第八周习题参考解答　　　　　　　　　　杨利军　　Nov 03 and 05, 2025

Nov 03 作业

习题一: 课本第108页习题4.3题3: 写出下列函数在给定点处的 Taylor 多项式.

(1) 求函数 $y=\sqrt{x}$ 在点 $x=1$ 处的 4 阶 Taylor 多项式.

(2) 求函数 $y=\sin x$ 在点 $x=\frac{\pi}{4}$ 处的 3 阶 Taylor 多项式.

(3) 求函数 $y=1+2x-4x^2+x^3+6x^4$ 在点 $x=1$ 处的 6 阶 Taylor 多项式.

(4) 求函数 $y=\tan x$ 在点 $x=\frac{\pi}{4}$ 处的 2 阶 Taylor 多项式.

解(1): 回忆二项式展开公式

$$(1+\delta)^a=1+a\delta+\frac{1}{2!}a(a-1)\delta^2+\frac{1}{3!}a(a-1)(a-2)\delta^3+\frac{1}{4!}a(a-1)(a-2)(a-3)\delta^4+\cdots.$$

记 $\delta=x-1$, $a=\frac{1}{2}$, 则

$$\sqrt{x}=(1+\delta)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}(x-1)+\frac{1}{2!}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)(x-1)^2+\frac{1}{3!}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)(x-1)^3$$

$$+\frac{1}{4!}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)(x-1)^4+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{2^3}(x-1)^2+\frac{1}{2^4}(x-1)^3-\frac{5}{2^7}(x-1)^4+\cdots$$

于是所求 4 阶 Taylor 多项式为

$$1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{2^3}(x-1)^2+\frac{1}{2^4}(x-1)^3-\frac{5}{2^7}(x-1)^4.$$

解(2): 回忆函数 $\sin y$ 和 $\cos y$ 的 Taylor 展开式

$$\sin y=y-\frac{1}{3!}y^3+\cdots,\quad \cos y=1-\frac{1}{2!}y^2+\frac{1}{4!}y^4+\cdots.$$

记 $\delta=x-\frac{\pi}{4}$, 则

$$\sin x=\sin\left(\delta+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\delta\cos\frac{\pi}{4}+\cos\delta\sin\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\delta + \cos\delta) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\delta - \frac{1}{3!}\delta^3 + 1 - \frac{1}{2!}\delta^2 + \frac{1}{4!}\delta^4 + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + \delta - \frac{1}{2!}\delta^2 - \frac{1}{3!}\delta^3 + \frac{1}{4!}\delta^4 + \cdots\right).$$

于是所求 4 阶 Taylor 多项式为

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{1 + \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{1}{3!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{1}{4!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4\right\}.$$

解(3): 按 Taylor 多项式的定义求比较简单. 记 $f(x) = 1 + 2x - 4x^2 + x^3 + 6x^4$, 则

$$\begin{aligned}
&f'(x) = 2 - 8x + 3x^2 + 24x^3,\\
&f''(x) = -8 + 6x + 72x^2,\\
&f'''(x) = 6 + 144x,\\
&f^{(4)}(x) = 144.
\end{aligned}$$

于是

$$f(1) = 6, \quad f'(1) = 21, \quad f''(1) = 70, \quad f'''(1) = 150, \quad f^{(4)}(1) = 144.$$

于是所求 6 阶 Taylor 多项式为

$$6 + 21(x-1) + \frac{1}{2!}70(x-1)^2 + \frac{1}{3!}150(x-1)^3 + \frac{1}{4!}144(x-1)^4.$$

化简得

$$6 + 21(x-1) + 35(x-1)^2 + 25(x-1)^3 + 6(x-1)^4.$$

解(4): 记 $\delta = x - \frac{\pi}{4}$, 则

$$\tan x = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \delta\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan\delta}{1 - \tan\frac{\pi}{4}\tan\delta} = \frac{1 + \tan\delta}{1 - \tan\delta}$$

$$= (1 + \tan\delta)(1 + \tan\delta + \tan^2\delta + \cdots) = 1 + 2\tan\delta + 2\tan^2\delta + \cdots.$$

由于 $\tan y$ 是函数奇函数, 且其导数 $(\tan y)'|_{y=0} = 1$. 故 $\tan y$ 有如下展开式

$$\tan y = y + cy^3 + \cdots.$$

于是

$$\tan x = 1 + 2\tan\delta + 2\tan^2\delta + \cdots = 1 + 2\delta + 2\delta^2 + \cdots$$

$$= 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \cdots .$$

因此所求函数 $y = \tan x$ 在点 $x = \frac{\pi}{4}$ 处的 2 阶 Taylor 多项式为

$$1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 .$$

解答完毕.

习题二: 课本第108页习题4.3题4(1)(3)(5)(7): 写出下列函数在给定点处的 Taylor 多项式.

(1) 求函数 $y = \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$ 在点 $x = 0$ 处的 4 阶 Taylor 多项式.

(3) 求函数 $y = \frac{x}{1-x}$ 在点 $x = 2$ 处的 n 阶 Taylor 多项式.

(5) 求函数 $y = \arcsin x$ 在点 $x = 0$ 处的 n 阶 Taylor 多项式.

(7) 求函数 $y = \frac{1}{(1-x)^2}$ 在点 $x = 0$ 处的 n 阶 Taylor 多项式.

解(1): 先考虑函数 $\frac{1}{1-x+x^2}$ 在点 $x = 0$ 处的 4 阶 Taylor 展式:

$$\frac{1}{1-x+x^2} = \frac{1}{1-(x-x^2)}$$

$$= 1 + (x-x^2) + (x-x^2)^2 + (x-x^2)^3 + (x-x^2)^4 + o(x^4)$$

$$= 1 + x - x^2 + x^2 - 2x^3 + x^4 + x^3 - 3x^4 + x^4 + o(x^4)$$

$$= 1 + x - x^3 + 2x^4 + o(x^4).$$

于是函数 $y = \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$ 在点 $x = 0$ 处的 4 阶 Taylor 在点 $x = 0$ 处的 4 阶 Taylor 展式为

$$\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2} = (1+x+x^2)(1+x-x^3+2x^4) + o(x^4) = 1 + 2x + 2x^2 + x^4 + o(x^4).$$

故所求 4 阶 Taylor 多项式为

$$1+2x+2x^2+x^4.$$

解(3): 令 $y=x-2$, 则 $x=y+2$. 于是

$$\frac{x}{1-x}=\frac{y+2}{1-(y+2)}=-\frac{y+2}{1+y}=-1-\frac{1}{1+y}$$

$$=-1-(1-y+y^2-y^3+\cdots+(-1)^n y^n)+o(y^n)$$

$$=-2+y-y^2+y^3-\cdots+(-1)^{n-1}y^n+o(y^n).$$

故所求 n 阶 Taylor 多项式为

$$-2+y-y^2+y^3-\cdots+(-1)^{n-1}y^n$$

解(5): 为求函数 $y=\arcsin x$ 在 $x=0$ 处的 n 阶 Taylor 展开式, 我们考虑其导函数的展开式, 记

$$y'=(\arcsin x)'=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

回忆二项式展开式

$$(1+y)^a$$

$$=1+ay+\frac{1}{2!}a(a-1)y^2+\frac{1}{3!}a(a-1)(a-2)y^3+\cdots+\frac{1}{n!}a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)y^n+o(y^n).$$

于上式中取 $y=x^2$, $a=-\frac{1}{2}$ 得

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2!}\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)x^4+\frac{1}{3!}\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)\left(\frac{-5}{2}\right)x^6+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)\cdots\left(\frac{-2n+1}{2}\right)x^{2n}+o(x^{2n})$$

$$=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{3!!}{2!2^2}x^4-\frac{5!!}{3!2^3}x^6+\cdots+(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{n!2^n}x^{2n}+o(x^{2n}).$$

于是关于上式积分即得函数 $\arcsin x$ 在 $x=0$ 处的 n 阶 Taylor 展开式为

$$\arcsin x = x-\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{3!!}{2!2^2}\frac{x^5}{5}-\frac{5!!}{3!2^3}\frac{x^7}{7}+\cdots+(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{n!2^n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+1}).$$

故所求函数 $\arcsin x$ 在 $x=0$ 处的 $2n+1$ 阶 Taylor 多项式为

$$x-\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{3!!}{2!2^2}\frac{x^5}{5}-\frac{5!!}{3!2^3}\frac{x^7}{7}+\cdots+(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{n!2^n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

解(7): 为求函数 $\frac{1}{(1-x)^2}$ 在点 $x=0$ 处 n 阶 Taylor 展开式, 我们先考虑函数 $\frac{1}{1-x}$ 的展开式:

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n+1}+o(x^{n+1}).$$

对上式两边求导得函数 $\frac{1}{(1-x)^2}$ 在点 $x=0$ 处 n 阶 Taylor 展开式为

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+\cdots+(n+1)x^n+o(x^n).$$

故所求函数 $\frac{1}{(1-x)^2}$ 在 $x=0$ 处的 n 阶 Taylor 多项式为

$$1+2x+3x^2+\cdots+(n+1)x^n.$$

习题三: 课本第108页习题4.3题5: 求下列函数极限:

$$(1)\quad \lim_{|x|\to+\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right];\qquad (2)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin(x^2)};$$

$$(3)\quad \lim_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right);\qquad (4)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)-\tan(\tan x)}{\sin x-\tan x}.$$

解(1): 令 $y=\frac{1}{x}$, 则当 $|x|\to+\infty$ 时, $y\to 0$. 于是

$$\lim_{|x|\to+\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\lim_{y\to 0}\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{y^2}\ln(1+y)\right)=\lim_{y\to 0}\frac{y-\ln(1+y)}{y^2}.$$

用 L'Hospital 法则求上述极限. 当 $y\to 0$ 时,

$$\frac{[y-\ln(1+y)]'}{[y^2]'}=\frac{1-\frac{1}{1+y}}{2y}=\frac{1}{2(1+y)}\to\frac{1}{2}.$$

因此

$$\lim_{|x|\to+\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\frac{1}{2}.$$

解(2): 利用 Taylor 展开来求这个极限. 根据以下函数的展开式

$$(1+x^2)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)x^4+o(x^4)=1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o(x^4);$$

$$\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+o(x^4),\quad e^{x^2}=1+x^2+o(x^2),\quad \sin(x^2)=x^2+o(x^2),$$

我们有当 $x\to 0$ 时,

$$\frac{\frac{x^2}{2}+1-1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x^4+o(x^4)}{(1-\frac{x^2}{2}-1-x^2+o(x^2))(x^2+o(x^2))}=\frac{\frac{1}{8}x^4+o(x^4)}{-\frac{3}{2}x^4+o(x^4)}\to\frac{\frac{1}{8}}{-\frac{3}{2}}=\frac{-1}{12}.$$

因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin(x^2)}=\frac{-1}{12}.$$

解(3): 令 $y=\frac{1}{x}$, 则当 $x\to+\infty$ 时, $y\to 0^+$, 并且

$$x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)=x^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}-2\right)$$

$$=\frac{(1+y)^{\frac{1}{2}}+(1-y)^{\frac{1}{2}}-2}{y^2}.$$

根据下列函数的 Taylor 展开

$$(1+y)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2!}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)y^2+o(y^2)$$

$$=1+\frac{1}{2}y-\frac{1}{8}y^2+o(y^2);$$

将上述展开式中的 y 写作 $-y$ 时, 即得

$$(1-y)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}y-\frac{1}{8}y^2+o(y^2).$$

于是当 $y \to 0^+$ 时,

$$\frac{(1+y)^{\frac{1}{2}}+(1-y)^{\frac{1}{2}}-2}{y^2}=\frac{1+\frac{1}{2}y-\frac{1}{8}y^2+1-\frac{1}{2}y-\frac{1}{8}y^2-2+o(y^2)}{y^2}$$

$$=\frac{-\frac{1}{4}y^2+o(y^2)}{y^2}\to-\frac{1}{4}.$$

因此

$$\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)=-\frac{1}{4}.$$

解(4): 方法一: 将函数 $\frac{\sin(\sin x)-\tan(\tan x)}{\sin x-\tan x}$ 改写如下

$$\frac{\sin(\sin x)-\tan(\tan x)}{\sin x-\tan x}$$

$$=\frac{\sin(\sin x)-\sin(\tan x)}{\sin x-\tan x}+\frac{\sin(\tan x)-\tan(\tan x)}{\tan^3 x}\cdot\frac{\tan^3 x}{\sin x-\tan x}.$$

对函数 $\sin(\sin x)-\sin(\tan x)$ 应用中值定理得, 当 $x\to 0$ 时,

$$\frac{\sin(\sin x)-\sin(\tan x)}{\sin x-\tan x}=\cos\xi\to 1,$$

其中 ξ 介于 $\sin x$ 和 $\tan x$ 之间. 为下面需要, 我们考虑 $\tan y$ 的展开式:

$$\tan y=\frac{\sin y}{\cos y}=\frac{y-\frac{1}{6}y^3+o(y^3)}{1-\frac{1}{2}y^2+o(y^3)}$$

$$=\left[y-\frac{1}{6}y^3+o(y^3)\right]\left[1+\frac{1}{2}y^2+o(y^3)\right]=y+\frac{1}{3}y^3+o(y^3).$$

再回忆 Taylor 展开式

$$\sin y=y-\frac{1}{6}y^3+o(y^3).$$

于是

$$\frac{\sin(\tan x)-\tan(\tan x)}{\tan^3 x}=\frac{\tan x-\frac{1}{6}\tan^3 x-\tan x-\frac{1}{3}\tan^3 x+o(\tan^3 x)}{\tan^3 x}$$

$$\to -\frac{1}{6}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2},$$

$$\frac{\tan^3 x}{\sin x-\tan x}=\frac{x^3+o(x^3)}{x-\frac{1}{6}-x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}\to\frac{1}{-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}}=-2.$$

因此

$$\lim_{x\to x}\frac{\sin(\sin x)-\tan(\tan x)}{\sin x-\tan x}$$

$$=\lim_{x\to x}\left(\frac{\sin(\tan x)-\sin(\tan x)}{\sin x-\tan x}+\frac{\sin(\tan x)-\tan(\tan x)}{\tan^3 x}\cdot\frac{\tan^3 x}{\sin x-\tan x}\right)$$

$$=1+\left(-\frac{1}{2}\cdot(-2)\right)=2.$$

方法二: 我们利用 Taylor 展开得方法来求这个极限. 根据方法一中 $\tan y$ 的展开式得

$$\sin x-\tan x=x-\frac{1}{6}x^3-x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)=-\frac{1}{2}x^3+o(x^3).$$

于是

$$\sin(\sin x)=\sin x-\frac{1}{6}\sin^3 x+o(x^3),\quad \tan(\tan x)=\tan x+\frac{1}{3}\tan^3 x+o(x^3),$$

$$\frac{\sin(\tan x)-\tan(\tan x)}{\sin x-\tan x}=\frac{\sin x-\frac{1}{6}\sin^3 x-\tan x-\frac{1}{3}\tan^3 x+o(x^3)+o(x^3)}{\sin x-\tan x}$$

$$=1+\frac{-\frac{1}{6}\sin^3 x-\frac{1}{3}\tan^3 x+o(x^3)}{\sin x-\tan x}=1+\frac{-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}{-\frac{1}{2}x^3+o(x^3)}$$

$$=1+\frac{-\frac{1}{2}+o(x)}{-\frac{1}{2}+o(x)}\to 1+1=2,\quad x\to 0.$$

因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\tan x)-\tan(\sin x)}{\sin x-\tan x}=2.$$

解答完毕.

习题四: 课本第108页习题4.3题6: 当 $x\to 0$ 时, 求如下无穷小量的阶,

$$\ln\left[1+\sin(x^2)\right]+\alpha\left(\sqrt[3]{2-\cos x}-1\right),$$

其中 α 为常数.

解: 考虑如下函数的 Taylor 展开式:

$$\ln\left[1+\sin(x^2)\right]=\sin(x^2)-\frac{1}{2}\sin^2(x^2)+o(x^4)=x^2-\frac{1}{2}x^4+o(x^4);$$

记 $\delta=1-\cos x$, 则 $\delta=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4!}x^4+o(x^4)$

$$\sqrt[3]{2-\cos x}-1=(1+\delta)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}\delta+\frac{1}{2!}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\delta^2+o(x^4)-1$$

$$=\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{72}x^4-\frac{1}{18}x^4+o(x^4)=\frac{1}{6}x^2-\frac{5}{72}x^4+o(x^4).$$

于是

$$\ln\left[1+\sin(x^2)\right]+a\big(\sqrt[3]{2-\cos x}-1\big)=x^2-\frac{1}{2}x^4+\alpha\Big(\frac{1}{6}x^2-\frac{5}{72}x^4\Big)+o(x^4)$$

$$=\left(1+\frac{\alpha}{6}\right)x^2-\left(\frac{1}{2}+\frac{5\alpha}{72}\right)x^4+o(x^4).$$

由此可见, 无穷小量 $\ln\left[1+\sin(x^2)\right]+a\big(\sqrt[3]{2-\cos x}-1\big)$ 当 $\alpha\neq-6$ 时, 其阶为 2; 当 $\alpha=-6$ 时, 其阶为 4. 解答完毕.

习题五: 课本第109页习题4.3题8: 证明对于任意 $x\geq1$, $y\geq1$, $x\neq y$, 成立不等式

$$\left|\frac{\ln x-\ln y}{x-y}-\frac{1}{y}\right|\leq\frac{1}{2}|x-y|.$$

证明: 考虑函数 $\ln x$ 在点 y 处, 带 Lagrange 余项的一阶 Taylor 展开式

$$\ln x=\ln y+\frac{1}{y}(x-y)+\frac{1}{2!}\frac{(-1)}{\xi^2}(x-y)^2,$$

其中 ξ 介于 x 和 y 之间, $\xi\geq1$. 于是

$$\left|\frac{\ln x-\ln y}{x-y}-\frac{1}{y}\right|\leq\frac{1}{2\xi^2}(x-y)^2\leq\frac{1}{2}|x-y|.$$

证毕.

习题六: 课本第109页习题4.3题9: 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的三阶导数, 且 $f(0)=0$, $f'(\frac{1}{2})=0$, $f(1)=\frac{1}{2}$. 证明存在点 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f'''(\xi)=12$.

证明: 考虑函数 $f(x)$ 在点 $x=\frac{1}{2}$ 处带 Lagrange 余项的二阶 Taylor 展式

$$f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}f''\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{6}f'''(\xi)\left(x-\frac{1}{2}\right)^3,$$

其中点 ξ 介于 x 和 $\frac{1}{2}$ 之间. 分别令 $x=0$ 和 $x=1$ 得

$$f(0)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}f''\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{6}f'''(\xi_0)\left(-\frac{1}{2}\right)^3,$$

$$f(1)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}f''\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{6}f'''(\xi_1)\left(-\frac{1}{2}\right)^3,$$

其中 $\xi_0\in(0,\frac{1}{2})$, $\xi_1\in(\frac{1}{2},1)$. 再跟据假设条件 $f(0)=0$, $f'(\frac{1}{2})=0$, $f(1)=\frac{1}{2}$ 得

$$0=f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{8}f''\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{48}f'''(\xi_0),$$

$$\frac{1}{2}=f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{8}f''\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{48}f'''(\xi_1).$$

将上述两个等式相减, 并稍加整理得

$$\frac{1}{2}\Big[f'''(\xi_0)+f'''(\xi_1)\Big]=12.$$

由于三阶导数 $f'''(x)$ 连续, 故根据介值定理知存在点 $\xi\in(\xi_0,\xi_1)$, 使得 $f'''(\xi)=12$. (注: 若只假设函数 $f(x)$ 三阶可导, 即 $f'''(x)$ 不必连续, 则结论仍然成立. 此时可利用 Darbourx 定理). 证毕.

习题七: 课本第109页习题4.3题10: 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导, 证明存在点 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$f(a)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi).$$

证明: 考虑函数 $f(x)$ 在中点 $x = \frac{a+b}{2}$ 处带 Lagrange 余项的一阶 Taylor 展式

$$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2}f''(\eta)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2,$$

其中点 η 介于 x 和 $\frac{a+b}{2}$ 之间. 分别令 $x = a$ 和 $x = b$ 得

$$f(a) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right) + \frac{1}{2}f''(\eta_0)\left(-\frac{b-a}{2}\right)^2,$$

$$f(b) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right) + \frac{1}{2}f''(\eta_1)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2,$$

其中 $\eta_0 \in (a, \frac{a+b}{2})$, $\eta_1 \in (\frac{a+b}{2}, b)$. 将上述两个等式相加, 并稍加整理得

$$f(a) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) = \frac{1}{2}\Big[f''(\eta_0) + f''(\eta_1)\Big] \cdot \frac{(b-a)^2}{4}.$$

根据 Darboux 定理知存在点 $\xi \in (\eta_0, \eta_1)$, 使得

$$f''(\xi) = \frac{1}{2}\Big[f''(\eta_0) + f''(\eta_1)\Big].$$

命题得证.

习题八: 课本第109页习题4.3题11: 设 $f(x)$ 在 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上可导, $h > 0$. 证明存在 $0 < \theta < 1$, 使得

$$f(x_0 + h) - f(x_0 - h) = \Big[f'(x_0 + \theta h) + f'(x_0 - \theta h)\Big]h.$$

证明: 令 $g(t) = f(x_0 + th) - f(x_0 - th)$, 则 $g(t)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 上可导. 根据中值定理得 $g(1) - g(0) = g'(\theta)$, 其中 $\tau \in (0, 1)$, 此即

$$f(x_0 + h) - f(x_0 - h) = \Big[f'(x_0 + \theta h) + f'(x_0 - \theta h)\Big]h.$$

命题得证.

Nov 05 作业

习题一: 课本第114页习题4.4题4(1)(3)(5)(7)(9): 求下列函数的单调区间, 以及它们的极值.

(1) $y = \arctan x - x$, $x \in \mathbb{R}$;

(3) $y = x^n e^{-x}$, $x \geq 0$, n 为正整数;

(5) $y = \frac{2x^3+3x^2-x-4}{x^2-1}$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \pm 1$;

(7) $y = \sin^3 x + \cos^3 x$, $x \in \mathbb{R}$;

(9) $y = (x-1)x^{\frac{2}{3}}$, $x \in \mathbb{R}$.

解(1): 对函数 $y = \arctan x - x$ 求导得

$$y' = \frac{1}{1+x^2} - 1 = -\frac{x^2}{1+x^2} < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

故函数 $y = \arctan x$ 在整个实轴 $\mathbb{R}$ 上严格单调下降, 无极值.

解(3): 对函数 $y = x^n e^{-x}$ 求导得

$$y' = nx^{n-1}e^{-x} - x^n e^{-x} = x^{n-1}e^{-x}(n-x).$$

由此可见, 函数在区间 $(0,n)$ 上严格单调上升, 在区间 $(n,+\infty)$ 上严格单调下降. 于是函数在点 $x=n$ 处取得最大值, 其最大值为 $n^n e^{-n}$.

解(5): 对函数 $y = \frac{2x^3+3x^2-x-4}{x^2-1}$ 求导得

$$y' = \frac{(x^2-1)(6x^2+6x-1)-(2x^3+3x^2-x-4)2x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^4-5x^2+2x+1}{(x^2-1)^2}.$$

以下对分子 $2x^4-5x^2+2x+1$ 作分解因式:

$$2x^4-5x^2+2x+1 = 2x^4-4x^2+2-x^2+2x+1-2$$

$$= 2(x^2-1)^2-(x-1)^2 = (x-1)^2(2x^2+4x+1).$$

再分解 $2x^2+4x+1 = 2(x-x_1)(x-x_2)$, 其中 $x_1 = -1-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_2 = -1+\frac{1}{\sqrt{2}}$. 由此得

$$y' = \frac{2x^4-5x^2+2x+1}{(x^2-1)^2} = \frac{2(x-x_1)(x-x_2)(x-1)^2}{(x^2-1)^2} = \frac{2(x-x_1)(x-x_2)}{(x+1)^2}.$$

于是

$$
\begin{aligned}
&y' > 0, \quad x < x_1, \\
&y' < 0, \quad x_1 < x < x_2, \\
&y' > 0, \quad x > x_2.
\end{aligned}
$$

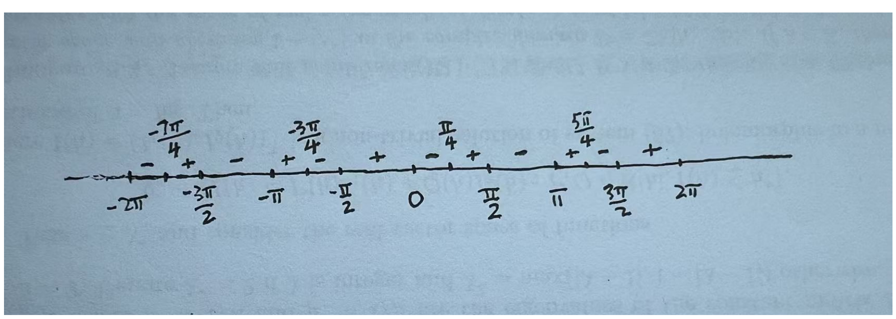
根据上述函数的单调性可知如下函数的极值情况: 在点 $x = x_1$ 处, 函数取得极大值 $y(x_1)$; 在点 $x = x_2$ 处, 函数取得极小值 $y(x_2)$.

解(7): 对函数 $y = \sin^3 x + \cos^3 x$ 求导得

$$y' = 3\sin^2 x \cos x - 3\cos^2 x \sin x = 3\sin x \cos x(\sin x - \cos x)$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{2}\sin(2x)\sin(x - \frac{\pi}{4}).$$

令 $y' = 0$, 则 $\sin(2x) = 0$ 或 $\sin(x - \frac{\pi}{4}) = 0$, 即 $x = \frac{k\pi}{2}$ 或 $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$. 易见导数 $y' = \frac{3\sqrt{2}}{2}\sin(2x)\sin(x - \frac{\pi}{4})$ 的零点(即函数的临界点)均为一阶零点, 也就是说, 经过每个临界点, 导数均改变符号, 故每个临界点都是极值点. 导数的符号, 函数的单调性如图所示,



极值点 $x = \frac{k\pi}{2}$ 的极值情形为

$$y\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \begin{cases} 1, & k \equiv 0, 1, \quad \text{mod } (4), \quad \text{极大}, \\ -1, & k \equiv 2, 3, \quad \text{mod } (4), \quad \text{极小}, \end{cases}$$

极值点 $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$ 极值情形为

$$y\left(k\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, & k \equiv 0, \quad \text{mod } (2), \quad \text{极小}, \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}, & k \equiv 1, \quad \text{mod } (2), \quad \text{极大}. \end{cases}$$

解答完毕.

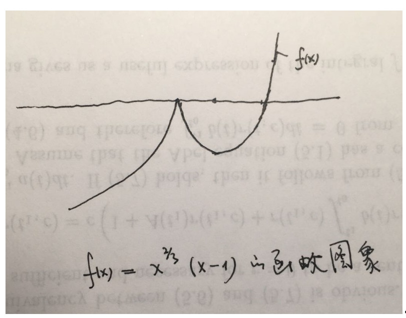
解(9): 对函数 $y=(x-1)x^{\frac{2}{3}}=x^{\frac{5}{3}}-x^{\frac{2}{3}}$ 求导得

$$y'=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}-\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x}}(5x-2).$$

函数有唯一一个临界点 $x=\frac{2}{5}$, 且导数的符号如下

$$\begin{aligned}&y'>0,\quad x<0,\\&y'<0,\quad 0<x<\tfrac{2}{5},\\&y'>0,\quad x>\tfrac{2}{5}.\end{aligned}$$

由此得函数的单调性如下:
在区间 $(-\infty,0)$ 上, 函数单调上升;
在区间 $(0,\frac{2}{5})$ 上, 函数单调下降;
在区间 $(\frac{2}{5},+\infty)$ 上, 函数单调上升.
由此可见, 函数在点 $x=0$ 处取极大值 $y(0)=0$, 在点 $x=\frac{2}{5}$ 处取极小值 $y(\frac{2}{5})=-\frac{3}{5}(\frac{2}{5})^{\frac{2}{3}}$.
函数 $f(x)=(x-1)x^{\frac{2}{3}}$ 的图像如下



.

习题二: 课本第114-115页习题4.4题5(1)(3)(5)(7): 证明下列不等式
(1) $e^{-x^2}<\frac{1}{1+x^2}$, $\forall x>0$;
(3) $\sin x+\cos x\geq 1+x-x^2$, $\forall x\geq 0$;
(5) $\ln(1+x)>\frac{\arctan x}{1+x}$, $\forall x>0$;
(7) $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$, $\forall x>0$;

证(1): 不等式 $e^{-x^2} < \frac{1}{1+x^2}$, $\forall x > 0$ 成立, 当且仅当 $e^{x^2} > 1 + x^2$, 当且仅当 $e^y > 1 + y$, $\forall y > 0$. 由 Taylor 展开式得

$$e^y = 1 + y + \frac{1}{2}e^{\xi}y^2 > 1 + y,$$

其中 $\xi \in (0, y)$. 不等式得证.

证(3): 求函数 $y = \sin x + \cos x \geq 1 + x - x^2$ 的一阶和二阶导

$$y' = \cos x - \sin x - 1 + 2x, \quad y'' = -\sin x - \cos x + 2 \geq 0.$$

由于 $y'(0) = 0$, 且 $y'(x)$ 严格单调上升, 故 $y'(x) > 0$, $\forall x > 0$. 因此 $y(x) \geq y(0) = 0$, $\forall x \geq 0$. 这就得到所要证的不等式

$$\sin x + \cos x \geq 1 + x - x^2, \quad \forall x \geq 0.$$

证(5): 显然所证不等式 $\ln(1 + x) > \frac{\arctan x}{1+x}$, $\forall x > 0$, 等价于

$$(1 + x)\ln(1 + x) > \arctan x, \quad \forall x > 0.$$

令 $f(x) = (1 + x)\ln(1 + x) - \arctan x$, 则 $f(0) = 0$,

$$f'(x) = 1 + \ln(1 + x) - \frac{1}{1 + x^2} = \ln(1 + x) + \frac{x^2}{1 + x^2} > 0, \quad \forall x > 0.$$

这表明函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格单调上升. 故 $f(x) > f(0) = 0$, $\forall x > 0$. 这就证明了不等式 $\ln(1 + x) > \frac{\arctan x}{1+x}$, $\forall x > 0$.

证(7): 令 $f(x) = x - \ln(1 + x)$, 则 $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} > 0$, $\forall x > 0$. 这表明 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格单调上升, 故 $f(x) > f(0) = 0$. 此即 $\ln(1 + x) < x$, $\forall x > 0$.
令 $g(x) = \ln(1 + x) - x + \frac{x^2}{2}$, 则

$$g'(x) = \frac{1}{1 + x} - 1 + x = x - \frac{1}{1 + x} = \frac{x^2}{1 + x} > 0, \quad \forall x > 0.$$

这表明 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格单调上升, 故 $g(x) > g(0) = 0$. 此即不等式 $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x$, $\forall x > 0$, 成立.

习题三: 课本第115页习题4.4题6: 求下列函数在其定义区间上的最值.

(1) $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$, $x \in [-1, 2]$;

(2) $y = |x^2 - 3x + 2|$, $x \in [-10, 10]$;

(3) $y = \sqrt{x} \ln x$, $x > 0$.

解(1): 记 $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$, 则

$$f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 5x^2(x^2 - 4x + 3) = 5x^2(x-1)(x-3).$$

由此得函数有三个临界点 $x = 0, 1, 3$. 点 $x = 3$ 不在我们考虑的区间 $[-1, 2]$ 里. 故我们不考虑点 $x = 3$. 临界点 $x = 0, 1$ 的函数值为 $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, 区间端点的函数值为 $f(-1) = -10$, $f(2) = -7$. 于是函数 $f(x)$ 在区间 $[-1, 2]$ 上的最大值与最小值分别为

$$\max\Big\{f(0), f(1), f(-1), f(2)\Big\} = \max\Big\{1, 2, -10, -7\Big\} = 2,$$

$$\min\Big\{f(0), f(1), f(-1), f(2)\Big\} = \min\Big\{1, 2, -10, -7\Big\} = -10.$$

解(2): $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$, 则 $f(x) = |(x-1)(x-2)|$. 显然函数 $f(x)$ 在点 $x = 1$ 和 $x = 2$ 处不可导, 且 $f(1) = 0$, $f(2) = 0$ 除了这两个点之外, $f(x)$ 在其他地方处处可导, 且 $f'(x) = \pm(2x - 3)$. 故函数 $f(x)$ 有唯一临界点 $x = \frac{3}{2}$, 其函数值为 $f(\frac{3}{2}) = \frac{1}{4}$. 此外在端点处的函数值为 $f(-10) = 132$, $f(10) = 72$. 于是函数 $f(x)$ 在区间 $[-10, 10]$ 上的最大值和最小值分别为

$$\max\Big\{f(1), f(2), f(\frac{3}{2}), f(-10), f(10)\Big\} = \max\Big\{0, 0, \frac{1}{4}, 132, 72\Big\} = 132,$$

$$\min\Big\{f(1), f(2), f(\frac{3}{2}), f(-10), f(10)\Big\} = \min\Big\{0, 0, \frac{1}{4}, 132, 72\Big\} = 0.$$

解(3): 记 $f(x) = \sqrt{x} \ln x$, $x > 0$. 显然 $f(x) \to 0$, 当 $x \to 0+$; $f(x) \to +\infty$, 当 $x \to +\infty$. 由此可见函数在区间 $(0, +\infty)$ 上无最大值. 以下考虑函数的最小值. 求导得

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}(2 + \ln x).$$

由此得函数唯一的临界点 $x=e^{-2}$. 显然在点 $x=e^{-2}$ 的左侧, $f'(x)<0$, 在点 $x=e^{-2}$ 的右侧, $f'(x)>0$. 即函数在点 $x=e^{-2}$ 取得最小值 $f(e^{-2})=\sqrt{e^{-2}}\ln e^{-2}=-2e^{-1}$.

习题四: 课本第115页习题4.4题7:

(1) 证明对任意 $c\in\mathbb{R}$, 方程 $x^3-3x+c=0$ 在区间 $[0,1]$ 上至多有一个实根;

(2) 考虑方程 $x^n+px+q=0$, 其中 p,q 为任意两个实数. 证明当 n 为偶数时, 方程最多有两个实根; 当 n 为奇数时, 方程最多有三个实根.

证(1): 记 $f(x)=x^3-3x+c$, 则 $f'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)$. 可见函数 $f(x)$ 仅有两个临界点 $x=\pm1$. 假设方程 $x^3-3x+c=0$ 在区间 $[0,1]$ 上有两个实根 $x_1,x_2\in[0,1]$ $(x_1<x_2)$, 则根据 Rolle 定理知存在 $\xi\in(x_1,x_2)\subset(0,1)$, 使得 $f'(\xi)=0$. 矛盾. 故方程 $x^3-3x+c=0$ 在区间 $[0,1]$ 上至多有一个实根

证(2): 记 $f(x)=x^n+px+q$, 则 $f'(x)=nx^{n-1}+p$, $f''(x)=n(n-1)x^{n-2}$.

情形 $n=2k$ 为偶数. 假设 $f(x)=0$ 至少有三个零点, 则根据 Rolle 定理知, $f'(x)=2kx^{2k-1}+p$ 至少有两个零点. 矛盾.

情形 $n=2k+1$ 为奇数. 且 $f(x)=0$ 至少有四个零点, 则根据 Rolle 定理知, $f'(x)$ 至少有三个零点. 但是 $f'(x)=2kx^{2k-1}+p$ 只有两个零点. 矛盾. 证毕.

习题五: 课本第115页习题4.4题8:

证明 n 次勒让德 (Legendre) 多项式

$$P_n(x)=\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right]$$

在区间 $(-1,1)$ 内恰有 n 个不同的实零点.

证明: <u>情形 $n=1$</u>. 记 $Q_1(x)=x^2-1$, 则 $P_1(x)=Q_1'(x)=\frac{d}{dx}(x^2-1)$. 由于 $Q_1(\pm1)=0$, 故由 Rolle 定理知, 存在 $\xi_{11}\in(-1,1)$, 使得 $Q_1'(\xi_{11})=0$. 这就证明了一次多项式 $P_1(x)$ 在 $(-1,1)$ 内恰有一个实根. (易见 $P_1(x)=2x$, 故 $P_1(x)$ 恰有一个实根 $x=0$).

情形 $n=2$. 记 $Q_2(x)=(x^2-1)^2$, 再记

$$P_{21}(x)=Q_2'(x),\quad P_{22}(x)=P_{21}'(x)=Q_2''(x)=P_2(x).$$

由于 $Q_2(\pm1)=0$, 故存在 $\xi_{11}\in(-1,1)$, 使得 $Q_2'(\xi_{11})=0$, 即 $P_{21}(\xi_{11})=0$. 由于

$$P_{21}(-1)=0,\quad P_{21}(\xi_{11})=0,\quad P_{21}(1)=0,$$

故由 Rolle 定理知, 存在两点 $\xi_{21}\in(-1,\xi_{11})$, $\xi_{22}\in(\xi_{11},1)$, 使得 $P_{21}'(\xi_{21})=0$, $P_{21}'(\xi_{22})=0$. 这表明二次多项式 $P_2(x)=P_{22}(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内, 恰有两个互异的实根 ξ_{21}, $\xi_{22}\in(-1,1)$.

情形 $n=3$. 记 $Q_3(x)=(x^2-1)^3$, 再记

$$P_{31}(x)=Q_3'(x),\quad P_{32}(x)=P_{31}'(x)=Q_3''(x),\quad P_{33}(x)=P_{32}'(x)=Q_3'''(x)=P_3(x),$$

(i) 由于 $Q_3(\pm1)=0$, 故由 Rolle 定理知存在 $\xi_{11}\in(-1,1)$， 使得 $Q_3'(\xi_{11})=0$, 即 $P_{31}(\xi_{11})=0$.
(ii) 由于 $P_{31}(\pm1)=0$, $P_{31}(\xi_{11})=0$, 故由 Rolle 定理知存在两点 $\xi_{21}\in(-1,\xi_{11})$, $\xi_{22}\in(\xi_{11},1)$, 使得 $P_{31}'(\xi_{21})=0$, $P_{31}'(\xi_{22})=0$, 即 $P_{32}(\xi_{21})=0$, $P_{32}(\xi_{22})=0$.
(iii) 由于 $P_{32}(\pm1)=0$, $P_{32}(\xi_{21})=0$, $P_{32}(\xi_{22})=0$, 故由 Rolle 定理知存在三点 $\xi_{31}\in(-1,\xi_{21})$, $\xi_{32}\in(\xi_{21},\xi_{22})$, $\xi_{33}\in(\xi_{22},1)$, 使得 $P_{33}'(\xi_{3j})=0$, $j=1,2,3$, 即三次多项式 $P_{33}(x)=P_3(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内有三个互异的实根.
对一般正整数 $n>3$, 证明类似. 证毕.

习题六: 课本第115页习题4.4题9:
求内接于椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, 边平行于坐标轴的矩形, 其面积最大.

解: 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上, 位于第一象限的点 (x,y), $x,y>0$ 唯一确定一个其边平行于坐标轴的矩形, 其面积为 $S=2x\cdot 2y=4xy$. 由椭圆方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{y^2}=1$ 解得 $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$. 于是矩形面积可写作

$$S(x)=\frac{4b}{a}x\sqrt{a^2-x^2},\quad x\in[0,a].$$

我们来求函数 $S(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上的最大值. 求导得

$$S'(x)=\frac{4b}{a}\sqrt{a^2-x^2}-\frac{4b}{a}\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{4b}{a\sqrt{a^2-x^2}}(a^2-2x^2).$$

由此得函数 $S(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上唯一一个临界点 $x=\frac{a}{\sqrt{2}}$. 由于函数在端点的值为 $S(0)=0$, $S(a)=0$, 故函数 $S(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上的最大值在点 $x=\frac{a}{\sqrt{2}}$ 处取得, 其最大值为

$$S(\frac{a}{\sqrt{2}})=\frac{4b}{a}\frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2-\frac{a^2}{2}}=2ab.$$

解答完毕.