《微积分A1》第二十八讲

教师 杨利军

清华大学数学科学系

2025年12月24日

例二

<u>例二</u>: 求解 $y' = \frac{y}{x+y^3}$.

<u>解</u>: 方程是非线性的. 显然 $y \equiv 0$ 是解. 因此其他解无零点(解的唯一性). 考虑等价方程 $x' = \frac{x+y^3}{y} = \frac{x}{y} + y^2$. (只考虑 $y > 0$ 情形). 这是关于未知函数 $x = x(y)$ 的一阶线性方程. 以下用常数变易法求解. 易知齐次方程 $x' = \frac{x}{y}$ 有通解 $x = Ce^{\int \frac{dy}{y}} = Ce^{\ln y} = Cy$. 设方程 $x' = \frac{x}{y} + y^2$ 有解形如 $x = C(y)y$. 代入方程得 $C'y + C = \frac{Cy}{y} + y^2$. 化简得 $C' = y$. 解之得 $C = \frac{1}{2}y^2 + C_1$. 由此得方程 $x' = \frac{x}{y} + y^2$ 的通解为 $x = C_1 y + \frac{y^3}{2}$, 其中 C_1 为任意常数. 解答完毕.

一阶线性周期方程，周期解问题

考虑一阶线性方程 $y' = p(x)y + q(x)$，这里 $p(x)$，$q(x)$ 假设为 $\mathbb{R}$ 上的周期连续函数. 这类方程称为一阶线性周期方程.

注: 根据线性方程解的整体存在性可知，对于一阶线性周期方程，其每个解的最大存在区间均为 $(-\infty, +\infty)$.

不失一般性，可设周期为 2π. 关于这类方程，我们关心:

(1) 方程是否存在 2π 周期解? 判别条件?

(2) 存在时，有多少个? 可否表示出来.

Theorem

考虑一阶线性方程 $y' = p(x)y + q(x)$，这里 $p(x)$，$q(x)$ 为周期连续函数，周期为 2π，则

i) 若 $\int_0^{2\pi} p(x)dx \neq 0$，则方程有唯一一个 2π 周期解；

ii) 若 $\int_0^{2\pi} p(x)dx = 0$，但 $\int_0^{2\pi} q(x)e^{\int_x^{2\pi} p(s)ds}dx \neq 0$，则方程没有 2π 周期解；

iii) 若 $\int_0^{2\pi} p(x)dx = 0$，且 $\int_0^{2\pi} q(x)e^{\int_x^{2\pi} p(s)ds}dx = 0$，则方程的每个解都是 2π 周期解.

Lemma

记号与假设如上，设 $y=\phi(x)$ 是线性周期方程 $y'=p(x)y+q(x)$ 的一个解，则 $\phi(x)$ 是 2π 周期解 $\Longleftrightarrow \phi(2\pi)=\phi(0)$.

证：$\Rightarrow$：显然成立．$\Leftarrow$：设 $\phi(2\pi)=\phi(0)$．要证 $\phi(x+2\pi)=\phi(x)$，$\forall x\in\mathbb{R}$.
令 $\psi(x)\overset{\text{def}}{=}\phi(x+2\pi)$，则显然 $\psi(0)=\phi(2\pi)=\phi(0)$，并且 $\psi(x)$ 也是解.
因为

$$\begin{aligned}\psi'(x) &= \phi'(x+2\pi)\\ &= p(x+2\pi)\phi(x+2\pi)+q(x+2\pi)\\ &= p(x)\psi(x)+q(x).\end{aligned}$$

根据解的唯一性可知 $\psi(x)=\phi(x)$，即 $\phi(x+2\pi)=\phi(x)$．此即解 $\phi(x)$ 是 2π 周期的．Lemma 得证． □

证: 记 Cauchy 问题 $y' = p(x)y + q(x)$, $y(0) = y_0$ 的唯一解为 $\phi(x, y_0)$. 由通解公式知 $\phi(x, y_0) = y_0 e^{\int_0^x p(s)ds} + \int_0^x q(s) e^{\int_s^x p(\tau)d\tau} ds$. 由 Lemma 知解 $\phi(x, y_0)$ 是 2π 周期解 $\iff \phi(2\pi, y_0) = \phi(0, y_0) = y_0$

$$\iff y_0 e^{\int_0^{2\pi} p(s)ds} + \int_0^{2\pi} q(s) e^{\int_s^{2\pi} p(\tau)d\tau} ds = y_0$$

$$\iff \left(1 - e^{\int_0^{2\pi} p(s)ds}\right) y_0 = \int_0^{2\pi} q(s) e^{\int_s^{2\pi} p(\tau)d\tau} ds. \quad (*)$$

i) 若 $\int_0^{2\pi} p(x)dx \neq 0$, 则方程 (*) 关于 y_0 有且仅有一个解. 于是周期线性方程 $y' = p(x)y + q(x)$ 有且仅有一个 2π 周期解. 进一步这个周期解对应的初值 y_0 由式(*)唯一确定.

ii) 若 $\int_0^{2\pi} p(x)dx = 0$, 但 $\int_0^{2\pi} q(s) e^{\int_s^{2\pi} p(\tau)d\tau} ds \neq 0$, 则方程 (*) 关于 y_0 无解, 于是方程 $y' = p(x)y + q(x)$ 无 2π 周期解.

iii) 若 $\int_0^{2\pi} p(x)dx = 0$, 且 $\int_0^{2\pi} q(s) e^{\int_s^{2\pi} p(\tau)d\tau} ds = 0$, 则方程 (*) 关于任意 y_0 成立. 此即方程 $y' = p(x)y + q(x)$ 的每个解都是 2π 周期解. 证毕.

考虑周期 Riccati 方程 $y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$，这里 $p(x)$，$q(x)$ 和 $r(x)$ 均为周期连续函数，周期为 2π. 我们关心：方程是否存在 2π 周期解？若存在，有多少？

Theorem

若 $p(x)$ 不变号，且不恒为零，则周期 Riccati 方程 $y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$ 至多有两个不同的 2π 周期解.

定理证明

反证: 假设 $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$, $\phi_3(x)$ 为三个不同的 2π 周期解. 由解的存在唯一性可设 $\phi_1(x) < \phi_2(x) < \phi_3(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. 考虑解 ϕ_k 所满足的方程

$$\phi_1' = p(x)\phi_1^2 + q(x)\phi_1 + r(x),$$
$$\phi_2' = p(x)\phi_2^2 + q(x)\phi_2 + r(x),$$
$$\phi_3' = p(x)\phi_3^2 + q(x)\phi_3 + r(x).$$

这里解 $\phi_k(x)$ 已经简写为 ϕ_k. 将第二个方程减去第一个方程, 并且两边同除 $\phi_2 - \phi_1$ 得

$$\frac{\phi_2' - \phi_1'}{\phi_2 - \phi_1} = p(x)(\phi_2 + \phi_1) + q(x).$$

同样将第三个方程减去第一个方程, 并且同除以 $\phi_3 - \phi_1$ 得

$$\frac{\phi_3' - \phi_1'}{\phi_3 - \phi_1} = p(x)(\phi_3 + \phi_1) + q(x).$$

再将上述两个等式相减得

$$\frac{\phi_3' - \phi_1'}{\phi_3 - \phi_1} - \frac{\phi_2' - \phi_1'}{\phi_2 - \phi_1} = p(x)(\phi_3 - \phi_2).$$

于上式两边从 0 到 2π 积分得

$$\ln \frac{\phi_3(x) - \phi_1(x)}{\phi_2(x) - \phi_1(x)} \Big|_0^{2\pi} = \int_0^{2\pi} p(x)[\phi_3(x) - \phi_2(x)]dx.$$

注意上式左边为零，因为解是 2π 周期的．考虑等式右边．根据假设 $p(x)$ 不变号且不恒为零，而函数 $\phi_3(x) - \phi_2(x)$ 恒大于零．因此右边的积分不为零．这就得到了一个矛盾．矛盾说明方程至多有两个不同的以 2π 为周期的周期解．定理得证． □

变量分离型方程, 形式解法, 例一

形如 $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ 的方程称作变量分离型方程 (separable equations).

形式解法: 先分离变量, 再取不定积分, 即

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx, \qquad \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + c.$$

第二个等式可看作一族函数方程, 并称之为方程的通解或一般解. 首先注意到, 函数 $g(y)$ 的每个零点都是方程的常数解. 也就是说, 若 $g(y_0) = 0$, 则 $y(x) \equiv y_0$ 是常数解.

Example

例一: 求方程 $y' = e^{x-y}$ 的通解.

解: 分离变量得 $e^y dy = e^x dx$, 两边积分得通解 $e^y = e^x + C$.

变量分离型方程，例二

Example

例二：求解初值问题 $y' = y^2 \cos x$，$y(0) = 1$.

解：对方程 $y' = y^2 \cos x$ 分离变量得 $\frac{dy}{y^2} = \cos x dx$，积分 $\int \frac{dy}{y^2} = \int \cos x dx$，即可求得方程的通解 $-1/y = \sin x + C$. 令 $x = 0$ 得 $-1 = C$. 于是所求初值问题的解为 $y = \frac{1}{1-\sin x}$.

例三：考虑 Logistic 方程 $\frac{dx}{dt} = ax(1-x)$. 首先注意方程有两个常数解 $x = 0$ 和 $x = 1$. 再将方程分离变量并积分得

$$\frac{dx}{x(1-x)} = adt, \quad \int \frac{dx}{x(1-x)} = a\int dt.$$

计算上述不定积分得通解

$$\ln|x| - \ln|1-x| = at + c \quad 或 \quad \ln\left|\frac{x}{1-x}\right| = at + c,$$

其中 $c \in \mathbb{R}$ 为任意常数. 上式可等价地写作

$$\left|\frac{x}{1-x}\right| = c_1 e^{at} \quad 或 \quad \frac{x}{1-x} = c_2 e^{at},$$

其中 $c_1 = e^c > 0$, $c_2 = \pm c_1 \neq 0$.

由 $\frac{x}{1-x}=c_2e^{at}$ 可解得

$$x(t)=\frac{c_2e^{at}}{1+c_2e^{at}}. \quad (*)$$

当 $c_2=0$ 时，由式 (*) 得到方程的特解 $x=0$. (在式 (*) 中取 $c_2=+\infty$ 可得到方程另一特解 $x=1$) 因此对任意 $c_2\in\mathbb{R}$，由式 (*) 得到的 $x(t)$ 都是解. 再来考虑初值问题的解. 在式 (*) 中令 $t=0$ 得

$$x(0)=\frac{c_2}{1+c_2} \quad 或 \quad c_2=\frac{x(0)}{1-x(0)}.$$

于是方程满足初始条件 $x(0)=x_0$ 的解可表为

$$x=\frac{x_0e^{at}}{1-x_0+x_0e^{at}}.$$

由通解公式

$$x(t) = \frac{c_2 e^{at}}{1 + c_2 e^{at}},$$

可知当 $c_2 \geq 0$ 时，对应的解在整个实轴上有定义．而当 $c_2 < 0$ 时，对应的解仅定义在单边无穷区间上，而不是在整个实轴上．所以不同的解，最大存在区间可能不同．

Logistic 方程的方向场，解曲线和相图

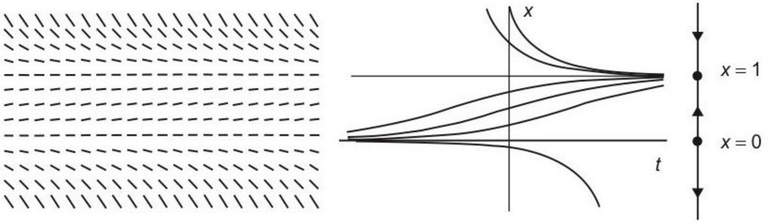


Figure 1.3 Slope field, solution graphs, and phase line for $x' = ax(1-x)$.

Theorem

定理：考虑方程 $\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$，其中 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续，$g(y)$ 在 (c,d) 上连续可微，则对 $\forall(x_0,y_0)\in(a,b)\times(c,d)$，Cauchy 问题 $y'=f(x)g(y)$，$y(x_0)=y_0$ 的唯一解 $y=\phi(x)$ 可如下确定.

(i) 若 $g(y_0)=0$，则 $\phi(x)\equiv y_0$；

(ii) 若 $g(y_0)\neq 0$，则解 $y=\phi(x)$ 由方程 $G(y)=F(x)$ 唯一确定，即 $\phi(x)=G^{-1}(F(x))$，$x\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$，其中 $G^{-1}(z)$ 表示 $z=G(y)$ 的反函数，

$$G(y)=\int_{y_0}^{y}\frac{dv}{g(v)},\quad F(x)=\int_{x_0}^{x}f(u)du.$$

定理证明(可忽略)

情形一: 若 $g(y_0)=0$, 则易知 Cauchy 问题 $y'=f(x)g(y)$, $y(x_0)=y_0$ 有常数解 $y=y_0$. 由解的唯一性知 $\phi(x)\equiv y_0$.

情形二: 设 $g(y_0)\neq 0$. 此时定义函数

$$G(y)\overset{\text{def}}{=}\int_{y_0}^{y}\frac{dv}{g(v)},\quad F(x)\overset{\text{def}}{=}\int_{x_0}^{x}f(u)du,$$

则 $G(\cdot)\in C^1(y_0-\delta,y_0+\delta)$, $F(\cdot)\in C^1(a,b)$ 且 $G(y_0)=0$, $F(x_0)=0$. 由于 $g(y_0)\neq 0$, 故 $G(y)$ 严格单调, 从而可逆, 即存在反函数 $y=G^{-1}(z)$, 满足 $y_0=G^{-1}(0)$. 再定义 $\phi(x)\overset{\text{def}}{=}G^{-1}(F(x))$, 注意到 $F(x_0)=0$, 故当 $\varepsilon>0$ 充分小时, 复合函数 $G^{-1}(F(x))$ 在开区间 $(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$ 有意义. 进一步 $\phi(x)$ 连续可微, $\phi(x_0)=G^{-1}(F(x_0))=G^{-1}(0)=y_0$. 再根据 $\phi(x)=G^{-1}(F(x))$ 可知, $G(\phi)=F(x)$. 两边求导得

$$G'(\phi)\phi'(x) = F'(x), \text{ 即 } \frac{1}{g(\phi)}\phi'(x) = f(x)$$

$$\Rightarrow \quad \phi'(x) = f(x)g(\phi(x)), \quad \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$

这表明 $y = \phi(x)$ 就是 Cauchy 问题 $y' = f(x)g(y)$, $y(x_0) = y_0$ 的解. 证毕. □

注一: 设 $\phi(x)$ 是初值问题 $y' = f(x)g(y)$, $y(x_0) = y_0$ 的解, 其中 $g(y_0) \neq 0$, 则必有 $g(\phi(x)) \neq 0$, $x \in J$, 这里 J 为解 $\phi(x)$ 的定义区间. 证明如下. 假设存在 $x_1 \in J$, 使得 $g(\phi(x_1)) = 0$. 记 $y_1 = \phi(x_1)$, 则 $y = \phi(x)$ 也是 Cauchy 问题 $y' = f(x)g(y)$, $y(x_1) = y_1$. 但另一方面这个 Cauchy 问题有常数解 $y \equiv y_1$. 由解的唯一性知 $\phi(x) \equiv y_1$. 令 $x = x_0$ 得 $y_0 = \phi(x_0) = y_1$. 这不可能. 因为 $g(y_0) \neq 0$, 而 $g(y_1) = 0$. 故 $g(\phi(x)) \neq 0$, $x \in J$.

注二: 解 $\phi(x) = G^{-1}(F(x))$ 也可用如下得到. 由等式 $\phi'(x) = f(x)g(\phi(x))$, $x \in J$ 可得

$$\frac{\phi'(x)}{g(\phi(x))} = f(x) \;\Rightarrow\; \int_{x_0}^{x} \frac{\phi'(u)du}{g(\phi(u))} = \int_{x_0}^{x} f(u)du \;\Rightarrow\; \int_{\phi(x_0)}^{\phi(x)} \frac{dv}{g(v)} = F(x),$$

即 $G(\phi(x)) = F(x)$, 故 $\phi(x) = G^{-1}(F(x))$.

初值问题解可以不唯一，例子

初值问题解的存在唯一性定理是说，当 $f(x, y)$ 及其偏导数 $f_y(x, y)$ 在平面区域 D 上连续时，则对任意点 $(x_0, y_0) \in D$，初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

的解存在唯一. 如果仅 $f(x, y)$ 在 D 上连续，而 $f_y(x, y)$ 在 D 不连续，那么初值问题的解仍然存在，但可以不唯一. 例如初值问题

$$\begin{cases} y' = 3y^{\frac{2}{3}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

至少有两个解 $y_1(x) = 0$ 和 $y_2(x) = x^3$. 实际上这个初值问题由无穷多个解. 注意方程右端函数 $f(x, y) = 3y^{\frac{2}{3}}$ 的偏导数 $f_y(x, y)$ 在点 $(x, y) = (0, 0)$ 处不存在.

可化为分离型的方程，类型一

类型一. 齐次方程 $\frac{dy}{dx} = f(y/x)$. 令 $u = y/x$ 或 $y = ux$，即将变量 u 看作新的未知函数，则 $y' = u'x + u = f(u)$，即 $u'x = f(u) - u$，或 $u' = \frac{f(u)-u}{x}$. 这是变量分离型方程.

Example

例: 求解 Cauchy 问题 $y' = \frac{y}{x} + \tan\frac{y}{x}$, $y(1) = \frac{\pi}{2}$.

解: 令 $u = \frac{y}{x}$ 或 $y = ux$. 于是 $y' = xu' + u = u + \tan u$，即 $xu' = \tan u = \frac{\sin u}{\cos u}$. 分离变量得

$$\frac{\cos u du}{\sin u} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|\sin u| = \ln|x| + C$$

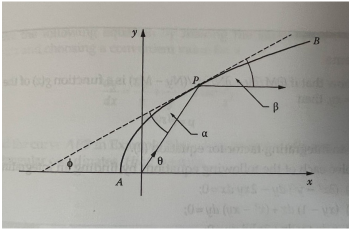
$$\Rightarrow \sin u = C_1 x \Rightarrow u = \arcsin(C_1 x) \text{ 或 } y = x\arcsin(C_1 x).$$

由初值条件 $y(1) = \frac{\pi}{2}$ 得 $\arcsin C_1 = \frac{\pi}{2}$，即 $C_1 = 1$. 故所求唯一解为 $y = x\arcsin x$.

探照灯曲面的设计

问题: 求一个连续可微函数 $y = y(x) \geq 0$, 使得曲线 $y = y(x)$ 绕 x 旋转一周产生的旋转面具有如下性质: 从原点 $(x, y) = (0, 0)$ 发出的光源, 经过旋转面发射后形成平行于 x 轴的光束.

解: 如图所示,



根据光的反射定律, 即入射角等于反射角, 可知图中 $\alpha = \beta$. 再根据几何关系知 $\phi = \beta$. 因此 $\theta = 2\beta$. 于是 $\tan\theta = \tan 2\beta = \frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}$.

由此得

$$\frac{y}{x} = \frac{2y'}{1-(y')^2}.$$

由上式可解出

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-x \pm \sqrt{x^2+y^2}}{y}. \qquad (*)$$

这是齐次方程，即具有形式 $y = f(x/y)$. 以下我们用两种解法求解方程 (*).

解法一. 作变换 $y = xu$, x 仍为独立变量, u 为新的未知函数. 于是

$$y' = u + xu' = \frac{-x \pm \sqrt{x^2+y^2}}{y} = \frac{-x \pm \sqrt{x^2+x^2u^2}}{xu} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+u^2}}{u}.$$

即

$$u + xu' = \frac{-1 \pm \sqrt{1+u^2}}{u} \quad 或 \quad xu' = \frac{-1-u^2 \pm \sqrt{1+u^2}}{u}.$$

分离变量得

$$\frac{udu}{-(1+u^2)\pm\sqrt{1+u^2}}=\frac{dx}{x}\quad 或\quad \frac{d(1+u^2)}{-(1+u^2)\pm\sqrt{1+u^2}}=\frac{2dx}{x}.$$

记 $v=1+u^2$，则有

$$\frac{dv}{-v\pm\sqrt{v}}=\frac{2dx}{x}\quad 或\quad \frac{dx}{x}+\frac{d\sqrt{v}}{\sqrt{v}\mp 1}=0$$

取不定积分得

$$\ln|x(\sqrt{v}\mp 1)|=c_1\quad 或\quad x\sqrt{v}\mp x=c_2,$$

其中 $c_2=\mp e^{c_1}\neq 0$. 于是 $x^2v=(c_2\mp x)^2$，即 $x^2(1+u^2)=c_2^2\mp 2c_2x+x^2$. 将 $u=\frac{y}{x}$ 代入即得 $y^2=2c_3x+c_3^2$，其中 $c_3=\mp c_2\neq 0$. 这是一个抛物线族，其对称轴为 x 轴，焦点位于原点 $(0,0)$. 因此为了取得很好照明效果，探照灯面通常设计成旋转抛物面.

解法二. 将微分方程 (*), 即

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 + y^2}}{y}$$

写作

$$xdx + ydy = \pm\sqrt{x^2 + y^2}dx.$$

注意上式可写作

$$\pm\frac{d(x^2 + y^2)}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = dx.$$

积分得 $\pm\sqrt{x^2 + y^2} = x + c$. 两边平方得 $y^2 = 2cx + c^2$, 即得到相同的结果.

例子. 求解方程

$$y' = \frac{x - y + 1}{x + y - 3}.$$

解: 如果将右端分子分母中的常数 1 和 −3 设法消去，则方程就变为齐次方程，从而可求解. 为此考虑线性代数方程组

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0, \\ x + y - 3 = 0. \end{cases}$$

解之得 $x = 1$, $y = 2$. 令 $v = x - 1$, $u = y - 2$, 或 $x = v + 1$, $y = u + 2$. 即 v 为新的独立变量，u 为新的未知函数. 于是 $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dv} = \frac{v-u}{v+u}$. 令 $w = \frac{u}{v}$ 或 $u = wv$，则

$$\frac{du}{dv} = w + v\frac{dw}{dv} \quad 且 \quad \frac{v - u}{v + u} = \frac{v - vw}{v + vw} = \frac{1 - w}{1 + w}$$

例子，续

$$\Rightarrow \quad w + v\frac{dw}{dv} = \frac{1-w}{1+w} \quad \Rightarrow \quad v\frac{dw}{dv} = \frac{1-2w-w^2}{1+w}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(1+w)dw}{2-(1+w)^2} = \frac{dv}{v} \quad \Rightarrow \quad -\frac{d[2-(1+w)^2]}{2-(1+w)^2} = \frac{2dv}{v}$$

$$\Rightarrow \quad \ln v^2 + \ln|2-(1+w)^2| = C \quad \Rightarrow \quad v^2[2-(1+w)^2] = C_1$$

$$\Rightarrow \quad 2v^2 - v^2(1+w)^2 = C_1 \quad \Rightarrow \quad 2v^2 - (v+u)^2 = C_1$$

$$\Rightarrow \quad 2(x-1)^2 - (x+y-3)^2 = C_1. \quad (*)$$

式 (*) 为方程 $y' = \frac{x-y+1}{x+y-3}$ 的一般解，式 (*) 中 $C_1 = \pm e^C \neq 0$. 当 $C_1 = 0$ 时，由方程 (*) 所确定的两条直线. 不难证明，这两条直线也是解. 因此原方程的一般解为 $2(x-1)^2 - (x+y-3)^2 = C_2$，其中 C_2 为任意常数. 解答完毕.

称形如 $y' = a(x)y + b(x)y^\alpha$ 的方程为 Bernoulli 型方程，其中 $y > 0$. 当 $\alpha = 0$ 或 $\alpha = 1$，方程为线性的，可求显式解. 故可设 $\alpha \neq 0, 1$. 于方程两边同除 y^α 得 $y^{-\alpha}y' = a(x)y^{1-\alpha} + b(x)$. 令 $z = y^{1-\alpha}$，则 $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$. 于是关于未知函数 y 的方程 $y' = a(x)y + b(x)y^\alpha$ 就变为关于新的未知函数 z 的方程

$$\frac{1}{1-\alpha}z' = a(x)z + b(x).$$

这是关于新未知函数 z 的一阶线性方程，可以求得显式解.

例: 求方程 $y' - y + \frac{2x}{y} = 0$ 的通解.

解: 这是 Bernoulli 型方程, $\alpha = -1$. 方程两边同乘以 y 得 $yy' - y^2 + 2x = 0$. 令 $z = y^2$, 则 $\frac{1}{2}z' - z + 2x = 0$ 或 $z' = 2z - 4x$. 对应齐次方程 $z' = 2z$ 的通解 $z = Ce^{2x}$. 将 $z = C(x)e^{2x}$ 代入方程 $z' = 2z - 4x$ 得 $C'(x) = -4xe^{-2x}$. 积分得

$$C(x) = \int -4xe^{-2x}dx = \cdots = C_1 + (2x+1)e^{-2x}.$$

因此方程 $z' = 2z - 4x$ 的通解为 $z = C_1e^{2x} + 2x + 1$. 故原方程 $y' - y + \frac{2x}{y} = 0$ 的通解为 $y^2 = C_1e^{2x} + 2x + 1$. 解答完毕.

一阶对称方程，全微分方程(恰当方程)及其通解

Definition

<u>定义</u>：(i) 形如 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ 的方程称为一阶对称常微分方程，简称一阶对称方程. 它可看作一阶方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{-P}{Q}$ 或 $\frac{dx}{dy}=\frac{-Q}{P}$.

(ii) 对于二元函数 $f(x,y)$，若固定变量 y，函数 $f(x,y)$ 作为 x 可导，其导数记作 $f_x(x,y)$ 称为 f 关于 x 的偏导数. 类似地，若固定变量 x，函数 $f(x,y)$ 作为 y 可导，其导数记作 $f_y(x,y)$ 称为 f 关于 y 的偏导数；若两个两个偏导数 $f_x(x,y)$ 和 $f_x(x,y)$ 均为连续函数，则称二元函数 $f(x,y)$ 为 C^1 函数.

(iii) 对一阶方程 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$，若存在 C^1 的二元函数 $f(x,y)$，使得 $f_x(x,y)=P(x,y)$，$f_y(x,y)=Q(x,y)$，则称方程 $Pdx+Qdy=0$，即方程 $f_xdx+f_ydy=0$ 为全微分方程或恰当方程 (exact equations)，函数 $f(x,y)$ 称为方程 $Pdx+Qdy=0$ 的原函数，且称 $f(x,y)=C$ 是方程 $Pdx+Qdy=0$ 的一般解 (或称通解).

两个例子

Example

例一: 考虑一阶对称方程 $xdx + ydy = 0$. 令 $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, 则 $f_x = x$, $f_y = y$. 因此一阶对称方程 $xdx + ydy = 0$ 的一般解(通解)为 $f(x, y) = C$, 即 $x^2 + y^2 = C_1$, 其中 $C_1 = 2C > 0$ 为任意正数. 亦即方程 $xdx + ydy = 0$ 的解曲线为以原点 $(0, 0)$ 为圆心的同心圆族.

Example

例二: 考虑一阶对称方程 $ydx + xdy = 0$. 令 $f(x, y) = xy$, 则 $f_x = y$, $f_y = x$. 因此一阶对称方程 $ydx + xdy = 0$ 的一般解(通解)为 $xy = C$, 即解曲线为双曲线族.

Example

例三: 可以证明一阶对称方程 $(3+2xy)dx+(x^2-3y^2)dy=0$ 是恰当方程. 往下我们来求方程的原函数, 即求 $f(x,y)$, 使得 $f_x=3+2xy$, $f_y=x^2-3y^2$. 对第一个方程两边关于 x 积分得 $f(x,y)=3x+x^2y+g(y)$, 其中 $g(y)$ 为待定的可微函数. 再将 $f(x,y)=3x+x^2y+g(y)$ 代入第二个方程得 $x^2+g'(y)$ $=x^2-3y^2$, 即 $g'(y)=-3y^2$. 两边积分得 $g(y)=-y^3+K$. 故 $f(x,y)=3x$ $+x^2y-y^3+K$. 因此方程 $(3+2xy)dx+(x^2-3y^2)dy=0$ 的一般解为 $3x+x^2y-y^3=C$. 解答完毕.

例一：求解方程 $xy''' - 3y'' = 2x - 3$，其中 $x > 0$.

解：记 $p = y''$，则原方程变为 $xp' - 3p = 2x - 3$. 将方程写作关于 p 的一阶线性方程形式 $p' = \frac{3}{x}p + 2 - \frac{3}{x}$. 对应齐次方程 $p' = \frac{3}{x}p$ 有通解 $p = Ce^{\int \frac{3dx}{x}} = Cx^3$. 将 $p = C(x)x^3$ 代入方程 $p' = \frac{3}{x}p + 2 - \frac{3}{x}$ 得

$$C'x^3 + 3Cx^2 = \frac{3}{x}Cx^3 + 2 - \frac{3}{x} \quad 或 \quad C'x^3 = 2 - \frac{3}{x} \quad 或 \quad C' = \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^4}.$$

积分得 $C = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + C_1$. 于是方程 $p' = \frac{3}{x}p + 2 - \frac{3}{x}$ 的通解为

$$p = (C_1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3})x^3 = C_1x^3 - x + 1.$$

此即 $p = y'' = C_1x^3 - x + 1$. 积分得 $y' = \frac{C_1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + x + C_2$. 再次积分得 $y = C_1'x^5 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C_2x + C_3$. 其中 $C_1' = \frac{C_1}{20}$，C_2，C_3 均为任意常数. 解答完毕.

例二: 求解 $xy'' - y' = x^2,\ x > 0$.

解: 令 $p = y'$, 则 $xp' = p + x^2$ 或 $p' = \frac{1}{x}p + x$. 这是一阶线性方程, 可用公式或常数变易法求解. 细节略.

另解: 将方程 $xy'' - y' = x^2$ 写作

$$\frac{xy'' - y'}{x^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{y'}{x}\right)' = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y'}{x} = x + C_1 \quad \Rightarrow \quad y' = x^2 + C_1 x$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{3}x^3 + C_1' x^2 + C_2,$$

其中 $C_1' = \frac{C_1}{2}$, C_2 为任意常数. 解答完毕.

考虑不显含 x 的二阶正规方程 $y'' = f(y, y')$. 记 $p = y'$, 且将 p 看作 y 的函数, 即 $p = p(y)$, 则

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p'p.$$

故二阶方程 $y'' = f(y, y')$ 降为一阶方程 $pp' = f(y, p)$. 而方程 $pp' = f(y, p)$ 的独立变量为 y, 未知函数为 $p = p(y)$. 假设 $p = p(y)$ 是方程 $pp' = f(y, p)$ 的解, 那么解方程 $y' = p(y)$ 即可得原二阶方程 $y'' = f(y, y')$ 的解.

注: 视 $p = p(y)$ 的合理性: 对于 $y'(x) \neq 0$ 的 x, 可局部反解 $x = x(y)$. 因此至少对于这样 x, $p = p(x) = p(x(y))$.

例子

例: 求解 $yy'' = 2(y')^2$.

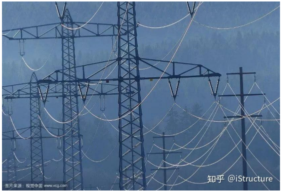
解: 将 $y' = p$, $y'' = p'p$ 代入方程 $yy'' = 2(y')^2$ 得 $ypp' = 2p^2$, 并视 y 为独立变量解这个方程. 令 $q = p^2$ 则 $yq' = 4q$. 解这个变量分离型方程得 $q = Cy^4$, 即 $p^2 = Cy^4$. 故 $y' = p = C_1y^2$. 以下解这个方程, 它也是变量分离型方程:

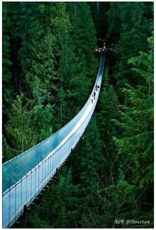
$$\frac{y'}{y^2} = C_1 \quad \Rightarrow \quad -(1/y)' = C_1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{y} = -C_1x + C_2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{C_1'x + C_2},$$

其中 C_1', C_2 为任意常数. 显然 $y = 0$ 是方程的一个特解. 解答完毕.

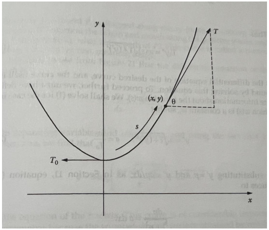
问题: 求一根索链的形状, 其两端固定, 可以自由弯曲的, 仅受自身重力的作用.





悬链线，续一

解：建立平面坐标系，使得 y 轴通过索链的最低点，如图所示.



设曲线 $y = y(x)$ 代表索链的形状. 记 s 表示由最低点到动点 (x, y) 的弧长, $w(s)$ 代表索链的线密度. 我们来推导出函数 $y(x)$ (索链)所满足的微分方程.

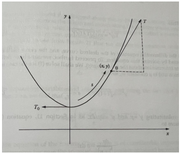
首先我们来分析弧段 s 的受力情况. 弧段 s 受三个力的作用

1) 设在最低点处所受的拉力为 T_0, 其方向为切向，即水平方向;

2) 在动点 (x, y) 处受到的拉力 T, 其方向为切向;

3) 弧段自身重力，方向垂直朝下.

悬链线，续二



由于弧段s所受力在水平方向，以及垂直方向为零，故

$$T\cos\theta = T_0 \quad \text{and} \quad T\sin\theta = \int_0^s w(u)du.$$

由此得

$$\int_0^s w(u)du = T\sin\theta = T_0\tan\theta = T_0\frac{dy}{dx}.$$

即 $T_0y' = \int_0^s w(u)du$. 为了消去积分，两边关于x求导得

$$T_0y'' = \frac{d}{dx}\int_0^s w(u)du = \left(\frac{d}{ds}\int_0^s w(u)du\right)\frac{ds}{dx} = w(s)\sqrt{1+(y')^2}.$$

悬链线，续三

这就得到了函数 $y = y(x)$ 应该满足的微分方程

$$T_0 y'' = w(s)\sqrt{1 + (y')^2}.$$

假设线密度是常数，即 $w(s) = w_0$，则方程为

$$y'' = a\sqrt{1 + (y')^2}, \quad a = \frac{w_0}{T_0},$$

即二阶方程，不显含独立变量 x. 令 $p = y'$，则方程为

$$\frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = adx. \qquad (*)$$

注意到当 $s = 0$ 时，即位于最低点时，$p(0) = y'(0) = 0$. 于是在微分方程 (*) 两边，从 0 到 x 积分得

$$\int_0^p \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = a\int_0^x du \quad 得 \quad \ln\left(p + \sqrt{1 + p^2}\right) = ax.$$

根据 $\ln\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)=ax$ 可解得 $p=\frac{1}{2}(e^{ax}-e^{-ax})$，即

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}(e^{ax}-e^{-ax})=\sinh(ax).$$

如果我们适当取原点，使得 $y(0)=\frac{1}{a}$，则所求函数 y 为

$$y=\frac{1}{2a}(e^{ax}+e^{-ax})=\frac{1}{a}\cosh(ax).$$

解答完毕.

二阶线性方程, 注记

Definition

定义: 一般二阶线性方程是指如下形式的方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$, 其中 $P(x)$, $Q(x)$ 和 $R(x)$ 均假设在某个开区间上连续.

注一: 熟知一阶线性方程 $y' + P(x)y = Q(x)$ 有显式通解

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int \left(Q(x)e^{\int P(x)dx}\right)dx + c\right).$$

但对于一般二阶线性方程而言, 不存在这样的显式通解公式. 这是一阶线性方程与二阶以及高阶线性方程的本质区别.

注二: 二阶线性常系数方程 $y'' + py' + qy = R(x)$ 有显式通解, 这里 p, q 均为常数. 稍后详细讨论.

注三: 处理二阶线性方程的思想和方法, 原则上可以推广到处理 n 阶线性方程 $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = q(x)$.

二阶线性方程解的整体存在唯一性，例子

Theorem

定理: 考虑 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$. 假设 $P(x)$, $Q(x)$ 和 $R(x)$ 均假设在开区间 J 上连续，则对于任意点 $x_0 \in J$，以及任意 $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$，二阶线性方程的初值问题 (也称为 Cauchy 问题)

$$\begin{cases} y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x), \\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, \end{cases}$$

存在唯一解，并且这个解的最大存在区间为开区间 J.

证明不易. 略去.

例: 考虑二阶线性方程 $y'' + y = 0$. 不难验证 $y_1(x) = \cos x$, $y_2(x) = \sin x$ 是方程的两个解，且满足初值条件 $y_1(0) = 1$, $y_1'(0) = 0$, 以及 $y_2(0) = 0$, $y_2'(0) = 1$.

注: 稍后我们将学习如何求出这类常系数高阶线性方程的解.

Definition

定义: 当二阶线性方程的右端函数 $R(x)$ 恒为零时，即方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \qquad (*)_{\text{齐}}$$

称作二阶线性齐次方程 (homogeneous equation). 当 $R(x)$ 不恒为零时，方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x), \qquad (*)_{\text{非}}$$

称作二阶线性非齐次方程 (nonhomogeneous equation).

二阶齐次方程解集构成二维线性空间，基本解组，例子

Theorem

定理：二阶线性齐次方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \qquad (*)_{齐}$$

解的全体构成一个二维线性空间.

Definition

齐次方程 $(*)_{齐}$ 的任意两个线性无关的解均称作方程 $(*)_{齐}$ 的一个基本解组.

Example

例：已说明函数 $y_1(x) = \cos x$, $y_2(x) = \sin x$ 是方程 $y'' + y = 0$ 的两个解. 显然它们线性无关. 故它们构成方程的一个基本解组. 于是方程 $y'' + y = 0$ 的每个解 $y(x)$ 均可表为它们的线性组合，即 $y(x) = c_1\cos x + c_2\sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

证: 记 $\mathcal{S}$ 为方程 $(*)_{齐}$ 解的全体, 则 $\mathcal{S}$ 是一个线性空间, 即对任意 $\phi,\psi\in\mathcal{S}$, 则 $\lambda\phi+\mu\psi\in\mathcal{S}$, 对任意 $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. 以下要证 $\dim\mathcal{S}=2$. 固定一点 $x_0\in J$, 记 $\phi_1(x)$ 和 $\phi_2(x)$ 分别是如下两个初值问题的解

$$\begin{cases} y''+P(x)y'+Q(x)y=0, \\ y(x_0)=1,\ y'(x_0)=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y''+P(x)y'+Q(x)y=0, \\ y(x_0)=0,\ y'(x_0)=1. \end{cases}$$

往下证 $\phi_1(x)$ 和 $\phi_2(x)$ 构成解空间 $\mathcal{S}$ 的一个基底. 先证 ϕ_1, ϕ_2 线性无关. 令 $c_1\phi_1+c_2\phi_2=0$, 即 $c_1\phi_1(x)+c_2\phi_2(x)=0$, $\forall x\in J$. 令 $x=x_0$ 可知 $c_1=0$. 进一步得 $c_2=0$. 故 ϕ_1 和 ϕ_2 线性无关. 再证线性空间 $\mathcal{S}$ 中的每个元素, 即方程 $(*)_{齐}$ 的每个解都可由 $\phi_1(x)$ 和 $\phi_2(x)$ 线性表出. 设 $y(x)\in\mathcal{S}$ 是方程 $(*)_{齐}$ 的任意一个解. 令 $\phi(x)=c_1\phi_1(x)+c_2\phi_2(x)$, 这里 $c_1\triangleq y(x_0)$, $c_2\triangleq y'(x_0)$.

显然 $\phi(x)$ 是解，且

$$\phi(x_0) = c_1 = y(x_0),$$

$$\phi'(x_0) = c_1\phi_1'(x_0) + c_2\phi_2'(x_0) = c_2 = y'(x_0).$$

这说明两个解 $y(x)$ 和 $\phi(x)$ 满足相同的初值条件. 根据解的唯一性知，它们恒同. 此即 $y(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x)$. 这就证明了 $\mathcal{S}$ 中的每个元素，即方程 $(*)_{齐}$ 的每个解都可以由 $\phi_1(x)$ 和 $\phi_2(x)$ 线性表出. 定理得证. $\square$

Theorem

<u>定理</u>: 考虑二阶线性非齐次方程, 及其相应的齐次方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x), \qquad (*)_{\text{非}}$$

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0. \qquad (*)_{\text{齐}}$$

非齐方程 $(*)_{\text{非}}$ 一般解可表示为 $y(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + y_p(x)$, 其中 $\phi_1(x)$ 和 $\phi_2(x)$ 为对应齐次方程方程 $(*)_{\text{齐}}$ 的两个线性无关的解, $y_p(x)$ 是方程 $(*)_{\text{非}}$ 的一个特解.

<u>一般解的含义</u>: 我们说方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$ 的一般解 (general solutions) 由式 $y(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + y_p(x)$ 给出有两个意思:

(i) 方程的每个解都可以表示为这样的形式;

(ii) 每个这样形式的函数均为方程的解.

证(i): 每个形如 $y = y_g + y_p$ 都是方程 $(*)_{非}$ 的解，这里 $y_g = c_1\phi_1 + c_2\phi_2$.
直接验证

$$
\begin{aligned}
& y'' + P(x)y' + Q(x)y \\
&= (y_g'' + y_p'') + P(x)(y_g' + y_p') + Q(x)(y_g + y_p) \\
&= [y_g'' + P(x)y_g' + Q(x)y_g] + [y_p'' + P(x)y_p' + Q(x)y_p] = R(x).
\end{aligned}
$$

(ii) 证方程 $(*)_{非}$ 的每个解都可以表示为形式 $y = y_g + y_p$. 设 $y(x)$ 是方程 $(*)_{非}$ 的一个解. 根据解 $y(x)$ 和 $y_p(x)$ 所满足的方程

$$
\begin{aligned}
y'' + P(x)y' + Q(x)y &= R(x) \\
y_p'' + P(x)y_p' + Q(x)y_p &= R(x)
\end{aligned}
$$

可得 $(y - y_p)'' + P(x)(y - y_p)' + Q(x)(y - y_p) = 0$. 这表明 $y - y_p$ 是齐次方程 $(*)_{齐}$ 的一个解. 故 $y - y_p$ 可表为 $y - y_p = c_1\phi_1 + c_2\phi_2$，于是任意解 $y(x)$ 可以表为 $y(x) = c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + y_p(x)$. 定理得证. □

例：求齐次方程 $y'' + y' = 0$ 的一个基本解组.

解：观察知 $y_1 = 1$ 是解，且 $y_2 = e^{-x}$ 也是解. 显然函数 $1, e^{-x}$ 在实轴上线性无关. 故解 $1, e^{-x}$ 构成方程的一个基本解组. 其一般解为 $y(x) = c_1 + c_2 e^{-x}$.

注一：稍后将会看到，如果已知齐次方程 $(*)_{齐}$ 的一个基本解组 $\phi_1(x)$ 和 $\phi_2(x)$，则可以利用这个基本解组，构造出非齐次方程 $(*)_{非}$ 的一个特解 y_p，从而求得方程 $(*)_{非}$ 的一般解. 因此问题的关键在于求齐次方程 $(*)_{齐}$ 的一个基本解组.

注二：目前尚不存在求齐次方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ 基本解组的一般方法.

习题一：课本第220页习题7.2题1：求解下列微分方程(1)(2)(3)(4)(5)(6).

(1) $(1-x)dy=(1+y)dx$,

(2) $x(1-y)+(y+xy)y'=0$,

(3) $(x^2-x^2y)dy+(y^2+xy^2)dx=0$,

(4) $3xdy-y(2-x\cos x)dx=0$,

(5) $\cos x\cos ydy-\sin x\sin ydx=0$,

(6) $(e^{x+y}-e^x)dx+(e^{x+y}+e^y)dy=0$.

习题二：课本第221页习题7.2题3：求解下列微分方程(1)(2)(3)(4)(5)(6).

(1) $y'=(2-x+y)^2$,

(2) $ydx-xdy+\ln xdx=0,\ x>0$,

(3) $(1+xy)(ydx+xdy)=0$,

(4) $(xdx+ydy)\cos(x^2+y^2)=xdx$,

作业，续

(5) $xy' + y = y\ln(xy)$, $x > 0$, $y > 0$,

(6) $\frac{xdy - ydx}{x^2} + \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0$.

习题三：课本第221页习题7.2题5：求微分方程$xdy + (x - 2y)dx = 0$的一个解$y = y(x)$，使得曲线$y = y(x)$，与直线$x = 1$，$x = 2$，以及x轴所围平面图形绕x轴旋转一周所生成的旋转体体积最小.

习题四：课本第223页习题7.3：求微分方程

(1) $y'' = 2x - \cos x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$,

(2) $xy'' + (y')^2 - y' = 0$, $x > 0$, $y(1) = 1 - \ln 2$, $y'(1) = \frac{1}{2}$,

(3) $y'' = 3\sqrt{y}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$,

(4) $(1 + x^2)y'' - 2xy' = 0$.