

## 线性代数第六周第二次作业解答

### 《线性代数入门》

Exercise 1.5.7, 求矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**的逆** 解：将该矩阵分块表示，将  $A$  按最后一行与第一列分块，有

$$A = \begin{pmatrix} 0_{(n-1) \times 1} & D_{(n-1) \times (n-1)} \\ a_n & 0_{1 \times (n-1)} \end{pmatrix},$$

其中

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

是对角矩阵。若所有  $a_i \neq 0$ ，则  $A$  可逆，其逆矩阵  $A^{-1}$  结构为：

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n^{-1} \\ a_1^{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{n-2}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

**Exercise 1.5.12** 先证明 3, 4, 5

(3) 若存在  $C$  使  $CA = I_n$ , 证明  $Ax = 0$  只有 0 解, 此时  $m$  和  $n$  的关系。

证明: 若  $CA = I_n$ , 设  $Ax = 0$ , 则

$$CAx = I_n x = x = 0,$$

因此  $Ax = 0$  仅有零解, 说明  $A$  的列向量线性无关。由于  $A$  的列向量线性无关, 秩  $\text{rank}(A) = n$ , 因此  $m \geq n$ 。

(4) 若存在  $B$  使  $AB = I_m$ , 证明  $A^T x = 0$ ,  $m$  与  $n$  之间有什么关系。

证明: 设  $y^T A = 0$ , 则

$$y^T = y^T I_m = y^T AB = 0 \cdot B = 0,$$

因此  $y^T A = 0$  仅有 0 解, 即  $A^T x = 0$  仅有 0 解。所以  $A$  的行向量线性无关。行向量线性无关  $\Rightarrow \text{rank}(A) = m$ , 因此  $n \geq m$ 。

(5) 若存在  $C$  使  $CA = I_n$ , 又存在  $B$  使  $AB = I_m$ , 证明  $m = n$ , 且  $B = C$ 。

证明: 由 (1)、(2) 得  $m \geq n$  且  $n \geq m$ , 所以  $m = n$ 。于是  $A$  为可逆矩阵。由逆矩阵的唯一性知  $B = C = A^{-1}$ 。

(1) 设  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ , 能否找到  $B, C$  使得  $AB = I_2$ ,  $CA = I_3$ 。

解: 由于  $m < n$ , 则不存在  $C$  使得  $CA = I_3$  设

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

则

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

解得：

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

因此该  $B$  满足  $AB = I_2$ 。

—  
(2) 设  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ ,  $m > n$ , 能否找到  $B, C$  使得  $AB = I_3, CA = I_2$ 。

解：矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

的两列线性相关（第二列是第一列的 2 倍），故

$$\text{rank}(A) = 1 < \min\{m, n\} = \min\{3, 2\} = 2.$$

关于  $AB = I_3$ ： 若存在  $B$  使  $AB = I_3$ , 则  $\text{rank}(AB) = \text{rank}(I_3) = 3$ 。  
但  $\text{rank}(AB) \leq \text{rank}(A) = 1$ , 矛盾。因此 不存在  $B$  使  $AB = I_3$ 。

关于  $CA = I_2$ ： 若存在  $C$  使  $CA = I_2$ , 则  $\text{rank}(CA) = \text{rank}(I_2) = 2$ , 而  
 $\text{rank}(CA) \leq \text{rank}(A) = 1$ , 矛盾。因此 不存在  $C$  使  $CA = I_2$ 。

结论： 对于给定的  $A$ , 由于  $\text{rank}(A) = 1$ , 既不存在右逆（使  $AB = I_3$ ），  
也不存在左逆（使  $CA = I_2$ ）。

(6) 如果  $m \neq n$  那么  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  是否存在线性双射

**结论：**不存在。有限维向量空间仅当维数相同才线性同构。

**解：**设从  $\mathbb{R}^n$  到  $\mathbb{R}^m$  的线性变换可以写成矩阵  $A$ 。

如果要存在线性双射，则该线性双射必存在其逆映射，也是一个线性双射。即就要既能找到矩阵  $B$  使得  $AB = I_m$ ，又能找到矩阵  $C$  使得  $CA = I_n$  (表示它有“左逆”)。

但在前面的题目中我们已经知道：

只有当  $m = n$  时，矩阵才可能同时有左逆和右逆。

当  $m \neq n$  时，矩阵不可能同时满足这两个条件。

所以：

当  $m \neq n$  时， $\mathbb{R}^m$  与  $\mathbb{R}^n$  不存在线性双射。

**Exercise 1.5.21 (1.5.21)** 求所有满足  $A^2 = I_3$  且  $A$  的每个元素只能为 0 或 1 的三阶矩阵。 **解：**

由  $A^2 = I_3$ ，可得

$$A^{-1} = A.$$

因此  $A$  必为可逆矩阵，且

$$|A|^2 = |A^2| = |I_3| = 1 \Rightarrow |A| = \pm 1.$$

又因为  $A = A^{-1}$ ，说明矩阵的每一列都是单位正交列。即：

$$A^T A = I_3.$$

由此得出  $A$  的列向量两两正交，且每列长度为 1。

由于题设进一步限定  $A$  的每个元素只能取 0 或 1，为了满足每列长度为 1，每列中必须且仅有一个 1，其余为 0。同时为了保证正交性，每行中也必须且仅有一个 1。

因此  $A$  必为一个置换矩阵。

例如：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{等等}.$$

所有这样的矩阵都是单位矩阵的行或列的排列形式。

**结论：**所有满足  $A^2 = I_3$  且  $A$  的元素仅为 0 或 1 的三阶矩阵，都是置换矩阵。

**Exercise 1.5.22 (1)**

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_1^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

将第 1 列的 2 倍从第 3 列中减去，相当于第 3 列由第 3 列减去第 1 列的 3 倍：

$$E_1 A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

**(2)**

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2^T \text{ 交换第 2 列与第 3 列.}$$

$$E_2 A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad E_2 A_1 E_2^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

**(3)**

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}, \quad E_3^T \text{ 把第 3 列减去第 2 列的 } \frac{1}{3}.$$

$$E_3 A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad E_3 A_2 E_3^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

(4) 由上式得

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Exercise 1.5.23** 设  $A$  为可逆矩阵。则：

1. 若  $A$  为对称矩阵 ( $A^T = A$ )，则  $A^{-1}$  亦为对称矩阵；
2. 若  $A$  为反对称矩阵 ( $A^T = -A$ )，且可逆，则  $A^{-1}$  亦为反对称矩阵。

**证明** 利用恒等式

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}.$$

(1) 若  $A^T = A$ ，则

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1},$$

故  $A^{-1}$  对称。

(2) 若  $A^T = -A$ ，则 (因  $A$  可逆)

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = (-A)^{-1} = -A^{-1},$$

故  $A^{-1}$  反对称。

## 《线性代数与几何》

**Exercise 2.29** (1) 若  $A$  可逆，证明  $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$ 。

**证明：**

$$(A^{-1})^* A^* = (A^{-1})^* (A^*) = (A^{-1})^* (A^{-1})^{-T} = \frac{1}{|A|} A A^* = \frac{1}{|A|} |A| I = I.$$

由此可得：

$$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}.$$

(2) 证明  $(A^*)^T = (A^T)^*$ 。

**证明：**

$$(A^*)^T = (|A| A^{-1})^T = |A| (A^{-1})^T = |A| (A^T)^{-1} = (A^T)^*.$$

**Exercise 2.30** (1) 若  $A$  是可逆对称矩阵, 证明  $A^{-1}$  也是对称矩阵。

**证明:** 已知  $A = A^T$ ,  $AA^{-1} = I$ 。

两边取转置:

$$(AA^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T = (A^{-1})^T A = I.$$

由单位矩阵的唯一性, 得

$$(A^{-1})^T = A^{-1}.$$

即  $A^{-1}$  也是对称矩阵。

同理可证, 若  $A$  是反对称矩阵 ( $A^T = -A$ ) 且可逆, 则  $A^{-1}$  也是反对称矩阵。

—

(2) 证明不存在奇数阶的可逆反对称矩阵。

**证明:** 设  $A^T = -A$ , 则

$$|A^T| = |-A| \Rightarrow |A| = (-1)^n |A|.$$

若  $n$  为奇数, 则  $(-1)^n = -1$ , 因此

$$|A| = -|A| \Rightarrow |A| = 0.$$

这与  $A$  可逆 ( $|A| \neq 0$ ) 矛盾。

**结论:** 不存在奇数阶的可逆反对称矩阵。

**Exercise 2.31** 由伴随矩阵的定义可得:

$$A^* = |A|A^{-1}.$$

因此,

$$|A^*| = ||A|A^{-1}| = |A|^n |A^{-1}| = \frac{|A|^n}{|A|} = |A|^{n-1}.$$

**Exercise 2.32** 证明对上三角矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

由  $A$  的定义, 知其伴随矩阵为

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

因此,

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

因为对于上三角矩阵  $A$ , 若  $i > j$  则  $a_{ij} = 0$ , 可知其伴随矩阵中同样满足下三角部分为 0。

故  $A^{-1}$  也是上三角矩阵。

由此可见: 对上三角矩阵取逆后, 仍为上三角矩阵; 同理可得下三角矩阵取逆后仍为下三角矩阵。

#### Exercise 2.45

1.

$$A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

2.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

3.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 27 & -16 & 6 \\ 8 & -5 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

4.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -16 & -11 & 3 \\ 3.5 & 2.5 & -0.5 \\ -2.5 & -1.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

5.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

6.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Exercise 2.46**

1.

$$X = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

2.

$$X = \begin{bmatrix} 2.5 & 1 \\ -0.5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$