线性代数第十六周作业

2025 年 12 月 30 日

1 老教材

1. 下列变换是不是线性变换？为什么？

(1) $\sigma\left(a_1, a_2, a_3\right)^{\mathrm{T}}=\left(1, a_2, a_3\right)^{\mathrm{T}}$;

(2) $\sigma\left(a_1, a_2, a_3\right)^{\mathrm{T}}=\left(0, a_3, a_2\right)^{\mathrm{T}}$;

(3) $\sigma\left(a_1, a_2, a_3\right)^{\mathrm{T}}=\left(2 a_1-a_2, a_2+a_3, a_1\right)^{\mathrm{T}}$;

(4) $\sigma\left(a_1, a_2, a_3\right)^{\mathrm{T}}=\left(a_1, a_2^2, 3 a_3\right)^{\mathrm{T}}$.

解: 根据定义可直接验证 (2),(3) 是线性变换; (1),(4) 不是线性变换因为他们分别的对第一个和第二个分量的运算不是线性.

3. 设 M, N 是 V 的子空间，$V=M \oplus N$. 又设 $\alpha \in V, \alpha=\alpha_M+\alpha_N, \alpha_M \in M, \alpha_N \in N$. 定义 V 上的变换 π :

$$\pi \alpha=\alpha_M .$$

试证明 π 是 V 上的线性变换. 这个变换 π 称为 V 对子空间 M 的投影变换.

证明: 记 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间. 对任意的 $s, t \in \mathbb{F}, \alpha, \beta \in V$, 我们有:

$$s \alpha=s \alpha_M+s \alpha_N, t \beta=t \beta_M+t \beta_N$$

故

$$s \alpha+t \beta=\left(s \alpha_M+t \beta_M\right)+\left(s \alpha_N+t \beta_N\right)$$

由于 M, N 是子空间, 故 $s \alpha_M+t \beta_M \in M, s \alpha_N+t \beta_N \in N$, 因此

$$\pi(s \alpha+t \beta)=\pi\left(\left(s \alpha_M+t \beta_M\right)+\left(s \alpha_N+t \beta_N\right)\right)=s \alpha_M+t \beta_M=s \pi(\alpha)+t \pi(\beta) .$$

因此 π 是 V 上的线性变换.

4. 设 V 是数域 F 上的一个一维向量空间，试证 V 到自身的映射 σ 是线性变换的充分必要条件是，对任何 $\alpha \in V$ ，都有 $\sigma(\alpha)=\lambda \alpha$ ，其中 $\lambda \in F$ 是一常数.

证明: 设 $\{e\}$ 是 V 的一组基. 由于 V 是一维的, 因此对任意的 $\alpha \in V$, 存在 k_α 使得 $\alpha=k_\alpha e$.

$\Rightarrow$: 由于 σ 是 V 到自身的线性变换, 因此 $\sigma(e) \in V$, 故存在 $\lambda \in \mathbb{F}$ 使得

$$\sigma(e)=\lambda e .$$

因此对任意的 $\alpha=k_\alpha e$,

$$\sigma(\alpha)=\sigma\left(k_\alpha e\right)=k_\alpha \sigma(e)=\lambda k_\alpha e=\lambda \alpha .$$

$\Leftarrow$: 由于对任意的 $\alpha \in V, \sigma(\alpha)=\lambda \alpha \in V$, 因此 σ 是 V 到自身的线性变换.

6．求下列线性变换在指定基下的矩阵：

(1) $\mathbb{R}^3$ 中的投影变换 $\sigma\left(x_1, x_2, x_3\right)^{\mathrm{T}}=\left(x_1, x_2, 0\right)^{\mathrm{T}}$ ，基是 $(1,0,0)^{\mathrm{T}},(0,1,0)^{\mathrm{T}},(0,0,1)^{\mathrm{T}}$ ；

(2) 在 $F_n[x]$ 中，$\sigma f(x)=f'(x)$ ，基是 $1, x, \frac{x^2}{2}, \cdots, \frac{x^{n-1}}{n-1}$ ．

解: (1). 设基为 $\alpha_1=(1,0,0)^T, \alpha_2=(0,1,0)^T, \alpha_3=(0,0,1)^T$，计算 $\sigma(\alpha_i)$

$$\begin{cases}\sigma(\alpha_1)=\sigma(1,0,0)^T=(1,0,0)^T=1\cdot\alpha_1+0\cdot\alpha_2+0\cdot\alpha_3\\ \sigma(\alpha_2)=\sigma(0,1,0)^T=(0,1,0)^T=0\cdot\alpha_1+1\cdot\alpha_2+0\cdot\alpha_3\\ \sigma(\alpha_3)=\sigma(0,0,1)^T=(0,0,0)^T=0\cdot\alpha_1+0\cdot\alpha_2+0\cdot\alpha_3\end{cases}$$

因此，σ 在基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 下的矩阵为：

$$\boxed{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}}$$

(2). 省略计算过程 (不妨假设 $n\geq 2$),σ 在基 $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$ 下的矩阵为 n 为

$$\boxed{\begin{pmatrix}0&1&0&0&\ldots&0\\0&0&1&0&\ldots&0\\0&0&0&2&\ldots&0\\0&0&0&0&\ldots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&0&\ldots&n-2\\0&0&0&0&\ldots&0\end{pmatrix}}$$

7．设 $\sigma:\mathbb{R}^3\rightarrow\mathbb{R}^3, \sigma\left(a_1, a_2, a_3\right)^{\mathrm{T}}=\left(a_1+a_2, a_1-a_2, a_3\right)^{\mathrm{T}}$ ．

(1) 求 σ 在自然基下的矩阵；

(2) 求 σ 在基 $\varepsilon_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}, \varepsilon_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}}, \varepsilon_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 下的对应矩阵

解:(1). 求 σ 在自然基下的矩阵 $\mathbb{R}^3$ 的自然基为 $\varepsilon_1=(1,0,0)^T, \varepsilon_2=(0,1,0)^T, \varepsilon_3=(0,0,1)^T$, 故

$$\begin{cases}\sigma(\varepsilon_1)=\sigma(1,0,0)^T=(1,1,0)^T=1\cdot\varepsilon_1+1\cdot\varepsilon_2+0\cdot\varepsilon_3\\ \sigma(\varepsilon_2)=\sigma(0,1,0)^T=(1,-1,0)^T=1\cdot\varepsilon_1+(-1)\cdot\varepsilon_2+0\cdot\varepsilon_3\\ \sigma(\varepsilon_3)=\sigma(0,0,1)^T=(0,0,1)^T=0\cdot\varepsilon_1+0\cdot\varepsilon_2+1\cdot\varepsilon_3\end{cases}$$

因此，σ 在自然基下的矩阵为：

$$\boxed{A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}$$

(2). 求 σ 在基 $\varepsilon_1=(1,0,0)^T, \varepsilon_2=(1,1,0)^T, \varepsilon_3=(1,1,1)^T$ 下的矩阵设该基为 $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$

求基变换矩阵 P（自然基到 $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ 的过渡矩阵）由 $\beta_1=1\cdot\varepsilon_1+0\cdot\varepsilon_2+0\cdot\varepsilon_3$，$\beta_2=1\cdot\varepsilon_1+1\cdot\varepsilon_2+0\cdot\varepsilon_3$，$\beta_3=1\cdot\varepsilon_1+1\cdot\varepsilon_2+1\cdot\varepsilon_3$，得：

$$P=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

计算可知

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

利用基变换公式求目标矩阵 $B=P^{-1}AP$

$$B=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}0&2&2\\1&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix}}$$

8．设 σ 把 $\varepsilon_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\varepsilon_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\varepsilon_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 变换到 $\sigma(\varepsilon_1)=(2,3,5)^{\mathrm{T}},\sigma(\varepsilon_2)=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\sigma(\varepsilon_3)=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$ ，求 σ 在自然基及基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵.

解: 由于

$$\begin{aligned}(2,3,5)^T&=2\cdot\varepsilon_1+3\cdot(\varepsilon_2-\varepsilon_1)+5\cdot(\varepsilon_3-\varepsilon_2)=-\varepsilon_1-2\varepsilon_2+5\varepsilon_3\\(1,0,0)^T&=1\cdot\varepsilon_1\\(0,1,-1)^T&=0\cdot\varepsilon_1+1\cdot(\varepsilon_2-\varepsilon_1)-1\cdot(\varepsilon_3-\varepsilon_2)=-\varepsilon_1+2\varepsilon_2-\varepsilon_3\end{aligned}$$

综上，σ 在基 $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3\}$ 下的矩阵 B 为:

$$B=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\-2&0&2\\5&0&-1\end{pmatrix}$$

设自然基为 $\{\varepsilon_1',\varepsilon_2',\varepsilon_3'\}$，基 $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3\}$ 到自然基的过渡矩阵 P 为:

$$P=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

σ 在自然基下的矩阵 A 满足：$A=PBP^{-1}$ 计算可得 $P^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$，计算得:

$$A=PBP^{-1}=\begin{pmatrix}2&-5&5\\3&-3&-1\\5&-5&0\end{pmatrix}$$

最终结果：在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵: $\boxed{\begin{pmatrix}-1&1&-1\\-2&0&2\\5&0&-1\end{pmatrix}}$ 在自然基下的矩阵: $\boxed{\begin{pmatrix}2&-1&-1\\3&-3&1\\5&-5&-1\end{pmatrix}}$

9．在 $M_2(F)$ 中，定义三个线性变换 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ 分别为

$$\sigma_1X=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}X,\quad\sigma_2X=X\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix},\quad\sigma_3X=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}X\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix},$$

其中 $X \in M_2(F)$ ，分别求 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 在基 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 下的矩阵.

解: 记

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

1. 求 σ_1 在基下的矩阵:$\sigma_1 X = AX$

$$\begin{cases} \sigma_1(E_1) = AE_1 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} = aE_1 + 0E_2 + cE_3 + 0E_4 \\ \sigma_1(E_2) = AE_2 = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{bmatrix} = 0E_1 + aE_2 + 0E_3 + cE_4 \\ \sigma_1(E_3) = AE_3 = \begin{bmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{bmatrix} = bE_1 + 0E_2 + dE_3 + 0E_4 \\ \sigma_1(E_4) = AE_4 = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{bmatrix} = 0E_1 + bE_2 + 0E_3 + dE_4 \end{cases}$$

因此 σ_1 的矩阵为:

$$\boxed{M_1 = \begin{bmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{bmatrix}}$$

2. 求 σ_2 在基下的矩阵:$\sigma_2 X = XA$

$$\begin{cases} \sigma_2(E_1) = E_1A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = aE_1 + bE_2 + 0E_3 + 0E_4 \\ \sigma_2(E_2) = E_2A = \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = cE_1 + dE_2 + 0E_3 + 0E_4 \\ \sigma_2(E_3) = E_3A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{bmatrix} = 0E_1 + 0E_2 + aE_3 + bE_4 \\ \sigma_2(E_4) = E_4A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix} = 0E_1 + 0E_2 + cE_3 + dE_4 \end{cases}$$

因此 σ_2 的矩阵为:

$$\boxed{M_2 = \begin{bmatrix} a & c & 0 & 0 \\ b & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & b & d \end{bmatrix}}$$

3. 求 σ_3 在基下的矩阵:$\sigma_3 X = AXA$

$$\begin{cases} \sigma_3(E_1) = A(E_1A) = A\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & ab \\ ac & bc \end{bmatrix} = a^2E_1 + abE_2 + acE_3 + bcE_4 \\ \sigma_3(E_2) = A(E_2A) = A\begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac & ad \\ c^2 & cd \end{bmatrix} = acE_1 + adE_2 + c^2E_3 + cdE_4 \\ \sigma_3(E_3) = A(E_3A) = A\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ab & b^2 \\ ad & bd \end{bmatrix} = abE_1 + b^2E_2 + adE_3 + bdE_4 \\ \sigma_3(E_4) = A(E_4A) = A\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} bc & bd \\ cd & d^2 \end{bmatrix} = bcE_1 + bdE_2 + cdE_3 + d^2E_4 \end{cases}$$

因此 σ_3 的矩阵为:

$$\boxed{M_3 = \begin{bmatrix} a^2 & ac & ab & bc \\ ab & ad & b^2 & bd \\ ac & c^2 & ad & cd \\ bc & cd & bd & d^2 \end{bmatrix}}$$

10. 设 σ 是线性空间 V 上的线性变换，如果 $\sigma^{k-1}\xi \neq 0, \sigma^k\xi = 0$ ，求证 $\xi, \sigma\xi, \cdots, \sigma^{k-1}\xi (k > 0)$ 线性无关.

解: 假设存在不全为零的数 $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$，使得:

$$a_0\xi + a_1\sigma\xi + \cdots + a_{k-1}\sigma^{k-1}\xi = 0 \tag{1}$$

对(1)两边同时作用 σ^{k-1}:

$$a_0\sigma^{k-1}\xi + a_1\sigma^k\xi + \cdots + a_{k-1}\sigma^{2k-2}\xi = \sigma^{k-1}0$$

结合 $\sigma^k\xi = 0$，上式简化为:

$$a_0\sigma^{k-1}\xi = 0$$

已知 $\sigma^{k-1}\xi \neq 0$，因此 $a_0 = 0$.

将 $a_0 = 0$ 代入(1)，得:

$$a_1\sigma\xi + a_2\sigma^2\xi + \cdots + a_{k-1}\sigma^{k-1}\xi = 0 \tag{2}$$

对(2)两边同时作用 σ^{k-2}:

$$a_1\sigma^{k-1}\xi + a_2\sigma^k\xi + \cdots + a_{k-1}\sigma^{2k-3}\xi = 0$$

同理，化简得 $a_1\sigma^{k-1}\xi = 0$，故 $a_1 = 0$.

重复上述过程，依次可得 $a_2 = 0, \ldots, a_{k-1} = 0$，这与 $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ 不全为零的假设矛盾. 故结论得证.

14. 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 是 4 维线性空间的一组基，已知线性变换 σ 在这组基下的矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

(1) 求 σ 在基 $\eta_1 = \varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 + \varepsilon_4, \eta_2 = 3\varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4, \eta_3 = \varepsilon_3 + \varepsilon_4, \eta_4 = 2\varepsilon_4$ 下的矩阵;

(2) 求 σ 的核与值域;

(3) 在 σ 的核中，选一组基，把它扩充成 V 的一组基，并求 σ 在这组基下的矩阵;

(4) 在 σ 的值域中，选一组基，把它扩充成 V 的一组基，并求 σ 在这组基下的矩阵.

解:(1). 求 σ 在基 $\{\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4\}$ 下的矩阵设基 $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4\}$ 到 $\{\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4\}$ 的过渡矩阵为 P（列是 η_i 在 $\{\varepsilon_i\}$ 下的坐标）:

$$P=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&3&0&0\\0&-1&1&0\\1&-1&1&2\end{bmatrix}$$

计算 P 的逆矩阵 P^{-1}

$$P^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&0&0\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&1&0\\-\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

已知 σ 在 $\{\varepsilon_i\}$ 下的矩阵为 A，则 σ 在 $\{\eta_i\}$ 下的矩阵为 $B=P^{-1}AP$，计算得:

$$\boxed{\begin{bmatrix}2&-3&3&2\\\frac{2}{3}&-\frac{4}{3}&\frac{10}{3}&\frac{10}{3}\\\frac{8}{3}&-\frac{16}{3}&\frac{40}{3}&\frac{40}{3}\\0&1&-7&-8\end{bmatrix}}.$$

(2). 核（$\ker\sigma$）: 解齐次线性方程组 $AX=0$. 对 A 作行初等变换化为阶梯形:

$$\begin{bmatrix}1&0&2&1\\0&2&3&4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

得基础解系:

$$\xi_1=(-2,-\frac{3}{2},1,0)^T,\quad \xi_2=(-1,-2,0,1)^T$$

因此 $\ker\sigma=\operatorname{span}\{\alpha_1,\alpha_2\}$，其中 $\alpha_1=-4\varepsilon_1-3\varepsilon_2+2\varepsilon_3$，$\alpha_2=-\varepsilon_1-2\varepsilon_2+\varepsilon_4$。

值域（$\mathrm{Im}\sigma$）: σ 的值域是 A 的列向量组在基 $\{\varepsilon_i\}$ 下张成的子空间。取 A 的列向量组的极大无关组，第 1,2 列, 对应的值域基为:

$$\sigma\varepsilon_1=\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3+2\varepsilon_4,\quad \sigma\varepsilon_2=2\varepsilon_2+2\varepsilon_3-2\varepsilon_4$$

因此 $\mathrm{Im}\sigma=\operatorname{span}\{\sigma\varepsilon_1,\sigma\varepsilon_2\}$。

(3). 取 $\ker\sigma$ 的基 α_1,α_2, 以及 $\alpha_3=\varepsilon_3,\alpha_4=\varepsilon_4$, 则 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 是 V 的一组基, 且 $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)$ 到其的过渡矩阵为:

$$\begin{pmatrix}-4&-1&0&0\\-3&-2&0&0\\2&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}$$

计算可得:

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{5}&\frac{1}{5}&0&0\\\frac{3}{5}&-\frac{4}{5}&0&0\\\frac{4}{5}&-\frac{2}{5}&1&0\\-\frac{3}{5}&\frac{4}{5}&0&1\end{pmatrix}$$

故 σ 在 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 的矩阵为:

$$P^{-1}AP=\boxed{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{9}{5} \\ 0 & 0 & \frac{31}{5} & \frac{23}{5} \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}}$$

注意: 由于扩充基的方式不唯一, 因此矩阵是不唯一的.

(4). 取像空间的一组基 $\eta_1=\sigma\varepsilon_1,\eta_2=\sigma\varepsilon_2,\eta_3=\varepsilon_3,\eta_4=\varepsilon_4$. 因此 $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)$ 到其的过渡矩阵为:

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

因此 σ 在基 $(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)$ 下的矩阵为:

$$\boxed{\begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 & 1 \\ \frac{9}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

同理矩阵不唯一.

> 15．设 σ,τ 是线性变换，$\sigma^2=\sigma,\tau^2=\tau$ ，试证:
>
> (1) $\operatorname{Im}\sigma=\operatorname{Im}\tau$ 的充要条件是 $\sigma\tau=\tau,\tau\sigma=\sigma$ ；
>
> (2) $\ker\sigma=\ker\tau$ 的充要条件是 $\sigma\tau=\sigma,\tau\sigma=\tau$.

证明: (1). $\Rightarrow$: 假设 $\operatorname{Im}\sigma=\operatorname{Im}\tau$, 证明 $\sigma\tau=\tau$ 且 $\tau\sigma=\sigma$

任取 $v\in V$, 考虑 $\tau(v)\in\operatorname{Im}\tau=\operatorname{Im}\sigma$, 因此存在某个 $u\in V$, 使得

$$\tau(v)=\sigma(u).$$

由于 σ 是幂等的, 有 $\sigma(\tau(v))=\sigma(\sigma(u))=\sigma(u)=\tau(v)$, 即

$$\sigma\tau(v)=\tau(v),\quad \forall v\in V\Rightarrow\sigma\tau=\tau.$$

同理，对任意 v，$\sigma(v)\in\operatorname{Im}\sigma=\operatorname{Im}\tau$，故存在 w 使得 $\sigma(v)=\tau(w)$，于是

$$\tau\sigma(v)=\tau(\tau(w))=\tau(w)=\sigma(v),$$

即 $\tau\sigma=\sigma$.

$\Leftarrow$: 假设 $\sigma\tau=\tau$ 且 $\tau\sigma=\sigma$，证明 $\operatorname{Im}\sigma=\operatorname{Im}\tau$.

先证 $\operatorname{Im}\tau\subseteq\operatorname{Im}\sigma$：任取 $y\in\operatorname{Im}\tau$，则存在 v 使得 $y=\tau(v)$. 由 $\sigma\tau=\tau$ 得

$$y=\tau(v)=\sigma(\tau(v))\in\operatorname{Im}\sigma.$$

所以 $\operatorname{Im}\tau\subseteq\operatorname{Im}\sigma$.

同理, 由 $\tau\sigma=\sigma$, 对任意 $x=\sigma(v)\in\operatorname{Im}\sigma$, 有

$$x=\sigma(v)=\tau(\sigma(v))\in\operatorname{Im}\tau,$$

故 $\operatorname{Im}\sigma\subseteq\operatorname{Im}\tau$.

因此 $\operatorname{Im}\sigma=\operatorname{Im}\tau$.

(2). $\Rightarrow$: 假设 $\ker\sigma=\ker\tau$, 证明 $\sigma\tau=\sigma$ 且 $\tau\sigma=\tau$.

考虑任意向量 $v\in V$, 令 $w=v-\tau(v)$. 注意到 τ 是幂等的, 所以 $\tau(w)=\tau(v-\tau(v))=\tau(v)-\tau^2(v)=\tau(v)-\tau(v)=0$, 即

$$w\in\ker\tau=\ker\sigma\Rightarrow\sigma(w)=0.$$

于是

$$\sigma(v)=\sigma(\tau(v)+w)=\sigma(\tau(v))+\sigma(w)=\sigma(\tau(v))+0=\sigma\tau(v).$$

即 $\sigma=\sigma\tau$.

同理，令 $w'=v-\sigma(v)$, 则 $\sigma(w')=0\Rightarrow w'\in\ker\sigma=\ker\tau\Rightarrow\tau(w')=0$, 于是

$$\tau(v)=\tau(\sigma(v)+w')=\tau(\sigma(v))+\tau(w')=\tau\sigma(v),$$

即 $\tau=\tau\sigma$.

$\Leftarrow$: 假设 $\sigma\tau=\sigma$ 且 $\tau\sigma=\tau$，证明 $\ker\sigma=\ker\tau$.

先证 $\ker\sigma\subseteq\ker\tau$: 任取 $v\in\ker\sigma$，即 $\sigma(v)=0$. 由 $\tau\sigma=\tau$, 得

$$\tau(v)=\tau\sigma(v)=\tau(0)=0\Rightarrow v\in\ker\tau.$$

再证 $\ker\tau\subseteq\ker\sigma$: 任取 $v\in\ker\tau$，即 $\tau(v)=0$. 由 $\sigma\tau=\sigma$，得

$$\sigma(v)=\sigma\tau(v)=\sigma(0)=0\Rightarrow v\in\ker\sigma.$$

因此 $\ker\sigma=\ker\tau$.

17. 设 σ 是 n 维线性空间 V 的线性变换，W 是 V 的子空间，σW 表示 W 的像空间，证明

$$\dim(\sigma W)+\dim(\ker\sigma\cap W)=\dim W.$$

证明: 定义 $\sigma_W:W\to V$ 为 σ 在子空间 W 上的限制, 即 $\sigma_W(w)=\sigma(w)$ 对所有 $w\in W$. 显然 σ_W 是线性映射.

- 其像空间为 $\operatorname{Im}(\sigma_W)=\{\sigma(w)\mid w\in W\}=\sigma W$，故 $\dim\operatorname{Im}(\sigma_W)=\dim(\sigma W)$.
- 其核为 $\ker(\sigma_W)=\{w\in W\mid\sigma(w)=0\}=\ker\sigma\cap W$，故 $\dim\ker(\sigma_W)=\dim(\ker\sigma\cap W)$.

由线性映射版本的维数公式可知可得:

$$\dim W=\dim(\operatorname{Im}(\sigma_W))+\dim(\ker(\sigma_W))=\dim(\sigma W)+\dim(\ker\sigma\cap W).$$

2 新教材

练习 7.5.8. 求导算子 $\boldsymbol{D}$ 定义了多项式空间 $\mathbb{F}[x]_n$ 上的线性变换，给定 $\mathbb{F}[x]_n$ 的两组基 $1,x,\cdots,x^{n-1}$ 和 $1,x,\cdots,\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}$.

(1) 求两组基之间的过渡矩阵.

(2) 分别求 $\boldsymbol{D}$ 在两组基下的矩阵.

(3) 通过过渡矩阵验证这两个不同基下的矩阵相似。

(4) 是否存在一组基，使得 $\boldsymbol{D}$ 在该组基下的矩阵是对角矩阵?

解:

1. 记 $\boldsymbol{\alpha}:=\{1,x,\cdots,x^{n-1}\},\boldsymbol{\beta}:=\{1,x,\cdots,\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\}$. 直接计算出 $\boldsymbol{\alpha}$ 到 $\boldsymbol{\beta}$ 的过渡矩阵为:

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2!} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{(n-1)!} \end{pmatrix}$$

2. 在 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 下的矩阵分别是:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

3. 由于过渡矩阵 P 已经计算出,$P^{-1}:=\mathrm{diag}(1,1,2!,\cdots,(n-1)!)$, 因此直接计算可以得到确实有

$$B=P^{-1}AP.$$

4. 不存在. 由于 B 的特征值只有 0, 因此如果存在一组基使得 D 在这组基下的矩阵为对角矩阵 C, 则 B,C 相似,C 对角线全为 0, 故 D 为零映射得到矛盾.

练习 7.5.11. 已知 $\mathbb{F}^3$ 上的线性变换 f 在标准基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 下的矩阵是 $A=\begin{bmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{bmatrix}$. 设 $\boldsymbol{t}_1=\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix},\boldsymbol{t}_2=\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix},\boldsymbol{t}_3=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ 是 $\mathbb{F}^3$ 的另一组基，求 f 在这组基下的矩阵.

解: 计算可知 (e_1,e_2,e_3) 到 (t_1,t_2,t_3) 的过渡矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

计算 P^{-1} 得:

$$P^{-1}=\begin{bmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

故在 (t_1,t_2,t_3) 下的矩阵为:

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

练习 7.5.14 . 设三维线性空间 $\mathcal{V}$ 有一组基 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ ，其上的线性变换 f 在该组基下的矩阵是

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 8 & 2 \\ -2 & -14 & -3 \end{bmatrix}$$

(1) 求 f 的全部特征值和特征向量.

(2) 判断是否存在一组基，使得 f 在该组基下的矩阵是对角矩阵. 如果存在，写出这组基及对应的对角矩阵.

解: 计算出 A 的特征多项式为:

$$f(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 3)^2$$

故特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 3$.

- $\lambda_1 = 1$ 对应的特征向量为:$k_1(-2, 0, 1)^T, k_1 \neq 0$; 故 f 对应的特征向量为 $k_1(-2e_1 + e_3), \forall k_1 \neq 0$.
- $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$, 对应的特征向量为 $k_2(1, -1, 2), k_2 \neq 0$, 故 f 对应的特征向量为 $k_2(e_1 - e_2 + 2e_3), \forall k_2 \neq 0$.

由于为 3 的特征值代数重数为 2, 几何重数为 1, 因此 A 不可对角化, 故不存在一组基使得 f 在该组基下是对角矩阵.

练习 7.5.16. 设 $B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ，在 $\mathbb{F}^{2\times 2}$ 中定义如下变换:

$$f(X) = B^{-1}XB, \quad \forall X \in \mathbb{F}^{2\times 2}$$

(1) 证明 f 是线性变换.

(2) 求 f 的全部特征值和特征向量.

解: 对任意的 $X, Y \in \mathbb{F}^{2\times 2}, \alpha, \beta \in \mathbb{F}$, 有

$$f(\alpha X + \beta Y) = B^{-1}(\alpha X + \beta Y)B = \alpha B^{-1}XB + \beta B^{-1}YB = \alpha f(X) + \beta f(Y)$$

故 f 是线性变换. 取 $\mathbb{F}^{2\times 2}$ 的一组基 $\{E_{ij}\}_{1\leq i,j\leq 2}$, 其中 E_{ij} 是在 (i,j) 位置为 1, 其他位置为 0 的二阶方阵. 按照如下方式排列 $\{E_{ij}\}$

$$E_1 = E_{11}, E_2 = E_{12}, E_3 = E_{21}, E_4 = E_{22}$$

计算 f 可得

- $f(E_1) = -1E_1 - 1E_2 + 2E_3 + 2E_4$
- $f(E_2) = 2E_1 + 1E_2 - 4E_3 - 2E_4$
- $f(E_3) = -1E_1 - 1E_2 + 1E_3 + 1E_4$
- $f(E_4) = 2E_1 + 1E_2 - 2E_3 - 1E_4$

故 f 在 (E_1, E_2, E_3, E_4) 下的矩阵为:

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

计算 M 的特征多项式为:

$$f(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)^2$$

故 $1, -1$ 为特征值且均为 2 重根. 计算特征向量:

- 特征值 1 对应的特征向量为:

$$\alpha\begin{bmatrix}-2\\-1\\2\\0\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix},\quad(\alpha,\beta)\neq(0,0)$$

  故 f 对应的特征向量为:

$$\alpha\begin{pmatrix}-2&-1\\2&0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad(\alpha,\beta)\neq(0,0)$$

- 特征值-1 对应的特征向量为:

$$\alpha\begin{bmatrix}0\\1\\2\\0\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}-1\\-1\\0\\1\end{bmatrix},\quad(\alpha,\beta)\neq(0,0)$$

  故 f 对应的特征向量为

$$\alpha\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-1&-1\\0&1\end{pmatrix},\quad(\alpha,\beta)\neq(0,0)$$