习题课材料（六）

注 1：本次习题课包含内容：正交性，特征值，特征向量

注 2：带 ♡ 号的习题有一定的难度、比较耗时, 请量力为之.

注 3：本节考虑的矩阵均为实矩阵.

习题 1. 对向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

进行 *Gram-Schmidt* 正交化.

习题 2. 求矩阵 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ 的 QR 分解.

习题 3. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的标准正交基. 证明：$\beta_1 = \frac{1}{3}(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3), \beta_2 = \frac{1}{3}(2\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3), \beta_3 = \frac{1}{3}(\alpha_1 - 2\alpha_2 - 2\alpha_3)$ 也是 $\mathbb{R}^3$ 的标准正交基。

习题 4. 证明，分块上三角矩阵 $X = \begin{bmatrix} c & \boldsymbol{\alpha}^T \\ \mathbf{0} & Q \end{bmatrix}$ 是正交矩阵时，其中 c 为一个常数，必有 $c = \pm 1$, $\alpha = 0$, Q 是正交矩阵。

习题 5. 1. 设 A 是正交矩阵，$\det(A) < 0$。证明 $I_n + A$ 不可逆.

2. 设 A 为奇数阶正交矩阵，$\det(A) > 0$。证明 $I_n - A$ 不可逆.

习题 6. 设 n 阶实方阵 A 满足 $A = -A^T$。

1. 证明 $I_n + A$, $I_n - A$ 可逆.

2. 证明 $(I_n - A)(I_n + A)^{-1}$ 是正交方阵。

习题 7 (♡). 设可逆矩阵 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 满足：对任意的 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, 有 $\frac{(A\boldsymbol{x})\cdot(A\boldsymbol{y})}{\|A\boldsymbol{x}\|\|A\boldsymbol{y}\|} = \frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|}$，称为 A 是保角变换。证明 A 是正交矩阵的常数倍。

习题 8. 判断下列结论是否正确，并说明理由：

1. 设 A 是 n 阶方阵，若 $A^m = \mathbf{0}$, 则 A 的特征值只能是 0.

2. 设 A 是 n 阶实方阵，若 $A^2 = A$，则 A 的特征值只能是 1 或 0.

3. 设 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 是 n 阶方阵 A 的属于不同特征值的特征向量，则必有 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y} = 0$.

4. 设 A 是 n 阶方阵，λ 是 A 的一个特征值，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 是 $(\lambda I - A)\boldsymbol{x} = 0$ 的基础解系，则 A 的属于特征值 λ 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{x} + k_2\boldsymbol{y}$, 其中 k_1, k_2 是两个任意常数.

5. 设 A 是 3 阶方阵, A 的特征值为 $0, 0, 1$, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ 是 $A\boldsymbol{x} = 0$ 的基础解系, $\boldsymbol{x}_3$ 是 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ 的一个非零解，则 A 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2 + k_3\boldsymbol{x}_3$, 其中 k_1, k_2, k_3 是不全为零的任意常数.

6. 设 $\boldsymbol{x}$ 是 n 阶方阵 A 的特征向量，P 是 n 阶可逆方阵，则 $P^{-1}\boldsymbol{x}$ 是 $P^{-1}AP$ 的特征向量.

7. 设 $\boldsymbol{x}$ 是 n 阶方阵 A 的特征向量，若 A 可逆，则 $A^{-1}\boldsymbol{x}$ 是 A^{-1} 的特征向量.

8. 设 A 是 n 阶方阵，若 $A^2 + A + I = 0$, 则 A 没有实的特征值.

9. 若 A, B 的特征值分别为 λ, μ，则

   (a) A^T 与 A 有相同的特征值与特征向量；

   (b) $A + A^T$ 及 AA^T 的特征值分别为 2λ 及 λ^2；

   (c) $A + B$ 及 AB 的特征值分别为 $\lambda + \mu$ 及 $\lambda\mu$；

   (d) 以上结论都不正确.

习题 9. 设 $A = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix}$，存在正交矩阵 Q 使得 $Q^{\mathrm{T}}AQ = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

习题 10. 设 $A = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 是秩 1 矩阵，其中 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 是 n 维非零列向量，求 A 的特征值和特征向量.