《微积分A1》第五讲

教师 杨利军

清华大学数学科学系

2025年09月29日

Definition

定义: 给定一个序列 $\{a_n\}$. 记 E 为序列 $\{a_n\}$ 所有极限点(包括无穷极限点)的集合, 定义

$$\overline{\lim}\, a_n \overset{\text{def}}{=} \sup E, \quad \underline{\lim}\, a_n \overset{\text{def}}{=} \inf E,$$

并分别称它们为序列 $\{a_n\}$ 的上极限(superior limits) 和下极限 (inferior limits).

例一: 序列 $\{\sin\frac{n\pi}{2}\}_{n\geq 1} = \{1, 0, -1, 0, 1, \cdots\}$ 的极限点集 $E = \{-1, 0, 1\}$. 因此 $\overline{\lim}\sin\frac{n\pi}{2} = 1$. $\underline{\lim}\sin\frac{n\pi}{2} = -1$.

例二: 序列 $\{n^{(-1)^n}\} = \{\frac{1}{1}, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, 6, \cdots\}$ 的极限点集 $E = \{0, +\infty\}$, 故序列的上下极限为 $\overline{\lim}\, a_n = +\infty$, $\underline{\lim}\, a_n = 0$.

记号: 设 $\{a_n\}$ 为有界序列, 记

$$\bar{a}_n \overset{\text{def}}{=} \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots\}, \quad \underline{a}_n \overset{\text{def}}{=} \inf\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots\}.$$

显然 $\bar{a}_n$ 单调下降 (单调不增), $\underline{a}_n$ 单调上升 (单调不减), $\underline{a}_n \le \bar{a}_n$, 且 $\{\bar{a}_n\}$ 和 $\{\underline{a}_n\}$ 均有界. 因此极限 $\lim \bar{a}_n$ 和 $\lim \underline{a}_n$ 均存在.

Theorem

定理: (i) $\overline{\lim}\, a_n = \lim \bar{a}_n$; (ii) $\underline{\lim}\, a_n = \lim \underline{a}_n$.

证: 只证结论 (i). 结论 (ii) 的证明类似. 记 $\bar{a} \overset{\text{def}}{=} \lim \bar{a}_n$, 记 E 为序列 $\{a_n\}$ 的极限点集合. 要证 $\bar{a} = \sup E$. 先证 $\bar{a}$ 是极限点. 由于 $\bar{a}_n \downarrow \bar{a}$, 故对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得对 $\forall n \geq N$, $|\bar{a}_n - \bar{a}| < \varepsilon$. 取 $n = N$ 得 $|\bar{a}_N - \bar{a}| < \varepsilon$, 即

$$-\varepsilon + \bar{a} < \bar{a}_N < \varepsilon + \bar{a}.$$

取 $\varepsilon = 1$, 则存在正整数 N_1, 使得

$$-1 + \bar{a} < \bar{a}_{N_1} < 1 + \bar{a}.$$

因 $\bar{a}_{N_1} = \sup\{a_{N_1}, a_{N_1+1}, \cdots\}$, 故存在 $a_{n_1} \in \{a_{N_1}, a_{N_1+1}, \cdots\}$, 使得

$$-1 + \bar{a} < a_{n_1} \leq \bar{a}_{N_1} (< 1 + \bar{a}), \quad n_1 \geq N_1.$$

取 $\varepsilon = \frac{1}{2}$, 则存在正整数 N, 使得对 $\forall n \geq N$, $|\bar{a}_n - \bar{a}| < \frac{1}{2}$. 取 $n = N_2 > n_1$, 则

$$-1/2+\bar{a}<\bar{a}_{N_2}(<1/2+\bar{a}).$$

同理存在 $a_{n_2}\in\{a_{N_2},a_{N_2+1},\cdots\}$，使得

$$-\frac{1}{2}+\bar{a}<a_{n_2}\le\bar{a}_{N_2}<\frac{1}{2}+\bar{a},\quad n_2\ge N_2.$$

取 $\varepsilon=\frac{1}{k}$，$k\ge3$，则存在正整数 $n_k\ge N_k>n_{k-1}\ge N_{k-1}$，使得

$$-\frac{1}{k}+\bar{a}<a_{n_k}\le\bar{a}_{N_k}<\frac{1}{k}+\bar{a}.$$

于是我们得到序列 $\{a_n\}$ 的一个子列 $a_{n_k}\to\bar{a}$. 故 $\bar{a}$ 是一个极限点，即 $\bar{a}\in E$. 因此 $\bar{a}\le\sup E$. 再证相反的不等式，即 $\bar{a}\ge\sup E$. 对 $\forall b\in E$，即 b 是序列 $\{a_n\}$ 的一个极限点，故存在子列 $a_{m_k}\to b$. 由于 $a_{m_k}\le\bar{a}_{m_k}$，故令 $k\to+\infty$，则得 $b\le\bar{a}$. 这表明对 $\forall b\in E$，$b\le\bar{a}$. 因此 $\sup E\le\bar{a}$. 证毕.

注记

<u>注一</u>: 序列 $\{a_n\}$ 的上极限也常记作 $\limsup\{a_n\}$, 或者写作 $\limsup a_n$, 下极限也常记作 $\liminf\{a_n\}$ 或写作 $\liminf a_n$.

<u>注二</u>: 实际上, 序列 $\{a_n\}$ 的上极限就是序列的最大极限点, 下极限就是序列的最小极限点. 当序列无上界或无下界时, 结论显然. 当序列 $\{a_n\}$ 有界时, 可以证明其极限点集合 E 是有界闭集. 而有界闭集必存在最大点(即最大极限点) 和最小点(即最小极限点).

序列极限存在，当且仅当其上下极限相等

Theorem

定理：有界序列 $\{a_n\}$ 有极限，当且仅当 $\overline{\lim}\, a_n = \underline{\lim}\, a_n$.

Proof.

证明：有界序列 $\{a_n\}$ 有极限 $\Longleftrightarrow$ 序列 $\{a_n\}$ 有唯一一个有限极限点 $\Longleftrightarrow$ $\overline{\lim}\, a_n = \underline{\lim}\, a_n$. □

上下极限的性质

性质：设 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 为两个有界序列，则以下结论成立.

(i) 若 $a_n \le b_n$，$\forall n \ge n_0$，n_0 为某个正整数，则

$$\overline{\lim}\, a_n \le \overline{\lim}\, b_n, \quad \underline{\lim}\, a_n \le \underline{\lim}\, b_n;$$

(ii)

$$\underline{\lim}\, a_n + \underline{\lim}\, b_n \le \underline{\lim}\,(a_n + b_n)$$

$$\le \overline{\lim}\,(a_n + b_n) \le \overline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n;$$

(iii) 若 $a_n \ge 0$，$b_n \ge 0$，则

$$(\underline{\lim}\, a_n)(\underline{\lim}\, b_n) \le \underline{\lim}\,(a_n b_n)$$

$$\le \overline{\lim}\,(a_n b_n) \le (\overline{\lim}\, a_n)(\overline{\lim}\, b_n);$$

性质，续

(iv) $\underline{\lim}\,(-a_n) = -\overline{\lim}\,a_n$，$\overline{\lim}\,(-a_n) = -\underline{\lim}\,a_n$；

(v) 若极限 $\lim a_n$ 存在，则

$$\underline{\lim}\,(a_n + b_n) = \lim\ a_n + \underline{\lim}\,b_n,$$

$$\overline{\lim}\,(a_n + b_n) = \lim\ a_n + \overline{\lim}\,b_n;$$

(vi) 若 $a_n \geq 0$，$b_n \geq 0$，且极限 $\lim a_n$ 存在，则

$$\underline{\lim}\,(a_n b_n) = (\lim\ a_n)(\underline{\lim}\,b_n),$$

$$\overline{\lim}\,(a_n b_n) = (\lim\ a_n)(\overline{\lim}\,b_n).$$

证明

证明详见吉米多维奇的数学分析习题集习题解答(共六册)，第一册，题解 131，132，133，134. 以下只证结论 (ii)，即

$$\underline{\lim}\, a_n + \underline{\lim}\, b_n \le \underline{\lim}\,(a_n + b_n) \le \overline{\lim}\,(a_n + b_n) \le \overline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n.$$

中间的不等号显然成立. 第一个和第三个不等式的证明类似. 以下只证最后第三个不等式. 记 $c_n = a_n + b_n$，则对任意正整数 m，$\forall n \ge m$，$c_n = a_n + b_n$

$$\le \sup\{a_m, a_{m+1}, \cdots\} + \sup\{b_m, b_{m+1}, \ldots\} = \bar{a}_m + \bar{b}_m. \quad \text{于是}$$

$$\bar{c}_m = \sup\{c_m, c_{m+1}, \cdots\} \le \sup\{\bar{a}_m + \bar{b}_m, \bar{a}_m + \bar{b}_m, \cdots\} = \bar{a}_m + \bar{b}_m,$$

即 $\bar{c}_m \le \bar{a}_m + \bar{b}_m$. 于是 $\lim \bar{c}_m \le \lim \bar{a}_m + \lim \bar{b}_m$. 此即 $\overline{\lim}\,(a_n + b_n)$ $\le \overline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n$. 此即性质 (ii) 成立.

回忆 Stolz 定理关于 $\frac{*}{\infty}$ 型极限的结论.

定理: 考虑极限 $\lim \frac{a_n}{b_n}$. 若 $b_n \uparrow +\infty$ 严格, 且 $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ 存在 (包括正无穷或负无穷情形), 记作 L, 则 $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$.

另证: 只证 L 为有限数情形. 根据假设可知对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得

$$L - \varepsilon < \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} < L + \varepsilon, \quad \forall n \geq N.$$

$$\text{于是} \quad L - \varepsilon < \frac{a_{N+1} - a_N}{b_{N+1} - b_N} < L + \varepsilon$$

$$L - \varepsilon < \frac{a_{N+2} - a_{N+1}}{b_{N+2} - b_{N+1}} < L + \varepsilon$$

$$\vdots$$

$$L - \varepsilon < \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} < L + \varepsilon.$$

应用, 续一

引理 (分数不等式): 对任意 n 个分数 $\frac{x_k}{y_k}$ (约定 $y_k > 0$), $k = 1, 2, \cdots, n$, 则

$$\min\left\{\frac{x_1}{y_1}, \cdots, \frac{x_n}{y_n}\right\} \le \frac{x_1 + \cdots + x_n}{y_1 + \cdots + y_n} \le \max\left\{\frac{x_1}{y_1}, \cdots, \frac{x_n}{y_n}\right\}.$$

(引理的证明已留作上次课的补充习题)

将引理应用于上述不等式得

$$L - \varepsilon < \frac{(a_{N+1} - a_N) + \cdots + (a_{n+1} - a_n)}{(b_{N+1} - b_N) + \cdots + (b_{n+1} - b_n)} < L + \varepsilon.$$

此即 $$L - \varepsilon < \frac{a_{n+1} - a_N}{b_{n+1} - b_N} < L + \varepsilon.$$

亦即 $$L - \varepsilon < \frac{\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - \frac{a_N}{b_{n+1}}}{1 - \frac{b_N}{b_{n+1}}} < L + \varepsilon. \qquad (*)$$

注意到 $\frac{a_N}{b_{n+1}} \to 0$, $\frac{b_N}{b_{n+1}} \to 0$. 在不等式 (*) 中分别取上下极限, 并利用上下极限的性质可得

$$L-\varepsilon \le \overline{\lim}\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \le L+\varepsilon, \quad L-\varepsilon \le \underline{\lim}\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \le L+\varepsilon.$$

由于 $\varepsilon > 0$ 为任意小正数，上下极限均为常数，故它们必相等，且等于 L，即

$$\overline{\lim}\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \underline{\lim}\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = L.$$

从而极限 $\lim \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$ 存在且等于 L. 命题得证. $\square$

课本第1章总复习题第14题(p. 24): 设序列 $\{x_n\}$ 满足 $0 \le x_{n+m} \le x_n + x_m$, $\forall n, m$ 正整数. 证明 $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n}$ 存在.

证: 由假设 $0 \le x_{n+m} \le x_n + x_m$ 可知 $0 \le x_n \le nx_1$, 即 $0 \le \frac{x_n}{n} \le x_1$. 因此

$$0 \le \underline{\lim} \frac{x_n}{n} \le \overline{\lim} \frac{x_n}{n} \le x_1.$$

任意固定一个正整数 m, 则任意正整数 n 可表为 $n = qm + r$, 其中 $0 \le r < m$. 于是 $x_n = x_{mq+r} \le x_{qm} + x_r \le qx_m + x_r$.

$$\Rightarrow \quad 0 \le \frac{x_n}{n} \le \frac{qx_m}{qm + r} + \frac{x_r}{n} \le \frac{qx_m}{qm} + \frac{x_r}{n} \le \frac{x_m}{m} + \frac{M}{n},$$

其中 $M = \max\{x_1, \cdots, x_{m-1}\}$. 因此

例子，续

$$0 \le \frac{x_n}{n} \le \frac{x_m}{m} + \frac{M}{n},$$

注意上式 m 为固定的正整数，与指标 n 无关．令 $n \to +\infty$ 取上极限得

$$\overline{\lim} \frac{x_n}{n} \le \frac{x_m}{m}.$$

上式对任意正整数 m 均成立．于上式中关于 m 取下极限即得

$$\overline{\lim} \frac{x_n}{n} \le \underline{\lim} \frac{x_m}{m} \quad \Rightarrow \quad \overline{\lim} \frac{x_n}{n} = \underline{\lim} \frac{x_n}{n}.$$

这就证明了极限 $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n}$ 存在．证毕． □

Definition

定义: 序列 $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ 称为 Cauchy 序列或基本序列, 如果对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得 $|a_n - a_m| < \varepsilon,\ \forall n, m \geq N$, 或者 $|a_n - a_{n+p}| < \varepsilon,\ \forall n \geq N$, $\forall p \geq 1$.

Theorem

定理 [Cauchy 收敛准则]: 序列 $\{a_n\}$ 收敛, 当且仅当序列 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 序列.

注: Cauchy 收敛准则的优点: 判断序列的收敛性, 无需事先知道序列的极限值. 为证明 Cauchy 收敛准则, 我们回忆 Bolzano - Weierstrass 定理: 有界序列必有收敛子列.

证 $\Rightarrow$: 设 $a_n \to a$, 即对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ 正整数 N, 使得 $|a_n - a| < \varepsilon$, $\forall n \geq N$. 于是对 $\forall n, m \geq N$,

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

这表明收敛序列 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 序列.

$\Leftarrow$: 设 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 序列. 要证 $\{a_n\}$ 收敛. 为此要证 (i) 序列 $\{a_n\}$ 有界; (ii) 序列 $\{a_n\}$ 收敛. 证 (i): 序列 $\{a_n\}$ 有界. 证法与证有理数 Cauchy 列有界完全一样. 由于序列 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 列, 故对于 $\varepsilon = 1$, 存在正整数 N, 使得对 $\forall n \geq N$, $|a_n - a_N| < 1$, 即 $-1 + a_N < a_n < a_N + 1$. 故 $|a_n| < |a_N| + 1$. 于是对任意 $n \geq 1$, $|a_n| \leq \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_{N-1}|, |a_N| + 1\}$. 这就证明了序列 $\{a_n\}$ 有界.

证明，续

证 (ii): $\{a_n\}$ 收敛. 由于 $\{a_n\}$ 有界，根据 B-W 定理知 $\{a_n\}$ 有收敛子列 $\{a_{n_k}\}$. 设 $a_{n_k} \to a$，则对任意 $\varepsilon > 0$，存在正整数 K，使得 $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$, $\forall k \geq K$. 因 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 序列，故对上述 $\varepsilon > 0$，存在正整数 N_1，使得对 $\forall n, m \geq N_1$, $|a_n - a_m| < \varepsilon$. 取 $k_1 \geq K$ 充分大，使得 $n_{k_1} \geq N_1$. 于是对于 $\forall n \geq N_1$,

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_{k_1}}| + |a_{n_{k_1}} - a| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

这就证明了 Cauchy 序列 $\{a_n\}$ 收敛. 证毕.

关于实数的完备性总结

总结：以下七个定理反映了实数的完备性(也称连续性)：

确界存在定理，单调有界定理，区间套定理，聚点原理，B-W 定理，Cauchy 收敛准则，有限覆盖定理(尚未介绍).

可以证明以上七个定理相互等价. 到目前为止，我们已证明了如下蕴含关系：

确界存在定理 $\Rightarrow$ 单调有界定理 $\Rightarrow$ 区间套定理 $\Rightarrow$ 聚点原理 $\Rightarrow$ B-W 定理 $\Rightarrow$ Cauchy 收敛准则.

例一: 记 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$, 证明序列 $\{a_n\}$ 不收敛.

证: 反证. 假设序列 $\{a_n\}$ 收敛, 则序列 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 序列. 于是对于 $\varepsilon = \frac{1}{2}$, 存在正整数 N, 使得 $|a_{n+p} - a_n| < \frac{1}{2}$, $\forall n \geq N$, $\forall p \geq 1$. 取 $p = n \geq N$, 则

$$|a_{2n} - a_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

矛盾. 这说明序列 $\{a_n\}$ 不收敛. 证毕. □

例二

例二: 设序列 $\{a_n\}$ 满足 $\sum_{k=1}^{n}|a_{k+1}-a_k|\le M$, $\forall n\ge 1$, 其中 $M>0$ 为一正常数, 与 n 无关. 证明序列 $\{a_n\}$ 收敛.

证: 记 $b_n=\sum_{k=1}^{n}|a_{k+1}-a_k|$, 则序列 $\{b_n\}$ 单调增加, 且有上界 M. 故序列 $\{b_n\}$ 收敛, 从而是 Cauchy 列. 因此对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N$, 使得对 $\forall n\ge N$, $\forall p\ge 1$, $|b_{n+p}-b_n|<\varepsilon$, 即 $\sum_{k=n+1}^{n+p}|a_{k+1}-a_k|<\varepsilon$. 因此

$$|a_{n+1+p}-a_{n+1}|=|(a_{n+1+p}-a_{n+p})+(a_{n+p}-a_{n+p-1})+\cdots+(a_{n+2}-a_{n+1})|$$

$$\le|a_{n+1+p}-a_{n+p}|+|a_{n+p}-a_{n+p-1}|+\cdots+|a_{n+2}-a_{n+1}|<\varepsilon.$$

这说明序列 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 序列, 从而收敛. 证毕. $\square$

函数

Definition

定义: 一个映射 $f: J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 称作一个函数, 其中 J 通常为一个区间, 开的, 闭的或半开半闭, 称作函数 f 的定义域.

注: 常见的函数均以公式形式给出. 例如多项式, 三角函数等. 但也有许多重要函数不能以公式形式给出, 也很难画出它们的函数图像. 例如 Dirichlet 函数 $D: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 定义如下

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数}, \\ 0, & x \text{ 为无理数}. \end{cases}$$

注: 易见函数 $D(x)$ 可表为 $D(x) = \lim_{m\to+\infty}\left[\lim_{n\to+\infty}\cos^n(2\pi m!x)\right]$.

Definition

定义: 设 $f, g : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为两个函数, 定义它们的

$$
\begin{array}{ll}
\text{和差函数} & (f \pm g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) \pm g(x) \\
\text{乘积函数} & (f \cdot g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) \cdot g(x) \\
\text{商函数} & (f/g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x)/g(x),\ g(x) \neq 0.
\end{array}
$$

函数的复合

Definition

定义: 设 $g: J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f: K \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为两个函数. 若函数 g 的值域 $g(J) \overset{\text{def}}{=} \{g(x), x \in J\}$ 包含在函数 f 的定义域 K 内, 即 $g(J) \subset K$, 则函数 f 可与函数 g 复合, 且它们的复合函数 $f \circ g$ 定义如下

$$(f \circ g)(x) \overset{\text{def}}{=} f(g(x)), \quad x \in J.$$

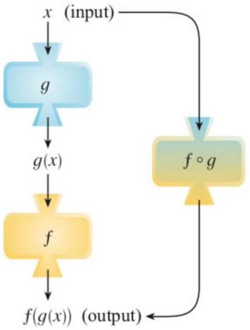


FIGURE 11

The $f \circ g$ machine is composed of the g machine (first) and then the f machine.

复合函数例子

Example

例: 设 $f(x)=e^x$, $g(x)=\sin x$, 它们的定义域均为 $\mathbb{R}$, 则 $g\circ f$ 和 $f\circ g$ 均有意义, 且 $(g\circ f)(x)=\sin(e^x)$, $(f\circ g)(x)=e^{\sin x}$.

注: (i) 并非任意两个函数均可复合; (ii) 一个复合函数有意义, 并不意味着另一个复合函数有意义; (iii) 当两个复合函数均有意义时, 它们一般并不相同. 如上例.

基本初等函数

Definition

<u>定义</u>: 以下六类函数均称作基本初等函数.

(i) 多项式 $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$;

(ii) 幂函数 x^p, $x > 0$, $p \in \mathbb{R}$;

(iii) 指数函数 a^x, $a > 0$;

(iv) 对数函数 $\log_a x$, $a > 0$, $x > 0$;

(v) 三角函数 $\sin x$, $\cos x$, $\cdots$;

(vi) 反三角函数 $\arcsin x$, $\arccos x$, $\cdots$.

Definition

<u>定义</u>: 由基本初等函数经过有限次四则运算，以及有限次复合运算所得到的函数称作初等函数.

初等函数包含了许多常见的函数. 例如函数 $|x|$ 是初等函数，因为它可以表示为 $|x|=\sqrt{x^2}$. 可以证明 Dirichlet 函数不是初等函数. 再例如，当 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均为初等函数时，函数 $M(x)=\max\{f(x),g(x)\}$ 和 $m(x)=\min\{f(x),g(x)\}$ 均为初等函数. 因为这两个函数可表为

$$M(x)=\max\{f(x),g(x)\}=\frac{1}{2}\Big(f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|\Big),$$

$$m(x)=\min\{f(x),g(x)\}=\frac{1}{2}\Big(f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|\Big).$$

参见课本第3页习题1.1题6.

Definition

定义: 设函数 $f(x)$ 在定义域(区间) J 上定义. 如果存在正常数 $M > 0$, 使得 $|f(x)| \leq M, \forall x \in J$, 则称函数 $f(x)$ 在 J 上有界.

例如函数 $\sin x$ 和 $\cos x$ 在其定义域 $\mathbb{R}$ 上有界. 因为 $|\sin x| \leq 1$, $|\cos x| \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

注: 函数的有界性与其定义区间有关. 例如函数 $\frac{1}{x}$ 在区间 $[1, 2]$ 上有界, 而在区间 $(0, 1]$ 上无界.

函数的周期性

Definition

定义: 设函数 $f(x)$ 在实数集 J (不必是整个实轴) 上定义. 如果存在常数 $T>0$, 使得 $f(x+T)=f(x)$, $\forall x\in J$, 则称 $f(x)$ 为周期为 T 的周期函数.

Example

例: (i) 常数函数是周期函数, 任意正常数均为它的周期. (ii) 三角函数 $\sin x$, $\cos x$ 均为周期函数, 且周期为 2π.

显然周期函数有无穷个周期. 因为若周期函数有周期 $T > 0$, 则 nT 也是周期, 这里 n 为任意正整数.

问题: 非常数函数是否有最小正周期?

回答是否定的. 例如 Dirichlet 函数 $D(x)$ 是周期的, 且以任意正有理数为周期. 由于不存在最小的正有理数, 故周期函数 $D(x)$ 不存在最小正周期. 以后在习题课里我们将证明, 不是常数的, 连续的周期函数有最小正周期.

我们约定: 称某个连续周期函数的周期为 T, 意思是 T 是最小的正周期. 例如我们常说三角函数 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的周期为 2π.

单调函数

Definition

<u>定义</u>: 设 $f(x)$ 在区间 J 上定义. (i) 若对于任意两点 $x_1 < x_2$, $\forall x_1, x_2 \in J$, 均有 $f(x_1) \leq f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 J 上单调上升, 并记作 $f(x)\uparrow$. 若不等号 $\leq$ 严格成立, 则称函数 $f(x)$ 在区间 J 上严格单调上升.

(ii) 类似可定义函数 $f(x)$ 在区间 J 上单调下降, 以及严格单调下降, 并记作 $f(x)\downarrow$.

单调函数的图像

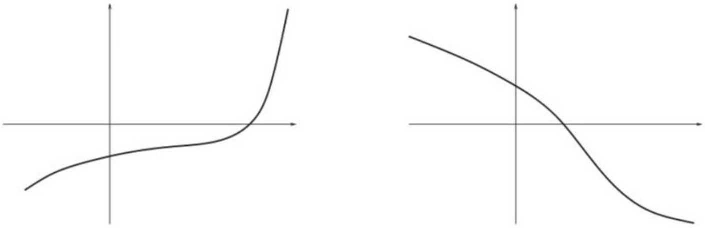


Fig. 2.24 Two graphs of monotonic functions. *Left*: increasing, *Right*: decreasing

反函数

Definition

定义: 若函数 $f: J \to K$ 为一一对应即双射 (见如下注记), 其中 $K, J \subset \mathbb{R}$, 则存在唯一的反函数 $f^{-1}: K \to J$ 满足如下条件

$$\forall y \in K, \quad f^{-1}(y) = x, \quad \text{其中} \quad f(x) = y.$$

注一: (i) 函数 f 称为单射, 如果 $f(x_1) \neq f(x_2)$, $\forall x_1 \neq x_2$.

(ii) 函数 f 称为满射, 如果 $\forall y \in K$, 存在 $x \in J$, 使得 $f(x) = y$.

(iii) 函数 f 称为双射, 如果 f 既是单射又是满射.

注二: 双射 bijective, 单射 injective, 满射 surjective

反函数的例子，反函数与严格单调性

Example

例：(i) 函数 $f(x) = x$ $(x \in \mathbb{R})$ 有反函数，其反函数为 $f^{-1}(y) = y$ $(y \in \mathbb{R})$;

(ii) 函数 $f(x) = 2x + 1$ $(x \in \mathbb{R})$ 有反函数 $f^{-1}(y) = \frac{1}{2}(y - 1)$, $(y \in \mathbb{R})$;

(iii) 函数 $f(x) = \sin x$ $(x \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$ 有反函数 $f^{-1}(y) = \arcsin y$, $(|y| \le 1)$.

Theorem

定理：(i) 若函数 $f : J \to K$ 严格单调，则存在反函数 $f^{-1}(y)$，其中 $K = f(J)$, $K, J \subset \mathbb{R}$

(ii) 若函数严格单调上升，则其反函数也严格单调上升；

(iii) 若函数严格单调下降，则其反函数也严格单调下降;

(iv) 若奇函数可逆，则其反函数也是奇函数.

结论显然．证明略去．见课本第 36 页习题 2.1 题 20, 21.

函数与反函数图像

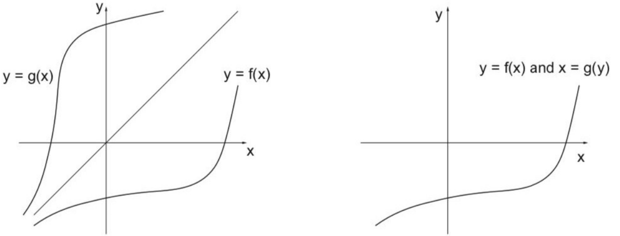


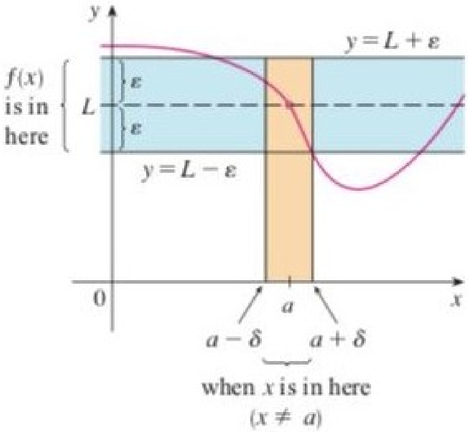
Fig. 2.25 *Left*: graphs of an increasing function f and its inverse g. *Right*: if you write $f(x) = y$ and $x = g(y)$, then the graph of $f(x) = y$ is also the graph of $g(y) = x$

Definition

定义: 设函数 $f(x)$ 在 $U^0(a,r) \stackrel{\text{def}}{=} (a-r,a+r)\backslash\{a\}$ 上有定义, $U^0(a,r)$ 称作点 a 的 r 去心邻域. 如果存在数 L, 使得对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta\in(0,r]$, 使得对任意 $x\in U^0(a,\delta)$, $|f(x)-L|<\varepsilon$, 则称函数 $f(x)$ 在点 a 处有极限且极限值为 L, 并记作 $f(x)\to L$, $x\to a$, 或 $\lim_{x\to a} f(x)=L$.

注: 函数 $f(x)$ 在点 a 处有定义, 或者没有定义, 与极限 $\lim_{x\to a} f(x)$ 存在与否无关.

函数极限 $\lim_{x\to a} f(x) = L$ 可图示如下.



Example

例一：证明极限 $\lim_{x\to x_0}\sin x = \sin x_0$.

证：由于

$$|\sin x - \sin x_0| = 2\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}\right|$$

$$\le 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \le 2\left|\frac{x-x_0}{2}\right| = |x-x_0|,$$

故对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\varepsilon$，使得当 $|x-x_0|<\delta$ 时，$|\sin x-\sin x_0|<\varepsilon$.

命题得证.

注：上述结论 $\lim_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$ 表明三角函数 $\sin x$ 在任意点 x_0 连续. 稍后定义连续. 此外，在上述证明中用到了不等式 $\sin x<x,\ \forall x\in(0,\frac{\pi}{2})$. 稍后将证明这个结论.

Definition

<u>定义</u>: 设函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 的右侧有定义, 即在开区间 $(a, a+\rho)$ 上有定义, 其中 $\rho>0$. 若存在数 $L\in\mathbb{R}$, 使得对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得

$$|f(x)-L|<\varepsilon, \quad \forall x\in(a, a+\delta),$$

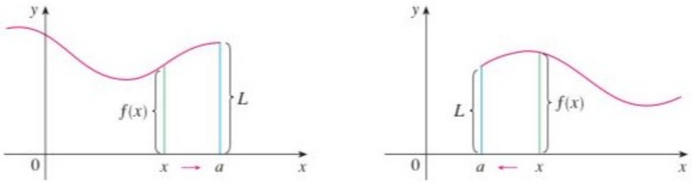
则称 $f(x)$ 在点 a 处的右侧极限存在, 记作 $\lim_{x\to a^+} f(x)=L$ 或 $f(x)\to L$ $(x\to a^+)$, 且极限值 L 常记作 $f(a^+)$, 即

$$f(a^+)\overset{\text{def}}{=}\lim_{x\to a^+} f(x).$$

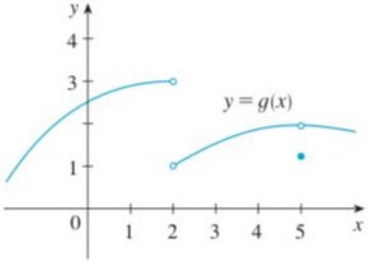
类似可定义函数 $f(x)$ 在点 a 处的左侧极限, 并记左侧极限为 $f(a^-)$, 即

$$f(a^-)\overset{\text{def}}{=}\lim_{x\to a^-} f(x).$$

单侧极限图示



(a) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$ (b) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$



假设函数 $g(x)$ 的图像如图所示，则

(i) $\lim_{x\to 2^-} g(x) = 3$, $\lim_{x\to 2^+} g(x) = 1$;

(ii) $\lim_{x\to 5^-} g(x) = 2 = \lim_{x\to 5^+} g(x)$.

符号函数 $\mathrm{sgn}(x)$ 定义如下

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

显然 $\lim_{x\to0^-} \mathrm{sgn}(x) = -1$, $\lim_{x\to0^+} \mathrm{sgn}(x) = 1$. 于是 $\mathrm{sgn}(0^-) = -1$, $\mathrm{sgn}(0^+) = 1$.

极限存在 $\Leftrightarrow$ 两个单侧极限均存在且相等

Theorem

定理: 极限 $\lim_{x\to a} f(x)$ 存在 $\Longleftrightarrow$ 两个单侧极限 $\lim_{x\to a^\pm} f(x)$ 均存在且相等.

结论显然. 证明略去.

Theorem

定理 [课本第40页例2.2.6]: 设函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上单调, 则 $f(x)$ 在 (a,b) 上每一点处的左右极限均存在.

证: 不妨设 $f(x)\uparrow$. 设 $x_0\in(a,b)$. 以下证左极限 $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ 存在. 右极限情形类似, 故略去. 记 $S \overset{\text{def}}{=} \{f(x), x\in(a,x_0)\}$. 显然集 S 非空, 且有上界. 实际上 $f(x_0)$ 就是一个上界. 记 $L \overset{\text{def}}{=} \sup S$. 根据上确界定义知对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $s^*\in S$, 使得 $s^*>L-\varepsilon$. 设 $s^*=f(x^*)$, $x^*\in(a,x_0)$. 取 $\delta=x_0-x^*>0$, 则 $\forall x\in(x_0-\delta,x_0)$,

$$L-\varepsilon<f(x^*)\leq f(x)\leq L<L+\varepsilon.$$

这表明 $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ 存在且等于 L. 证毕. $\square$

Definition

定义: 设 $f(x)$ 在区间 $(a,+\infty)$ 上定义. 若存在数 $L\in\mathbb{R}$, 使得对任意 $\varepsilon>0$, 存在数 $M>a$, 使得

$$|f(x)-L|<\varepsilon,\quad \forall x>M,$$

则称函数 $f(x)$ 在无穷远 $x=+\infty$ 处有极限 L, 记作 $f(x)\to L$, $x\to+\infty$ 或 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=L$ 或 $f(+\infty)=L$. 当 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,b)$ 定义时, 可类似定义极限 $\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$, 以及记号 $f(-\infty)$ 的意义.

Example

例一: 证明当 $a>1$ 时, $a^{-x}\to 0,\ x\to+\infty$.

证明: 对任意 $\varepsilon>0$, 则

$$|a^{-x}-0|=a^{-x}<\varepsilon \ \Leftrightarrow\ -x\ln a<\ln\varepsilon \ \Leftrightarrow\ x>\frac{-\ln\varepsilon}{\ln a}.$$

故对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $M=\frac{-\ln\varepsilon}{\ln a}$, 使得当 $x>M$ 时, $|a^{-x}-0|=a^{-x}<\varepsilon$.

这就证明了 $a^{-x}\to 0,\ x\to+\infty$. 证毕. □

Example

例二: 求极限 $\lim_{x\to+\infty}\left[\ln(x+1)-\ln x\right]$.

解: 由于 $\ln(x+1)-\ln x=\ln\frac{x+1}{x}=\ln(1+\frac{1}{x})$, 且当 $x\to+\infty$ 时, $\frac{1}{x}\to 0$. 故可猜测所求极限为零. 现证明如下. 对 $\forall\varepsilon>0$ 以及 $x>0$,

$$|\ln(x+1)-\ln x-0|<\varepsilon \quad\Leftrightarrow\quad \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow\quad 1+\frac{1}{x}<e^{\varepsilon}\quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{x}<e^{\varepsilon}-1\quad\Leftrightarrow\quad x>\frac{1}{e^{\varepsilon}-1}.$$

因此对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists M=\frac{1}{e^{\varepsilon}-1}$, 使得当 $x>M$ 时, $|\ln(x+1)-\ln x-0|<\varepsilon$.

故 $\lim_{x\to+\infty}[\ln(x+1)-\ln x]=0$. 解答完毕.

以下函数极限的若干性质之证明，与相应序列极限性质的证明类似，故从略.

Theorem

定理(唯一性)：若极限 $\lim_{x\to a} f(x)$ 存在，则极限值唯一.

Theorem

定理(有界性)：若极限 $\lim_{x\to a} f(x)$ 存在，则函数 $f(x)$ 在点 a 附近有界，即存在 $\delta > 0$，以及存在 $M > 0$，使得对 $\forall x \in U^0(a,\delta)$，$|f(x)| \le M$.

Theorem

定理(保序性)：设 $\lim_{x\to a} f(x) = A$ 且 $\lim_{x\to a} g(x) = B$.

(i) 若 $A < B$，则存在 $\delta > 0$，使得对 $\forall x \in U^0(a,\delta)$，$f(x) < g(x)$.

(ii) 若存在 $\rho > 0$，使得 $f(x) \le g(x)$，$\forall x \in U^0(a,\delta)$，则 $A \le B$.

Theorem

Sandwich 定理(两边夹法则):

设对于 $\forall x \in U^0(a,r)$, $f(x) \le g(x) \le h(x)$. 若极限 $\lim_{x\to a} f(x)$ 和极限 $\lim_{x\to a} h(x)$ 均存在且相等, 它们共同的极限记作 L, 则极限 $\lim_{x\to a} g(x)$ 存在且等于 L.

Theorem

定理(四则运算): 设 $\lim_{x\to a} f(x) = A$ 且 $\lim_{x\to a} g(x) = B$, 则和差极限 $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)]$, 乘积极限 $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)]$, 以及商极限 $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ (补充假设 $B \neq 0$) 均存在, 并且

(i) $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = A \pm B$;

(ii) $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = AB$;

(iii) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{A}{B}$.

例

Example

例: 显然 $\lim_{x\to x_0} x = x_0$. 根据函数极限的四则运算可知, $\lim_{x\to x_0} x^n = x_0^n$. 进而对多项式 $P(x)$ 有 $\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$, 对分式函数 $\frac{P(x)}{Q(x)}$, 假设 $Q(x_0) \neq 0$, 有 $\lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.

注: 若 $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, 我们称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续. (稍后正式定义). 上述结论表明, 多项式函数 $P(x)$ 处处连续, 有理分式函数 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 在其定义域上处处连续.

Theorem

定理: 设 $\lim_{x\to x_0} g(x) = u_0$ 且 $\lim_{u\to u_0} f(u) = A$. 再设 (*) $g(x) \neq u_0$, $\forall x \in U^0(x_0, \rho)$, 则 $\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = A$.

注: 条件 (*) 是必要的. 缺少它结论可以不成立. 考虑课本第51-52页习题 2.3 题 10(1). 设

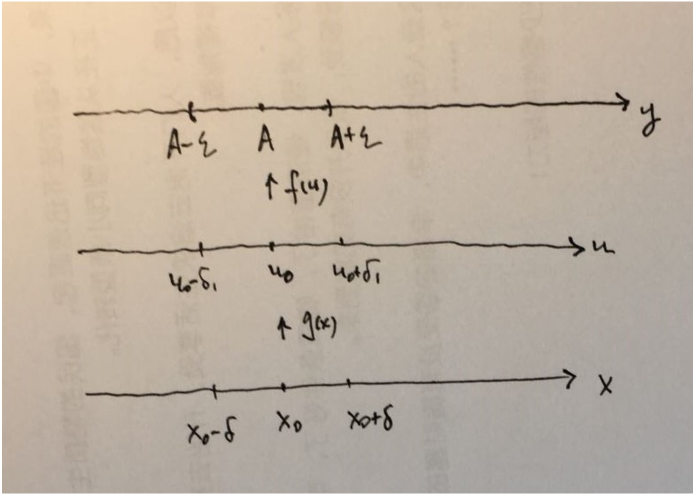
$$f(u) = \begin{cases} 1, & u = 0, \\ 0, & u \neq 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1, & x = 1, \\ 0, & x \neq 1. \end{cases}$$

显然 $\lim_{u\to 0} f(u) = 0$, $\lim_{x\to 1} g(x) = 0$. 而 $\lim_{x\to 1} f(g(x)) = 1 \neq 0$.

定理证明

证: 要证当 $|x-x_0|$ 充分小时, $|f(g(x))-A|$ 充分小. 已知 (1) 当 $|u-u_0|$ 充分小时, $|f(u)-A|$ 充分小; (2) 当 $|x-x_0|$ 充分小时, $|g(x)-u_0|$ 充分小. 由 (1) 知对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta_1>0$, 使得 $|f(u)-A|<\varepsilon$, $\forall u\in U^0(u_0,\delta_1)$. 根据 (2), 以及条件 (*), 可知对于 $\delta_1>0$, 存在 $\delta>0$, 使得 $g(x)\in U^0(u_0,\delta_1)$, $\forall x\in U^0(x_0,\delta)$. 因此 $|f(g(x))-A|<\varepsilon$, $\forall x\in U^0(x_0,\delta)$. 命题得证. $\square$

证明图示



例子

Example

例: 证明 $\lim_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0$.

证: 可利用复合函数极限定理证明. 由于 $\cos x=1-2\sin^2\frac{x}{2}$, 故

$$\lim_{x\to x_0}\cos x=\lim_{x\to x_0}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)$$

$$=1-2\lim_{x\to x_0}\sin^2\frac{x}{2}=1-2\sin^2\frac{x_0}{2}=\cos x_0.$$

命题得证.

注一: 极限 $\lim_{x\to x_0}\sin^2\frac{x}{2}$ 可看作三重复合函数的极限 $\lim_{x\to x_0}f(g(h(x)))$, 同样可应用复合函数极限定理, 其中 $h(x)=\frac{x}{2}$, $g(y)=\sin y$, $f(z)=z^2$.

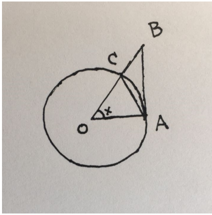
注二: 也可利用三角函数的和差化积公式证 $\lim_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0$. 与证明极限 $\lim_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$ 类似.

一个重要的函数极限

Theorem

定理: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

证: 由于函数 $\frac{\sin x}{x}$ 是偶函数, 故只需证 $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$. 如图作单位圆.



取弧度 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$. 由图可知, $\triangle AOC$ 面积 $<$ 扇形 AOC 面积 $<$ $\triangle AOB$ 面积, 即 $\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\tan x$. 亦即 $\sin x<x<\tan x$, $0<x<\frac{\pi}{2}$.

证明，续

由 $\sin x < x$ 得 $\frac{\sin x}{x} < 1$. 再由 $x < \tan x$ 得 $\frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$，即 $\cos x < \frac{\sin x}{x}$. 总结得

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

回忆结论 $\lim_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$，故 $\lim_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1$. 再由函数极限的两边夹法则知 $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$. 因 $\frac{\sin x}{x}$ 是偶函数，故 $\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$. 于是 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. 证毕. $\square$

Example

例: 求极限 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}$, 其中 a, b 为非零常数.

解:

$$\frac{\sin ax}{\sin bx}=\frac{\sin ax}{ax}\cdot\frac{ax}{bx}\cdot\frac{1}{\frac{\sin bx}{bx}}\to 1\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{1}=\frac{a}{b},\quad x\to 0.$$

解答完毕.

Theorem

定理: $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

证明分三步. 第一步: 证明 $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]} = e$, 这里 $[x]$ 为取整函数.

已证 $(1+\frac{1}{n})^n \uparrow e$ 严格, 即 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^*$, 使得 $0 < e - (1+\frac{1}{n})^n < \varepsilon$, $\forall n \geq N$. 故对任意 $x \geq N$, 则 $[x] \geq N$, 从而

$$0 < e - \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]} \leq e - \left(1+\frac{1}{N}\right)^N < \varepsilon.$$

这就证明了 $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]} = e$.

第二步：证明

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}=e,\quad \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}=e.$$

这是因为

$$\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}=\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)\to e\cdot 1=e;$$

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}=\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+1}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{-1}\to e\cdot 1^{-1}=e.$$

证明，续二

第三步，证 $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$. 显然对任意 $x\in\mathbb{R}$ 有 $[x]\le x<[x]+1$. 因此对任意 $x>1$,

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}.$$

根据第二步的结论知，上式两端的极限均为 e. 故由函数极限的两边夹法则可知，中间项的极限也存在且等于 e. 即

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

证毕. $\square$

Corollary

推论: (i) $\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$; (ii) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

证 (i). 令 $y=-x$, 则当 $x\to-\infty$ 时, $y\to+\infty$. 于是

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(1+\frac{1}{-y}\right)^{-y} = \left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} = \left(\frac{y}{y-1}\right)^y$$

$$= \left(1+\frac{1}{y-1}\right)^y = \left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)$$

$$\to e\cdot 1 = e, \quad y\to+\infty.$$

结论 (i) 得证.

证 (ii). 要证 $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$, 考虑两个单侧极限. 当 $x\to 0^+$ 时, $y=\frac{1}{x}\to +\infty$. 于是

$$(1+x)^{\frac{1}{x}}=\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\to e,\quad y\to +\infty.$$

当 $x\to 0^-$ 时, $y=\frac{1}{x}\to -\infty$. 于是

$$(1+x)^{\frac{1}{x}}=\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\to e,\quad y\to -\infty.$$

即两个单侧极限存在且均等于 e. 结论 (ii) 得证. □

例一

Example

例一：求极限 $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

解：

$$\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\to\frac{1}{2}1^2=\frac{1}{2}.$$

故 $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$. 解答完毕.

注：极限 $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ 属于基本极限模式. 需熟记.

例二

Example

例二: 求极限 $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{a^x}$, 其中 $a>1$.

解: 已证 $\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{a^n}=0$. 故 $\lim_{x\to+\infty}\frac{[x]}{a^{[x]}}=0$. 由于

$$0<\frac{x}{a^x}<\frac{[x]+1}{a^{[x]}}\le\frac{[x]}{a^{[x]}}+\frac{1}{a^{[x]}}\to 0,\quad x\to+\infty.$$

故 $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{a^x}=0$. 解答完毕.

注: 极限 $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{a^x}=0\ (a>1)$ 属于基本极限模式. 需熟记.

Example

例三: 求极限 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$.

解: 由 $\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n}=0$, 知 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln[x]}{[x]}=0$. 因此对 $x>1$

$$0<\frac{\ln x}{x}\le\frac{\ln([x]+1)}{[x]}\le\frac{\ln([x]+1)}{[x]+1}\cdot\frac{[x]+1}{[x]}\to 0\cdot 1=0.$$

根据函数极限的两边夹法则可知 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$. 解答完毕.

注: 极限 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ 属于基本极限模式. 需熟记.

第一次作业，共九大题

习题一：课本第23页习题1.5 题2(1)(2)(3)(4)：利用 Cauchy 收敛原理证明极限 $\lim_{n\to+\infty} a_n$ 存在.

$$(1)\quad a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin k}{2^k};\qquad (2)\quad a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos(k!)}{k(k+1)};$$

$$(3)\quad a_n=\sum_{k=1}^{n}c_kq^k,\ \text{其中}\ |q|<1,\ \{c_k\}\ \text{有界};$$

$$(4)\quad a_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^2}\right);$$

习题二. 课本第23页习题1.5 题4：假设数列 $\{a_n\}$ 满足条件：对任意正整数 p, $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_{n+p}-a_n)=0$. 问 $\{a_n\}$ 是否为 Cauchy 列？研究如下例子：

$$(1)\quad a_n=\sqrt{n};\qquad (2)\quad a_n=\ln n;\qquad (3)\quad a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}.$$

习题三．课本第23页习题1.5 题5：设两个数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 均有界，证明存在正整数列 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$，使得两个子列 $\{a_{n_k}\}$ 和 $\{b_{n_k}\}$ 均收敛．

习题四．课本第23页习题1.5 题6：证明若一个有界数列 $\{a_n\}$ 发散，则 $\{a_n\}$ 存在两个收敛子列，它们收敛于两个不同的极限．

习题五．课本第23页习题1.5 题7：证明若数列 $\{a_n\}$ 无界，但 $|a_n| \not\to +\infty$，则数列 $\{a_n\}$ 存在两个子列 $\{a_{l_k}\}$ 和 $\{a_{m_k}\}$，使得 $|a_{l_k}| \to +\infty$，且 $a_{m_k} \to a \in \mathbb{R}$．

习题六．课本第23页习题1.5 题8：设 $\{a_n\}$ 满足 $|a_{n+1} - a_n| \leq q|a_n - a_{n-1}|$，$\forall n \geq 1$，其中 $0 < q < 1$ 为常数，证明数列 $\{a_n\}$ 收敛．

习题七．课本第24页第一章总复习题题3：证明若单调序列 $\{a_n\}$ 有一个收敛子列，则序列 $\{a_n\}$ 收敛．

作业，续二

习题八．课本第24页第一章总复习题题4：若将一个序列 $\{a_n\}$ 作为一个实数集合既没有最大值，也没有最小值，证明序列 $\{a_n\}$ 发散．

习题九．课本第24页第一章总复习题题6：设 $\{a_n\}$ 为单调序列，且极限

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=A$$

存在，其中 A 可以是无穷．证明 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A$.