第一周习题参考解答 杨利军 Sept 15-19, 2025

第一次课习题解答

习题一: 课本第3-4页习题 1.1: 2(1)(3)(4). 求下列数集的上下确界

(1) 有限个实数构成的集合 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$;

(3) $\{x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x - 3 < 0\}$;

(4) $\left\{\left[1 + (-1)^n\right] \frac{n+1}{n}\right\}_{n \geq 1}$.

解 (1): $\sup\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$,
$\inf\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} = \min\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$.

解 (3): $\sup\{x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x - 3 < 0\} = 3$,
$\inf\{x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x - 3 < 0\} = -1$.

解 (4): $\sup\left\{\left[1 + (-1)^n\right] \frac{n+1}{n}\right\}_{n \geq 1} = 2^{\frac{3}{2}}$,
$\inf\left\{\left[1 + (-1)^n\right] \frac{n+1}{n}\right\}_{n \geq 1} = 0$.

习题二: 课本第3-4页习题 1.1: 4(有修改). 设 $A \subset \mathbb{R}$ 为一个实数子集, 记 $A^- \stackrel{\text{def}}{=} \{-a, a \in A\}$. 证明 (1) $\sup A^- = -\inf A$, (2) $\inf A^- = -\sup A$.

证明: 记 $m \stackrel{\text{def}}{=} \inf A$, $M \stackrel{\text{def}}{=} \sup A$. 要证 (1) $\sup A^- = -m$, (2) $\inf A^- = -M$. 以下只证 (1), 结论 (2) 的证明类似. 要证 (1), 即要证 (i) $-m$ 是 $-A$ 的一个上界; (ii) $-m$ 是 A^- 的最小上界.

证 (i): 由 m 的定义知, $a \geq m$, 故 $-a \leq -m, \forall a \in A$. 结论 (i) 成立.

证 (ii): 设 m_1 是 A^- 的一个上界, 即 $-a \leq m_1, \forall a \in A$, 亦即 $a \geq -m_1, \forall a \in A$, 则 $-m_1$ 是 A 的一个下界. 由于 m 是 A 的最大下界, 故 $-m_1 \leq m$, 即 $m_1 \geq -m$. 因此 $-m$ 是 A^- 的最小上界. 结论 (1) 得证.

习题三: 课本第3-4页习题 1.1: 6. 设 $a, b \in \mathbb{R}$. 证明

$$\max\{a,b\} = \frac{1}{2}\big(a+b+|a-b|\big), \quad \min\{a,b\} = \frac{1}{2}\big(a+b-|a-b|\big).$$

证明: 不妨设 $a \geq b$, 则 $|a-b| = a-b$. 于是 $\max\{a,b\} = a$, $\min\{a,b\} = b$, 且

$$\frac{1}{2}\big(a+b+|a-b|\big) = \frac{1}{2}\big(a+b+a-b\big) = a;$$

$$\frac{1}{2}\big(a+b-|a-b|\big) = \frac{1}{2}\big(a+b-a+b\big) = b.$$

命题得证.

补充题一: 设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 为两个等价的有理数列. 证明 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 列, 当且仅当 $\{b_n\}$ 是 Cauchy 列.

证明. 由假设两个有理数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 等价知, 对任意正有理数 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N_1, 使得对 $\forall n \geq N_1$, $|a_n - b_n| < \varepsilon$.

(i) 设 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 列, 证 $\{b_n\}$ 是 Cauchy 列. 依定义知, 存在正整数 N_2, 使得 $|a_n - a_m| < \varepsilon$, $\forall n \geq N_2$. 于是对 $\forall n \geq N := \max\{N_1, N_2\}$,

$$|b_n - b_m| = |b_n - a_n + a_n - a_m + a_m - b_m|$$

$$\leq |b_n - a_n| + |a_n - a_m| + |a_m - b_m| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

故 $\{b_n\}$ 是 Cauchy 列.

(ii) 设 $\{b_n\}$ 是 Cauchy 列, 证 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 列. 证明同(i). 命题得证.

补充题二: 证明 Cauchy 序列的性质:

(1) 每个有理数 Cauchy 序列均有界;

(2) 假设两个有理数序列 $\{a_n\}$和 $\{b_n\}$ 均为 Cauchy 序列, 则它们的和与乘积序列, 即序列 $\{a_n + b_n\}$ 和 $\{a_n b_n\}$均为 Cauchy 序列.

证明: (1) 每个有理数 Cauchy 序列均有界. 设 $\{x_n\}$ 为任意一个有理数 Cauchy 序列. 依定义知, 对任意正有理数 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得对 $\forall n, m \geq N$ 时, $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

取 $\varepsilon = 1$, 则存在正整数 N_0, 使得对 $\forall n, m \geq N_0$ 时, $|x_n - x_m| < 1$. 取 $m = N_0$, 则对 $\forall n \geq N_0$ 时, $|x_n - x_{N_0}| < 1$. 此即

$$|x_n| < 1 + |x_{N_0}|, \quad \forall n \geq N_0.$$

取 $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_{N_0-1}|, 1 + |x_{N_0}|\}$, 则 $|x_n| \leq M$, $\forall n \geq 1$. 这就证明了有理数 Cauchy 序列 $\{x_n\}$ 有界.

(2) 假设两个有理数序列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 均为 Cauchy 序列. 依定义知, 对任意正有理数 $\varepsilon > 0$, 存在两个正整数 N_1 和 N_2, 使得对 $\forall n, m \geq N_1$ 时, $|a_n - a_m| < \varepsilon$, 对 $\forall n, m \geq N_2$ 时, $|b_n - b_m| < \varepsilon$. 因此对 $\forall n, m \geq N = \max\{N_1, N_2\}$ 时, 我们同时有 $|a_n - a_m| < \varepsilon$ 和 $|b_n - b_m| < \varepsilon$. 于是

$$|a_n + b_n - a_m - b_m| \leq |a_n - a_m| + |b_n - b_m| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

这就证明了和序列 $\{a_n + b_n\}$ 为 Cauchy 序列.

再考虑乘积序列 $\{a_n b_n\}$. 由于 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 均为 Cauchy 序列, 故对任意正有理数 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得对 $\forall n, m \geq N$, 成立 $|a_n - a_m| < \varepsilon$ 和 $|b_n - b_m| < \varepsilon$. 另一方面, 根据结论(1)知有理数 Cauchy 序列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 均有界, 即存在正有理数 $M > 0$, 使得对任意 $n \geq 1$, 成立 $|a_n| \leq M$ 且 $|b_n| \leq M$. 于是对于 $\forall n, m \geq N$, 成立

$$|a_n b_n - a_m b_m| = |(a_n - a_m) b_n + (b_n - b_m) a_m| \leq |a_n - a_m||b_n| + |b_n - b_m||a_m|$$

$$\leq (|a_n - a_m| + |b_n - b_m|) M \leq 2M\varepsilon.$$

这就证明了乘积序列 $\{a_n b_n\}$ 为 Cauchy 序列. 证毕.

补充题三: 证明 $\sqrt{3}$ 是无理数.

证: 反证. 假设 $\sqrt{3}$ 为有理数, 即 $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$, 其中 p, q 为互素的正整数. 由此得 $3 = \frac{p^2}{q^2}$, 或 $3q^2 = p^2$. 根据算术基本定理 (即每个正整数可表为若干个素数的乘积)知, 3 整除 p, 即 $p = 3k$, k 为正整数. 于是 $3q^2 = 3^2 k^2$, 或 $q^2 = 3k^2$. 这又说明 3 也整除 q. 由此可知 p, q 均含因子 3. 此与 p, q 互素的假设相矛盾. 命题得证.

第二次课习题解答

习题一: 利用算术几何平均不等式证明, 对于任意 $x>0$,

(i) $x^{\frac{1}{3}} \leq \frac{x+2}{3}$.

(ii) 对于每个正整数 n, $x^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x+n-1}{n}$.

(iii) 对于每个正整数 n, $n^{\frac{1}{n}} \leq \frac{2n-1}{n}$.

证: (i)

$$x^{\frac{1}{3}} = (x\cdot 1\cdot 1)^{\frac{1}{3}} \leq \frac{x+1+1}{3} = \frac{x+2}{3}.$$

(ii) 对任意正整数 n

$$x^{\frac{1}{n}} = (x\cdot 1\cdot 1\cdots 1)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x+1+1\cdots+1}{n} = \frac{x+n-1}{n}.$$

(iii) 在结论 (ii) 中, 取 $x=n$,

$$n^{\frac{1}{n}} \leq \frac{2n-1}{n}.$$

命题得证.

习题二: 对任意 n 实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 证明如下两个不等式

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sqrt{n}\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

和

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leq \Big(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^{\frac{2}{3}}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^{\frac{4}{3}}\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

证明: 在 Cauchy 不等式

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\Big)^{\frac{1}{2}} \qquad (*)$$

中, 取 $b_k=1$, $k=1,2,\cdots,n$ 即得

$$\sum_{k=1}^n a_k \le \sqrt{n}\Big(\sum_{k=1}^n a_k^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

第一个不定式得证. 再在不等式(*)中, 取 a_k 为 $|a_k|^{\frac{1}{3}}$, b_k 为 $|a_k|^{\frac{2}{3}}$, 则

$$\sum_{k=1}^n a_k \le \sum_{k=1}^n |a_k| \le \Big(\sum_{k=1}^n |a_k|^{\frac{2}{3}}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{k=1}^n |a_k|^{\frac{4}{3}}\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

第二个不定式得证. 命题得证.

<u>习题三</u>: 利用 Cauchy 不等式证明

$$\Big(\sum_{k=1}^n c_k\Big)\Big(\sum_{k=1}^n \frac{1}{c_k}\Big) \ge n^2,$$

其中 $c_k>0$, $k=1,2,\cdots,n$ 为任意 n 个正数.

<u>证明</u>: 在 Cauchy 不等式

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)$$

中, 取 $a_k=\sqrt{c_k}$, $b_k=\frac{1}{\sqrt{c_k}}$ 即得结论.

<u>习题四</u>: 设 a,b,c 为三个正数, 且 $a+b+c=1$. 证明

$$\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right) \ge 8. \quad (*)$$

<u>证明</u>: 不等式 (*)

$$\iff \quad \left(\frac{1-a}{a}\right)\left(\frac{1-b}{b}\right)\left(\frac{1-c}{c}\right) \ge 8$$

$$\iff \quad (1-a)(1-b)(1-c) \ge 8abc$$

$$\iff \quad 1-(a+b+c)+(ab+bc+ac)-abc \geq 8abc$$

$$\iff \quad ab+bc+ac \geq 9abc$$

$$\iff \quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq 9$$

$$\iff \quad \frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \leq \frac{1}{9} \quad (**)$$

应用算术几何调和不等式, 即

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \leq \frac{1}{n}\Big(a_1+a_2+\cdots+a_n\Big),$$

其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 均为正数, 于情形 $n=3$, $a_1=a$, $a_2=b$, $a_3=c$, 即得不等式 (**). 命题得证.

习题五: 设 a 和 b 为两个正实数. 证明 (1) 对任意正整数 $n \geq 1$, 成立

$$\frac{a^n+b^n}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^n; \qquad (*)$$

(2) 进一步假设 $a+b=1$, 证明

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}.$$

证(1). 用数学归纳法证. 当 $n=1$ 时, 不等式(*)成立. 实际上是成立等式. 假设不等式(*)对 n 成立. 要证(*)对 $n+1$ 成立, 即

$$\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^{n+1}; \qquad (**)$$

于不等式(*)两边同时乘以 $\frac{a+b}{2}$ 得

$$\frac{a^n+b^n}{2}\cdot\frac{a+b}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^{n+1}.$$

因此要证(**), 只要证

$$\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{2} \geq \frac{a^n+b^n}{2} \cdot \frac{a+b}{2}$$

即可, 即只要证

$$2(a^{n+1}+b^{n+1}) \geq (a^n+b^n)(a+b) = a^{n+1}+b^{n+1}+a^nb+ab^n$$

或 $a^{n+1}+b^{n+1} \geq a^nb+ab^n$. 而这个不等式就是 $(a^n-b^n)(a-b) \geq 0$. 它显然成立.

证(2). 在结论(1)中的不等式(*)中, 取 $n=2$ 得

$$\frac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

在上式中, 用 $(a+\frac{1}{a})$ 和 $(b+\frac{1}{b})$ 分别代替 a 和 b 得

$$\frac{(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2}{2} \geq \left(\frac{(a+\frac{1}{a})+(b+\frac{1}{b})}{2}\right)^2.$$

再根据条件 $a+b=1$ 得

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{1}{2}\left(a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{ab}\right)^2.$$

对等式 $a+b=1$ 两边平方得 $a^2+b^2+2ab=1$. 由此得 $1=a^2+b^2+2ab \geq 2ab+2ab=4ab$. 因此 $\frac{1}{ab} \geq 4$. 于是

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{ab}\right)^2 = \frac{25}{2}.$$

命题得证.