《微积分A1》第十八讲

教师 杨利军

清华大学数学科学系

2025年11月19日

回忆积分性质一：可积函数有界

Theorem

定理：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

注记：定义函数 $f(0)=0$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$, $\forall x\in(0,1]$. 显然 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上无界. 根据上述定理可知，函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上不可积. 但这个函数在下述意义下时广义可积的:

$$\int_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x}}=\int_{\varepsilon}^{1}d2\sqrt{x}=2\sqrt{x}\Big|_{\varepsilon}^{1}=2(1-\sqrt{\varepsilon})\to 2,\quad \varepsilon\to 0^{+}.$$

稍后我们将详细讨论广义积分.

积分性质二：积分可加性

Theorem

定理：设 f 为 $[a,b]$ 上定义的函数，$c\in(a,b)$，则 f 在 $[a,b]$ 上可积，当且仅当 f 在区间 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上可积．并且当 f 在 $[a,b]$ 上可积时，

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \quad (*)$$

证：关于可加性的结论是稍后介绍的 Lebesgue 大定理的推论．以下证明，当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积时，积分等式 (*) 成立．由于可积性得到保证，故在分割时，可以始终将点 $x=c$ 取为分点，然后取极限即得到等式 (*)． □

例子

课本第140页习题5.2题3: 设 f 是 $[a,b]$ 上的非负连续函数, 不恒为零, 证明 $\int_a^b f(x)dx > 0$.

证: 因 f 非负且不恒为零, 故存在点 $x_0 \in [a,b]$, 使得 $f(x_0) > 0$. 根据连续函数保号性知, 存在一个包含 x_0 的闭区间 $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$, 使得 $f(x) > \frac{1}{2}f(x_0)$, $\forall x \in [\alpha,\beta]$. 再根据积分可加性知

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^\alpha f(x)dx + \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\beta^b f(x)dx$$

$$\geq \int_\alpha^\beta f(x)dx \geq \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}f(x_0)dx = \frac{1}{2}f(x_0)(\beta-\alpha) > 0.$$

命题得证.

设 $f(x)$ 为定义在闭 $[a, b]$ 上的有界函数. 取 $[a, b]$ 中一个分割 P: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$. 记

$$M_i \overset{\text{def}}{=} \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} \{f(x)\}, \qquad m_i \overset{\text{def}}{=} \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} \{f(x)\},$$

再记 $\omega_i = M_i - m_i$, 称 ω_i 为函数 $f(x)$ 在第 i 个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的振幅, $i = 1, 2\cdots, n$. 分别称

$$U_P \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} M_i \triangle x_i, \qquad L_P \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} m_i \triangle x_i$$

为函数 $f(x)$ 关于分割 P 的 Darboux 上和与 Darboux 下和. (U=upper, L=lower)

Lemma

引理一: 对于任意 $[a,b]$ 上的有界函数 $f(x)$, $m \le f(x) \le M$, $\forall x \in [a,b]$, 以及对于区间 $[a,b]$ 的任意一个分割 P, 及其任意一个 Riemann 和 $\sigma(P,\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\triangle x_i$, 成立

$$m(b-a) \le L_P \le \sigma(P,\xi) \le U_P \le M(b-a).$$

Proof.

证明: 对于 $1 \le i \le n$, 显然有 $m \le m_i \le f(x_i^*) \le M_i \le M$, 于是 $m\triangle x_i \le m_i\triangle x_i \le f(x_i^*)\triangle x_i \le M_i\triangle x_i \le M\triangle x_i$. 关于 $i = 1, 2, \cdots, n$ 求和即得所要证明的不等式. 证毕. □

分割加密

Definition

定义: 设 $P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ 和 $P': a = x'_0 < x'_1 < x'_2 < \cdots < x'_m = b$ 为 $[a, b]$ 的两个分割. 若 $\{x_0, x_1, \cdots, x_n\} \subsetneq \{x'_0, x'_1, \cdots, x'_m\}$, 则称分割 P' 是分割 P 的一个加密.

换言之, 若分割 P' 是 P 的一个加密, 则 P' 可看作在分割 P 中添加若干个分点所得到的分割.

Darboux 上下和与分割加密的关系

Lemma

引理二：若分割 P' 是在分割 P 中添加 k 个新的分点而得，则

(i) $U_{P'} \leq U_P \leq U_{P'} + k\omega\|P\|$;

(ii) $L_P \leq L_{P'} \leq L_P + k\omega\|P\|$,

其中 $\omega = M - m$，称为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的振幅，M 和 m 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的上下确界，$\|P\| = \max\{\triangle x_i\}$，$\triangle x_i = x_i - x_{i-1}$.

粗略地说，随着分割 P 的加密，上和 U_P 不增，下和 L_P 不减.

引理二证明

证明: 只证 (i) 且 $k=1$ 情形. 设 $P'=P\cup\{x'\}$, $x'\in(x_{i-1},x_i)$. 为明确计不妨设 $i=1$, 即 $x'\in(x_0,x_1)$. 记

$$M_1'=\sup\{f(x),x\in[x_0,x']\},\quad M_1''=\sup\{f(x),x\in[x',x_1]\},$$

则 $M_1',M_1''\le M_1$, 其中 $M_1=\sup\{f(x),x\in[x_0,x_1]\}$. 于是

$$U_P-U_{P'}=\sum_{i=1}^{n}M_i\triangle x_i-\left(M_1'\triangle x_1'+M_1''\triangle x_1''+\sum_{i=2}^{n}M_i\triangle x_i\right)$$

$$=M_1\triangle x_1-M_1'\triangle x_1'-M_1''\triangle x_1''\ge M_1(\triangle x_1-\triangle x_1'-\triangle x_1'')=0,$$

其中 $\triangle x_1'=x_1'-x_0$, $\triangle x_1''=x_1-x_1'$, $\triangle x_1=x_1-x_0$.

证明，续

另一方面

$$U_P - U_{P'} = M_1\triangle x_1 - M_1'\triangle x_1' - M_1''\triangle x_1''$$

$$\le M_1\triangle x_1 - m_1\triangle x_1' - m_1\triangle x_1''$$

$$= (M_1 - m_1)\triangle x_1 = \omega_1\triangle x_1 \le \omega\|P\|.$$

这就证明了 $0 \le U_p - U_{P'} \le \omega\|P\|$. 当分割 P' 是在分割 P 中添加 k 个新的分点而得时，则 $0 \le U_p - U_{P'} \le k\omega\|P\|$. 引理得证.

任意一个 Darboux 下和 $\le$ 任意一个 Darboux 上和

Lemma

引理三: 设 P_1 和 P_2 为 $[a,b]$ 的任意两个分割, 则 $L_{P_1} \le U_{P_2}$.

Proof.

证明: 记 $P = P_1 \cup P_2$, 即 P 为分割 P_1 和 P_2 分点的合并, 则 P 既是 P_1 又是 P_2 的加密分割. 根据引理二可知

$$L_{P_1} \le L_P \le U_P \le U_{P_2}.$$

证毕. □

Darboux 上积分与 Darboux 下积分

设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界函数，即 $m \le f(x) \le M$, $\forall x \in [a,b]$，则对 $[a,b]$ 的任何分割 P, $m(b-a) \le L_P \le U_P \le M(b-a)$.

Definition

<u>定义</u>：分别称

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx \overset{\text{def}}{=} \inf\{U_P\} \quad \text{和} \quad \underline{\int_a^b} f(x)dx \overset{\text{def}}{=} \sup\{L_P\}$$

为有界函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的 Darboux 上积分和下积分.

显然对 $[a,b]$ 的任意分割 P,

$$L_P \le \underline{\int_a^b} f(x)dx \le \overline{\int_a^b} f(x)dx \le U_P.$$

Darboux 引理

Lemma

引理: 设 f 为 $[a,b]$ 上的有界函数, 则

$$\lim_{\|P\|\to 0} U_P = \overline{\int_a^b} f(x)dx, \qquad \lim_{\|P\|\to 0} L_P = \underline{\int_a^b} f(x)dx.$$

证明: 只证第一个等式. 第二个等式的证明类似. 要证第一个等式, 即要证对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对任意分割 P 满足 $\|P\| < \delta$, 成立

$$0 \le U_P - \overline{\int_a^b} f(x)dx < \varepsilon.$$

由 Darboux 上积分定义知, $\forall \varepsilon > 0$, 存在分割 P_0, 使得 $U_{P_0} < \overline{\int_a^b} f(x)dx + \varepsilon$.

设分割 P_0 有 ℓ 个内分点 (除去两个端点的分点)，则对任意分割 P，作加密分割 $P' = P \cup P_0$，即分割 P' 可看作在分割 P 中，再添加至多 ℓ 个新分点所得到的分割. 由加密分割的性质可知

$$U_{P'} \le U_P \le U_{P'} + \ell\omega\|P\| \quad \text{且} \quad U_{P'} \le U_{P_0}.$$

于是

$$0 \le U_P - \int_a^b f(x)dx \le U_{P'} + \ell\omega\|P\| - \int_a^b f(x)dx$$

$$\le U_{P_0} - \int_a^b f(x)dx + \ell\omega\|P\| < \varepsilon + \ell\omega\|P\| < 2\varepsilon,$$

其中只要分割 P 满足 $\|P\| < \frac{\varepsilon}{1+m\omega}$，则最后一个不等式成立. 这里 ω 表示 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的振幅，即 $\omega = M - m$, $m \le f(x) \le M$, $\forall x \in [a,b]$. 证毕.

Darboux 可积性定理

Theorem

定理: 设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的有界函数，则下述条件等价

(i) f 在 $[a,b]$ 上可积;

(ii) 对任意 $\varepsilon > 0$，存在分割 P，使得 $U_P - L_P < \varepsilon$;

(iii) $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$.

以下证 (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i).

(i) $\Rightarrow$ (ii): 设 f 在 $[a,b]$ 上可积. 记 $J = \int_a^b f(x)dx$. 根据可积定义知对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle x_i - J\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall P : \|P\| < \delta, \quad \forall \xi = \{\xi_i\}.$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{\varepsilon}{3} + J < \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle x_i < J + \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{\varepsilon}{3}+J<\sum_{i=1}^{n}\sup_{\xi_i\in[x_{i-1},x_i]}\{f(\xi_i)\}\triangle x_i\le J+\frac{\varepsilon}{3},$$

此即 $-\frac{\varepsilon}{3}+J<\sum_{i=1}^{n}M_i\triangle x_i\le J+\frac{\varepsilon}{3}$. 亦即 $|U_P-J|\le\varepsilon/3$. 同理我们有 $|L_P-J|\le\varepsilon/3$. 于是

$$0\le U_P-L_P=U_P-J-(L_P-J)\le|U_P-J|+|L_P-J|\le\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}<\varepsilon.$$

即条件(ii)成立.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): 假设条件 (ii) 成立, 即对任意 $\varepsilon>0$, 存在分割 P, 使得 $U_P-L_P<\varepsilon$, 则根据定义得

$$0\le\overline{\int_a^b}f(x)dx-\underline{\int_a^b}f(x)dx\le U_P-L_P<\varepsilon.$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性知 $\underline{\int_a^b}f(x)dx=\overline{\int_a^b}f(x)dx$, 即条件(iii) 成立.

(iii) $\Rightarrow$ (i): 假设条件 (iii) 成立，即 $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$，要证 f 可积. 记 Darboux 上积分与 Darboux 下积分的共同值为 J. 对任意分割 P，以及任意样点集 $\xi = \{\xi_i\}$，显然成立

$$L_P \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle x_i \le U_P. \quad (*)$$

由 Darboux 引理知当 $\|P\| \to 0$ 时，$U_P \to \overline{\int_a^b} f(x)dx = J$，且 $L_P \to \underline{\int_a^b} f(x)dx = J$. 于不等式 (*) 中关于 $\|P\| \to 0$ 取极限，并根据极限的两边夹法则即得

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle x_i = J.$$

即条件 (i) 成立. 定理得证. □

例: Dirichlet 函数 $D(x)$ 在任何闭区间 $[a,b]$ 上不可积, 其中

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$$

证明: 对 $[a,b]$ 的任意分割 $P: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$,

$$M_i=\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{D(x)\}=1,\quad m_i=\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{D(x)\}=0,$$

其中 $i=1,2,\cdots,n$. 于是 $U_P=\sum_{i=1}^n M_i\triangle x_i=\sum_{i=1}^n\triangle x_i=b-a$, L_P $=\sum_{i=1}^n m_i\triangle x_i=0$. 因此

$$\overline{\int_a^b}D(x)dx=\inf\{U_P\}=b-a,\quad \underline{\int_a^b}D(x)dx=\sup\{L_P\}=0.$$

故 $\overline{\int_a^b}D(x)dx\neq\underline{\int_a^b}D(x)dx$. 根据 Darboux 可积性定理知 Dirichlet 函数 $D(x)$ 在任意有界闭区间 $[a,b]$ 上不可积. 证毕.

Definition

定义: 区间 J 上的函数 f(x) 称为在 J 上一致连续 (uniformly continuous), 如果对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ (δ 仅与 ε 有关), 使得对 $\forall x, x' \in J$, 只要 $|x - x'| < \delta$, 就有 $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

注: 显然若函数 f(x) 在区间 J 上一致连续, 则 f(x) 在区间 J 上处处连续. 反之不然. 请看下例.

Example

例: 函数 $\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上非一致连续.

证: 反证. 假设 $\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上一致连续, 则于 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$, 存在 $\delta_0>0$, 使得对 $\forall x,x'\in(0,1)$, 只要 $|x-x'|<\delta_0$, 就有 $|\frac{1}{x}-\frac{1}{x'}|<\frac{1}{2}$. 取 $x_k=\frac{1}{k}$, 只要 k 充分大, 则 $|x_k-x_{k+1}|=\left|\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right|=\frac{1}{k(k+1)}<\frac{1}{k^2}<\delta_0$. 于是

$$\left|\frac{1}{x_k}-\frac{1}{x_{k+1}}\right|=|k-k-1|=1>\frac{1}{2}=\varepsilon_0.$$

这就得到一个矛盾. 证毕.

非一致连续性的充要条件

Lemma

引理: 设 $f(x)$ 为在区间 J 定义的函数，则 $f(x)$ 在 J 上非一致连续，当且仅当存在 $\varepsilon_0 > 0$，以及存在 $x_n, x_n' \in J$，使得

$$|x_n - x_n'| < \frac{1}{n}, \quad \text{但} \quad |f(x_n) - f(x_n')| \geq \varepsilon_0, \quad \forall n \geq 1.$$

证: 依定义 f 在区间 J 上一致连续 $\Longleftrightarrow$ 对任给 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得对 $\forall x, x' \in J$，只要 $|x - x'| < \delta$，就有 $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$. 因此 f 在区间 J 上非一致连续 $\Longleftrightarrow$ 存在 $\varepsilon_0 > 0$，对任给 $\delta > 0$，存在 $x_\delta, x_\delta' \in J$，满足 $|x_\delta - x_\delta'| < \delta$，使得 $|f(x_\delta) - f(x_\delta')| \geq \varepsilon_0$. 取 $\delta = \frac{1}{n}$，则存在 $x_n, x_n' \in J$，满足 $|x_n - x_n'| < \frac{1}{n}$，使得 $|f(x_n) - f(x_n')| \geq \varepsilon_0$. □

Theorem

定理: 有界闭区间上的连续函数必一致连续.

证明: 设函数 f 在有界闭区间 $[a,b]$ 上连续. 要证 f 在 $[a,b]$ 上一致连续. 反证. 若不然, 即 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上非一致连续. 故由引理知, 存在 $\varepsilon_0 > 0$, 以及 $x_n, x_n' \in [a,b]$, 使得 $|x_n - x_n'| < \frac{1}{n}$, 但 $|f(x_n) - f(x_n')| \geq \varepsilon_0$. 由于 $\{x_n\} \subset [a,b]$ 有界, 由 B-W 定理知序列 $\{x_n\}$ 有收敛子列 $\{x_{n_k}\}$. 设 $x_{n_k} \to x^*$, $k \to +\infty$. 再由 $f(x)$ 的连续性知 $f(x_{n_k}) \to f(x^*)$, $k \to +\infty$. 另一方面由 $|x_{n_k} - x_{n_k}'| < \frac{1}{n_k}$ 知 $x_{n_k}' \to x^*$, 故 $f(x_{n_k}') \to f(x^*)$, $k \to +\infty$. 于是, 当 $k \to +\infty$ 时,

$$0 < \varepsilon_0 \leq |f(x_{n_k}) - f(x_{n_k}')| \leq |f(x_{n_k}) - f(x^*)| + |f(x^*) - f(x_{n_k}')| \to 0.$$

矛盾. 矛盾说明函数 f 在 $[a,b]$ 上一致连续. 定理得证. $\square$

Theorem

定理: 若函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则 f 在 $[a,b]$ 上可积.

证: 由 Cantor 定理知 $f(x)$ 于 $[a,b]$ 上一致连续, 即 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 使得对 $\forall x,x'\in[a,b]$, 只要 $|x-x'|<\delta$, 就有 $|f(x)-f(x')|<\varepsilon$. 对区间 $[a,b]$ 的任意一个分割 $P: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 根据连续函数的最值性质知

$$M_i=\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{f(x)\}=\max_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{f(x)\}=f(\xi_i),\quad \xi_i\in[x_{i-1},x_i],$$

$$m_i=\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{f(x)\}=\min_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{f(x)\}=f(\eta_i),\quad \eta_i\in[x_{i-1},x_i],$$

于是对应分割 P 的 Darboux 上和与下和可表为

$$U_P=\sum_{i=1}^{n}M_i\triangle x_i=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\triangle x_i,\quad L_P=\sum_{i=1}^{n}m_i\triangle x_i=\sum_{i=1}^{n}f(\eta_i)\triangle x_i.$$

证明，续

当 $\|P\| < \delta$ 时，

$$0 \leq U_P - L_P \leq \sum_{i=1}^{n} \Big[f(\xi_i) - f(\eta_i) \Big] \triangle x_i < \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \triangle x_i = \varepsilon(b-a).$$

由 Darboux 可积性定理知 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积．定理得证． □

<u>例</u>: 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, $g(x)$ 在 $[m,M]$ 上连续且下凸, 这里 M 和 m 分别是 $f(x)$ 的一个上界和一个下界, 即 $m \le f(x) \le M$, $\forall x \in [0,1]$. 证明

$$g\left(\int_0^1 f(x)dx\right) \le \int_0^1 g(f(x))dx.$$

<u>证</u>: 由于 f, g 均连续, 故复合函数 $g(f(x))$ 也连续, 从而在 $[0,1]$ 上可积. 记 $x_i = \frac{i}{n}$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 由 f 的可积性知

$$\sum_{i=1}^n f(x_i)\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(x_i) \to \int_0^1 f(x)dx.$$

再由 g 的连续性和下凸性可得

$$g\left(\int_0^1 f(x)dx\right) = g\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(x_i)\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} g\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(x_i)\right) \le \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n g(f(x_i)) = \int_0^1 g(f(x))dx.$$

命题得证.

<u>定理</u>: 有界闭区间上的单调函数可积.

<u>证</u>: 设 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的单调函数. 不妨设 f 为单调增加. 对 $[a,b]$ 作分割 $P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 我们有

$$M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} \{f(x)\} = f(x_i), \quad m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} \{f(x)\} = f(x_{i-1})$$

$$\text{于是} \quad 0 \leq U_P - L_P = \sum_{i=1}^n M_i \triangle x_i - \sum_{i=1}^n m_i \triangle x_i$$

$$= \sum_{i=1}^n f(x_i)\triangle x_i - \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\triangle x_i = \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})]\triangle x_i$$

$$\leq \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})]\|P\| = [f(b) - f(a)]\|P\|.$$

若 $f(b) = f(a)$, 则 f 为常数函数, 可积. 设 $f(b) > f(a)$, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$, 使得当分割 P 满足 $\|P\| < \delta$ 时, $U_P - L_P < \varepsilon$. 由可积性定理知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积. 定理得证. □

零测集

Definition

定义: 设 $S \subset \mathbb{R}$ 为一实数集. 若对任意 $\varepsilon > 0$, 存在一列开区间 $J_k = (\alpha_k, \beta_k)$ (有限个或可数无穷个), 使得

$$S \subset \bigcup_{k \geq 1} J_k \quad 且 \quad \sum_{k \geq 1} |J_k| < \varepsilon,$$

则称数集 S 为零测集, 其中 $|J_k| = \beta_k - \alpha_k$.

注: 设 $\{a_k\}$ 为一数列, 称 $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ 或 $\sum_{k \geq 1} a_k$ 为无穷级数; 称 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ 该无穷级数的前 n 项和(部分和). 若数列 $\{S_n\}$ 收敛, 并记 $S = \lim_{n \to +\infty} S_n$, 则称无穷级数 $\sum_{k \geq 1} a_k$ 收敛, 其和为 S, 即 $\sum_{k \geq 1} a_k \overset{\text{def}}{=} \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$.

性质一：有限点集为零测集.

证明：设 $S=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}\subset\mathbb{R}$ 为一个有限实数点集. 对于 $\forall\varepsilon>0$, 作开区间 $J_k=(x_k-\delta,x_k+\delta)$, 其中 $\delta=\frac{\varepsilon}{2m+1}$, 则 $|J_k|=2\delta$. 于是

$$S\subset\bigcup_{k=1}^{m}J_k \quad 且 \quad \sum_{k=1}^{m}|J_k|=2m\delta=\frac{2m\varepsilon}{2m+1}<\varepsilon.$$

故点集 S 为零测集. 证毕.

性质二：零测集的任意子集也是零测集.

证明：结论显然. 证明略去.

性质三: 可数无穷点集为零测集.

证明: 设 $S=\{x_1,x_2,\cdots\}\subset\mathbb{R}$ 为一个可数无穷实数点集. 对于 $\forall\varepsilon>0$, 作开区间 $J_k=(x_k-\frac{\delta}{2^k},x_k+\frac{\delta}{2^k})$, 其中 $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$, 则 $|J_k|=\frac{\delta}{2^{k-1}}$. 于是

$$S\subset\bigcup_{k\geq1}J_k\quad\text{且}\quad\sum_{k\geq1}|J_k|=\sum_{k\geq1}\frac{\delta}{2^{k-1}}=\delta\sum_{k\geq0}\frac{1}{2^k}.$$

因等比级数 $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}=\frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}\to2$, 故级数 $\sum_{k\geq0}\frac{1}{2^k}=2$. 因此 $\sum_{k\geq1}|J_k|$ $=\delta\sum_{k\geq1}\frac{1}{2^k}=2\delta<\frac{2\varepsilon}{3}<\varepsilon$. 故点集 S 为零测集. 证毕.

性质四

<u>性质四</u>: 设 A 和 B 均为零测集, 则 $A \cup B$ 也是零测集.

<u>证明</u>: 由假设 A 和 B 均为零测集, 故存在两个至多可数的开区间 J_k 和 J_j', 使得

$$A \subset \bigcup_{k \geq 1} J_k \quad \text{且} \quad \sum_{k \geq 1} |J_k| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$B \subset \bigcup_{j \geq 1} J_j' \quad \text{且} \quad \sum_{j \geq 1} |J_j'| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是

$$A \cup B \subset \bigcup_{k \geq 1, j \geq 1} (J_k \cup J_j') \quad \text{且} \quad \sum_{k \geq 1} |J_k| + \sum_{j \geq 1} |J_j'| < \varepsilon.$$

故 $A \cup B$ 是零测集. 证毕.

Theorem

定理: 设 f 为区间 $[a,b]$ 上的有界函数，则 f 于 $[a,b]$ 可积 $\Longleftrightarrow$ f 在 $[a,b]$ 上的间断点集为零测集.

证明有点麻烦. 略去. 详见常庚哲史济怀《数学分析教程》(上册), 第三版, 第 271 页.

术语: 当函数 f 在 $[a,b]$ 上的间断点集为零测集，或等价地说，f 在 $[a,b]$ 上除去一个零测集外处处连续时，我们常说函数 f 在 $[a,b]$ 上几乎处处 (almost everywhere) 连续，并记作 f 连续 a.e. on $[a,b]$.

例一: 符号函数 $\text{sgn}(x)$ 在任何闭区间上可积.

例二: 取整函数 $[x]$ 在任何闭区间上可积.

例三: Dirichlet 函数 $D(x)$ 在任何闭区间 $[a,b]$ 上不可积. 因为函数 $D(x)$ 在 $[a,b]$ 上的间断点集为整个区间, 而非零测集. 故 $D(x)$ 在 $[a,b]$ 上不可积.

例四: 根据 Lebesgue 定理, 我们再次得到结论, 即闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数在 $[a,b]$ 上可积.

积分性质一: 积分区间可加性

Theorem

定理: 设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的有界函数, $c \in (a,b)$, 则

(i) f 在 $[a,b]$ 上可积 $\Longleftrightarrow$ f 在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上均可积;

(ii) 当 f 在 $[a,b]$ 上可积时,

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

证 (i): f 在 $[a,b]$ 上可积

$\Longleftrightarrow$ f 连续 a.e. on $[a,b]$

$\Longleftrightarrow$ f 连续 a.e. on $[a,c]$ 和 $[c,b]$

$\Longleftrightarrow$ f 在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上均可积.

证 (ii)：当 f 在 $[a,b]$ 上可积时，根据结论 (i) 知，f 在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上均可积. 取 $[a,c]$ 的一个分割 P_1，以及 $[c,b]$ 的一个分割 P_2，则 $P=P_1\cup P_2$ 为 $[a,b]$ 的一个分割. 于是函数 f 关于分割 P 的任意一个 Riemann 和可表为

$$\sum_i f(\xi_i)\triangle x_i=\sum_{i\in J_1} f(\xi_i)\triangle x_i+\sum_{i\in J_2} f(\xi_i)\triangle x_i,$$

其中 $J_1=\{i,[x_{i-1},x_i]\subset[a,c]\}$，$J_2=\{i,[x_{i-1},x_i]\subset[c,b]\}$. 因此上式右端的两个和式分别为 f 在区间 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上的 Riemann 和，分别关于分割 P_1 和 P_2. 显然 $\|P\|=\max\{\|P_1\|,\|P_2\|\}$. 因此在等式

$$\sum_i f(\xi_i)\triangle x_i=\sum_{i\in J_1} f(\xi_i)\triangle x_i+\sum_{i\in J_2} f(\xi_i)\triangle x_i$$

中，令 $\|P\|\to 0$ 取极限即得 $\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f$. 结论 (ii) 得证. 定理得证. $\square$

Theorem

定理：若 $f \in R[a,b]$，则其绝对值函数 $|f| \in R[a,b]$，且

$$\int_a^b f \leq \int_a^b |f|.$$

Proof.

证明：$f \in R[a,b]$

$\Rightarrow$ f 于 $[a,b]$ 上几乎处处连续

$\Rightarrow$ $|f|$ 于 $[a,b]$ 上几乎处处连续

$\Rightarrow$ $|f| \in R[a,b]$.

由不等式 $f(x) \leq |f(x)|$, $\forall x \in [a,b]$ 得 $\int_a^b f \leq \int_a^b |f|$. $\square$

Theorem

<u>定理</u>：设 $f, g \in R[a, b]$，则乘积函数 $fg \in R[a, b]$.

Proof.

<u>证明</u>：$f, g \in R[a, b]$

$\Rightarrow$ f 和 g 在 $[a, b]$ 上均几乎处处连续

$\Rightarrow$ 乘积 fg 在 $[a, b]$ 上几乎处处连续

$\Rightarrow$ 乘积 $fg \in R[a, b]$.

命题得证. $\square$

<u>注</u>：第二个蕴含关系 $\Rightarrow$ 的说明：记 C_f 和 D_f 为 f 的连续点集和间断点集，则 $C_f \cap C_g \subset C_{fg}$，从而 $D_f \cup D_g \supset D_{fg}$. 由于 D_f 和 D_g 均为零测集，故 D_{fg} 也为零测集.

Theorem

定理: 设 $f, g \in R[a,b]$, 则

$$\left(\int_a^b fg\right)^2 \leq \int_a^b f^2 \int_a^b g^2. \quad (*)$$

比较有限型或离散型 Cauchy-Schwarz 不等式:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right).$$

故不等式 (*) 可看作连续型 Cauchy-Schwarz 不等式.

证明

<u>证明大意</u>: 由乘积 fg 的可积性知

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\xi_i)\triangle x_i \to \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

另一方面根据离散型 Cauchy-Schwarz 不等式得

$$\left(\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\xi_i)\triangle x_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\sqrt{\triangle x_i}g(\xi_i)\sqrt{\triangle x_i}\right)^2$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{n}\left[f(\xi_i)\sqrt{\triangle x_i}\right]^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\left[g(\xi_i)\sqrt{\triangle x_i}\right]^2\right)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} f^2(\xi_i)\triangle x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} g^2(\xi_i)\triangle x_i\right) \to \int_a^b f^2\int_a^b g^2.$$

□

Theorem

<u>定理</u>: 设 $f, g \in R[a,b]$, 且 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号, 则

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx,$$

其中 $m \le \mu \le M$, $m = \inf_{[a,b]}\{f(x)\}$, $M = \sup_{[a,b]}\{f(x)\}$. 当 f 连续时, 存在 $\xi \in [a,b]$, 使得

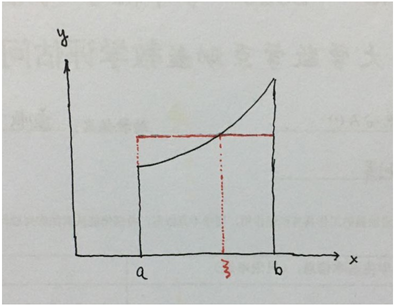
$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx.$$

几何意义

当 $g(x) \equiv 1$, 且 $f(x)$ 连续时, 积分中值定理有如下形式

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

上式的几何意义就是曲边四边形的面积, 等于某个矩形面积. 如图所示.



定理证明

证: 不失一般性设 $g(x) \geq 0, \forall x \in [a,b]$. 由 $m \leq f(x) \leq M$ 可得

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x), \quad \forall x \in [a,b].$$

于是

$$m\int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq M\int_a^b g. \quad (*)$$

如果 $\int_a^b g = 0$, 则必有 $\int_a^b fg = 0$. 于是所要证的不等式

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu\int_a^b g(x)dx$$

对任意 $\mu \in \mathbb{R}$ 成立. 设 $\int_a^b g > 0$, 则由式 (*) 得

$$m \leq \frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g} \leq M.$$

于是取 $\mu = \frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g}$，所要证的不等式

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx$$

成立．当 $f(x)$ 连续时，由连续函数最值性知，存在 $x_1, x_2 \in [a,b]$，使得

$$f(x_1) = \min_{x\in[a,b]}\{f(x)\} = \inf_{x\in[a,b]}\{f(x)\},$$

$$f(x_2) = \max_{x\in[a,b]}\{f(x)\} = \sup_{x\in[a,b]}\{f(x)\}.$$

再根据介值定理知存在 ξ，介于 x_1, x_2 之间，使得 $f(\xi) = \mu$．因此不等式

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

成立．命题得证． □

Nov 19 作业，共九大题

习题一：课本第135页习题5.1题1：利用定积分的几何意义求下列积分值：

$$(1)\quad \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx; \qquad (2)\quad \int_{-\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1-x^2}dx;$$

$$(3)\quad \int_{-1}^{1}(3+4x)dx; \qquad (4)\quad \int_{0}^{1}\left[\sqrt{2x-x^2}-x\right]dx.$$

习题二：课本第140-141页习题5.2题5：比较下列积分的大小

$$(1)\quad \int_0^1 e^{-x}dx \quad 和 \quad \int_0^1 e^{-x^2}dx; \qquad (2)\quad \int_0^1 \frac{\sin x}{2+x}dx \quad 和 \quad \int_0^1 \frac{\sin x}{2+x^2}dx;$$

$$(3)\quad \int_0^1 xdx \quad 和 \quad \int_0^1 x^2dx; \qquad (4)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} xdx \quad 和 \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin xdx.$$

习题三：课本第140-141页习题5.2题6：证明下列不等式

$$(1)\quad \frac{1}{2} \le \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \le \frac{\pi}{4};\qquad (2)\quad \frac{2}{5} \le \int_1^2 \frac{x}{1+x^2} dx \le \frac{1}{2};$$

$$(3)\quad \int_0^{2\pi} |a\cos x + b\sin x| dx \le 2\pi\sqrt{a^2+b^2}.$$

习题四：课本第140-141页习题5.2题7：证明下列极限

$$(1)\quad \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = 0;$$

$$(2)\quad \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n} = 1;$$

$$(3)\quad \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = 0.$$

习题五：课本第140-141页习题5.2题9：设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续且 $f(x)>0,\ \forall x\in[a,b]$. 证明

$$\left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx\right)\geq (b-a)^2.$$

习题六：课本第140-141页习题5.2题10：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调增，且 $f''(x)>0,\ \forall x\in[a,b]$. 证明

$$(b-a)f(a)<\int_a^b f(x)dx<(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

习题七：课本第146-147页习题5.3题12：用Newton-Leibniz 公式求下列积分

(1) $\int_0^2|1-x|dx$;

(2) $\int_{-2}^3|x^2-2x-3|dx$;

(3) $\int_0^{\frac{3\pi}{4}} \sqrt{1+\cos(2x)}dx$;

(4) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1-\cos^2 x}dx$;

(5) $\int_0^{\pi} \sqrt{\sin x - \sin^3 x}dx$;

(6) $\int_1^8 \frac{\ln x}{x}dx$.

习题八：课本第146-147页习题5.3题13：利用Riemann和求下列极限

(1) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{n\pi}{n}\right);$$

(2) $$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}\right);$$

(3) $$\lim_{n\to+\infty} n^{\frac{-3}{2}}\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \cdots + \sqrt{n+n}\right).$$

习题九：课本第147页习题5.3题15：证明

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin x}dx \begin{cases} < \frac{\pi}{2R}(1-e^{-R}), & R > 0, \\ > \frac{\pi}{2R}(1-e^{-R}), & R < 0. \end{cases}$$