《微积分A1》第十六讲

教师　杨利军

清华大学数学科学系

2025年11月12日

选择题 1

1. 极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^x =$

A. 1; B. 2; C. 3; D. 4.

答: A.

解: 这是 1^∞ 型极限. 令 $y=\frac{1}{x}$, 则

$$\left(\cos\frac{1}{x}\right)^x = [1+(\cos y-1)]^{\frac{1}{y}} = (1+u)^{\frac{1}{u}\frac{u}{y}},$$

其中 $u=u(y)=\cos y-1$. 由于当 $x\to+\infty$ 时, $y=\frac{1}{x}\to 0$, 并且

$$\frac{u}{y}=\frac{\cos y-1}{y}\to 0, \quad y\to 0.$$

因此 $(1+u)^{\frac{1}{u}\frac{u}{y}}\to e^0=1$. 故原极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^x=1$. #

2. 极限

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=$$

A. 1; B. $\frac{1}{2}$; C. $\frac{1}{3}$; D. $\frac{1}{4}$.

答: C.

解:

$$\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}=\frac{x^2-\left[x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right]^2}{x^2\sin^2 x}$$

$$=\frac{x^2-\left[x^2-\frac{1}{3}x^4+o(x^4)\right]}{x^2\sin^2 x}=\frac{\frac{1}{3}x^4+o(x^4)}{x^2\sin^2 x}\to\frac{1}{3}.$$

故所求极限为 $\frac{1}{3}$. #

3. 极限 $\lim_{x\to 0^+}(1-\cos x)^{\frac{1}{\ln x}} =$

A. e;　B. e^2;　C. $-e$;　D. $-e^2$.

答: B.

解: 这是 0^0 型极限. 方法取对数. 令 $y=(1-\cos x)^{\frac{1}{\ln x}}$, 则 $\ln y = \frac{\ln(1-\cos x)}{\ln x}$.

这是 $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限. 可考虑使用洛必达法则

$$\frac{\left[\ln(1-\cos x)\right]'}{\left[\ln x\right]'} = \frac{\frac{1}{1-\cos x}\cdot \sin x}{\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{x\sin x}{1-\cos x} = \frac{x\sin x}{x^2}\cdot \frac{1}{\frac{1-\cos x}{x^2}} \to 2, \quad x\to 0^+$$

因此 $\lim_{x\to 0^+}\ln y = 2$. 从而原极限为 $y=e^{\ln y}\to e^2$, $x\to 0^+$.　#

选择题 4

4. 当 $x \to 0$ 时，$\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\sin x}$ 的无穷小的阶为

A. 1;　　B. 2;　　C. 3;　　D. 4.

答: A.

解:

$$\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\sin x}=\frac{1+\tan x-(1-\sin x)}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\sin x}}$$

$$=\frac{\tan x+\sin x}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\sin x}}=\sin x\cdot\frac{\frac{1}{\cos x}+1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\sin x}}.$$

第二个因子的极限是正常极限，其极限为 $\frac{2}{2}=1$. 而第一个因子 $\sin x$ 显然为一阶无穷小量. 因此函数 $\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\sin x}$ 的无穷小的阶为 1.　　#

5. 定义函数

$$f(x)=\begin{cases}\frac{|x^2-1|}{x-1}, & x\neq 1,\\ 2, & x=1,\end{cases}$$

则以下四个说法正确的是

A. $x=1$ 是 $f(x)$ 的连续点;

B. $x=1$ 是 $f(x)$ 的可去间断点;

C. $x=1$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点;

D. $x=1$ 是 $f(x)$ 的本性间断点.

答: C.

解: 考虑 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处的左右极限. 当 $x>1$ 时,

$$f(x)=\frac{|x^2-1|}{x-1}=\frac{x^2-1}{x-1}=x+1\to 2,\quad x\to 1^+$$

选择题 5，续

这表明 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处的右极限存在，且等于 2. 当 $x<1$ 时，

$$f(x)=\frac{|x^2-1|}{x-1}=\frac{1-x^2}{x-1}=-(x+1)\to -2,\quad x\to 1^-.$$

这表明 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处的左极限为 -2. 由此可见 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处的间断点类型为跳跃间断. #

6. 定义函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-e^x}{x}, & x \neq 0, \\ -1, & x = 0, \end{cases}$$

则 $f'(0) =$

A. 1; B. $\frac{1}{2}$; C. -1; D. $-\frac{1}{2}$.

答: D.

解: 对任意 $h \neq 0$,

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{\frac{1-e^h}{h} + 1}{h} = \frac{1 + h - e^h}{h^2}$$

$$= \frac{1 + h - \left(1 + h + \frac{1}{2}h^2 + o(h^2)\right)}{h^2} = \frac{-\frac{1}{2}h^2 + o(h^2)}{h^2} \to -\frac{1}{2}, \quad h \to 0.$$

因此 $f'(0) = -\frac{1}{2}$. #

7. 极限

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+1}{4x-3}\sin\frac{1}{x+1}=$$

A. 1; B. $\frac{1}{2}$; C. $\frac{1}{3}$; D. $\frac{1}{4}$.

答: B.

解:

$$\frac{2x^2+1}{4x-3}\sin\frac{1}{x+1}=\frac{2x^2+1}{4x-3}\cdot\frac{1}{x+1}\cdot\frac{\sin\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x+1}}$$

$$=\frac{2+\frac{1}{x^2}}{4-\frac{3}{x}}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\frac{\sin\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x+1}}\to\frac{1}{2},\quad x\to+\infty.$$

故所求极限为 $\frac{1}{2}$. #

8. 极限

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n+4\sqrt{n}}-\sqrt{n-2\sqrt{n}}\right)=$$

A. 1; B. 2; C. 3; D. 4.

答: C.

解:

$$\sqrt{n+4\sqrt{n}}-\sqrt{n-2\sqrt{n}}=\frac{n+4\sqrt{n}-(n-2\sqrt{n})}{\sqrt{n+4\sqrt{n}}+\sqrt{n-2\sqrt{n}}}$$

$$=\frac{6\sqrt{n}}{\sqrt{n+4\sqrt{n}}+\sqrt{n-2\sqrt{n}}}=\frac{6}{\sqrt{1+4\sqrt{\frac{1}{n}}}+\sqrt{1-2\sqrt{\frac{1}{n}}}}$$

$$\to\frac{6}{2}=3,\quad n\to+\infty.$$

故所求极限为 3. #

选择题 9

9. 极限

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1-2x-\cos(2\sqrt{x})}{x^2}=$$

A. $\frac{1}{3}$; B. $\frac{2}{3}$; C. $-\frac{1}{3}$; D. $-\frac{2}{3}$.

答: D.

解: 将 $\cos(2\sqrt{x})$ 作 Maclaurin 展开得

$$\cos(2\sqrt{x})=1-\frac{1}{2!}(2\sqrt{x})^2+\frac{1}{4!}(2\sqrt{x})^4+o(x^2)=1-2x+\frac{16}{24}x^2+o(x^2).$$

于是

$$\frac{1-2x-\cos(2\sqrt{x})}{x^2}=\frac{1-2x-\left(1-2x+\frac{2}{3}x^2\right)+o(x^2)}{x^2}$$

$$=\frac{-\frac{2}{3}x^2+o(x^2)}{x^2}\to-\frac{2}{3},\quad x\to 0^+.$$

故所求极限为 $-\frac{2}{3}$. #

10. 极限

$$\lim_{x\to 0}(1+x^2e^x)^{\frac{1}{1-\cos x}}=$$

A. e; B. e^2; C. $-e$; D. $-e^2$.

答: B.

解: 当 $x \to 0$ 时,

$$(1+x^2e^x)^{\frac{1}{1-\cos x}}=(1+x^2e^x)^{\frac{1}{x^2e^x}\cdot\frac{x^2}{1-\cos x}\cdot e^x}\to e^2.$$

故所求极限为 e^2. #

11. 设 $f(x) \neq 0$ 且 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(1+\frac{f(x)}{\sin x}\right)}{e^x-1} = 1$，则 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^2} =$

A. 1;　　B. 2;　　C. 3;　　D. 4.

答：A.

解：由假设 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(1+\frac{f(x)}{\sin x}\right)}{e^x-1} = 1$ 可知 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{\sin x} = 0$. 由于

$$\frac{\ln\left(1+\frac{f(x)}{\sin x}\right)}{e^x-1} = \frac{\ln\left(1+\frac{f(x)}{\sin x}\right)}{\frac{f(x)}{\sin x}} \cdot \frac{f(x)}{\sin x} \cdot \frac{1}{e^x-1} \to 1,$$

$$\text{故} \quad \frac{f(x)}{(e^x-1)\sin x} \to 1, \quad x \to 0.$$

$$\text{因此} \quad \frac{f(x)}{x^2} = \frac{f(x)}{(e^x-1)\sin x} \cdot \frac{e^x-1}{x} \cdot \frac{\sin x}{x} \to 1\cdot 1\cdot 1 = 1.$$

故所求极限为 1.　#

12. 极限

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1+3^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n =$$

A. 0; B. 1; C. $\sqrt{2}$; D. $\sqrt{3}$.

答: D.

解: 这是 1^∞ 型不定式. 令 $u_n = \frac{1+3^{\frac{1}{n}}}{2} - 1 = \frac{3^{\frac{1}{n}}-1}{2}$, 则 $u_n \to 0$, $n \to +\infty$, 且

$$\left(\frac{1+3^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n = (1+u_n)^{\frac{1}{u_n}\cdot nu_n}$$

而 $$nu_n = n\frac{3^{\frac{1}{n}}-1}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} \to \frac{1}{2}\ln 3.$$

因此 $$\left(\frac{1+3^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n = (1+u_n)^{\frac{1}{u_n}\cdot nu_n} \to e^{\frac{1}{2}\ln 3} = \sqrt{3}. \quad \#$$

一般结论:

1. 设 $a>0$, $b>0$, 则

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n=\sqrt{ab}.$$

2. 设 $a_k>0$, $k=1,2,\cdots,m$, 则

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a_1^{\frac{1}{n}}+a_2^{\frac{1}{n}}+\cdots+a_m^{\frac{1}{n}}}{m}\right)^n=\sqrt[m]{a_1a_2\cdots a_m}. \quad \#$$

13. 极限 $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos(\sqrt{2}x)\cos(\sqrt{3}x)}{x^2}=$

A. 1; B. 2; C. 3; D. 4.

答：C.

解：

$$\frac{1-\cos x\cos(\sqrt{2}x)\cos(\sqrt{3}x)}{x^2}$$

$$=\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{\cos x[1-\cos(\sqrt{2}x)\cos(\sqrt{3}x)]}{x^2}$$

$$=\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{\cos x[1-\cos(\sqrt{2}x)]}{x^2}+\cos x\cos\left(\sqrt{2}x\right)\frac{[1-\cos(\sqrt{3}x)]}{x^2}$$

$$\to\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\frac{3}{2}=3.\quad \#$$

注：也可以用泰勒展开或洛必达求这个极限．同理还可以求极限 $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(a_1x)\cos(a_2x)\cdots\cos(a_nx)}{x^2}$.

14. 设 $x_0 \in (0,\pi)$, $x_{n+1} = \sin x_n$, $\forall n \geq 0$, 则极限 $\lim_{n\to+\infty} nx_n^2 =$

A. 1; B. 2; C. 3; D. 4.

答: C.

解: 显然 x_n 严格单调下降且趋于零. 以下用 Stolz 定理来求 $\lim_{n\to+\infty} nx_n^2$. 为此我们将 nx_n^2 写作 $nx_n^2 = \frac{n}{\frac{1}{x_n^2}}$. 考虑

$$\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2} = \frac{x_n^2 - x_{n+1}^2}{x_n^2 x_{n+1}^2} = \frac{x_n^2 - (\sin x_n)^2}{x_n^2 (\sin x_n)^2}.$$

为求上述极限, 我们考虑函数极限 $\lim_{x\to0} \frac{x^2-(\sin x)^2}{x^2(\sin x)^2}$. 由 Taylor 展式 $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ 得

$$(\sin x)^2 = \left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)^2 = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4).$$

因此

$$x^2-(\sin x)^2 = x^2-\left(x^2-\frac{1}{3}x^4+o(x^4)\right)=\frac{1}{3}x^4+o(x^4),$$

$$x^2(\sin x)^2 = x^4+o(x^4).$$

于是当 $x\to 0$ 时，

$$\frac{x^2-(\sin x)^2}{x^2(\sin x)^2}=\frac{\frac{1}{3}x^4+o(x^4)}{x^4+o(x^4)}\to\frac{1}{3}.$$

这就证明了当 $n\to+\infty$ 时，

$$\frac{x_n^2-(\sin x_n)^2}{x_n^2(\sin x_n)^2}\to\frac{1}{3}.$$

于是对序列 $\frac{n}{\frac{1}{x_n^2}}$ 应用 Stolz 定理得

$$\frac{n+1-n}{\frac{1}{x_{n+1}^2}-\frac{1}{x_n^2}}=\frac{1}{\frac{1}{x_{n+1}^2}-\frac{1}{x_n^2}}\to\frac{1}{\frac{1}{3}}=3.$$

故原极限为 3.　　#

15. 函数 $\frac{1+x}{1-x}$ 在点 $x=0$ 处带有 Peano 余项的 n 阶 Taylor 展式为

A. $\frac{1+x}{1-x}=-1+x-x^2+\cdots+(-1)^{n+1}x^n+o(x^n)$;

B. $\frac{1+x}{1-x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+o(x^n)$;

C. $\frac{1+x}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n)$;

D. $\frac{1+x}{1-x}=1+2x+2x^2+\cdots+2x^n+o(x^n)$.

答: D.

解: 先将函数写作 $\frac{1+x}{1-x}=-1+\frac{2}{1-x}$, 然后展开

$$\frac{1+x}{1-x}=-1+\frac{2}{1-x}=-1+2\big(1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n)\big)$$

$$=1+2x+2x^2+\cdots+2x^n+o(x^n).$$

选择题 15，续

也可以按如下方式直接展开

$$\frac{1+x}{1-x} = (1+x)\left[1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n)\right]$$

$$= 1+2x+2x^2+\cdots+2x^n+o(x^n). \quad \#$$

16. 设 $f(x) = x^{\sin x}$, 其中 $x > 0$, 则 $f'(\pi) =$

A. $-\ln\pi$; B. $\ln\pi$; C. $-\pi\ln\pi$; D. $\pi\ln\pi$.

答: A.

解:

$$\left(x^{\sin x}\right)' = \left(e^{\sin x \ln x}\right)' = e^{\sin x \ln x}\left(\sin x \ln x\right)'$$

$$= e^{\sin x \ln x}\left(\cos x \ln x + (\sin x) \cdot \frac{1}{x}\right).$$

于是 $f'(\pi) = -\ln\pi$. #

17. 若函数

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, & x>0,\\ 1, & x\le 0,\end{cases}$$

在点 $x=0$ 处连续，则 $a=$

A. 1;　B. $\frac{1}{2}$;　C. $\frac{1}{3}$;　D. $\frac{1}{4}$.

答：B.

解：考虑函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处的左右极限. 当 $x>0$ 时，

$$f(x)=\frac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}\to\frac{1}{2a},\quad x\to 0^+,$$

即右极限为 $f(0^+)=\frac{1}{2a}$. 当 $x<0$ 时，$f(x)=1$. 故左极限为 $f(0^-)=1$. 由假设 f 在点 $x=0$ 处连续，故 $\frac{1}{2a}=1$，即 $a=\frac{1}{2}$.　#

18. 设 $f(x)$ 可导. 若 $\frac{d}{dx}\left[f(2x)\right] = x^2$, 则 $f'(x) =$

A. x^2; B. $\frac{1}{2}x^2$; C. $\frac{1}{4}x^2$; D. $\frac{1}{8}x^2$.

答: D.

解: 由假设 $\frac{d}{dx}\left[f(2x)\right] = x^2$ 得 $f'(2x)2 = x^2$, 即 $f'(2x) = \frac{1}{2}x^2$. 令 $y = 2x$, 则

$$f'(y) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}y\right)^2 = \frac{1}{8}y^2.$$

故 $f'(x) = \frac{x^2}{8}$. #

19. 设 $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$, 则其导数 $f'(x)$ 在开区间 $(0,2)$ 上, 有且仅有 ______ 个零点.

A. 0; B. 1; C. 2; D. 3.

答: C.

解: 显然四次多项式 $f(x)$ 有四个零点 $x = 0, 1, 2, 3$. 由 Rolle 定理知其导数 $f'(x)$ 至少有三个零点 $\xi_1 \in (0,1)$, $\xi_2 \in (1,2)$, $\xi_3 \in (2,3)$. 由于 $f'(x)$ 是三次多项式, 故 $f'(x)$ 有且仅有这三个零点. 因此 $f'(x)$ 在开区间 $(0,2)$ 上, 有且仅有 2 个零点. #

20. 设 $f(x) = x(x-1)(x-2)\cdots(x-100)$, 则 $f'(0) =$

A. 100!; B. $-100!$; C. 0; D. 100.

答: A. #

选择题 21

21. 函数 $y = e^{\sin(2x+1)}$ 的微分为 $dy =$

A. $e^{\sin(2x+1)}\cos(2x+1)dx$;

B. $2e^{\sin(2x+1)}\cos(2x+1)dx$;

C. $e^{\sin(2x+1)}\sin(2x+1)dx$;

D. $2e^{\sin(2x+1)}\sin(2x+1)dx$.

答: B.

解: 根据复合函数求导的锁链规则得

$$dy = y'(x)dx = 2e^{\sin(2x+1)}\cos(2x+1)dx. \quad \#$$

22. 设 $y = y(x)$ 由参数方程 $x = t + \sin t$, $y = t - \cos t$ 所确定的可微函数，则 $y(x)$ 的微分为 $dy =$

A. $\frac{1+\sin t}{1+\cos t}dx$; B. $\frac{1+\sin t}{1+\cos t}dt$; C. $\frac{1+\cos t}{1+\sin t}dx$; D. $\frac{1+\cos t}{1+\sin t}dt$.

答: A.

解: 由求导公式得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{1+\sin t}{1+\cos t}.$$

因此 $dy = \frac{1+\sin t}{1+\cos t}dx$, 其中 $t = t(x)$, 它代表函数 $x = t + \sin t$ 的反函数. #

23. 设函数 $f(u)$ 可导, $f'(u) \neq 0$, 则函数 $y = f(\sin x)$ 有可导的反函数 $x = x(y)$, 且反函数的导数 $\frac{dx}{dy} =$

A. $-\frac{\cos x}{f'(\sin x)}$; B. $-\frac{1}{f'(\sin x)\cos x}$; C. $\frac{\cos x}{f'(\sin x)}$; D. $\frac{1}{f'(\sin x)\cos x}$.

答: D.

解: 视 $x = x(y)$, 对等式 $y = f(\sin x)$ 两边关于 y 求导得

$$1 = f'(u)u'(x)\frac{dx}{dy},$$

其中 $u = \sin x$. 于是所求导数为

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f'(u)u'(x)} = \frac{1}{f'(\sin x)\cos x}. \quad \#$$

24. 设 $f(x)$ 在实轴 $\mathbb{R}$ 上单调有界, $\{x_n\}$ 为一数列, 则下述命题正确的是

A. 若 $\{x_n\}$ 收敛, 则 $\{f(x_n)\}$ 收敛;

B. 若 $\{x_n\}$ 单调, 则 $\{f(x_n)\}$ 收敛;

C. 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 收敛;

D. 若 $\{f(x_n)\}$ 单调, 则 $\{x_n\}$ 收敛.

答: B.

命题 A 之反例: 定义 $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, 定义 $f(x) = 0,\ x < 0;\ f(x) = 1,\ x \geq 0$, 即 $f(x)$ 为 Heaviside 函数.

命题 C 和 D 之反例: $f(x) \equiv 0$, 取一个发散的点列 x_n 即可. #

选择题 25

25. 函数 $\frac{1}{\cos x}$ 在 $x=0$ 处带 Peano 余项 $o(x^4)$ 的四阶 Taylor 展式为

A. $\frac{1}{\cos x}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4+o(x^4)$;

B. $\frac{1}{\cos x}=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)$;

C. $\frac{1}{\cos x}=1+\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{24}x^4+o(x^4)$;

D. $\frac{1}{\cos x}=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4+o(x^4)$.

答：A.

解：熟知 $\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)$. 记 $\delta=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4+o(x^4)$，则 $\cos x=1-\delta$. 于是

$$\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{1-\delta}=1+\delta+\delta^2+o(x^4)$$

$$=1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4+\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\right]^2+o(x^4)$$

$$=1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{4}x^4+o(x^4)=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4+o(x^4).\quad \#$$

26. 当 $n \to +\infty$ 时, 将无穷大量 n^{100}, e^n, $\ln(1+n^{1000})$, $n!$, 按它们趋于正无穷的阶由低到高排列, 正确的顺序为

A. n^{100}, $\ln(1+n^{1000})$, e^n, $n!$;

B. $\ln(1+n^{1000})$, n^{100}, e^n, $n!$;

C. n^{100}, $\ln(1+n^{1000})$, $n!$, e^n;

D. $\ln(1+n^{1000})$, n^{100}, $n!$, e^n.

答: B. #

27. 极限 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{2^x+3^x+4^x}{3}\right)^{\frac{3}{x}} =$

A. 24; B. 2; C. $+\infty$; D. 4.

答: A.

解: 记

$$\delta = \frac{1}{3}(2^x+3^x+4^x) - 1 = \frac{1}{3}\left\{(2^x-1)+(3^x-1)+(4^x-1)\right\},$$

则当 $x\to 0$ 时, $\delta\to 0$, 且

$$\frac{\delta}{x} = \frac{1}{3}\left\{\frac{2^x-1}{x}+\frac{3^x-1}{x}+\frac{4^x-1}{x}\right\} \to \frac{1}{3}(\ln 2+\ln 3+\ln 4) = \frac{1}{3}\ln 24.$$

于是 $\left(\frac{2^x+3^x+4^x}{3}\right)^{\frac{3}{x}} = (1+\delta)^{\frac{1}{\delta}\frac{3\delta}{x}} \to e^{\ln 24} = 24.$ #

28. 函数 $x^{\frac{1}{x}}$ $(x > 0)$ 的导函数为

A. $x^{\frac{1}{x}-1}$;

B. $x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$;

C. $x^{\frac{1}{x}-2}$;

D. $x^{\frac{1}{x}}$.

答: B. #

29. 设

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & x > 1, \\ x^2, & x \leq 1. \end{cases}$$

假设 $f(x)$ 在点 $x = 1$ 处可导，则

A. $(a, b) = (2, -1)$;

B. $(a, b) = (-2, -1)$;

C. $(a, b) = (2, 1)$;

D. $(a, b) = (-2, 1)$.

答：A.

解：函数 $f(x)$ 在点 $x = 1$ 处可导有两个必要条件，其一，$f(x)$ 在点 $x = 1$ 处连续，即 $f(x)$ 在点 $x = 1$ 处的左右连续．由此得 $a + b = 1$．其二，函数 $f(x)$ 在点 $x = 1$ 处的左右导数均存在且相等．依定义

$$f'_-(1) = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(1+h)^2-1}{h}$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{2h+h^2}{h} = 2,$$

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{x\to 1^+} \frac{a(1+h)+b-1}{h}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{ah+a+b-1}{h} = \lim_{x\to 1^+} \frac{ah}{h} = a.$$

因此由 $f'_-(1) = f'_+(1)$ 得 $a = 2$. 再由 $a + b = 1$ 得 $b = -1$. 因此 $(a, b) = (2, -1)$. 解答完毕.

30. 记 (x_0, y_0) 为旋轮线 $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ $(0 \le t \le 2\pi)$ 上对应参数 $t = \frac{\pi}{2}$ 的点, 则旋轮线在点 (x_0, y_0) 处的切线方程为

A. $y = 2$;

B. $y = x - \frac{\pi}{2} + 2$;

C. $y = x + \frac{\pi}{2}$;

D. $y = \frac{\pi}{2}x$.

答: B.

解: 易见旋轮线上对应参数 $t = \frac{\pi}{2}$ 的点为 $(x_0, y_0) = (\frac{\pi}{2} - 1, 1)$. 根据参数式函数的求导公式得旋轮线在点 $(x(t), y(t))$ 的处的切线斜率为 $\frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$. 因此在点 (x_0, y_0) 处的斜率为 $\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{1-\cos\frac{\pi}{2}} = 1$. 于是所求切线方程为 $y - 1 = x - (\frac{\pi}{2} - 1)$, 即 $y = x - \frac{\pi}{2} + 2$. #

31. 设 $f(x)$ 在实轴 $\mathbb{R}$ 上可导，则下列说法哪一个是错误的.

A. 若 $f(x)$ 是奇函数，则 $f'(x)$ 是偶函数;

B. 若 $f(x)$ 是偶函数，则 $f'(x)$ 是奇函数;

C. 若 $f(x)$ 是周期函数，则 $f'(x)$ 也是周期函数;

D. 若 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有界，则 $f'(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上也有界.

答: D. 说法 D 的反例: $f(x) = \sin(x^2)$. #

32. 函数 $x\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶泰勒 (Taylor) 多项式为

A. $-x^2+\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{3}x^4+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n-1}x^n$;

B. $x^2-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{3}x^4-\cdots+\frac{(-1)^n}{n-1}x^n$;

C. $-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^{n-1}$;

D. $x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n-1}x^{n-1}$.

答: B. #

33. 函数 $x^2\cos x$ 的 100 阶导函数 $(x^2\cos x)^{(100)}$ 为

A. $x^2\cos x + 200x\sin x - 9900\cos x$;

B. $x^2\cos x - 200x\sin x + 9900\cos x$;

C. $x^2\cos x - 200x\sin x - 9900\cos x$;

D. $x^2\cos x + 200x\sin x + 9900\cos x$.

答: A. #

34. 极限 $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=$

A. 1; B. $\frac{1}{2}$; C. $\frac{1}{3}$; D. $\frac{1}{4}$.

答: B.

解: 当 $x\to+\infty$ 时,

$$\sqrt{x^2+x}-x=\frac{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)}{\sqrt{x^2+x}+x}$$

$$=\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}\to\frac{1}{2}. \quad \#$$

35. 函数 $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ 在点 $x = 0$ 处的 2025 阶导数值 $f^{(2025)}(0) =$

A. 1; B. 2025!; C. -1; D. $-2025!$.

答: B.

解法一: 函数 $f(x)$ 可写作 $f(x) = \frac{1}{2(1-x)} - \frac{1}{2(1+x)}$. 由此可得函数 $f(x)$ 的 n 阶导数为

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2(1-x)^{n+1}} - \frac{n!(-1)^n}{2(1+x)^{n+1}}.$$

取 $n = 2025$ 且 $x = 0$ 得 $f^{(2025)}(0) = 2025!$.

解法二：对函数 $f(x)=\frac{x}{1-x^2}$ 在 $x=0$ 处作如下 Taylor 展开

$$\frac{x}{1-x^2}=x\Big(1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n}+o(x^{2n})\Big)$$

$$=x+x^3+x^5+\cdots+x^{2n+1}+o(x^{2n+1}).$$

取 $n=1012$ 得

$$\frac{x}{1-x^2}=x+x^3+x^5+\cdots+x^{2025}+o(x^{2025}).$$

由此可见 $f^{(2025)}(0)=2025!.$ #

36. 极限 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{(\sin x)^2}-\frac{1}{\sin(x^2)}\right)=$

A. 1; B. $\frac{1}{2}$; C. $\frac{1}{3}$; D. $\frac{1}{4}$.

答: 所求极限为 C.

解: 由 Taylor 展式得

$$\frac{1}{(\sin x)^2}-\frac{1}{\sin(x^2)}=\frac{\sin(x^2)-(\sin x)^2}{(\sin x)^2\sin(x^2)}=\frac{x^2-\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)^2+o(x^4)}{x^4+o(x^4)}$$

$$=\frac{x^2-x^2+\frac{1}{3}x^4+o(x^4)}{x^4+o(x^4)}\to\frac{1}{3}.\quad \#$$

37. 假设当 $x \to 0$ 时，函数 $\sqrt{1+x}-1$ 与函数 $\frac{k\ln(1+x)}{1+x}$ 是等价无穷小，则 $k=$

A. 1;　B. $\frac{1}{2}$;　C. $\frac{1}{3}$;　D. $\frac{1}{4}$.

答：B.

解：由于

$$\sqrt{1+x}-1=\frac{1}{2}x+o(x), \quad \frac{k\ln(1+x)}{1+x}=kx+o(x),$$

且这两个函数是等价无穷小，故 $k=\frac{1}{2}$.　#

38. 设 $x = g(y)$ 是函数 $y = x\tan(x-2)$ 在点 $x = 2$ 附近的反函数，则 $g(y)$ 在点 $y = 0$ 处的微分 $dg\big|_{y=0} =$

A. $dg\big|_{y=0} = dy$;

B. $dg\big|_{y=0} = \frac{1}{2}dy$;

C. $dg\big|_{y=0} = \frac{1}{3}dy$;

D. $dg\big|_{y=0} = \frac{1}{4}dy$.

答：B.

解：对函数 $f(x) = x\tan(x-2)$ 求导得

$$f'(x) = \tan(x-2) + \frac{x}{\cos^2(x-2)}.$$

故 $f'(2) = 2$. 根据反函数导数定理知，反函数 $x = g(y)$ 在点 $y = 0$ 处的导数为 $g'(0) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{2}$. 故所求微分为 $dg\big|_{y=0} = g'(0)dy = \frac{1}{2}dy$. #

39. 设 $y = f(x)$ 是由参数方程 $x = t + t^3$, $y = t + t^2$ 所确定的可微函数，则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x, y) = (2, 2)$ 处切线斜率为

A. 1;　B. $\frac{3}{4}$;　C. $\frac{1}{2}$;　D. $\frac{1}{4}$.

答：B.

解：曲线 $y = f(x)$ 在任意点 $\big(x(t), y(t)\big) = (t + t^3, t + t^2)$ 处的斜率为

$$f'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{1 + 2t}{1 + 3t^2}.$$

曲线 $y = f(x)$ 上的 $(x, y) = (2, 2)$ 所对应的参数为 $t = 1$. 因此曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x, y) = (2, 2)$ 处切线的斜率为 $f'(2) = \frac{3}{4}$.　#

40. 函数 $\frac{x}{x^2-2x+2}$ 在点 $x=1$ 处带 Peano 余项 $o\left((x-1)^3\right)$ 的 Taylor 展式为

- A. $1+(x-1)-(x-1)^2-(x-1)^3+o((x-1)^3)$;
- B. $1+(x-1)+(x-1)^2-(x-1)^3+o((x-1)^3)$;
- C. $1+(x-1)-(x-1)^2+(x-1)^3+o((x-1)^3)$;
- D. $1+(x-1)+(x-1)^2+(x-1)^3+o((x-1)^3)$.

答: A.

解:

$$f(x)=\frac{x}{x^2-2x+2}=\frac{(x-1)+1}{1+(x-1)^2}=\frac{x-1}{1+(x-1)^2}+\frac{1}{1+(x-1)^2}$$

$$=(x-1)\left[1-(x-1)^2\right]+\left[1-(x-1)^2\right]+o\left((x-1)^3\right)$$

$$=1+(x-1)-(x-1)^2-(x-1)^3+o\left((x-1)^3\right). \quad \#$$

证明如下不等式:

(1) $\cos x > 1 - \frac{1}{2}x^2,\ \forall x > 0;$

(2) $\sin x > x - \frac{1}{3!}x^3,\ \forall x > 0;$

(3) $\cos x < 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4,\ \forall x > 0;$

(4) $\sin x < x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5,\ \forall x > 0.$