习题课材料（三）

注：本次习题课包含内容：矩阵综合、线性相关性等

注：带 ♡ 号的习题有一定的难度、比较耗时, 请量力为之.

本节考虑的矩阵均为实矩阵.

习题 1. 求下列矩阵方程的解：

1. $X\begin{bmatrix}2 & 2 & 3\\1 & -1 & 0\\-1 & 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix}4 & 6\\6 & 9\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$.

解　1. 注意到 $\begin{vmatrix}2 & 2 & 3\\1 & -1 & 0\\-1 & 2 & 1\end{vmatrix}=-1$，所以 $\begin{bmatrix}2 & 2 & 3\\1 & -1 & 0\\-1 & 2 & 1\end{bmatrix}$ 可逆，所以

$$X=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 2 & 3\\1 & -1 & 0\\-1 & 2 & 1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -4 & -3\\1 & -5 & -3\\-1 & 6 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 7 & 4\\1 & -5 & -3\end{bmatrix}$$

2. 设 $X=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\end{bmatrix}$，令 $A=\begin{bmatrix}4 & 6\\6 & 9\end{bmatrix}$，则条件转化为：

$$A\alpha=A\beta=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

即：α,β 是方程组 $Ax=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ 的解，对增广矩阵做初等行变换转换成最简行阶梯形矩阵：

$$\left[\begin{array}{cc|c}4 & 6 & 1\\6 & 9 & 1\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{cc|c}1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{4}\\0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

因此方程组 $Ax=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ 无解，进而原矩阵方程也无解.

$\square$

习题 2. 已知 $A=\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&-1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，且 $A^2-AB=I_3$，求矩阵 B.

证明. A 是对角线非零的上三角矩阵，所以 A 可逆，于是

$$A^2-AB=I_3 \quad\Rightarrow\quad A-B=A^{-1} \quad\Rightarrow\quad B=A-A^{-1}.$$

对 $\begin{bmatrix}A & I\end{bmatrix}$ 做初等行变换，可求得 $A^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，所以

$$B=\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&-1&1\\0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$\square$

习题 3. 1. 证明：A 与任意 n 阶方阵均可交换 $\Leftrightarrow A$ 为 n 阶纯量矩阵.

2. 设分块对角阵 $A=\mathrm{diag}\left(a_1I_{n_1},a_2I_{n_2},\cdots,a_sI_{n_s}\right)$, 其中 $a_i\neq a_j(\forall 1\le i\neq j\le s),\sum\limits_{i=1}^{s}n_i=n$. 证明: 与 A 乘法可交换的矩阵必为分块对角矩阵 $B=\mathrm{diag}(B_1,B_2,\cdots,B_s)$, 其中 $B_i\in M_{n_i}(1\le i\le s)$.

解 1. “$\Leftarrow$”：A 为 n 阶纯量矩阵，显然它和任意 n 阶方阵可交换.

“$\Rightarrow$”：假设 A 与任意 n 阶方阵可交换，显然 A 本身也是方阵. 对 $1\le i\le n$，取 B_i 是非对角线元素等于 0、第 i 个对角线元素等于 -1、其它对角线元素等于 1 的方阵. 那么

- AB_i 的第 i 列是原来的 -1 倍，其它列和 A 相同；
- B_iA 的第 i 行时原来的 -1 倍，其它行和 A 相同.

而 $AB_i=B_iA$，则 A 的第 i 行和第 i 列形成的“十”字形，除了对角线位置以外的元素都等于 0，由此推知 A 是对角矩阵，我们设它等于 $\mathrm{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$. 对任意 $1\le i\neq j\le n$，设 P_{ij} 是对换第 i,j 行的对换矩阵，而对换两次就回到原位，所以 $P_{ij}^2=I_n$，即 $P_{ij}^{-1}=P_{ij}$. 由 $P_{ij}A=AP_{ij}$ 知，$P_{ij}AP_{ij}=A$，而 $P_{ij}AP_{ij}$ 是先交换 A 的第 i,j 行，再交换它的第 i,j 列，因此 $P_{ij}AP_{ij}=\mathrm{diag}(\cdots,a_j,\cdots,a_i,\cdots)=A=\mathrm{diag}(\cdots,a_i,\cdots,a_j,\cdots)$，由此可知 A 的对角线元素均相等，从而 A 是对角矩阵.

2. 我们对 B 进行分块：$B=\begin{bmatrix}B_{ij}\end{bmatrix}$，其中 $B_{ij}\in M_{n_i\times n_j}(\mathbb{R})$. 注意到：$AB$ 的结果是将 B 分块的第 i 行乘以 a_i，BA 的结果是将 B 分块的第 j 列乘以 a_j，所以 $AB=BA$ 意味着：对任意 $1\le i,j\le s$ 都有
$$a_iB_{ij}=a_jB_{ij},$$
所以当 $i\ne j$ 时，$B_{ij}=0$，即 B 为分块对角矩阵.

□

习题 4. 证明：

1. 设 n 维向量 $\boldsymbol{x}$ 的每个分量都是 1，则 n 阶方阵 A 的各行元素之和为 1 当且仅当 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$.
2. 若 n 阶方阵 A,B 的各行元素之和均为 1, 则 AB 的各行元素之和也均为 1.
3. 若 n 阶方阵 A,B 的各列元素之和均为 1, 则 AB 的各列元素之和也均为 1.

证明. 1. 注意到：对任意行向量 $\alpha^T=\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\end{bmatrix}$，$\alpha^T$ 的分量之和 $a_1+a_2+\cdots+a_n=\alpha^T\boldsymbol{x}$；同时，如果把 A 按照行向量来分块，即设 $A=\begin{bmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \vdots\\ \alpha_n^T\end{bmatrix}$，则
$$A\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\alpha_1^T\boldsymbol{x}\\ \alpha_2^T\boldsymbol{x}\\ \vdots\\ \alpha_n^T\boldsymbol{x}\end{bmatrix}$$
因此：A 的各行元素之和为 1，当且仅当 $\alpha_1^T\boldsymbol{x}=\alpha_2^T\boldsymbol{x}=\cdots=\alpha_n^T\boldsymbol{x}=1$，当且仅当 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$.

2. 由上一小题可知，我们只需要证明：$(AB)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$，其中 $\boldsymbol{x}$ 的每个分量都是 1. 根据条件有：$A\boldsymbol{x}=B\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$，从而
$$(AB)\boldsymbol{x}=A(B\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}.$$

3. n 阶方阵 A,B 各列元素之和均为 1，当且仅当 B^T,A^T 各行元素之和均为 1. 由上一小题，B^TA^T 各行元素之和均为 1. 而 $B^TA^T=(AB)^T$，所以 AB 各列元素之和均为 1.

□

习题 5 (♡). 设 A 是 n 阶方阵，且 $A^3=2I$. 又 $B=A^2-2A+I$，证明：B 是可逆矩阵；请求出 B^{-1}.

解　设 $Bx=0$，即 $(A^2-2A+I)x=0$，那么 $(A^3-2A^2+A)x=A(A^2-2A+I)x=0$. 代入 $A^3=2I$ 可得 $(-2A^2+A+2I)x=0$. 结合 $(A^2-2A+I)x=0$，消去含有 A^2 的项，知 $(-3A+4I)x=0$，即 $Ax=\frac{4}{3}x$，从而

$$x=A^3x=A^2(Ax)=\frac{4}{3}A^2x=\frac{4^3}{3^3}x,$$

因此 $x=0$，这说明方程组 $Bx=0$ 只有零解，所以 B 可逆.

注意到 $B=(A-I)^2$，所以 $B^{-1}=((A-I)^{-1})^2$. 另一方面，

$$A^3=2I \quad\Rightarrow\quad A^3-I=I \quad\Rightarrow (A-I)(A^2+A+I)=I \quad\Rightarrow\quad (A-I)^{-1}=A^2+A+I,$$

所以

$$\begin{aligned}B^{-1}&=(A^2+A+I)^2\\&=A^4+2A^3+3A^2+2A+I\\&=A+2I+3A^2+2A+I\\&=3A^2+3A+3I.\end{aligned}$$

□

习题 6. 求下列向量组的极大线性无关部分组：

$$\begin{bmatrix}2\\3\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\6\\2\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\2\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\4\\3\\2\end{bmatrix}.$$

解　将题中的四个列向量排成矩阵：$\begin{bmatrix}2&4&0&2\\3&6&1&4\\1&2&2&3\\1&2&1&2\end{bmatrix}$，作初等行变换转化成阶梯型矩阵：

$$\begin{bmatrix}2&4&0&2\\3&6&1&4\\1&2&2&3\\1&2&1&2\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&0&1\\3&6&1&4\\1&2&2&3\\1&2&1&2\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&0&1&1\\0&0&2&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

第 1 列和第 3 列是主元列，因此 $\begin{bmatrix}2\\3\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\2\\1\end{bmatrix}$ 是一个极大线性无关部分组. □

习题 7. 设列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关,

1. 当 $n=3$ 时,证明:$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 线性无关.
2. 当 $n=4$ 时,证明:$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$ 线性相关.
3. 证明:当 n 是偶数时,$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_n+\alpha_1$ 线性相关;当 n 是奇数时,$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_n+\alpha_1$ 线性无关
4. 向量组 $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\cdots,\alpha_n-\alpha_1$ 线性相关还是线性无关?请给出你的判断并给出证明.

证明. 1. 设 $x_1(\alpha_1+\alpha_2)+x_2(\alpha_2+\alpha_3)+x_3(\alpha_3+\alpha_1)=0$,则

$$(x_1+x_3)\alpha_1+(x_1+x_2)\alpha_2+(x_2+x_3)\alpha_3=0,$$

由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性无关性可知:$x_1+x_3=x_1+x_2=x_2+x_3=0$. 解方程组可得:$x_1=x_2=x_3=0$,因此 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 线性无关.

2. 注意到:

$$1\cdot(\alpha_1+\alpha_2)+(-1)\cdot(\alpha_2+\alpha_3)+1\cdot(\alpha_3+\alpha_4)+(-1)\cdot(\alpha_4+\alpha_1)=0,$$

所以 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$ 线性相关.

3. 设 $x_1(\alpha_1+\alpha_2)+x_2(\alpha_2+\alpha_3)+\cdots+x_n(\alpha_n+\alpha_1)=0$. 改写为

$$(x_1+x_n)\alpha_1+(x_1+x_2)\alpha_2+\cdots+(x_{n-1}+x_n)\alpha_n=0,$$

由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的线性无关性知

$$x_1+x_n=x_1+x_2=\cdots=x_{n-1}+x_n=0,$$

写成矩阵形式即

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0$$

对系数矩阵作初等行变换：

$$\begin{bmatrix}1&0&0&\cdots&0&1\\1&1&0&\cdots&0&0\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1&1&0\\0&0&\cdots&\cdots&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0&\cdots&0&0\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1&1&0\\0&0&\cdots&\cdots&1&1\\1&0&0&\cdots&0&1\end{bmatrix}$$

把最后一行加第 1 行的 (-1) 倍，再加第 2 行的 $(-1)^2$ 倍，再加第 3 行的 $(-1)^3$ 倍，$\cdots$，再加第 $n-1$ 行的 $(-1)^{n-1}$ 倍，系数矩阵转化为：

$$\begin{bmatrix}1&1&0&\cdots&0&0\\0&1&1&\cdots&0&0\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&\cdots&1&1\\0&0&0&\cdots&0&1+(-1)^{n-1}\end{bmatrix}$$

这是上三角矩阵，系数矩阵可逆当且仅当 $1+(-1)^{n-1}\neq 0$，当且仅当 n 是奇数. 因此：当且仅当 n 是奇数时，$x_1(\alpha_1+\alpha_2)+x_2(\alpha_2+\alpha_3)+\cdots+x_n(\alpha_n+\alpha_1)=0$ 只有零解 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$，也就是说

- n 是奇数时，$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_n+\alpha_1$ 线性无关.
- n 是偶数时，$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_n+\alpha_1$ 线性相关. 特别地，我们可以看出来：

$$(\alpha_1+\alpha_2)-(\alpha_2+\alpha_3)+(\alpha_3+\alpha_4)+\cdots-(\alpha_n+\alpha_1)=0.$$

4. 注意到：$(\alpha_1-\alpha_2)+(\alpha_2-\alpha_3)+\cdots+(\alpha_n-\alpha_1)=0$，可知向量组 $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\cdots,\alpha_n-\alpha_1$ 线性相关.

□

习题 8. 设列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，$\alpha_{n+1}=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n$，其中 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 全都非零. 证明：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\alpha_{n+1}$ 中任意 n 个向量均线性无关.

解　需要证明：对任意 $1\leq i\leq n$，$\alpha_1,\cdots,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\cdots,\alpha_{n+1}$ 均线性无关. 设

$$x_1\alpha_1+\cdots+x_{i-1}\alpha_{i-1}+x_{i+1}\alpha_{i+1}+\cdots+x_{n+1}\alpha_{n+1}=0, \tag{*}$$

那么问题归结为证明：$x_1=\cdots=x_{i-1}=x_{i+1}=\cdots+x_{n+1}=0$.

将 $\alpha_{n+1}=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n$ 代入 (*) 式并整理得：

$$(x_1+k_1x_{n+1})\alpha_1+\cdots+(x_{i-1}+k_{i-1}x_{n+1})\alpha_{i-1}+(k_ix_{n+1})x_i+(x_{i+1}+k_{i+1}x_{n+1})\alpha_{i+1}+\cdots+(x_n+k_nx_{n+1})\alpha_n=0$$

利用 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的线性无关性知：

$$x_1+k_1x_{n+1}=x_{i-1}+k_{i-1}x_{n+1}=k_ix_{n+1}=x_{i+1}+k_{i+1}x_{n+1}=x_n+k_nx_{n+1}=0;$$

由 $k_ix_{n+1}=0$ 及 $k_i\neq 0$ 知 $x_{n+1}=0$; 再代入其它方程，即可得 $x_1=\cdots=x_{i-1}=x_{i+1}=\cdots+x_{n+1}=0$. □

习题 9 (♡). 设 $m\geq n, B\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. 证明:$B$ 的列向量线性无关,当且仅当存在矩阵 $A\in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ 使得 $AB=I_n$.

证明. B 的列向量线性无关，等价于方程组 $B\boldsymbol{x}=0$ 只有零解，也等价于 B 的每一列都是主元列，也等价于 B 的最简行阶梯形矩阵形如 $\begin{bmatrix} I_n \\ 0_{(m-n)\times n}\end{bmatrix}$.

假设 B 线性无关，那么 B 的最简行阶梯形矩阵形如 $\begin{bmatrix} I_n \\ 0_{(m-n)\times n}\end{bmatrix}$，而最简行阶梯形矩阵由原矩阵作初等行变换得来，每一次初等行变换又等价于在 B 左边乘以一个初等矩阵，总而言之，存在可逆矩阵 P，使得 $PB=\begin{bmatrix} I_n \\ 0_{(m-n)\times n}\end{bmatrix}$. 令 $A=\begin{bmatrix} I_n & 0_{n\times(m-n)}\end{bmatrix}P$，那么

$$AB=A=\begin{bmatrix} I_n & 0_{n\times(m-n)}\end{bmatrix}PB=A=\begin{bmatrix} I_n & 0_{n\times(m-n)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n \\ 0_{(m-n)\times n}\end{bmatrix}=I_n.$$

假设 $AB=I_n$. 考虑方程组 $B\boldsymbol{x}=0$，那么 $\boldsymbol{x}=I_n\boldsymbol{x}=AB\boldsymbol{x}=0$，这说明方程组 $B\boldsymbol{x}=0$ 只有零解，所以 B 的列向量线性无关. □

习题 10 (♡♡).

1. 设分块矩阵 $X=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D\end{bmatrix}$ 中，$A\in M_{m\times m}(\mathbb{R})$ 是可逆矩阵，$D\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. 证明：$X$ 可逆当且仅当 $D-CA^{-1}B$ 可逆. 在这个条件下，求 X^{-1}.
2. 设 $A\in M_{m\times n}, B\in M_{n\times m}$，证明：$\det(I_m-AB)=\det(I_n-BA)$.
3. 设 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^n$，证明：$I_n-\alpha\beta^{\mathrm{T}}$ 可逆，当且仅当 $\beta^T\alpha\neq 1$.
4. 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1+a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & 1+a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & 1+a_nb_n \end{vmatrix}; \qquad \begin{vmatrix} 1+a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & 1+a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & 1+a_n+b_n \end{vmatrix}$$

证明. 1. 利用 A 可逆，对 $X=\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}$ 作分块消元消去 C（注意，初等行变换是左乘，因此将第一行减去 CA^{-1} 乘以第一行）：

$$\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}A & B\\ 0 & D-CA^{-1}B\end{bmatrix}.$$

这是个分块上三角矩阵，它可逆当且仅当对角线上的方阵可逆，因此 X 可逆当且仅当 $D-CA^{-1}B$ 可逆.

根据此步骤，得 $\begin{bmatrix}I_m & 0\\ -CA^{-1} & I_n\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}A & B\\ 0 & D-CA^{-1}B\end{bmatrix}$，于是

$$\begin{bmatrix}A^{-1} & \\ & (D-CA^{-1}B)^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_m & 0\\ -CA^{-1} & I_n\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}I_m & A^{-1}B\\ 0 & I_n\end{bmatrix}$$

于是

$$\begin{bmatrix}I_m & -A^{-1}B\\ & I_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A^{-1} & \\ & (D-CA^{-1}B)^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_m & 0\\ -CA^{-1} & I_n\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}I_m & 0\\ 0 & I_n\end{bmatrix}$$

这就是说：

$$X^{-1}=\begin{bmatrix}I_m & -A^{-1}B\\ & I_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A^{-1} & \\ & (D-CA^{-1}B)^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_m & 0\\ -CA^{-1} & I_n\end{bmatrix}$$

2. 考虑分块矩阵 $\begin{bmatrix}I_m & A\\ B & I_n\end{bmatrix}$，一方面，我们可以做分块初等行变换（倍加）消去 B:

$$\begin{bmatrix}I_m & A\\ B & I_n\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}I_m & A\\ 0 & I_n-BA\end{bmatrix}\qquad\text{即}\qquad\begin{bmatrix}I_m & \\ -B & I_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_m & A\\ B & I_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_m & A\\ 0 & I_n-BA\end{bmatrix}$$

取行列式得：$\det(I_n-BA)=\begin{vmatrix}I_m & A\\ B & I_n\end{vmatrix}$

另一方面，我们可以做分块初等行变换（倍加）消去 A:

$$\begin{bmatrix}I_m & A\\ B & I_n\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}I_m-AB & 0\\ B & I_n\end{bmatrix}\qquad\text{即}\qquad\begin{bmatrix}I_m & -A\\ & I_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_m & A\\ B & I_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_m-AB & 0\\ B & I_n\end{bmatrix}$$

取行列式得：$\det(I_m-AB)=\begin{vmatrix}I_m & A\\ B & I_n\end{vmatrix}=\det(I_n-BA)$

3. $I_n-\alpha\beta^T$ 可逆，当且仅当 $\det(I_n-\alpha\beta^T)\neq 0$，而 $\det(I_n-\alpha\beta^T)=\det(I_1-\beta^T\alpha)=1-\beta^T\alpha$，因此 $I_n-\alpha\beta^T$ 可逆当且仅当 $1-\beta^T\alpha\neq 0$，等价于 $\beta^T\alpha\neq 1$.

4. 注意到

$$\begin{bmatrix} 1+a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & 1+a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & 1+a_nb_n \end{bmatrix} = I_n + \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{bmatrix}$$
$$= I_n + \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix}$$

所以

$$\begin{vmatrix} 1+a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & 1+a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & 1+a_nb_n \end{vmatrix} = \left| I_n + \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix} \right|$$
$$= 1 + \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$
$$= 1 + a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$$

再注意到

$$\begin{bmatrix} 1+a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & 1+a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & 1+a_n+b_n \end{bmatrix} = I_n + \begin{bmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{bmatrix}$$
$$= I_n + \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \\ a_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix}$$

所以

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1+a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & 1+a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & 1+a_n+b_n \end{vmatrix}
&= \left| I_n + \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \\ a_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix} \right| \\
&= \left| I_2 + \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \\ a_n & 1 \end{bmatrix} \right| \\
&= \begin{vmatrix} 1+(a_1+a_2+\cdots+a_n) & n \\ a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n & 1+(b_1+b_2+\cdots+b_n) \end{vmatrix} \\
&= \left(1+\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(1+\sum_{i=1}^n b_i\right) - n\sum_{i=1}^n a_ib_i
\end{aligned}
$$

□

习题 11 (♡). 给定分块矩阵 $X = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}$，其中 A,D 都是方阵. 若 X 和 X^T 可交换，证明：$B=0$.

证明. 首先需要提醒的是，$X^T = \begin{bmatrix} A^T & 0 \\ B^T & D^T \end{bmatrix}$，那么

$$
XX^T = \begin{bmatrix} AA^T+BB^T & BD^T \\ DB^T & DD^T \end{bmatrix}, \qquad X^TX = \begin{bmatrix} A^TA & A^TB \\ B^TA & B^TB+D^TD \end{bmatrix}
$$

X 和 X^T 可交换，则 $XX^T = X^TX$，从而 $AA^T+BB^T = A^TA$，那么

$$
\operatorname{trace}(A^TA) = \operatorname{trace}(AA^T+BB^T) = \operatorname{trace}(AA^T) + \operatorname{trace}(BB^T),
$$

而 $\operatorname{trace}(A^TA) = \operatorname{trace}(AA^T)$，所以 $\operatorname{trace}(BB^T)=0$.

设 $B = \begin{bmatrix} b_{ij} \end{bmatrix}_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$，那么 BB^T 是 m 阶方阵，第 k 个对角元为 $b_{k1}^2+b_{k2}^2+\cdots+b_{kn}^2$，$\operatorname{trace}(BB^T)$ 是这些对角元的和，所以由 $\operatorname{trace}(BB^T)=0$ 可得 B 中所有元素的平方和为 0，从而每一个元素都等于 0，即 $B=0$.

□