

《微积分A1》第二十二讲

教师 杨利军

清华大学数学科学系

2025年12月03日

无理函数的不定积分杂例, 例一

例一: 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}$.

解: 为去根号, 作变换 $x = t^6$, 则 $dx = 6t^5 dt$. 于是

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} &= \int \frac{6t^5 dt}{t^3(1+t^2)} = \int \frac{6t^2 dt}{1+t^2} \\&= 6 \int \frac{(1+t^2)dt}{1+t^2} - 6 \int \frac{dt}{1+t^2} = 6t - 6 \arctan t + C \\&= 6\sqrt[6]{x} - 6 \arctan \sqrt[6]{x} + C.\end{aligned}$$

解答完毕.

例二

例二: 计算不定积分 $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}, a < x < b.$

常规解法: 被积函数的分母可写作 $(x-a)\sqrt{\frac{b-x}{x-a}}$. 按常规解法, 作变换

$t^2 = \frac{b-x}{x-a}$ 得 $t^2(x-a) = b-x$ 或 $x = \frac{b+at^2}{1+t^2} = a + \frac{b-a}{1+t^2}$. 故 $dx = \frac{-2t(b-a)dt}{(1+t^2)^2}$.

于是

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} &= \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{\frac{b-x}{x-a}}} \\&= \int \frac{1}{\frac{b-a}{1+t^2} \cdot t} \frac{-2t(b-a)dt}{(1+t^2)^2} = -2 \int \frac{dt}{1+t^2} \\&= -2 \arctan t + C = -2 \arctan \sqrt{\frac{b-x}{x-a}} + C.\end{aligned}$$

解答完毕.

非常规解法

非常规解法: 令 $x = a\cos^2 t + b\sin^2 t$, $t \in (0, \frac{\pi}{2})$, 则 $x - a = (b - a)\sin^2 t$,
 $b - x = (b - a)\cos^2 t$, $dx = 2(b - a) \sin t \cos t dt$.

$$\begin{aligned}\text{于是 } \int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} &= \int \frac{2(b-a) \sin t \cos t dt}{(b-a) \sin t \cos t} \\ &= 2t + C = 2\arctan \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} + C. \quad \left(\frac{x-a}{b-x} = \tan^2 t \right)\end{aligned}$$

注: 根据上述不定积分, 可求得如下广义积分的值:

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = 2\arctan \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} \Big|_a^{b^-} = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$

注意积分值与积分上下限 a, b 无关.

定积分变量代换定理

Theorem

定理 [定积分变量代换]: 设 $\phi(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续可微, $f(x)$ 在 $J = [m, M]$ 上连续, 其中 M, m 分别是函数 $\phi(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上的最大值和最小值, 则

$$\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t)) \phi'(t) dt. \quad (*)$$

注一: 定理中的变换 $x = \phi(t)$ 不必可逆, 且等式 (*) 中允许 $\phi(\beta) \leq \phi(\alpha)$.

注二: 由公式 (*) 可知, 定积分通过的变量代换 $x = \phi(t)$ 计算得到的结果, 无需再由新变量 t 返回到原来的变量 x . 这一点与不定积分不同.

定理证明

Proof.

证明: 由于 $f(x)$ 连续, 故 $f(x)$ 存在原函数. 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 即 $F'(x) = f(x)$, 则 $F(\phi(t))$ 是 $f(\phi(t))\phi'(t)$ 的原函数, 因为

$$[F(\phi(t))]' = F'(\phi(t))\phi'(t) = f(\phi(t))\phi'(t).$$

于是

$$\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x)dx = F(\phi(\beta)) - F(\phi(\alpha)) = \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t))\phi'(t)dt.$$

命题得证. □

例一

Example

例一: 设 $a > 0$, 计算 $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$.

解: 作变换 $x = \phi(t) = a \sin t$, $0 \leq t \leq \pi/2$, $\phi(0) = 0$, $\phi(\pi/2) = a$. 于是根据定积分变量代换定理得

$$\begin{aligned}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} (a \sin t)' dt \\&= a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt \\&= \frac{a^2}{2} \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^2}{4}. \quad \# \end{aligned}$$

例二

例二: 设 $f(x)$ 为在 \mathbb{R} 上连续的周期函数, 周期为 $T > 0$. 证明 $f(x)$ 在任意长度为 T 的闭区间上的积分相等, 即对任意 $a \in \mathbb{R}$

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx.$$

证: 由积分区间可加性得

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_a^T f(x) dx + \int_T^{a+T} f(x) dx.$$

$$\text{而 } \int_T^{a+T} f(x) dx = \int_0^a f(T+t)(T+t)' dt = \int_0^a f(t) dt.$$

$$\text{于是 } \int_a^{a+T} f(x) dx = \int_a^T f(x) dx + \int_0^a f(t) dt = \int_0^T f(x) dx. \quad \square$$

另证: 若记 $g(a) = \int_a^{a+T} f(x) dx$, 则根据微积分基本定理的第二形式, 以及 $f(x)$ 的周期性质可知 $g'(a) \equiv 0$. 因此 $g(a) = g(0), \forall a \in \mathbb{R}$. 此即结论成立.

例三

例三: 计算 $J = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$.

解: 作代换 $x = \tan t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$, 则

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(1 + \tan t)}{1 + \tan^2 t} \frac{dt}{\cos^2 t} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \left(\frac{\cos t + \sin t}{\cos t} \right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \left(\frac{\sqrt{2} \cos(t - \frac{\pi}{4})}{\cos t} \right) dt \\ &= (\ln \sqrt{2}) \frac{\pi}{4} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos(t - \frac{\pi}{4}) dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos t dt \\ &= \frac{\pi}{8} \ln 2 + \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \ln \cos s ds - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos t dt \end{aligned}$$

例三, 续

$$= \frac{\pi}{8} \ln 2 + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos t dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos t dt = \frac{\pi}{8} \ln 2.$$

$$\text{即 } \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{8} \ln 2. \quad (*)$$

解答完毕.

注: 能计算出积分(*)的值实属偶然, 其计算方法很难推广. 以后我们还将计算如下类似的特殊积分:

1. Euler 积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2$;
2. $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \pi$;
3. Euler - Poisson 积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$;
4. Dirichlet 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x} = \frac{\pi}{2}$.

定积分的分部积分定理

Theorem

定理: 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 即 $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a, b]$. 再设 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续可微, 则

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = [F(x)g(x)] \Big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx.$$

定理证明

Proof.

证明: 由于 $[Fg]' = F'g + Fg'$, 故两边积分得

$$\int_a^b [Fg]' = \int_a^b F'g + \int_a^b Fg'.$$

因此
$$\int_a^b fg = \int_a^b F'g = \int_a^b [Fg]' - \int_a^b Fg' = Fg \Big|_a^b - \int_a^b Fg'.$$



例一

Example

例一:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} x \cos x dx &= \int_0^{\pi} x [\sin x]' dx = \int_0^{\pi} x d \sin x \\ &= x \sin x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x dx = \cos x \Big|_0^{\pi} = -2.\end{aligned}$$

例二

Example

例二: 计算积分

$$\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx.$$

解: 令 $x = t^2$, 则 $dx = 2t dt$,

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx &= \int_0^1 2te^t dt = \int_0^1 2tde^t \\ &= 2te^t \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 e^t dt = 2e - 2e^t \Big|_0^1 = 2. \quad \# \end{aligned}$$

例三

例三: 证明对任意正整数 n

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \begin{cases} \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \frac{\pi}{2}, & n = 2m, \\ \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}, & n = 2m + 1. \end{cases}$$

证: 对积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$, 作变量代换 $x = \frac{\pi}{2} - t$, 则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^n \left(\frac{\pi}{2} - t \right) \left(\frac{\pi}{2} - t \right)' dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx.$$

以下来计算积分 $J_n \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$:

$$\begin{aligned} J_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x d \sin x \\ &= \cos^{n-1} x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x [\cos^{n-1} x]' dx \end{aligned}$$

例三, 续一

$$= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^{n-2} x dx = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x) \cos^{n-2} x dx$$

$$= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = (n-1) J_{n-2} - (n-1) J_n.$$

因此

$$J_n = \frac{n-1}{n} J_{n-2}.$$

由于

$$J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^0 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}, \quad J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 1,$$

故

$$J_{2m} = \frac{2m-1}{2m} J_{2m-2} = \frac{(2m-1)(2m-3)}{(2m)(2m-2)} J_{2m-4} = \dots$$

例三, 续二

$$= \frac{(2m-1)(2m-3)\cdots 1}{(2m)(2m-2)\cdots 2} J_0 = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \frac{\pi}{2},$$

$$J_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} J_{2m-1} = \frac{(2m)(2m-2)}{(2m+1)(2m-1)} J_{2m-3} = \cdots$$

$$= \frac{(2m)(2m-2)\cdots 2}{(2m+1)(2m-1)\cdots 3} J_1 = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}.$$

证毕.

Wallis 公式 (华莱士公式)

Theorem

定理: 下述极限成立

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \frac{1}{2n+1},$$

或

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdots 2n \cdot 2n}{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdots (2n-1) \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)}.$$

注: 上述极限式称为 Wallis (1616-1703, 英国数学家) 公式, 中译华莱士公式. 公式的意义在于, 它是第一次将超越数 π 表示成容易计算的有理数的极限.

公式证明

证明: 对于 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 成立

$$\sin^{2n+1}x < \sin^{2n}x < \sin^{2n-1}x.$$

$$\text{故 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1}x dx.$$

根据上述关于 $J_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx$ 的计算公式得

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}.$$

于上式同除以 $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ 得

$$\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \frac{1}{2n}.$$

证明, 续

上式左右两端之差为

$$\begin{aligned} 0 &< \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \frac{1}{2n} - \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \frac{1}{2n+1} \\ &= \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} \right) = \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \frac{1}{(2n)(2n+1)} \\ &= \left(\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \frac{1}{(2n+1)} \right) \frac{1}{2n} < \frac{\pi}{2} \frac{1}{2n} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

因此

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \frac{1}{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \frac{1}{2n+1}.$$

公式得证.

Wallis 公式的其他形式

Wallis 公式

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \frac{1}{2n+1}$$

还有如下形式

$$(i) \quad \frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \frac{1}{2n}$$

$$(ii) \quad \sqrt{\pi} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!\sqrt{n}}$$

$$(iii) \quad \sqrt{\pi} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{[(2n)!!]^2}{(2n)!\sqrt{n}}$$

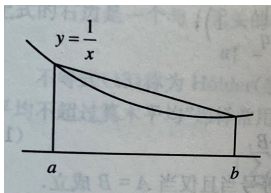
注: 往下我们将建立 **Stirling** 公式. Wallis 公式形式 (iii) 在这过程中将起到重要作用.

一个引理

引理: 设 $0 < a < b$, 则

$$\frac{2}{a+b} < \frac{\ln b - \ln a}{b-a} < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right). \quad (*)$$

证明: 考虑函数 $\frac{1}{x}$. 由于 $[\frac{1}{x}]' = -\frac{1}{x^2}$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格单调上升, 故函数 $\frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格下凸. 因此在函数曲线 $y = \frac{1}{x}$ 上, 连接点 $(a, \frac{1}{a})$ 和点 $(b, \frac{1}{b})$ 的弦, 在曲线段 $y = \frac{1}{x}$ ($a < x < b$) 的上方. 如图所示.

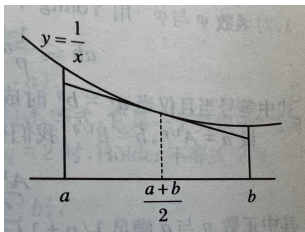


证明, 续一

比较如图梯形和曲边梯形面积可知

$$\int_a^b \frac{dx}{x} < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) (b - a), \text{ 即 } \ln b - \ln a < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) (b - a).$$

这就证明了式(*)的右边不等式成立. 另一方面在曲线段 $y = \frac{1}{x}$ ($a \leq x \leq b$) 的中点 $(\frac{a+b}{2}, \frac{2}{a+b})$ 处作切线, 如图所示.



证明, 续二

根据下凸曲线的切线性质知, 曲线段 $y = \frac{1}{x}$ ($a < x < b$) 严格位于切线的上方. 再次比较如图的梯形和曲边梯形面积可知

$$\int_a^b \frac{dx}{x} > \frac{2}{a+b}(b-a), \text{ 即 } \ln b - \ln a > \frac{2}{a+b}(b-a).$$

这就证明了式(*)的左边不等式成立. 命题得证.

Corollary

对于任意正整数 n , 成立

$$\frac{1}{n + \frac{1}{2}} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right). \quad (*)$$

证明: 在上述引理中的不等式

$$\frac{2}{a+b} < \frac{\ln b - \ln a}{b-a} < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

中, 取 $a = n$, $b = n+1$, 即得

$$\frac{2}{2n+1} < \frac{\ln(n+1) - \ln n}{n+1-n} < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right).$$

此即所要证明的不等式 (*). 证毕.

Stirling 公式

Theorem

定理: 对于任意正整数 n , 阶乘 $n!$ 有如下表达式

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{4n}}, \quad \theta_n \in (0, 1). \quad (*)$$

例: 利用 Stirling 公式求极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

解: 根据公式 (*) 得

$$\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{n} \cdot \left(\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{4n}} \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{e} \cdot (2\pi n)^{\frac{1}{2n}} \cdot e^{\frac{\theta_n}{4n^2}} \rightarrow \frac{1}{e}.$$

故所求极限为 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$. 解答完毕.

Stirling 公式证明 (可忽略)

证: 显然我们有如下等价关系

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{4n}} \iff \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} = \sqrt{2\pi} e^{\frac{\theta_n}{4n}}.$$

往下我们考虑数列 $a_n = \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$. 由于

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n+1}} &= \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} \bigg/ \frac{(n+1)!e^{n+1}}{(n+1)^{n+1+\frac{1}{2}}} = \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{(n+1)^{n+1+\frac{1}{2}}}{(n+1)!e^{n+1}} \\ &= \frac{1}{e} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

取对数得

$$\ln \frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1.$$

由推论的结论

$$\frac{1}{n + \frac{1}{2}} < \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)$$

Stirling 公式证明, 续一

$$\text{得 } 1 < \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) \left(n + \frac{1}{2}\right).$$

$$\text{于是 } 0 < \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) \left(n + \frac{1}{2}\right) - 1.$$

易证

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) \left(n + \frac{1}{2}\right) - 1 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$\text{故 } 0 < \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 < \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

$$\text{即 } 0 < \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

取指数得

$$1 < \frac{a_n}{a_{n+1}} < e^{\frac{1}{4}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})} = \frac{e^{\frac{1}{4n}}}{e^{\frac{1}{4(n+1)}}}.$$

Stirling 公式证明, 续二

由上式左边不等式知 $\{a_n\}$ 严格单调下降且有下界(因为 $a_n > 0$), 从而 $\{a_n\}$ 收敛. 设 $a_n \rightarrow a$, 则 $a \geq 0$. 记 $b_n = a_n e^{\frac{-1}{4n}}$, 则 $b_n \rightarrow a$. 由于

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{e^{\frac{1}{4n}}}{e^{\frac{1}{4(n+1)}}}, \quad \text{故} \quad \frac{a_n e^{\frac{-1}{4n}}}{a_{n+1} e^{\frac{-1}{4(n+1)}}} < 1.$$

此即 $\frac{b_n}{b_{n+1}} < 1$. 这表明 $\{b_n\}$ 严格单调上升收敛于 a . 故 $a > 0$. 再考虑

$$\begin{aligned} \frac{a_n^2}{a_{2n}} &= \left(\frac{n! e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} \right)^2 \bigg/ \frac{(2n)! e^{2n}}{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{(n!)^2 e^{2n}}{n^{2n+1}} \cdot \frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}}{(2n)! e^{2n}} = \frac{(n!)^2 2^{2n} \sqrt{2}}{(2n)! \sqrt{n}} = \frac{[(2n)!!]^2 \sqrt{2}}{(2n)! \sqrt{n}}. \end{aligned}$$

回忆 Wallis 公式形式 (iii): $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{[(2n)!!]^2}{(2n)! \sqrt{n}} = \sqrt{\pi}$ 得

$$a = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n^2}{a_{2n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{[(2n)!!]^2 \sqrt{2}}{(2n)! \sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}.$$

Stirling 公式证明, 续三

至此我们证明了 $a_n \downarrow a$ 严格, $b_n \uparrow a$ 严格. 因此 $b_n = a_n e^{\frac{-1}{4n}} < a < a_n$. 故 $e^{\frac{-1}{4n}} < \frac{a}{a_n} < 1$, 或等价地 $e^{\frac{1}{4n}} > \frac{a_n}{a} > 1$. 将 $a = \sqrt{2\pi}$, $a_n = \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$ 代入即得

$$1 < \frac{a_n}{a} = \frac{n!e^n}{\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} < e^{\frac{1}{4n}}.$$

取对数得

$$0 < \ln \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} < \frac{1}{4n}, \quad \text{即} \quad 0 < 4n \cdot \ln \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} < 1.$$

记 $\theta_n = 4n \cdot \ln \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}$, 则 $0 < \theta_n < 1$. 于是

$$\frac{\theta_n}{4n} = \ln \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} \Rightarrow e^{\frac{\theta_n}{4n}} = \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} \Rightarrow n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{4n}},$$

其中 $\theta_n \in (0, 1)$. Stirling 公式得证. □

带积分余项的 Taylor 展开

Theorem

定理: 设 $f(x)$ 在 (a, b) 上 $n+1$ 次连续可微, $x_0 \in (a, b)$, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 上可表为

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x),$$

$$\text{其中 } R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x - u)^n f^{(n+1)}(u) du.$$

注: 定理中的余项 $R_n(x)$ 常称作 Cauchy 积分余项.

由积分余项可推出 Lagrange 余项

由上述 Taylor 展开定理中的积分余项

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-u)^n f^{(n+1)}(u) du, \quad (*)$$

可立刻推出 Taylor 展开定理 Lagrange 余项. 我们首先注意这两个定理的假设相同, 即都是假设 $f(x)$ 在 (a, b) 上 $n+1$ 次连续可微. 由于式 $(*)$ 定义的积分余项 $R_n(x)$ 的被积函数中, $(x-u)^n$ 作为 u 的函数不变号, 故根据积分中值定理得

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-u)^n f^{(n+1)}(u) du \\ &= \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi) \int_{x_0}^x (x-u)^n du = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}, \end{aligned}$$

其中 ξ 为介于 x_0 和 x 之间的某个点. 这正是 Taylor 展开定理中的 Lagrange 余项.

定理证明

证: 我们要证

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x), \quad (*)$$

$$\text{其中 } R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x - u)^n f^{(n+1)}(u) du.$$

当 $n = 0$ 时, 等式 $(*)$ 成立. 因为此时等式 $(*)$ 为

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(u) du,$$

即 Newton-Leibniz 公式. 假设结论对 $n = m - 1$ 成立. 此时等式 $(*)$ 即为

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_{m-1}(x), \quad (**)$$

$$\text{其中 } R_{m-1}(x) = \frac{1}{(m-1)!} \int_{x_0}^x (x - u)^{m-1} f^{(m)}(u) du.$$

考虑当 $n = m$ 时的结论. 此时等式 $(**)$ 当然也成立.

证明, 续

注意此时的假设是 $f(x)$ 在 (a, b) 上 $m+1$ 次连续可微, 故可对余项 $R_{m-1}(x)$ 作分部积分得

$$\begin{aligned} R_{m-1}(x) &= \frac{1}{(m-1)!} \int_{x_0}^x (x-u)^{m-1} f^{(m)}(u) du \\ &= \frac{1}{(m-1)!} \int_{x_0}^x f^{(m)}(u) \left[-\frac{(x-u)^m}{m} \right]_u' du \\ &= -\frac{1}{m!} \left(f^{(m)}(u)(x-u)^m \Big|_{u=x_0}^{u=x} - \int_{x_0}^x (x-u)^m f^{(m+1)}(u) du \right) \\ &= \frac{1}{m!} f^{(m)}(x_0)(x-x_0)^m + \frac{1}{m!} \int_{x_0}^x (x-u)^m f^{(m+1)}(u) du. \end{aligned}$$

将上述余项 $R_{m-1}(x)$ 代入等式(**)即可知结论对 $n=m$ 时成立. 定理得证.

积分应用：求平面图形的面积

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $g(x) \leq f(x), \forall x \in [a, b]$. 由积分几何意义知, 由曲线 $y = f(x)$, $y = g(x)$, 以及直线 $x = a$, $x = b$ 所围图形 S 的面积可定义为 $A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$. 如图所示.

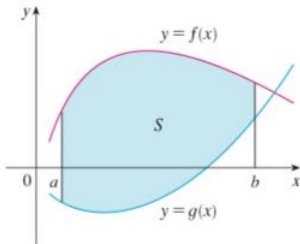


FIGURE 1

$$S = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

求平面图形的面积, 续

所求图形 S 的面积 A 也可看作

曲线 $y = f(x)$ 下的面积, 减去曲线 $y = g(x)$ 下的面积

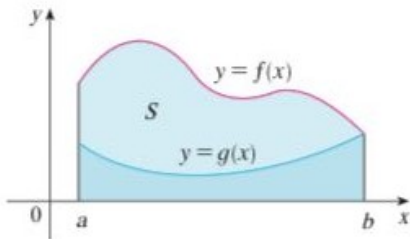
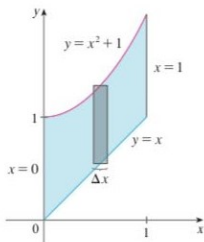


FIGURE 3

$$A = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

例一

例一: 求由曲线 $y = x^2 + 1$ 和直线 $y = x$ 在区间 $[0, 1]$ 上所围图形的面积. 如图所示.

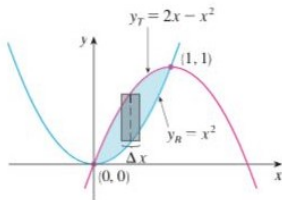


解: 根据面积公式知所求面积为

$$A = \int_0^1 (x^2 + 1 - x) dx = \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{2} = \frac{5}{6}. \quad \#$$

例二

例二: 求由抛物线 $y = x^2$ 和 $y = 2x - x^2$ 所围有界图形的面积. 如图所示.



解: 先求两个抛物线的交点. 令 $2x - x^2 = x^2$, 即 $2x(x - 1) = 0$. 由此可见它们的交点为 $(0, 0)$ 和 $(1, 1)$. 因此所求面积为

$$A = \int_0^1 (2x - x^2 - x^2) dx = \int_0^1 (2x - 2x^2) dx = \frac{2}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}. \quad \#$$

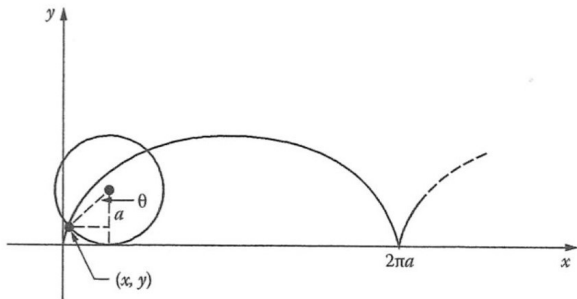
参数方程下平面图形的面积

假设函数 $y = f(x) \geq 0$ 是由参数方程 $x = x(t)$, $y = y(t)$ 确定, $\alpha \leq t \leq \beta$, 其中 $x(t)$ 连续可微且可逆, 且 $y(t) = f(x(t))$ 或 $f(x) = y(t(x))$, $t = t(x)$ 是 $x = x(t)$ 的反函数. 不妨设 $x(t)$ 严格单调增, 并记 $a = x(\alpha)$, $b = x(\beta)$, 则曲线 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 下的面积为

$$A = \int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t))x'(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt.$$

例子：旋轮线一拱的面积

例：求旋轮线 $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$, $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ 一拱与 x 轴所围图形的面积, 如图所示.



例子, 续

解: 由参数方程所确定的平面图形的面积公式得所求面积为

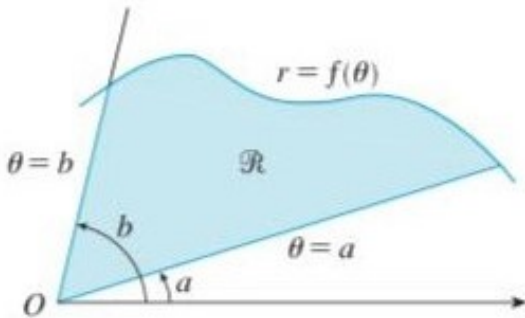
$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi a} f(x)dx = \int_0^{2\pi} y(\theta)x'(\theta)d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} a(1 - \cos\theta)a(1 - \cos\theta)d\theta \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos\theta)^2 d\theta = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta) d\theta \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)\right) d\theta = a^2 \cdot \frac{3}{2} \cdot 2\pi = 3\pi a^2. \end{aligned}$$

注一: 回忆参数 $a > 0$ 代表生成旋轮线轮子的半径. 故上述结果表明, 旋轮线一拱与 x 轴所围面积为轮子面积的三倍.

注二: 设旋轮线在直角坐标下为函数曲线 $y = f(x)$, 则 $f(x) = y(\theta(x))$, 其中 $\theta(x)$ 为 $x = a(\theta - \sin\theta)$ 的反函数.

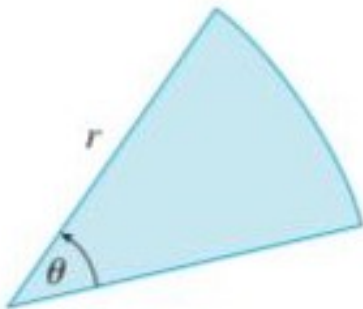
极坐标下平面图形的面积

设曲线由极坐标方程 $r = f(\theta)$, $a \leq \theta \leq b$ 给出. 考虑由曲线 $r = f(\theta)$, 以及两条射线 $\theta = a$ 和 $\theta = b$ 所围图形 \mathcal{R} 的面积. 如图所示.



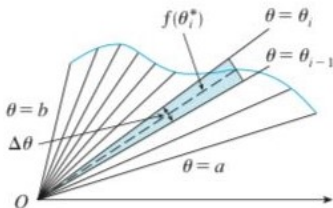
极坐标下平面图形的面积, 续一

一个简单情形, 即扇形面积为 $A = \frac{1}{2}r^2\theta$, 如图所示.



极坐标下平面图形的面积, 续二

考虑平面图形 \mathcal{R} 的面积. 假设 $0 < b - a \leq 2\pi$. 将区间 $[a, b]$ 的分割成 n 个等分, $\theta_0 = a < \theta_1 < \cdots < \theta_n = b$, 每个子区间的宽度为 $\theta_i - \theta_{i-1} = \Delta\theta = \frac{b-a}{n}$, $n+1$ 条射线 $\theta = \theta_i$ 将图形 \mathcal{R} 分割成 n 个部分, 每个部分近似于一个小扇形, 如图所示. 取点 $\theta_i^* \in [\theta_{i-1}, \theta_i]$, 则第 i 部分的面积近似于扇形面积 $\frac{1}{2}f^2(\theta_i^*)\Delta\theta$.



极坐标下平面图形的面积, 续三

于是整个图形 \mathcal{R} 由近似面积

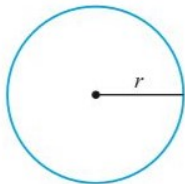
$$A \simeq \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} f^2(\theta_i^*) \Delta\theta.$$

上式右边为函数 $\frac{1}{2}f^2(\theta)$ 在区间 $[a, b]$ 上的 Riemann 和. 因此我们有理由定义图形 \mathcal{R} 的面积为

$$A = \int_a^b \frac{1}{2} f^2(\theta) d\theta.$$

例一: 圆的面积

例一: 求半径为 r 的圆盘的面积.

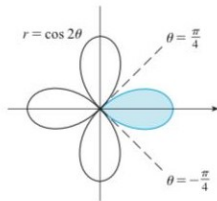


解: 半径 r 的圆盘可以看作圆周 $r(\theta) = r$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, 所围的图形. 由极坐标下平面面积公式得

$$A = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r(\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 d\theta = \frac{1}{2} r^2 \cdot 2\pi = \pi r^2. \quad \#$$

例二

例二: 求四叶玫瑰曲线 $r = \cos 2\theta$ 的一支所围图形的面积. 如图所示.

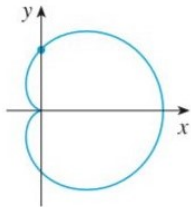


解: 根据极坐标下平面面积公式得所求面积为

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} r^2 d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} \cos^2 2\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2\theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 4\theta) d\theta = \frac{1}{2} \left[\theta + \frac{1}{4} \sin 4\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8}. \quad \# \end{aligned}$$

例三

例三: 求心脏线 $r = a(1 + \cos\theta)$ 所围图形的面积. 如图所示.



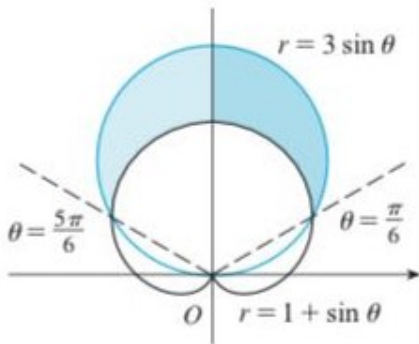
解: 根据极坐标下的面积公式知所求面积为

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [a(1 + \cos\theta)]^2 d\theta \\ &= \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta) d\theta = \frac{3}{2} \pi a^2. \quad \# \end{aligned}$$

例四

例四: 求圆周 $r = 3\sin\theta$ 的内部与心形线 $r = 1 + \sin\theta$ 外部交集图形的面积.

如图所示.



例四, 续

解: 先求圆周 $r = 3\sin\theta$ 和心形线 $r = 1 + \sin\theta$ 的交点, 以确定图形极角的范围. 令 $3\sin\theta = 1 + \sin\theta$, 即 $\sin\theta = \frac{1}{2}$. 解之得 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 和 $\theta = \frac{5\pi}{6}$. 于是所求面积可以表示为

$$A = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (3\sin\theta)^2 d\theta - \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (1 + \sin\theta)^2 d\theta$$

由于图形关于 y 轴对称, 故

$$\begin{aligned} A &= 2 \left[\frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 9\sin^2\theta d\theta - \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2\sin\theta + \sin^2\theta) d\theta \right] \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (8\sin^2\theta - 1 - 2\sin\theta) d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} [4(1 - \cos 2\theta) - 1 - 2\sin\theta] d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} [3 - 4\cos 2\theta - 2\sin\theta] d\theta = \left[3\theta - 2\sin 2\theta + 2\cos\theta \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi. \quad \# \end{aligned}$$

习题一. 利用 Stirling 公式求极限

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{n!}{n^n \sqrt{n}}.$$

习题二: 课本第170页习题5.6题1: 求下列定积分(1)(2)(3)(4):

$$(1) \int_0^{2\pi} |\sin x| dx, \quad (2) \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \sin 2x} dx,$$

$$(3) \int_0^2 |(x-1)(x-2)| dx, \quad (4) \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x + x^3}.$$

习题三: 课本第171页习题5.6题2: 求下列定积分(1)(2)(3)(4):

$$(1) \int_0^{\pi} (1 - 2x) \sin x dx, \quad (2) \int_0^1 x^2 e^{-2x} dx,$$

$$(3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^2 x dx, \quad (4) \int_1^{\sqrt{3}} x \arctan x dx.$$

习题四: 课本第171页习题5.6题3: 求下列定积分(2)(5)(6)(9):

$$(2) \int_0^{\pi} \sin^5 x dx, \quad (5) \int_0^{\pi} \sin^2 x \cos^4 x dx,$$

$$(6) \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 2x dx, \quad (9) \int_0^{2a} x \sqrt{a^2 - (x - a)^2} dx, \quad a > 0.$$

习题五: 课本第171页习题5.6题4: 设 $f(x)$ 为实轴 \mathbb{R} 上的连续函数. 证明

(1) 若 $f(x)$ 为奇函数, 则 $\int_0^x f(t)dt$ 为偶函数;

(2) 若 $f(x)$ 为偶函数, 则 $\int_0^x f(t)dt$ 为奇函数;

(3) 奇函数所有的原函数均为偶函数; 偶函数的原函数中只有一个是奇函数.

习题六: 课本第171页习题5.6题5: 设 $f(x)$ 是 $[-1, 1]$ 上的连续函数. 证明

$$\int_0^{\pi} t f(\sin t) dt = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin t) dt.$$

习题七: 课本第171页习题5.6题7: 设 $f(x)$ 在实轴 \mathbb{R} 上连续. 证明

$$\int_0^x (x-t)f(t)dt = \int_0^x \left(\int_0^t f(s)ds \right) dt.$$

作业, 续三

习题八: 课本第171页习题5.6题8:

计算积分 $\int_0^1 xf(x)dx$, 其中 $f(x) = \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt$.

习题九: 课本第172页习题5.6题9(有修改): 设

$$J_n(x) = \int_0^x \frac{t^n dt}{\sqrt{t^2 + a^2}}, \quad a > 0.$$

(1) 证明递推关系式 $nJ_n(x) = x^{n-1}\sqrt{x^2 + a^2} - a^2(n-1)J_{n-2}(x)$, $\forall n \geq 2$;

(2) 当 $a = 1$ 时, 求 $J_k(1)$, $k = 0, 1, 2, 3$.

习题十: 课本第172页习题5.6题10(有修改): 设 $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$. 证明

(1) $J_{n+1} < J_n$, $\forall n \geq 1$;

(2) $J_n + J_{n-2} = \frac{1}{n-1}$, $\forall n \geq 2$;

(3) 对 $\forall n \geq 2$, $\frac{1}{n+1} < 2J_n < \frac{1}{n-1}$.