第十周习题参考解答 杨利军 Nov 17 and Nov 19, 2025

Nov 17 作业

习题一: 课本第123页习题4.3题1: 求下列函数的渐近线

(1). $y=\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$;

(2). $y=\sqrt{x^2+1}-x-1$;

(3). 设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $x=\frac{3t}{1+t^3}$, $y=\frac{3t^2}{1+t^3}$ 确定.

解(1): 显然函数曲线 $y=\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$ 有垂直渐近线 $x=1$. 考虑斜渐近线. 当 $x\to+\infty$ 时,

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^3}{(x-1)}}=\sqrt{\frac{x}{(x-1)}}\to 1,$$

并且

$$f(x)-x=\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}-x=x\left(\sqrt{\frac{x}{x-1}}-1\right)=x\left(\left[1+\frac{1}{x-1}\right]^{\frac{1}{2}}-1\right)$$

$$=x\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}+o\left(\frac{1}{x}\right)-1\right)\to\frac{1}{2}.$$

由此可见函数 $y=\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$ 有渐近线 $y=x+\frac{1}{2}$.

再考虑左侧渐近线的存在性. 当 $x\to-\infty$ 时,

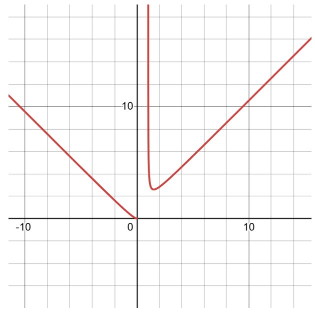
$$\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}=\frac{|x|}{x}\sqrt{\frac{x}{x-1}}\to -1,$$

并且

$$f(x)+x=\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}+x=|x|\left(\sqrt{\frac{x}{x-1}}-1\right)=|x|\left(\left[1+\frac{1}{x-1}\right]^{\frac{1}{2}}-1\right)$$

$$=|x|\left(1+\frac{1}{2}\frac{1}{x-1}+o\left(\frac{1}{x}\right)-1\right)\to-\frac{1}{2}.$$

故函数 $y=\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$ 左侧也存在渐近线 $y=-x-\frac{1}{2}$. 函数 $y=\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$ 的图像如下:



解(2): 显然当 $x \to +\infty$ 时

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} - x - 1 = \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} - 1 = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} - 1 \to -1.$$

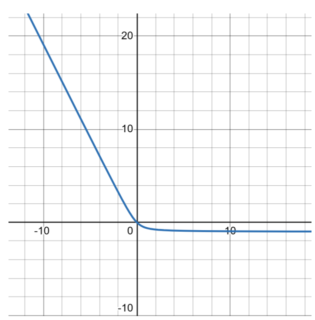
故函数曲线 $\sqrt{x^2+1}-x-1$ 有正向水平渐近线 $y=-1$. 我们再来考虑函数 $y=\sqrt{x^2+1}-x-1$ 负向斜渐近线. 由于当 $x \to -\infty$ 时,

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2+1}-x-1}{x} = -\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - 1 - \frac{1}{x} \to -2,$$

且

$$\sqrt{x^2+1} - x - 1 + 2x = \sqrt{x^2+1} + x - 1 = \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x} - 1 \to -1,$$

故函数 $y=\sqrt{x^2+1}-x-1$ 有负向斜渐近线 $y=-2x-1$. 函数 $y=\sqrt{x^2+1}-x-1$ 曲线如图所示



解(3): 由参数方程 $x=\frac{3t}{1+t^3}$, $y=\frac{3t^2}{1+t^3}$ 所确定的曲线常称作笛卡尔叶形线, 其直角坐标方程为 $x^3+y^3=3xy$. 当 $t \to -1^-$ 时, $x \to +\infty$, $y \to -\infty$; 当 $t \to -1^+$ 时, $x \to -\infty$, $y \to +\infty$. 于

是当 $x \to +\infty$ 时,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{t\to-1^-}\frac{\frac{3t^2}{1+t^3}}{\frac{3t}{1+t^3}}=\lim_{t\to-1^-}\frac{3t^2}{3t}=-1.$$

又

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)+x)=\lim_{t\to-1^-}\left(\frac{3t^2}{1+t^3}+\frac{3t}{1+t^3}\right)$$

$$=\lim_{t\to-1^-}\frac{3t(1+t)}{1+t^3}=\lim_{t\to-1^-}\frac{3t}{1-t+t^2}=-1.$$

由此可见函数 $y=f(x)$ 有右侧渐近线 $y+x=-1$. 再考虑左侧渐近线. 当 $x\to-\infty$ 时,

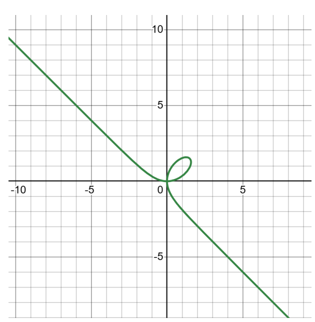
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{t\to-1^+}\frac{\frac{3t^2}{1+t^3}}{\frac{3t}{1+t^3}}=\lim_{t\to-1^+}\frac{3t^2}{3t}=-1.$$

又

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)+x)=\lim_{t\to-1^+}\left(\frac{3t^2}{1+t^3}+\frac{3t}{1+t^3}\right)$$

$$=\lim_{t\to-1^+}\frac{3t(1+t)}{1+t^3}=\lim_{t\to-1^+}\frac{3t}{1-t+t^2}=-1.$$

由此可见函数 $y=f(x)$ 有左侧渐近线 $y+x=-1$. 由参数方程 $x=\frac{3t}{1+t^3}$, $y=\frac{3t^2}{1+t^3}$ 所确定的笛卡尔叶形线如图所示



习题二: 课本第123页习题4.3题2: 作出下列函数的图形.

(1) $y=x^3+6x^2-15x-20$;

(2) $y=\frac{3x}{1+x^2}$;

(3) $y=\ln\frac{1+x}{1-x}$;

(4) $y = x + \arctan x$.

解(1): 先求函数 $y = x^3 + 6x^2 - 15x - 20$ 的一阶和二阶导数:

$$y' = 3x^2 + 12x - 15, \quad y'' = 6x + 12.$$

令 $y' = 0$, 即 $3x^2 + 12x - 15 = 3(x^2 + 4x - 5) = 3(x + 5)(x - 1) = 0$, 得函数的两个临界点 $x = -5$, $x = 1$. 由此可得函数的单调性区间如下:

在区间 $(-\infty, -5)$ 内, $y' > 0$, 函数单调上升;

在区间 $(-5, 1)$ 内, $y' < 0$, 函数单调下降;

在区间 $(1, +\infty)$ 内, $y' > 0$, 函数单调上升.

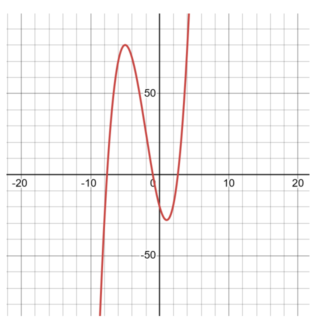
于是函数在临界点 $x = -5$ 处取得极大值 $y(-5) = 80$; 在临界点 $x = 1$ 处取得极小值 $y(1) = -28$.

再令 $y'' = 0$ 得 $x = -2$. 显然 y'' 在点 $x = -2$ 两侧改变符号. 故 $x = -2$ 时函数的拐点. 进一步

在区间 $(-\infty, -2)$ 内, $y'' < 0$, 函数上凸;

在区间 $(-2, +\infty)$ 内, $y'' > 0$, 函数下凸.

根据上述分析, 我们不难定性地画出函数 $y = x^3 + 6x^2 - 15x - 20$ 的图像如下:



解(2): 显然函数 $y = \frac{3x}{1+x^2}$ 是奇函数, 且函数图像经过原点 $(0,0)$. 函数的一阶和二阶导数如下:

$$y' = \frac{3(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2}, \quad y'' = \frac{6x(x^2 - 3)}{(1 + x^2)^3}.$$

由此可见函数有两个临界点 $x=\pm 1$, 且函数的单调区间以及极值情况如下:

在区间 $(-\infty,-1)$ 内, $y'<0$, 函数单调下降;

在区间 $(-1,1)$ 内, $y'>0$, 函数单调上升;

在区间 $(1,+\infty)$ 内, $y'<0$, 函数单调下降.

在点 $x=-1$ 处函数取得极小值 $y(-1)=\frac{-3}{2}$, 点 $x=1$ 处函数取得极大值 $y(1)=\frac{3}{2}$.

根据函数的二阶导数可得函数有三个拐点 $x=0$, $x=\pm\sqrt{3}$, 以及函数的凸性情况如下:

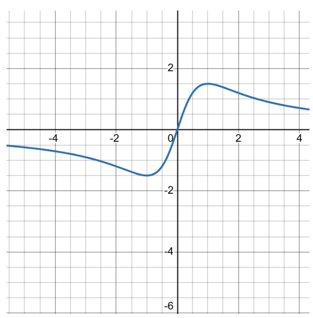
在区间 $(-\infty,-\sqrt{3})$ 内, $y''<0$, 函数上凸,

在区间 $(-\sqrt{3},0)$ 内, $y''>0$, 函数下凸,

在区间 $(0,\sqrt{3})$ 内, $y''<0$, 函数上凸,

在区间 $(\sqrt{3},+\infty)$ 内, $y''>0$, 函数下凸.

根据上述分析, 我们不难定性地画出函数 $y=\frac{3x}{1+x^2}$ 的图像如下:



解(3): 显然函数 $y=\ln\frac{1+x}{1-x}$ 的定义域为 $(-1,1)$, 并且函数为奇函数, 因为

$$y(-x)=\ln\frac{1-x}{1+x}=-\ln\frac{1+x}{1-x}=-y(x).$$

为求函数的导数, 我们将函数写作 $y=\ln(1+x)-\ln(1-x)$. 于是

$$y'=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1-x}=\frac{-2x}{1-x^2}, \quad y''=\frac{-2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}.$$

由一阶导数 y' 可得函数的单调区间以及极值情况如下:

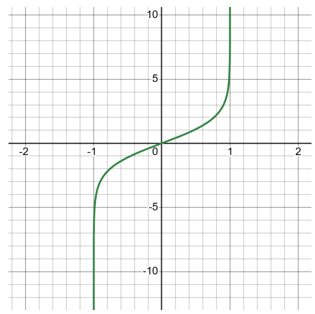
在区间 $(-1,0)$ 内, $y'>0$, 故函数单调上升,

在区间 $(0,1)$ 内, $y'<0$, 故函数单调下降,

函数在点 $x=0$ 处有极大值 $y(0)=0$.

由于二阶导数 $y''=\frac{-2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}<0$, $\forall x\in(-1,1)$, 故函数在其定义区间 $(-1,1)$ 内上凸.

根据上述信息, 不难定性画出函数 $y=\ln\frac{1+x}{1-x}$ 的图像如下:



解(4): 易知 $y=x+\arctan x$ 时奇函数, 且

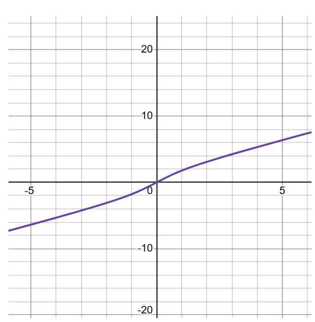
$$y'=1+\frac{1}{1+x^2},\quad y''=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}.$$

由于 $y'>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, 故函数在其定义区间上严格单调上升. 由 $y''=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$ 知函数有唯一的驻点 $x=0$, 且

在区间 $(-\infty,0)$ 内, $y''>0$, 故函数下凸;

在区间 $(0,+\infty)$ 内, $y''<0$, 故函数上凸.

根据上述信息, 不难定性画出函数 $y=x+\arctan x$ 的图像如下:



习题三: 课本第124页第4章总复习题1:

设函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内可导, 证明
(1) 若 $\lim_{x\to+\infty} f'(x)=0$, 则 $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$;
(2) 若 $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$, 则存在序列 $x_n\to+\infty$, 使得 $\lim_{n\to+\infty} f'(x_n)=0$.

证(1): 由 L'Hospital 法则得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{[f(x)]'}{[x]'}=\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0.$$

(2) 根据假设 $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ 知, $\lim_{n\to+\infty}\frac{f(n)}{n}=0$. 进一步得 $\lim_{n\to+\infty}\frac{f(2n)}{n}=0$. 于是根据中值定理知 $x_n\in(n,2n)$, 使得

$$\frac{f(2n)-f(n)}{n}=f'(x_n).$$

于上式令 $n\to+\infty$ 知 $\lim_{n\to+\infty}f'(x_n)=0$. 解答完毕.

习题四: 课本第124页第4章总复习题2: 设 (i) $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上二阶连续可微; (ii) $f''(x)\geq a>0$; (iii) $f(0)=0$; (iv) $f'(0)<0$, 问 $f(x)$ 在开区间 $(0,+\infty)$ 上有多少个零点.

解: 根据条件 (iii) 和 (iv) 知存在 $\delta>0$, 使得 $f(x)<0$, $\forall x\in(0,\delta)$. 考虑函数在 $x=0$ 处的 Taylor 展开式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2.$$

再根据条件 (ii) 和 (iii) 知

$$f(x)=f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2\geq f'(0)x+\frac{a}{2}x^2.$$

由此可见当 $x\to+\infty$ 时, $f(x)\to+\infty$. 因此函数 $f(x)$ 在开区间 $(0,+\infty)$ 上至少有一个零点. 假设函数 $f(x)$ 在开区间 $(0,+\infty)$ 上有两个零点 $0<x_1<x_2$, 即 $f(x_1)=0$, $f(x_2)=0$. 再由条件 (iii) $f(0)=0$, 并两次利用 Rolle 定理知存在点 $\xi>0$, 使得 $f''(\xi)=0$. 此与条件 (ii) 矛盾. 这说明 $f(x)$ 在开区间 $(0,+\infty)$ 上有且仅有一个零点. 证毕.

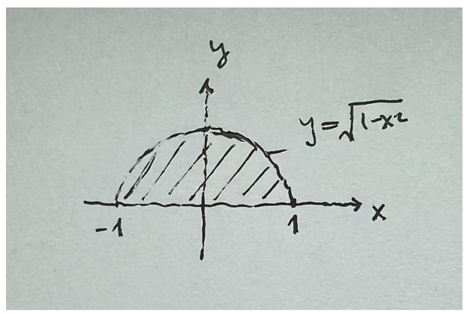
Nov 19 作业

习题一: 课本第135页习题5.1题1: 利用定积分的几何意义求下列积分值:

$$(1)\quad \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx; \qquad (2)\quad \int_{-\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1-x^2}dx;$$

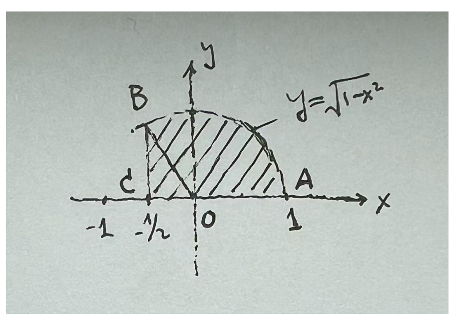
$$(3)\quad \int_{-1}^{1}(3+4x)dx; \qquad (4)\quad \int_{0}^{1}\left[\sqrt{2x-x^2}-x\right]dx.$$

解(1): 积分 $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx$ 的几何意义是上半圆周, 即函数曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$ 在区间 $[-1,1]$ 下的面积, 如图阴影部分的面积,



即单位圆面积的一半 $\frac{\pi}{2}$, 即 $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx=\frac{\pi}{2}$.

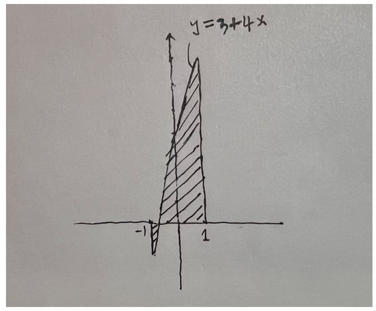
解(2): 积分 $\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1-x^2}dx$ 的几何意义是函数曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$ 在区间 $[-\frac{1}{2},1]$ 下的面积, 如图阴影部分的面积.



这部分的面积可以看作扇形 $\widehat{AOB}$ 和三角形 BCO 的面积之和, 即

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{3}\cdot 1^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{8}.$$

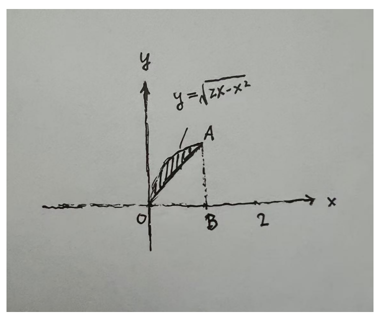
解(3): 积分 $\int_{-1}^{1}(3+4x)dx$ 的几何意义是如图阴影部分两个三角形面积的代数和.



其代数和为 $\frac{1}{2}\cdot 7\left(\frac{3}{4}+1\right)-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{49}{8}-\frac{1}{8}=6$. 故

$$\int_{-1}^{1}(3+4x)dx=6.$$

解(4): 积分 $\int_0^1\left[\sqrt{2x-x^2}-x\right]dx$ 的几何意义是如图阴影部分, 即四分之一圆盘 AOB 的面积, 减去三角形 $\triangle AOB$ 的面积,



即 $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$. 因此

$$\int_0^1\left[\sqrt{2x-x^2}-x\right]dx=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$$

习题二: 课本第140-141页习题5.2题5: 比较下列积分的大小

$$(1)\quad \int_0^1 e^{-x}dx \quad 和 \quad \int_0^1 e^{-x^2}dx; \qquad (2)\quad \int_0^1 \frac{\sin x}{2+x}dx \quad 和 \quad \int_0^1 \frac{\sin x}{2+x^2}dx;$$

$$(3)\quad \int_0^1 xdx \quad 和 \quad \int_0^1 x^2dx; \qquad (4)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} xdx \quad 和 \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin xdx.$$

解(1): 由于当 $x \in (0,1)$ 时, $x^2 < x$, 故 $-x^2 > -x$, 从而 $e^{-x^2} > e^{-x}$. 因此

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx > \int_0^1 e^{-x} dx.$$

解(2): 由于当 $x \in (0,1)$ 时, $x^2 < x$, 故

$$\frac{\sin x}{2+x} < \frac{\sin x}{2+x^2}.$$

因此

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{2+x} dx < \int_0^1 \frac{\sin x}{2+x^2} dx.$$

解(3): $\int_0^1 x dx > \int_0^1 x^2 dx$;

解(4): 由于当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $\sin x < x$. 故

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx.$$

解答完毕.

习题三: 课本第140-141页习题5.2题6: 证明下列不等式

$$(1) \quad \frac{1}{2} \le \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \le \frac{\pi}{4}; \qquad (2) \quad \frac{2}{5} \le \int_1^2 \frac{x}{1+x^2} dx \le \frac{1}{2};$$

$$(3) \quad \int_0^{2\pi} |a\cos x + b\sin x| dx \le 2\pi\sqrt{a^2+b^2}.$$

解(1): 熟知函数 $\frac{\sin x}{x}$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上严格单调下降, 故

$$\frac{2}{\pi} \le \frac{\sin x}{x} \le 1, \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

由积分保序性质得

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi} dx \le \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \le \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dx.$$

此即

$$\frac{1}{2} \le \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \le \frac{\pi}{4}.$$

解(2): 由函数 $f(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{x}{1+x^2}$ 的导数

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)} < 0, \quad \forall x > 1,$$

可知函数在区间 $[1,2]$ 上严格单调下降, 故 $f(2) < f(x) < f(1)$, $\forall x \in (1,2)$, 即

$$\frac{2}{5} < \frac{x}{1+x^2} < \frac{1}{2}.$$

对上述不等式在区间 $[1,2]$ 上积分即得不等式

$$\frac{2}{5} \le \int_1^2 \frac{x}{1+x^2} dx \le \frac{1}{2}.$$

解(3): 由 Cauchy 不等式得

$$|a\cos x + b\sin x| \le \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} \cdot \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{a^2+b^2}.$$

由此立刻得到

$$\int_0^{2\pi} |a\cos x + b\sin x| dx \le 2\pi\sqrt{a^2+b^2}.$$

解答完毕.

习题四: 课本第140-141页习题5.2题7: 证明下列极限

$$(1) \quad \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = 0; \quad (2) \quad \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n} = 1; \quad (3) \quad \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = 0.$$

证(1): 由于当 $x \in [0,1]$ 时, $\frac{x^n}{1+x} \le x^n$. 于是

$$0 < \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx < \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \to 0, \quad n \to +\infty.$$

由两边夹法则得

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx = 0.$$

证(2): 由于

$$1 = \frac{1+x^n}{1+x^n} = \frac{1}{1+x^n} + \frac{x^n}{1+x^n},$$

故

$$1 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} + \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}dx.$$

因此

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^n} = 1 - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}dx.$$

由结论 (1) $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx = 0$ 得

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{1}{1+x^n} = 1 - \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}dx = 1,$$

即

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}dx = 1.$$

证(3): $\forall\varepsilon\in(0,\frac{\pi}{2})$, 由于 $\sin^n(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)\to 0$, $n\to+\infty$, 故存在正整数 N, 使得当 $n\geq N$ 时, $0<\sin^n(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)<\varepsilon$. 于是对上述 $\forall\varepsilon\in(0,\frac{\pi}{2})$ 和正整数 N, 对 $\forall n\geq N$ 时,

$$0 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \sin^n x dx + \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx < \frac{\pi}{2}\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right) + \varepsilon = \left(\frac{\pi}{2}+1\right)\varepsilon.$$

这就证明了

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = 0.$$

习题五: 课本第140-141页习题5.2题9: 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续且 $f(x)>0$, $\forall x\in[a,b]$. 证明

$$\left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx\right) \geq (b-a)^2. \tag{1}$$

证明: 回忆 Cauchy 积分不等式

$$\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)\left(\int_a^b h^2(x)dx\right) \geq \left(\int_a^b g(x)h(x)dx\right)^2.$$

在上述不等式中, 令 $g(x) = \sqrt{f(x)}$, $h(x) = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$ 即得

$$\left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx\right) \geq \left(\int_a^b dx\right)^2 = (b-a)^2.$$

即不等式 (1) 得证.

习题六: 课本第140-141页习题5.2题10: 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调增, 且 $f''(x) > 0$, $\forall x \in [a,b]$. 证明

$$(b-a)f(a) < \int_a^b f(x)dx < (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{2}$$

证明: 由假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调增, 故

$$f(a) < f(x), \quad \forall x \in (a,b].$$

对上式两边积分得

$$(b-a)f(a) < \int_a^b f(x)dx.$$

即不等式 (2) 的左边不等式得证. 再根据假设 $f''(x) > 0$ 知函数 $f(x)$ 严格下凸. 于是任意 $x \in (a,b)$ 可以写作 $x = tb + (1-t)a$, 其中 $t = \frac{x-a}{b-a}$, 即

$$x = \frac{x-a}{b-a}b + \frac{b-x}{b-a}a.$$

再由函数 $f(x)$ 的凸性知

$$f(x) < \frac{x-a}{b-a}f(b) + \frac{b-x}{b-a}f(a).$$

对上述不等式在区间 $[a,b]$ 上积分得

$$\int_a^b f(x)dx < f(b)\int_a^b \frac{x-a}{b-a}dx + f(a)\int_a^b \frac{b-x}{b-a}dx = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

即不等式 (2) 的右边不等式得证.

习题七: 课本第146-147页习题5.3题12: 利用 Newton-Leibniz 公式求下列积分

$$(1)\quad \int_0^2 |1-x|dx; \quad (2)\quad \int_{-2}^3 |x^2-2x-3|dx; \quad (3)\quad \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \sqrt{1+\cos(2x)}dx;$$

$$(4)\quad \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1-\cos^2 x}dx; \quad (5)\quad \int_0^{\pi} \sqrt{\sin x-\sin^3 x}dx; \quad (6)\quad \int_1^8 \frac{\ln x}{x}dx.$$

解(1): 为了去掉绝对值符号, 我们将积分分段写出, 然后直接计算

$$\int_0^2 |1-x|dx = \int_0^1 (1-x)dx + \int_1^2 (x-1)dx = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(4-1)-1 = 1.$$

解(2): 将二次式 x^2-2x-3 分解因式得 $x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$. 由此可见二次式在区间 $[-2,3]$ 内的点 $x=-1$ 处变号. 于是

$$\int_{-2}^3 |x^2-2x-3|dx = \int_{-2}^{-1}(x^2-2x-3)dx + \int_{-1}^3 -(x^2-2x-3)dx$$

$$= \frac{1}{3}\Big[(-1)^3-(-2)^3\Big] - \Big[(-1)^2-(-2)^2\Big] - 3 - \frac{1}{3}\Big[3^3-(-1)^3\Big] + \Big[3^2-(-1)^2\Big] + 3\cdot 4$$

$$= \frac{7}{3}-(1-4)-3-\frac{1}{3}(27+1)+8+12 = 13.$$

解(3): 注意

$$\int_0^{\frac{3\pi}{4}} \sqrt{1+\cos(2x)}dx = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \sqrt{2\cos^2 x}dx = \sqrt{2}\int_0^{\frac{3\pi}{4}} |\cos x|dx$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx - \sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos x dx = \sqrt{2}\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sqrt{2}\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}$$

$$= \sqrt{2}-\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right) = 2\sqrt{2}-1.$$

解(4):

$$\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\cos^2 x}dx=\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin^2 x}dx=\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|dx=-\int_{\frac{-\pi}{4}}^{0}\sin xdx+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx$$

$$=\cos x\Big|_{\frac{-\pi}{4}}^{0}-\cos x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}+1=2-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

解(5):

$$\int_0^{\pi}\sqrt{\sin x-\sin^3 x}dx=\int_0^{\pi}\sqrt{\sin x}|\cos x|dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin x}\cos xdx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sqrt{\sin x}\cos xdx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin x}d\sin x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sqrt{\sin x}d\sin x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{3}\left([\sin x]^{\frac{3}{2}}\right)'dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{2}{3}\left([\sin x]^{\frac{3}{2}}\right)'dx$$

$$=\frac{2}{3}\left([\sin x]^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-[\sin x]^{\frac{3}{2}}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right)=\frac{4}{3}.$$

解(6):

$$\int_1^8\frac{\ln x}{x}dx=\int_1^8\frac{1}{2}\left([\ln x]^2\right)'dx=\frac{1}{2}[\ln x]^2\Big|_1^8=\frac{9}{2}[\ln 2]^2.$$

习题八: 课本第146-147页习题5.3题13: 利用 Riemann 和求下列极限

$$(1)\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right);$$

$$(2)\quad \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right);$$

$$(3)\quad \lim_{n\to+\infty}n^{\frac{-3}{2}}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\cdots+\sqrt{n+n}\right).$$

解(1): 令 $f(x)=\sin x$, $x\in[0,\pi]$, $\xi_k=\frac{k\pi}{n}$, $\triangle x_k=\frac{\pi}{n}$, 则

$$\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\triangle x_k\to\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin xdx=\frac{2}{\pi}.$$

解(2): 令 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$, $x\in[0,1]$, $\xi_k=\frac{k}{n}$, $k=1,2,\cdots,n$, $\triangle x_k=\frac{1}{n}$, 则

$$\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\xi_1^2}+\frac{1}{1+\xi_2^2}+\cdots+\frac{1}{1+\xi_n^2}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\triangle x_k\to\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

解(3): 令 $f(x)=\sqrt{1+x}$, $x\in[0,1]$, 再令 $\xi_k=\frac{k}{n}$, $k=1,2,\cdots,n$, $\triangle x_k=\frac{1}{n}$, 则

$$n^{\frac{-3}{2}}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\cdots+\sqrt{n+n}\right)$$

$$=\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\triangle x_k\to\int_0^1\sqrt{1+x}dx=\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

解答完毕.

习题九: 课本第147页习题5.3题15: 证明

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-R\sin x}dx\begin{cases}<\frac{\pi}{2R}(1-e^{-R}), & R>0,\\ >\frac{\pi}{2R}(1-e^{-R}), & R<0.\end{cases}$$

证明: 我们熟知不等式 $\frac{2}{\pi}<\frac{\sin x}{x}$, $\forall x\in(0,\frac{\pi}{2})$. 这个不等式可写作 $\frac{2x}{\pi}<\sin x$, $\forall x\in(0,\frac{\pi}{2})$. 当 $R>0$ 时,

$$\frac{-2Rx}{\pi}>-R\sin x,\quad\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).\tag{3}$$

于是

$$e^{\frac{-2Rx}{\pi}}>e^{-R\sin x},\quad\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).\tag{4}$$

根据积分的保序性质得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\frac{-2Rx}{\pi}}dx>\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-R\sin x}dx.\tag{5}$$

计算上述第一个积分得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{-2Rx}{\pi}} dx = -\frac{\pi}{2R} e^{\frac{-2Rx}{\pi}} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2R}(1 - e^{-R}).$$

因此

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin x} dx < \frac{\pi}{2R}(1 - e^{-R}). \tag{6}$$

当 $R < 0$ 时, 不等式 (3), (4), (5) 和 (6) 的反向不等式成立. 因此我们得到

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin x} dx \begin{cases} < \frac{\pi}{2R}(1 - e^{-R}), & R > 0, \\ > \frac{\pi}{2R}(1 - e^{-R}), & R < 0. \end{cases}$$

证毕.