Linear Algebra 2025 Fall

Sample Solution

TA: Hang Li *Week 8-2*

《线性代数与几何》Exercise 4：10 12 14

Exercise 4：10 已知向量组 (1)：$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$；向量组 (2)：$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$；向量组 (3)：$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5$。如果 $\mathrm{r}(1) = \mathrm{r}(2) = 3$，$\mathrm{r}(3) = 4$，证明：$\mathrm{r}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5 - \alpha_4) = 4$。

证明：

1. 由 $\mathrm{r}(1) = 3$，得 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关；由 $\mathrm{r}(2) = 3$，得 α_4 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出，即存在 k_1, k_2, k_3，使得：
$$\alpha_4 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 \tag{1}$$
2. 要证 $\mathrm{r}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5 - \alpha_4) = 4$，只需证 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5 - \alpha_4$ 线性无关。假设存在数 l_1, l_2, l_3, l_4，使得：
$$l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + l_3\alpha_3 + l_4(\alpha_5 - \alpha_4) = \mathbf{0}$$
将式 (1) 代入并整理得：
$$(l_1 - l_4k_1)\alpha_1 + (l_2 - l_4k_2)\alpha_2 + (l_3 - l_4k_3)\alpha_3 + l_4\alpha_5 = \mathbf{0}$$
3. 由 $\mathrm{r}(3) = 4$，得 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5$ 线性无关，因此：
$$\begin{cases} l_1 - l_4k_1 = 0 \\ l_2 - l_4k_2 = 0 \\ l_3 - l_4k_3 = 0 \\ l_4 = 0 \end{cases}$$
解得 $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = 0$，故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5 - \alpha_4$ 线性无关，即 $\mathrm{r}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5 - \alpha_4) = 4$。

Exercise 4：12 已知两个向量组有相同的秩，且其中之一可被另一个线性表出，证明：这两个向量组等价。

证明： 设向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$，向量组 $B: \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$，满足 $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B) = r$，且不妨设 A 可由 B 线性表出。

1. 取 A 的极大线性无关组 $A_0:\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\ldots,\alpha_{i_r}$，取 B 的极大线性无关组 $B_0:\beta_{j_1},\beta_{j_2},\ldots,\beta_{j_r}$。
2. 由于 A 可由 B 线性表出，且 B 可由 B_0 线性表出，故 A 可由 B_0 线性表出；又 A_0 是 A 的极大线性无关组，因此 A_0 可由 B_0 线性表出。
3. 考虑向量组 $C:\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_r},\beta_{j_1},\ldots,\beta_{j_r}$。由 A_0 可由 B_0 线性表出，得 $\operatorname{rank}(C)=\operatorname{rank}(B_0)=r$；又 A_0 是含 r 个向量的线性无关组，故 A_0 是 C 的极大线性无关组，因此 B_0 可由 A_0 线性表出。
4. 由 B_0 可由 A_0 线性表出，B 可由 B_0 线性表出，A_0 可由 A 线性表出，得 B 可由 A 线性表出；又已知 A 可由 B 线性表出，故 A 与 B 等价。

Exercise 4：14 求下列矩阵的秩

(1) $A=\begin{bmatrix}2&1&-1&1&1\\3&-2&1&-3&4\\1&4&-3&5&-2\end{bmatrix}$

解答：对 A 作初等行变换：

$$A\to\begin{bmatrix}1&4&-3&5&-2\\0&-7&5&-9&5\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

行阶梯形有 2 个非零行，故 $\operatorname{rank}(A)=2$。

(2) $B=\begin{bmatrix}1&1&-3&-4&1\\3&1&1&4&3\\1&5&-9&-8&1\end{bmatrix}$

解答：对 B 作初等行变换：

$$B\to\begin{bmatrix}1&1&-3&-4&1\\0&1&-5&-8&0\\0&0&1&2&0\end{bmatrix}$$

行阶梯形有 3 个非零行，故 $\operatorname{rank}(B)=3$。

(3) $C=\begin{bmatrix}1&1&2&a&3\\2&2&3&1&4\\1&0&1&1&5\\2&3&5&5&4\end{bmatrix}$

解答： 对 C 作初等行变换：

$$C \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a-2 & 0 \end{bmatrix}$$

1. 若 $a \neq 2$，行阶梯形有 4 个非零行，故 $\text{rank}(C) = 4$；

2. 若 $a = 2$，行阶梯形有 3 个非零行，故 $\text{rank}(C) = 3$。

(4) $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 & 2 \\ 3 & 5 & a & -4 & 4 \\ 4 & 5 & 0 & 3 & 7-a \end{bmatrix}$

解答： 对 D 作初等行变换：

$$D \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & a-9 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 15-3a & 0 & 5-a \end{bmatrix}$$

1. 若 $a \neq 5$，行阶梯形有 3 个非零行，故 $\text{rank}(D) = 3$；

2. 若 $a = 5$，行阶梯形有 2 个非零行，故 $\text{rank}(D) = 2$。

《线性代数入门》Exercise 2.1：1, Exercise 2.3: 2, 3, 5

Exercise 2.1.1 判断下列子集是否为 $\mathbb{R}^n$ 的子空间，其中的子空间是否可以写成由某个向量组线性生成的子空间；如果可以，写出一组基：

解答：

1. 子集 $S_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \mid \sum_{i=1}^{n} a_i = 0 \right\}$

- 非空性：零向量 $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in S_1$，非空。

- 对加法封闭：设 $\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in S_1$，则 $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0, \sum_{i=1}^{n} b_i = 0$。于是 $\alpha+\beta = \begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{bmatrix}$，且 $\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i) = 0$，故 $\alpha+\beta \in S_1$。

- 对数量乘法封闭：设 $\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in S_1$，$k \in \mathbb{R}$，则 $k\alpha = \begin{bmatrix} ka_1 \\ \vdots \\ ka_n \end{bmatrix}$，且 $\sum_{i=1}^{n}(ka_i) = 0$，故 $k\alpha \in S_1$。

因此，S_1 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间。

生成向量组与基：可由以下向量组线性生成：

$$\varepsilon_{12} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},\ \varepsilon_{13} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},\ \ldots,\ \varepsilon_{1n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix}$$

基为 $\varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \ldots, \varepsilon_{1n}$，维数 $n-1$。

2. 子集 $S_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \mid \sum_{i=1}^{n} a_i = 1 \right\}$

对加法封闭：设 $\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in S_2$，则 $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$，$\sum_{i=1}^{n} b_i = 1$。于是 $\alpha+\beta = \begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{bmatrix}$，且 $\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i) = 2 \neq 1$，故 $\alpha+\beta \notin S_2$。

因此，S_2 不是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间。

3. 子集 $S_3 = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \mid \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 0 \right\}$

由 $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 0 \iff a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$，故 $S_3 = \{\mathbf{0}\}$（零子空间）。

- 非空性：$\mathbf{0} \in S_3$，非空。
- 对加法封闭：$\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \in S_3$。
- 对数量乘法封闭：对任意 $k \in \mathbb{R}$，$k\mathbf{0} = \mathbf{0} \in S_3$。

因此，S_3 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间（零子空间）。

生成向量组与基：零子空间由零向量生成，无基（维数为 0）。

4. 子集 $S_4 = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \mid a_1 = a_2 = 0 \right\}$

- 非空性：零向量 $\mathbf{0} \in S_4$，非空。
- 对加法封闭：设 $\alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in S_4$，则 $\alpha + \beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_3 + b_3 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix} \in S_4$。
- 对数量乘法封闭：设 $\alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in S_4$，$k \in \mathbb{R}$，则 $k\alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ ka_3 \\ \vdots \\ ka_n \end{bmatrix} \in S_4$。

因此，S_4 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间。

生成向量组与基：可由以下向量组线性生成：

$$\varepsilon_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ \varepsilon_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ \ldots, \ \varepsilon_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

基为 $\varepsilon_3, \varepsilon_4, \ldots, \varepsilon_n$，维数 $n-2$。

5. 子集 $S_5 = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \mid a_1 \geq 0 \right\}$

- 非空性：取 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in S_5$，非空。
- 对数量乘法封闭：取 $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in S_5$，数 $k=-1$，则 $k\alpha = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$，其中 $a_1 = -1 < 0$，故 $k\alpha \notin S_5$，不满足数量乘法封闭。

因此，S_5 不是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间。

6. 子集 $S_6 = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \mid a_1 = a_2 = \cdots = a_n \right\}$

- 非空性：零向量 $\mathbf{0} \in S_6$，非空。
- 对加法封闭：设 $\alpha = \begin{bmatrix} a \\ a \\ \vdots \\ a \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} b \\ b \\ \vdots \\ b \end{bmatrix} \in S_6$，则 $\alpha + \beta = \begin{bmatrix} a+b \\ a+b \\ \vdots \\ a+b \end{bmatrix} \in S_6$。
- 对数量乘法封闭：设 $\alpha = \begin{bmatrix} a \\ a \\ \vdots \\ a \end{bmatrix} \in S_6$，$k \in \mathbb{R}$，则 $k\alpha = \begin{bmatrix} ka \\ ka \\ \vdots \\ ka \end{bmatrix} \in S_6$。

因此，S_6 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间。

生成向量组与基：可由向量 $\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ 线性生成，基为 $\{\varepsilon\}$，维数为 1。

7. 子集 $S_7 = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \mid a_1^2 = a_2^2 = \cdots = a_n^2 \right\}$ $(n \geq 2)$

- 非空性：零向量 $\mathbf{0} \in S_7$，非空。
- 对加法封闭：取 $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix} \in S_7$，则 $\alpha + \beta = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$，其中 $2^2 \neq 0^2$，故 $\alpha + \beta \notin S_7$，不满足加法封闭。

因此，S_7 不是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间。

8. 子集 $S_8 = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \mid a_1 a_2 a_3 = 0 \right\}$

- 非空性：取 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in S_8$，非空。
- 对加法封闭：取 $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in S_8$，则 $\alpha + \beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$，其中 $1 \times 2 \times 1 = 2 \neq 0$，故 $\alpha + \beta \notin S_8$，不满足加法封闭。

因此，S_8 不是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间。

9. 子集 $S_9 = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \mid a_1 = a_2 \right\}$

- 非空性：零向量 $\mathbf{0} \in S_9$，非空。
- 对加法封闭：设 $\alpha = \begin{bmatrix} a \\ a \\ b \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} c \\ c \\ d \end{bmatrix} \in S_9$，则 $\alpha + \beta = \begin{bmatrix} a+c \\ a+c \\ b+d \end{bmatrix} \in S_9$。
- 对数量乘法封闭：设 $\alpha = \begin{bmatrix} a \\ a \\ b \end{bmatrix} \in S_9$，$k \in \mathbb{R}$，则 $k\alpha = \begin{bmatrix} ka \\ ka \\ kb \end{bmatrix} \in S_9$。

因此，S_9 是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间。

生成向量组与基：可由向量 $\varepsilon_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \varepsilon_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 线性生成，基为 $\{\varepsilon_1, \varepsilon_3\}$，维数为 2。

10. 子集 $S_{10} = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \mid a_1 \leq a_2 \leq a_3 \right\}$

- 非空性：取 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \in S_{10}$，非空。
- 对数量乘法封闭：取 $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \in S_{10}$，数 $k = -1$，则 $k\alpha = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$，其中 $-1 \leq -2 \leq -3$ 不成立，故 $k\alpha \notin S_{10}$，不满足数量乘法封闭。

因此，S_{10} 不是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间。

11. 子集 $S_{11} = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \textbf{ 是可逆矩阵} \right\}$

- 非空性：取 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，对应的矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 可逆，故非空。

- 对加法封闭：取 $\alpha = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix} \in S_{11}$，则 $\alpha + \beta = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$，对应的矩阵 $\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$ 行列式为 0，不可逆，故 $\alpha + \beta \notin S_{11}$，不满足加法封闭。

因此，S_{11} 不是 $\mathbb{R}^4$ 的子空间。

12. 子集 $S_{12} = \left\{ \begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix}a_1 & a_2\\a_3 & a_4\end{bmatrix} \textbf{ 是不可逆矩阵} \right\}$

- 非空性：零向量 $\mathbf{0} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$ 对应的矩阵 $\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$ 不可逆，故非空。
- 对加法封闭：取 $\alpha = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix} \in S_{12}$，则 $\alpha + \beta = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$，对应的矩阵 $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ 可逆，故 $\alpha + \beta \notin S_{12}$，不满足加法封闭。

因此，S_{12} 不是 $\mathbb{R}^4$ 的子空间。

13. 子集 $S_{13} = \left\{ \begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix}a_1 & a_2\\a_3 & a_4\end{bmatrix} \textbf{ 是对称矩阵} \right\}$

- 非空性：零向量 $\mathbf{0} \in S_{13}$，非空。
- 对加法封闭：设 $\alpha = \begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\b_4\end{bmatrix} \in S_{13}$，则对应的矩阵分别为 $\begin{bmatrix}a_1 & a_2\\a_3 & a_4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}b_1 & b_2\\b_3 & b_4\end{bmatrix}$，且

$a_2 = a_3, b_2 = b_3$。$\alpha+\beta = \begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \\ a_4+b_4 \end{bmatrix}$，对应的矩阵为 $\begin{bmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 \\ a_3+b_3 & a_4+b_4 \end{bmatrix}$，其中 $a_2+b_2 = a_3+b_3$，故为对称矩阵，$\alpha+\beta \in S_{13}$。

- 对数量乘法封闭：设 $\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \in S_{13}$，$k \in \mathbb{R}$，则 $k\alpha = \begin{bmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ ka_3 \\ ka_4 \end{bmatrix}$，对应的矩阵为 $\begin{bmatrix} ka_1 & ka_2 \\ ka_3 & ka_4 \end{bmatrix}$，其中 $ka_2 = ka_3$，故为对称矩阵，$k\alpha \in S_{13}$。

因此，S_{13} 是 $\mathbb{R}^4$ 的子空间。

生成向量组与基：可由向量 $\varepsilon_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \varepsilon_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 线性生成，基为 $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_4\}$，维数为 3。

14. 子集 $S_{14} = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \text{ 是反对称矩阵} \right\}$

- 非空性：零向量 $\mathbf{0} \in S_{14}$，非空。
- 对加法封闭：设 $\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} \in S_{14}$，则对应的矩阵分别为 $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$，且 $a_1 = 0, a_4 = 0, a_2 = -a_3$；$b_1 = 0, b_4 = 0, b_2 = -b_3$。$\alpha+\beta = \begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \\ a_4+b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \\ 0 \end{bmatrix}$，对应的矩阵为 $\begin{bmatrix} 0 & a_2+b_2 \\ a_3+b_3 & 0 \end{bmatrix}$，其中 $a_2+b_2 = -(a_3+b_3)$，故为反对称矩阵，$\alpha+\beta \in S_{14}$。

- 对数量乘法封闭：设 $\alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ a_2 \\ -a_2 \\ 0 \end{bmatrix} \in S_{14}, k \in \mathbb{R}$，则 $k\alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ ka_2 \\ -ka_2 \\ 0 \end{bmatrix}$，对应的矩阵为 $\begin{bmatrix} 0 & ka_2 \\ -ka_2 & 0 \end{bmatrix}$，故为反对称矩阵，$k\alpha \in S_{14}$。

因此，S_{14} 是 $\mathbb{R}^4$ 的子空间。

生成向量组与基：可由向量 $\varepsilon_2' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 线性生成，基为 $\{\varepsilon_2'\}$，维数为 1。

Exercise 2.3.2 求下列矩阵列空间的一组基:

1. 矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

对 A 作初等行变换：

$$A \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

行阶梯形中首非零元位于第 1、2、4 列，故原矩阵的第 1、2、4 列构成列空间的基：

$$\text{基为} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. 矩阵 $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{bmatrix}$

对 B 作初等行变换：

$$B \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

行阶梯形中首非零元位于第 1、2、3 列，故原矩阵的第 1、2、3 列构成列空间的基：

$$\text{基为} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

3. 矩阵 $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

对 C 作初等行变换：

$$C \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

行阶梯形中首非零元位于第 1、2、3、4、5 列，故原矩阵的第 1、2、3、4、5 列构成列空间的基（即单位矩阵的列向量）：

$$\text{基为} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exercise 2.3.3 求满足下列条件的 3×4 矩阵 A 的行简化阶梯形矩阵和秩:

1. $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 解集的一组基为 $\begin{bmatrix}-3\\1\\0\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}-2\\0\\6\\1\end{bmatrix}$

- 未知数个数 $n=4$，解空间维数为 2，根据线性方程组解的结构定理：解空间维数 $=n-\text{rank}(A)$，故 $\text{rank}(A)=4-2=2$。
- 因 $\text{rank}(A)=2$，且解向量的自由变量为 x_2,x_4（对应非主元列），主元列为 x_1,x_3，故行简化阶梯形形式为 $\begin{bmatrix}1&a&0&b\\0&0&1&c\\0&0&0&0\end{bmatrix}$（主元为 1，主元列其余元素为 0）。
- 将基向量代入 $Rx=0$：
  - 代入 $\begin{bmatrix}-3\\1\\0\\0\end{bmatrix}$ 得：$-3+a\cdot 1=0 \implies a=3$；
  - 代入 $\begin{bmatrix}-2\\0\\6\\1\end{bmatrix}$ 得：$-2+b\cdot 1=0$ 且 $6+c\cdot 1=0 \implies b=2$，$c=-6$。

行简化阶梯形：

$$\begin{bmatrix}1&3&0&2\\0&0&1&-6\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad 秩=2$$

2. A 的 (i,j) 元为 4

矩阵 $A=\begin{bmatrix}4&4&4&4\\4&4&4&4\\4&4&4&4\end{bmatrix}$，作初等行变换：

$$A\to\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

行简化阶梯形:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad 秩 = 1$$

3. A **的** (i, j) **元为** $a_{ij} = i + j + 1$

矩阵 $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$, 作初等行变换:

$$A \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

行简化阶梯形:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad 秩 = 2$$

4. A **的** (i, j) **元为** $a_{ij} = (-1)^{i+j}$

矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, 作初等行变换:

$$A \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

行简化阶梯形:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad 秩 = 1$$

Exercise 2.3.5 求矩阵 A 中 “$*$” 处的元素, 满足相应的条件:

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & * & * \\ 4 & * & * \end{bmatrix}$**, 且** A **的秩为 1.**

矩阵的秩为 1，说明所有行都成比例。设第 2 行是第 1 行的 k 倍，第 3 行是第 1 行的 m 倍：

$$\begin{cases} 2 = k \cdot 1 \\ * = k \cdot 2 \\ * = k \cdot 4 \\ 4 = m \cdot 1 \\ * = m \cdot 2 \\ * = m \cdot 4 \end{cases} \implies k = 2, m = 4$$

因此，$*$ 处的元素分别为 $2 \times 2 = 4$，$2 \times 4 = 8$，$4 \times 2 = 8$，$4 \times 4 = 16$。

即 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 4 & 8 & 16 \end{bmatrix}$，秩为 1。

2. $A = \begin{bmatrix} * & 9 & * \\ 1 & * & * \\ 2 & 6 & -3 \end{bmatrix}$**，且 A 的秩为 1.**

矩阵的秩为 1，说明所有行都成比例。观察第 3 行 $[2, 6, -3]$，设第 1 行是第 3 行的 k 倍，第 2 行是第 3 行的 m 倍：

$$\begin{cases} * = 2k,\ 9 = 6k,\ * = -3k \\ 1 = 2m,\ * = 6m,\ * = -3m \end{cases}$$

由 $9 = 6k \implies k = \frac{3}{2}$，故第 1 行 $*$ 处为 $2 \times \frac{3}{2} = 3$，$-3 \times \frac{3}{2} = -\frac{9}{2}$；由 $1 = 2m \implies m = \frac{1}{2}$，故第 2 行 $*$ 处为 $6 \times \frac{1}{2} = 3$，$-3 \times \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$。

即 $A = \begin{bmatrix} 3 & 9 & -\frac{9}{2} \\ 1 & 3 & -\frac{3}{2} \\ 2 & 6 & -3 \end{bmatrix}$，秩为 1。

3. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & * \end{bmatrix}$**，$a \neq 0$，且 A 的秩为 1.**

矩阵的秩为 1，说明两行成比例。设第 2 行是第 1 行的 k 倍：

$$\begin{cases} c = k \cdot a \\ * = k \cdot b \end{cases} \implies * = \frac{bc}{a}$$

即 $* = \dfrac{bc}{a}$ 时，A 的秩为 1。

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 7 \\ 4 & 5 & * \end{bmatrix}$**，且 A 的秩为 2.**

对 A 作初等行变换：

$$A \xrightarrow{R_2-3R_1, R_3-4R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & *-12 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & *-12 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3+3R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & *-9 \end{bmatrix}$$

矩阵的秩为 2，说明行阶梯形的非零行有 2 行，即 $* - 9 = 0 \implies * = 9$。

即 $* = 9$ 时，A 的秩为 2。