

## 习题课材料（二）

注：本次习题课包含内容：矩阵运算、逆矩阵、分块矩阵等

注：带 ♡ 号的习题有一定的难度、比较耗时，请量力为之。

本节考虑的矩阵均为实矩阵。

习题 1. 下列命题是否正确？

1. 若  $A, B$  都是  $n$  阶方阵，则  $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ .
2. 若矩阵  $A, B, C$  满足  $A \neq 0, AB = AC$ ，则  $B = C$ .
3. 若矩阵  $A$  满足  $A^2 = I$ ，则  $A = \pm I$ .
4. 若  $n$  阶方阵  $A$  的行列式  $|A| = 0$ ，则  $A = 0$ .
5. 若可逆矩阵  $A$  经过初等行变换可以化为方阵  $B$ ，则  $A^{-1} = B^{-1}$ .
6. 若  $n$  阶方阵  $A, B, C$  满足  $ABC = I$ ，则

$$BCA = I, \quad A^{-1}C^{-1}B^{-1} = I, \quad C^T B^T A^T = I.$$

7. 若  $A$  为  $n$  阶方阵， $k$  为任意常数，则  $|kA| = k|A|$ .
8. 若  $A$  可逆，且  $|A+AB| = 0$ ，则  $|B+I| = 0$ .
9. 若矩阵  $A$  满足  $A^2 = A$ ， $|A-I| \neq 0$ ，则  $A = 0$ .
10. 对方阵进行初等行变换，不改变方阵的行列式.

解 1.  $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$ ，一般来说，不等于  $A^2 + 2AB + B^2$ ，除非  $AB = BA$ .

2. 不成立，反例如  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$

3. 不成立，反例如  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

4. 不成立, 反例如  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
5. 不成立, 反例如  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , 把  $A$  的第一行加到第二行, 得  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ , 但  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ , 两者不相等.
6. 三个等号都成立, 由条件知  $(BC)^{-1} = A$ , 所以  $(BC)A = I$ , 即第一个等式成立. 对第一个等式取逆知第二个等式成立. 直接对条件取转置可知第三个等式成立.
7. 不成立,  $|kA| = k^n|A|$ .
8. 成立.  $|A + AB| = |A||I + B|$ ,  $A$  可逆则  $|A| \neq 0$ , 所以  $|I + B| = 0$ .
9. 成立.  $|A - I| \neq 0$  则  $A - I$  可逆, 由  $A^2 = A$  可知  $(A - I)A = 0$ , 左乘  $(A - I)$  的逆矩阵得  $A = 0$ .
10. 不成立. 倍加不改变行列式, 对换将导致行列式乘以  $-1$ , 倍乘将导致行列式乘以相同的倍数.

□

习题 2. 设  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $B$  是  $n \times m$  矩阵. 证明:  $I_m - AB$  可逆当且仅当  $I_n - BA$  可逆.

证明. 要证明的命题也等价于 “ $I_m - AB$  不可逆当且仅当  $I_n - BA$  不可逆.”

假设  $I_m - AB$  不可逆, 则存在非零向量  $u$  使得  $(I_m - AB)u = 0$ , 于是  $u = ABu$ , 特别的,  $Bu \neq 0$ . 注意到

$$(I_n - BA)(Bu) = Bu - BABu = B(I_m - AB)u = 0,$$

这说明  $Bu$  是  $(I_n - BA)x = 0$  的非零解, 因此  $I_n - BA$  不可逆.

同理可证,  $I_n - BA$  不可逆时,  $I_m - AB$  也不可逆.

□

习题 3. 已知  $n$  阶方阵  $A$  满足方程:  $A^2 + 3A - 4I = 0$ , 其中  $I$  是单位矩阵.

1. 求  $(A + 3I)^{-1}$ ;
2. 求  $(A + 5I)^{-1}$ ;
3. 问当  $m$  满足什么条件时,  $(A + mI)$  必可逆.

解 1. 根据题设,  $A(A + 3I) = 4I$ , 因此  $(A + 3I)^{-1} = \frac{1}{4}A$ .

2. 令  $B = A + 5I$ , 则  $A = B - 5I$ , 根据题设有:  $(B - 5I)^2 + 3(B - 5I) - 4I = 0$ , 即:  $B^2 - 7B + 6I = 0$ , 因此

$$\left(-\frac{1}{6}(B - 7I)\right)B = I,$$

$$\text{所以 } (A + 5I)^{-1} = B^{-1} = -\frac{1}{6}(B - 7I) = -\frac{1}{6}(A - 2I).$$

3. 若  $A + mI$  不可逆, 则存在非零向量  $x$  使得  $(A + mI)x = 0$ , 即  $Ax = -mx$ , 那么

$$0 = (A^2 + 3A - 4I)x = A(Ax) + 3Ax - 4x = A(-mx) + 3(-mx) - 4x = -m(Ax) - 3mx - 4x = (m^2 - 3m - 4)x,$$

因此  $m^2 - 3m - 4 = 0$ , 即  $m = 4$  或  $-1$ . 所以  $m \neq 4, -1$  时,  $A + mI$  可逆.

□

习题 4. 设  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ , 求与  $A$  可交换的矩阵.

解 首先, 和  $A$  可交换的矩阵都是 2 阶方阵. 设  $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ ,

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - z & y - w \\ x + z & y + w \end{bmatrix} \\ BA &= \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + y & -x + y \\ z + w & -z + w \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$AB = BA$  等价于

$$x - z = x + y \quad y - w = -x + y \quad x + z = z + w \quad y + w = -z + w,$$

因此  $x = w, y = -z$ , 即和  $A$  可交换的矩阵的全体为

$$\left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

□

解 我们也可以机灵点, 注意到, 对每一个  $a$ , 矩阵  $B$  和  $A$  可交换当且仅当矩阵  $B$  和  $A - aI$  可交换.

因此我们可以用  $A - I = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  代替  $A$  来重复上面的计算. 这样做的好处是产生了很多 0, 计算过程中的项数少很多, 一定程度上能减少错误.

□

习题 5. 设  $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$ ,  $k$  是正整数, 求  $A^k$ .

解 当  $k=1,2$  时, 直接计算即可, 具体过程略. 以下假设  $k \geq 3$ . 令  $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ , 那么:

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B^3 = 0.$$

另一方面注意到  $A = \lambda I + B$ , 因为数量矩阵和任意矩阵都可交换, 因此根据二项式展开:

$$A^k = (\lambda I)^k + k(\lambda I)^{k-1}B + C_k^2(\lambda I)^{k-2}B^2 + C_k^3(\lambda I)^{k-3}B^3 + \dots$$

以上的求和式只有前三项有贡献, 之后的项因为  $B^r = 0 (r \geq 3)$ , 全部等于 0, 因此

$$A^k = \begin{bmatrix} \lambda^k & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^k & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^k \end{bmatrix} + \lambda^{k-1} \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda^{k-2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & C_k^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & C_k^2\lambda^{k-2} \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda^k \end{bmatrix}$$

□

习题 6 (♡). 证明, 如果  $n$  阶方阵  $A$  对任意  $n$  维列向量  $x$ , 都存在依赖于  $x$  的常数  $c(x)$ , 满足  $Ax = c(x)x$ , 则存在常数  $c$ , 使得  $A = cI_n$ .

证明. 本题的言下之意是: 题设中的  $c(x)$  是依赖于  $x$  的, 而最后要证明的是它们是常数, 不依赖于  $x$ , 即对任意  $x$  均有  $c(x) = c$ .

令  $e_i$  是第  $i$  个单位向量: 即第  $i$  个分量为 1、其余分量为 0,  $c = c(e_1)$ . 对任意  $i \neq 1$ , 根据题意, 存在  $c(e_i)$  和  $c(e_1 + e_i)$  使得

$$Ae_i = c(e_i)e_i, \quad A(e_1 + e_i) = c(e_1 + e_i)(e_1 + e_i)$$

简便起见, 记  $a = c(e_i), b = c(e_1 + e_i)$ , 那么  $Ae_i = ae_i$ , 并且

$$b(e_1 + e_i) = A(e_1 + e_i) = Ae_1 + Ae_i = ce_1 + ae_i.$$

比较上式等号两边向量的第 1 个分量和第  $i$  个分量, 即得:  $c = b = a$ , 也就是说, 为任意  $i$ , 都有

$$Ae_i = ce_i.$$

对任意  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ , 那么  $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$ , 因此

$$A\mathbf{x} = A(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n) = x_1A\mathbf{e}_1 + x_2A\mathbf{e}_2 + \cdots + x_nA\mathbf{e}_n = x_1c\mathbf{e}_1 + x_2c\mathbf{e}_2 + \cdots + x_nc\mathbf{e}_n = c\mathbf{x}.$$

□

习题 7 (♡). 1.  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ , 如果对任意的  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , 都有  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , 证明:  $A = O$ .

2. 如果对任意的  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ , 线性方程组  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  和  $C\mathbf{x} = \mathbf{b}$  都有相同的解集, 证明  $A = C$ .

证明. 1. 要证明  $A = O$ , 只需要证明  $A$  的每一列都等于  $\mathbf{0}$ . 对  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $A\mathbf{e}_i$  是  $A$  的第  $i$  个列向量. 根据题意,  $A\mathbf{e}_i$  都等于  $\mathbf{0}$ , 证毕.

2. 要证明  $A = C$ , 只需要证明: 对  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $A$  的第  $i$  列和  $C$  的第  $i$  列都相同. 设  $\alpha_i$  是  $A$  的第  $i$  列, 那么  $A\mathbf{e}_i = \alpha_i$ .

根据题意,  $A\mathbf{x} = \alpha_i$  和  $C\mathbf{x} = \alpha_i$  有相同的解集, 由于  $\mathbf{x} = \mathbf{e}_i$  是  $A\mathbf{x} = \alpha_i$  的解, 那么它也是  $C\mathbf{x} = \alpha_i$  的解, 所以  $C\mathbf{e}_i = \alpha_i$ , 这说明  $C$  的第  $i$  列也是  $\alpha_i$ . 证毕.

□

习题 8. 已知列向量  $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ , 行向量  $\beta = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

1. 试计算  $A = \alpha\beta$  以及  $B = \beta\alpha$ ;

2. 求  $A^2, A^3$ , 从中你能归纳出什么结论? 能否求出  $A^{2025}$ ?

解 1.  $A = \alpha\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $B = \beta\alpha = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 = 4$ .

2.  $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 4A$ , 而

$$A^3 = A^2A = 4AA = 4A^2 = 4^2A.$$

一般地:

$$A^{2025} = (\alpha\beta)(\alpha\beta)(\alpha\beta)\cdots(\alpha\beta) = \alpha(\beta\alpha)(\beta\alpha)\cdots(\beta\alpha)\beta = 4^{2024}\alpha\beta = 4^{2024}A.$$

□

习题 9 (矩阵的迹). 方阵  $A$  的对角线元素的和称为它的迹, 记作  $\text{trace}(A)$ . 验证下列性质.

1. 对任意同阶方阵  $A, B$ ,  $\text{trace}(A+B) = \text{trace}(A) + \text{trace}(B)$ .
2. 对任意方阵  $A$  与实数  $k$ ,  $\text{trace}(kA) = k\text{trace}(A)$ .
3. 对  $m$  阶单位阵  $I_m$ ,  $\text{trace}(I_m) = m$ .
4. 对任意方阵  $A$ ,  $\text{trace}(A) = \text{trace}(A^T)$ .
5. 设  $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$ , 则  $\text{trace}(A^T B) = \sum_{i=1}^4 a_i b_i$ . 如果  $A, B$  是  $m$  阶方阵呢?
6. 设  $A$  是实对称矩阵, 如果  $\text{trace}(A^2) = 0$ , 则  $A = O$ .
7. 设  $v, w$  是  $m$  维向量, 则  $\text{trace}(v^T w) = \text{trace}(w v^T)$ .
8. 设  $A, B$  分别是  $m \times n$ ,  $n \times m$  矩阵, 则  $\text{trace}(AB) = \text{trace}(BA)$ .
9. 设  $A, B$  是任意  $m$  阶方阵, 则  $AB - BA \neq I_m$ .

解 设  $A = [a_{ij}]_{1 \leq i, j \leq m}$ , 其对角线元素即  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{mm}$ . 根据定义,

$$\text{trace}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{mm}.$$

1. 设  $A = [a_{ij}]_{1 \leq i, j \leq m}$ ,  $B = [b_{ij}]_{1 \leq i, j \leq m}$ , 那么  $A+B = [a_{ij} + b_{ij}]_{1 \leq i, j \leq m}$ , 所以

$$\begin{aligned} \text{trace}(A+B) &= (a_{11} + b_{11}) + (a_{22} + b_{22}) + \cdots + (a_{mm} + b_{mm}) \\ &= (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{mm}) + (b_{11} + b_{22} + \cdots + b_{mm}) \\ &= \text{trace}(A) + \text{trace}(B). \end{aligned}$$

2.  $kA = [ka_{ij}]_{1 \leq i, j \leq m}$ , 对角线元素为  $ka_{11}, ka_{22}, \dots, ka_{mm}$ , 因此

$$\text{trace}(kA) = (ka_{11}) + (ka_{22}) + \cdots + (ka_{mm}) = k(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{mm}) = k\text{trace}(A).$$

3. 对  $m$  阶单位阵, 其对角线元素均为 1, 所以  $\text{trace}(I_m)$  是  $m$  个 1 相加之和, 即  $\text{trace}(I_m) = m$ .

4. 对任意方阵  $A = [a_{ij}]_{1 \leq i, j \leq m}$ ,  $A^T = [a_{ji}]_{1 \leq i, j \leq m}$ ,  $A^T$  对角线元素依然是  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{mm}$ , 所以

$$\text{trace}(A) = \text{trace}(A^T).$$

5.

$$A^T B = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 + a_3 b_3 & a_1 b_2 + a_3 b_4 \\ a_2 b_1 + a_4 b_3 & a_2 b_2 + a_4 b_4 \end{bmatrix}$$

所以  $\text{trace}(A^T B) = (a_1 b_1 + a_3 b_3) + (a_2 b_2 + a_4 b_4) = \sum_{i=1}^4 a_i b_i$ . 如果  $A = [a_{ij}]_{1 \leq i, j \leq m}$ ,  $B = [b_{ij}]_{1 \leq i, j \leq m}$ , 那么  $A^T B$  的第  $i$  个对角线元素为  $\sum_{k=1}^n (A^T)_{ik} (B)_{ki}$ , 而  $(A^T)_{ik} = a_{ki}$ , 所以

$$(\text{trace})(A^T B) = \sum_{i=1}^k \sum_{k=1}^n a_{ki} b_{ki}.$$

6.  $A$  是实对称矩阵则  $A^T = A$ , 所以

$$0 = \text{trace}(A^2) = \text{trace}(A^T A) = \sum_{i=1}^k \sum_{k=1}^n a_{ki} a_{ki}.$$

因此所有的  $a_{ki} (1 \leq i, k \leq m)$  都等于 0, 即  $A = 0$ .

7. 设  $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$ , 那么  $\mathbf{v}^T \mathbf{w} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_m y_m$ , 而  $\mathbf{w} \mathbf{v}^T$  是  $m$  阶方阵

$$\begin{bmatrix} y_1 x_1 & y_1 x_2 & \cdots & y_1 x_m \\ y_2 x_1 & y_2 x_2 & \cdots & y_2 x_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_m x_1 & y_m x_2 & \cdots & y_m x_m \end{bmatrix}$$

所以  $\text{trace}(\mathbf{w} \mathbf{v}^T) = y_1 x_1 + y_2 x_2 + \dots + y_m x_m$ .

8. 设  $A = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ ,  $B = [b_{kl}]_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq l \leq m}}$ , 则  $AB$  是  $m$  阶方阵,  $BA$  是  $n$  阶方阵.

$$\begin{aligned} \text{trace}(AB) &= \sum_{i=1}^m (AB)_{ii} \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji} \\ \text{trace}(BA) &= \sum_{j=1}^n (BA)_{jj} \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m b_{ji} a_{ij} \end{aligned}$$

因此  $\text{trace}(AB) = \text{trace}(BA)$ .

9. 假设存在  $m$  阶方阵  $A, B$  使得  $AB - BA = I_m$ , 那么

$$m = \text{trace}(I_m) = \text{trace}(AB - BA) = \text{trace}(AB) - \text{trace}(BA) = 0,$$

矛盾! 因此不存在  $m$  阶方阵  $A, B$  使得  $AB - BA = I_m$ , 即: 对任意  $m$  阶方阵  $A, B$  都有  $AB - BA \neq I_m$ .

□

习题 10 (♡). 1. 设  $A$  为  $n$  阶方阵, 求证:  $A + A^T, AA^T, A^T A$  都是对称矩阵, 而  $A - A^T$  是反对称矩阵.

2. 求证: 任意方阵  $A$  都可唯一地表为  $A = B + C$ , 其中  $B$  是对称矩阵,  $C$  是反对称矩阵.

3. 求证:  $n$  阶方阵  $A$  是反对称矩阵当且仅当对任意的  $n$  维列向量  $x$ , 都有  $x^T A x = 0$ .

4. 求证: 设  $A, B$  是  $n$  阶对称矩阵, 则  $A = B$  当且仅当对任意  $n$  维列向量  $x$ , 都有  $x^T A x = x^T B x$ .

5. 给定  $n$  阶实反对称矩阵  $A$ , 求证  $I_n - A$  可逆.

证明. 1.  $(A + A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A$ , 所以  $A + A^T$  是对称矩阵.

$(AA^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T$ , 所以  $AA^T$  是对称矩阵.

$(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$ , 所以  $A^T A$  是对称矩阵.

$(A - A^T)^T = A^T - (A^T)^T = A^T - A$ , 所以  $A - A^T$  是反对称矩阵.

2. 令  $B = \frac{A + A^T}{2}, C = \frac{A - A^T}{2}$ , 那么  $B$  是对称矩阵,  $C$  是反对称矩阵, 且  $A = B + C$ . 这样我们就证明了存在性, 即“可以表示”.

接下来证明“唯一性”: 设还有另一个分解:  $A = B' + C'$ , 其中  $B'$  是对称矩阵,  $C'$  是反对称矩阵. 那么  $B + C = B' + C'$ , 即  $B - B' = C' - C$ ; 取转置得

$$B - B' = B^T - B'^T = (B - B')^T = (C' - C)^T = C'^T - C^T = -(C' - C) = -(B - B'),$$

所以  $B - B' = 0$ , 进而  $C - C' = 0$ , 即得  $B = B', C = C'$ . 这就证完了唯一性.

3. 如果  $A$  是反对称矩阵, 对任意  $n$  维列向量  $x$ , 因为  $x^T A x$  是一个数或者说  $1 \times 1$  矩阵, 所以

$$x^T A x = (x^T A x)^T = x^T A^T (x^T)^T = -x^T A x.$$

反之, 如果对任意的  $n$  维列向量  $x$ , 都有  $x^T A x = 0$ , 取  $x = e_i - e_j$  ( $1 \leq i, j \leq n$ ), 则由  $(e_i - e_j)^T A (e_i - e_j) = 0$  得

$$e_i^T A e_i - e_i^T A e_j - e_j^T A e_i + e_j^T A e_j = 0,$$

从而

$$\mathbf{e}_i^T A \mathbf{e}_j = -\mathbf{e}_j^T A \mathbf{e}_i,$$

$\mathbf{e}_i^T A \mathbf{e}_j$  是  $A$  的第  $i$  行第  $j$  列元素,  $\mathbf{e}_j^T A \mathbf{e}_i$  是  $A$  的第  $j$  行第  $i$  列元素, 由上式可知  $A$  是反对称矩阵.

4. 显然, 当  $A = B$  时, 对任意  $n$  维列向量  $\mathbf{x}$ , 都有  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \mathbf{x}^T B \mathbf{x}$ .

反之, 假设对任意  $n$  维列向量  $\mathbf{x}$ , 都有  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \mathbf{x}^T B \mathbf{x}$ . 取  $\mathbf{x} = \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j$  ( $1 \leq i, j \leq n$ ), 则由  $(\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j)^T A (\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j) = (\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j)^T B (\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j)$ , 展开得

$$\mathbf{e}_i^T A \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_i^T A \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j^T A \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j^T A \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i^T B \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_i^T B \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j^T B \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j^T B \mathbf{e}_j$$

注意到:  $\mathbf{e}_i^T A \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^T B \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j^T A \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_j^T B \mathbf{e}_j$ , 且  $\mathbf{e}_i^T A \mathbf{e}_j = (\mathbf{e}_i^T A \mathbf{e}_j)^T = \mathbf{e}_j^T A^T \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_j^T A \mathbf{e}_i$  (同理  $\mathbf{e}_i^T B \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_j^T B \mathbf{e}_i$ ), 化简得:

$$\mathbf{e}_i^T A \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i^T B \mathbf{e}_j$$

即  $A$  和  $B$  的每一个分量都相等, 因此  $A = B$ .

5. 假设  $(I_n - A)\mathbf{x} = 0$ , 那么  $\mathbf{x} = A\mathbf{x}$ ; 由于  $A$  是反对称矩阵,  $A^T = -A$ , 所以

$$\mathbf{x}^T \mathbf{x} = (A\mathbf{x})^T \mathbf{x} = \mathbf{x}^T A^T \mathbf{x} = -\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = -\mathbf{x}^T \mathbf{x},$$

因此  $\|\mathbf{x}\| = \mathbf{x}^T \mathbf{x} = 0$ , 即  $\mathbf{x} = 0$ . 也就是说, 方程组  $(I_n - A)\mathbf{x} = 0$  只有零解, 因此  $I_n - A$  可逆.

□

习题 11 (♡). 1. 设  $A$  为  $n$  阶方阵, 若对任意  $1 \leq i \leq n$ , 都有

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|,$$

则称  $A$  是对角占优矩阵. 证明: 对角占优矩阵都是可逆矩阵.

2. 令  $X_\varepsilon = \begin{bmatrix} A & \varepsilon B_1 \\ B_2 & C \end{bmatrix}$ , 其中  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ,  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ ,  $C$  为  $n$  阶对角占优方阵,  $B_1$  为任意给定的  $3 \times n$  矩阵,  $B_2$  为任意给定的  $n \times 3$  矩阵. 证明:

(a)  $A$  可逆.

(b) 存在常数  $\delta > 0$  (依赖于  $C, B_1, B_2$ ), 使得对任意满足条件  $|\varepsilon| \leq \delta$  的  $\varepsilon$ ,  $X_\varepsilon$  均可逆.

解 1. 令  $A$  是对角占优矩阵. 假设  $A$  不可逆, 则存在非零向量  $\mathbf{x}$  使得  $A\mathbf{x} = 0$ . 设  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

且  $x_k = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ .

$A\mathbf{x}$  的第  $k$  个分量为:  $a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n$ , 所以

$$a_{kk}x_k = - \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq k}} a_{kj}x_j.$$

取绝对值, 有

$$|a_{kk}x_k| = |x_k||a_{kk}| > |x_k| \sum_{j \neq k} |a_{kj}| = \sum_{j \neq k} |a_{kj}||x_k| \geq \sum_{j \neq k} |a_{kj}||x_j| \geq \left| \sum_{j \neq k} a_{kj}x_j \right| = |-a_{kk}x_k|,$$

矛盾. 因此反正假设不成立, 也就是说  $A$  可逆.

2. (a) 对  $A$  作初等行变换:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

最后的矩阵是对角元均非零的上三角矩阵, 所以是可逆矩阵, 因此  $A$  也是可逆矩阵.

(b) 对  $X_\varepsilon$  作分块初等行变换:

$$\begin{bmatrix} A & \varepsilon B_1 \\ B_2 & C \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} A & \varepsilon B_1 \\ 0 & C - \varepsilon B_2 A^{-1} B_1 \end{bmatrix}$$

所以  $X_\varepsilon$  可逆当且仅当  $C - \varepsilon B_2 A^{-1} B_1$  可逆. 那么只需要证明: “存在常数  $\delta > 0$  (依赖于  $C, B_1, B_2$ ), 使得对任意满足条件  $|\varepsilon| \leq \delta$  的  $\varepsilon$ ,  $C - \varepsilon B_2 A^{-1} B_1$  均可逆.”

由于  $C$  是对角占优矩阵, 根据 “对角占优矩阵” 可逆这个性质, 只需要证明: “存在常数  $\delta > 0$  (依赖于  $C, B_1, B_2$ ), 使得对任意满足条件  $|\varepsilon| \leq \delta$  的  $\varepsilon$ ,  $C - \varepsilon B_2 A^{-1} B_1$  均是对角占优矩阵.”

设  $B_2 A^{-1} B_1 = [t_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n}$ ,  $C - \varepsilon B_2 A^{-1} B_1$  对角占优当且仅当对任意  $1 \leq i \leq n$ , 都有

$$|c_{ii} - \varepsilon t_{ii}| > \sum_{j \neq i} |c_{ij} - \varepsilon t_{ij}|.$$

要保证这一点，只需要对任意  $1 \leq i \leq n$ ，都有不等式

$$|c_{ii}| - |\varepsilon t_{ii}| > \sum_{j \neq i} |c_{ij}| + |\varepsilon t_{ij}| \quad (*)$$

因为如果这个不等式成立，那么

$$|c_{ii} - \varepsilon t_{ii}| \geq |c_{ii}| - |\varepsilon t_{ii}| > \sum_{j \neq i} |c_{ij}| + |\varepsilon t_{ij}| \geq \sum_{j \neq i} |c_{ij} - \varepsilon t_{ij}|.$$

于是，我们取

$$\delta = \min \left\{ \frac{|c_{ii}| - \sum_{j \neq i} |c_{ij}|}{|t_{ii}| + \sum_{j \neq i} |t_{ij}|} : 1 \leq i \leq n \right\}$$

即可保证不等式 (\*) 成立. 由于  $A$  是常数矩阵，因此  $t_{ij}$  仅依赖于  $B_1, B_2$ ，从而  $\delta$  依赖于  $C, B_1, B_2$ .

□