《微积分A1》第十九讲

教师 杨利军

清华大学数学科学系

2025年11月24日

例子

例: 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, $g(x)$ 在 $[m,M]$ 上连续且下凸, 这里 M 和 m 分别是 $f(x)$ 的一个上界和一个下界, 即 $m \le f(x) \le M$, $\forall x \in [0,1]$. 证明

$$g\left(\int_0^1 f(x)dx\right) \le \int_0^1 g(f(x))dx.$$

证: 由于 f,g 均连续, 故复合函数 $g(f(x))$ 也连续, 从而在 $[0,1]$ 上可积. 记 $x_i = \frac{i}{n}$, $i = 1,2,\cdots,n$, 由 f 的可积性知

$$\sum_{i=1}^n f(x_i)\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(x_i) \to \int_0^1 f(x)dx.$$

再由 g 的连续性和下凸性可得

$$g\left(\int_0^1 f(x)dx\right) = g\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(x_i)\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} g\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(x_i)\right) \le \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n g(f(x_i)) = \int_0^1 g(f(x))dx.$$

命题得证.

定理: 有界闭区间上的单调函数可积.

证: 设 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的单调函数. 不妨设 f 为单调增加. 对 $[a,b]$ 作分割 $P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 我们有

$$M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{f(x)\} = f(x_i), \quad m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{f(x)\} = f(x_{i-1})$$

$$\text{于是}\quad 0 \le U_P - L_P = \sum_{i=1}^n M_i \triangle x_i - \sum_{i=1}^n m_i \triangle x_i$$

$$= \sum_{i=1}^n f(x_i)\triangle x_i - \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\triangle x_i = \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})]\triangle x_i$$

$$\le \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})]\|P\| = [f(b) - f(a)]\|P\|.$$

若 $f(b) = f(a)$, 则 f 为常数函数, 可积. 设 $f(b) > f(a)$, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$, 使得当分割 P 满足 $\|P\| < \delta$ 时, $U_P - L_P < \varepsilon$. 由可积性定理知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积. 定理得证. □

Definition

定义: 设 $S \subset \mathbb{R}$ 为一实数集. 若对任意 $\varepsilon > 0$, 存在一列开区间 $J_k = (\alpha_k, \beta_k)$ (有限个或可数无穷个), 使得

$$S \subset \bigcup_{k \geq 1} J_k \quad \text{且} \quad \sum_{k \geq 1} |J_k| < \varepsilon,$$

则称数集 S 为零测集, 其中 $|J_k| = \beta_k - \alpha_k$.

注: 设 $\{a_k\}$ 为一数列, 称 $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ 或 $\sum_{k\geq 1} a_k$ 为无穷级数; 称 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ 该无穷级数的前 n 项和(部分和). 若数列 $\{S_n\}$ 收敛, 并记 $S = \lim_{n\to+\infty} S_n$, 则称无穷级数 $\sum_{k\geq 1} a_k$ 收敛, 其和为 S, 即 $\sum_{k\geq 1} a_k \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$.

性质一: 有限点集为零测集.

证明: 设 $S = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\} \subset \mathbb{R}$ 为一个有限实数点集. 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 作开区间 $J_k = (x_k - \delta, x_k + \delta)$, 其中 $\delta = \frac{\varepsilon}{2m+1}$, 则 $|J_k| = 2\delta$. 于是

$$S \subset \bigcup_{k=1}^{m} J_k \quad \text{且} \quad \sum_{k=1}^{m} |J_k| = 2m\delta = \frac{2m\varepsilon}{2m+1} < \varepsilon.$$

故点集 S 为零测集. 证毕.

性质二: 零测集的任意子集也是零测集.

证明: 结论显然. 证明略去.

性质三

性质三: 可数无穷点集为零测集.

证明: 设 $S = \{x_1, x_2, \cdots\} \subset \mathbb{R}$ 为一个可数无穷实数点集. 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 作开区间 $J_k = (x_k - \frac{\delta}{2^k}, x_k + \frac{\delta}{2^k})$, 其中 $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, 则 $|J_k| = \frac{\delta}{2^{k-1}}$. 于是

$$S \subset \bigcup_{k\geq 1} J_k \quad \text{且} \quad \sum_{k\geq 1} |J_k| = \sum_{k\geq 1} \frac{\delta}{2^{k-1}} = \delta \sum_{k\geq 0} \frac{1}{2^k}.$$

因等比级数 $\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = \frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^n} \to 2$, 故级数 $\sum_{k\geq 0} \frac{1}{2^k} = 2$. 因此 $\sum_{k\geq 1} |J_k| = \delta \sum_{k\geq 1} \frac{1}{2^k} = 2\delta < \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$. 故点集 S 为零测集. 证毕.

性质四: 设 A 和 B 均为零测集, 则 $A \cup B$ 也是零测集.

证明: 由假设 A 和 B 均为零测集, 故存在两个至多可数的开区间 J_k 和 J_j', 使得

$$A \subset \bigcup_{k \geq 1} J_k \quad 且 \quad \sum_{k \geq 1} |J_k| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$B \subset \bigcup_{j \geq 1} J_j' \quad 且 \quad \sum_{j \geq 1} |J_j'| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是

$$A \cup B \subset \bigcup_{k \geq 1, j \geq 1} (J_k \cup J_j') \quad 且 \quad \sum_{k \geq 1} |J_k| + \sum_{j \geq 1} |J_j'| < \varepsilon.$$

故 $A \cup B$ 是零测集. 证毕.

Theorem

定理: 设 f 为区间 $[a, b]$ 上的有界函数, 则 f 于 $[a, b]$ 可积 $\Longleftrightarrow$ f 在 $[a, b]$ 上的间断点集为零测集.

证明有点麻烦. 略去. 详见常庚哲史济怀《数学分析教程》(上册), 第三版, 第 271 页.

术语: 当函数 f 在 $[a, b]$ 上的间断点集为零测集, 或等价地说, f 在 $[a, b]$ 上除去一个零测集外处处连续时, 我们常说函数 f 在 $[a, b]$ 上几乎处处 (almost everywhere) 连续, 并记作 f 连续 a.e. on $[a, b]$.

Lebesgue 定理的应用

例一: 符号函数 $\mathrm{sgn}(x)$ 在任何闭区间上可积.

例二: 取整函数 $[x]$ 在任何闭区间上可积.

例三: Dirichlet 函数 $D(x)$ 在任何闭区间 $[a,b]$ 上不可积. 因为函数 $D(x)$ 在 $[a,b]$ 上的间断点集为整个区间, 而非零测集. 故 $D(x)$ 在 $[a,b]$ 上不可积.

例四: 根据 Lebesgue 定理, 我们再次得到结论, 即闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数在 $[a,b]$ 上可积.

积分性质一: 积分区间可加性

Theorem

定理: 设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的有界函数, $c \in (a,b)$, 则

(i) f 在 $[a,b]$ 上可积 $\Longleftrightarrow$ f 在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上均可积;

(ii) 当 f 在 $[a,b]$ 上可积时,

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

证 (i): f 在 $[a,b]$ 上可积

$\Longleftrightarrow$ f 连续 a.e. on $[a,b]$

$\Longleftrightarrow$ f 连续 a.e. on $[a,c]$ 和 $[c,b]$

$\Longleftrightarrow$ f 在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上均可积.

证 (ii)：当 f 在 $[a,b]$ 上可积时，根据结论 (i) 知，f 在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上均可积．取 $[a,c]$ 的一个分割 P_1，以及 $[c,b]$ 的一个分割 P_2，则 $P=P_1\cup P_2$ 为 $[a,b]$ 的一个分割．于是函数 f 关于分割 P 的任意一个 Riemann 和可表为

$$\sum_i f(\xi_i)\triangle x_i=\sum_{i\in J_1} f(\xi_i)\triangle x_i+\sum_{i\in J_2} f(\xi_i)\triangle x_i,$$

其中 $J_1=\{i,[x_{i-1},x_i]\subset[a,c]\}$，$J_2=\{i,[x_{i-1},x_i]\subset[c,b]\}$．因此上式右端的两个和式分别为 f 在区间 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上的黎曼和，分别关于分割 P_1 和 P_2．显然 $\|P\|=\max\{\|P_1\|,\|P_2\|\}$．因此在等式

$$\sum_i f(\xi_i)\triangle x_i=\sum_{i\in J_1} f(\xi_i)\triangle x_i+\sum_{i\in J_2} f(\xi_i)\triangle x_i$$

中，令 $\|P\|\to 0$ 取极限即得 $\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f$．结论 (ii) 得证．定理得证． □

Theorem

定理：若 $f \in R[a,b]$，则其绝对值函数 $|f| \in R[a,b]$，且

$$\int_a^b f \le \int_a^b |f|.$$

Proof.

证明：$f \in R[a,b]$

$\Rightarrow$ f 于 $[a,b]$ 上几乎处处连续

$\Rightarrow$ $|f|$ 于 $[a,b]$ 上几乎处处连续

$\Rightarrow$ $|f| \in R[a,b]$.

由不等式 $f(x) \le |f(x)|$, $\forall x \in [a,b]$ 得 $\int_a^b f \le \int_a^b |f|$. □

Theorem

定理：设 $f, g \in R[a, b]$，则乘积函数 $fg \in R[a, b]$.

Proof.

证明：$f, g \in R[a, b]$

$\Rightarrow$ f 和 g 在 $[a, b]$ 上均几乎处处连续

$\Rightarrow$ 乘积 fg 在 $[a, b]$ 上几乎处处连续

$\Rightarrow$ 乘积 $fg \in R[a, b]$.

命题得证. □

注：第二个蕴含关系 $\Rightarrow$ 的说明：记 C_f 和 D_f 为 f 的连续点集和间断点集，则 $C_f \cap C_g \subset C_{fg}$，从而 $D_f \cup D_g \supset D_{fg}$. 由于 D_f 和 D_g 均为零测集，故 D_{fg} 也为零测集.

积分性质四：Cauchy-Schwarz 不等式

Theorem

<u>定理</u>: 设 $f, g \in R[a,b]$，则

$$\left(\int_a^b fg\right)^2 \le \int_a^b f^2 \int_a^b g^2. \quad (*)$$

比较有限型或离散型 Cauchy-Schwarz 不等式:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right).$$

故不等式 (*) 可看作连续型 Cauchy-Schwarz 不等式.

证明

证明大意：由乘积 fg 的可积性知

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\xi_i)\triangle x_i \to \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

另一方面根据离散型 Cauchy-Schwarz 不等式得

$$\left(\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\xi_i)\triangle x_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\sqrt{\triangle x_i}g(\xi_i)\sqrt{\triangle x_i}\right)^2$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{n} \left[f(\xi_i)\sqrt{\triangle x_i}\right]^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \left[g(\xi_i)\sqrt{\triangle x_i}\right]^2\right)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} f^2(\xi_i)\triangle x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} g^2(\xi_i)\triangle x_i\right) \to \int_a^b f^2 \int_a^b g^2.$$

□

Theorem

定理: 设 $f, g \in R[a,b]$, 且 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号, 则

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx,$$

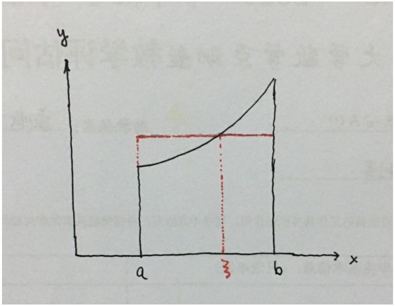
其中 $m \leq \mu \leq M$, $m = \inf_{[a,b]}\{f(x)\}$, $M = \sup_{[a,b]}\{f(x)\}$. 当 f 连续时, 存在 $\xi \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx.$$

当 $g(x) \equiv 1$, 且 $f(x)$ 连续时, 积分中值定理有如下形式

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

上式的几何意义就是曲边四边形的面积, 等于某个矩形面积. 如图所示.



定理证明

证: 不失一般性设 $g(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$. 由 $m \leq f(x) \leq M$ 可得

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x), \quad \forall x \in [a,b].$$

于是

$$m\int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq M\int_a^b g. \quad (*)$$

如果 $\int_a^b g = 0$, 则必有 $\int_a^b fg = 0$. 于是所要证的不等式

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu\int_a^b g(x)dx$$

对任意 $\mu \in \mathbb{R}$ 成立. 设 $\int_a^b g > 0$, 则由式 (*) 得

$$m \leq \frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g} \leq M.$$

于是取 $\mu = \frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g}$，所要证的不等式

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx$$

成立. 当 $f(x)$ 连续时，由连续函数最值性知，存在 $x_1, x_2 \in [a,b]$，使得

$$f(x_1) = \min_{x\in[a,b]}\{f(x)\} = \inf_{x\in[a,b]}\{f(x)\},$$

$$f(x_2) = \max_{x\in[a,b]}\{f(x)\} = \sup_{x\in[a,b]}\{f(x)\}.$$

再根据介值定理知存在 ξ，介于 x_1, x_2 之间，使得 $f(\xi) = \mu$. 因此不等式

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

成立. 命题得证. □

Example

例: 证明

$$\lim_{n\to+\infty}\int_n^{n+\pi}\frac{\sin x}{x}dx=0. \quad (*)$$

证: 由积分中值定理知

$$\int_n^{n+\pi}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\sin\xi_n}{\xi_n}\pi, \quad \xi_n\in[n,n+\pi].$$

由此立刻得到极限式 (*) 成立. 证毕.

另证: 由积分中值定理知

$$\int_n^{n+\pi}\frac{\sin x}{x}dx=\sin\eta_n\int_n^{n+\pi}\frac{dx}{x}=(\sin\eta_n)\ln\frac{n+\pi}{n}$$

$$=(\sin\eta_n)\ln(1+\frac{\pi}{n})\to 0,$$

其中 $\eta_n\in[n,n+\pi]$. 命题得证.

变上限积分，连续性定理

Theorem

定理：设 f 在 $[a,b]$ 上可积，则变上限积分 $g(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上连续.

证明：任取一点 $x_0\in[a,b]$，$x_0+h\in[a,b]$，h 可正可负，则

$$g(x_0+h)-g(x_0)=\int_a^{x_0+h} f(t)dt-\int_a^{x_0} f(t)dt$$

$$=\int_a^{x_0} f(t)dt+\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt-\int_a^{x_0} f(t)dt=\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt.$$

由于 f 在 $[a,b]$ 上可积，故 f 有界，即 $\exists M>0$，使得 $|f(x)|\leq M$，$\forall x\in[a,b]$.
于是 $|g(x_0+h)-g(x_0)|=\left|\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt\right|\leq M|h|$. 即 $g(x)$ 在 $\forall x_0\in[a,b]$ 处连续. 这就证明了 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上处处连续. 证毕. $\square$

Theorem

定理：设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，在点 $x_0\in(a,b)$ 处连续，则变上限积分 $g(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在点 x_0 处可导，且 $g'(x_0)=f(x_0)$. 特别当 f 在 $[a,b]$ 上连续时，$g'(x)=f(x)$, $\forall x\in(a,b)$.

证：之前已经得到 $g(x_0+h)-g(x_0)=\int_{x_0}^{x_0+h}f(t)dt$. 由此得

$$\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}=\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}f(t)dt.$$

于是

$$\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}-f(x_0)=\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}[f(t)-f(x_0)]dt.$$

由假设 f 在点 x_0 处连续，故对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $|t-x_0|<\delta$ 时，$|f(t)-f(x_0)|<\varepsilon$. 现取 $|h|<\delta$, 则

证明，续

$$\left|\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}-f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}[f(t)-f(x_0)]dt\right|$$

$$\le \frac{1}{|h|}\left|\int_{x_0}^{x_0+h}|f(t)-f(x_0)|dt\right| < \frac{1}{|h|}\varepsilon\left|\int_{x_0}^{x_0+h}dt\right| = \varepsilon.$$

此即 $g(x)$ 在点 x_0 处可导，且 $g'(x_0)=f(x_0)$. 证毕. □

原函数定义回忆

原函数定义: 设 $f(x)$ 为开区间 J 上定义的函数. 若存在 J 上可导的函数 $F(x)$, 使得 $F'(x) = f(x), \forall x \in J$, 则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数.

注记:

(i) 原函数 $F(x)$ 连续, 因为它处处可导;

(ii) 若 $f(x)$ 有原函数 $F(x)$, 则 $F(x) + C$ 也是 $f(x)$ 的原函数, 其中 C 为任意常数. 显然任意两个原函数仅相差一个常数.

微积分学基本定理的第二形式

Theorem

定理: 若 $f(x)$ 于 $[a,b]$ 连续, 则 $g(x) \overset{\text{def}}{=} \int_a^x f(t)dt$ 于闭区间 $[a,b]$ 连续, 于开区间 (a,b) 可导, 且 $g'(x) = f(x)$, $\forall x \in (a,b)$, 即

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x), \quad \forall x \in (a,b). \quad (*)$$

也就是说, $g(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上的一个原函数.

定理的证明可直接由变上限积分的连续性和可微性得到. 公式 (*) 可称为微积分学基本定理 (Newton-Leibniz 公式) 的第二形式.

推论

Corollary

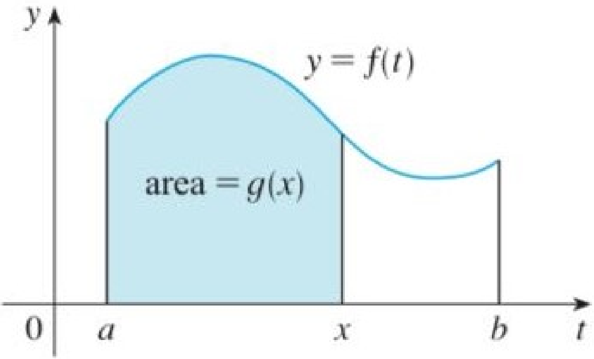
推论: 开区间上的连续函数必存在原函数.

Proof.

证: 设 f 是 (a,b) 上的连续函数, 则变上限积分

$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

就是 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上的一个原函数, 其中 $x_0 \in (a,b)$ 上任意一个固定的点. 证毕. □



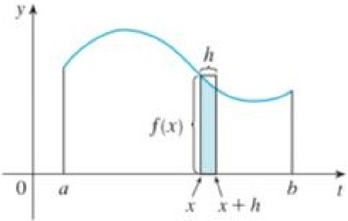
$$g(x) = \int_a^x f(t)dt$$

由于

$$\frac{1}{h}\Big[g(x+h) - g(x)\Big] = \frac{1}{h}\Big[\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^{x} f(t)dt\Big]$$

$$= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = f(\xi) \to f(x), \quad h \to 0,$$

其中 ξ 介于 x 和 $x+h$ 之间的某点. 故 $g'(x) = f(x)$. 如图所示.



微积分学基本定理的另一个证明

Theorem

定理回忆：设 $f(x)$ 于 $[a,b]$ 可积．若 $h(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上的一个原函数，且于 $[a,b]$ 连续，则

$$\int_a^b f(x)dx = h(b) - h(a). \quad \text{(Newton-Leibniz 公式)}$$

证：只证明当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续的情形．此时，由微积分学基本定理的第二形式可知，变上限积分 $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ 是 $f(x)$ 的一个原函数．由于 $h(x)$ 也是 $f(x)$ 的一个原函数，故 $h(x) = g(x) + C$．于是

$$h(b) - h(a) = g(b) + C - g(a) - C = g(b) - g(a) = \int_a^b f(t)dt.$$

定理得证．

微分和积分互为逆运算

回忆微积分学基本定理(第一形式) $\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$, 其中 $F(x)$ 假设在 $[a, b]$ 上可导, 且 $F'(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积. 将积分上限 b 换为变量 x, 则

$$\int_a^x \left[\frac{d}{dt}F(t)\right]dt = F(x) - F(a). \quad (*)$$

再回忆微积分学基本定理的第二形式

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x), \quad \forall x \in (a, b), \quad (**)$$

其中 $f(x)$ 假设在 $[a, b]$ 连续. 比较等式 (*) 和 (**) 可知, 微分和积分互为逆运算.

注记

<u>注一</u>: 并不是每个函数都有原函数. 例如 Dirichlet 函数在任何区间上都没有原函数.

<u>注二</u>: 并不是每个导函数都可积. 例如考虑函数

$$F(x) = \begin{cases} x^2\sin(x^{-2}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

易证 $F(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上处处可导, $F'(x) = 2x\sin(x^{-2}) - 2x^{-1}\cos(x^{-2})$, $x \neq 0$, 且 $F'(0) = 0$. 显然导函数 $F'(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上不可积. 因为 $F'(x)$ 在 $[0,1]$ 上无界.

例一: 求 $G'(x)$, 其中 $G(x)$ 定义如下

$$G(x) = \int_{x^2}^{x^3} \sqrt{1+t^2}dt$$

解: 记 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, $f(t) = \sqrt{1+t^2}$, 则 $F'(x) = f(x)$. 另一方面 $G(x)$ 可以表为

$$G(x) = \int_{x^2}^{0} f(t)dt + \int_0^{x^3} f(t)dt$$

$$= -\int_0^{x^2} f(t)dt + \int_0^{x^3} f(t)dt = F(x^3) - F(x^2).$$

于是

$$G'(x) = F'(x^3)\cdot 3x^2 - F'(x^2)\cdot 2x = 3x^2\sqrt{1+x^6} - 2x\sqrt{1+x^4}.$$

解答完毕.

<u>例二</u>: 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可微, 且 $f(a)=0$. 证明

$$\int_a^b f^2(x)dx \le \frac{1}{2}(b-a)^2\int_a^b [f'(x)]^2dx.$$

<u>证明</u>: 由 Newton-Leibniz 公式, 以及 Cauchy-Schwarz 不等式得

$$f^2(x) = \left(\int_a^x f'(t)dt\right)^2 = \left(\int_a^x 1\cdot f'(t)dt\right)^2$$

$$\le \left(\int_a^x 1^2dx\right)\cdot\left(\int_a^x [f'(t)]^2dt\right) \le (x-a)\int_a^b [f'(t)]^2dt.$$

于是

$$\int_a^b [f(x)]^2dx \le \int_a^b (x-a)dx\int_a^b [f'(t)]^2dt = \frac{1}{2}(b-a)^2\int_a^b [f'(x)]^2dx.$$

命题得证. □

例三: 求极限

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\int_0^x e^{t^2}\,dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}\,dt}.$$

解: 显然当 $x\to+\infty$ 时, 分母 $\to+\infty$. 应用 L'Hospital 法则,

$$\frac{\left[\left(\int_0^x e^{t^2}\,dt\right)^2\right]'}{\left[\int_0^x e^{2t^2}\,dt\right]'}=\frac{2\left(\int_0^x e^{t^2}\,dt\right)\cdot e^{x^2}}{e^{2x^2}}=\frac{2\int_0^x e^{t^2}\,dt}{e^{x^2}}$$

$$\frac{\left[2\int_0^x e^{t^2}\,dt\right]'}{\left[e^{x^2}\right]'}=\frac{2e^{x^2}}{e^{x^2}\cdot 2x}=\frac{1}{x}\to 0,\quad x\to+\infty.$$

可知原极限为零.

例四: 设函数 f 在 $[0,1]$ 上二阶连续可导, $f(0)=0=f(1)$, 且 $f(x)>0$, $\forall x\in(0,1)$. 证明

$$\int_0^1 \left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right| dx \geq 4.$$

注: 俄罗斯数学家 Lyapunov (1857-1918) 在研究二阶线性微分方程 $y''+a(x)y=0$ 的稳定性时, 发现了这个不等式, 并由此导出著名的 Lyapunov 稳定性准则.

证: 想法: 将分母放大, 并将分子的绝对值符号去掉, 从而方便估计积分.

由假设可知 f 在 $[0,1]$ 上必然在某点 $c\in(0,1)$ 处取得正最大值. 即 $f(c)=\max\{f(x),x\in[0,1]\}>0$. 再由中值定理知

$$f(c)-f(0)=f'(\xi)c,\quad f(1)-f(c)=f'(\eta)(1-c),$$

其中 $\xi\in(0,c)$, $\eta\in(c,1)$. 由此得

例四，续

$$f'(\xi) = \frac{f(c)}{c}, \quad f'(\eta) = -\frac{f(c)}{1-c}.$$

因此

$$\int_0^1 \left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right| dx \geq \frac{1}{f(c)} \int_0^1 |f''(x)| dx \geq \frac{1}{f(c)} \int_\xi^\eta |f''(x)| dx$$

$$\geq \frac{1}{f(c)} \left| \int_\xi^\eta f''(x) dx \right| = \frac{1}{f(c)} \left| f'(\eta) - f'(\xi) \right|$$

$$= \frac{1}{f(c)} \left[\frac{f(c)}{1-c} + \frac{f(c)}{c} \right] = \frac{1}{(1-c)c} \geq 4, \quad \forall c \in (0,1).$$

命题得证. □

Definition

定义: 假设函数 $f(x)$ 有原函数, 则用符号 $\int f(x)dx$ 表示 $f(x)$ 的任意一个原函数, 并称 $\int f(x)dx$ 为 $f(x)$ 的一个不定积分, 其中 $f(x)$ 称为被积函数. 有时不定积分 $\int f(x)dx$ 简写作 $\int f$.

基本公式

1. $\int 0dx = C$;
2. $\int \cos x dx = \sin x + C,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
3. $\int \sin x dx = -\cos x + C,\ \forall x \in \mathbb{R}$;
4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,\ \forall x \neq 0$;
5. $\int x^\lambda dx = \frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1} + C,\ \forall x > 0,\ \lambda \neq -1$;
6. $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C,\ a > 0,\ a \neq 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$;
7. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C,\ \forall x \in \mathbb{R}$;
8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C,\ \forall x \in (k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}),\ \forall k \in \mathbb{Z}$;
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C,\ \forall x \in (k\pi, (k+1)\pi),\ \forall k \in \mathbb{Z}$;
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C,\ \forall x \in (-1, 1)$.

1. $[\int f(x)dx]' = f(x)$;
2. $\int (f+g) = \int f + \int g$;
3. $\int (\lambda f) = \lambda \int f$;
4. 设 $F(x)$ 可导，则 $\int F'(x)dx = F(x) + C$.

注: 不定积分 $\int F'(x)dx$ 常写作 $\int F'(x)dx = \int dF(x) = F(x) + C$.

例一: 求积分

$$\int \left(3x^2 + \frac{4}{x}\right) dx.$$

解:

$$\int \left(3x^2 + \frac{4}{x}\right) dx = \int 3x^2 dx + \int \frac{4dx}{x}$$

$$= \int dx^3 + 4\int d\ln|x| = x^3 + 4\ln|x| + C.$$

解答完毕.

例二: 求积分

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}dx.$$

解:

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx$$

$$= \int dx - \int \frac{dx}{1+x^2} = x - \arctan x + C.$$

解答完毕.

例三: 求积分

$$\int \tan^2 x dx.$$

解:

$$\int \tan^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \tan x - x + C.$$

解答完毕.

例四: 求积分

$$\int \frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x} dx.$$

解:

$$\int \frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x} dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x + \sin x} dx$$

$$= \int (\cos x - \sin x) dx = \int \cos x dx - \int \sin x dx$$

$$= \sin x + \cos x + C.$$

解答完毕.

例五: 设 $a > 0$, 求不定积分

$$\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx, \quad |x| \neq a.$$

解: 先将被积函数分式化为方便积分的形式, 即

$$\frac{1}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} \right).$$

于是

$$\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \left(\int \frac{dx}{a+x} + \int \frac{dx}{a-x} \right)$$

$$= \frac{1}{2a} \left(\ln|a+x| - \ln|a-x| \right) + C = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C.$$

解答完毕.

例六: 求不定积分

$$\int e^{|x|}dx.$$

解: 由于 $e^{|x|}$ 在整个 $\mathbb{R}$ 上连续, 故它有原函数. 例如 $F(x) = \int_0^x e^{|t|}dt$ 就是一个函数 $e^{|x|}$ 的一个原函数. 当 $x \geq 0$ 时, $F(x) = \int_0^x e^t dt = e^x - 1$; 当 $x < 0$ 时, $F(x) = -\int_x^0 e^{-t}dt = e^{-t}\Big|_x^0 = 1 - e^{-x}$. 因此所求不定积分为

$$\int e^{|x|}dx = F(x) + C,$$

其中 $F(x)$ 定义如下

$$F(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x \geq 0, \\ 1 - e^{-x}, & x < 0. \end{cases}$$

解答完毕.

Theorem

定理: 考虑计算 $\int g(x)dx$. 如果 $g(x)$ 可以表示为 $g(x) = f(\phi(x))\phi'(x)$, 且 $\int f(u)du = F(u) + C$ (通常 $\int f(u)du$ 容易计算), 则

$$\int g(x)dx = F(\phi(x)) + C.$$

Proof.

证明: 由假设 $F'(u) = f(u)$ 知

$$[F(\phi(x))]' = F'(\phi(x))\phi'(x) = f(\phi(x))\phi'(x) = g(x),$$

此即 $\int g(x)dx = F(\phi(x)) + C$. 证毕. □

第一换元法计算过程

计算不定积分 $\int f(\phi(x))\phi'(x)dx$ 的过程:

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)dx = \int f(\phi(x))d\phi(x) = \int f(u)du$$

$$= F(u) + C, \quad u = \phi(x).$$

注: 应用第一换元法计算 $\int g(x)dx$ 的关键在于, 如何将被积函数 $g(x)$ 表示为 $g(x) = f(\phi(x))\phi'(x)$, 并且计算 $\int f(u)du = F(u) + C$ 比较容易.

例一:

$$\int (3x+2)^5 dx = \frac{1}{3}\int (3x+2)^5 d(3x+2) = \frac{1}{3}\int u^5 du$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}u^6 + C = \frac{1}{18}(3x+2)^6 + C.$$

例二:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\sqrt{u} + C = -\sqrt{1-x^2} + C.$$

例三:

$$\int \sin^2 x \cos^3 x dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \cos x dx$$

$$= \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x) [\sin x]' dx = \int u^2 (1 - u^2) du$$

$$= \int u^2 du - \int u^4 du = \frac{1}{3} u^3 - \frac{1}{5} u^5 + C$$

$$= \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x + C.$$

例四:

$$\int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2}(x^2)'dx = \frac{1}{2}\int e^u du = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

例五: 设 $a \neq 0$，则

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{d(ax+b)}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$$

Theorem

定理: 考虑计算不定积分 $\int f(x)dx$. 如果作可逆变量代换 $x=\phi(t)$, 使得计算 $\int f(\phi(t))\phi'(t)dt = G(t)+C$ 比较容易, 则

$$\int f(x)dx = G(\phi^{-1}(x)) + C, \quad x \in J,$$

其中 $f(x)$ 于 J 上定义, $x=\phi(t)$ 为区间 K 上的连续可微函数, $\phi(t)\in J$, $\forall t\in K$, 且 $\phi'(t)\neq 0$, $t=\phi^{-1}(x)$ 为 $x=\phi(t)$ 的反函数.

定理证明

Proof.

证明: 由假设 $\phi'(t) \neq 0$ 可知 $x = \phi(t)$ 存在反函数 $t = \phi^{-1}(x)$. 于是

$$[G(\phi^{-1}(x))]' = G'(t)[\phi^{-1}(x)]' = f(\phi(t))\phi'(t)\frac{1}{\phi'(t)} = f(x),$$

上式中 $t = \phi^{-1}(x)$. 这表明 $G(\phi^{-1}(x))$ 是 $f(x)$ 的原函数. 证毕. □

注: 应用第二换元法计算 $\int f(x)dx$ 的关键在于, 如何寻找可逆变换 $x = \phi(t)$, 使得不定积分 $\int f(\phi(t))\phi'(t)dt$ 容易算出来.

例一:

$$\int x(1-x)^n dx = -\int (1-t)t^n dt \quad (x = 1-t, \text{ 或 } t = 1-x)$$

$$= -\int (t^n - t^{n+1})dt = -\frac{1}{n+1}t^{n+1} + \frac{1}{n+2}t^{n+2} + C$$

$$= -\frac{1}{n+1}(1-x)^{n+1} + \frac{1}{n+2}(1-x)^{n+2} + C.$$

例二：求不定积分

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}$$

解法一：作变换 $x = 2\sin t$, $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$，则

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{2\cos t dt}{2\sin t \cdot 2\cos t} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sin t}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{2\sin(t/2)\cos(t/2)} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t/2)}{\tan(t/2)\cos^2(t/2)}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d\tan(t/2)}{\tan(t/2)} = \frac{1}{2}\ln|\tan(t/2)| + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\tan\left(\frac{1}{2}\arcsin(x/2)\right)\right| + C.$$

解答完毕.

注：计算 $\int \frac{dt}{\sin t}$ 的另一个方法:

$$\int \frac{dt}{\sin t} = \int \frac{\sin t dt}{\sin^2 t} = -\int \frac{d\cos t}{1-\cos^2 t}$$

$$= -\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1-\cos t} + \frac{1}{1+\cos t}\right) d\cos t$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos t}{1+\cos t}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-(x/2)^2}}{1+\sqrt{1-(x/2)^2}}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{2-\sqrt{4-x^2}}{2+\sqrt{4-x^2}}\right| + C.$$

故原不定积分为

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2-\sqrt{4-x^2}}{2+\sqrt{4-x^2}}\right| + C.$$

解法二：令 $u=\sqrt{4-x^2}$，则 $u^2=4-x^2$，$2udu=-2xdx$．于是

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}=\int\frac{xdx}{x^2\sqrt{4-x^2}}=-\int\frac{udu}{(4-u^2)u}$$

$$=\int\frac{du}{u^2-4}=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{u-2}-\frac{1}{u+2}\right)du$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{u-2}{u+2}\right|+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{4-x^2}-2}{\sqrt{4-x^2}+2}\right|+C.$$

注：虽然两种解法所得到的结果看上去不同，但不难验证它们仅相差一个常数．

例三

例三: 求不定积分

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2}, \quad a>0.$$

解: 作变换 $x = au$, 则

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \int \frac{adu}{a^2+a^2u^2} = \frac{1}{a}\int \frac{du}{1+u^2}$$

$$= \frac{1}{a}\arctan u + C = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C.$$

解答完毕.

例四: 设 a, b 为两个非零常数, 求不定积分

$$\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}.$$

解:

$$\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{a^2\tan^2 x + b^2},$$

$$= \frac{1}{b^2}\int \frac{d\tan x}{(a/b)^2\tan^2 x + 1} = \frac{1}{ab}\int \frac{d\frac{a}{b}\tan x}{1 + (\frac{a}{b})^2\tan^2 x},$$

$$= \frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{a}{b}\tan x\right) + C.$$

解答完毕.

例五: 求不定积分

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx, \quad |x| < a, a > 0.$$

解: 作变换 $x = a\sin t$, $|t| < \frac{\pi}{2}$, $a\sin t : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to (-a, a)$. 于是

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \int \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t} \cdot (a\sin t)'dt$$

$$= a^2 \int \cos t \cdot \cos t dt = a^2 \int \cos^2 t dt$$

$$= \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos 2t)dt = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C$$

$$= \frac{a^2}{2}(t + \sin t\cos t) + C.$$

函数 $x = a\sin t$ 的反函数为 $t = t(x) = \arcsin\frac{x}{a}$，

$$\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{1 - (x/a)^2} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

于是

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{a^2}{2}(t + \sin t\cos t) + C$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{a}\frac{1}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}\left(a^2\arcsin\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2 - x^2}\right) + C$$

$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

解答完毕.

注记

注：求不定积分有时不容易，但验证计算不定积分的计算结果却是很简单的，只需对计算结果求导，并观察求导结果是否为被积函数．因此同学们应该养成一个好习惯，即每次计算不定积分完后，都应验证计算结果．例如我们来验证刚才的计算结果

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

验证

$$\left(\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2}\right)'$$

$$= \frac{a^2}{2}\frac{1}{\sqrt{1-(x/a)^2}}\frac{1}{a} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{x}{2}\frac{1}{2}\frac{-2x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

验证，续

$$= \frac{a^2}{2}\frac{1}{\sqrt{1-(x/a)^2}}\frac{1}{a}+\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{x}{2}\frac{1}{2}\frac{-2x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$= \frac{a^2}{2\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}-\frac{x^2}{2\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-x^2}.$$

由此可见计算结果正确.

两种换元法有时都管用

例如对于积分

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$$

用第一换元法:

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = 2\int \sin\sqrt{x}(\sqrt{x})'dx = 2\int \sin\sqrt{x}d\sqrt{x} = -2\cos\sqrt{x} + C.$$

用第二换元法: 作变换 $x = t^2$, 则

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{\sin t}{t}2tdt = 2\int \sin tdt = -2\cos t + C = -2\cos\sqrt{x} + C.$$

分部积分法 (Integration by parts)

回忆求导的 Leibniz 法则 $(uv)' = u'v + uv'$, 由此得

$$\int (uv)'dx = \int u'vdx + \int uv'dx.$$

于是

$$uv = \int u'vdx + \int uv'dx.$$

因此如果两个不定积分 $\int u'vdx$ 和 $\int uv'dx$, 其中之一可以求出来的话, 那么就可以求出另一个. 不定积分 $\int u'vdx$ 和 $\int uv'dx$ 常写作

$$\int u'vdx = \int vdu, \quad \int uv'dx = \int udv.$$

例一:

$$\int xe^x dx = \int x de^x$$

$$= xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

注: 分部积分还有另一种可能

$$\int xe^x dx = \int e^x d(x^2/2) = e^x(x^2/2) - \int \frac{x^2}{2} de^x$$

$$= e^x(x^2/2) - \int \frac{x^2}{2} e^x dx.$$

显然这个尝试不可取.

例二:

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int x d\ln x = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$= x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$$

注: 之前曾指出函数 $\ln(1+x)$ 有原函数 $(1+x)\ln(1+x)-(x+1)$. 见 Nov 17 讲义第 43 页. 这个结论可由例二立刻得到: 在例二中, 用 $1+x$ 代替 x 即得 $\int \ln(1+x)dx = (1+x)\ln(1+x)-(x+1)+C$. 结论得证.

例三:

$$\int x\cos x dx = \int x d\sin x$$

$$= x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C.$$

例四: 求不定积分 $\int e^x \cos x dx$ 和 $\int e^x \sin x dx$.

解法一: 两次分部积分得

$$\int e^x \cos x dx = \int e^x d\sin x = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$$

$$= e^x \sin x + \int e^x d\cos x = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx.$$

将上式最后一项移到左边得

$$2\int e^x \cos x dx = e^x \sin x + e^x \cos x$$

$$\Rightarrow \quad \int e^x \cos x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + c_1.$$

完全类似地我们可以得到

$$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + c_2.$$

解法二：对积分 $\int e^x \cos x dx$ 和 $\int e^x \sin x dx$ 分别作一次分部积分即得

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx;$$

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx.$$

记 $C = \int e^x \cos x dx$，$S = \int e^x \sin x dx$，则

$$\begin{cases} C = e^x \sin x - S \\ S = -e^x \cos x + C \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} C + S = e^x \sin x \\ -C + S = -e^x \cos x. \end{cases}$$

由此可解得

$$\int e^x \cos x dx = C = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + c_1,$$

$$\int e^x \sin x dx = S = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + c_2.$$

例四，续二

解法三：利用 Euler 公式 $e^{x+ix} = e^x(\cos x + i\sin x)$，计算上述两个不定积分：

$$\int e^{(x+ix)}dx = \int e^{x(1+i)}dx = \frac{1}{1+i}e^{x(1+i)} + c$$

$$= \frac{1-i}{1+1}e^x(\cos x + i\sin x) + c_1 + ic_2$$

$$= \frac{e^x}{2}[(\cos x + \sin x) + i(\sin x - \cos x)] + c_1 + ic_2,$$

其中 $c = c_1 + ic_2$，$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. 此即

$$\int e^{(x+ix)}dx = \int e^x \cos x dx + i\int e^x \sin x dx$$

$$= \frac{e^x}{2}[(\cos x + \sin x) + i(\sin x - \cos x)] + c_1 + ic_2.$$

上述等式意味着两边的实虚部分别相等，即

$$\int e^x \cos x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + c_1,$$

$$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + c_2.$$

解答完毕.

例五:

$$\int x^2e^xdx = \int x^2de^x = x^2e^x - \int e^xdx^2$$

$$= x^2e^x - 2\int e^xxdx = x^2e^x - 2\int xde^x$$

$$= x^2e^x - 2\left(xe^x - \int e^xdx\right)$$

$$= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C.$$

Nov 24 作业, 共十一道大题

习题一: 课本第135页习题5.1题4: 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 且 $f(x) \geq d > 0$, $\forall x \in [a,b]$, 证明函数 $\frac{1}{f(x)}$ 在区间 $[a,b]$ 上也 Riemann 可积.

习题二: 课本第135页习题5.1题5: 假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 证明 $\cos[f(x)]$ 在 $[a,b]$ 上也 Riemann 可积.

习题三: 课本第135页习题5.1题6: 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 令 $F(x) = \sup_{t\in[a,x]} f(t)$, 问函数 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上是否 Riemann 可积?

习题四: 课本第136页习题5.1题9:

(1) 证明函数 x^2 在区间 $[a,b]$ 上一致连续;

(2) 证明函数 $\ln x$ 在区间 $(2,+\infty)$ 上一致连续;

(3) 证明函数 $\sin x$ 在实轴 $\mathbb{R}$ 上一致连续;

(4) 证明函数 $\sqrt{x}$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上一致连续.

习题五：课本第136页习题5.1题10：假设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 和 $[b,c]$ 上均一致连续，证明函数 $f(x)$ 在区间 $[a,c]$ 上一致连续.

习题六：课本第136页习题5.1题15:

(1) 证明函数 x^2 在 $[0,+\infty)$ 上非一致连续;

(2) 证明函数 $\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上非一致连续;

(3) 证明函数 $\sin(x^2)$ 在 $\mathbb{R}$ 上非一致连续;

(4) 证明函数 $x\sin x$ 在 $\mathbb{R}$ 上非一致连续.

习题七：课本第136页习题5.1题16(有修改)：设 $a<b$ 为两个有限实数，$f(x)$ 在 (a,b) 上连续. 证明函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上一致连续，当且仅当两个单侧极限 $\lim_{x\to a^+} f(x)$ 和 $\lim_{x\to b^-} f(x)$ 均存在，并说明函数 $\frac{\sin x}{x}$ 在 $(0,1)$ 上一致连续.

习题八：课本第145页习题5.3题1：求下列函数的导数

(1) $F(x)=\int_0^x\sqrt{1-t}dt$，其中 $x\leq 1$；

(2) $F(x)=\int_x^1\sqrt{1+t^2}dt$；

(3) $F(x)=\int_0^{x^2}\ln(2+t)dt$；

(4) $F(x)=\int_{\sqrt{x}}^{x^2}e^{-t^2}dt$；

(5) $F(x)=\int_0^{\arctan x}\tan t dt$；

(6) $F(x)=\int_0^x f(t)dt$, $0\leq x\leq 2$，其中

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0\leq x<1,\\ 1, & 1\leq x\leq 2.\end{cases}$$

习题九：课本第145页习题5.3题2：设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\int_0^y e^{-t^2}dt+\int_0^x\cos(t^2)dt=0$ 确定，求其导数 $y'(x)$.

习题十：课本第145页习题5.3题3：设曲线 $y = f(x)$ 由如下参数方程

$$x = \int_1^t \frac{\cos u}{u} du, \quad y = \int_1^t \frac{\sin u}{u} du,$$

确定，求该曲线在当 $t = \frac{\pi}{4}$ 时的点处之斜率.

习题十一：课本第145页习题5.3题4：设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续. 若 $f(x)$ 满足积分方程

$$\int_0^{\sqrt{x}} f(t) dt = x + \sin x,$$

求 $f(x)$.