习题课材料（七）

注 1：本次习题课包含内容：对角化、二次型、奇异值分解、线性空间等

注 2：带 ♡ 号的习题有一定的难度、比较耗时, 请量力为之.

注 3：本节考虑的矩阵均为实矩阵.

习题 1. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\a&b&c\\d&e&f\end{bmatrix}$, 且 $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$ 是 A 的特征向量, 求 a,b,c,d,e,f.

习题 2. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&x&1\\x&1&y\\1&y&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0&&\\&1&\\&&2\end{bmatrix}$. 当 x 和 y 满足什么条件时, A 与 B 相似?

习题 3 (♡). 设 $B_1,B_2,\cdots,B_k$ 分别是 $n_1,n_2,\cdots,n_k$ 阶方阵, $B=\begin{bmatrix}B_1&&&\\&B_2&&\\&&\ddots&\\&&&B_k\end{bmatrix}$ 是分块对角矩阵. 证明: B 可对角化当且仅当 $B_1,B_2,\cdots,B_k$ 均可对角化.

习题 4 (♡). 设 A,B 都是可对角化的 n 阶方阵, 证明: $AB=BA$ 当且仅当它们有 n 个公共的线性无关的特征向量.

习题 5. 判断正误, 正确则简述其理由, 错误请举出反例.

1. 对称矩阵可以相似对角化。
2. 设 A 为实对称方阵, 则 A 分别相抵、相似、相合于同一个对角阵.
3. 只有特殊的二次型才可以通过配方法化成标准形.
4. 设实二次型经过初等变换法化成标准形, 则标准形中的系数就是原二次型的矩阵的特征值.
5. 可逆线性替换不改变二次型的秩.
6. 可逆线性替换可能改变实二次型的正惯性指数和负惯性指数.
7. 两个实对称矩阵相似当且仅当它们相合.
8. 实对称矩阵 A 负定当且仅当 A 的顺序主子式都小于零.

9. 设 A 为 n 阶可逆矩阵，则 A 可以相似对角化当且仅当 A^{-1} 可以相似对角化.

10. 若 $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$，则 P 的列向量都是 A 的特征向量.

11. 若 n 阶方阵 A 与 B 有共同的特征值及都有 n 个线性无关的特征向量，则

A. A 和 B 相似　　*B.* $A = B$

C. $|\lambda I_n - A| = |\lambda I_n - B|$　　*D.* $|A - B| = 0$.

12. 设 A, B 为 n 阶实对称矩阵，则 A, B 相似当且仅当 A, B 有相同的特征多项式.

习题 6. *1.* 求实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_3$ 的规范型，其正惯性指数为多少？写出线性替换矩阵.

2. 设三元二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + ax_3^2 - x_2x_3$ 的秩为 2，

(a) 求参数 a

(b) 求正交矩阵 Q，作正交替换 $\boldsymbol{x} = Q\boldsymbol{y}$，化二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 为标准形.

习题 7. 指出 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3 = 1$ 表示的二次曲面.

习题 8. 设 A 为 n 阶正定矩阵，B 是 $n \times m$ 实矩阵.

1. 若 A 正定，证明：$B^{\mathrm{T}}AB$ 的秩等于 B 的秩.

2. 证明：$B^{\mathrm{T}}AB$ 正定的充分必要条件时 $\mathrm{rank}(B) = m$.

习题 9 ($\heartsuit$)**.** 设 A 是 n 阶非零实对称矩阵，其特征值是 $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n$.

1. 证明：对任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$，均有

$$\lambda_1 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x} \le \lambda_n \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}.$$

2. 证明：存在一个正常数 c，使得对任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$，都有 $|\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}| \le c\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$，且存在非零向量 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ 使得 $|\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}_0| = c\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_0$.

3. 证明：$\lambda_1 \le a_{11} \le \lambda_n$.

习题 10. 求矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 的奇异值分解.

习题 11 ($\heartsuit$)**.** 对 $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}), \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$，定义：

- $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}A)}$，其中 $\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}A)$ 为半正定矩阵 $A^{\mathrm{T}}A$ 的最大特征值.
- $\|A\|_F = \sqrt{\mathrm{trace}(A^{\mathrm{T}}A)}$.
- $\|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}$

设 $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}), B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$ 以及 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$，证明：

1. $\|A\|_2 \leq \|A\|_F$
2. $\|A\boldsymbol{x}\|_2 \leq \|A\|_2 \|\boldsymbol{x}\|_2$
3. $\|AB\|_F \leq \|A\|_2 \|B\|_F$.

习题 12. 判断正误，正确则简要说明其理由，错误则给出反例.

1. 所有满足 $A^2 = A$ 的二阶实方阵的全体是 $M_2(\mathbb{R})$ 的子空间.
2. $\mathbb{R}^3$ 中所有与向量 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ 平行的向量的全体，构成 $\mathbb{R}^3$ 的一个线性子空间.
3. 全体复数构成的集合 $\mathbb{C}$ 是实数域上的 2 维线性空间，$1, \mathrm{i}$ 是 $\mathbb{C}$ 的一组基，$1, \mathrm{i}$ 到 $\mathrm{i}, 1$ 的过度矩阵是 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

习题 13. 设 A 是 n 阶方阵，$\mathrm{Com}(A)$ 是与 A 乘法可交换的全体 n 阶方阵集合.

1. 证明 $\mathrm{Com}(A)$ 是 M_n 的一个线性子空间.
2. 当 $A = I$ 时，求 $C(A)$ 及它的维数和基.
3. 当 $A = \mathrm{diag}(1, 2, \cdots, n)$ 时，求 $\mathrm{Com}(A)$ 及它的维数和基.
4. 当 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ 时，求 $\mathrm{Com}(A)$ 及它的维数和基.