Linear Algebra 2025 Fall

Sample Solution

TA: Yuhao Gong *Week 3-1*

《线性代数入门》Exercise 4.2.4、4.2.10(5)

Exercise 4.2.4 计算 $\det(A)$:

1. **Solution:** 其余行减去第一行。$|[i+j]| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & \cdots & n+1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-1 & n-1 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}$.$n=1,2$ 时行列式的值为 $2,-1$，$n \geq 3$ 时行列式的值为 0 .
2. **Solution:** 每行每列提出公因数。$|[ij]_{n\times n}| = \prod_{1,j=1}^{n} ij \, |[1]_{n\times n}|$.$n=1$ 时行列式的值为 1.$n \geq 2$ 时行列式的值为 0 .

Exercise 4.2.10(5) "双重"行变换。

Solution: 否. 直接计算知行列式不变当且仅当 $st(bc-ad)=0$.

《线性代数与几何》Exercise 1.8、1.9、1.15-1.18

Exercise 1.8

1. **Solution:** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -5 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -4 & 11 \\ 0 & 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & -4 & 11 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -5 & 20 \\ -1 & -4 & 11 \\ 0 & -10 & 40 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} -5 & 20 \\ -10 & 40 \end{vmatrix} = 0$

2. **Solution:** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -8$

3. **Solution:** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 5 \times 13 = 65$

4. **Solution:** $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{4+5+1+2} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

$$= (-4) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -7 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-4) \cdot 25 = -100$$

5. **Solution:** $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (c+3)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & a^2+2a+1 & a^2+4a+4 & a^2+6a+9 \\ b^2 & b^2+2b+1 & b^2+4b+4 & b^2+6b+9 \\ c^2 & c^2+2c+1 & c^2+4c+4 & c^2+6c+9 \\ d^2 & d^2+2d+1 & d^2+4d+4 & d^2+6d+9 \end{vmatrix} = 0$

按列拆行列式即可

6. **Solution:** 视 x, y 为形式变元，从而无需考虑可逆性. $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} =$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1+x & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1-x & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1+y & 1 \\ & 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & & & \\ -1 & & -x & & \\ -1 & & & y & \\ -1 & & & & -y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{y} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & x & & & \\ & & -x & & \\ & & & y & \\ & & & & -y \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & x & & & \\ & & -x & & \\ & & & y & \\ & & & & -y \end{vmatrix} = x^2y^2$$ 。（或：由行列式是各分量的多项式（从而是各分量的连续函数），又各分量是 x, y 的连续函数，故行列式是 x, y 的连续函数，从而对任意的 x, y 均有行列式的值为 x^2y^2 .）

7. **Solution:** $\begin{vmatrix} x & -1 & & \\ & x & -1 & \\ & & x & -1 \\ a_4 & a_3 & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} = x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$ 两种观点：一按逆序数展开；二展开一定是关于 x 的四次多项式，设系数求解（感觉第一种更直观）

Exercise 1.9

1. **Solution:** $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & \cdots & 2 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n-2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & n-2 \end{vmatrix}$$

   $$= (-2) \cdot (n-2)!$$

   这里用到按第二列展开

2. **Solution:**

   $$\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 - \frac{1}{a_1} \cdots - \frac{1}{a_n} & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = a_1 \cdots a_n \left(a_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \right)$$

3. **Solution:**

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ -y_1 & x_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -y_2 & x_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -y_{n-1} & x_{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + \frac{y_1}{x_1}a_2 + \frac{y_1x_1}{x_1x_2}a_n + \cdots & \cdots & a_{n-1} + \frac{y_{n-1}}{x_{n-1}}a_n & a_n \\ 0 & x_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= (x_1 \cdots x_{n-1}) \cdot \left(a_1 + \frac{y_1}{x_1}a_2 + \frac{y_1y_2}{x_1x_2}a_3 + \cdots + \frac{y_1\cdots y_{n-1}}{x_1\cdots y_{n-1}}a_n \right)$$

$$= a_1x_1 + \cdots x_{n-1} + a_2y_1x_2\cdots x_{n-1} + \cdots + a_ny_1\cdots y_{n-1}.$$

4. **Solution:** $\begin{vmatrix} x & y & & & \\ & x & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & x & y \\ y & & & & x \end{vmatrix} = x \cdot \begin{vmatrix} x & y & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & x & y \\ & & & x \end{vmatrix} + (-1)^{n+1}y \cdot \begin{vmatrix} y & & & \\ x & y & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & x & y \end{vmatrix}$

   $= x^n + (-1)^{n+1}y^n.$

5. **Solution:** $D_{2n} = \begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ b & & & & & a \end{vmatrix} = \left(a^2 - b^2\right) \cdot D_{2n-2} = (a^2 - b^2)^n$

6. **Solution:** $\begin{vmatrix} a_1 - b_1 & a_1 - b_2 & \cdots & a_1 - b_n \\ a_2 - b_1 & a_2 - b_2 & \cdots & a_2 - b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n - b_1 & a_n - b_2 & \cdots & a_n - b_n \end{vmatrix} = \begin{cases} (a_1 - a_2)(b_1 - b_2), n = 2 \\ 0 \quad n > 2. \end{cases}$

Exercise 1.15 Cramer 法则练习，过程略，仅展示答案

1. **Solution:** $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, -1, -1, 1)$
2. **Solution:** $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3, -4, -1, 1)$
3. **Solution:** $(x_1, x_2, x_3, x_4\ x_5) = (\frac{31}{63}, -\frac{5}{21}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{21}, \frac{1}{63})$

Exercise 1.16 证明题

Solution: 若 a_{11}, a_{21} 均为 0，方程变为 $\begin{cases} a_{12}x_2 = 0 \\ a_{22}x_2 = 0 \end{cases}$ ，此时 $\begin{cases} x_1 = k \\ x_2 = 0 \end{cases}$ 为方程非零解，且此时 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$

若 a_{11}, a_{21} 不全为 0，不妨设 $a_{11} \neq 0$ 。$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} - a_{12} \cdot \dfrac{a_{21}}{a_{11}} \end{bmatrix}$ ，故方程有非零解等价于

$$a_{22} - a_{12}\frac{a_{21}}{a_{11}} = 0 \Leftrightarrow a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$$

□

Exercise 1.17 证明题

Solution: 分为两步证明，第一步证明方程 $\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$ 确实是直线，考察 x, y 的系数，分别是 $-\begin{vmatrix} 1 & y_1 \\ 1 & y_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix}$ 由于 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 是不同的点，故两个系数不同时为 0，第一步证明完成。

第二步分别取 (x, y) 为 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 代入方程计算，由行列式性质知结果均为 0，故这两点都落在 $\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$ 表示的直线上。□

Exercise 1.18 **Solution:** $\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ 由行列式的性质可以知道三点都落在该方程上，另外由三点不共线知 x^2+y^2 的系数不为 0，因此该方程确实表示平面上的圆，即为所求。