv 0$. 故 $f(x)$ 为常数函数. 证毕.

讨论题 5. 设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上可微的下凸函数. 若存在 $x_0 \in (a,b)$, 使得 $f'(x_0)=0$, 证明 x_0 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值点. (课本第120页习题4.5第8题)

证: 由于 $f(x)$ 下凸且可导, 故其导函数 $f'(x)$ 单调上升. 因为 $f'(x_0)=0$, 故当 $x<x_0$ 时, $f'(x) \le f'(x_0)=0$, 即 $f(x)$ 单调下降, 而当 $x>x_0$ 时, $f'(x)\ge f'(x_0)=0$, 即 $f(x)$ 单调上升. 因此 x_0 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值点. 命题得证.

二. Taylor 展式及其应用

讨论题 6: (课本第125页第4章总复习题题17) 设 $f(x)$ 在 $(-r,r)$ 上二阶可导, 若

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^2, \tag{7}$$

求 $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, 并计算极限

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

解: 由假设 (7) 可知

$$\lim_{x\to 0}\ln\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=2,$$

即

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)}{x}=2 \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to 0}\ln\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)=0.$$

因此 $\frac{f(x)}{x}\to 0$. 由此可知 $f(0)=0$ 且 $f'(0)=0$. 记 $\triangle(x)=x+\frac{f(x)}{x}$, 则

$$\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=(1+\triangle)^{\frac{1}{\triangle}\cdot\frac{\triangle}{x}}.$$

而

$$\frac{\triangle(x)}{x}=\frac{x+\frac{f(x)}{x}}{x}=1+\frac{f(x)}{x^2}\to 1+\frac{1}{2}f''(0),\quad x\to 0.$$

于是

$$\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=(1+\triangle)^{\frac{1}{\triangle}\cdot\frac{\triangle}{x}}\to e^{1+\frac{1}{2}f''(0)}=e^2.$$

因此 $f''(0)=2$. 往下我们来计算极限

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

记 $\delta=\frac{f(x)}{x}$, 则

$$\frac{\delta}{x}=\frac{f(x)}{x^2}\to\frac{1}{2}f''(0)=1.$$

于是

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}\cdot\frac{\delta}{x}}=e.$$

解答完毕.

讨论题 7*. 设 $f(x)$ 于 $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$ 上二次连续可微. 记

$$\begin{aligned}
M_0&=\sup\{|f(x)|,x\in\mathbb{R}\};\\
M_1&=\sup\{|f'(x)|,x\in\mathbb{R}\};\\
M_2&=\sup\{|f''(x)|,x\in\mathbb{R}\}.
\end{aligned}$$

证明若 M_0 和 M_2 均有限, 则 M_1 也有限, 且 $M_1\le\sqrt{2M_0M_2}$ (Landau 不等式).

证明: 对任意 $x,t\in\mathbb{R}$, 由 Taylor 展式得

$$\begin{aligned}
f(x+t)&=f(x)+f'(x)t+\tfrac{1}{2}t^2f''(\xi),\\
f(x-t)&=f(x)-f'(x)t+\tfrac{1}{2}t^2f''(\eta),
\end{aligned}$$

其中 ξ 介于 x 和 $x+t$ 之间, η 介于 x 和 $x-t$ 之间. 上述两式相减得

$$f(x+t)-f(x-t)=2tf'(x)+\frac{t^2}{2}[f''(\xi)-f''(\eta)].$$

由此得

$$2tf'(x)=f(x+t)-f(x-t)-\frac{t^2}{2}[f''(\xi)-f''(\eta)].$$

于上式取绝对值得

$$2|tf'(x)|=\left|[f(x+t)-f(x-t)]-\frac{t^2}{2}[f''(\xi)-f''(\eta)]\right|\le 2M_0+t^2M_2.$$

注意上式对任意 $x\in\mathbb{R}$ 和任意 $t\in\mathbb{R}$ 都成立. 取 $t=1$ 得

$$2|f'(x)|\le 2M_0+M_2.\quad (*)$$

对不等式 (*) 的左边关于 $x\in\mathbb{R}$ 取上确界得 $2M_1\le 2M_0+M_2$, 即 M_1 也有限. 为证明 $M_1\le\sqrt{2M_0M_2}$, 我们由

$$2|t|M_1\le 2M_0+t^2M_2\quad 或\quad 2tM_1\le 2M_0+t^2M_2,\quad \forall t\in\mathbb{R}$$

得

$$t^2M_2-2tM_1+2M_0\ge 0,\quad \forall t\in\mathbb{R}.$$

这说明 t 的二次多项式 $t^2M_2-2tM_1+2M_0$ 非负. 于是 $(-2M_1)^2-4M_0\cdot 2M_2\le 0$, 或 $4M_1^2\le 8M_0M_2$. 此即 $M_1\le\sqrt{2M_0M_2}$.

讨论题 8. 求函数 $f(x)=\ln\frac{3+x}{2-x}$ 的 n 阶 Maclaurin 展式, 带 Peano 余项.

解:

$$\begin{aligned}f(x)=\ln\frac{3+x}{2-x}&=\ln(3+x)-\ln(2-x)=\ln 3+\ln(1+\frac{x}{3})-\ln 2-\ln(1-\frac{x}{2})\\&=\ln\frac{3}{2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\frac{x}{3}\right)^k-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\frac{-x}{2}\right)^k+o(x^n)\\&=\ln\frac{3}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2^k}+\frac{(-1)^{k-1}}{3^k}\right)\frac{x^k}{k}+o(x^n).\end{aligned}$$

讨论题 9. 求函数 $f(x)=\frac{x^2}{1+\sin x}$ 带 Peano 余项 $o(x^6)$ 的 Maclaurin 展式.

解:

$$\begin{aligned}f(x)&=x^2\left(1-\sin x+\big(\sin x\big)^2-\big(\sin x\big)^3+\big(\sin x\big)^4\right)+o(x^6)\\&=x^2\left(1-\big(x-\frac{1}{6}x^3\big)+\big(x-\frac{1}{6}x^3\big)^2-\big(x-\frac{1}{6}x^3\big)^3+\big(x-\frac{1}{6}x^3\big)^4\right)+o(x^6)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= x^2\left(1 - x + \frac{1}{6}x^3 + x^2 - \frac{1}{3}x^4 - x^3 + x^4\right) + o(x^6) \\
&= x^2 - x^3 + x^4 - \frac{5}{6}x^5 + \frac{2}{3}x^6 + o(x^6).
\end{aligned}
$$

讨论题 10. 求极限

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{7}{4}}\left(\sqrt[4]{x+1} + \sqrt[4]{x-1} - 2\sqrt[4]{x}\right).$$

解: 令 $t = \frac{1}{x}$, 则当 $x \to +\infty$ 时, $t \to 0^+$, 且

$$
\begin{aligned}
& x^{\frac{7}{4}}\left(\sqrt[4]{x+1} + \sqrt[4]{x-1} - 2\sqrt[4]{x}\right) \\
&= x^2\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}} + \sqrt[4]{1-\frac{1}{x}} - 2\right) = \frac{(1+t)^{\frac{1}{4}} + (1-t)^{\frac{1}{4}} - 2}{t^2} \\
&= \frac{\left(1 + \frac{1}{4}t + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)t^2\right) + \left(1 - \frac{1}{4}t + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)t^2\right) - 2 + o(t^2)}{t^2} \\
&\to \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right) = -\frac{3}{8}.
\end{aligned}
$$

讨论题 11. 求极限

$$\lim_{x\to0^+} \frac{x^x - (\sin x)^x}{x^3}.$$

解: 回忆我们已经求得极限 $\lim_{x\to0^+} x^x = 1$. 故考虑

$$\frac{x^x - (\sin x)^x}{x^3} = x^x \cdot \frac{1 - \left(\frac{\sin x}{x}\right)^x}{x^3} = x^x \cdot \frac{1 - e^{x\ln\frac{\sin x}{x}}}{x^3}.$$

由于

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}{x} = 1 - \frac{1}{6}x^2 + o(x^2),$$

故

$$\frac{1 - \left(\frac{\sin x}{x}\right)^x}{x^3} = \frac{1 - e^{x\ln\left(1 - \frac{1}{6}x^2 + o(x^2)\right)}}{x^3}$$

$$
= \frac{1 - e^{x\ln\left(1-\frac{1}{6}x^2+o(x^2)\right)}}{x\ln\left(1-\frac{1}{6}x^2+o(x^2)\right)} \cdot \frac{x\ln\left(1-\frac{1}{6}x^2+o(x^2)\right)}{x^3}
$$

$$
= \frac{1 - e^{x\ln\left(1-\frac{1}{6}x^2+o(x^2)\right)}}{x\ln\left(1-\frac{1}{6}x^2+o(x^2)\right)} \cdot \frac{\ln\left(1-\frac{1}{6}x^2+o(x^2)\right)}{-\frac{1}{6}x^2+o(x^2)} \cdot \frac{-\frac{1}{6}x^2+o(x^2)}{x^2}.
$$

当 $x \to 0$ 时, 上式第一个因子的极限为 -1, 第二个因子的极限为 1, 第三个因子的极限为 $-\frac{1}{6}$. 因此所求极限为 $\frac{1}{6}$, 即

$$
\lim_{x\to 0^+} \frac{x^x - (\sin x)^x}{x^3} = \frac{1}{6}.
$$

解答完毕.

讨论题 12. 设 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上二次可导, 且

$$
\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(3x)}{x^3} + \frac{f(x)}{x^2}\right) = 0, \qquad (*)
$$

求 $f(0)$, $f'(0)$ 和 $f''(0)$.

解: 由于

$$
\begin{aligned}
\frac{\sin(3x)}{x^3} + \frac{f(x)}{x^2} &= \frac{1}{x^3}\Big(\sin(3x) + xf(x)\Big) \\
&= \frac{1}{x^3}\left[3x - \frac{1}{6}(3x)^3 + x\left(f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2\right) + o(x^3)\right] \\
&= \frac{1}{x^3}\left\{[3 + f(0)]\,x + f'(0)x^2 + \left[\frac{1}{2}f''(0) - \frac{27}{6}\right]x^3 + o(x^3)\right\},
\end{aligned}
$$

故根据假设 (*) 可知, $3 + f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $-\frac{27}{6} + \frac{1}{2}f''(0) = 0$. 因此 $f(0) = -3$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 9$. 解答完毕.

讨论题 13*. 求极限 $\lim_{n\to+\infty} n\sin(2\pi e(n!))$.

解: 回忆函数 e^x 的带 Lagrange 余项的 $n+1$ 阶 Maclaurin 展开式

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{1}{(n+1)!}x^{n+1} + \frac{e^\theta}{(n+2)!}x^{n+2},$$

其中 θ 介于 x 和 0 之间的某个点. 取 $x=1$ 得

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{e^\theta}{(n+2)!}, \quad \theta \in (0,1).$$

故

$$2\pi en! = 2\pi N_n + \frac{2\pi}{n+1} + o(\frac{1}{n}),$$

其中 N_n 为某个正整数. 因此

$$n\sin(2\pi en!) = n\sin\left(\frac{2\pi}{n+1} + o(\frac{1}{n})\right)$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{n+1} + o(\frac{1}{n})\right)}{\frac{2\pi}{n+1} + o(\frac{1}{n})} \cdot \frac{\frac{2\pi}{n+1} + o(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} \to 2\pi.$$

因此所求极限为

$$\lim_{n\to+\infty} n\sin(2\pi e(n!)) = 2\pi.$$

解答完毕.