微积分A1第五次习题课讨论题参考解答　　杨利军　　Nov 10 - 16, 2025

本次习题课主要讨论导数的初步应用. 具体说来有五个方面的内容

一. 关于中值定理的补充

二. 证明不等式

三. 计算函数极限 (利用 L'Hospital 法则或 Taylor 展式)

四. 研究曲线性质

五. 零点问题

一. 关于中值定理的补充

讨论题 1. 广义 Rolle 定理(课本第95页习题4.1题11) (1) 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上可导, 两端点处的单侧极限存在且相等, 即 $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to b^-} f(x)$. 证明存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f'(\xi)=0$.

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上可导, 两个极限 $\lim_{x\to a^+} f(x)$ 和 $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 均存在且相等. 证明存在 $\xi\in(a,+\infty)$, 使得 $f'(\xi)=0$.

(3) 问在结论(2) 中, 若将区间 $(a,+\infty)$ 改作 $(-\infty,b)$ 或 $(-\infty,+\infty)$, 结论是否仍然成立?

证(1). 若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上恒为常数, 则结论显然成立. 设函数 $f(x)$ 不是常数函数, 则至少存在一点 $x_0\in(a,b)$, 使得 $f(x_0)\neq\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to b^-} f(x)$. 不妨设 $f(x_0) > \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to b^-} f(x)$, 则存在 $\delta>0$, 使得 $f(x_0) > f(a+\delta)$ 且 $f(x_0) > f(b-\delta)$. 于是函数 $f(x)$ 在区间 $[a+\delta, b-\delta]$ 的最大值必在某点 $\xi\in(a+\delta,b-\delta)$ 内取得. 在根据 Fermat 定理知 $f'(\xi)=0$.

证(2): 证明思想基本同上. 略.

(3) 所问问题的答案都是肯定的。证明基本同(1). 略. 证毕.

二. 不等式

讨论题 2. 证明不等式 $4x\ln x \ge x^2+2x-3$, $\forall x\in(0,2)$.

证明: 令 $f(x)=4x\ln x-x^2-2x+3$. 注意 $f(1)=0$. 因此无法利用 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 内的单调性证明命题. 也就是说证明不等式的常用方法, 单调性方法这里不能应用. 因此我们考虑证明不等式的另一个方法, 最值方法. 以下我们将证明函数 $f(x)$ 在开区间 $(0,2)$ 内可以取得最小值, 并且最小值是零. 先求驻点. 简单计算得

$$f'(x)=4\ln x+2-2x=0,\quad f''(x)=\frac{4}{x}-2,\quad x\in(0,2).$$

由此可见 $f''(x)>0$, $\forall x\in(0,2)$, 故 $f'(x)$ 在区间 $(0,2)$ 上严格单调上升. 由于 $f'(1)=0$, 故在 $(0,1)$ 上, 函数 $f'(x)<0$, 即 $f(x)$ 严格单调下降, 在 $(1,2)$ 上, 函数 $f'(x)>0$, 即 $f(x)$ 严格单调上升. 因此 $f(x)$ 于点 $x=1$ 处取得在开区间 $(0,2)$ 内的最小值, 即 $f(x)\ge 0$, $\forall x\in(0,2)$. 命题得证. 证毕.

讨论题 3. 证明不等式

$$\frac{x}{x^2+2x+2}<\arctan(1+x)-\frac{\pi}{4}<\frac{x}{2},\quad \forall x>0.$$

<u>证明</u>: 先证左边不等式. 令

$$f(x)=(x^2+2x+2)\left[\arctan(1+x)-\frac{\pi}{4}\right]-x,$$

则 $f(0)=0$. 简单计算得

$$f'(x)=2(x+1)\left[\arctan(1+x)-\frac{\pi}{4}\right].$$

由于 $\arctan(1+x)-\frac{\pi}{4}>0$, $\forall x>0$, 故 $f'(x)>0$, $\forall x>0$. 于是 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格单调上升. 故 $f(x)>f(0)=0$. 由此可见左边不等式成立. 再证右边不等式. 记

$$g(x)=\arctan(1+x)-\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2},$$

则 $g(0)=0$ 且

$$g'(x)=\frac{1}{1+(1+x)^2}-\frac{1}{2}<0,\quad \forall x>0.$$

可见函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格单调下降. 故 $g(x) < g(0) = 0, \forall x > 0$. 由此可见右侧不等式成立. 证毕.

讨论题 4*. (课本第125页第4章总复习题题11) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上二阶可导, 且 $f(0) = 0 = f(1)$. 进一步假设 $\min\{f(x), x \in [0,1]\} = -1$. 证明存在 $\xi \in [0,1]$, 使得 $f''(\xi) \geq 8$.

证明: 设 $f(x)$ 在点 $x_0 \in (0,1)$ 处取得最小值, 则 $f(x_0) = -1$ 且 $f'(x_0) = 0$. 将函数值 $f(0) = 0$ 和 $f(1) = 0$ 在点 x_0 处作一阶 Taylor 展开, 带 Lagrange 余项, 则有

$$0 = f(0) = f(x_0) + f'(x_0)(0 - x_0) + \frac{1}{2}f''(\eta_1)(0 - x_0)^2, \quad \eta_1 \in (0, x_0),$$

$$0 = f(1) = f(x_0) + f'(x_0)(1 - x_0) + \frac{1}{2}f''(\eta_2)(1 - x_0)^2, \quad \eta_2 \in (x_0, 1).$$

由此得

$$\frac{1}{2}f''(\eta_1)(0 - x_0)^2 = 1, \quad \frac{1}{2}f''(\eta_2)(1 - x_0)^2 = 1. \qquad (*)$$

若 $x_0 \in (0, \frac{1}{2}]$, 则由式 (*) 中的第一个等式得

$$|f''(\eta_1)| = \frac{2}{x_0^2} \geq \frac{1}{8}.$$

命题得证. 若 $x_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$, 则由式 (*) 中的第二个等式得

$$|f''(\eta_2)| = \frac{2}{(1 - x_0)^2} \geq \frac{1}{8}.$$

命题得证. 证毕.

注: 也可根据式 (*) 用如下方法证明命题. 由式 (*) 得

$$\frac{1}{2}[f''(\eta_1) + f''(\eta_2)] = \frac{1}{x_0^2} + \frac{1}{(1 - x_0)^2}.$$

上式左边是平均值 $\frac{1}{2}[f''(\eta_1) + f''(\eta_2)]$ 介于两个值 $f''(\eta_1)$ 和 $f''(\eta_2)$ 之间. 根据 Darboux 定理 (导数的介值性质) 可知, 存在一点 ξ 介于 η_1 和 η_2 之间. 于是

$$f''(\xi) = \frac{1}{x_0^2} + \frac{1}{(1 - x_0)^2}.$$

上式右边可作如下估计

$$\frac{1}{x_0^2}+\frac{1}{(1-x_0)^2}\geq \min\left\{\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{(1-\lambda)^2},\lambda\in(0,1)\right\}.$$

不难证明上式右边的最小值为 8, 在 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时取得. 即

$$f''(\xi)=\frac{1}{x_0^2}+\frac{1}{(1-x_0)^2}\geq 8.$$

命题得证.

三．计算函数极限 (利用 L'Hospital 法则或 Taylor 展式)

讨论题 5. (课本第125页第4章总复习题题16)

(i) 求极限

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{x+1}(\ln x+1)-x}{1-x}.$$

(ii) 求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}.$$

解: 极限 (i) 是 $\frac{0}{0}$ 型不定式的极限。 可用 L'Hospital 法则. 我们先将极限式中函数表为

$$\frac{x^{x+1}(\ln x+1)-x}{1-x}=x\cdot\frac{x^x(\ln x+1)-1}{1-x}$$

显然原极限等于极限

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^x(\ln x+1)-1}{1-x}.$$

相比而言, 后者求导时稍微容易些. 对后一极限使用 L'Hospital 法则

$$\frac{[x^x(\ln x+1)-1]'}{[1-x]'}=\frac{[e^{x\ln x}(\ln x+1)-1]'}{[1-x]'}$$

$$=-\Big[e^{x\ln x}(\ln x+1)^2+e^{x\ln x}\frac{1}{x}\Big]\to-(1+1)=-2,\quad x\to 1.$$

于是

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{x+1}(\ln x+1)-x}{1-x}=-2.$$

再考虑极限 (ii). 极限 (ii) 也是 $\frac{0}{0}$ 型不定式的极限. 考虑分子的 Taylor 展式

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4), \quad e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2 + o(x^4).$$

于是

$$\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}} = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!}\frac{x^4}{2^2}\right) + o(x^4) = \frac{-1}{12}x^4 + o(x^4).$$

因此

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-1}{12}x^4 + o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{12}.$$

解答完毕.

讨论题 6. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的一个邻域内可导, 且 $f(0)=1$, $f'(0)=2$. 求极限

$$\lim_{n\to+\infty} \left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{n}{1-f(\frac{1}{n})}} \qquad (*)$$

<u>解</u>: 考虑函数极限

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x(1-f(x))}}. \qquad (**)$$

显然如取 $x=\frac{1}{n}$, 则函数极限 (**) 就是序列极限 (*). 以下我们来证明函数极限 (**) 存在, 并记之为 A, 则由函数极限与序列极限的 Heine 定理知, 所求极限也存在, 且极限也为 A. 将极限式 (**) 表为标准函数极限模式

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x(1-f(x))}} = (1+\delta)^{\frac{1}{\delta}\cdot\frac{\delta}{x[1-f(x)]}},$$

其中 $\delta = \delta(x) = \frac{\sin x - x}{x}$, 注意到

$$\lim_{x\to 0}\delta(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{[\sin x - x]'}{[x]'} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{1} = 0.$$

我们再来求极限 $\lim_{x\to 0}\frac{\delta}{x[1-f(x)]}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\delta}{x[1-f(x)]} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^2[1-f(x)]}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} \cdot \frac{x}{1-f(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{f(0)-f(x)}{x}}$$

$$= -\frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{-f'(0)} = \frac{1}{12}.$$

于是

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x(1-f(x))}} = \left[\lim_{x\to 0} \left(1+\frac{\sin x - x}{x}\right)^{\frac{x}{\sin x - x}}\right]^{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^2[1-f(x)]}} = e^{\frac{1}{12}}.$$

解答完毕.

讨论题 7. 假设极限

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = 0.$$

求极限

$$\lim_{x\to 0} \frac{6+f(x)}{x^2}.$$

解: 由熟知极限

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}$$

可知

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 6x - 6x}{(6x)^3} = -\frac{1}{6}$$

于是我们有

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 6x - 6x}{x^3} = -\frac{1}{6}6^3 = -36.$$

根据已知条件知

$$0 = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 6x - 6x + 6x + xf(x)}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin 6x - 6x}{x^3} + \lim_{x\to 0} \frac{6x + xf(x)}{x^3} = -36 + \lim_{x\to 0} \frac{6+f(x)}{x^2}.$$

因此

$$\lim_{x\to 0} \frac{6+f(x)}{x^2} = 36.$$

解答完毕.

讨论题 8. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导且 $\lim_{x\to+\infty} f'(x)=e$. 求常数 C, 使得

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-C}{x+C}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-f(x-1)\right]. \tag{1}$$

<u>解</u>: 根据假设 $\lim_{x\to+\infty} f'(x)=e$ 以及 Lagrange 中值定理可知等式 (1) 右边的极限为

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-f(x-1)\right]=\lim_{x\to+\infty} f'(\xi)=e.$$

考虑等式 (1) 左边的极限. 若 $C=0$, 则等式左边的极限为 1, 右边的极限为 e, 等式 (1) 不可能成立. 因此 $C\neq 0$. 我们将等式 (1) 左边极限式中的函数写作标准函数极限模式

$$\left(\frac{x-C}{x+C}\right)^x=\left(1+\frac{-2C}{x+C}\right)^{\frac{x+C}{-2C}\cdot\frac{-2Cx}{x+C}}\to e^{-2C},\quad x\to+\infty.$$

故 $e=e^{-2C}$. 由此可见 $C=-\frac{1}{2}$. 解答完毕.

四． 研究曲线性质

讨论题 9. 求 k 的值, 使得曲线 $y=e^{2x}$ 与曲线 $y=k\sqrt{x}$ 有唯一的公共切线, 并求切点坐标和公切线方程.

<u>解</u>: 假设曲线 $y=e^{2x}$ 与曲线 $y=k\sqrt{x}$ 相切于点 (a,b), 则得到方程组

$$e^{2a}=k\sqrt{a},\quad 2e^{2a}=\frac{k}{2\sqrt{a}}.$$

不难解上述关于 a 和 k 的方程组得唯一一组解

$$a=\frac{1}{4},\quad k=2\sqrt{e}.$$

由此可见当 $k=2\sqrt{e}$ 时, 曲线 $y=e^{2x}$ 与曲线 $y=k\sqrt{x}$ 相切于点 $(\frac{1}{4},\sqrt{e})$, 且公切线方程为

$$y=\sqrt{e}+2\sqrt{e}\left(x-\frac{1}{4}\right)\quad 或\quad 4\sqrt{e}x-2y+\sqrt{e}=0.$$

解答完毕.

讨论题 10. 求一个单位圆的位置, 该单位圆的圆心在 y 轴上, 并位于抛物线 $y = x^2$ 的上方, 且与抛物线 $y = x^2$ 恰好有两个切点.

解: 依题意可设所求单位圆的方程为 $x^2 + (y-b)^2 = 1$, 其中 b 为圆心纵坐标, 待定. 在方程 $x^2 + (y-b)^2 = 1$ 中, 视 y 为 x 的可导函数, 并于方程两边关于 x 求导得 $2x + 2(y-b)y' = 0$. 由此得单位圆上点 (x, y) 处切线的斜率为 $y' = \frac{-x}{y-b}$. 对方程 $y = x^2$ 求导得抛物线斜率 $y' = 2x$. 假设这两曲线在点 (x, y) 处相切, 则

$$\begin{cases} x^2 + (y-b)^2 = 1 \\ y = x^2 \\ \frac{-x}{y-b} = 2x \end{cases}$$

情形一: $x = 0$. 此时 $y = x^2 = 0$. 代入第一个方程得 $b = \pm 1$. 由假设单位圆位于抛物线上方, 故 $b = 1$. 此时单位圆 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ 与抛物线 $y = x^2$ 只有一个切点, 即原点 $(0, 0)$. 矛盾. 故这种情形不可能出现.
情形二: $x \neq 0$. 此时 $y - b = -\frac{1}{2}$. 代入第一个方程得 $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, $y = \frac{3}{4}$, $b = \frac{5}{4}$. 这表明单位圆圆心位于 $(0, \frac{5}{4})$, 单位圆与抛物线恰好有两个切点 $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{4})$ 和 $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{4})$. 解答完毕.

讨论题 11. 证明星形线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 上任一点的切线被坐标轴截下的部分的长度为常数, 这里 $a > 0$.

解: 根据隐函数求导规则, 对方程 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 两边关于 x 求导, 并视 $y = y(x)$ 为 x 的可微函数, 则

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y' = 0.$$

由此得星形线在点 (x_0, y_0) 处的切线斜率为

$$y' = -\left(\frac{x_0}{y_0}\right)^{-\frac{1}{3}}.$$

于是点 (x_0,y_0) 处的切线方程为

$$y-y_0=-\left(\frac{x_0}{y_0}\right)^{-\frac{1}{3}}(x-x_0).$$

稍加整理得切线方程为

$$y_0^{\frac{1}{3}}x+x_0^{\frac{1}{3}}y=x_0^{\frac{1}{3}}y_0+y_0^{\frac{1}{3}}x_0=x_0^{\frac{1}{3}}y_0^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}$$

$$\text{或}\quad \frac{x}{y_0^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}}+\frac{y}{x_0^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}}=1.$$

由此可见切线在两个坐标轴 x 轴上截点坐标为 $(y_0^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}},0)$, 在 y 轴上截点坐标为 $(0,x_0^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}})$. 因此切线被坐标轴所截下部分的长度为

$$\sqrt{\left(x_0^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}\right)^2+\left(y_0^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}\right)^2}=a^{\frac{2}{3}}\sqrt{x_0^{\frac{2}{3}}+y_0^{\frac{2}{3}}}=a.$$

证毕.

五．零点问题

讨论题 12. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导且 $f(1)=0$. 证明存在 $c\in(0,1)$, 使得 $f(c)+cf'(c)=0$.

证明: 作辅助函数 $F(x)=xf(x)$. 显然 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 上可导且 $F(0)=0=F(1)$. 由 Rolle 定理可知存在 $c\in[0,1]$, 使得 $F'(c)=0$, 即 $f(c)+cf'(c)=0$. 证毕.

讨论题 13. 设函数 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可微, 在 (a,b) 上二阶可导且 $g''(x)\neq 0$, $\forall x\in(a,b)$, $f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$. 求证

(1) $g(x)\neq 0$, $\forall x\in(a,b)$;

(2) 存在 $c\in(a,b)$, 使得

$$\frac{f(c)}{g(c)}=\frac{f''(c)}{g''(c)}.$$

证明: (1) 反证法证 $g(x)\neq 0$, $\forall x\in(a,b)$. 假设存在 $c\in(a,b)$, 使得 $g(c)=0$. 由于 $g(a)=g(c)=g(b)=0$, 故由 Rolle 定理知存在 $c_1\in(a,c)$, $c_2\in(c,b)$, 使得 $g'(c_1)=0$, $g'(c_2)=0$. 再次利用 Rolle 定理可知 $c_3\in(c_1,c_2)$, 使得 $g''(c_3)=0$. 此与题设 $g''(x)\neq 0$, $\forall x\in(a,b)$ 矛盾. 因此结论(1)成立.
(2) 记 $F(x)=f(x)g'(x)-g(x)f'(x)$, 则函数 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导, 且 $F(a)=0=F(b)$. 由 Rolle 定理知存在 $c\in(a,b)$, 使得 $F'(c)=0$, 即 $f(c)g''(c)-g(c)f''(c)=0$. 此即
$$\frac{f(c)}{g(c)}=\frac{f''(c)}{g''(c)}.$$
结论 (2) 得证. 证毕.

讨论题 14. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导, 且满足 $0<f(x)<1$ 和 $f'(x)\neq 1$, $\forall x\in[0,1]$. 证明存在唯一的 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f(\xi)=\xi$.

证: 存在性. 作辅助函数 $F(x)=f(x)-x$, 则 $F(0)=f(0)>0$, $F(1)=f(1)-1<0$. 由连续函数的介值定理知, 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $F(\xi)=0$, 此即 $f(\xi)=\xi$.
唯一性. 若存在两点 $\xi_1,\xi_2\in(0,1)$, 使得 $f(\xi_1)=\xi_1$ 和 $f(\xi_2)=\xi_2$. 由 Lagrange 中值定理知, 存在 η 介于 ξ_1 和 ξ_2 之间, 使得
$$f'(\eta)=\frac{f(\xi_1)-f(\xi_2)}{\xi_1-\xi_2}=\frac{\xi_1-\xi_2}{\xi_1-\xi_2}=1.$$
此与假设 $f'(x)\neq 1$, $\forall x\in[0,1]$ 相矛盾. 证毕.

讨论题 15*. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(a)=f(b)=1$. 证明存在 $\xi,\eta\in[a,b]$, 使得 $e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1$.

解: 令 $F(x)=e^x f(x)$, 则对函数 $F(x)$ 应用 Lagrange 定理知存在 $\eta\in(a,b)$, 使得
$$\frac{F(a)-F(b)}{a-b}=F'(\eta.)$$
此即
$$\frac{e^a f(a)-e^b f(b)}{a-b}=e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)].$$

根据假设 $f(a)=f(b)=1$ 可知上式左端为
$$\frac{e^a f(a)-e^b f(b)}{a-b}=\frac{e^a-e^b}{a-b}.$$
对上式右端再此应用 Lagrange 中值定理知存在 $\xi\in(a,b)$, 使得
$$\frac{e^a-e^b}{a-b}=e^{\xi}.$$
综合上述即得
$$e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)]=e^{\xi}.$$
此即
$$e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1.$$
命题得证. 证毕.

讨论题 16. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=f(1)=0$. 证明存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $2f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

<u>证明</u>: 对函数 $F(x)=x^2f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上, 应用 Rolle 定理立刻得到结论. 证毕.

讨论题 17*. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0$ 和 $f(1)=1$. 证明 (1) 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f(\xi)=1-\xi$; (2) 存在两个不同的点 $\eta_1,\eta_2\in(0,1)$, 使得 $f'(\eta_1)f'(\eta_2)=1$.

<u>注</u>: 结论 (2) 中出现了两个不定中间值 η_1,η_2. 这提示我们可能需要两次在不同的区间上使用中值定理.

<u>解</u>: (1) 令 $F(x)=f(x)-1+x$, 则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $F(0)=-1<0$ 和 $F(1)=1>0$. 于是由介值定理知存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $F(\xi)=0$, 即 $f(\xi)=1-\xi$.
(2) 对函数 $f(x)$ 分别在区间 $[0,\xi]$ 和 $[\xi,1]$ 上, 应用 Lagrange中值定理, 可知存在 $\eta_1\in(0,\xi)$, $\eta_2\in(\xi,1)$, 使得
$$\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi-0}=f'(\eta_1),\quad \frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}=f'(\eta_2),$$

此即
$$\frac{1-\xi}{\xi} = f'(\eta_1), \quad \frac{\xi}{1-\xi} = f'(\eta_2),$$
于是
$$f'(\eta_1)f'(\eta_2) = \frac{1-\xi}{\xi} \cdot \frac{\xi}{1-\xi} = 1.$$
命题得证. 证毕.