

线性代数第七周第一次作业解答

《线性代数与几何》

Exercise 2.33

(1) 设 A 为正交矩阵, 证明 $\det(A) = \pm 1$ 。

证明: 由正交矩阵的定义,

$$A^T A = I.$$

对等式两边取行列式, 得

$$\det(A^T A) = \det(I).$$

利用行列式的性质 $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ 以及 $\det(A^T) = \det(A)$, 可得

$$(\det A)^2 = 1.$$

因此,

$$\boxed{\det(A) = \pm 1.}$$

(2) 证明: 两个正交矩阵的乘积仍然是正交矩阵。

证明: 设 A, B 均为正交矩阵, 即

$$A^T A = I, \quad B^T B = I.$$

考虑它们的乘积 $C = AB$, 则

$$C^T C = (AB)^T (AB) = B^T A^T AB = B^T IB = B^T B = I.$$

因此,

$$\boxed{C = AB \text{ 也是正交矩阵。}}$$

Exercise 2.36 已知矩阵按 2×2 分块可写为

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}, \quad A_1 = A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = 0_{2 \times 2}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

方法一：伴随矩阵法

若 M 为可逆方阵，则

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \operatorname{adj}(M),$$

其中 $\operatorname{adj}(M)$ 为 M 的伴随矩阵。对于本题，可先写出 M 的具体 4×4 形式：

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

经计算得

$$\det M = 4, \quad \operatorname{adj}(M) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

于是

$$M^{-1} = \frac{1}{4} \operatorname{adj}(M) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$M^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

方法二：分块矩阵法

由于 $A_3 = 0_{2 \times 2}$ ， M 为上三角分块矩阵，当 A_1 与 A_4 可逆时有公式：

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & -A_1^{-1}A_2A_4^{-1} \\ 0 & A_4^{-1} \end{pmatrix}.$$

计算各分块：

$$A_1^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_4^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

又因为 $A_2 = A_1$, 所以

$$-A_1^{-1}A_2A_4^{-1} = -A_1^{-1}A_1A_4^{-1} = -A_4^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

将以上结果代入得

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ 0_{2 \times 2} & -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$M^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercise 2.38 (1) 设矩阵按四分块写为

$$M = \begin{pmatrix} 0 & D \\ a_n & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $D = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$, 且各 $a_i \neq 0$. 求 M^{-1} .

解: 因为 D 为可逆对角矩阵, $a_n \neq 0$, 可直接验证

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & a_n^{-1} \\ D^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

检验:

$$MM^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & D \\ a_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a_n^{-1} \\ D^{-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_n,$$

其中 $D^{-1} = \text{diag}(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_{n-1}})$; 同理 $M^{-1}M = I_n$. 故

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & a_n^{-1} \\ D^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) 设矩阵

$$M = \begin{pmatrix} 2I_2 & B \\ 0 & I_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

求 M^{-1} 。

解：由于 M 为上三角分块矩阵且 $A = 2I_2$ 、 $D = I_3$ 均可逆，上三角分块矩阵的逆为

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix}.$$

代入计算：

$$A^{-1} = \frac{1}{2}I_2, \quad D^{-1} = I_3, \quad -A^{-1}BD^{-1} = -\frac{1}{2}B = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

因此

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}I_2 & -\frac{1}{2}B \\ 0 & I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}I_2 & -\frac{1}{2}B \\ 0 & I_3 \end{pmatrix}.$$

Exercise 2.39 设分块矩阵

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}, \quad A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

证明： $\det(M) = \det(A+B)\det(A-B)$ 。

证明：

(1) 分块行变换

令分块行变换矩阵

$$P = \begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix},$$

其中 I 为 $n \times n$ 单位矩阵。该矩阵可逆，且

$$\det(P) = \det \begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix} = (-2)^n.$$

左乘 P 相当于把上、下两块行进行“加减”操作：

$$PM = \begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+B & A+B \\ A-B & B-A \end{pmatrix}.$$

(2) 分块列变换

再右乘相同矩阵 P ，对应列的“加减”操作：

$$PMP = \begin{pmatrix} A+B & A+B \\ A-B & B-A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(A+B) & 0 \\ 0 & 2(A-B) \end{pmatrix}.$$

(3) 计算行列式

由行列式的乘法性质可得

$$\det(PMP) = \det(P) \det(M) \det(P) = (\det P)^2 \det(M).$$

另一方面，

$$\det(PMP) = \det \left(\begin{pmatrix} 2(A+B) & 0 \\ 0 & 2(A-B) \end{pmatrix} \right) = 2^{2n} \det(A+B) \det(A-B).$$

代入上式：

$$2^{2n} \det(A+B) \det(A-B) = (\det P)^2 \det(M).$$

由于 $(\det P)^2 = (-2)^{2n} = 2^{2n}$ ，二者相互抵消，得到

$$\boxed{\det(M) = \det(A+B) \det(A-B).}$$

□

Exercise 2.40 设 $A_i \in \mathbb{F}^{n_i \times n_i}$ ($i = 1, \dots, s$) 均可逆, 定义矩阵

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & A_1 \\ \vdots & & A_2 & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ A_s & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{即(左下} \rightarrow \text{右上) 依次为 } A_s, A_{s-1}, \dots, A_1.$$

更精确地说, 分块满足

$$(\mathcal{A})_{i,j} = \begin{cases} A_i, & j = s+1-i, \\ 0, & \text{否则.} \end{cases}$$

逆矩阵形式:

$$\mathcal{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & A_s^{-1} \\ \vdots & & A_{s-1}^{-1} & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ A_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

即沿反对角线 (左下 \rightarrow 右上) 依次为 $A_1^{-1}, A_2^{-1}, \dots, A_s^{-1}$ 。

分块乘法简验: 记上式中的候选逆为 \mathcal{X} , 其分块为

$$\mathcal{X}_{i,j} = \begin{cases} A_{s+1-j}^{-1}, & j = s+1-i, \\ 0, & \text{否则.} \end{cases}$$

则对任意 i, k ,

$$(\mathcal{A}\mathcal{X})_{i,k} = \sum_{j=1}^s \mathcal{A}_{i,j} \mathcal{X}_{j,k} = \mathcal{A}_{i, s+1-i} \mathcal{X}_{s+1-i, k} = A_i \mathcal{X}_{s+1-i, k}.$$

该项仅在 $k = i$ 时非零 (因 $\mathcal{X}_{s+1-i, k}$ 只在 $k = i$ 处非零), 且

$$(\mathcal{A}\mathcal{X})_{i,i} = A_i A_i^{-1} = I_{n_i}, \quad (\mathcal{A}\mathcal{X})_{i,k} = 0 \quad (k \neq i).$$

故 $\mathcal{A}\mathcal{X} = I$ 。同理可得 $\mathcal{X}\mathcal{A} = I$ 。因此 $\mathcal{X} = \mathcal{A}^{-1}$ 。

Exercise 2.41 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 可逆, $\alpha \in \mathbb{R}^n$ 为列向量。证明

$$\det(A - \alpha\alpha^T) = (1 - \alpha^T A^{-1} \alpha) \det A.$$

证明: 考虑分块矩阵

$$K = \begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 1 \end{pmatrix}.$$

步骤一: 用分块“列初等变换”把 K 化为上三角块矩阵并读出 $\det(A - \alpha\alpha^T)$.

右乘分块矩阵

$$R = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -\alpha^T & 1 \end{pmatrix},$$

其行列式为 $\det(R) = 1$ (对角块为 I_n 与 1)。则

$$KR = \begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -\alpha^T & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - \alpha\alpha^T & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

于是

$$\det(K) = \det(KR) = \det(A - \alpha\alpha^T) \cdot 1 = \det(A - \alpha\alpha^T). \quad (1)$$

步骤二: 用分块“行初等变换”把 K 化为下三角块矩阵并读出 $\det(A)(1 - \alpha^T A^{-1} \alpha)$.

左乘分块矩阵

$$L = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -\alpha^T A^{-1} & 1 \end{pmatrix},$$

其行列式同样为 $\det(L) = 1$ 。则

$$LK = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -\alpha^T A^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \alpha \\ 0 & 1 - \alpha^T A^{-1} \alpha \end{pmatrix}.$$

因此

$$\det(K) = \det(LK) = \det(A) (1 - \alpha^T A^{-1} \alpha). \quad (2)$$

步骤三: 比较 (1) 与 (2) 得结论。

由 (1) 与 (2) 相等, 得到

$$\boxed{\det(A - \alpha\alpha^T) = (1 - \alpha^T A^{-1} \alpha) \det A}.$$

□

Exercise 2.42 设

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

则

$$xy^T = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & x_ny_n \end{pmatrix}.$$

因此矩阵

$$A = I_n + xy^T = \begin{pmatrix} 1 + x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & 1 + x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & 1 + x_ny_n \end{pmatrix}.$$

解：利用公式

$$\det(A + uv^T) = (1 + v^T A^{-1}u) \det(A),$$

令 $A = I_n$, $u = x$, $v = y$, 则

$$\det(I_n + xy^T) = (1 + y^T I_n^{-1}x) \det(I_n) = 1 + y^T x.$$

又因为

$$y^T x = \sum_{i=1}^n y_i x_i,$$

所以最终结果为

$$\det(I_n + xy^T) = 1 + \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

《线性代数入门》

Exercise 1.6.1 设矩阵 A 的行简化阶梯形矩阵为 R ，行变换对应的可逆矩阵为 P ，即

$$PA = R.$$

(1) 求分块矩阵 $[A \ 2A]$ 的行简化阶梯形矩阵及对应可逆矩阵。

原矩阵为

$$[A \ 2A],$$

其行变换与 A 相同，因此仍由同一可逆矩阵 P 作用：

$$P[A \ 2A] = [PA \ 2PA] = [R \ 2R].$$

于是

行简化阶梯形矩阵为 $[R \ 2R]$ ，对应可逆矩阵仍为 P 。

(2) 求分块矩阵 $\begin{pmatrix} A \\ 2A \end{pmatrix}$ 的行简化阶梯形矩阵及对应可逆矩阵。

求列分块矩阵

$$M = \begin{pmatrix} A \\ 2A \end{pmatrix}$$

的行简化阶梯形矩阵及其对应可逆变换矩阵。

解：首先，对 M 进行分块消元以消去下方的 $2A$ 。我们用第二块行减去第一块行的 2 倍，即左乘分块初等矩阵

$$Q = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -2I & I \end{pmatrix}, \quad \det(Q) = 1,$$

其中 I 为与 A 同阶的单位矩阵。于是：

$$QM = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -2I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ 2A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}.$$

此时上块仍为 A ，其行简化阶梯形矩阵为 R ，且有

$$PA = R,$$

其中 P 为作用在 A 上的可逆行变换矩阵。

因此, 对 QM 再左乘分块矩阵

$$P' = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

即可得到

$$P'QM = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PA \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}.$$

因此:

行简化阶梯形矩阵为 $\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$, 对应可逆变换矩阵为 $P'Q = \begin{pmatrix} P & 0 \\ -2I & I \end{pmatrix}$.

Exercise 1.6.7 (1) 设 X 为任意 $m \times n$ 矩阵, A, B, C, D 分别为相容的分块矩阵。计算

$$\begin{pmatrix} I_m & X \\ O & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

解: 由分块矩阵乘法法则:

$$\begin{pmatrix} I_m & X \\ O & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m A + X C & I_m B + X D \\ O A + I_n C & O B + I_n D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + X C & B + X D \\ C & D \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} I_m & X \\ O & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + X C & B + X D \\ C & D \end{pmatrix}.$$

(2) 由此判断下列分块矩阵何时可逆, 并在可逆时求其逆。

已知

$$A = I_{n-1}, \quad B = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix}, \quad C = (b_1, b_2, \dots, b_{n-1}), \quad D = a.$$

即矩阵

$$M = \begin{pmatrix} I_{n-1} & B \\ C & a \end{pmatrix}.$$

由 (1) 的结果, 若 $A = I_{n-1}$ 可逆, 则矩阵 M 可逆当且仅当其舒尔补

$$S = D - CA^{-1}B = a - CB = a - \sum_{i=1}^{n-1} b_i c_i$$

非零。

因此 M 可逆当且仅当

$$a - \sum_{i=1}^{n-1} b_i c_i \neq 0.$$

在可逆时, 利用上三角分块矩阵逆公式:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}BS^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BS^{-1} \\ -S^{-1}CA^{-1} & S^{-1} \end{pmatrix},$$

代入 $A = I_{n-1}$ 得

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} I_{n-1} + BS^{-1}C & -BS^{-1} \\ -S^{-1}C & S^{-1} \end{pmatrix}, \quad S = a - \sum_{i=1}^{n-1} b_i c_i.$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} I_{n-1} + \frac{1}{a - \sum b_i c_i} BC & -\frac{1}{a - \sum b_i c_i} B \\ -\frac{1}{a - \sum b_i c_i} C & \frac{1}{a - \sum b_i c_i} \end{pmatrix}, \quad a - \sum_{i=1}^{n-1} b_i c_i \neq 0.$$

Exercise 1.6.19 设

$$A_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix},$$

定义

$$A_1 \triangle B_1 = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & x & 0 & y \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & z & 0 & w \end{pmatrix}.$$

(1) 证明：对任意同阶方阵 A_1, A_2, B_1, B_2 ,

$$(A_1 \triangle B_1)(A_2 \triangle B_2) = (A_1 A_2) \triangle (B_1 B_2).$$

证明：写出分块乘法形式。将 $A_1 \triangle B_1$ 按行、列分为四个 2×2 的方块：

$$A_1 \triangle B_1 = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}, \quad P_{11} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}, \quad P_{12} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix},$$

$$P_{21} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}, \quad P_{22} = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix}.$$

则同理

$$A_2 \triangle B_2 = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix}, \quad Q_{ij} = (\text{对应的 } A_2 \text{ 与 } B_2 \text{ 元素}).$$

直接计算：

$$(A_1 \triangle B_1)(A_2 \triangle B_2) = \begin{pmatrix} P_{11}Q_{11} + P_{12}Q_{21} & P_{11}Q_{12} + P_{12}Q_{22} \\ P_{21}Q_{11} + P_{22}Q_{21} & P_{21}Q_{12} + P_{22}Q_{22} \end{pmatrix}.$$

观察每个乘积项：由于各块均为对角形态 (a/x 在同一行对齐, b/y 对齐, c/z 对齐等), 相加后结果恰好再具有相同的“错位分块”结构, 且其元素正好是

$$(a, b, c, d) \text{ 与 } (x, y, z, w)$$

分别组成的积 $A_1 A_2$ 与 $B_1 B_2$ 的分量。因此：

$$\boxed{(A_1 \triangle B_1)(A_2 \triangle B_2) = (A_1 A_2) \triangle (B_1 B_2).}$$

(2) 证明： $A \triangle B$ 可逆当且仅当 A, B 都可逆, 且

$$(A \triangle B)^{-1} = A^{-1} \triangle B^{-1}.$$

证明：由 (1) 式的乘法封闭性可知, 若 A, B 可逆, 则

$$(A \triangle B)(A^{-1} \triangle B^{-1}) = (AA^{-1}) \triangle (BB^{-1}) = I_2 \triangle I_2 = I_4.$$

因此 $A\triangle B$ 可逆, 且逆矩阵为 $A^{-1}\triangle B^{-1}$ 。

反之, 若 $A\triangle B$ 可逆, 设其逆为 $C\triangle D$, 则由 (1)

$$(A\triangle B)(C\triangle D) = I \Rightarrow (AC)\triangle(BD) = I\triangle I.$$

由定义, $I\triangle I$ 的对角错位结构表明 $AC = I, BD = I$, 从而 A, B 都可逆。

$$\boxed{(A\triangle B)^{-1} = A^{-1}\triangle B^{-1}.}$$

(3) 求矩阵 X , 使得对任意二阶方阵 A, B ,

求矩阵 X , 使得对任意二阶方阵 A, B ,

$$X(A\triangle B)X^{-1} = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}.$$

解: 观察 $A\triangle B$ 与 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$ 的结构:

$$A\triangle B = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & x & 0 & y \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & z & 0 & w \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & y \\ 0 & 0 & z & w \end{pmatrix}.$$

比较可知, 只需将 $A\triangle B$ 的第 2 行与第 3 行交换, 同时第 2 列与第 3 列交换, 即可得到目标矩阵。

1. 一个特解:

令

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

这是置换矩阵, 且 $X_0^{-1} = X_0$ 。

验证:

$$X_0(A\triangle B) = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & x & 0 & y \\ 0 & z & 0 & w \end{pmatrix},$$

再右乘 X_0 (交换第 2、3 列):

$$X_0(A\triangle B)X_0 = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & y \\ 0 & 0 & z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}.$$

所以 X_0 是一个解。

2. 一般解:

设更一般的

$$X = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{pmatrix}, \quad p, q, r, s \neq 0.$$

其逆矩阵为

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} 1/p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r & 0 \\ 0 & 1/q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/s \end{pmatrix}.$$

计算 $T = X(A\triangle B)X^{-1}$:

先算 $X(A\triangle B)$:

$$X(A\triangle B) = \begin{pmatrix} pa & 0 & pb & 0 \\ qc & 0 & qd & 0 \\ 0 & rx & 0 & ry \\ 0 & sz & 0 & sw \end{pmatrix}.$$

再右乘 X^{-1} 得:

$$T = \begin{pmatrix} a & \frac{p}{q}b & 0 & 0 \\ \frac{q}{p}c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \frac{r}{s}y \\ 0 & 0 & \frac{s}{r}z & w \end{pmatrix}.$$

要求 $T = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$ 对任意 A, B 成立, 比较系数得:

$$\frac{p}{q} = 1, \quad \frac{q}{p} = 1, \quad \frac{r}{s} = 1, \quad \frac{s}{r} = 1.$$

即 $p = q, r = s$ 。

3. 最终结果:

所有满足条件的 X 为:

$$X = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \end{pmatrix}, \quad p \neq 0, r \neq 0.$$

对应的逆矩阵为

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} 1/p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r & 0 \\ 0 & 1/p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/r \end{pmatrix}.$$

当 $p = r = 1$ 时, 即为前面的特解 X_0 。

$$X = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \end{pmatrix}, \quad p, r \neq 0$$