《微积分A1》第三讲

教师 杨利军

清华大学数学科学系

2025年09月22日

助教信息

高鹏	能动系博博士生	1045473915@qq.com
李俊峰	数学系博士生	li-jf21@mails.tsinghua.edu.cn
李凯驰	计算机系四年级学生	lkc22@mails.tsinghua.edu.cn
孙鑫	数学系博士生	2639332777@qq.com
贺智睿	机械系博士生	hezr25@mails.tsinghua.edu.cn

注: 助教主要有三项工作: 批改作业, 上习题课, 答疑(线上和线下).

数列 (sequences), 例子

Definition

定义: 任意一个映射 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ 均称作一个数列或序列, 其中 $\mathbb{N}$ 代表自然数集. 数列常记作 $\{f(n)\}$ 或 $\{a_n\}$, 其中 $a_n=f(n)$, 并称 a_n 为数列的一般项. 有时也将各项列出来, 即 $\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots\}$, 其中 a_1 称为数列的第一项, a_2 称为第二项, a_n 称为第 n 项.

Example

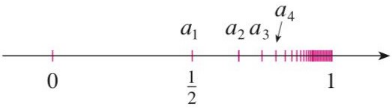
例一: $\{\frac{n}{n+1}\}_{n\geq 1}$, $a_n=\frac{n}{n+1}$, $\{\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots\}$.

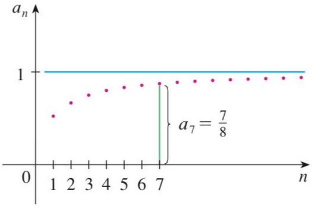
例二: $\{\cos\frac{n\pi}{6}\}_{n\geq 0}$, $a_n=\cos\frac{n\pi}{6}$, $\{1,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0,\cdots,\cos\frac{n\pi}{6},\cdots\}$.

例三: Fibonacci 数列: $f_1=1$, $f_2=1$, $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$, $n\geq 3$. 数列的前几项为 $\{1,1,2,3,5,8,13,21,\cdots\}$.

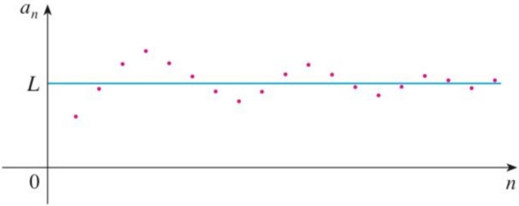
数列的极限，例子

考虑数列 $\{\frac{n}{n+1}\}_{n\geq 1}$. 观察知，一般项 $a_n = \frac{n}{n+1}$ 随着 n 的增加越来越接近数 1，因为 $1 - a_n = 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$. 两种方式图示如下.





数列极限的几何图示



数列极限的精确定义

Definition

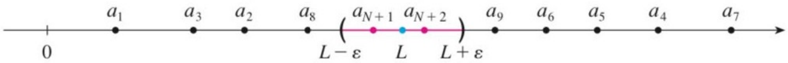
定义: 设 $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ 为一数列 (或序列), 若存在 $L \in \mathbb{R}$, 使得对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得

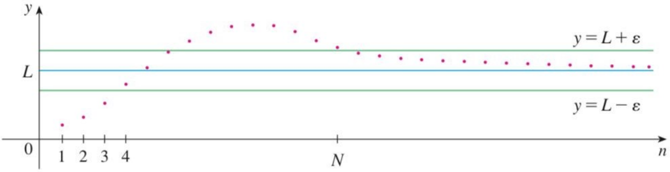
$$|a_n - L| < \varepsilon, \quad \forall n > N,$$

则称序列 $\{a_n\}$ 收敛于 L, 或 $\{a_n\}$ 有极限且极限值为 L. 这件事情记作 $a_n \to L$ $(n \to +\infty)$ 或 $\lim a_n = L$ 或 $\lim_{n\to+\infty} a_n = L$.

注: 显然 $\lim_{n\to+\infty} a_n = L$ 等价于 $\lim_{n\to+\infty}(a_n - L) = 0$.

数列极限精确定义的几何意义





收敛数列的例子

定义: 函数 $[x]$ 称作取整函数, 它的值定义为不大于 x 的最大整数. 例如 $[1.5]=1$, $[2]=2$, $[-1.5]=-2$. 注意函数 $[x]$ 满足 $[x]\le x<[x]+1$ 或 $x-1<[x]\le x$.

例一: $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$, 因为 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]$, 当 $n>N$, 即当 $n\ge N+1$ 时, $|\frac{1}{n}-0|=\frac{1}{n}\le\frac{1}{N+1}=\frac{1}{[\frac{1}{\varepsilon}]+1}<\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}}=\varepsilon$.

例二: $\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n}=1$, 因为 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]$, 当 $n>N$ 时, $|\frac{n+1}{n}-1|$ $=\frac{1}{n}<\varepsilon$.

例三: $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin n}{n}=0$, 因为 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]$, 当 $n>N$ 时, $|\frac{\sin n}{n}-0|$ $\le\frac{1}{n}<\varepsilon$.

回忆极限 $\lim_{n\to+\infty} a_n = L$ 的定义. 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得 $|a_n - L| < \varepsilon$, $\forall n > N$.

注一. 不等式 $|a_n - L| < \varepsilon$ 可以用 $|a_n - L| < M\varepsilon$ 代替, 其中 M 为任意一个事先给定的正常数, 只要与 ε 和 n 无关即可.

注二. 上述定义所涉及的严格不等号, 可以部分地或全部地改为相应的非严格不等号. 例如, 极限 $\lim_{n\to+\infty} a_n = L$ 也可如下定义: 任给 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得 $|a_n - L| \le M\varepsilon$, $\forall n \ge N$, 其中 $M > 0$ 为正常数, 与 n 无关. 参见课本习题 1.2 题 1 (第 7 页).

发散数列

Definition

定义: 设 $\{a_n\}$ 为一数列. 若对任意 $a \in \mathbb{R}$, 数列 $\{a_n\}$ 均不以 a 为极限, 即 $a_n \to a$ 不成立, 则称数列 $\{a_n\}$ 发散或无极限. 更确切地说, 若对任意 $a \in \mathbb{R}$, 存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得对任意正整数 N, 存在 $n_0 \geq N$, $|a_{n_0} - a| \geq \varepsilon_0$, 则称数列 $\{a_n\}$ 发散或无极限.

Example

例: 序列 $\{1-(-1)^n\}$ 发散. 易见序列可写作 $\{2, 0, 2, 0, \cdots\}$. 对任意 $a \in \mathbb{R}$.
(i) 若 $a = 0$, 则 $|a_{2n-1} - a| = 2 \not\to 0$; (ii) 若 $a = 2$, 则 $|a_{2n} - a| = 2 \not\to 0$;
(iii) 若 $a \neq 0$ 且 $a \neq 2$, 则

$$|a_n - a| = \begin{cases} |a|, & n\text{ 为偶数}, \\ |2-a|, & n\text{ 为奇数}. \end{cases}$$

因此 $|a_n - a| \not\to 0$, $n \to +\infty$.

收敛数列的例子，例一

Example

例一：证明 $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

证明：记 $a_n=\sqrt[n]{n}-1$，则 $\sqrt[n]{n}=1+a_n$. 于是

$$n=(1+a_n)^n=1+na_n+\frac{1}{2}n(n-1)a_n^2+\cdots>\frac{1}{2}n(n-1)a_n^2$$

$$故\quad a_n^2<\frac{2}{n-1}\quad 或\quad 0<a_n<\sqrt{\frac{2}{n-1}}\to 0.$$

这表明 $a_n\to 0$. 故 $\sqrt[n]{n}\to 1$. 证毕.

例二: 设 $\lim a_n = A$, 证明

(i) $\lim e^{a_n} = e^A$;

(ii) 设 $a_n > 0$ 且 $A > 0$, 则 $\lim \ln a_n = \ln A$.

(iii) $\lim \frac{\ln n}{n} = 0$.

证 (i). 对任意 $\varepsilon > 0$,

$$|e^{a_n} - e^A| < \varepsilon \iff |e^{a_n - A} - 1| < \varepsilon e^{-A}$$

$$\iff -\varepsilon e^{-A} < e^{a_n - A} - 1 < \varepsilon e^{-A}$$

$$\iff 1 - \varepsilon e^{-A} < e^{a_n - A} < 1 + \varepsilon e^{-A}$$

$$\iff \ln(1 - \varepsilon e^{-A}) < a_n - A < \ln(1 + \varepsilon e^{-A}).$$

这里不妨取 $\varepsilon > 0$ 充分小, 使得 $1 - \varepsilon e^{-A} > 0$. 记

例二，续一

$$\delta \overset{\text{def}}{=} \min\left\{|\ln(1-\varepsilon e^{-A})|, \ln(1+\varepsilon e^{-A})\right\} > 0,$$

由假设 $a_n \to A$ 知，对 $\delta > 0$，存在正整数 N，使得 $|a_n - A| < \delta$, $\forall n \geq N$. 于是当 $n \geq N$ 时，$|e^{a_n} - e^A| < \varepsilon$. 结论 (i) 得证.

证 (ii). 设 $\varepsilon > 0$, $|\ln a_n - \ln A| < \varepsilon$，即

$$\left|\ln\frac{a_n}{A}\right| < \varepsilon \iff -\varepsilon < \ln\frac{a_n}{A} < \varepsilon$$

$$\iff e^{-\varepsilon} < \frac{a_n}{A} < e^{\varepsilon} \iff Ae^{-\varepsilon} < a_n < Ae^{\varepsilon}$$

$$\iff A(e^{-\varepsilon} - 1) < a_n - A < A(e^{\varepsilon} - 1)$$

记 $\delta \overset{\text{def}}{=} \min\{A(1-e^{-\varepsilon}), A(e^{\varepsilon}-1)\}$. 由假设 $a_n \to A$ 知，对 $\delta > 0$，存在正整数 N，使得 $|a_n - A| < \delta$, $\forall n \geq N$. 由上述等价关系知 $|\ln a_n - \ln A| < \varepsilon$, $\forall n \geq N$. 此即 $\lim \ln a_n = \ln A$. 结论 (ii) 得证.

例二，续二

证 (iii)：已证 $\lim \sqrt[n]{n} = 1$. 记 $a_n = \sqrt[n]{n}$, $A = 1$, 则 $a_n \to A$. 由 (ii) 知 $\lim \ln a_n = \ln A = \ln 1 = 0$, 即 $\lim \frac{\ln n}{n} = 0$. (iii) 得证. $\square$

极限性质，极限的唯一性

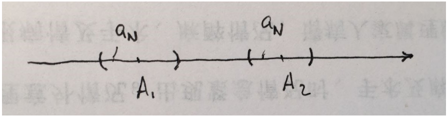
<u>命题</u>：如果序列 $\{a_n\}$ 有极限，则极限值唯一。

<u>证明</u>：设序列 $\{a_n\}$ 有两个极限 A_1 和 A_2，$A_1 \neq A_2$。取 $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}|A_1 - A_2|$，根据极限定义可知，存在正整数 N，使得对任意 $n \geq N$，$|a_n - A_1| < \varepsilon$ 且 $|a_n - A_2| < \varepsilon$。于是

$$|A_1 - A_2| = |A_1 - a_N + a_N - A_2| \leq |A_1 - a_N| + |a_N - A_2|$$

$$< 2\varepsilon < 2 \cdot \frac{1}{2}|A_1 - A_2| = |A_1 - A_2|.$$

矛盾。命题得证。 $\square$



命题: 若序列 $\{a_n\}$ 收敛，则序列 $\{a_n\}$ 有界，即存在正数 $M > 0$，使得 $|a_n| \le M, \forall n \ge 1$.

证: 设序列 $\{a_n\}$ 收敛于 A. 由极限定义知，对于 $\varepsilon = 1$，存在正整数 N，使得对任意 $n > N$，$|a_n - A| < 1$，即 $-1 + A < a_n < A + 1$. 故 $|a_n| < 1 + |A|$，$\forall n > N$. 记

$$M = \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_N|, 1 + |A|\},$$

则 $|a_n| \le M, \forall n \ge 1$. 证毕. □

子序列 (subsequences)

Definition

定义: 设 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 为一序列, 若映射 $\phi:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ 满足 $\phi(k)<\phi(k+1)$, $\forall k\geq 1$, 则称序列 $\{a_{\phi(k)}\}$ 为 $\{a_n\}$ 的一个子序列, 其中 $\mathbb{N}^*\stackrel{\text{def}}{=}\{1,2,\cdots\}$.

例: (i) $\phi(k)=2k$, $\{a_{2k}\}$ 为序列 $\{a_n\}$ 的一个子序列.

(ii) $\phi(k)=2k+1$, $\{a_{2k+1}\}$ 为序列 $\{a_n\}$ 的一个子序列.

(iii) $\phi(k)=3k$, $\{a_{3k}\}$ 为序列 $\{a_n\}$ 的一个子序列.

(iv) $\phi(k)=k$, 序列 $\{a_n\}$ 为其自身的一个子序列.

注: 序列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 的子列 $\{a_{\phi(k)}\}$ 也常常记作 $\{a_{n_k}\}$, 其中 $n_k=\phi(k)$ 满足 $n_1<n_2<n_3<\cdots$ 为严格递增的正整数序列.

Theorem

定理: 收敛序列的每个子序列均收敛, 且收敛于同一个极限值.

Proof.

证明: 设序列 $\{a_n\}$ 收敛于 a, 设 $\{a_{\phi(k)}\}$ 为其任意一个子序列. 依极限定义可知, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得对任意 $n > N$, $|a_n - a| < \varepsilon$. 由于映射 $\phi(\cdot)$ 满足 $\phi(k) < \phi(k+1)$, 故 $\phi(k) \geq k$, $\forall k \geq 1$. 于是 $|a_{\phi(k)} - a| < \varepsilon$, $\forall k > N$. 因为 $\phi(k) \geq k > N$. 故子序列也收敛于 a. 证毕. (用归纳法证明 $\phi(k) \geq k$, $\forall k \geq 1$. 显然 $\phi(1) \geq 1$. 假设 $\phi(k) \geq k$. 由于 $\phi(k+1) > \phi(k) \geq k$, 故 $\phi(k+1) \geq k+1$.) $\square$

例子

Example

例: 证明序列 $\{(-1)^n\}_{n\geq 1}$ 发散.

证明: 反证. 假设序列 $\{(-1)^n\}$ 收敛, 则根据上述定理可知它的每个子序列均收敛于同一个极限值. 但是这个序列的偶脚标和奇脚标子序列

$$\{(-1)^{2n}\} = \{1, 1, 1, \cdots\},$$

$$\{(-1)^{2n-1}\} = \{-1, -1, -1, \cdots\}$$

分别收敛于两个不同的极限值 1 和 -1. 矛盾. 故序列 $\{(-1)^n\}$ 发散. 证毕. $\square$

收敛序列的保序性

Theorem

定理: 设 $a_n \to a$ 且 $b_n \to b$.

(1) 若 $a < b$, 则存在正整数 N, 使得对 $\forall n > N$, $a_n < b_n$.

(2) 若存在正整数 n_0, 使得 $a_n \le b_n$, $\forall n \ge n_0$, 则 $a \le b$.

注: 结论 (2) 不能推广如下: 若 $a_n < b_n$, $\forall n \ge n_0$, 且 $a_n \to a$, $b_n \to b$, 则 $a < b$. 例如序列 $\{\frac{1}{2n}\}$ 和 $\{\frac{1}{n}\}$ 均收敛, 且满足 $\frac{1}{2n} < \frac{1}{n}$, $\forall n \ge 1$. 但它们有相同的极限零.

证明

证明: (1) 由假设 $a_n \to a$ 且 $b_n \to b$ 可知, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得当 $n > N$ 时,

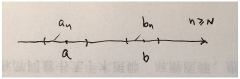
$$|a_n - a| < \varepsilon \quad 且 \quad |b_n - b| < \varepsilon,$$

即 $$-\varepsilon + a < a_n < a + \varepsilon \quad 且 \quad -\varepsilon + b < b_n < b + \varepsilon.$$

由于 $a < b$, 故可取 $\varepsilon = \frac{1}{2}(b - a) > 0$, 则

$$a_n < a + \frac{1}{2}(b - a) = \frac{1}{2}(a + b), \quad b_n > -\frac{1}{2}(b - a) + b = \frac{1}{2}(a + b),$$

即 $a_n < \frac{1}{2}(a + b) < b_n$, $\forall n > N$. 结论 (1) 得证.



证 (2). 反证. 若 $a > b$. 由结论 (1) 知存在正整数 N, 使得 $a_n > b_n$, $\forall n > N$. 此与假设 $a_n \leq b_n$, $\forall n > n_0$ 相矛盾. 证毕. □

Theorem

定理: 设两个数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 均收敛，且 $a_n \to a$，$b_n \to b$，则这两个数列的和 $\{a_n + b_n\}$，差 $\{a_n - b_n\}$，乘积 $\{a_n b_n\}$，以及商 $\frac{a_n}{b_n}$ (补充假设 $b \neq 0$) 均收敛，并且

(i) $a_n \pm b_n \to a \pm b$;

(ii) $ca_n \to ca$;

(iii) $a_n b_n \to ab$;

(iv) 设 $b \neq 0$，则 $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$.

证明

证明: (i) 和 (ii) 的证明容易. 略去. 证 (iii). 要证 $a_nb_n \to ab$, 即要证对于 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ 正整数 N, 使得对 $\forall n > N$, $|a_nb_n - ab| < \varepsilon$. 一方面我们有估计

$$|a_nb_n - ab| = |a_nb_n - ab_n + ab_n - ab| \leq |a_n - a||b_n| + |a||b_n - b|.$$

另一方面, 由于收敛序列有界, 故存在 $M > 0$, 使得 $|b_n| \leq M$, $\forall n \geq 1$. 再由假设 $a_n \to a$, $b_n \to b$ 可知对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得 $|a_n - a| < \varepsilon$ 且 $|b_n - b| < \varepsilon$, $\forall n > N$. 于是

$$|a_nb_n - ab| \leq |a_n - a||b_n| + |a||b_n - b| \leq \varepsilon M + |a|\varepsilon = (M + |a|)\varepsilon, \quad \forall n > N.$$

(iii) 得证. 证 (iv). 要证 $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$, 即要证对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| < \varepsilon, \quad \forall n > N.$$

证明，续

先注意 $$\left|\frac{a_n}{b_n}-\frac{a}{b}\right|=\left|\frac{a_nb-ab_n}{b_nb}\right|=\frac{1}{|bb_n|}|a_nb-ab+ab-ab_n|$$
$$\le\frac{1}{|bb_n|}\Big(|b||a_n-a|+|a||b-b_n|\Big).$$

由 $b_n\to b$ 知，对 $\varepsilon=\frac{|b|}{2}>0$，存在正整数 N_1，使得 $|b_n-b|<\frac{|b|}{2}$，$\forall n>N_1$.

于是对 $\forall n>N_1$
$$-\frac{|b|}{2}+b<b_n<\frac{|b|}{2}+b\quad\Rightarrow\quad|b_n|\ge\frac{|b|}{2}.$$

再由假设 $a_n\to a$，$b_n\to b$ 可知，对任意 $\varepsilon>0$，存在正整数 N_2，使得 $|a_n-a|<\varepsilon$ 且 $|b_n-b|<\varepsilon$，$\forall n>N_2$. 于是对 $\forall n>\max\{N_1,N_2\}$，
$$\left|\frac{a_n}{b_n}-\frac{a}{b}\right|\le\frac{1}{|bb_n|}\Big(|b||a_n-a|+|a||b-b_n|\Big)\le\frac{2}{|b|^2}(|b|\varepsilon+|a|\varepsilon)=M\varepsilon,$$
其中 $M=\frac{2}{|b|^2}(|b|+|a|)$. 结论 (iv) 得证.

例一: 求极限

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2-n+1}{2n^2+3n+2}.$$

解: 由于

$$\frac{n^2-n+1}{2n^2+3n+2}=\frac{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}},$$

故

$$\lim\frac{n^2-n+1}{2n^2+3n+2}=\lim\frac{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}=\frac{\lim\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\lim\left(2+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}$$

$$=\frac{\lim 1-\lim\frac{1}{n}+\lim\frac{1}{n^2}}{\lim 2+\lim\frac{3}{n}+\lim\frac{2}{n^2}}=\frac{1-0+0}{2+0+0}=\frac{1}{2}.\quad\#$$

Theorem

定理: 设三个序列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 和 $\{c_n\}$ 满足 $a_n \leq b_n \leq c_n$, $\forall n \geq n_0$, 其中 n_0 为某个正整数. 若极限 $\lim a_n$ 和 $\lim c_n$ 均存在, 且极限值相等, 记作 a, 则极限 $\lim b_n$ 也存在且等于 a.

例: 设 $a > 0$, 证明 $\lim \sqrt[n]{a} = 1$.

证: (i) 设 $a \geq 1$, 则 $1 \leq \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{n}$, $\forall n \geq a$. 已证 $\sqrt[n]{n} \to 1$. 于是根据三明治定理知 $\sqrt[n]{a} \to 1$.

(ii) 设 $0 < a < 1$, 则 $b = \frac{1}{a} > 1$. 于是 $\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{b}} \to \frac{1}{1} = 1$. 证毕. □

证: 由假设 $a_n \le b_n \le c_n, \forall n \ge n_0$ 可知

$$a_n - a \le b_n - a \le c_n - a, \quad \forall n \ge n_0.$$

于是 $|b_n - a| \le \max\{|a_n - a|, |c_n - a|\}$. 再由假设 $\lim a_n = a$ 且 $\lim c_n = a$ 知, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得 $\forall n > N$

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad 且 \quad |c_n - a| < \varepsilon.$$

于是对于 $\forall n > \max\{N, n_0\}$,

$$|b_n - a| \le \max\{|a_n - a|, |c_n - a|\} < \varepsilon.$$

此即 $\lim b_n = a$. 证毕. $\square$

例子

<u>例</u>: 设 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 为 m 个非负实数, 证明

$$\lim_{n\to+\infty}\left(a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n\right)^{\frac{1}{n}} = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}.$$

<u>证</u>: 记 $a \overset{\text{def}}{=} \max\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$, 则

$$a = (a^n)^{\frac{1}{n}} \leq \left(a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n\right)^{\frac{1}{n}} \leq (ma^n)^{\frac{1}{n}} = m^{\frac{1}{n}} a \to a.$$

根据 Sandwich 定理可知命题得证. $\square$

单调序列

Definition

<u>定义</u>: (i) 若序列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n \leq a_{n+1}$, $\forall n \geq 1$, 则称这个序列为单调上升的或单调增加的 (monotone increasing); 若不等号严格成立, 即 $a_n < a_{n+1}$, $\forall n \geq 1$, 则称这个序列为严格单调上升的 (strictly monotone increasing).

(ii) 若序列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n \geq a_{n+1}$, $\forall n \geq 1$, 则称这个序列为单调下降的或单调减少的 (monotone decreasing); 若不等号严格成立, 即 $a_n > a_{n+1}$, $\forall n \geq 1$, 则称这个序列为严格单调下降的 (strictly monotone decreasing).

(iii) 单调上升和单调下降序列都称为单调序列.

例子

例一: 序列$\{\frac{3}{n+5}\}$是严格单调下降的. 因为

$$\frac{3}{n+5} > \frac{3}{(n+1)+5} = \frac{3}{n+6}.$$

例二: 序列$\{\frac{n}{n^2+1}\}$是严格单调下降的. 因为

$$\frac{n}{n^2+1} > \frac{n+1}{(n+1)^2+1}$$

$$\iff \quad n[(n+1)^2+1] > (n+1)(n^2+1).$$

$$\iff \quad n^3+2n^2+2n > n^3+n^2+n+1.$$

$$\iff \quad n^2+n > 1, \quad \forall n \geq 1.$$

最后一个不等式$n^2+n > 1$, $\forall n \geq 1$显然成立. 故所考虑的序列严格单调下降的.

记号

- $\{a_n\}\uparrow$: 表示序列 $\{a_n\}$ 为单调上升的;
- $\{a_n\}\downarrow$: 表示序列 $\{a_n\}$ 为单调下降的;
- $\{a_n\}\uparrow$ 严格: 表示序列 $\{a_n\}$ 为严格单调上升的;
- $\{a_n\}\downarrow$ 严格: 表示序列 $\{a_n\}$ 为严格单调下降的.
- $a_n\uparrow a$: 表示序列 $\{a_n\}$ 为单调上升, 且 $a_n\to a$. 记号 $a_n\downarrow a$ 的意思类似.

单调有界定理, 例子

Theorem

定理: 每个单调有界序列均有极限. 具体说来,

(i) 若 $\{a_n\}\uparrow$ 且有上界, 则 $\{a_n\}$ 有极限, 且 $\lim a_n = \sup\{a_n\}$;

(ii) 若 $\{a_n\}\downarrow$ 且有下界, 则 $\{a_n\}$ 有极限, 且 $\lim a_n = \inf\{a_n\}$.

例: 研究序列 $\{a_n\}$ 的收敛性, 其中 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 6)$, $n = 1, 2, \cdots$.

解: 简单计算可知

$$
\begin{array}{lll}
a_1 = 2 & a_2 = 4 & a_3 = 5 \\
a_4 = 5.5 & a_5 = 5.75 & a_6 = 5.875 \\
a_7 = 5.9375 & a_8 = 5.96875 & a_9 = 5.984375
\end{array}
$$

上述结果表明序列的前 9 项是单调上升的, 并且趋向极限值 6.

一. 用数学归纳法证明序列满足 $a_{n+1} > a_n$, $\forall n \geq 1$. 显然情形 $n = 1$ 成立，因为 $a_2 = 4 > 2 = a_1$. 假设 $a_{k+1} > a_k$，则 $a_{k+1} + 6 > a_k + 6$. 故 $\frac{1}{2}(a_{k+1} + 6) > \frac{1}{2}(a_k + 6)$. 此即 $a_{k+2} > a_{k+1}$. 这就证明了序列是严格单调上升的.

二. 证 $\{a_n\}$ 有上界 6，即 $a_n < 6$, $\forall n \geq 1$. 用归纳法证. 由于 $a_1 = 2 < 6$，故结论当 $n = 1$ 成立. 假设 $a_k < 6$，则 $a_k + 6 < 12$. 故 $a_{k+1} = \frac{1}{2}(a_k + 6) < 6$. 故序列有上界 6.

三. 根据单调序列定理可知序列 $\{a_n\}$ 有极限. 设 $a_n \to a$. 根据递推关系式我们有

$$a = \lim a_{n+1} = \lim \frac{1}{2}(a_n + 6) = \frac{1}{2}(\lim a_n + 6) = \frac{1}{2}(a + 6).$$

即 $a = \frac{1}{2}(a + 6)$. 解之得 $a = 6$. 解答完毕.

例子，续二

注一：这里须先证明极限 $\lim_{n\to+\infty} a_n$ 存在，然后才可在式 $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 6)$ 中取极限。否则有可能出错。例如对于 $a_n = (-1)^n$，$a_{n+1} = -a_n$。若直接在迭代式 $a_{n+1} = -a_n$ 中取极限，则 $a = -a$，即 $a = 0$。但显然序列 $\{(-1)^n\}$ 无极限。

注二：若 $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$，则 $\lim_{n\to+\infty} a_{n+k} = a$，其中 k 为任意正整数。参见课本第7页习题 1.2 第4题。

证 (i). 设序列 $\{a_n\}\uparrow$ 且有上界. 记 $a=\sup\{a_n\}$. 对任意 $\varepsilon>0$, $a-\varepsilon$ 不是上界, 故存在 $a_N>a-\varepsilon$, 即 $0\le a-a_N<\varepsilon$. 再由序列单调增加的假设知, 对 $\forall n>N$, $0\le a-a_n\le a-a_N<\varepsilon$. 这表明 $a_n\to a$.

证 (ii). 方法与证结论 (i) 类似. 设序列 $\{a_n\}\downarrow$ 且有下界. 记 $a=\inf\{a_n\}$. 对 $\forall\varepsilon>0$, $a+\varepsilon$ 不是下界, 故存在 $a_N<a+\varepsilon$, 即 $0\le a_N-a<\varepsilon$. 再由序列的单调下降性质知, 对 $\forall n\ge N$, $0\le a_n-a\le a_N-a<\varepsilon$. 这表明 $a_n\to a$. 命题得证. $\square$

例：证明极限 $\lim_{n\to+\infty} e_n$ 存在，其中

$$e_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

证：对 e_n 作二项式展开得

$$e_n=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k}$$

$$=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right).$$

于是

$$e_{n+1}=1+\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)>e_n.$$

这表明 $\{e_n\}\uparrow$ 严格. 以下证序列 $\{e_n\}$ 有上界. 对于任意 $n \geq 1$

$$e_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

$$< 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} < 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 2 + \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)$$

$$= 2 + \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$

$$= 2 + 1 - \frac{1}{n} < 3.$$

这就证明了序列 $\{e_n\}$ 单调上升且有上界，故极限 $\lim_{n\to+\infty} e_n$ 存在. 证毕.

关于极限 $\lim_{n\to+\infty}(1+1/n)^n$ 的注记

注一: 也可利用算数几何平均不等式来证明 $(1+1/n)^n$ 的严格单调增性质:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot 1$$

$$<\left(\frac{n(1+1/n)+1}{n+1}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

注二: 可以证明 $(1+1/n)^{n+1}\downarrow$严格. 故 $(1+1/n)^n<e<(1+1/n)^{n+1}$. 进而得到极限 $\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n)$ 的存在性证明. 参见课本第19页习题 1.4 题 16, 17.

关于 Euler 常数的注记

注一: 数 $e \overset{\text{def}}{=} \lim(1+\frac{1}{n})^n$ 称为 Euler 常数，近似值为 2.718. Euler 于 1737 年证明了数 e 是无理数. Hermite 于 1768 年证明了数 e 是超越数. 一个数 c 称为代数数，如果 c 是某整系数多项式方程的根. 例如，每个有理数都是代数数. 再如 $\sqrt{2}$ 是代数数，因为它是 $x^2-2=0$ 的根. 非代数数的实数称为超越数 (transcendental numbers). 超越数性质比代数数更加难以理解和掌握. 第一个超越数的例子是数 $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{10^{k!}}$，由 Liouville 提供并证明.

注二: Lambert 于 1768 年证明了 π 是无理数. Lindemann 于 1882 年证明了 π 是超越数.

例一：设 $a>1$，证明 $\frac{n}{a^n}\to 0$.

证法一（课本证法）：记 $b_n=\frac{n}{a^n}$，则

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{n+1}{a^{n+1}}\frac{a^n}{n}=\frac{1}{a}\frac{n+1}{n}\to\frac{1}{a}<1.$$

故存在正整数 N，使得 $\frac{b_{n+1}}{b_n}<1$, $\forall n\geq N$. 这表明 $\{b_n\}$ 对于 $n>N$ 单调下降，且有下界 $(b_n>0)$. 由单调序列定理知 $\{b_n\}$ 收敛. 记 $\lim_{n\to+\infty}b_n=b$. 在如下关系式

$$b_{n+1}=\frac{n+1}{a^{n+1}}=\frac{n+1}{na}\frac{n}{a^n}=\frac{n+1}{na}b_n$$

中，令 $n\to+\infty$ 即得 $b=\frac{1}{a}b$ 或 $ab=b$. 因为 $a>1$，故 $b=0$. 命题得证.

例一，续

<u>证法二</u>：记 $a = 1 + \delta$，$\delta > 0$，则

$$a^n = (1+\delta)^n = 1 + n\delta + \frac{n(n-1)}{2}\delta^2 + \cdots > \frac{n(n-1)}{2}\delta^2.$$

于是

$$0 < \frac{n}{a^n} < \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}\delta^2} = \frac{2}{(n-1)\delta^2} \to 0.$$

命题得证.

例二

例二: 设 $c > 0$, 定义 $c_1 = \sqrt{c}$, $c_{n+1} = \sqrt{c + c_n}$, $\forall n \geq 1$. 证明序列 $\{c_n\}$ 收敛, 并其极限.

(i) 证 $\{c_n\}\uparrow$ 严格. 情形 $n = 1$: $c_2 = \sqrt{c_1 + c} > \sqrt{c} = c_1$. 结论成立. 设结论对于情形 n 成立, 即 $c_{n+1} > c_n$, 则 $c_{n+2} = \sqrt{c + c_{n+1}} > \sqrt{c + c_n} = c_{n+1}$. 由归纳法原理知结论成立.

(ii) 证 $\{c_n\}$ 有上界:

$$c_2 = \sqrt{c + c_1} = \sqrt{c + \sqrt{c}} < \sqrt{c + 2\sqrt{c} + 1} = 1 + \sqrt{c}.$$

设 $c_n < 1 + \sqrt{c}$, 则 $c_{n+1} = \sqrt{c + c_n} < \sqrt{c + \sqrt{c} + 1} < 1 + \sqrt{c}$. 由归纳法原理知结论成立.

例二，续

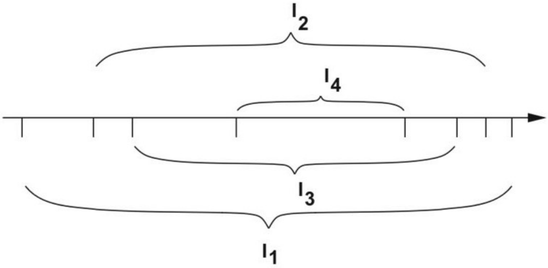
(iii) 综合结论 (i) (ii) 知序列 $\{c_n\}$ 收敛. 在关系式 $c_{n+1} = \sqrt{c + c_n}$ 中令 n 趋于正无穷，并记 $c_* = \lim_{n\to+\infty} c_n$ 得 $c_* = \sqrt{c + c_*}$. (见下说明) 等式两边平方得 $c_*^2 = c + c_*$ 或 $c_*^2 - c_* - c = 0$. 解之得 $c_* = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1+4c}\right)$. 由于 $c_n > 0$，故 $c_* \geq 0$. 因此所求极限为 $c_* = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1+4c}\right)$. 解答完毕.

说明: 一般有结论: 若 $a_n \to a$，其中 $a_n \geq 0$，则 $\sqrt{a_n} \to \sqrt{a}$. 证: 由极限的保序性知 $a \geq 0$. (i) 情形 $a = 0$，即 $a_n \to 0$. 于是 $\forall \varepsilon > 0$，存在正整数 N，使得 $\forall n \geq N$, $a_n < \varepsilon^2$，即 $\sqrt{a_n} < \varepsilon$. (ii) 情形 $a > 0$. 由于 $|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a}} \leq \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a}}$，故结论成立.

区间套定理(Nested intervals theorem)

Theorem

定理: 设 I_k $(\forall k \geq 1)$ 为逐个嵌套包含的闭区间列, 即 $I_{k+1} \subset I_k$, $\forall k \geq 1$. 若区间长度 $|I_k| \to 0$, 则存在唯一一个点 $\xi \in \bigcap_{k=1}^{+\infty} I_k$.



证: 设 $I_k = [a_k, b_k]$, $\forall k \geq 1$, 由于 $I_{k+1} \subset I_k$, 故序列 $\{a_k\} \uparrow$, $\{b_k\} \downarrow$, 并且它们均有界, 从而均收敛. 我们设 $a_k \uparrow a$, $b_k \downarrow b$. 由于 $a_k < b_k$, 故 $a \leq b$. 因此 $a_k \leq a \leq b \leq b_k$, $\forall k \geq 1$. 依假设 $|I_k| = b_k - a_k \to 0$, 故 $|b - a| \leq b_k - a_k \to 0$. 即 $a = b$. 故存在唯一一点 $\xi = a = b \in \bigcap_{k=1}^{+\infty} I_k$. 证毕. $\square$

注: 区间套定理中区间是闭的条件不可少. 例如取 $I_k = (0, \frac{1}{k})$, $k = 1, 2, \cdots$, 则 $I_{k+1} \subset I_k$, 但交集 $\bigcap_{k=1}^{+\infty} I_k$ 是空集. 定理的结论不成立.

两个正数的算术几何平均的迭代

课本第19页习题1.4第15题(记号略有不同): 回忆两个正数 $a_0 > g_0 > 0$, 其算术平均和几何平均为 $a_1 = \frac{a_0+g_0}{2}$, $g_1 = \sqrt{a_0 g_0}$. 显然 $g_0 < g_1 < a_1 < a_0$. 令 $a_2 = \frac{a_1+g_1}{2}$, $g_2 = \sqrt{a_1 g_1}$, 则 $g_0 < g_1 < g_2 < a_2 < a_1 < a_0$. 如此继续下去, 即可得到两个单调序列 $\{g_n\}$, $\{a_n\}$ 满足

$$g_0 < g_1 < g_2 < \cdots < g_n < a_n < \cdots < a_2 < a_1 < a_0,$$

其中 $a_{k+1} = \frac{a_k+g_k}{2}$, $g_{k+1} = \sqrt{a_k g_k}$, $\forall k \geq 1$. 考虑闭区间 $I_n = [g_n, a_n]$ 的长度.

$$a_1 - g_1 = \frac{a_0+g_0}{2} - \sqrt{a_0 g_0} = \frac{a_0-g_0}{2} + g_0 - \sqrt{a_0 g_0} < \frac{a_0-g_0}{2}.$$

即 $|I_1| < \frac{1}{2}|I_0|$. 类似可证 $|I_k| < \frac{1}{2}|I_{k-1}|$, $\forall k \geq 1$. 由此得 $|I_k| < \frac{1}{2}|I_{k-1}| < \cdots < \frac{1}{2^k}|I_0|$. 可见区间长度 $|I_k|$ 趋向于零. 由区间套定理知存在唯一 $\xi \in \bigcap_{k\geq 0} I_k$. 值 ξ 常记作 $AG(a_0, g_0)$. (注: Gauss 首先发现了这个数的一些特殊性质, 并利用它计算 π 的近似值.) 解答完毕.

Definition

定义: 给定一个序列 $\{a_n\}$, 如果对于任意大的正数 $M>0$, 存在正整数 N, 使得 $a_n>M$, $\forall n>N$, 则称序列 $\{a_n\}$ 趋向正无穷, 记作 $\lim_{n\to+\infty} a_n=+\infty$ 或 $a_n\to+\infty$. 类似可定义数列 $\{a_n\}$ 趋向负无穷, 记作 $\lim_{n\to+\infty} a_n=-\infty$ 或 $a_n\to-\infty$.

例如, $\sqrt{n}\to+\infty$; $n^2\to+\infty$.

注一: 趋向正无穷的序列必无上界, 但无上界序列不必趋向正无穷. 例如序列 $\{0,1,0,2,0,3,\cdots\}$ 无上界, 但并不趋向正无穷.

注二: 易证 $|a_n|\to+\infty \iff \frac{1}{a_n}\to 0$.

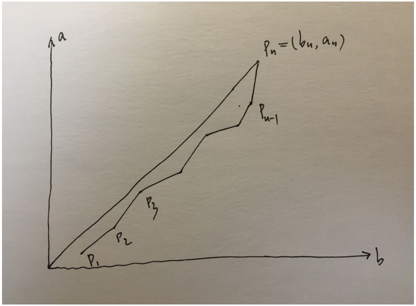
Theorem

定理: 考虑极限 $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}$.

(i) ($\frac{*}{\infty}$ 型) 若 $b_n\uparrow+\infty$ 严格, 且极限 $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ 存在, 记作 L (允许 L 为正无穷或负无穷), 则 $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=L$.

(ii) ($\frac{0}{0}$ 型) 设 $a_n\to0$ 且 $b_n\downarrow0$ 严格. 若极限 $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ 存在, 记作 L (允许 L 为正无穷或负无穷), 则 $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=L$.

记 $P_n = (b_n, a_n)$ 为给定的一个平面点列，则线段 $\overline{OP_n}$ 的斜率为 $\frac{a_n}{b_n}$，线段 $\overline{P_nP_{n+1}}$ 的斜率为 $\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$，由此可知 Stolz 定理的几何意义：若线段 $\overline{P_nP_{n+1}}$ 的斜率有极限，则线段 $\overline{OP_n}$ 的斜率也有极限，且极限相同.



例一

例一: 求极限

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}.$$

解: 记 $a_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$, $b_n = \ln n$, 则显然 $b_n \uparrow +\infty$ 严格. 考虑

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\ln(n+1)-\ln n} = \frac{1}{(n+1)\ln(1+\frac{1}{n})}$$

$$= \frac{1}{\frac{n+1}{n}\ln(1+\frac{1}{n})^n} \to \frac{1}{1\cdot\ln e} = 1.$$

根据 Stolz 定理可知所求极限为 $\lim\frac{a_n}{b_n} = 1$. 解答完毕.

注: 级数 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$ 称为调和级数. 可以证明, 这是一个发散级数, 即 $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = +\infty$. 上述极限表明, 这个级数发散的速度和 $\ln n$ 差不多.

例二: 给定正整数 k, 求极限 $\lim_{n\to+\infty}\frac{1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}$.

解: 记 $a_n=1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k$, $b_n=n^{k+1}$, 显然 $b_n\uparrow+\infty$ 严格. 考虑

$$\triangle_n \overset{\text{def}}{=} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\frac{(n+1)^k}{(n+1)^{k+1}-n^{k+1}}.$$

展开二项式 $(n+1)^{k+1}$ 得

$$(n+1)^{k+1}=n^{k+1}+(k+1)n^k+\frac{(k+1)k}{2}n^{k-1}+\cdots$$

$$\Rightarrow\quad \triangle_n=\frac{(n+1)^k}{n^{k+1}+(k+1)n^k+\frac{(k+1)k}{2}n^{k-1}+\cdots-n^{k+1}}$$

$$=\frac{(n+1)^k}{(k+1)n^k+\frac{(k+1)k}{2}n^{k-1}+\cdots}=\frac{(1+\frac{1}{n})^k}{(k+1)+\frac{(k+1)k}{2}\frac{1}{n}+\cdots}\to\frac{1}{k+1}.$$

根据 Stolz 定理可知, 所求极限为 $\lim\frac{a_n}{b_n}=\frac{1}{k+1}$. 解答完毕.

例三

课本第8页习题1.2第7题(2): 设 $\lim_{n\to+\infty} x_n = A$，证明

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = A$$

证明: 在 Stolz 定理结论一中，令 $a_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$，$b_n = n$，则 $b_n \uparrow +\infty$ 严格，且

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{x_{n+1}}{1} \to A.$$

因此由 Stolz 定理知

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = A.$$

证毕. □

例四：记 $s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. (1) 证明 $\lim_{n\to+\infty} s_n$ 存在. 极限常记作 $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$. (2) 记 $\varepsilon_n = e - s_n$，求极限 $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n (n+1)!$.

证 (1)：记 $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$. 已证极限 $\lim_{n\to+\infty} a_n$ 存在，并且极限记作 e. 一方面对 $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ 二项展开可得

$$a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

$$< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} = s_n.$$

另一方面，任意固定正整数 m，对任意正整数 $n > m$，

$$a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

$$> 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right).$$

于上式令 $n \to +\infty$ 即得

$$e \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{m!} = s_m.$$

这说明序列 $\{s_m\}$ 有上界 e. 又显然这个序列单调上升. 故极限 $\lim_{n\to+\infty} s_n$ 存在，极限记作 $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$. 因此

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq e.$$

在不等式 $a_n < s_n$ 两边令 $n \to +\infty$ 得 $e \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$. 因此 $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$. 结论 (1) 得证.

解(2): 将 $\varepsilon_n (n+1)!$ 写作 $\varepsilon_n (n+1)! = \frac{\varepsilon_n}{\frac{1}{(n+1)!}}$. 这是 $\frac{0}{0}$ 型的不定式. 考虑差商:

例四，续二

$$\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n = (e - s_{n+1}) - (e - s_n) = s_n - s_{n+1} = -\frac{1}{(n+1)!},$$

$$\frac{1}{(n+2)!} - \frac{1}{(n+1)!} = -\frac{n+1}{(n+2)!},$$

于是

$$\frac{\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n}{\frac{1}{(n+2)!} - \frac{1}{(n+1)!}} = \frac{\frac{-1}{(n+1)!}}{\frac{-(n+1)}{(n+2)!}} = \frac{n+2}{n+1} \to 1.$$

根据 $\frac{0}{0}$ 型的 Stolz 定理可知所求极限为 $\varepsilon_n(n+1)! \to 1$. 解答完毕.

证: 先证 $(\frac{*}{\infty})$ 情形结论. 考虑 $\lim \frac{a_n}{b_n}$. 假设 $b_n \uparrow +\infty$ 严格, 且 $\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \to L$. 以下分四种情况讨论 (i) $L=0$; (ii) $L \neq \pm\infty$, $L \neq 0$; (iii) $L=+\infty$; (iv) $L=-\infty$.

情形 (i) $L=0$. 即已知 $\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \to 0$, 要证 $\frac{a_n}{b_n} \to 0$, 即对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得 $|\frac{a_n}{b_n}| < \varepsilon$, $\forall n > N$. 由假设 $\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \to 0$ 知, 存在正整数 N_1, 使得

$$\left|\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}\right| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N_1.$$

即 $|a_{n+1}-a_n| < \varepsilon(b_{n+1}-b_n)$, $\forall n \geq N_1$. 由此得对任意 $n \geq N_1$

$$\begin{aligned}
|a_{N_1+1}-a_{N_1}| &< \varepsilon(b_{N_1+1}-b_{N_1}),\\
|a_{N_1+2}-a_{N_1+1}| &< \varepsilon(b_{N_1+2}-b_{N_1+1}),\\
&\vdots\\
|a_{n+1}-a_n| &< \varepsilon(b_{n+1}-b_n).
\end{aligned}$$

证明，续一

将上述不等式相加得

$$\sum_{k=N_1}^{n} |a_{k+1} - a_k| < \varepsilon(b_{n+1} - b_{N_1}).$$

将 a_{n+1} 写作

$$a_{n+1} = (a_{n+1} - a_n) + (a_n - a_{n-1}) + \cdots + (a_{N_1+1} - a_{N_1}) + a_{N_1},$$

$$\text{则} \quad |a_{n+1}| \leq \sum_{k=N_1}^{n} |a_{k+1} - a_k| + |a_{N_1}| \leq \varepsilon(b_{n+1} - b_{N_1}) + |a_{N_1}|.$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right| \leq \frac{\varepsilon(b_{n+1} - b_{N_1}) + |a_{N_1}|}{b_{n+1}}$$

$$= \varepsilon\left(1 - \frac{b_{N_1}}{b_{n+1}}\right) + \frac{|a_{N_1}|}{b_{n+1}} \leq \varepsilon + \frac{|a_{N_1}| + \varepsilon|b_{N_1}|}{b_{n+1}}.$$

证明，续二

根据假设 $b_n \uparrow +\infty$，知存在正整数 $N_2 > N_1$，使得

$$\frac{|a_{N_1}| + \varepsilon|b_{N_1}|}{b_{n+1}} < \varepsilon, \quad \forall n \geq N_2.$$

综上可知对于 $\forall\varepsilon > 0$，存在正整数 N_2，使得对任意 $n \geq N_2$，$\left|\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right| < 2\varepsilon$. 这就证明了 $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$. 情形 (i) 得证.

情形 (ii): $L \neq \pm\infty$ 且 $L \neq 0$. 将情形 (ii) 转化为情形 (i). 由于

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} - L = \frac{(a_{n+1} - Lb_{n+1}) - (a_n - Lb_n)}{b_{n+1} - b_n}.$$

令 $\hat{a}_n = a_n - Lb_n$，则

$$\frac{\hat{a}_{n+1} - \hat{a}_n}{b_{n+1} - b_n} \to 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \to L.$$

故由假设 $\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \to L$ 知 $\frac{\hat{a}_{n+1}-\hat{a}_n}{b_{n+1}-b_n} \to 0$. 再由情形 (i) 的结论知

$$\frac{\hat{a}_n}{b_n} \to 0 \quad \text{即} \quad \frac{\hat{a}_n}{b_n} = \frac{a_n - Lb_n}{b_n} = \frac{a_n}{b_n} - L \to 0.$$

这就证明了 $\lim \frac{a_n}{b_n} = L$. 情形 (ii) 得证.

情形 (iii) $L = +\infty$. 已知 $\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \to +\infty$, 要证 $\frac{a_n}{b_n} \to +\infty$. 设法将情形 (iii) 转化到情形 (i). 考虑 $\frac{b_n}{a_n}$. 假设 $\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \to +\infty$ 意味着 $\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n} \to 0$. 为应用结论 (i), 需验证 $\{a_n\} \uparrow +\infty$ 严格. 由假设 $\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \to +\infty$ 可知存在正整数 N, 使得对任意 $n \geq N$

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} > 1 \quad \text{即} \quad a_{n+1} - a_n > b_{n+1} - b_n > 0.$$

这表明 $\{a_n\} \uparrow$ 严格, $\forall n \geq N$. 之前已证 $a_{n+1} - a_n > b_{n+1} - b_n > 0$, $\forall n \geq N$.

因此对 $n \geq N$

$$
\begin{aligned}
a_{N+1} - a_N &> b_{N+1} - b_N, \\
a_{N+2} - a_{N+1} &> b_{N+2} - b_{N+1}, \\
&\vdots \\
a_{n+1} - a_n &> b_{n+1} - b_n.
\end{aligned}
$$

将上述不等式两边分别相加得 $a_{n+1} - a_N > b_{n+1} - b_N \to +\infty$. 这表明 $\{a_n\} \uparrow +\infty$ 严格. 对序列 $\frac{b_n}{a_n}$ 应用结论 (i) 可知 $\frac{b_n}{a_n} \to 0$. 由于 $a_n \to +\infty$, $b_n \to +\infty$, 故当 n 充分大时, $a_n > 0$, $b_n > 0$. 因此 $\frac{a_n}{b_n} \to +\infty$. 情形 (iii) 得证.

情形 (iv): $L = -\infty$. 考虑序列 $\frac{-a_n}{b_n}$, 即可将情形 (iv) 转化到情形 (iii). 至此 Stolz 定理关于 $\frac{*}{\infty}$ 型的结论得证.

证明，续五

再证情形 $(\frac{0}{0})$ 的结论. 仅考虑 L 为有限情形. 情形 $L=\pm\infty$ 的证明类似. 由假设 $\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}\to L$ 可知，对 $\forall\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$，使得 $|\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}-L|<\varepsilon$，即

$$L-\varepsilon<\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\frac{a_n-a_{n+1}}{b_n-b_{n+1}}<L+\varepsilon,\quad \forall n>N.$$

由 $b_n\downarrow$ 严格知

$$(L-\varepsilon)(b_n-b_{n+1})<a_n-a_{n+1}<(L+\varepsilon)(b_n-b_{n+1}).$$

于是对于任意 $m>n>N$，

$$(L-\varepsilon)(b_n-b_{n+1})<a_n-a_{n+1}<(L+\varepsilon)(b_n-b_{n+1})$$

$$(L-\varepsilon)(b_{n+1}-b_{n+2})<a_{n+1}-a_{n+2}<(L+\varepsilon)(b_{n+1}-b_{n+2})$$

$$\vdots$$

$$(L-\varepsilon)(b_{m-1}-b_m)<a_{m-1}-a_m<(L+\varepsilon)(b_{m-1}-b_m)$$

将上述各不等式相加得

$$(L-\varepsilon)(b_n-b_m) < a_n-a_m < (L+\varepsilon)(b_n-b_m).$$

$$\text{即}\quad L-\varepsilon < \frac{a_n-a_m}{b_n-b_m} < L+\varepsilon.$$

于上述不等式令 $m \to +\infty$ 并注意到 $a_m \to 0$ 且 $b_m \to 0$ 即得

$$L-\varepsilon \le \frac{a_n}{b_n} \le L+\varepsilon, \quad \forall n > N.$$

此即 $|\frac{a_n}{b_n}-L| \le \varepsilon$. 这就证明了 $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=L$. Stolz 定理得证.

聚点

Definition

定义: 设 $\mathsf{S} \subset \mathbb{R}$ 为一个非空实数集. 一个点 $\mathsf{a} \in \mathbb{R}$ 称为集 S 的一个聚点 (an accumulation point), 如果点 a 的任意一个 ε 邻域 $(\mathsf{a} - \varepsilon, \mathsf{a} + \varepsilon)$ 均包含集 S 中的无穷多个点. 通常用符号 S' 表示集 S 的所有聚点的集合, 且称 S' 为 S 的导集.

Example

例一: 有限点集合没有聚点.

例二: 若 $\mathsf{S} = \{\frac{1}{n} | n = 1, 2, \cdots\}$, 则 $\mathsf{S}' = \{0\}$.

例三: 若记 $\mathsf{S} = (a, b)$, 则 $\mathsf{S}' = [a, b]$.

例四: 根据有理数的稠密性知, 任何一个实数的任何一个 ε 邻域内, 包含无穷多个有理数. 因此有理数集合的导集就是全体实数, 即 $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$.

<u>定理</u>: 有界无穷的实数子集必有聚点.

<u>证</u>: 设 $E \subset \mathbb{R}$ 为有界无穷集, 则 $E \subset [a_1, b_1]$. 令 $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$, 则 $[a_1, c_1] \cap E$ 和 $[c_1, b_1] \cap E$ 中之一是无穷集. 若 $[a_1, c_1] \cap E$ 是无穷集, 则记 $[a_2, b_2] = [a_1, c_1]$. 否则记 $[a_2, b_2] = [c_1, b_1]$. 假设对于 $n \geq 2$, 取定 $[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}]$, 使得 $b_n - a_n = \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1})$, 且 $[a_n, b_n] \cap E$ 是无穷集, 则类似取 $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$, 使得 $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$, 且 $[a_{n+1}, b_{n+1}] \cap E$ 是无穷集. 于是 $\{[a_n, b_n]\}$ 满足区间套定理中各项条件, 故存在唯一的 $\xi \in \cap_{n\geq 1}[a_n, b_n]$. 由于 $a_n \to \xi$ 且 $b_n \to \xi$, 故对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \geq 1$, 使得 $[a_N, b_N] \subset (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$. 由于 $[a_n, b_n] \cap E$ 是无穷集, 故 $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon) \cap E$ 也是无穷集. 因此 ξ 是集合 E 的一个聚点. 定理得证. $\square$

Bolzano-Weierstrass 定理, 例子

Theorem

定理: 有界序列必存在收敛子列.

Example

例: 考虑 $\{\sin\frac{n\pi}{2}\}_{n\geq 1} = \{1,0,-1,0,1,0,-1,0,\cdots\}$. 显然这个序列有界.

记 $a_n = \sin\frac{n\pi}{2}$. 显然它有如下三个收敛子列:

子列一: $\{a_{4n+1}\} = \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = \{1,1,\cdots\}$.

子列二: $\{a_{2n}\} = \{\sin(n\pi)\} = \{0,0,\cdots\}$.

子列三: $\{a_{4n+3}\} = \{\sin(2n\pi + \pi + \frac{\pi}{2})\} = \{-1,-1,\cdots\}$.

证: 设 $\{a_n\}$ 为一有界序列, 对应的点集记作 E. (所有相同的项在 E 中只出现一次. 例如序列 $\{(-1)^n\}$ 对应的点集为 $\{1,-1\}$.) 显然集合 E 为有界集. 若 E 为有限集, 则必有某数 a 在序列 $\{a_n\}$ 中出现无限多次. 对应的项就构成一个常数子列, 收敛. 命题得证. 若 E 为无限集, 则由聚点原理知 E 存在聚点 ξ. 由定义知, $(\xi-1,\xi+1)\cap E$ 为无穷集, 取 $n_1\geq 1$, 使得 $a_{n_1}\in(\xi-1,\xi+1)$. 类似 $(\xi-\frac{1}{2},\xi+\frac{1}{2})\cap E$ 为无穷集, 可取 $n_2>n_1$, 使得 $a_{n_2}\in(\xi-\frac{1}{2},\xi+\frac{1}{2})$. 以此类推, 可取序列 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{n_k}\}$, 使得 $a_{n_k}\in(\xi-\frac{1}{k},\xi+\frac{1}{k})$, $k\geq 1$. 显然子列 $\{a_{n_k}\}$ 收敛于 ξ. 定理得证. $\square$

序列的极限点

Definition

定义: 点 $x \in \mathbb{R}$ 称为序列 $\{a_n\}$ 的极限点, 如果 $\{a_n\}$ 存在一个收敛子列 $\{a_{n_k}\}$, 使得 $a_{n_k} \to x$.

例: 序列 $\{(-1)^n\}$ 有两个极限点 1 和 -1. 而序列 $\{\frac{1}{n}\}$ 有唯一一个极限点 0.

注: B-W 定理可表述为: 有界序列必有极限点.

Lemma

引理: (i) 若序列 $\{a_n\}$ 无上界, 则存在一个子序列 $\{a_{n_k}\}$, 使得 $a_{n_k} \to +\infty$;

(ii) 若序列 $\{a_n\}$ 无下界, 则存在一个子序列 $\{a_{n_k}\}$, 使得 $a_{n_k} \to -\infty$.

证: 只证 (i). 若序列 $\{a_n\}$ 无上界, 则依定义知, 对 $\forall M > 0$, 存在项 $a_m > M$. 取 $M = 1$, 则存在 $a_{n_1} > 1$. 取 $M = 2$, 则存在 $a_{n_2} > 2$. 可要求指标 $n_2 > n_1$. 因为若不然, 则 $a_n \leq 2$, $\forall n \geq n_1$. 从而原序列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 有上界. 矛盾. 取 $M = k$, 则存在指标 $n_k > n_{k-1}$, 使得 $a_{n_k} > k$. 于是子列 $a_{n_k} \to +\infty$. □

注: 当序列 $\{a_n\}$ 无上界时, 称 $\{a_n\}$ 有极限点 $+\infty$, 当序列 $\{a_n\}$ 无下界时, 称 $\{a_n\}$ 有极限点 $-\infty$.

习题一：课本第7-8页习题1.2，1(1)(3)(5)：

判断下列各命题中，哪些与命题 $\lim_{n\to+\infty} a_n = A$ 等价. 如果等价，请证明；如果不等价，请举反例.

(1) 对无穷多个正数 ε，存在正整数 N，使得对任意 $n \geq N$，成立 $|a_n - A| < \varepsilon$；

(3) 对任意 $\varepsilon \in (0, 1)$，存在正整数 N，使得对任意 $n \geq N$，成立 $|a_n - A| < \varepsilon$；

(5) 对任意 $\varepsilon > 0$，存在正整数 N，使得对任意 $n \geq N$，成立 $|a_n - A| < \varepsilon^{\frac{2}{3}}$.

习题二：课本第7-8页习题1.2，题2(有修改)：

(i) 用 ε, N 语言表述命题 (*)：序列 $\{a_n\}$ 不收敛于 A.

(ii) 判断如下两个命题是否与命题 (*) 等价：

(1) 存在 $\varepsilon_0 > 0$，且存在正整数 N，使得当 $n > N$ 时，成立 $|a_n - A| \geq \varepsilon_0$；

(2) 对 $\forall \varepsilon > 0$，存在正整数 N，使得当 $n \geq N$ 时，成立 $|a_n - A| \geq \varepsilon$.

作业，续一

习题三：课本第7-8页习题1.2，题3：利用极限定义证明以下极限

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n^3-1}{n^3-n+1}=2$;

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\cos n}{n}=0$;

(5) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{1+\sqrt{n}}=0$;

(7) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{a^n}=0$，其中 $a>1$.

习题四：课本第7-8页习题1.2，题4：

设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=A$，证明对任意正整数 k，$\lim\limits_{n\to+\infty}a_{n+k}=A$.

习题五：课本第7-8页习题1.2，题5：

若序列 $\{a_n\}$ 的两个子列 $\{a_{2k}\}$ 和 $\{a_{2k-1}\}$ 均收敛，且收敛于同一个极限 A，证明序列 $\{a_n\}$ 有极限，且极限为 A.

习题六：课本第7-8页习题1.2，题7（有修改）：

(1) 如果 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A$，证明 $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = |A|$. 问反之是否成立？即如果 $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = |A|$，那么是否必有 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A$?

(2) 如果 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A$，证明 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = A$.

习题七：课本第13页习题1.3，题1

判断如下命题是否正确. 若正确，说明理由；若不正确，请举反例.

(1) 给定两个数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$，若数列 $\{2x_n - y_n\}$ 和 $\{3x_n + 4y_n\}$ 均收敛，则两个数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 均收敛；

(2) 若数列 $\{x_n\}$ 收敛，且数列 $\{y_n\}$ 发散，则数列 $\{x_n + y_n\}$ 和 $\{x_ny_n\}$ 均发散；

(3) 若两个数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 均发散，则数列 $\{x_n + y_n\}$ 和 $\{x_ny_n\}$ 均发散；

(4) 若两个数列 $\{x_n\}$ 和 $\{x_ny_n\}$ 均收敛，则数列 $\{y_n\}$ 收敛；

(5) 若 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$，则对任何数列 $\{y_n\}$，均有 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_ny_n = 0$；

(6) 若 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_ny_n = 0$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ 或 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$.

习题八：课本第13页习题1.3，题4：求下列极限

$$(1)\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{2n^3-2n^2-n-1}{3n^3+n^2+2};\qquad (2)\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{2^n+(-1)^n}{2^{n-2}+(-1)^{n-1}};$$

$$(3)\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}\cos n}{n+2};\qquad (4)\quad \lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2-n+1}-\sqrt{n^2+n-2}\right).$$

习题九：课本第13页习题1.3，题5：设 $a>1$，k 为正整数，证明

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^k}{a^n}=0.$ (注：利用习题三题(7)的结论，以及极限的四则运算定理)

习题十：课本第14页习题1.3，题8 (有修改)：证明对任意正整数 $n\geq 2$，

$$\frac{1}{2n}<\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}},$$

并且利用上述不等式求极限

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}}.$$

作业，续四

习题十一：课本第14页习题1.3，题9：设 $a_n > 0, \forall n \geq 1$，且 $a_n \to A$. 证明 $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \to A$，并由这个结论求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}}$. (注：可分两种情况讨论：$A = 0$ 和 $A > 0$)

习题十二：课本第14页习题1.3，题10：设 $a_n > 0$ 且 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to a$.

(1) 证明 $\sqrt[n]{a_n} \to a$;

(2) 若 $a < 1$，证明 $a_n \to 0$;

(3) 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.