《微积分A1》第二十五讲

教师 杨利军

清华大学数学科学系

2025年12月15日

设曲线Γ: $\vec{r}(t)=(x(t),y(t))$上分布有某种物质，其分布密度(线密度)为$\rho(t)$，其中$t\in[\alpha,\beta]$. 此时称曲线为质量曲线. 往下来定义曲线的质心位置.

1. 求总质量. 取质量微元：密度$\times$弧长微元，即

$$dM=\rho(t)\cdot d\ell=\rho(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt.$$

于是总质量为

$$M=\int_\alpha^\beta\rho(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt.$$

2. 求曲线关于x轴和y轴的总力矩. 微元dM关于x轴和y轴的力矩分别为

$$dM_x=y(t)dM=y(t)\rho(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt,$$

$$dM_y=x(t)dM=x(t)\rho(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt.$$

因此质量曲线关于x轴和y轴的总力矩分别为

$$M_x = \int_\alpha^\beta y(t)\rho(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt,$$

$$M_y = \int_\alpha^\beta x(t)\rho(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt.$$

3. 定义质量曲线的<u>质心</u> $(\bar{x}, \bar{y})$ 如下：

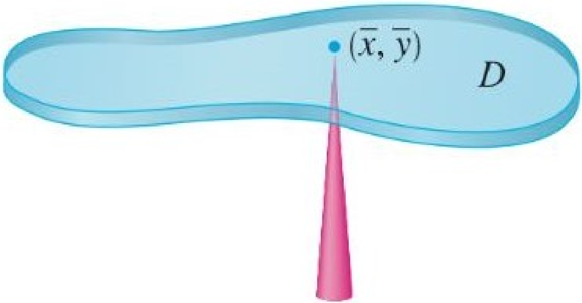
$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\int_\alpha^\beta x(t)\rho(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt}{\int_\alpha^\beta \rho(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt},$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\int_\alpha^\beta y(t)\rho(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt}{\int_\alpha^\beta \rho(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt}.$$

质量曲线Γ的质心 $(\bar{x}, \bar{y})$ 可以等价地表述为 $\bar{x}M = M_y$, $\bar{y}M = M_x$. 这表明，质心是这样一个点，使得若将整条曲线的质量集中放置这个点的位置上，则这个质点关于x轴和y轴所产生的力矩，与质量曲线所产生的力矩相同.

曲线质心的物理意义

物理意义: 假设质量曲线水平放置在一个无质量的薄板上, 曲线的质心位置为 $(\bar{x}, \bar{y})$, 如图所示. 那么薄板在如图支撑下, 处于平衡状态.



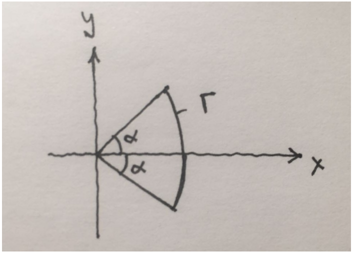
若将一条曲线 Γ: $\vec{r}(t)=(x(t),y(t))$ 看作是线密度是常数的质量曲线时，即 $\rho(t)=c$ 为常数时，则曲线 Γ 的质心称为作曲线 Γ 的形心，即曲线 Γ 的形心 $(\bar{x},\bar{y})$ 如下确定

$$\bar{x}=\frac{\int_\alpha^\beta x(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt}{\int_\alpha^\beta \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt},$$

$$\bar{y}=\frac{\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt}{\int_\alpha^\beta \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt}.$$

显然曲线的形心完全由曲线的形状确定，与密度 c 无关.

例: 求圆弧 $x = r\cos t,\ y = r\sin t$ 的形心, $|t| \le \alpha,\ 0 < \alpha \le \frac{\pi}{2}$.



解: 由于 $x'(t)^2 + y'(t)^2 = (-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2 = r^2$, 故曲线的总质量(总弧长)为

$$M = \int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt = 2r\alpha,$$

这里已假设质量密度为常数 1, 曲线关于 x 轴和 y 轴的总力矩为

例子，续

$$M_x = \int_{-\alpha}^{\alpha} y(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt = \int_{-\alpha}^{\alpha} r\sin t \cdot rdt = 0$$

$$M_y = \int_{-\alpha}^{\alpha} x(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt = \int_{-\alpha}^{\alpha} r\cos t \cdot rdt = 2r^2\sin\alpha.$$

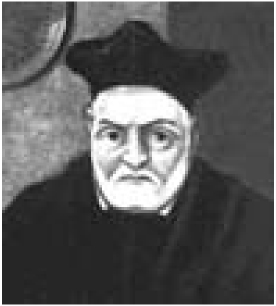
由形心坐标公式得

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{2r^2\sin\alpha}{2r\alpha} = \frac{r\sin\alpha}{\alpha}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = 0.$$

解答完毕.

Theorem

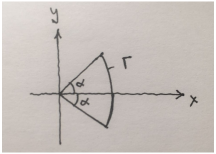
定理: 曲线段围绕一直线旋转一周所得旋转面的侧面积, 等于曲线的弧长, 乘以形心绕直线旋转一周的周长.



Paul Guldin, 1577-1643, 瑞士人

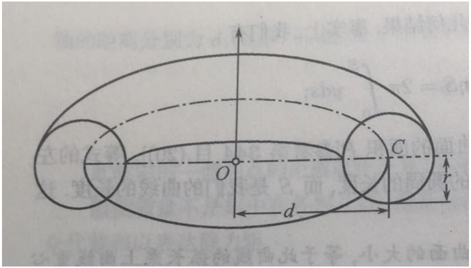
例一

<u>例一</u>: 已求得圆弧 Γ: $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $|t| \le \alpha$, $0 < \alpha \le \frac{\pi}{2}$, 的形心位置为 $(\frac{r\sin\alpha}{\alpha}, 0)$. 如图所示.



由 Guldin 第一定理知, 圆弧 Γ 绕 y 轴旋转一周所得旋转面(一个球面带)的面积 S, 等于 Γ 的弧长 $2r\alpha$, 乘以形心绕 y 轴旋转一周的周长, 即 $2\pi\frac{r\sin\alpha}{\alpha}$, 亦即 $S = 2r\alpha \cdot 2\pi\frac{r\sin\alpha}{\alpha} = 4\pi r^2\sin\alpha$. 另一方面, 由 Archimedes 球面带定理知, 这部分球面面积等于相应的柱面面积, 即高 $\times$ 周长. 显然柱面的高为 $2r\sin\alpha$, 周长为 $2\pi r$. 故 $S = 2r\sin\alpha \cdot 2\pi r = 4\pi r^2\sin\alpha$. 这个结果与利用 Guldin 第一定理的计算结果一致.

例二: 计算如图所示的环面面积.



解: 环面可看作半径为 $r > 0$ 的圆周 C, 绕竖直的 y 轴旋转一周所得的旋转面. 显然圆周 C 的形心为其圆心. 形心绕 y 轴旋转一周的周长为 $2\pi d$, 圆周 C 的周长为 $2\pi r$. 根据 Guldin 第一定理知, 环面面积为 $2\pi d \cdot 2\pi r = 4\pi^2 rd$. 解答完毕.

例二，续

另解: 圆周 C 有参数方程 $x = d + r\cos t$, $y = r\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$. 根据旋转面面积公式可知，所求环面面积为

$$|S| = \int_0^{2\pi} 2\pi x(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt$$

$$= 2\pi \int_0^{2\pi} (d + r\cos t) \cdot rdt = 4\pi^2 rd.$$

解答完毕.

证明: 设曲线 Γ 有参数表示 $\vec{r}=\vec{r}(t)=(x(t),y(t))$, $t\in[\alpha,\beta]$, $r(t)$ 连续可微, 且位于 x 轴的上方, 即 $y(t)\geq 0$, 则曲线 Γ 的形心的纵坐标 $\bar{y}$ 如下确定

$$\bar{y}=\frac{\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt}{\int_\alpha^\beta \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt}.$$

注意上式分母为曲线 Γ 的弧长 $|\Gamma|$. 上式两边同乘以 $2\pi|\Gamma|$ 即得

$$2\pi\bar{y}|\Gamma|=\int_\alpha^\beta 2\pi y(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt.$$

再注意上式右边是曲线 Γ 绕 x 轴旋转所得旋转面面积, 而左边是曲线的弧长, 乘以形心 $(\bar{x},\bar{y})$ 绕 x 轴旋转一周的周长. 定理得证. $\square$

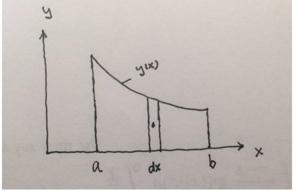
设平面区域 D 上均匀分布了某种物质，考虑 D 的质心. 此时质心也称为区域 D 的形心. 假设区域 D 为如下形式的曲边梯形

$$D = \left\{(x, y), 0 \le y \le y(x), a \le x \le b\right\}.$$

不妨设物质的分布密度为 $\rho(x, y) \equiv 1$. 于是 D 的质量就是 D 的面积，即

$$M = |D| = \int_a^b y(x)dx.$$

考虑域 D 关于 x 轴和 y 轴的力矩. 取质量(面积)微元 $dM = dS = y(x)dx$.



平面图形的形心，续

质量(面积)微元 $dM = dS$ 关于 x 轴和 y 轴的力矩分别为

$$dM_x = \frac{1}{2}y(x)dM = \frac{1}{2}y^2(x)dx,$$

$$dM_y = xdM = xy(x)dx.$$

于是区域 D 关于 x 轴和 y 轴的总力矩为

$$M_x = \int_a^b \frac{1}{2}y^2(x)dx, \quad M_y = \int_a^b xy(x)dx.$$

平面域 D 的形心 $(\bar{x}, \bar{y})$ 定义为

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\int_a^b xy(x)dx}{\int_a^b y(x)dx}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\int_a^b \frac{1}{2}y(x)^2dx}{\int_a^b y(x)dx}.$$

Guldin 第二定理

Theorem

定理: 平面图形 D 围绕一直线(旋转轴)旋转一周所得的旋转体 V 的体积 $|V|$, 等于图形 D 的面积 $|D|$, 乘以形心绕直线旋转一周的周长, 即 $|V| = 2\pi d|D|$, 其中 d 代表形心到旋转轴的距离.

注: 上述定理又称作 Pappus 定理, 见 James Stewart 的教材, Calculus Early Transcendentals, Ninth Edition, page 583. Pappus of Alexandria, 公元前四世纪, 古希腊数学家.

证: 只证明如下特殊情形时的结论: 平面图形 D 为非负连续函数 $y = y(x)$, $x \in [a, b]$, 所形成的曲边梯形, 即 $D = \{(x, y), 0 \le y \le y(x), a \le x \le b\}$, 并考虑图形 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积. 已证图形 D 的形心纵坐标为

证明，续

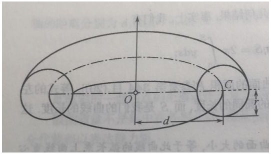
$$\bar{y} = \frac{\int_a^b \frac{1}{2} y(x)^2 dx}{\int_a^b y(x) dx}.$$

注意上式右边的分母为图形 D 的面积 $|D|$. 上式两边同时乘以 $2\pi|D|$ 即得

$$2\pi\bar{y}|D| = \int_a^b \pi y(x)^2 dx.$$

注意上式右边是平面域 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积，左边是区域 D 的面积，乘以形心绕 x 轴旋转一周的周长. Guldin 第二定理得证. $\square$

例: 利用 Guldin 第二定理计算环面所围立体的体积.



解: 设 $D = \{(x,y), (x-d)^2 + y^2 \leq r^2\}$ 为一个闭圆盘, 其中 $d > r > 0$. 根据 Guldin 第二定理知, 圆盘 D 绕 y 轴旋转一周所得立体(实心轮胎)的体积为 $V = |D| \cdot \ell$, 这里 $|D| = \pi r^2$ 为圆盘 D 的面积, ℓ 表示图形 D 的形心绕 y 轴一周的周长. 显然图形 D 的形心为为圆盘的圆心, 即 $(d, 0)$. 因此 $\ell = 2\pi d$. 故所求立体的体积为 $V = \pi r^2 \cdot 2\pi d = 2\pi^2 r^2 d$. 解答完毕.

考虑积分

$$\int_1^b \frac{1}{x^2} dx.$$

显然对于任意 $b > 1$,

$$\int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \left. \frac{-1}{x} \right|_1^b = 1 - \frac{1}{b}.$$

因此

$$\lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{b}\right) = 1.$$

定义: (i) 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上定义. 假设对任意 $b>a$, $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积, 则称 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上内闭可积;

(ii) 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上内闭可积. 若极限

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$

存在(有限), 则称极限值为 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上广义积分, 并记为 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, 即

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

此时也称 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上的广义积分存在(收敛).

(iii) 当极限 $\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$ 不存在时, 称 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上非广义可积, 或称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散(或不收敛).

例一

Example

例一: 证明广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ 收敛且 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$.

证明: 因为对任意 $b > 0$, 函数 $\frac{1}{1+x^2}$ 在 $[0, b]$ 上可积, 即 $\frac{1}{1+x^2}$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上内闭可积, 且极限

$$\lim_{b \to +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \to +\infty} \arctan b = \frac{\pi}{2}.$$

因此广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ 收敛且 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$.

Example

例二: 设 $p > 0$, 讨论广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ 的收敛性.

解: 设 $p \neq 1$. 当 $b \to +\infty$ 时,

$$\int_1^b \frac{dx}{x^p} = \frac{x^{1-p}}{1-p}\bigg|_1^b = \frac{1}{1-p}(b^{1-p}-1) \to \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & p > 1, \\ +\infty, & p < 1. \end{cases}$$

因此 (i) 当 $p > 1$ 时, 广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ 的收敛且 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1}$.

(ii) 当 $p < 1$ 时, 广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ 发散.

(iii) 当 $p = 1$ 时, $\int_1^b \frac{dx}{x} = \ln b \to +\infty$. 广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ 发散.

综上, 积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ 当 $p > 1$ 时收敛且 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1}$; 当 $p \leq 1$ 时积分发散.

无穷区间上的广义积分的其他形式

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \overset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b} f(x)dx.$$

这里假设等式右边的极限均存在.

例子

例: 考虑广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^x+e^{2-x}} dx$ 的收敛性.

解: 对于 $a < 0 < b$, 我们有

$$\int_a^b \frac{1}{e^x + e^{2-x}} dx = \int_a^b \frac{e^x}{e^{2x} + e^2} dx = \int_a^b \frac{de^x}{e^{2x} + e^2}$$

$$= \int_{e^a}^{e^b} \frac{du}{u^2 + e^2} = \frac{1}{e} \arctan \frac{u}{e} \Big|_{e^a}^{e^b} = \frac{1}{e}(\arctan e^{b-1} - \arctan e^{a-1}).$$

于是 $$\int_0^b \frac{1}{e^x + e^{2-x}} dx = \frac{1}{e}(\arctan e^{b-1} - \arctan e^{-1})$$

$$\to \frac{1}{e}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan e^{-1}\right), \quad b \to +\infty$$

$$\int_a^0 \frac{1}{e^x + e^{2-x}} dx = \frac{1}{e}(\arctan e^{-1} - \arctan e^{a-1})$$

$$\to \frac{1}{e} \arctan e^{-1}, \quad a \to -\infty.$$

例子，续

因此广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{e^x+e^{2-x}}dx$ 收敛，且

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{e^x+e^{2-x}}dx=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{e^x+e^{2-x}}dx+\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{e^x+e^{2-x}}dx$$

$$=\frac{1}{e}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan e^{-1}\right)+\frac{1}{e}\arctan e^{-1}=\frac{\pi}{2e}.$$

解答完毕.

无界函数的广义积分(瑕积分)定义

定义: (i) 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b)$ 上定义. 若 f 在 $x=b$ 的左侧无界, 则称 $x=b$ 是 $f(x)$ 的瑕点或奇点.

(ii) 设 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上有唯一瑕点 $x=b$. 若对任意 $b'\in(a,b)$, $f(x)$ 在 $[a,b']$ 上可积, 则称 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上内闭可积;

(iii) 设 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上有唯一瑕点 $x=b$, 且内闭可积. 若 $\lim_{b'\to b^-}\int_a^{b'}f(x)dx$ 存在(有限), 则称 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上广义可积, 称极限值为 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上的广义积分(或瑕积分), 并记之为 $\int_a^b f(x)dx$, 即

$$\int_a^b f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{b'\to b^-}\int_a^{b'} f(x)dx.$$

(iv) 若极限 $\lim_{b'\to b^-}\int_a^{b'}f(x)dx$ 不存在, 则称广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ 不收敛或发散.

Example

例一: 证明广义积分 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ 收敛且 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2.$

证明: 函数 $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ 在区间 $[0,1)$ 上有唯一瑕点 $x=1$, 且内闭可积. 进一步对任意 $b' \in (0,1)$,

$$\int_0^{b'} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -\int_0^{b'} d(2\sqrt{1-x}) = -2\sqrt{1-x}\Big|_0^{b'}$$

$$= 2(1-\sqrt{1-b'}) \to 2, \quad b' \to 1^-.$$

这表明广义积分 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ 收敛且 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2.$

例二

Example

例二: 广义积分 $\int_0^1 \frac{dx}{1-x}$ 发散. 因为对任意 $b' \in (0,1)$,

$$\int_0^{b'} \frac{dx}{1-x} = -\ln(1-x)\Big|_0^{b'}$$

$$= -\ln(1-b') \to +\infty, \quad b' \to 1^-.$$

Example

例三：设 $a < b$，考虑广义积分 $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$，其中 $p > 0$.

(i) 当 $p = 1$ 时，积分发散. 因为当 $b' \to b^-$ 时，

$$\int_a^{b'} \frac{dx}{b-x} = \ln(b-a) - \ln(b-b') \to +\infty.$$

(ii) 当 $p \neq 1$ 时，当 $b' \to b^-$ 时，

$$\int_a^{b'} \frac{dx}{(b-x)^p} = -\frac{(b-x)^{1-p}}{1-p}\Bigg|_a^{b'}$$

$$= \frac{(b-a)^{1-p}}{1-p} - \frac{(b-b')^{1-p}}{1-p} \to \begin{cases} \frac{(b-a)^{1-p}}{1-p}, & p < 1, \\ +\infty, & p > 1. \end{cases}$$

综上，积分当 $p < 1$ 收敛，当 $p \geq 1$ 发散.

定义: (i) 设 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上定义. 若 $f(x)$ 在点 $x=a$ 的右侧无界, 则称 $x=a$ 为 $f(x)$ 的一个瑕点;

(ii) 设 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上有唯一瑕点 $x=a$. 若对任意 $a'\in(a,b]$, $f(x)$ 在 $[a',b]$ 上可积, 则称 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上内闭可积.

(iii) 设 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上有唯一瑕点 $x=a$, 且内闭可积. 若极限

$$\lim_{a'\to a^+}\int_{a'}^{b} f(x)dx$$

存在(有限), 称极限值为 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上的广义积分(或瑕积分), 并记之为 $\int_a^b f(x)dx$, 即

$$\int_a^b f(x)dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{a'\to a^+}\int_{a'}^{b} f(x)dx.$$

(iv) 若极限 $\lim_{a'\to a^+}\int_{a'}^{b} f(x)dx$ 不存在, 则称积分 $\int_a^b f(x)dx$ 不收敛或发散.

例一: 设 $p>0$, 考虑广义积分 $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ 的收敛性.

解: 设 $p\neq 1$. 对任意 $a\in(0,1)$,

$$\int_a^1 \frac{dx}{x^p}=\left.\frac{x^{1-p}}{1-p}\right|_a^1=\frac{1}{1-p}(1-a^{1-p}).$$

(i) 设 $0<p<1$,

$$\int_a^1 \frac{dx}{x^p}=\frac{1}{1-p}(1-a^{1-p})\to\frac{1}{1-p},\quad a\to 0^+.$$

(ii) 设 $p>1$,

$$\int_a^1 \frac{dx}{x^p}=\frac{1}{1-p}(1-a^{1-p})\to+\infty,\quad a\to 0^+.$$

例一，续

(iii) 当 $p = 1$,

$$\int_a^1 \frac{dx}{x} = -\ln a \to +\infty, \quad a \to 0^+.$$

综上，当 $0 < p < 1$ 时，广义积分 $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ 收敛，且 $\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p}$. 当 $p \geq 1$ 时，广义积分发散.

注：比较如下两个广义积分

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} \quad \begin{cases} 发散 & p \geq 1, \\ 收敛且积分值为 \frac{1}{1-p}, & p < 1, \end{cases}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \quad \begin{cases} 发散 & p \leq 1, \\ 收敛且积分值为 \frac{1}{p-1}, & p > 1. \end{cases}$$

两类广义积分同时出现的情形

例: 考虑广义积分 $J = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} dx$ 的收敛性.

解: 显然 $x = 0$ 是被积函数 $\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$ 的瑕点, 积分区间 $[0, +\infty)$ 无穷. 故将积分 J 分为两个部分 $J = J_1 + J_2$, 其中

$$J_1 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} dx, \quad J_2 = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} dx.$$

先考虑瑕积分 J_1. 对任意 $a \in (0, 1)$,

$$\int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} dx = \int_{\sqrt{a}}^1 \frac{2udu}{u(1+u^2)} = 2\int_{\sqrt{a}}^1 \frac{du}{1+u^2}$$

$$= 2(\arctan 1 - \arctan\sqrt{a}) = \frac{\pi}{2} - 2\arctan\sqrt{a} \to \frac{\pi}{2}, \quad a \to 0^+.$$

因此瑕积分 J_1 收敛.

例子，续

再来考虑区间无穷积分 J_2. 对任意 $b > 1$,

$$\int_1^b \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}dx = \int_1^{\sqrt{b}} \frac{2udu}{u(1+u^2)} = 2\int_1^{\sqrt{b}} \frac{du}{1+u^2}$$

$$= 2(\arctan\sqrt{b} - \arctan 1) \to 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}, \quad b \to +\infty.$$

故广义积分 J_2 收敛. 因此积分 $J = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$ 收敛.

注: 如果两个广义积分 J_1 和 J_2 其中之一发散, 则称原广义积分 J 发散.

非负函数广义积分的收敛性判别

Theorem

定理: 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b)$ 上内闭可积，其中 $b=+\infty$，或者 $b<+\infty$ 是 $f(x)$ 的唯一瑕点，并且 $f(x)\geq 0$, $\forall x\in[a,b)$，则积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ $F(b')\overset{\text{def}}{=}\int_a^{b'} f(x)dx$ 在 $[a,b)$ 上有上界.

Proof.

证明: 由于 $f(x)\geq 0$，故 $F(b')$ 在 $[a,b)$ 上单调增加. 因此积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛，即极限 $\lim_{b'\to b^-}F(b')$ 存在 $\Longleftrightarrow$ $F(b')$ 在 $[a,b)$ 上有上界. 定理得证. $\square$

注: 以后当我们说，$f(x)$ 在区间 $[a,b)$ 上内闭可积时，或者 b 是一个(有限)瑕点，或者 $b=+\infty$. 当 $b=+\infty$ 时，也称 b 为无穷瑕点.

比较判别法，例子

Theorem

定理：设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b)$ 上内闭可积，且 $0 \le f(x) \le g(x)$，$\forall x \in [a,b)$.

(i) 若广义积分 $\int_a^b g(x)dx$ 收敛，则广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ 也收敛；

(ii) 若广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ 发散，则广义积分 $\int_a^b g(x)dx$ 也发散.

Example

例：积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+x^4}}$ 收敛，因为

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+x^4}} \le \frac{1}{x^{4/3}},$$

而积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{4/3}}$ 收敛. 根据比较判别法知，积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+x^4}}$ 收敛.

定理证明

证: 对任意 $b' \in [a,b)$ 记

$$F(b') = \int_a^{b'} f(x)dx, \quad G(b') = \int_a^{b'} g(x)dx.$$

由假设 $0 \le f(x) \le g(x), \forall x \in [a,b)$ 知 $F(b') \uparrow$, $G(b') \uparrow$, 且 $F(b') \le G(b')$.

(i) 若 $\int_a^b g(x)dx$ 收敛, 则 $G(b')$ 有上界, 从而 $F(b')$ 有上界, 故 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛.

(ii) 若 $\int_a^b f(x)dx$ 发散, 则 $F(b')$ 无上界, 从而 $G(b')$ 无上界, 故 $\int_a^b g(x)dx$ 发散. 定理证毕. □

比较判别法的极限形式

Theorem

<u>定理</u>: 设 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a,b)$ 上非负，内闭可积，其中 b 为唯一的有限或无穷瑕点. 假设 $\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)}=C$,

(i) 若 $C>0$, 则两个广义积分 $\int_a^b f$ 和 $\int_a^b g$ 的收敛性相同，即同时收敛或同时发散;

(ii) 若 $C=0$, 且广义积分 $\int_a^b g$ 收敛，则广义积分 $\int_a^b f$ 也收敛.

证明

证明: 只证情形 $b = +\infty$.

(i) 由假设 $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = C > 0$ 知存在 $M > 0$, 使得 $\forall x \geq M$

$$\frac{C}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < 2C, \quad \text{即} \quad \frac{C}{2}g(x) < f(x) < 2Cg(x).$$

由此可见积分 $\int_M^{+\infty} f$ 和 $\int_M^{+\infty} g$ 有相同的收敛性. 从而积分 $\int_a^{+\infty} f$ 和 $\int_a^{+\infty} g$ 有相同的收敛性.

(ii) 由假设 $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ 知, 存在 $N > 0$, 使得当 $x \geq N$ 时,

$$0 \leq \frac{f(x)}{g(x)} < 1, \quad \text{即} \quad 0 \leq f(x) \leq g(x).$$

故由比较判别法知, 当 $\int_N^{+\infty} g$ 收敛时, $\int_N^{+\infty} f$ 也收敛. 因此 $\int_a^{+\infty} g$ 收敛时, $\int_a^{+\infty} f$ 也收敛. $\square$

推论一

Corollary

推论一: 设 $f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上非负, 且内闭可积. 若 $\lim_{x\to+\infty} x^p f(x) = \lambda$ 存在, 且 $\lambda > 0$, 则

(i) 当 $p > 1$ 时, 积分 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 收敛;

(ii) 当 $p \le 1$ 时, 积分 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 发散.

证: 注意 $\frac{f(x)}{\frac{1}{x^p}} = x^p f(x)$, 再利用比较判别法的极限形式, 立刻得到结论. 也可以直接利用比较判别法证明如下.

(i) 情形 $p > 1$. 由假设 $\lim_{x\to+\infty} x^p f(x) = \lambda$ 存在且 $\lambda > 0$, 可知存在 $M > 0$, 使得当 $\forall x \geq M$,

$$0 \leq x^p f(x) \leq \lambda + 1, \quad 即 \quad 0 \leq f(x) \leq \frac{\lambda+1}{x^p}.$$

显然积分 $\int_M^{+\infty} \frac{\lambda+1}{x^p} dx$ 收敛, 由比较判别法知 $\int_M^{+\infty} f(x)dx$ 收敛. 从而积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛.

(ii) 情形 $p \leq 1$. 由假设知存在 $N > 0$, 使得当 $\forall x \geq N$,

$$\frac{\lambda}{2} \leq x^p f(x), \quad 即 \quad \frac{\lambda}{2x^p} \leq f(x).$$

显然积分 $\int_N^{+\infty} \frac{\lambda}{2x^p} dx$ 发散, 由比较判别法知 $\int_N^{+\infty} f(x)dx$ 发散. 从而积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散. 推论一得证.

推论二

Corollary

推论二: 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b)$ 上有唯一有限瑕点 $x = b < +\infty$, 非负, 且内闭可积. 若 $\lim_{x \to b^-}(b - x)^q f(x) = \mu$ 存在且 $\mu > 0$, 则

(i) 当 $q < 1$ 时, 积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛;

(ii) 当 $q \geq 1$ 时, 积分 $\int_a^b f(x)dx$ 发散.

证明方法基本同推论一. 细节略.

Example

例一：考虑广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4+x^2-1}$ 的收敛性.

解：由于

$$\frac{x^2}{x^4+x^2-1} \Big/ \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 \cdot x^2}{x^4+x^2-1} \to 1 > 0, \quad x \to +\infty,$$

故应用推论一 $(p = 2 > 1)$ 知，积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4+x^2-1}$ 收敛.

Example

例二：考虑积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x dx}{(1+x^2)^{3/2}}$ 的收敛性. 由于

$$\frac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}} \Big/ \frac{1}{x^3} = \frac{x^3 \cdot \arctan x}{(1+x^2)^{3/2}} \to \frac{\pi}{2}, \quad x \to +\infty,$$

故积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x dx}{(1+x^2)^{3/2}}$ 的收敛.

Example

例三：考虑广义积分 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}$ 的收敛性.

解：由于

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{(1-x)(1+x)(1+x^2)}},$$

故
$$\frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}} \bigg/ \frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{4}}} = (1-x)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}} \to \frac{1}{\sqrt{2}} > 0, \quad x \to 1^-,$$

再应用推论二 $(q = \frac{1}{4} < 1)$ 知积分 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}$ 收敛.

广义积分收敛的 Cauchy 准则

Theorem

<u>定理</u>: (i) 设 $f(x)$ 于 $[a,b)$ 上内闭可积, $b<+\infty$ 是 $f(x)$ 的唯一有限瑕点, 则 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得对 $\forall b',b''\in(b-\delta,b)$,

$$\left|\int_{b'}^{b''} f(x)dx\right|<\varepsilon.$$

(ii) 设 $f(x)$ 于 $[a,+\infty)$ 上内闭可积, 则积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $M>a$, 使得对 $\forall b',b''\geq M$,

$$\left|\int_{b'}^{b''} f(x)dx\right|<\varepsilon.$$

证明

Proof.

证明: (i) 记 $F(b') = \int_a^{b'} f(x)dx$. 依定义广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ 极限 $\lim_{b'\to b^-} F(b')$ 存在. 由函数极限的 Cauchy 准则知, 极限 $\lim_{b'\to b^-} F(b')$ 存在 $\Longleftrightarrow$ 对 $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$, 使得 $|F(b') - F(b'')| < \varepsilon$, $\forall b', b'' \in (b-\delta, b)$. 此即

$$\left|\int_{b'}^{b''} f(x)dx\right| < \varepsilon, \quad \forall b', b'' \in (b-\delta, b).$$

结论 (i) 成立. 结论 (ii) 的证明类似. □

广义积分的绝对收敛性与条件收敛性，例子

Definition

定义：设 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上内闭可积，b 是 $f(x)$ 唯一的有限或无穷瑕点.

(i) 若广义积分 $\int_a^b |f|$ 收敛，则称广义积分 $\int_a^b f$ 绝对收敛；

(ii) 若广义积分 $\int_a^b f$ 收敛，但广义积分 $\int_a^b |f|$ 发散，则称广义积分 $\int_a^b f$ 条件收敛.

Example

例一：证明广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ 绝对收敛.

证：因为 $\frac{|\sin x|}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$，而积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} dx$ 收敛，由比较判别法知 $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^2} dx$ 收敛. 于是广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ 绝对收敛. 证毕. □

注：稍后我们将证明广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 条件收敛.

绝对收敛性蕴含收敛性

Theorem

定理: 设 $f(x)$ 于 $[a,b)$ 上内闭可积, b 是唯一一个有限或无穷瑕点. 若积分 $\int_a^b f(x)dx$ 绝对收敛, 即积分 $\int_a^b |f(x)|dx$ 收敛, 则广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ 也收敛.

Proof.

证: 只考虑 $b=+\infty$ 情形. 假设积分 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛, 则由 Cauchy 收敛准则知, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $M>a$, 使得 $\forall b''>b'\geq M$, $\int_{b'}^{b''}|f(x)|dx<\varepsilon$. 于是 $|\int_{b'}^{b''}f(x)dx|\leq\int_{b'}^{b''}|f(x)|dx<\varepsilon$, $\forall b''>b'\geq M$. 再次由 Cauchy 收敛准则知 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛. 证毕. □

Theorem

定理: 考虑广义积分 $\int_a^b f(x)g(x)dx$ 的收敛性, 其中 b 是 f(x) 的唯一一个有限或无穷瑕点. 假设

(i) f(x) 在 [a, b) 上内闭可积, 且变上限积分 $\int_a^{b'} f(x)dx$ 关于 $b' \in [a, b)$ 有界, 即存在 $M > 0$, 使得 $|\int_a^{b'} f(x)dx| < M$, $\forall b' \in [a, b)$;

(ii) g(x) 在 [a, b) 上单调且 $\lim_{x\to b^-} g(x) = 0$,

则广义积分 $\int_a^b f(x)g(x)dx$ 收敛.

稍后证明定理.

例: 证明广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 条件收敛. (这个积分常称作 Dirichlet 积分, 收敛, 以后证明它的积分值为 $\frac{\pi}{2}$).

证: 要证积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 条件收敛, 只需证 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 条件收敛. 注意 $x = 0$ 不是瑕点. 因为 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. 令 $f(x) = \sin x$, $g(x) = \frac{1}{x}$. 显然 $\int_1^b \sin x dx = \cos 1 - \cos b$ 关于 $b \in [1, +\infty)$ 有界, 且 $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$. 故 Dirichlet 判别法的两个条件均满足. 因此积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 收敛. 以下证 $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ 发散. 由于 $\frac{|\sin x|}{x} \geq \frac{\sin^2 x}{x}$, $\forall x \geq 1$, 故只要证 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ 发散即可. 将函数 $\frac{\sin^2 x}{x}$ 写作 $\frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1-\cos 2x}{2x}$. 由此得 $\frac{1}{x} = \frac{2\sin^2 x}{x} + \frac{\cos 2x}{x}$. 由 Dirichlet 判别法知, 广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx$ 收敛. 假设积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ 收敛, 则广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ 收敛. 这显然是个矛盾. 因此积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ 发散. 这就证明了积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 条件收敛. 证毕.

Theorem

定理: 考虑广义积分 $\int_a^b f(x)g(x)dx$ 的收敛性, 其中 b 是 $f(x)$ 的唯一一个有限或无穷瑕点. 假设

(i) $f(x)$ 在 $[a,b)$ 内闭可积, 且广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛;

(ii) $g(x)$ 在 $[a,b)$ 上单调有界,

则广义积分 $\int_a^b f(x)g(x)dx$ 收敛.

证明

<u>证</u>: 由于 $g(x)$ 在 $[a,b)$ 上单调且有界, 故极限 $\lim_{x\to b^-} g(x)$ 存在, 记作 C. 令 $g_1(x) = g(x) - C$, 则易证 $f(x)$ 和 $g_1(x)$ 分别满足 Dirichlet 判别法中的条件 (i) 和 (ii), 因此积分 $\int_a^b f(x)g_1(x)dx$ 收敛. 于是对于任意 $b' < b$,

$$\int_a^{b'} f(x)g_1(x)dx = \int_a^{b'} f(x)g(x)dx - C\int_a^{b'} f(x)dx,$$

$$\Rightarrow \quad \int_a^{b'} f(x)g(x)dx = \int_a^{b'} f(x)g_1(x)dx + C\int_a^{b'} f(x)dx.$$

当 $b' \to b^-$ 时, 上式右端有极限, 且极限为 $\int_a^b f(x)g_1(x)dx + C\int_a^b f(x)dx$. 因此广义积分 $\int_a^b f(x)g(x)dx$ 收敛, 且

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b f(x)g_1(x)dx + C\int_a^b f(x)dx.$$

定理得证. □

Example

例一: 考虑下述广义积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \arctan x dx. \quad (*)$$

解: 记 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $g(x) = \arctan x$, 则广义积分 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 且 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调有界. 根据 Abel 判别法知广义积分 (*) 收敛.

注: 对于上述例子, 也可应用 Dirichlet 判别法来证明广义积分 (*) 收敛. 记 $f(x) = \sin x$, $g(x) = \frac{\arctan x}{x}$, 则易证 (i) 广义积分 $\int_0^b \sin x dx$ 关于 $b \in [0, +\infty)$ 有界, (ii) $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调下降且趋向于零. 于是根据 Dirichlet 判别法知广义积分 (*) 收敛.

例二

<u>例二</u>: 设 $\max\{p,q\}>1$, 证明广义积分 $J=\int_1^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^p+x^q}dx$ 收敛.

<u>证</u>: 不妨设 $p\geq q$, 且 $p>1$. 于是积分 J 可写作

$$J=\int_1^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^p(1+\frac{1}{x^{p-q}})}dx=\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^{p-1}(1+\frac{1}{x^{p-q}})}dx.$$

令 $f(x)=\frac{\cos x}{x^{p-1}}$, $g(x)=\frac{1}{1+\frac{1}{x^{p-q}}}$. 由 Dirichlet 判别法知, 积分 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 收敛, 而函数 $g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调有界. 于是再利用 Abel 判别法可知积分 J 收敛. 证毕.

<u>另证</u>: 考虑积分 J. 令 $f(x)=\cos x$, $g(x)=\frac{x}{x^p+x^q}$. 显然变上限积分 $\int_1^b f(x)dx$ 关于 $b\in[1,+\infty)$ 有界. 此外在假设 $\max\{p,q\}>1$ 下, 易证存在 $M\geq 1$, 使得 $g(x)$ 在区间 $[M,+\infty)$ 上单调下降, 并且趋向于零. 因此根据 Dirichlet 判别法知积分 $\int_M^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^p+x^q}dx$ 收敛, 从而原积分 $J=\int_1^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^p+x^q}dx$ 收敛. 证毕.

回忆: (第一)积分中值定理

Theorem

定理: 设 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号, 则

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx,$$

其中 $m_f \le \mu \le M_f$, M_f 和 m_f 分别记 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 的上下确界. 特别当 $f(x)$ 连续时, 存在 $\xi \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx.$$

第二积分中值定理

Theorem

定理: 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调, 则存在 $\xi \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)dx + g(b)\int_{\xi}^b f(x)dx.$$

证: 我们加强假设, 即 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调且连续可微, 来证明定理. 一般情形下的证明稍微复杂些, 这里从略. 令 $F(x) = \int_a^x f(s)ds$, 则由分部积分法得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b g(x)dF(x) = F(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx.$$

证明，续

因 g 单调且连续可微，故 g' 不变号，因而存在 $\xi \in [a,b]$，使得

$$\int_a^b F(x)g'(x)dx = F(\xi)\int_a^b g'(x)dx = F(\xi)[g(b)-g(a)].$$

$$\Rightarrow \quad \int_a^b f(x)g(x)dx = F(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx$$

$$= F(b)g(b) - F(a)g(a) - F(\xi)[g(b)-g(a)].$$

注意 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$，故 $F(a) = 0$. 因此

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(b)\int_a^b f(x)dx - g(b)\int_a^\xi f(x)dx + g(a)\int_a^\xi f(x)dx$$

$$= g(a)\int_a^\xi f(x)dx + g(b)\int_\xi^b f(x)dx. \qquad \square$$

Dirichlet 判别法的证明

证: 对于 b 为有限和无穷情形的证明类似. 以下只证无穷情形, 即证明积分 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛. 由假设 (i) 知存在 $M > 0$, 使得

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le M, \quad \forall b \in [a, +\infty).$$

于是对任意 $b, b' \in [a, +\infty)$,

$$\left|\int_b^{b'} f(x)dx\right| = \left|\int_a^{b'} f(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\le \left|\int_a^{b'} f(x)dx\right| + \left|\int_a^b f(x)dx\right| \le 2M.$$

再由假设 (ii) 知, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $C > a$, 使得 $|g(x)| < \varepsilon$, $\forall x \ge C$. 于是对任意 $b' > b \ge C$, 应用第二积分中值定理得

证明，续

$$\int_b^{b'} f(x)g(x)dx = g(b)\int_b^{\xi} f(x)dx + g(b')\int_{\xi}^{b'} f(x)dx,$$

其中 $\xi \in [b, b']$. 于是

$$\left|\int_b^{b'} f(x)g(x)dx\right| \le |g(b)|\left|\int_b^{\xi} f(x)dx\right| + |g(b')|\left|\int_{\xi}^{b'} f(x)dx\right|$$

$$\le \varepsilon 2M + \varepsilon 2M = 4M\varepsilon.$$

由 Cauchy 收敛准则知，广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛. $\square$

例一: 考虑广义积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{[x]}}{x-\ln x}dx$$

的收敛性.

解: 我们将应用 Dirichlet 判别法, 来证明上述积分收敛. 记 $f(x)=(-1)^{[x]}$, $g(x)=\frac{1}{x-\ln x}$. 显然 $g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 单调下降且趋于零. 还需验证 $\int_1^b f(x)dx$ 关于 $b\in[1,+\infty)$ 有界. 对于任意 $b>1$,

$$\int_1^b (-1)^{[x]}dx = \int_1^{[b]} (-1)^{[x]}dx + \int_{[b]}^b (-1)^{[b]}dx$$

$$= \sum_{k=1}^{[b]-1} (-1)^k + (-1)^{[b]}(b-[b]).$$

于是 $\left|\int_1^b (-1)^{[x]}dx\right| \le 1+1=2$. 由 Dirichlet 判别法知积分 $\int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{[x]}}{x-\ln x}dx$ 收敛. 解答完毕.

例二: 考虑广义积分
$$\int_0^1 \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}dx$$
的绝对收敛性.

解: 这是瑕积分, 瑕点为 $x=0$. 取 $a\in(0,1)$, 在区间 $[a,1]$ 上作变换 $y=\frac{1}{x}$ 或 $x=\frac{1}{y}$, 则 $dx=-\frac{dy}{y^2}$. 于是
$$\int_a^1 \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}dx=\int_{\frac{1}{a}}^1 y\cdot\sin y\cdot\frac{-dy}{y^2}=\int_1^{\frac{1}{a}}\frac{\sin y}{y}dy.$$
由此可见
$$\lim_{a\to0^+}\int_a^1 \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{\sin y}{y}dy=\int_1^{+\infty}\frac{\sin y}{y}dy.$$
已证广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin y}{y}dy$ 条件收敛. 因此 $\int_0^1\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}dx$ 条件收敛. 解答完毕.

例二: 考虑积分 $J=\int_a^b \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}dx$. (之前我们讨论过对应的不定积分. 参见 Dec 03 讲义第 03-04 页)

解: 显然上述积分是瑕积分, 积分上下限 $x=a$ 和 $x=b$ 均为瑕点. 易证这两个瑕点处的积分均收敛. 因此广义积分 J 收敛. 为计算积分 J, 作变量代换 $x=a\cos^2 t+b\sin^2 t$, $0\le t\le \pi/2$, 则

$$dx=(-2a\cos t\sin t+2b\sin t\cos t)dt=2(b-a)\cos t\sin t dt,$$

$$(x-a)(b-x)=(a\cos^2 t-a+b\sin^2 t)(b-b\sin^2 t-a\cos^2 t)$$

$$=(b-a)\sin^2 t\cdot(b-a)\cos^2 t=(b-a)^2\sin^2 t\cos^2 t.$$

$$\Rightarrow \quad J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2(b-a)\cos t\sin t}{(b-a)\cos t\sin t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2dt=\pi. \quad \#$$

Dec 15 作业，共六大题

习题一：课本第193页习题6.1题2(1)(3)(5)(7)(9). 利用广义积分定义计算下列积分：

(1) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)}$;

(3) $\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx$;

(5) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x^2)}$;

(7) $\int_0^1 \frac{e^{\frac{-1}{x}}}{x^2} dx$;

(9) $\int_{-1}^0 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

习题二：课本第193页习题6.1题3(1)(3)(5). 利用广义积分定义求下列积分：

(1) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$;

(3) $\int_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$;

(5) $\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$.

作业，续一

习题三：课本第193页习题6.1题4(1)(3)(5). 考察下列广义积分的类型(无穷限积分，瑕积分，或混合型广义积分)，并根据广义积分收敛性定义来考察计算下列积分的收敛性. 收敛时，求出积分的值；发散时说明理由.

$$(1)\quad \int_{-2}^{2}\frac{2x\,dx}{x^2-4};\qquad (3)\quad \int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}};\qquad (5)\quad \int_{0}^{+\infty}e^{-\sqrt{x}}dx.$$

习题四：课本第194页习题6.1题5：设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上内闭可积. 若 $F(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上的原函数，且极限 $\lim_{x\to+\infty}F(x)$ 存在，记作 $F(+\infty)$，证明积分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，且

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx=F(+\infty)-F(a).\quad \text{(无穷限积分的 Newton-Leibniz 公式)}$$

习题五：课本第194页习题 6.1 题6(修正版)：假设

(1) 函数 $u(x)$ 和 $v(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续可微；

(2) 积分 $\int_a^{+\infty} u'(x)v(x)dx$ 收敛；

(3) 极限 $\lim_{x\to+\infty} u(x)v(x)$ 存在，

证明积分 $\int_a^{+\infty} u(x)v'(x)dx$ 收敛，且

$$\int_a^{+\infty} u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} u'(x)v(x)dx,$$

其中 $u(x)v(x)\Big|_a^{+\infty} = [\lim_{x\to+\infty} u(x)v(x)] - u(a)v(a)$.

习题六：课本第194页习题 6.1 题7：求由曲线 $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $0 \le x \le 1$，和曲线 $y = \frac{1}{x^2}$, $x \ge 1$，以及正 x 轴和正 y 轴所围无界图形的面积.