第七周习题参考解答　　　　　　　　　　杨利军　　Oct 27, 29, 2025

Oct 27

习题一: 课本第87页习题3.3题1: 求下列函数的二阶导数:

(1)　$y = e^{x^2}$;

(2)　$y = \frac{x-1}{(x+1)^2}$;

(3)　$y = x(\arcsin x)^2$;

(4)　$y = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$;

(5)　$y = x\left[\,\sin(\ln x) + \cos(\ln x)\right]$;

(6)　$y = \ln f(x)$, 其中 $f(x)$ 为二阶可导.

解(1): $y' = 2xe^{x^2}$, $y'' = 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2}$.

解(2): 为求导方便, 我们将函数 $y = \frac{x-1}{(x+1)^2}$ 改写如下

$$y = \frac{x-1}{(x+1)^2} = \frac{x+1-2}{(x+1)^2} = \frac{1}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2}.$$

对上式求导得

$$y' = \frac{-1}{(x+1)^2} + \frac{4}{(x+1)^3}. \qquad (*)$$

再对式 (*) 求导得所求的二阶导数为

$$y'' = \frac{2}{(x+1)^3} - \frac{12}{(x+1)^4}.$$

解(3): 对函数 $y = x(\arcsin x)^2$ 求导得

$$y' = (\arcsin x)^2 + 2x(\arcsin x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (\arcsin x)^2 + \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}(\arcsin x).$$

再对上式求导得

$$y'' = 2(\arcsin x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \left(\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\right)'(\arcsin x) + \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}(\arcsin x)'$$

$$y'' = \frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2x}{1-x^2}.$$

解(4): 将函数 $y = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ 改写如下

$$y = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x^2-1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

对上式求导得

$$y' = -\frac{1}{2}(1-x^2)^{\frac{-1}{2}}(-2x) - \frac{1}{2}(1-x^2)^{\frac{-3}{2}}(-2x) = x(1-x^2)^{\frac{-1}{2}} + x(1-x^2)^{\frac{-3}{2}}.$$

再对 $y' = x(1-x^2)^{\frac{-1}{2}} + x(1-x^2)^{\frac{-3}{2}}$ 求导得

$$\begin{aligned} y'' &= (1-x^2)^{\frac{-1}{2}} - \frac{1}{2}x(1-x^2)^{\frac{-3}{2}}(-2x) + (1-x^2)^{\frac{-3}{2}} - \frac{3x}{2}(1-x^2)^{\frac{-5}{2}}(-2x) \\ &= (1-x^2)^{\frac{-1}{2}} + (1+x^2)(1-x^2)^{\frac{-3}{2}} + 3x^2(1-x^2)^{\frac{-5}{2}}. \end{aligned}$$

解(5): 对函数 $y = x\big[\sin(\ln x) + \cos(\ln x)\big]$ 求导得

$$y' = \sin(\ln x) + \cos(\ln x) + x\Big[\cos(\ln x)\frac{1}{x} - \sin(\ln x)\frac{1}{x}\Big] = 2\cos(\ln x).$$

再次求导得

$$y'' = -2\sin(\ln x)\frac{1}{x} = -\frac{2}{x}\sin(\ln x).$$

解(6): 对函数 $y = \ln f(x)$ 求导得

$$y' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

对上式再次求导得

$$y'' = \frac{f(x)f''(x) - [f'(x)]^2}{f^2(x)}.$$

解答完毕.

习题二: 课本第87页习题3.3题2: 设 $f(x)$ 三阶可导, 求 y'', y'''

$$(1) \quad y = f(x^2); \quad (2) \quad y = f(e^x); \quad (3) \quad y = f(\ln x).$$

解(1): 对函数 $y=f(x^2)$ 求导得

$$y'=f'(x^2)2x=2xf'(x^2). \tag{1}$$

对式 (1) 求导得

$$y''=2f'(x^2)+4x^2f''(x^2) \tag{2}$$

对式 (2) 求导得

$$y'''=4xf''(x^2)+8xf''(x^2)+8x^3f'''(x^2)=12xf''(x^2)+8x^3f'''(x^2). \tag{3}$$

解(2): 对函数 $y=f(e^x)$ 求导得

$$y'=e^xf'(e^x). \tag{4}$$

对式 (4) 求导得

$$y''=e^xf'(e^x)+e^{2x}f''(e^x). \tag{5}$$

对式 (5) 求导得

$$y'''=e^xf'(e^x)+e^{2x}f''(e^x)+2e^{2x}f''(e^x)+e^{3x}f'''(e^x) \tag{6}$$

$$=e^xf'(e^x)+3e^{2x}f''(e^x)+e^{3x}f'''(e^x).$$

解(3): 对函数 $y=f(\ln x)$ 求导得

$$y'=\frac{f'(\ln x)}{x}. \tag{7}$$

对式 (7) 求导得

$$y''=\frac{f''(\ln x)}{x^2}-\frac{f'(\ln x)}{x^2}=\frac{f''(\ln x)-f'(\ln x)}{x^2}. \tag{8}$$

对式 (8) 求导得

$$y'''=\frac{f'''(\ln x)-f''(\ln x)}{x^3}-2\frac{f''(\ln x)-f'(\ln x)}{x^3} \tag{9}$$

$$=\frac{f'''(\ln x)-3f''(\ln x)+2f'(\ln x)}{x^3}.$$

解答完毕.

习题三: 课本第87-88页习题3.3题3: 求下列函数指定阶的导数:

(1) $y=\sqrt{x}$, 求 $y^{(10)}$;

(2) $y=e^x x^4$, 求 $y^{(4)}$;

(3) $y=\frac{\ln x}{x}$, 求 $y^{(5)}$;

(4) $y=x^2\sin(2x)$, 求 $y^{(50)}$;

(5) $y=x\sinh(x)$, 求 $y^{(100)}$;

(6) $y=\frac{1}{2-x-x^2}$, 求 $y^{(20)}$;

(7) $y=e^{ax}\sin(bx)$, 求 $y^{(n)}$;

(8) $y=e^{ax}\cos(bx)$, 求 $y^{(n)}$;

(9) $y=x^3e^x$, 求 $y^{(n)}$;

(10) $y=\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, 求 $y^{(n)}$.

解(1): 对于函数 $y=\sqrt{x}$

$$y'=\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}};\quad y''=(-1)\frac{1}{2^2}x^{\frac{-3}{2}};\quad y'''=(-1)^2\frac{1\cdot 3}{2^3}x^{\frac{-5}{2}};$$

一般我们有

$$y^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(2n-1)!!}{2^n}x^{\frac{-(2n+1)}{2}}.$$

特别当 $n=100$ 时,

$$y^{(100)}=(-1)^{99}\frac{199!!}{2^{100}}x^{\frac{-201}{2}}.$$

解(2): 对于函数 $y=x^4e^x$, 由于 $[e^x]^{(k)}=e^x$, 故

$$y^{(4)}=[x^4e^x]^{(4)}=e^x\left(\sum_{k=0}^{4}C_4^k[x]^{(k)}\right)$$

$$=e^x\left(x^4+4\cdot 4x^3+\frac{4\cdot 3}{2}\cdot 4\cdot 3x^2+4\cdot 4\cdot 3\cdot 2x+4!\right)$$

$$= e^x \left(x^4 + 16x^3 + 72x^2 + 96x + 4!\right).$$

解(3): 对于函数 $y = \frac{\ln x}{x}$,

$$y' = \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}; \quad y'' = \frac{-2}{x^3} - \frac{1}{x^3} + \frac{2\ln x}{x^3} = -\frac{3}{x^3} + \frac{2\ln x}{x^3};$$

$$y''' = \frac{3^2}{x^4} + \frac{2}{x^4} - \frac{2 \cdot 3 \ln x}{x^4} = \frac{11}{x^4} - \frac{6\ln x}{x^4};$$

$$y^{(4)} = -\frac{44}{x^5} - \frac{6}{x^5} + \frac{24\ln x}{x^5} = -\frac{50}{x^5} + \frac{24\ln x}{x^5};$$

$$y^{(5)} = \frac{50 \cdot 5}{x^6} - \frac{24 \cdot 5 \ln x}{x^6} + \frac{24}{x^6} = \frac{274}{x^6} - \frac{120\ln x}{x^6}.$$

解(4): 对正整数 $n > 2$, 函数 $y = x^2 \sin(2x)$ 的 n 阶导数为

$$y^{(n)} = x^2[\sin(2x)]^{(n)} + n \cdot 2x \cdot [\sin(2x)]^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 \cdot [\sin(2x)]^{(n-2)}$$

$$= x^2 \sin\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right) \cdot 2^n + n \cdot 2x \cdot \sin\left(2x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right) \cdot 2^{n-1}$$

$$+ n(n-1)\sin\left(2x + \frac{(n-2)\pi}{2}\right) \cdot 2^{n-2}$$

$$= 2^n x^2 \sin\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right) + 2^n n x \sin\left(2x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right)$$

$$+ 2^{n-2} n(n-1) \sin\left(2x + \frac{(n-2)\pi}{2}\right).$$

当 $n = 50$ 时,

$$y^{(50)} = 2^{50} x^2 \sin(2x + 25\pi) + 2^{50} 50x \sin\left(2x + \frac{49\pi}{2}\right) + 2^{48} 50 \cdot 49 \sin(2x + 24\pi)$$

$$= -2^{50} x^2 \sin(2x) + 2^{50} 50x \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) + 2^{48} 50 \cdot 49 \sin(2x)$$

$$= -2^{50} x^2 \sin(2x) + 2^{50} 50x \cos(2x) + 2^{48} 50 \cdot 49 \sin(2x).$$

解(5): 回忆双曲正弦函数 $\sinh(x)$ 和双曲余弦函数 $\cosh(x)$ 有性质 $[\sinh(x)]' = \cosh(x)$, $[\cosh(x)]' = \sinh(x)$. 于是函数 $y = x\sinh(x)$ 的 $n(\geq 1)$ 阶导数为

$$y^{(n)} = x[\sinh(x)]^{(n)} + n[\sinh(x)]^{(n-1)}.$$

当 $n = 2k$ 为偶数时,

$$y^{(2k)} = x\sinh(x) + 2k\cosh(x),$$

当 $n = 2k+1$ 为奇数时,

$$y^{(2k+1)} = x\cosh(x) + (2k+1)\sinh(x).$$

解(6): 为求导方便, 我们将分式函数 $y = \frac{1}{2-x-x^2}$ 分解为最简分式. 由于 $2 - x - x^2 = (1-x)(2+x)$, 故可令

$$\frac{1}{2-x-x^2} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{2+x}, \tag{10}$$

其中 A, B 为待定常数. 用 $(1-x)(2+x)$ 乘以等式 (10) 得

$$1 = A(x+2) + B(1-x).$$

于上式中, 令 $x = 1$, 得 $1 = 3A$, 即 $A = \frac{1}{3}$. 令 $x = -2$ 得 $1 = 3B$, 即 $B = \frac{1}{3}$. 因此函数 y 可写作

$$y = \frac{1}{2-x-x^2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-1}\right).$$

于是

$$y' = \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{(x+2)^2} - \frac{-1}{(x-1)^2}\right),$$

$$y'' = \frac{1}{3}\left(\frac{1\cdot 2}{(x+2)^3} - \frac{1\cdot 2}{(x-1)^3}\right).$$

不难用归纳法证明, 对任意正整数 $n \geq 1$

$$y^{(n)} = \frac{n!(-1)^n}{3}\left(\frac{1}{(x+2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right).$$

解(7)(8): 我们可以按照一般求导规则, 求出函数 $e^{ax}\sin(bx)$ 和 $e^{ax}\cos(bx)$ 的 n 阶导数. 利用 Euler 公式求导稍微简单些. 记复数 $c=a+bi$, 则根据 Euler 公式我们得

$$e^{cx}=e^{ax+ibx}=e^{ax}\left[\cos(bx)+i\sin(bx)\right].$$

于是函数 e^{cx} 的 n 阶导数为

$$[e^{cx}]^{(n)}=c^n e^{cx}=e^{ax+ibx}(a+ib)^n$$

$$=e^{ax}\left[\cos(bx)+i\sin(bx)\right]\left(a^n+C_n^1 a^{n-1}(ib)+C_n^2 a^{n-2}(ib)^2+\cdots\right)$$

$$=e^{ax}\cos(bx)\left(a^n-C_n^2 a^{n-2}b^2+C_n^4 a^{n-4}b^4+\cdots\right)$$

$$-e^{ax}\sin(bx)\left(C_n^1 a^{n-1}b^1-C_n^3 a^{n-3}b^3+\cdots\right)$$

$$+ie^{ax}\sin(bx)\left(a^n-C_n^2 a^{n-2}b^2+C_n^4 a^{n-4}b^4+\cdots\right)$$

$$+ie^{ax}\cos(bx)\left(C_n^1 a^{n-1}b^2+C_n^3 a^{n-3}b^3+\cdots\right),$$

其中 C_n^k 为二项式系数, 即 $C_n^1=n$, $C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$, $\cdots$. 于是函数 $e^{ax}\sin(bx)$ 和 $e^{ax}\cos(bx)$ 的 n 阶导数为

$$[e^{ax}\cos(bx)]^{(n)}=e^{ax}\cos(bx)\left(a^n-C_n^2 a^{n-2}b^2+C_n^4 a^{n-4}b^4+\cdots\right)$$

$$-e^{ax}\sin(bx)\left(C_n^1 a^{n-1}b^1-C_n^3 a^{n-3}b^3+\cdots\right)$$

$$[e^{ax}\sin(bx)]^{(n)}=e^{ax}\sin(bx)\left(a^n-C_n^2 a^{n-2}b^2+C_n^4 a^{n-4}b^4+\cdots\right)$$

$$+e^{ax}\cos(bx)\left(C_n^1 a^{n-1}b^2+C_n^3 a^{n-3}b^3+\cdots\right).$$

解(9): 函数 $y=e^x x^3$ 的 n 阶导数为

$$y^{(n)}=[e^x x^3]^{(n)}=e^x\left(x^3+3nx^2+3n(n-1)x+n(n-1)(n-2)\right).$$

解(10): 将函数 $y = \ln\sqrt{\frac{1-x}{x+1}}$ 写作

$$y = \frac{1}{2}\left(\ln(1-x) - \ln(x+1)\right).$$

于是

$$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{1-x} - \frac{1}{x+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right),$$

$$y'' = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{(x-1)^2} - \frac{-1}{(x+1)^2}\right),$$

$$y''' = \frac{1}{2}\left(\frac{1\cdot 2}{(x-1)^3} - \frac{1\cdot 2}{(x+1)^3}\right).$$

用归纳法不难证明

$$y^{(n)} = \frac{(n-1)!(-1)^{n-1}}{2}\left(\frac{1}{(x-1)^n} - \frac{1}{(x-1)^n}\right).$$

习题四: 课本第87-88页习题3.3题4: 设可导函数 $y(x)$ 由下列参数方程确定, 求 $y''(x)$.

(1) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$;

(2) $x = e^{2t}\cos^2 t$, $y = e^{2t}\sin^2 t$;

(3) $x = f'(t)$, $y = tf'(t) - f(t)$, 其中 $f(t)$ 为三阶可导且 $f''(t) \neq 0$.

解(1): 由于 $x'(t) = a(1 - \cos t)$, $y'(t) = a\sin t$, 故

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \frac{\sin t}{1-\cos t},$$

$$y''(x) = \frac{d}{dx}y'(x) = \frac{d}{dt}y'(x)\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sin t}{1-\cos t}\right)\frac{1}{x'(t)}$$

$$= \frac{-1}{1-\cos t}\cdot\frac{1}{a(1-\cos t)} = \frac{-1}{a(1-\cos t)^2.}$$

解(2): 对于 $x = e^{2t}\cos^2 t$, $y = e^{2t}\sin^2 t$,

$$x'(t) = 2e^{2t}\cos^2 t - 2e^{2t}\cos t\sin t = 2e^{2t}\cos^2 t - e^{2t}\sin(2t),$$

$$y'(t) = 2e^{2t}\sin^2 t + 2e^{2t}\sin t\cos t = 2e^{2t}\sin^2 t + e^{2t}\sin(2t),$$

于是

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{2e^{2t}\sin^2 t + e^{2t}\sin(2t)}{2e^{2t}\cos^2 t - e^{2t}\sin(2t)} = \frac{2\sin^2 t + \sin(2t)}{2\cos^2 t - \sin(2t)},$$

$$y''(x) = \frac{d}{dx}y'(x) = \frac{d}{dt}y'(x)\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\left(\frac{2\sin^2 t + \sin(2t)}{2\cos^2 t - \sin(2t)}\right)\frac{1}{x'(t)}$$

$$= \frac{4[\sin(2t) + \cos(2t)]}{[2\cos^2 t - \sin(2t)]^2} \cdot \frac{1}{2e^{2t}\cos^2 t - e^{2t}\sin(2t)} = \frac{4[\sin(2t) + \cos(2t)]}{e^{2t}[2\cos^2 t - \sin(2t)]^3}.$$

解(3): 对于 $x = f'(t)$, $y = tf'(t) - f(t)$,

$$x'(t) = f''(t), \quad y'(t) = tf''(t).$$

于是

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{tf''(t)}{f''(t)} = t,$$

$$y''(x) = \frac{d}{dx}y'(x) = \frac{d}{dt}y'(x)\frac{dt}{dx} = \frac{dt}{dt}\frac{1}{x'(t)} = \frac{1}{f''(t)}.$$

习题五: 课本第87-88页习题3.3题5(1)(3): 求下列隐函数的二阶导数

$$(1) \quad e^y + xy - e = 0, \quad (3) \quad y - 2x = (x-y)\ln(x-y)$$

解(1): 对方程 $e^y + xy - e = 0$ 求导得 $e^y y' + y + xy' = 0$. 由此得

$$y'(x) = -\frac{y}{e^y + x}.$$

对上式再次求导得

$$y''(x) = -\frac{(e^y + x)y' - y(e^y y' + 1)}{(e^y + x)^2} = \frac{y}{(e^y + x)^2} - \frac{(e^y + x + ye^y)y'}{(e^y + x)^2}$$

$$= \frac{y}{(e^y + x)^2} + \frac{(e^y + x + ye^y)y}{(e^y + x)^3}.$$

解(3): 对方程 $y-2x=(x-y)\ln(x-y)$ 求导得

$$y'-2=(1-y')\ln(x-y)+(1-y').$$

由此解得

$$y'(x)=1+\frac{1}{2+\ln(x-y)}.$$

对上式再次求导得

$$y''(x)=-\frac{1}{[2+\ln(x-y)]^2}\cdot\frac{1}{x-y}\cdot(1-y')=\frac{1}{(x-y)[2+\ln(x-y)]^3}.$$

解答完毕.

习题六: 课本第87-88页习题3.3题6: 设 $f(x)=\arctan x$. 证明对任意正整数 n, 成立

$$(1+x^2)f^{(n+2)}(x)+2(n+1)xf^{(n+1)}(x)+n(n+1)f^{(n)}(x)=0. \tag{11}$$

证明: 对函数 $f(x)=\arctan x$ 求导得

$$f'=\frac{1}{1+x^2} \quad \text{即} \quad (1+x^2)f'=1.$$

对恒等式 $(1+x^2)f'=1$ 两边取 $n+1$ 阶导数

$$(1+x^2)f^{(n+2)}(x)+(n+1)2xf^{(n+2)}(x)+\frac{(n+1)n}{2}2f^{(n)}(x)=0.$$

此即等式 (11). 证毕.

习题七: 课本第87-88页习题3.3题7: 设 $f(x)=(\arcsin x)^2$. 证明对任意正整数 n, 成立

$$(1-x^2)f^{(n+2)}(x)-(2n+1)xf^{(n+1)}(x)-n^2f^{(n)}(x)=0, \tag{12}$$

并求 $f^{(n)}(0)$.

证明: 对函数 $f(x)=(\arcsin x)^2$ 求导得

$$f'=2\arcsin x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

或

$$f'\sqrt{1-x^2} = \arcsin x. \tag{13}$$

上式两边平方得

$$(f')^2(1-x^2) = f. \tag{14}$$

对等式 (14) 两边求导得

$$2f'f''(1-x^2) - 2x(f')^2 = f'.$$

约去 f' 得

$$2f''(1-x^2) - 2xf' = 1. \tag{15}$$

对等式 (15) 两边取 n 阶导数得

$$2f^{(n+2)}(1-x^2) + n2f^{(n+1)}(-2x) + \frac{1}{2}n(n-1)2f^{(n)}(-2) - 2xf^{(n+1)} - 2nf^{(n)} = 0.$$

化简得

$$(1-x^2)f^{(n+2)} - (2n+1)xf^{(n+1)} - n^2f^{(n)} = 0.$$

即等式 (12) 得证. 由定义知 $f(0) = 0$. 再根据等式 (13) 中, 令 $x = 0$ 得 $f'(0) = 0$. 在式 (12) 中, 令 $x = 0$ 得 $f^{(n+2)}(0) - n^2f^{(n)}(0) = 0$. 由此得 $f^{(k)}(0) = 0, \forall k \geq 0$. 解答完毕.

习题八: 课本第94页习题4.1题1: 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上二阶可导, 且存在一点 $c \in (a,b)$, 使得 $f(a) = f(c) = f(b) = 0$, 证明存在一点 $\xi \in (a,b)$, 使得 $f''(\xi) = 0$.

证明: 根据 Lagrange 中值定理知, 存在 $\eta_1 \in (a,c)$, 以及存在 $\eta_2 \in (c,b)$, 使得 $f'(\eta_1) = 0$ 且 $f'(\eta_2) = 0$. 再次利用 Lagrange 中值定理知, 存在 存在一点 $\xi \in (a,b)$, 使得 $f''(\xi) = 0$. 命题得证.

习题九: 课本第94页习题4.1题2: 若多项式 $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$ 的系数满足条件

$$\frac{a_n}{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} + \cdots + \frac{a_1}{2} + a_0 = 0,$$

证明多项式在开区间 $(0,1)$ 上内至少有一个零点.

证明: 记
$$p(x)=\frac{a_nx^{n+1}}{n+1}+\frac{a_{n-1}x^n}{n}+\cdots+\frac{a_1x^2}{2}+a_0x.$$
则 $p(0)=0$. 由假设知 $p(1)=0$. 根据 Lagrange 中值定理知存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $p'(\xi)=0$, 此即多项式 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$ 在开区间 $(0,1)$ 上内有一个零点 ξ. 命题得证.

习题十: 课本第94页习题4.1题3: 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有 n 阶导数, 设 $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ $(a_n\neq 0)$ 为 n 次多项式. 若存在 $n+1$ 个互异的点 $x_1<x_2<\cdots<x_{n+1}$, 使得 $f(x_j)=p(x_j)$, $j=1,2,\cdots,n+1$, 证明存在一点 $\xi\in\mathbb{R}$, 使得 $a_n=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$.

证明: 令 $F(x)\overset{\text{def}}{=}f(x)-p(x)$, 则 $F(x_j)=0$, $j=1,2,\cdots,n+1$. 根据 Lagrange 中值定理知存在 n 个互异的点 $y_j\in(x_j,x_{j+1})$, $j=1,2,\cdots,n$, 使得 $F'(y_j)=0$. 再次利用 Lagrange 中值定理知存在 $n-1$ 个互异的点 $z_j\in(y_j,y_{j+1})$, $j=1,2,\cdots,n-1$, 使得 $F''(z_j)=0$. 继续这个做法知, 存在 2 个互异的点 $\xi_1<\xi_2$, 使得 $F^{(n-1)}(\xi_j)=0$, $j=1,2$. 最后一次利用 Lagrange 中值定理知存在点 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$, 使得 $F^{(n)}(\xi)=0$. 由于 $F^{(n)}(x)=f^{(n)}(x)-n!a_n$. 故 $F^{(n)}(\xi)=f^{(n)}(\xi)-n!a_n=0$, 即 $a_n=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$. 命题得证.

习题十一: 课本第94页习题4.1题4: 若函数 $f(x)$ 在一个开区间 J 上的 n 阶导数恒为零, 证明 $f(x)$ 为一多项式, 且次数至多为 $n-1$ 次.

证明: 用归纳法证明. 情形 $n=1$: 若 $f(x)$ 在一个开区间 J 上的 n 阶导数恒为零, 则根据课堂上介绍的定理知 $f(x)$ 为常数函数. 结论成立.
假设结论对正整数 n 成立, 即若函数 $f(x)$ 在一个开区间 J 上的 n 阶导数恒为零, 则 $f(x)$ 为一多项式, 且次数至多为 $n-1$ 次.
考虑 $n+1$ 情形: 假设函数 $f(x)$ 在一个开区间 J 上的 $n+1$ 阶导数恒为零, 则导函数 $f'(x)$ 在一个开区间 J 上的 n 阶导数恒为零, 根据归纳假设知 $f'(x)$ 为一多项式, 且次数

至多为 $n-1$ 次. 故可设 $f'(x)=a_0x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}$. 令

$$g(x)\stackrel{\text{def}}{=}\frac{a_0}{n}x^n+\frac{a_1}{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x,$$

则

$$\big[f(x)-g(x)\big]'=f'(x)-g'(x)$$

$$=a_0x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}-\big[a_0x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\big]=0.$$

因此函数 $f(x)-g(x)=C$ 为常数函数, 即 $f(x)=g(x)+C$. 因此 $f(x)$ 为一多项式, 且次数至多为 n 次. 由归纳法原理知命题成立.

习题十二: 课本第94页习题4.1题5: 设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上满足条件 $|f(x)-f(y)|\leq M|x-y|^2$, $\forall x,y\in(a,b)$, 其中 M 为一个正常数. 证明 $f(x)$ 为常数函数.

证明: 要证 $f(x)$ 为常数函数. 只要证 $f'(x)=0$ $\forall x\in(a,b)$. 对任意固定 $x_0\in(a,b)$, 取 $y=x_0+h$, 根据假设我们有

$$\left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right|\leq\left|\frac{h^2}{h}\right|=|h|\to 0,\quad h\to 0.$$

这说明 $f(x)$ 在任意点 $x_0\in(a,b)$ 处可导, 且 $f'(x_0)=0$. 因此 $f'(x)=0$ $\forall x\in(a,b)$. 命题得证.

Oct 29

习题一: 课本第94页习题4.1题6: 设 $f(x)$ (i) 在 $[a,b]$ 上连续; (ii) 在 (a,b) 上可导; (iii) $f(a)=f(b)$; (vi) $f(x)$ 不是常数函数, 证明存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f'(\xi)>0$.

证明: 由假设 (vi) 知存在 $x_0\in(a,b)$, 使得 $f(x_0)\neq f(a)=f(b)$. 若 $f(x_0)>f(a)$, 那么有中值定理知存在 $\xi\in(a,x_0)$, 使得 $0<f(x_0)-f(a)=f'(\xi)(x_0-a)$, 故 $f'(\xi)>0$. 若 $f(x_0)<f(a)=f(b)$, 那么有中值定理知存在 $\xi\in(x_0,b)$, 使得 $0<f(b)-f(x_0)=f'(\xi)(b-x_0)$, 故 $f'(\xi)>0$. 命题得证.

习题二: 课本第94页习题4.1题7: 设 (i) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续; (ii) 在 (a,b) 上二阶可导; (iii) $f(a)=f(b)=0$; (vi) 存在 $c\in(a,b)$, 使得 $f(c)>0$. 证明存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f''(\xi)<0$.

证明: 反证. 若不然, 则 $f''(x)\geq 0, \forall x\in(a,b)$. 于是 $f'(x)$ 单调上升. 根据假设 (iii) 和 (vi), 以及中值定理知, 存在 $\xi_1\in(a,c)$, $\xi_2\in(c,b)$, 使得

$$f'(\xi_1)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}>0, \quad f'(\xi_2)=\frac{f(c)-f(b)}{c-b}<0,$$

注意 $\xi_1<\xi_2$, 但 $f'(\xi_2)<0<f'(\xi_1)$. 此与 $f'(x)$ 单调上升. 命题得证.

习题三: 课本第94页习题4.1题8(1): 证明下列恒等式

$$\arctan x+\operatorname{arccot} x=\frac{\pi}{2}, \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

证明: 由于

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}, \quad (\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2},$$

故 $(\arctan x+\operatorname{arccot} x)'=0$. 因此函数 $\arctan x+\operatorname{arccot} x=C$ 是常数函数. 由于当 $x\to+\infty$, $\arctan x\to\frac{\pi}{2}$, 且 $\operatorname{arccot} x\to 0$, 故函数 $\arctan x+\operatorname{arccot} x=\frac{\pi}{2}$. 解答完毕.

习题四: 课本第95页习题4.1题9: 证明下列不等式:

(1) $|\sin x-\sin y|\leq|x-y|, \forall x\in\mathbb{R}$,

(2) $|\arctan x-\arctan y|\leq|x-y|, \forall x\in\mathbb{R}$;

(4) $py^{p-1}(x-y)\leq x^p-y^p\leq px^{p-1}(x-y)$, $0<y<x$, $p>1$.

证(1): 由中值定理得 $\sin x-\sin y=\cos\xi(x-y)$. 取绝对值得 $|\sin x-\sin y|\leq|x-y|$.
证(2): 由中值定理得

$$\arctan x-\arctan y=\frac{1}{1+\xi^2}(x-y).$$

取绝对值得 $|\arctan x-\arctan y|\leq|x-y|$.

证(4): 由中值定理得 $x^p - y^p = p\xi^{p-1}$, 其中 $\xi \in (y,x)$. 由于 $y^{p-1} < \xi^{p-1} < x^{p-1}$, 故 $py^{p-1}(x-y) \le x^p - y^p \le px^{p-1}(x-y)$. 解答完毕.

习题五: 课本第95页习题4.1题10: 设 (i) 函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续; (ii) 在 $(0,1)$ 上可导; (iii) $f(0)=0$, $f(1)=1$; (iv) $f(x)$ 不恒等于函数 x, 证明存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f'(\xi) > 1$.

证明: 由假设 (iv) 知存在 $x_0 \in (0,1)$, 使得 $f(x_0) \ne x_0$. 若 $f(x_0) > x_0$, 则由中值定理知 $\xi \in (0,x_0)$

$$f'(\xi) = \frac{f(x_0)-f(0)}{x_0 - 0} = \frac{f(x_0)}{x_0} > 1.$$

若 $f(x_0) < x_0$, 则由中值定理知 $\xi \in (x_0, 1)$

$$f'(\xi) = \frac{f(1)-f(x_0)}{1-x_0} = \frac{1-f(x_0)}{1-x_0} > 1.$$

命题得证.

习题六: 课本第95页习题4.1题11: 证明广义 Rolle 定理:
(1) 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上可导, 极限 $\lim_{x\to a^+} f(x)$ 和 $\lim_{x\to b^-} f(x)$ 均存在且相等, 则存在 $\xi \in (a,b)$, 使得 $f'(\xi)=0$.
(2) 设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上可导, 极限 $\lim_{x\to a^+} f(x)$ 和 $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ 均存在且相等, 则存在 $\xi \in (a,+\infty)$, 使得 $f'(\xi)=0$.
注: 若将 (2) 中的区间 $(a,+\infty)$ 改为 $(-\infty,a)$ 或 $(-\infty,+\infty)$, 其他条件保持不变, 则结论仍然成立.

证明(1): 设 $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to b^-} f(x) = A$. 若 $f(x)$ 恒等于常数 A, 则结论显然成立. 设 $f(x)$ 不恒等于常数 A, 则存在 $x_0 \in (a,b)$, 使得 $f(x_0) \ne A$. 不妨设 $A < f(x_0)$. 根据极限的保序性质知存在 $\delta > 0$, 使得对任意 $\forall x \in (a, a+\delta] \cup [b-\delta, b)$, $f(x) < f(x_0)$. 不妨设 $\delta > 0$ 充分小, 使得 $x_0 \in [a+\delta, b-\delta]$. 再根据连续函数的最值性知, $f(x)$ 在闭区间 $[a+\delta, b-\delta]$ 上存在最大值, 即存在 $\xi \in [a+\delta, b-\delta]$, 使得 $f(x) \le f(\xi), \forall x \in [a+\delta, b-\delta]$. 由于 $f(\xi) \ge f(x_0) > A$, 故 $\xi \in (a+\delta, b-\delta)$. 由极值点的必要条件知 $f'(\xi) = 0$. 命题得证.

证明(2): 证明思想同证明(1). 细节略.

习题七: 课本第95页习题4.1题12: 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导, 且满足

$$\lim_{|x|\to+\infty}\frac{f(x)}{|x|}=+\infty.$$

证明对任意 $a\in\mathbb{R}$, 存在 $\xi\in\mathbb{R}$, 使得 $f'(\xi)=a$.

证明: 令 $g(x)=f(x)-ax$, 则

$$\lim_{|x|\to+\infty}\frac{g(x)}{|x|}=\lim_{|x|\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{|x|}-a\frac{x}{|x|}\right)=+\infty.$$

因此函数 $\lim_{|x|\to+\infty}g(x)=+\infty$. 根据课本第64页习题2.6题10的结论知, $g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上存在最小值, 即存在点 $\xi\in\mathbb{R}$, 使得 $g(\xi)\le g(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. 由极值点的必要条件得 $g'(\xi)=0$, 即 $f'(\xi)=a$. 命题得证.

习题八: 课本第95页习题4.1题13: 设函数 $f(x)$, $g(x)$ 和 $h(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导, 证明存在点 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a)\\ f(b) & g(b) & h(b)\\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi)\end{vmatrix}=0.$$

证明: 令

$$F(x)=\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a)\\ f(b) & g(b) & h(b)\\ f(x) & g(x) & h(x)\end{vmatrix}. \tag{16}$$

根据行列式性质知 $F(a)=F(b)=0$. 于是由 Rolle 定理知存在点 $\xi\in(a,b)$, 使得 $F'(\xi)=0$. 将行列式 (16) 按第三行展开得

$$F(x)=f(x)\begin{vmatrix} g(a) & h(a)\\ g(b) & h(b)\end{vmatrix}+g(x)\begin{vmatrix} h(a) & f(a)\\ h(b) & f(b)\end{vmatrix}+h(x)\begin{vmatrix} f(a) & g(a)\\ f(b) & g(b)\end{vmatrix}.$$

于是

$$F'(x) = f'(x)\begin{vmatrix} g(a) & h(a) \\ g(b) & h(b) \end{vmatrix} + g'(x)\begin{vmatrix} h(a) & f(a) \\ h(b) & f(b) \end{vmatrix} + h'(x)\begin{vmatrix} f(a) & g(a) \\ f(b) & g(b) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(x) & g'(x) & h'(x) \end{vmatrix}.$$

因此

$$F'(\xi) = \begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) \end{vmatrix} = 0.$$

命题得证.

习题九: 课本第95页习题4.1题16: 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上可导. 若 $\lim_{x\to-\infty} f'(x) = A > 0$, 证明 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

证明: 由假设 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = A > 0$ 知, 存在 $L_1 < 0$, 使得对 $\forall x < L_1$, $|f'(x) - A| < \frac{A}{2}$, 由此得 $f'(x) > \frac{A}{2}$. 于是对任意 $x < L_1$, 在区间 $[x, L_1]$ 上应用中值定理得 $f(x) - f(L_1) = f'(\xi)(x - L_1)$, 其中 $\xi \in (x, L_1)$. 于是

$$f(x) = f(L_1) + f'(\xi)(x - L_1) < f(L_1) + \frac{A}{2}(x - L_1). \qquad (*)$$

根据不等式 (*)可知 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. 命题得证.

习题十: 课本第100页习题4.2题2: 利用 L'Hospital 法则求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln(1-\cos x)}{\ln x}$; (3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sqrt{1+2\cos x}-1}{x-\frac{\pi}{2}}$; (5) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{\sqrt{2}}} \dfrac{(\arcsin x)^2 - \frac{\pi^2}{16}}{2x^2-1}$;

$$(7)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\cos(\alpha x)-\cos(\beta x)}{\ln(1+x^2)};\quad (9)\quad \lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2+x});(11)\quad \lim_{x\to 0}\left(\cot x-\frac{1}{x}\right);$$

$$(13)\quad \lim_{x\to 1}(x-1)\tan\frac{\pi x}{2};\quad (15)\quad \lim_{x\to+\infty}(\pi-2\arctan x)\ln x;$$

$$(17)\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{x}-1\right)^{\tan x};\quad (19)\quad \lim_{|x|\to+\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2}.$$

解(1): 当 $x\to 0^+$ 时,

$$\frac{[\ln(1-\cos x)]'}{[\ln x]'}=\frac{\frac{\sin x}{1-\cos x}}{\frac{1}{x}}=\frac{x\sin x}{1-\cos x}\to 2.$$

故

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1-\cos x)}{\ln x}=2.$$

解(3): 当 $x\to\frac{\pi}{2}$ 时,

$$\frac{[\sqrt{1+2\cos x}-1]'}{[x-\frac{\pi}{2}]'}=\frac{-\sin x}{\sqrt{1+2\cos x}}\to -1.$$

故

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{1+2\cos x}}{x-\frac{\pi}{2}}=-1.$$

解(5): 当 $x\to\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时,

$$\frac{[(\arcsin x)^2-\frac{\pi^2}{16}]'}{[2x^2-1]'}=\frac{2(\arcsin x)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{4x}\to\frac{2\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\sqrt{2}}{\frac{4}{\sqrt{2}}}=\frac{\pi}{4}.$$

解(7): 当 $x\to 0$ 时,

$$\frac{[\cos(\alpha x)-\cos(\beta x)]'}{[\ln(1+x^2)]'}=\frac{-\alpha\sin(\alpha x)+\beta\sin(\beta x)}{\frac{2x}{1+x^2}}$$

$$=\frac{1}{2}(1+x^2)\left(\frac{\beta\sin(\beta x)}{x}-\frac{\alpha\sin(\alpha x)}{x}\right)\to\frac{1}{2}(\beta^2-\alpha^2).$$

故

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\alpha x)-\cos(\beta x)}{\ln(1+x^2)}=\frac{1}{2}(\beta^2-\alpha^2).$$

解(9): 当 $x\to +\infty$ 时, $y=\frac{1}{x}\to 0^+$. 又

$$x-\sqrt{x^2+x}=x\left[1-\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right]=\frac{1-(1+y)^{\frac{1}{2}}}{y},$$

且

$$\frac{[1-(1+y)^{\frac{1}{2}}]'}{[y]'}=-\frac{1}{2}(1+y)^{\frac{-1}{2}}\to -\frac{1}{2}.$$

故

$$\lim_{x\to +\infty}(x-\sqrt{x^2+x})=-\frac{1}{2}.$$

解(11): 将函数 $\cot x-\frac{1}{x}$ 写作

$$\cot x-\frac{1}{x}=\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}=\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}.$$

当 $x\to 0$ 时,

$$\frac{[x\cos x-\sin x]'}{[x\sin x]'}=\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{\sin x+x\cos x}=\frac{-x\sin x}{\sin x+x\cos x}\to 0.$$

故

$$\lim_{x\to 0}\left(\cot x-\frac{1}{x}\right)=0.$$

解(13): 令 $y=x-1$, 则 $x=y+1$, 且当 $x\to 1$ 时, $y\to 0$. 当 $y\to 0$ 时,

$$(x-1)\tan\frac{\pi x}{2}=y\cdot\frac{\sin(\frac{\pi x}{2})}{\cos(\frac{\pi x}{2})}=y\cdot\frac{\sin(\frac{\pi(y+1)}{2})}{\cos(\frac{\pi(y+1)}{2})}=y\cdot\frac{\cos(\frac{\pi y}{2})}{-\sin(\frac{\pi y}{2})}$$

$$=-\cos(\frac{\pi y}{2})\cdot\frac{y}{\sin(\frac{\pi y}{2})}\to -\frac{2}{\pi}.$$

故

$$\lim_{x\to 1}(x-1)\tan\frac{\pi x}{2}=-\frac{2}{\pi}.$$

解(15): 将函数 $(\pi-2\arctan x)\ln x$ 写作

$$(\pi-2\arctan x)\ln x=\frac{\pi-2\arctan x}{\frac{1}{\ln x}}.$$

当 $x\to+\infty$ 时,

$$\frac{[\pi-2\arctan x]'}{[\frac{1}{\ln x}]'}=\frac{-\frac{2}{1+x^2}}{-\frac{1}{x(\ln x)^2}}=\frac{2x(\ln x)^2}{1+x^2}\to 0.$$

故

$$\lim_{x\to+\infty}(\pi-2\arctan x)\ln x=0.$$

解(17): 令 $y=\frac{\pi}{x}-1$, 则当 $x\to\frac{\pi}{2}$ 时, $y\to 1$. 于是

$$\left(\frac{\pi}{x}-1\right)^{\tan x}=y^{\tan(\frac{\pi}{1+y})}.$$

再令 $z=y^{\tan(\frac{\pi}{1+y})}$, 则

$$\ln z=\tan\left(\frac{\pi}{1+y}\right)\ln y=\sin\left(\frac{\pi}{1+y}\right)\cdot\frac{\ln y}{\cos(\frac{\pi}{1+y})}.$$

当 $y\to 1$ 时,

$$\frac{[\ln y]'}{[\cos(\frac{\pi}{1+y})]'}=\frac{\frac{1}{y}}{\sin(\frac{\pi}{1+y})\cdot\frac{\pi}{(1+y)^2}}\to\frac{4}{\pi}.$$

故 $\ln z=\sin\left(\frac{\pi}{1+y}\right)\cdot\frac{\ln y}{\cos(\frac{\pi}{1+y})}\to\frac{4}{\pi}$. 于是

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{x}-1\right)^{\tan x}=\lim_{y\to 1}z=\lim_{y\to 1}e^{\ln z}=e^{\frac{4}{\pi}}.$$

解(19): 令 $y=\frac{1}{x}$, 则当 $|x|\to+\infty$ 时, $y\to 0$. 于是

$$\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2}=(\cos y)^{\frac{1}{y^2}}.$$

再令 $z=(\cos y)^{\frac{1}{y^2}}$, 则 $\ln z=\frac{\ln\cos y}{y^2}$. 于是

$$\frac{[\ln\cos y]'}{[y^2]'}=\frac{\frac{1}{\cos y}\cdot(-\sin y)}{2y}=-\frac{1}{2\cos y}\cdot\frac{\sin y}{y}\to-\frac{1}{2}.$$

因此

$$\lim_{|x|\to+\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2}=\lim_{y\to 0}z=\lim_{y\to 0}e^{\ln z}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

解答完毕.

习题十一: 课本第101页习题4.2题3: 设 $f(x)$ 二阶可导, 求极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}. \tag{17}$$

解: 尝试用 L'Hospital 法则求极限 (17). 当 $h\to 0$ 时,

$$\frac{[f(a+h)-2f(a)+f(a-h)]'}{[h^2]'}=\frac{f'(a+h)-f'(a-h)}{2h}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{f'(a+h)-f'(a)}{h}+\frac{f'(a-h)-f'(a)}{-h}\right)\to\frac{1}{2}\left(f''(a)+f''(a)\right)=f''(a).$$

于是所求极限为

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}=f''(a).$$

习题十二: 课本第101页习题4.2题4: 设 $f(x)$ 可导, 且 $f(0)=f'(0)=1$, 求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin x)-1}{\ln f(x)}. \tag{18}$$

解: 尝试用 L'Hospital 法则求极限 (18). 当 $x\to 0$ 时,

$$\frac{[f(\sin x)-1]'}{[\ln x]'}=\frac{f'(\sin x)\cos x}{\frac{1}{f(x)}f'(x)}=\frac{f(x)f'(\sin x)\cos x}{f'(x)}\to 1.$$

于是所求极限为

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin x)-1}{\ln f(x)}=1.$$

解答完毕.