第六周习题参考解答 杨利军 Oct 20, 22, 2025

Oct 20 作业

习题一. 课本第73页习题3.1题1: 根据导数定义求下列函数 $f(x)$ 在给定点处的导数:

(1) 求 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在点 $x=-3$ 处的导数;

(2) 求 $f(x)=2^{-x}$ 在点 $x=0$ 处的导数;

解(1): 考虑差商

$$\frac{f(-3+h)-f(-3)}{h}=\frac{\frac{1}{-3+h}-\frac{1}{-3}}{h}=\frac{-3-(-3+h)}{-3h(-3+h)}=\frac{1}{3(-3+h)}.$$

根据导数定义得

$$f'(-3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-3+h)-f(-3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{3(-3+h)}=-\frac{1}{9}.$$

解(2): 考虑差商

$$\frac{f(h)-f(0)}{h}=\frac{2^{-h}-2^0}{h}=\frac{2^{-h}-1}{h}.$$

根据导数定义得

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{-h\ln 2}-1}{-h\ln 2}\cdot(-\ln 2)=-\ln 2.$$

习题二. 课本第73页习题3.1题2: 研究下列函数在点 $x=0$ 处的连续性与可导性. 若可导, 则求出导数值 $f'(0)$.

$$(1)\quad f(x)=|x-3|,\quad (2)\quad f(x)=|x|+2x,$$

$$(3)\quad f(x)=\begin{cases} x, & x<0,\\ \ln(1+x), & x\geq 0.\end{cases}\quad (4)\quad f(x)=\begin{cases} 3x^2+4x, & x<0,\\ x^2-1, & x\geq 0.\end{cases}$$

解(1): 函数 $f(x)=|x-3|$ 在 $x=0$ 处连续. 在 $x=0$ 的邻域 $(-3,3)$ 内, $f(x)=3-x$. 由此可得 $f'(0)=-1$.

解(2): 函数 $f(x)=|x|+2x$ 在 $x=0$ 处连续, 但不可导. 因为 $|x|$ 在 $x=0$ 处不可导.

解(3): 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 因为

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} x=0, \quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} \ln(1+x)=0,$$

即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的左极限等于右极限, 且等于这点处的函数值 $f(0)=0$.
进一步函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 因为

$$f'_-(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h}{h}=1,$$

$$f'_+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\ln(1+h)}{h}=1,$$

即 $f'_-(0)=f'_+(0)$.

解(4): 函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处不连续, 因为 $\lim_{x\to 0^-} f(x)=0$, $\lim_{x\to 0^+} f(x)=-1$.
由于函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处不连续, 故在该点处不可导. 解答完毕.

习题三. 课本第73页习题3.1题3: 设

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\le 1, \\ ax+b, & x>1. \end{cases}$$

讨论当 $a,b$ 取何值时, $f(x)$ 在点 $x=1$ 处可导.

解: (i) 函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处的连续性:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(x^2+1)=2, \quad \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(ax+b)=a+b.$$

因此 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处的连续, 当且仅当 $a+b=2$.

(ii) 函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处的可微性:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(1+h)^2-1}{h}=\lim_{x\to 1^-}\frac{2h+h^2}{h}=2,$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{x\to 1^+}\frac{a(1+h)+b-2}{h}=\lim_{x\to 1^+}\frac{ah}{h}=a.$$

因此 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处可微, 当且仅当 $a=2$. 综上得, 当 $a=2$, $b=0$ 时, $f(x)$ 在点 $x=1$ 处可导. 解答完毕.

习题四. 课本第73页习题3.1题4: 判断下列条件是否等价于 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处可导:

$$(1)\quad 极限\quad \lim_{h\to+\infty}h\left[f\left(x_0+\frac{1}{h}\right)-f(x_0)\right]\quad 存在;$$

$$(2)\quad 极限\quad \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{h}\quad 存在;$$

$$(3)\quad 极限\quad \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}\quad 存在;$$

$$(4)\quad 极限\quad \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}\quad 存在.$$

解: 条件 (1) $\not\Rightarrow$ $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处可导. 例子: $f(x)=|x|$, $x_0=0$. 此时条件 (1) 成立, 但 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处不可导.

条件 (2) $\Longleftrightarrow$ $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处可导.

$\Rightarrow$: 当条件 (2) 成立时, 极限

$$\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(x_0+\triangle x)-f(x_0)}{\triangle x}=\frac{1}{2}\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(x_0+\triangle x)-f(x_0)}{\frac{1}{2}\triangle x}$$

存在, 此即 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处可导.

$\Leftarrow$: 当 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处可导时, 极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{h}=2\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{2h}$$

存在, 即条件 (2) 成立.

条件 (3) $\not\Rightarrow$ $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处可导. 例子: $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$. 此时条件 (3) 成立. 但$f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处不可导.

条件 (4) $\Longleftrightarrow$ $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处可导.
$\Rightarrow$: 设条件 (4) 成立, 即极限

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}$$

存在, 极限记作 $A$. 考虑极限

$$\lim_{\triangle x\to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x}.$$

取 $h = -\triangle x$, 则

$$\frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x} = \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h} = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} \to A, \quad h \to 0.$$

此即 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处可导.
$\Leftarrow$: 设 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处可导, 即极限

$$\lim_{\triangle x\to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x} \qquad (*)$$

存在, 极限记作 $A$. 考虑极限

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}.$$

在极限式 (*) 中, 记 $\triangle x = -h$, 则

$$\frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x} = \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h} = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} \to A, \qquad h \to 0.$$

即条件 (4) 成立. 解答完毕.

习题五. 课本第73页习题3.1题5: 设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导, 求下列极限

$$(1) \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0 - \beta h)}{h}; \quad (2) \quad \lim_{n\to +\infty} n\left[f\left(x_0 + \frac{2}{n}\right) - f(x_0)\right];$$

(3) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}$; (4) $\lim\limits_{h\to 0}\Big[f(x_0+h)\Big]^{\frac{1}{h}}$, 其中 $f(x_0)=1, f'(x_0)\neq 0$.

解(1): (i) 设 $\alpha\neq 0$ 且 $\beta\neq 0$, 则当 $h\to 0$ 时,

$$\frac{f(x_0+\alpha h)-f(x_0-\beta h)}{h}=\frac{f(x_0+\alpha h)-f(x_0)}{h}-\frac{f(x_0-\beta)-f(x_0)}{h}$$

$$=\alpha\frac{f(x_0+\alpha h)-f(x_0)}{\alpha h}+\beta\frac{f(x_0-\beta h)-f(x_0)}{-\beta h}\to\alpha f'(x_0)+\beta f'(x_0).$$

(ii) 若 $\alpha=0$ 且 $\beta\neq 0$, 则当 $h\to 0$ 时,

$$\frac{f(x_0+\alpha h)-f(x_0-\beta h)}{h}=\frac{f(x_0)-f(x_0-\beta h)}{h}$$

$$=\beta\frac{f(x_0-\beta h)-f(x_0)}{-\beta h}\to\beta f'(x_0).$$

(iii) 若 $\alpha\neq 0$ 且 $\beta=0$, 则当 $h\to 0$ 时,

$$\frac{f(x_0+\alpha h)-f(x_0-\beta h)}{h}=\frac{f(x_0+\alpha h)-f(x_0)}{h}$$

$$=\alpha\frac{f(x_0+\alpha h)-f(x_0)}{\alpha h}\to\alpha f'(x_0).$$

(iv) 若 $\alpha=0$ 且 $\beta=0$, 则当 $h\to 0$ 时,

$$\frac{f(x_0+\alpha h)-f(x_0-\beta h)}{h}=\frac{f(x_0)-f(x_0)}{h}=0\to 0.$$

综上所求极限为

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+\alpha h)-f(x_0-\beta h)}{h}=(\alpha+\beta)f'(x_0).$$

解(2): 当 $n\to+\infty$ 时,

$$n\left[f\left(x_0+\frac{2}{n}\right)-f(x_0)\right]=2\frac{f\left(x_0+\frac{2}{n}\right)-f(x_0)}{\frac{2}{n}}\to 2f'(x_0).$$

故所求极限为

$$\lim_{n\to+\infty}n\left[f\left(x_0+\frac{2}{n}\right)-f(x_0)\right]=2f'(x_0).$$

解(3): 当 $h \to 0$ 时,

$$\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h} = -\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h} \to -f'(x_0).$$

故所求极限为

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h} = -f'(x_0).$$

解(4): 由于 $f(x_0)=1$, 故

$$\delta(h) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(x_0+h)-1}{h} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \to f'(x_0) \neq 0.$$

因此 $f(x_0+h) = 1+\delta(h)h$. 于是

$$\Big[f(x_0+h)\Big]^{\frac{1}{h}} = \Big[1+\delta(h)h\Big]^{\frac{1}{h}} = \Big[1+\delta(h)h\Big]^{\frac{\delta(h)}{\delta(h)h}} \to e^{f'(x_0)}.$$

故所求极限为

$$\lim_{h\to 0}\Big[f(x_0+h)\Big]^{\frac{1}{h}} = e^{f'(x_0)}.$$

习题六. 课本第73页习题3.1题6: 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导. 令

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}, & x \neq a, \\ f'(a), & x = a, \end{cases}$$

证明 $g(x)$ 在 $x=a$ 处连续.

证明: 要证 $g(x)$ 在 $x=a$ 处连续, 即要证 $\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$. 由假设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导, 我们有

$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) = g(a).$$

命题得证.

习题七. 课本第73页习题3.1题7:

(i) 设 $f(x)$ 可导且是偶函数, 证明其导函数 $f'(x)$ 是奇函数;

(ii) 设 $f(x)$ 可导且是奇函数, 证明其导函数 $f'(x)$ 是偶函数;

(iii) 设 $f(x)$ 可导且是周期函数, 证明其导函数 $f'(x)$ 也是周期函数.

证(i): 设 $f(x)$ 可导且是偶函数, 对任意 $x$,

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(-x-h)-f(-x)}{h}$$

$$=-\lim_{h\to 0}\frac{f(-x-h)-f(-x)}{-h}=-f'(-x),$$

即导函数 $f'(x)$ 是奇函数.

(ii): 设 $f(x)$ 可导且是奇函数, 对任意 $x$,

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{-f(-x-h)+f(-x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(-x-h)-f(-x)}{-h}=f'(-x),$$

即导函数 $f'(x)$ 是偶函数.

(iii): 设 $f(x)$ 可导且是周期函数, 周期为 $T>0$, 则对任意 $x$,

$$f'(x+T)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+T+h)-f(x+T)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x),$$

即导函数 $f'(x)$ 也是周期函数, 且有相同的周期.

习题八. 课本第73页习题3.1题9: 求常数 $a$ 使得曲线 $y=ax^2$ 与曲线 $y=\ln x$ 相切, 并求出切点与切线方程.

解: 若曲线 $y=ax^2$ 与曲线 $y=\ln x$ 相切于切点 $(x,y)$, 则

$$\begin{cases} ax^2=\ln x, \\ (ax^2)'=(\ln x)' \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} ax^2=\ln x, \\ 2ax=\frac{1}{x}. \end{cases}$$

解之得 $x=\sqrt{e}$, $a=\frac{1}{2e}$. 由此得切点为 $(e^{\frac{1}{2}},\frac{1}{2})$, 切点处的斜率为 $\frac{1}{\sqrt{e}}$, 切线方程为 $y-\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{e}}(x-\sqrt{e})$, 即 $y=\frac{1}{\sqrt{e}}x-\frac{1}{2}$. 解答完毕.

习题九. 课本第73页习题3.1题11: 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续且极限 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$ 存在(有限). 证明 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导且 $f'(0)=A$.

证: 根据假设极限 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$ 存在(有限), 不难得到结论 $f(0)=0$. 因为若不然, 即 $f(0)\neq 0$, 则极限 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 为无穷. 矛盾. 再由 $f(0)=0$ 可知极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$$

存在, 即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导且 $f'(0)=A$. 证毕.

习题十. 课本第73页习题3.1题13: 设 $f(x)=\sqrt{x}$, $x_0=4$, $\triangle x=0.2$. 计算函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 处的微分.

解: 由于 $f'(x_0)=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}=\frac{1}{4}$, 故 $df(x_0)=f'(x_0)\triangle x=\frac{1}{4}\cdot 0.2=\frac{1}{20}$. 解答完毕.

习题十一. 课本第73页习题3.1题14: 利用公式 $f(x_0+\triangle x)\simeq f(x_0)+f'(x_0)\triangle x$ 计算如下数值的近似值:

$$(1)\quad \sin 29^\circ,\qquad (2)\quad \cos 151^\circ,\qquad (3)\quad \sqrt[3]{1.02}.$$

解(1): 先将 $29^\circ=30^\circ-1^\circ$ 化为弧度: $30^\circ=\frac{\pi}{6}$, $1^\circ=\frac{\pi}{180}$. 再根据公式 $f(x_0+\triangle x)\simeq f(x_0)+f'(x_0)\triangle x$ 得

$$\sin 29^\circ=\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{180}\right)\simeq\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}\pi}{360}$$

解(2): 由于 $151^\circ=\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{180}$, 故

$$\cos(151^\circ)=\cos\left(\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{180}\right)=-\cos\left(\pi-\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{180}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{180}\right).$$

根据公式 $f(x_0+\triangle x)\simeq f(x_0)+f'(x_0)\triangle x$ 得

$$\cos(151^\circ)=-\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{180}\right)\simeq-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-\Big[-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\Big]\cdot\Big(-\frac{\pi}{180}\Big)\Big)$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{180}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{360}$$

解(3): 为近似计算 $\sqrt[3]{1.02}$, 考虑函数 $f(x)=\sqrt[3]{x}$ 在点 $x=1$ 处的微分, $\triangle x=0.02$:

$$df(1)=f'(1)\triangle x=\frac{1}{3\sqrt[3]{1^2}}\cdot 0.02=\frac{1}{150}.$$

于是

$$\sqrt[3]{1.02} = f(x_0 + \triangle x) \simeq f(x_0) + df(x_0)\triangle x = 1 + \frac{1}{150}.$$

解答完毕.

Oct 22

习题一: 课本第83页习题3.2题2: 利用求导的四则运算法则, 求下列函数的导函数:

(1) $y = x^3 + 2\sqrt[3]{x} - \frac{1}{x^3} + \sqrt{2}$;

(2) $y = x\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 3x^{\frac{2}{3}}\right)$;

(3) $y = (x^2+1)(x-1)(3-x^3)$;

(4) $y = (x+x^2)^2$;

(5) $y = \frac{\tan x}{x}$;

(6) $y = e^x \cos x \ln x$;

(7) $y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

解(1): $y' = 3x^2 + \frac{2}{3}\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} + \frac{3}{x^4}$.

解(2): 为求导方便, 将函数写作 $y = \sqrt{x} - 3x^{\frac{5}{3}}$. 于是 $y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 5x^{\frac{2}{3}}$.

解(3): $y' = 2x(x-1)(3-x^3) + (x^2+1)(3-x^3) - 3x^2(x^2+1)(x-1)$.

解(4): $y' = 2(x+x^2)(1+2x)$.

解(5): $y' = \frac{1}{x^2\cos^2 x} - \frac{\tan x}{x^2}$.

解(6): $y' = e^x \cos x \ln x - e^x \sin x \ln x + \frac{e^x \cos x}{x}$.

解(7): 为方便求导, 我们将函数 $y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ 写作

$$y = \frac{1-x^2}{1+x^2} = \frac{2-1-x^2}{1+x^2} = -1 + \frac{2}{1+x^2}.$$

于是

$$y' = -\frac{4x}{(1+x^2)^2}.$$

习题二: 课本第83页习题3.2题4: 利用复合函数求导法则, 求下列函数的导数:

(1) $y = 2\sin(3x)$;

(2) $y = \exp(x^2 - 2x + 3)$;

(3) $y = (1 - x^3)^{\frac{3}{2}}$;

(4) $y = \sin(\cos^2 x)\cos(\sin^2 x)$;

(5) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$;

(6) $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$;

(7) $y = \arcsin\left(\frac{1}{x}\right)$;

(8) $y = e^{-3x}\sin(2x)$.

解(1): $y' = 6\cos(3x)$.

解(2): $y' = (2x - 2)\exp(x^2 - 2x + 3)$.

解(3): $y' = \frac{3}{2}(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}(-2x) = -3x(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$.

解(4):

$$y' = \cos(\cos^2 x)2\cos x(-\sin x)\cos(\sin^2 x) + \sin(\cos^2 x)(-1)\sin(\sin^2 x)2\sin x\cos x$$

$$= -2\cos x\sin x\left[\cos(\cos^2 x)\cos(\sin^2 x) + \sin(\cos^2 x)\sin(\sin^2 x)\right].$$

解(5):

$$y = \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}\right)' = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}\left(x + \sqrt{x + \sqrt{x}}\right)'$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}}\left[x + \sqrt{x}\right]'\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}}\left[1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right]\right)$$

$$= \frac{2\sqrt{x + \sqrt{x}} + (2\sqrt{x} + 1)}{8\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}\sqrt{x + \sqrt{x}}\sqrt{x}}.$$

解(7):

$$y' = \left(\arcsin\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{sgn(x)x\sqrt{x^2-1}}.$$

解(8):

$$y' = [e^{-3x}\sin(2x)]' = -3e^{-3x}\sin(2x) + 2e^{-3x}\cos(2x)$$

$$= e^{-3x}[2\cos(2x) - 3\sin(2x)].$$

习题三: 课本第83页习题3.2题5:

设 $f(x)$ 为可微函数, 求下列函数的导函数

(1) $f(-x)$;

(2) $f(\sin^2 x)f(\cos(x^2)$;

(3) $f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$;

(4) $f(f(f(x)))$;

(5) $e^{f(x)}\tan\left(f(x^2)+f(2x)\right)$;

(6) $f(x)\ln\frac{1}{f(\sqrt{x})}$.

解(1): $[f(-x)]' = -f'(-x)$.

解(2):

$$[f(\sin^2 x)f(\cos(x^2)]'$$

$$= \left[f'(\sin^2 x)2\sin x\cos x\right]f(\cos(x^2)) - f(\sin^2 x)\left[f'(\cos(x^2)\sin(x^2)2x\right].$$

解(3):

$$\left[f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right]' = f'\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\frac{-1}{2x^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}f'\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

解(4): $[f(f(f(x)))]' = f'(f(f(x)))f'(f(x))f'(x)$.

解(5):

$$\left[e^{f(x)}\tan\left(f(x^2)+f(2x)\right)\right]'$$

$$= e^{f(x)} f'(x) \tan\big(f(x^2) + f(2x)\big) + e^{f(x)} \frac{1}{\cos^2\left(f(x^2)+f(2x)\right)} \big(f(x^2)+f(2x)\big)'$$

$$= e^{f(x)} f'(x) \tan\big(f(x^2) + f(2x)\big) + e^{f(x)} \frac{2xf'(x^2)+2f'(2x)}{\cos^2\left(f(x^2)+f(2x)\right)}.$$

解(6): 由于 $f(x)\ln\frac{1}{f(\sqrt{x})} = -f(x)\ln f(\sqrt{x})$, 故

$$\left[f(x)\ln\frac{1}{f(\sqrt{x})}\right]' = -\Big[f(x)\ln f(\sqrt{x})\Big]' = -f'(x)\ln f(\sqrt{x}) - f(x)\frac{1}{f(\sqrt{x})}f'(\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= -f'(x)\ln f(\sqrt{x}) - \frac{f(x)f'(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}f(\sqrt{x})}.$$

习题四: 课本第83页习题3.2题6(1)(5)(6): 利用对数求导方法, 求下列函数的导数:

(1) $y = \frac{x^2}{1-x}\sqrt{\frac{x+1}{1+x+x^2}}$;

(5) $y = (\ln x)^{\sin x}$;

(6) $y = x + x^x + x^{x^x}$.

解(1): 对函数 $y = \frac{x^2}{1-x}\sqrt{\frac{x+1}{1+x+x^2}}$ 先取绝对值再取对数得

$$\ln|y| = \ln x^2 - \ln|1-x| + \frac{1}{2}(\ln|x+1| - \ln|1+x+x^2|). \qquad (*)$$

对式 (*) 求导得

$$\frac{y'}{y} = \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1+2x}{1+x+x^2}\right).$$

由此得所求函数的导数为

$$y' = y\left\{\frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1+2x}{1+x+x^2}\right)\right\}.$$

解(5): 对函数 $y = (\ln x)^{\sin x}$ 取对数得

$$\ln y = \sin x \ln(\ln x). \qquad (**)$$

对式 (**) 求导得

$$\frac{y'}{y} = \cos x \ln(\ln x) + (\sin x)\frac{1}{\ln x}\frac{1}{x} = \cos x\ln(\ln x) + \frac{\sin x}{x\ln x}.$$

于是所求函数的导数为

$$y' = y\left(\cos x \ln(\ln x) + \frac{\sin x}{x\ln x}\right).$$

解(6): (i) 先求函数 $x^x$ 和 $x^{x^x}$ 的导数: 由 $\ln x^x = x\ln x$ 得

$$\frac{[x^x]'}{x^x} = \ln x + x\cdot\frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

因此 $[x^x]' = x^x(\ln x + 1)$.

(ii) 再求函数 $x^{x^x}$ 的导数: 取对数 $\ln x^{x^x} = x^x \ln x$ 后再求导得

$$\frac{[x^{x^x}]'}{x^{x^x}} = [x^x]'\ln x + x^{x-1} = x^x(\ln x + 1)\ln x + x^{x-1}.$$

于是

$$[x^{x^x}]' = x^{x^x}\Big[x^x(\ln x + 1)\ln x + x^{x-1}\Big].$$

(iii) 于是函数 $y = x + x^x + x^{x^x}$ 的导数为

$$y' = 1 + x^x(\ln x + 1)\ln x + x^{x-1} + x^{x^x}\Big[x^x(\ln x + 1)\ln x + x^{x-1}\Big].$$

习题五: 课本第83页习题3.2题7: 求下列函数的反函数导数

$$(1)\quad y = x + \ln x;\quad (2)\quad y = x + e^x;\quad (3)\quad y = \tanh x;\quad (4)\quad y = \sinh x.$$

解(1): 函数 $y = x + \ln x$ 的导数为 $y = 1 + \frac{1}{x}$, 故其反函数 $x = x(y)$ 的导数为

$$x'(y) = \frac{1}{y'} = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{1 + x}.$$

解(2): 函数 $y = x + e^x$ 的导数为 $y = 1 + e^x$, 故其反函数 $x = x(y)$ 的导数为

$$x'(y) = \frac{1}{y'} = \frac{1}{1 + e^x}.$$

解(3)(4): 正弦双曲函数 $\sinh x$, 余弦双曲函数 $\cosh x$, 正切双曲函数 $\tanh x$, 余切双曲函数 $\coth x$ 的定义如下:

$$\sinh x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \qquad \cosh x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}),$$

$$\tanh x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sinh x}{\cosh x}, \qquad \coth x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\cosh x}{\sinh x}.$$

这些双曲函数有三角函数 $\sin x, \cos x$ 等类似的性质. 例如

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

易证如下双曲函数的导数公式成立:

$$(\sinh x)' = \cosh x, \quad (\cosh x)' = \sinh x, \quad (\tanh x)' = 1 - \tanh^2 x.$$

根据反函数导数定理, (3) 函数 $y = \tanh x$ 的反函数 $x = \tanh^{-1} y$ 的导数为

$$x' = \frac{1}{y'} = \frac{1}{1 - \tanh^2 x} = \frac{1}{1 - y^2}.$$

(4) 函数 $y = \sinh x$ 的反函数 $x = \sinh^{-1} y$ 的导数为

$$x' = \frac{1}{y'} = \frac{1}{\cosh x} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}.$$

习题六: 课本第84页习题3.2题8: 假设下列各函数方程均确定了可导函数 $y = y(x)$, 求导数 $y'(x)$:

(1) $xy = 1 + xe^y$;

(2) $(x^2 + y^2)^2 = 3x^2 y - y^3$;

(3) $x - y - \arcsin y = 0$;

(4) $\arctan \frac{x}{y} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$;

(5) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$;

(6) $x^y = y^x$.

解(1): 对方程 $xy = 1 + xe^y$ 关于 $x$ 求导得 $xy' + y = e^y + xe^y y'$. 解出 $y'$ 得 $xy' - xe^y y' = e^y - y$. 解之得

$$y' = \frac{e^y - y}{x - xe^y}.$$

解(2): 对方程 $(x^2 + y^2)^2 = 3x^2 y - y^3$ 关于 $x$ 求导得

$$2(x^2 + y^2)(2x + 2yy') = 6xy + 3x^2 y' - 3y^2 y'.$$

整理得

$$4y(x^2 + y^2)y' + 3(y^2 - x^2)y' = 6xy - 4x(x^2 + y^2).$$

解得 $y'$ 得

$$y' = \frac{6xy - 4x(x^2 + y^2)}{4y(x^2 + y^2) + 3(y^2 - x^2)}.$$

解(3): 对方程 $x - y - \arcsin y = 0$ 关于 $x$ 求导得 $1 - y' - \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}y' = 0$. 解之得

$$y' = \frac{\sqrt{1 - y^2}}{1 + \sqrt{1 - y^2}}.$$

解(4): 对方程 $\arctan \frac{x}{y} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$ 关于 $x$ 求导得

$$\frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{y - xy'}{y^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot (2x + 2yy').$$

整理得

$$\frac{y - xy'}{x^2 + y^2} = \frac{x + yy'}{x^2 + y^2} \quad \text{即} \quad y - xy' = x + yy'.$$

解得 $y' = \frac{y-x}{y+x}$.

解(5): 对方程 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 关于 $x$ 求导得

$$\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}} + \frac{2}{3}y^{\frac{-1}{3}}y' = 0.$$

解之得 $y' = -(\frac{y}{x})^{\frac{1}{3}}$.

解(6): 为求导方便, 先对方程 $x^y = y^x$ 取对数得

$$y \ln x = x \ln y. \qquad (*)$$

再对式 (*) 求导得

$$y' \ln x + \frac{y}{x} = \ln y + \frac{x}{y} y'. \qquad (**)$$

由式 (**) 解得

$$y' = \frac{xy \ln y - y^2}{xy \ln x - x^2}.$$

习题七: 课本第84页习题3.2题9:

(1) 求曲线 $xy + \ln y = 1$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程;

(2) 求曲线 $\frac{x^2}{100} + \frac{(y-2)^2}{64} = 1$ 在点 $(5\sqrt{3}, 6)$ 处的切线方程;

(3) 求曲线 $\cos(xy) - \ln \frac{x+1}{y} = 1$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程.

解(1): 先求曲线 $xy + \ln y = 0$ 在点 $(1,1)$ 处的斜率: 对方程 $xy + \ln y = 0$ 关于 $x$ 求导得

$$y + xy' + \frac{y'}{y} = 0. \qquad (*)$$

在式 (*) 中令 $x = 1$, $y = 1$ 得 $1 + y'(1) + y'(1) = 0$. 故所求斜率为 $y'(1) = \frac{-1}{2}$. 于是所求曲线 $xy + \ln y = 0$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程为 $y - 1 = \frac{-1}{2}(x-1)$. 化简得 $(x-1) + 2(y-1) = 0$ 或 $x + 2y = 3$.

解(2): 先求曲线 $\frac{x^2}{100} + \frac{(y-2)^2}{64} = 1$ 在点 $(5\sqrt{3}, 6)$ 处的斜率: 对方程 $\frac{x^2}{100} + \frac{(y-2)^2}{64} = 1$ 关于 $x$ 求导得

$$\frac{x}{50} + \frac{(y-2)y'}{32} = 0. \qquad (*)$$

于式 (*) 中令 $x = 5\sqrt{3}$, $y = 6$ 得 $\frac{5\sqrt{3}}{50} + \frac{4y'}{32} = 0$. 解之得 $y'(5\sqrt{3}) = -\frac{4\sqrt{3}}{5}$. 于是曲线 $\frac{x^2}{100} + \frac{(y-2)^2}{64} = 1$ 在点 $(5\sqrt{3}, 6)$ 处的切线方程为

$$y - 6 = -\frac{4\sqrt{3}}{5}(x - 5\sqrt{3}) \quad 化简得 \quad y = -\frac{4\sqrt{3}}{5}x + 18.$$

解(3):先求曲线 $\cos(xy)-\ln\frac{x+1}{y}=1$ 在点 $(0,1)$ 处的斜率: 对方程 $\cos(xy)-\ln\frac{x+1}{y}=1$ 关于 $x$ 求导得

$$-\sin(xy)(y+xy')-\frac{1}{x+1}+\frac{y'}{y}=0. \qquad (*)$$

于式 (*) 中, 令 $x=0, y=1$ 得 $-1+y'(0)=0$, 即 $y'(0)=1$. 于是曲线 $\cos(xy)-\ln\frac{x+1}{y}=1$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程为

$$y-1=x \qquad \text{即} \qquad y=x+1.$$

解答完毕.

习题八: 课本第84页习题3.2题10: 求下列参数曲线的斜率 $y'(x)$:

(1) $x=\cos t$, $y=at\sin t$;

(2) $x=te^t$, $y=2t+t^2$;

(3) $x=\frac{3at}{1+t^3}$, $y=\frac{3at^2}{1+t^3}$;

(4) $x=3t^2+2t$, $e^y\sin t-y+1=0$;

(5) 阿基米德螺线 $\rho=a\theta$;

(6) 对数螺线 $\rho=ae^{m\theta}$.

注: 题(3)中的曲线称作笛卡尔叶形线. 原题中坐标 $y$ 的参数方程似有误: 分子应为 $3at^2$, 而不是 $3at^3$.

解(1):

$$y'(x)=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{a\sin t+at\cos t}{-\sin t}=-a-at\cot.$$

解(2):

$$y'(x)=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{2+2t}{e^t+te^t}=\frac{2}{e^t}.$$

解(3): 由于

$$x'(t)=\left(\frac{3at}{1+t^3}\right)'=\frac{3a}{1+t^3}-\frac{3at\cdot 3t^2}{(1+t^3)^2}=\frac{3a-6at^3}{(1+t^3)^2},$$

$$y'(t) = \left(\frac{3at^2}{1+t^3}\right)' = \frac{6at}{1+t^3} - \frac{3at^2 \cdot 3t^2}{(1+t^3)^2} = \frac{6at-3at^4}{(1+t^3)^2},$$

故

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\frac{6at-3at^4}{(1+t^3)^2}}{\frac{3a-6at^3}{(1+t^3)^2}} = \frac{2t-t^4}{1-2t^3}.$$

解(4): 对 $x = 3t^2 + 2t$ 求导得 $x'(t) = 6t + 2$; 对 $e^y \sin t - y + 1 = 0$ 关于 $t$ 求导得

$$e^y y'(t) \sin t + e^y \cos t - y'(t) = 0. \qquad (*)$$

由式 (*) 解得

$$y'(t) = \frac{e^y \cos t}{1 - e^y \sin t}.$$

于是

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\frac{e^y \cos t}{1-e^y \sin t}}{6t+2} = \frac{e^y \cos t}{(6t+2)(1-e^y \sin t)}.$$

解(5): 阿基米德螺线 $\rho = a\theta$ 的直角坐标方程为

$$x = \rho\cos\theta = a\theta\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\theta = a\theta\sin\theta.$$

由此得

$$x'(\theta) = a\cos\theta - a\theta\sin\theta, \qquad y'(\theta) = a\sin\theta + a\theta\cos\theta.$$

于是所求导数

$$y'(x) = \frac{y'(\theta)}{x'(\theta)} = \frac{a\sin\theta + a\theta\cos\theta}{a\cos\theta - a\theta\sin\theta} = \frac{\sin\theta + \theta\cos\theta}{\cos\theta - \theta\sin\theta}.$$

解(6): 对数螺线 $\rho = ae^{m\theta}$ 的直角坐标方程为

$$x = \rho\cos\theta = ae^{m\theta}\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\theta = ae^{m\theta}\sin\theta.$$

由此得

$$x'(\theta) = ame^{m\theta}\cos\theta - ae^{m\theta}\theta\sin\theta, \qquad y'(\theta) = ame^{m\theta}\sin\theta + ae^{m\theta}\theta\cos\theta.$$

于是所求导数

$$y'(x)=\frac{y'(\theta)}{x'(\theta)}=\frac{ame^{m\theta}\sin\theta+ae^{m\theta}\theta\cos\theta}{ame^{m\theta}\cos\theta-ae^{m\theta}\theta\sin\theta}=\frac{m\sin\theta+\theta\cos\theta}{m\cos\theta-\theta\sin\theta}.$$

解答完毕.

习题九: 课本第84页习题3.2题12: 证明近似公式

$$\sqrt[n]{a^n+x}\simeq a+\frac{x}{na^{n-1}},$$

其中 $a>0$, $|x|\ll a^n$, 并利用这个近似公式计算 (1) $\sqrt[3]{29}$ 和 (2) $\sqrt[10]{1000}$ 的近似值.

证明: 记 $f(y)=(1+y)^{\frac{1}{n}}$, 则当 $|y|$ 很小时, 我们可以用一阶微分代替 $f(y)\simeq f(0)+f'(0)y$, 即有近似公式 $f(y)\simeq f(0)+f'(0)y=f(0)+\frac{y}{n}$. 记 $y=\frac{x}{a^n}$, 于是

$$\sqrt[n]{a^n+x}=a\sqrt[n]{1+\frac{x}{a^n}}=af(y)\simeq a\left(f(0)+\frac{1}{n}\cdot\frac{x}{a^n}\right)=a+\frac{x}{na^{n-1}}.$$

以下计算 (1) $\sqrt[3]{29}$ 和 (2) $\sqrt[10]{1000}$ 的近似值:

(1) $\sqrt[3]{29}=\sqrt[3]{3^3+2}\simeq 3+\frac{2}{3\cdot 3^2}=3+\frac{2}{27}$.

(2) 注意 $2^{10}=1024$, 于是

$$\sqrt[10]{1000}=\sqrt[10]{2^{10}-24}\simeq 2+\frac{-24}{10\cdot 2^9}=2-\frac{3\cdot 2^3}{10\cdot 2^9}=2-\frac{3}{10\cdot 2^6}=2-\frac{3}{640}.$$

解答完毕.