本次习题课有两个内容
一. 关于不定积分的计算
二. 关于定积分的计算(续)

一. 关于不定积分的计算

几点说明 1) 教科书中关于不定积分的例题和习题都是可以 "积"出来的, 即它们的原函数可以用我们熟悉的初等函数表示, 或等价地说, 原函数有有限表示. 但是也有许多函数, 如

$$\frac{\sin x}{x}, \quad e^{x^2}, \quad \frac{1}{\ln x}, \quad \sin(x^2)$$

等, 它们都有原函数(因为它们都连续), 但可以证明它们的不定积分是积不出来. 大家心里肯定想问, 为什么积不出来? 进一步还会问, 什么样的函数能积? 什么样的函数不能积? 这些其实是非常困难的问题, 不是三言两语说得清楚的. 正因为困难, 一般教课书都对此保持沉默. 我这里给大家推荐一篇相关的论文(可读性不错): E.A. Maschisoto and G. Zakeri, An invitation to integration in finite terms, College Mathematics Journal, Vol. 25, No. 4, pp. 295-308, 1994. 我已经在课程群里发送了这篇文章. 同学们阅读这篇文章应该没有太大困难.

2) 两种基本计算方法, 即换元法和分部积分法, 应熟练掌握.

3) 有理函数以及有理三角函数类的不定积分, 理论上可以积得出来的. 但实际计算涉及因式分解(高次多项式分解因式通常很困难)和确定待定系数. 当分子分母的次数较高时, 通常计算量很大. 因此除了简单的情形之外, 应避免直接计算有理函数的不定积分, 转而尝试其他方式. 本次讨论题中有些例子表明, 如何避免直接计算有理函数的不定积分.

4) 计算结果通常有不同的表达式(有时看上去差别很大). 但它们仅相差一个常数.

5) 对计算结果进行求导, 所得结果应与被积函数相同. 由此可以验证你的计算是否正确. 这应该养成习惯.

6) 熟练掌握不定积分的方法和技术, 唯一的途径是多练习, 再加上多思考和多总结. 背诵若干条规则, 而不实际做习题, 如同记住游泳技术要领而不下水游泳一样, 于事无补. 实际上, 多作练习题是学好任何一门数学课的必要条件. 只不过这件事情对于学习不定积分而言, 显得特别突出.
7) 计算不定积分也遵循一般解题方法. 即将复杂的不定积分化为较简单的或已知的计算模式, 如基本积分公式, 或是凑微分的形式. 而分部积分通常是这种化简得有力工具.

I. 补充两个三角函数不定积分的基本公式

题 1. 证明 $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln|\tan\frac{x}{2}| + C$.

证:
$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{dx}{2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} = \int \frac{d\tan\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}} = \ln|\tan\frac{x}{2}| + C$$
另证.
$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x dx}{\sin^2 x} = -\int \frac{d\cos x}{1-\cos^2 x}$$
$$= -\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-\cos x} + \frac{1}{1+\cos x}\right) d\cos x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + C$$
注意两种解法所得的结果形式上不同.

题 2. 证明 $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln|\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})| + C$.

证:
$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{d(t-\frac{\pi}{2})}{\cos(t-\frac{\pi}{2})} = \int \frac{dt}{\sin t} = \ln|\tan(t/2)| + C = \ln|\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})| + C$$

II. 常规方法与非常规方法之比较.

题 3. 计算不定积分
$$\int \sqrt{\frac{2-3x}{2+3x}} dx.$$

解: (i) 常规方式. 为去根号作变换

$$t^2=\frac{2-3x}{2+3x}\quad \text{或}\quad x=\frac{2(1-t^2)}{3(1+t^2)}=\frac{2}{3}\left(-1+\frac{2}{1+t^2}\right)$$

于是 $dx=\frac{-8tdt}{3(1+t^2)^2}$,

$$\int\sqrt{\frac{2-3x}{2+3x}}dx=\int\frac{-8t^2dt}{(1+t^2)^2}=\frac{-8}{3}\left(\int\frac{dt}{1+t^2}-\int\frac{dt}{(1+t^2)^2}\right)=\frac{8}{3}(I_2-I_1),$$

其中

$$I_n=\int\frac{dt}{(1+t^2)^n},\quad n\geq 1.$$

回忆关于积分 I_n 的递推关系式

$$I_1=\arctan t,\quad I_{n+1}=\frac{1}{2n}\left(\frac{t}{(1+t^2)^n}+(2n-1)I_n\right),\quad n\geq 1.$$

可知

$$I_2=\frac{1}{2}\left(\frac{t}{1+t^2}+I_1\right)$$

于是

$$\int\sqrt{\frac{2-3x}{2+3x}}dx=\frac{8}{3}(I_2-I_1)=\frac{4}{3}\left(\frac{t}{1+t^2}-I_1\right)=\frac{4}{3}\left(\frac{t}{1+t^2}-\arctan t\right).$$

回代

$$\frac{t}{1+t^2}=\frac{\sqrt{\frac{2-3x}{2+3x}}}{1+\frac{2-3x}{2+3x}}=\frac{1}{4}\sqrt{(2+3x)(2-3x)}=\frac{1}{4}\sqrt{4-9x^2}.$$

于是

$$\begin{aligned}\int\sqrt{\frac{2-3x}{2+3x}}dx&=\frac{4}{3}\left(\frac{\sqrt{4-9x^2}}{4}-\arctan\sqrt{\frac{2-3x}{2+3x}}\right)+C\\&=\frac{1}{3}\sqrt{4-9x^2}-\frac{4}{3}\arctan\sqrt{\frac{2-3x}{2+3x}}+C.\end{aligned}$$

(ii) 非常规方法. 关于分子有理化.

解: 非常规方法. 对分子有理化, 并改写被积函数和积分得

$$\int\sqrt{\frac{2-3x}{2+3x}}=\int\frac{(2-3x)dx}{\sqrt{4-9x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{1-\frac{9x^2}{4}}}+\frac{1}{6}\int\frac{d(4-9x^2)}{\sqrt{4-9x^2}}$$

$$= \frac{2}{3}\arcsin\frac{3x}{2} + \frac{1}{3}\sqrt{4-9x^2} + C.$$

显然非常规方法简单些. 解答完毕.

III. 计算不定积分杂题

题 4. (递推公式) 求不定积分

$$I_n = \int \frac{dx}{\sin^n x}$$

的递推公式, 其中 n 为自然数.

解: 根据利用分部积分, 对任意自然数 n 我们有

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{\sin x dx}{\sin^{n+1} x} = -\int \frac{d\cos x}{\sin^{n+1} x} = -\frac{\cos x}{\sin^{n+1} x} + \int \cos x d\left(\frac{1}{\sin^{n+1} x}\right) \\ &= -\frac{\cos x}{\sin^{n+1} x} - (n+1)\int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^{n+2} x} = -\frac{\cos x}{\sin^{n+1} x} - (n+1)\int \frac{(1-\sin^2 x)dx}{\sin^{n+2} x} \\ &= -\frac{\cos x}{\sin^{n+1} x} - (n+1)(I_{n+2} - I_n). \end{aligned}$$

稍加整理得到

$$I_{n+2} = -\frac{\cos x}{(n+1)\sin^{n+1} x} + \frac{n}{n+1} I_n, \quad \forall n \geq 0.$$

此外

$$I_0 = \int dx = x + C, \quad I_1 = \int \frac{dx}{\sin x} = \frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x} + C.$$

解答完毕.

题 5. 用配对方法求不定积分

$$I = \int \frac{\cos x dx}{\cos x + \sin x}.$$

提示: 同时考虑积分 $J = \int \frac{\sin x dx}{\cos x + \sin x}$.

解: 可用万能代换将积分化为有理函数的积分. 这虽可行, 但不是最佳选择. 因为有理函数的不定积分一般不易, 应尽量避免. 为此我们同时考虑另一个相关的积分

$$J = \int \frac{\sin x dx}{\cos x + \sin x}.$$

显然
$$I+J=\int dx=x+C,$$
并且
$$I-J=\int\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}dx=\int\frac{d(\cos x+\sin x)}{\cos x+\sin x}=\ln|\cos x+\sin x|+C.$$
解方程组
$$\begin{cases} I+J=x \\ I-J=\ln|\cos x+\sin x| \end{cases}$$
得
$$I=\frac{1}{2}(x+\ln|\cos x+\sin x|),\quad J=\frac{1}{2}(x-\ln|\cos x+\sin x|).$$
故所求不定积分为
$$I=\frac{1}{2}(x+\ln|\cos x+\sin x|)+C.$$
解答完毕.

注: 显然上述配对方法可用来计算积分
$$\int\frac{\cos x dx}{a\cos x+b\sin x},$$
其中 a 和 b 为常数, 不同时为零.

题 6. 用配对方法求不定积分 $I=\int\cos^4 xdx$ 和 $J=\int\sin^4 xdx$.

解: 用配对方法求解. 考虑积分
$$I+J=\int(\cos^4 x+\sin^4 x)dx \quad 和 \quad I-J=\int(\cos^4 x-\sin^4 x)dx.$$
注意到
$$\int(\cos^4 x+\sin^4 x)dx=\int(\cos^2 x+\sin^2 x)^2dx-2\int\sin^2 x\cos^2 xdx$$
$$=x-\frac{1}{2}\int\sin^2(2x)dx=x-\frac{1}{4}\int(1-\cos 4x)dx=\frac{3x}{4}+\frac{1}{16}\sin 4x+C_1,$$

以及

$$\int(\cos^4 x-\sin^4 x)dx=\int(\cos^2-\sin^2 x)(\cos^2+\sin^2 x)dx$$
$$=\int\cos(2x)dx=\frac{1}{2}\sin 2x+C_2.$$

于是解方程组

$$\begin{cases} I+J=\frac{3x}{4}+\frac{1}{16}\sin 4x, \\ I-J=\frac{1}{2}\sin 2x \end{cases}$$

得

$$I=\int\cos^4 x dx=\frac{3x}{8}+\frac{1}{8}\sin 2x+\frac{1}{32}\cos 4x+C_1,$$
$$J=\int\sin^4 x dx=\frac{3x}{8}-\frac{1}{8}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C_2.$$

解答完毕.

<u>另解</u>: 将被积函数 $\cos^4 x$ 和 $\sin^4 x$ 均可化为函数 $1, \cos 2x, \cos 4x$ 的线性组合. 从而求得积分.

题 7. 计算 $\int\frac{dx}{1+x^4}$.

<u>解</u>: 注意分母 $1+x^4$ 可以分解为 $1+x^4=(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$. 于是我们有如下形式的分式分解

$$\frac{1}{1+x^4}=\frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1},$$

其中 A,B,C,D 为待定系数. 上式两边同乘以 $(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$ 得

$$1=(Ax+B)(x^2-\sqrt{2}x+1)+(Cx+D)(x^2+\sqrt{2}x+1).$$

展开右边得

$$1=(A+C)x^3+(B+D-\sqrt{2}A+\sqrt{2}C)x^2+(A-\sqrt{2}B+C+\sqrt{2}D)x+B+D.$$

比较系数得

$$
\begin{cases}
A+C &= 0 \\
B+D+\sqrt{2}(C-A) &= 0 \\
A+C+\sqrt{2}(D-B) &= 0 \\
B+D &= 1.
\end{cases}
$$

易解得 $A=\frac{1}{2\sqrt{2}}, C=-\frac{1}{2\sqrt{2}}, B=D=\frac{1}{2}$. 于是我们有如下分式分解

$$\frac{1}{1+x^4}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}-\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right).$$

因此

$$
\begin{aligned}
\int\frac{dx}{1+x^4} &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int\left(\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}-\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)dx \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\int\frac{\frac{1}{2}d(x^2+\sqrt{2}x+1)}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\int\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}dx}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right) \\
&\quad -\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\int\frac{\frac{1}{2}d(x^2-\sqrt{2}x+1)}{x^2-\sqrt{2}x+1}-\int\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}dx}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right) \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2-\sqrt{2}x+1}.
\end{aligned}
$$

上式后面两个不定积分可如下简单积出来

$$\int\frac{dx}{x^2+\sqrt{2}x+1}=\int\frac{d(x+\frac{\sqrt{2}}{2})}{(x+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}}=\sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}x+1)$$

$$\int\frac{dx}{x^2-\sqrt{2}x+1}=\int\frac{d(x-\frac{\sqrt{2}}{2})}{(x-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}}=\sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}x-1)$$

因此

$$\int\frac{dx}{1+x^4}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{\sqrt{2}}{4}\Big(\arctan(\sqrt{2}x+1)+\arctan(\sqrt{2}x-1)\Big)+C.$$

<u>另解</u>: 先将 $\frac{1}{1+x^4}$ 写作

$$\frac{1}{1+x^4}=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2+1}{1+x^4}-\frac{x^2-1}{1+x^4}\right).$$

对于 $x\neq 0$,

$$\frac{1}{1+x^4}=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2+1}{1+x^4}-\frac{x^2-1}{1+x^4}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}-\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{(x-\frac{1}{x})'}{(x-\frac{1}{x})^2+2}-\frac{(x+\frac{1}{x})'}{(x+\frac{1}{x})^2-2}\right).$$

记过度变量 $u=x+\frac{1}{x}$, 则

$$\int\frac{1}{1+x^4}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2}-\frac{1}{2}\int\frac{d(x+\frac{1}{x})}{(x+\frac{1}{x})^2-2}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}\right)-\frac{1}{4\sqrt{2}}\int\left(\frac{1}{u-\sqrt{2}}-\frac{1}{u+\sqrt{2}}\right)du$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}\right)-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{u-\sqrt{2}}{u+\sqrt{2}}+C$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}\right)-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+1-\sqrt{2}x}{x^2+1+\sqrt{2}x}+C.$$

解答完毕.

题 8. (循环解法) 计算 $\int\cos(\ln x)dx$.

提示: 对积分进行两次分部积分.

解: 对积分做两次分部积分得

$$\int\cos(\ln x)dx=x\cos(\ln x)+\int\sin(\ln x)\frac{1}{x}xdx=x\cos(\ln x)+\int\sin(\ln x)dx$$

$$=x\cos(\ln x)+x\sin(\ln x)-\int\cos(\ln x)\frac{1}{x}xdx=x\cos(\ln x)+x\sin(\ln x)-\int\cos(\ln x)dx.$$

于是我们得到

$$\int\cos(\ln x)dx=\frac{1}{2}\Big[x\cos(\ln x)+x\sin(\ln x)\Big]+C.$$

解答完毕.

二. 定积分计算(续)

题 9. 计算定积分 $\int_0^6 x^2[x]dx$, 其中 $[\cdot]$ 代表取整函数.

<u>解</u>: 根据取整函数 $[\cdot]$ 的定义, 以及积分的区间可加性, 我们有

$$\int_0^6 x^2[x]dx = \int_0^1 x^2\cdot 0dx + \int_1^2 x^2\cdot 1dx + \int_2^3 x^2\cdot 2dx + \int_3^4 x^2\cdot 3dx + \int_4^5 x^2\cdot 4dx + \int_5^6 x^2\cdot 5dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\bigg|_1^2 + \frac{2x^3}{3}\bigg|_2^3 + \frac{3x^3}{3}\bigg|_3^4 + \frac{4x^3}{3}\bigg|_4^5 + \frac{5x^3}{3}\bigg|_5^6 = \frac{1}{3}\cdot 855 = 285.$$

解答完毕.

题 10. 计算定积分 $\int_0^\pi \sqrt{1-\sin x}dx$.

<u>解</u>: 注意到

$$1-\sin x = \cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2} - 2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} = \left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)^2,$$

故

$$\int_0^\pi \sqrt{1-\sin x}dx = \int_0^\pi \left|\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right| dx.$$

若将积分区间分成如下两个部分, 则可去掉绝对值符号

$$\int_0^\pi \left|\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right) dx$$

$$= 2\sin\frac{x}{2}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\cos\frac{x}{2}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\cos\frac{x}{2}\bigg|_{\frac{\pi}{2}}^\pi - 2\sin\frac{x}{2}\bigg|_{\frac{\pi}{2}}^\pi$$

$$= 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 2 + 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 2 + 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2} - 4.$$

解答完毕.

题 11. 计算 $I_n = \int_0^1 x^a \ln^n x dx$, 其中 $a > 0$, n 为正整数.

解: 注意被积函数 $x^a \ln^n x$ 是区间 $[0,1]$ 上的连续函数. 这是因为

$$\lim_{x\to 0^+} x^a \ln^n x = 0.$$

利用分部积分得

$$I_n = \frac{1}{1+a}\int_0^1 \ln^n x dx^{a+1} = \frac{1}{1+a}\left(x^{1+a}\ln^n x\Big|_0^1 - n\int_0^1 x^{1+a}(\ln^{n-1} x)\frac{1}{x}dx\right)$$

$$= -\frac{n}{1+a}\int_0^1 x^a \ln^{n-1} x dx = -\frac{n}{1+a}I_{n-1}.$$

由上述递推关系式得

$$I_n = (-1)^n\frac{n!}{(1+a)^n}I_0 = (-1)^n\frac{n!}{(1+a)^n}\int_0^1 x^a dx = \frac{(-1)^n n!}{(1+a)^{n+1}}.$$

解答完毕.

题 12. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,\pi]$ 上连续. 证明

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^\pi f(x)|\sin nx|dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)dx.$$

<u>证明</u>: 记

$$I_n = \int_0^\pi f(x)|\sin nx|dx.$$

根据积分区间的可加性, 我们可以将区间 $[0,\pi]$ 上积分等分成 n 段子区间上的积分之和

$$I_n = \sum_{k=1}^n \int_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k}{\pi}} f(x)|\sin nx|dx$$

应用积分中值定理可知存在 $\xi_k \in [\frac{(k-1)\pi}{n}, \frac{k\pi}{n}]$, 使得

$$\int_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k}{\pi}} f(x)|\sin nx|dx = f(\xi_k)\int_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k}{\pi}} |\sin nx|dx.$$

再注意到

$$\int_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}} |\sin nx|dx = \frac{1}{n}\int_0^\pi \sin x dx = \frac{2}{n},$$

我们就得到

$$I_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\frac{2}{n} = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\frac{\pi}{n}.$$

注意上式右端可以看作函数 $f(x)$ 在区间 $[0,\pi]$ 上均匀分割 n 等分的 Riemann 和. 由于 $f(x)$ 的可积性(因为它连续)可知

$$I_n = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\frac{\pi}{n} \to \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx, \quad n \to +\infty.$$

结论得证. 证毕.

题 13. (课本第 172 页习题 5.6 第 13 题) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导, 在 $(0,1)$ 上可导, 且 $\int_0^1 f(x)dx = 0$. 证明
(1) 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $\int_0^{\xi} f(x)dx + \xi f(\xi) = 0$.
(2) 存在 $\eta \in (0,\xi)$, 使得 $2f(\eta) + \eta f'(\eta) = 0$.

证: 考虑函数 $F(x) = x\int_0^x f(t)dt$. 显然 $F(0) = 0$, $F(1) = \int_0^1 f(x)dx = 0$. 根据 Rolle 定理知存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $F'(\xi) = 0$, 即 $\int_0^{\xi} f(x)dx + \xi f(\xi) = 0$. 结论(1)得证.
考虑函数 $G(x) = \int_0^x f(t)dt + xf(x)$. 显然 $G(0) = 0$, $G(\xi) = 0$. 再次利用 Rolle 定理知存在 $\eta \in (0,\eta)$, 使得 $G'(\eta) = 0$, 即 $2f(\eta) + \eta f'(\eta) = 0$. 结论(2)得证. 证毕.

题 14. (课本第 172 页习题 5.6 第 14 题) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导, 且 $2\int_0^{1/2} xf(x)dx = f(1)$. 证明存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$.

证明: 对等式 $2\int_0^{1/2} xf(x)dx = f(1)$ 左边的积分, 应用积分中值定理得 $2\eta f(\eta)\cdot\frac{1}{2} = f(1)$, 即 $\eta f(\eta) = 1\cdot f(1)$, 其中 $\eta \in [0,1/2]$. 于是关于函数 $F(x) = xf(x)$ 应用 Rolle 定理可知存在 $\xi \in (\eta,1)$, 使得 $F'(\xi) = 0$, 即 $f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$. 证毕.