习题材料（五）答案

注 1：本次习题课包含内容：点线面、正交基、正交矩阵

注 2：带 ♡ 号的习题有一定的难度、比较耗时, 请量力为之.

注 3：本节考虑的矩阵均为实矩阵.

习题 1. 设 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^3$ 且不共线，证明：

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}\text{，当且仅当 } \boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\alpha}.$$

答案　“⇒”：由题意，$\boldsymbol{\alpha}=-(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}&=-(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})\times\boldsymbol{\beta}\\&=-\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\beta}\\&=\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\gamma}\end{aligned}$$

剩下的同理可证.

“⇐”：因为三个向量不共线，不妨设 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 不共线，此时 $\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}\neq\mathbf{0}$. 由 $\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\alpha}$ 知：$\boldsymbol{\gamma}\times(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=0$. 因为 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 不共线，所以 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\neq\mathbf{0}$，故存在 c 使得 $\gamma=c(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})$. 于是

$$\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\beta}\times(c(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}))=c\cdot\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha},$$

所以 $c=-1$，从而 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}$.

习题 2. 设有两条直线：

$$L_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{n},\qquad L_2:\begin{cases}x=-2-4t\\y=2+mt\\z=3+2t\end{cases}$$

1. 求 m, n 使得 $L_1 \parallel L_2$;
2. 当 $m=n=1$ 时，求 L_1, L_2 公垂线 L 的方程（L 与 L_1, L_2 垂直且相交）;
3. 当 $m=n=1$ 时，求 L_1, L_2 之间的最短距离;
4. 求 m, n 使 $L_1 \perp L_2$，并问 m, n 是否唯一？
5. 求 m, n 使 L_1 与 L_2 共面，并问 m, n 是否唯一？
6. 当 $m=-4, n=-1$ 时，求 L_1 与 L_2 的夹角.

答案　L_1 的方向向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}2\\-2\\n\end{bmatrix}$，$L_2$ 的方向向量为 $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}-4\\m\\2\end{bmatrix}$.

1. $L_1 \mathbin{/\mkern-6mu/} L_2$，当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性相关. 由这两个向量的第一个分量可知，此时 $\boldsymbol{\alpha}_2 = -2\boldsymbol{\alpha}_1$，所以 $m = 4, n = -1$.

2. $m = n = 1$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. 设公垂线与 L_1, L_2 的交点分别为 $M_1(2s+1, -2s-1, s), M_2(-2-4t, 2+t, 3+2t)$ 那么 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 都正交，所以 $\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \boldsymbol{\alpha}_1 = \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \boldsymbol{\alpha}_2 = 0$，将点积展开整理可得：

$$\begin{cases} 21t + 8s + 21 = 0 \\ 8t + 9s + 9 = 0 \end{cases}$$

解方程组得 $s = -\dfrac{21}{125}, t = -\dfrac{117}{125}$，故 M_1, M_2 坐标分别为

$$M_1\left(\frac{83}{125}, -\frac{83}{125}, -\frac{21}{125}\right), M_2\left(\frac{218}{125}, \frac{133}{125}, \frac{141}{125}\right)$$

此时

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \begin{bmatrix} \frac{135}{125} \\ \frac{216}{125} \\ \frac{162}{125} \end{bmatrix}$$

我们可以消去一些公因子、公分母，取方向向量为 $\begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix}$，因此公垂线方程为

$$\frac{x - \frac{83}{125}}{5} = \frac{y + \frac{83}{125}}{8} = \frac{z + \frac{21}{125}}{6}.$$

3. 接上一小题，L_1, L_2 之间的最短距离为

$$d = \|\overrightarrow{M_1M_2}\| = \frac{27}{125}\sqrt{5^2 + 8^2 + 6^2} = \frac{27}{5\sqrt{5}}$$

4. $L_1 \perp L_2$ 当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \boldsymbol{\alpha}_2 = 0$，即 $-8 - 2m + 2n = 0$，或者等价地 $m - n + 4 = 0$.

5. 将 L_2 的参数方程改写为标准方程：

$$\frac{x+2}{-4} = \frac{y-2}{m} = \frac{z-3}{2}$$

那么 L_1, L_2 共面，当且仅当

$$\begin{vmatrix} (-2) - 1 & 2 - (-1) & 3 - 0 \\ 2 & -2 & n \\ -4 & m & 2 \end{vmatrix} = 0$$

行列式展开整理得 $(m-4)(n+2) = 0$，所以 $m = 4$ 或者 $n = -2$.

6. $m = -4, n = -1$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$，设 θ 为 L_1, L_2 的夹角，则

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \boldsymbol{\alpha}_2}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|\|\boldsymbol{\alpha}_2\|} = \frac{-2}{18} = -\frac{1}{9}$$

所以 $\theta = \pi - \arccos\frac{1}{9}$.

习题 3. 已知平面 $\pi: x-2y-2z+4=0$，直线 $L: \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+2}{n}$

1. 求 n，使 $L\perp\pi$;

2. 求 n，使 $L\parallel\pi$;

3. 当 $n=-2$ 时，求 L 与 π 之间的交点，并求 L 在 π 上的投影线方程;

4. 当 $n=-2$ 时，求直线 L_1，使 L_1 与 L 关于平面 π 对称;

5. 求原点关于平面 π 的对称点的坐标.

答案 平面 π 的法向量为 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}1\\-2\\-2\end{bmatrix}$，直线 L 的方向向量为 $\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}-1\\2\\n\end{bmatrix}$

1. $L\perp\pi$ 当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，当且仅当 $n=2$.
2. 因为点 $(1,0,-2)\in L$ 但是 $(1,0,-2)\notin\pi$，所以 $L\not\subset\pi$. $L\parallel\pi$ 当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=0$，即 $1(-1)+(-2)2+(-2)n=0$，故 $n=-\frac{5}{2}$.
3. 直线 L 的参数方程为
$$\begin{cases}x=1-t\\ y=2t\\ z=-2-2t\end{cases}$$
代入 π 的方程得：$(1-t)-2(2t)-2(-2-2t)+4=0$，解得 $t=9$，因此 L 和 π 的交点坐标为 $(-8,18,-20)$.
4. 由题意，$P(-8,18,-20)\in L_1$，我们只需要再找出 L_1 上的一点. 再根据题意，$M(1,0,-2)$ 关于 π 的对称点 M' 在 L_1 上，而 $\overrightarrow{MM'}$ 和 π 垂直，所以假设 $\overrightarrow{MM'}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$，于是 M' 坐标为 $(1+\lambda,-2\lambda,-2-2\lambda)$，而 M 和 M' 的中点 $\left(\frac{2+\lambda}{2},\frac{-2\lambda}{2},\frac{-4-2\lambda}{2}\right)$ 在平面 π 上，代入平面 π 的方程得
$$\frac{2+\lambda}{2}-2(-\lambda)-2(-2-\lambda)+4=0,$$
解得 $\lambda=-2$，所以 $M'(-1,4,2)$ 在 L_1 上，故可取 L_1 的方向向量为 $\overrightarrow{M'P}=\begin{bmatrix}-7\\14\\-22\end{bmatrix}$，所以 L_1 的标准方程为
$$\frac{x+8}{-7}=\frac{y-18}{14}=\frac{z+20}{-22}.$$
5. 记原点为 O，它关于平面 π 的对称点为 O'，那么 $\overrightarrow{OO'}\perp\pi$ 且 OO' 中点在 π 上. 故可设 $\overrightarrow{OO'}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$，即 $O'(\lambda,-2\lambda,-2\lambda)$，于是点 $\left(\frac{\lambda}{2},-\lambda,-\lambda\right)\in\pi$，从而
$$\frac{\lambda}{2}-2(-\lambda)-2(-\lambda)+4=0,$$
解得 $\lambda=-\frac{8}{9}$，故所求 O' 坐标为 $\left(-\frac{8}{9},\frac{16}{9},\frac{16}{9}\right)$.

习题 4. 证明下列两条直线：
$$L_1: \frac{x-7}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{-2},\qquad L_2: x=1+2t, y=-2-3t, z=5+4t$$

共面，并求它们所在平面的方程.

答案 将 L_2 的参数表示代入 L_1:

$$\frac{(1+2t)-7}{3}=\frac{(-2-3t)-2}{2}=\frac{5+4t-1}{-2}$$

解得 $t=0$，因此 L_1,L_2 交于点 $(1,-2,5)$，所以共面.

L_1 的方向向量为 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}3\\2\\-2\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}2\\-3\\4\end{bmatrix}$，

$$\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\3&2&-2\\2&-3&4\end{vmatrix}=2\boldsymbol{i}-16\boldsymbol{j}-13\boldsymbol{k}=\begin{bmatrix}2\\-16\\-13\end{bmatrix}$$

因此我们可设平面方程为 $2x-16y-13z+t=0$. 将点 $(1,-2,5)$ 坐标代入得

$$2\cdot 1-16\cdot(-2)-13\cdot 5+t=0\text{，得 }t=31,$$

所以 L_1,L_2 所在平面方程为 $2x-16y-13z+31=0$.

习题 5. *1.* 求点 $M(2,-1,-1)$ 到平面 $\pi:16x-12y+15z-4=0$ 的距离；

2. 求平行平面 $\pi_1:6x-18y-9z-28=0,\pi_2:4x-12y-6z-7=0$ 的距离；

3. 求异面直线 $L_1:\begin{cases}3x-2y+z=0\\x-3y+5=0\end{cases}$，$L_2:\begin{cases}x-3z+2=0\\x+y+z+1=0\end{cases}$ 之间的距离.

答案

1. 法一. 直接使用公式:

$$d=\frac{|16\cdot 2-12\cdot(-1)+15\cdot(-1)-4|}{\sqrt{16^2+12^2+15^2}}=1$$

法二. 平面的单位法方向 $\boldsymbol{n}$ 为 $\begin{bmatrix}16\\-12\\15\end{bmatrix}$ 的单位化，即 $\boldsymbol{n}=\begin{bmatrix}16/25\\-12/25\\15/25\end{bmatrix}$，在平面上取点 $N(1/4,0,0)$，

那么 $\overrightarrow{MN}=\begin{bmatrix}-\frac{7}{4}\\1\\1\end{bmatrix}$, 所以点到平面的距离为

$$d=\left|\overrightarrow{MN}\cdot\boldsymbol{n}\right|=\left|\frac{16}{25}\left(-\frac{7}{4}\right)-\frac{12}{25}\cdot 1+\frac{15}{25}\cdot 1\right|==\left|\frac{-28-12+25}{25}\right|=1.$$

2. 法一. 在 π_1 上取点 $M(28/6,0,0)$，利用点到平面的距离公式得

$$d=\frac{\left|4\cdot\frac{28}{6}-7\right|}{\sqrt{4^2+12^2+6^2}}=\frac{7\cdot\frac{5}{3}}{2\cdot\sqrt{49}}=\frac{5}{6}.$$

法二 平面的法方向为 $\begin{bmatrix}6\\-18\\-9\end{bmatrix}$，因此可取单位法方向为 $\boldsymbol{n}=\begin{bmatrix}2/7\\-6/7\\-3/7\end{bmatrix}$，在 π_1 上取点 $M(28/6,0,0)$，在 π_2 上取点 $N(7/4,0,0)$，因此 $\overrightarrow{MN}=\begin{bmatrix}-\frac{35}{12}\\0\\0\end{bmatrix}$，因此两个平面的距离为

$$d=\left|\overrightarrow{MN}\cdot\boldsymbol{n}\right|=\left|-\frac{35}{12}\cdot\frac{2}{7}\right|=\frac{5}{6}$$

3. 直线方向向量即齐次方程组基础解系的基，因此 L_1 的方向向量为 $\boldsymbol{\alpha_1}=\begin{bmatrix}3\\1\\-7\end{bmatrix}$，$L_2$ 的方向向量为 $\boldsymbol{\alpha_2}=\begin{bmatrix}3\\-4\\1\end{bmatrix}$，所以

$$\boldsymbol{\alpha}_1\times\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\3&1&-7\\3&-4&1\end{bmatrix}=27\boldsymbol{i}-24\boldsymbol{j}-15\boldsymbol{k}=\begin{bmatrix}-27\\-24\\-15\end{bmatrix}$$

因此单位法向量为 $\boldsymbol{n}=\begin{bmatrix}-9/\sqrt{170}\\-8/\sqrt{170}\\-5/\sqrt{170}\end{bmatrix}$. 在 L_1 上取点 $M(1,2,1)$，L_2 上取点 $N(-2,1,0)$，那么 $\overrightarrow{MN}=\begin{bmatrix}-3\\-1\\-1\end{bmatrix}$ 所以异面直线的距离为

$$d=\left|\overrightarrow{MN}\cdot\boldsymbol{n}\right|=\frac{27+8+5}{\sqrt{170}}=\frac{40}{\sqrt{170}}$$

习题 6. 平面 π 通过 $2x+y-4=0$ 与 $y+2z=0$ 的交线,并且垂直于平面 $3x+2y+3z-6=0$, 求其方程.

答案 法一.点 $M(2,0,0)$ 属于交线，且交线的方向向量为 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}-1\\2\\-1\end{bmatrix}$. 平面 $3x+2y+3z-6=0$ 的法方向为 $\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}3\\2\\3\end{bmatrix}$，因此平面 π 的法方向为

$$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\-1&2&-1\\3&2&3\end{vmatrix}=8\boldsymbol{i}-8\boldsymbol{k}=\begin{bmatrix}8\\0\\-8\end{bmatrix}$$

因此可设平面 π 的方程为 $8x-8z+t=0$. 代入点 M 得 $t=-16$，因此平面 π 的方程为 $x-z-2=0$.

法二. 通过 $2x+y-4=0$ 与 $y+2z=0$ 的交线的平面族为 $\lambda(2x+y-4)+\mu(y+2z)=0$，其中 λ,μ 不全为零. 整理得 $(2\lambda)x+(\lambda+\mu)y+2\mu z-4\lambda=0$，法方向向量为 $\boldsymbol{n}=\begin{bmatrix}2\lambda\\ \lambda+\mu\\ 2\mu\end{bmatrix}$. 若它与平面 $3x+2y+3z-6=0$ 正交，则

$$\begin{bmatrix}2\lambda\\ \lambda+\mu\\ 2\mu\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3\\2\\3\end{bmatrix}=0，\text{即 } 7(\lambda+\mu)=0,$$

故 $\lambda+\mu=0$，代入平面系方程可知平面 π 的方程为 $x-z-2=0$.

习题 7. 设 π 是 $\mathbb{R}^3$ 中由方程 $x_1-x_2+x_3=0$ 所决定的平面. 求 $\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ 在 π 上的正交投影向量.

答案 法一. π 对应的方程的基础解系是它的一组基，因此令：$\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix}1&-1\\1&0\\0&1\end{bmatrix}$

$$A^TA=\begin{bmatrix}2&-1\\-1&2\end{bmatrix},\quad (A^TA)^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{b}$ 在 π 上的正交投影为

$$A(A^TA)^{-1}A^T\boldsymbol{b}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&-1\\1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\5\\4\end{bmatrix}$$

法二. π 的法向量为 $\boldsymbol{n}=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$，到 $\boldsymbol{n}$ 方向上的正交投影矩阵为

$$\frac{1}{\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}}\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{b}$ 在 π 上的正交投影为

$$\boldsymbol{b}-\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}\boldsymbol{b}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\5\\4\end{bmatrix}.$$

习题 8. 如果 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 都正交，证明：$\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的任一线性组合也正交.

答案 只需要验证：对 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的任一线性组合 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_r\boldsymbol{\alpha}_r$ 都有

$$\boldsymbol{\beta}\cdot(x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_r\boldsymbol{\alpha}_r)=0.$$

事实上，根据内积的线性性有

$$\boldsymbol{\beta}\cdot(x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_r\boldsymbol{\alpha}_r)=x_1\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_r\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\alpha}_r=0+0+\cdots+0=0.$$

习题 9. 求齐次线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+x_4-3x_5=0 \\ x_1+x_2-x_3+x_5=0 \end{cases}$$

解空间的一组标准正交基.

答案 系数矩阵为 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，通过初等行变化化为最简行阶梯形矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

x_1, x_2 是主元，x_3, x_4, x_5 是自由变元，因此方程组的基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

因此

- $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{v}_1 = \frac{\boldsymbol{u}_1}{\|\boldsymbol{u}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$
- $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{\alpha_2} - (\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{v}_2 = \frac{\boldsymbol{u}_2}{\|\boldsymbol{u}_2\|} = \sqrt{\frac{2}{5}} \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.
- $\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 - (\boldsymbol{\alpha}_3 \cdot \boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{v}_1 - (\boldsymbol{\alpha}_3 \cdot \boldsymbol{v}_2)\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} & -\frac{6}{5} & \frac{6}{5} & \frac{13}{5} & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{v}_3 = \frac{\boldsymbol{u}_3}{\|\boldsymbol{u}_3\|} = \frac{5}{\sqrt{315}} \begin{bmatrix} \frac{7}{5} & -\frac{6}{5} & \frac{6}{5} & \frac{13}{5} & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$

习题 10 (♡)**.** 设 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是线性映射，证明：存在向量 $\boldsymbol{b}$，使得对任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ 都有 $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{x}$.

答案 对 $1 \le i \le n$，记 $\boldsymbol{e}_i$ 是第 i 个分量为 1，其余分量为 0 的向量. 令 $b_i = f(\boldsymbol{e}_i)$，$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix}$. 我们断言，对任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ 均有 $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{x}$.

事实上，设 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$，那么

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= f(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n) \\ &= x_1 f(\boldsymbol{e}_1) + x_2 f(\boldsymbol{e}_2) + \cdots + x_n f(\boldsymbol{e}_n) \\ &= x_1 b_1 + x_2 b_2 + \cdots + x_n b_n \\ &= \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{x}. \end{aligned}$$