习题课材料（一）

注：本次习题课内容为线性方程组与行列式.

注：带 ♡ 号的习题有一定的难度、比较耗时, 请量力为之.

本节考虑的矩阵均为实矩阵.

习题 1. 复习总结 Gauss 消元法的步骤；说明如何利用系数矩阵和增广矩阵来判断解的情况.

习题 2. 设非齐次方程组：

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & & = b_1 \\ -x_1 & & +x_3 & = b_2 \\ & -x_2 & -x_3 & = b_3 \end{cases}$$

证明：

1. 方程组有解当且仅当 $b_1+b_2+b_3=0$.
2. 其对应齐次线性方程组的解集是
$$\left\{ \begin{bmatrix} k \\ -k \\ k \end{bmatrix} : k \in \mathbb{R} \right\}.$$
3. 当非齐次方程组有解时，设 $\begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \end{bmatrix}$ 是一个解，则解集是
$$\left\{ \begin{bmatrix} k+x_1^0 \\ -k+x_2^0 \\ k+x_3^0 \end{bmatrix} : k \in \mathbb{R} \right\}.$$

习题 3. 考虑线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + (\lambda+2)x_3 = 3, \\ x_1 + \lambda x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

λ 取何值时, 该方程组无解? λ 取何值时, 该方程组有唯一解? λ 取何值时, 该方程组有无穷多解? 证明你的论断.

习题 4. 求三阶方阵 $A \in M_3(\mathbb{R})$, 使得方程组 $A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ 的解集是 $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : c, d \in \mathbb{R} \right\}$.

习题 5. 设齐次线性方程组

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + bx_3 + \cdots + bx_n & = & 0 \\ bx_1 + ax_2 + bx_3 + \cdots + bx_n & = & 0 \\ \cdots & & \\ bx_1 + bx_2 + bx_3 + \cdots + ax_n & = & 0 \end{cases}$$

其中 $ab \neq 0$，$n \geq 2$. 试讨论 a, b 取何值时，方程组仅有零解，有无穷多解？在有无穷多解时，写出全部解。

习题 6. 在平面内三条直线分别为：

$$l_1 : x + y = 1; \qquad l_2 : 3x - y = 1; \qquad l_3 : 4x - 10y = -3.$$

(1) 上述三条直线有没有公共点？有多少个公共点？

(2) 改变直线 l_3 的方程中某一个系数，得到直线 l_4 的方程，使得 l_1, l_2, l_4 没有公共点.

习题 7. 计算如下两个矩阵的行列式：

$$\begin{bmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

习题 8. 计算下述行列式

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 98 & 101 & 97 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

习题 9. 已知

$$\begin{vmatrix} \lambda + 1 & 2 & 2 \\ -2 & \lambda + 4 & -5 \\ 2 & -2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0,$$

求 λ 的所有取值。

习题 10. 设 x_1,x_2,x_3 是方程 $x^3+px+q=0$ 的三个根，求行列式

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix}$$

习题 11. 求行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 \\ 0 & a_{52} & a_{53} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$