《微积分A1》第二十七讲

教师 杨利军

清华大学数学科学系

2025年12月22日

例子

<u>课本第 206 页第六章总复习题第 5 题</u>: 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续, 且广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛. 证明 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.

<u>证</u>: 反证. 假设 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ 不成立, 那么存在 $\varepsilon_0>0$, 使得对任意 $A>a$, 存在 $x_A>A$, $|f(x_A)|\geq\varepsilon_0$. 一方面, 由函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上的一致连续性知, 对于 $\varepsilon_0>0$, 存在 $\delta_0>0$, 使得当 $x',x''\geq a$, $|x'-x''|<\delta_0$ 时, 成立 $|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon_0}{2}$. 于是对 $\forall x\in[x_A,x_A+\delta_0]$,

$$|f(x)|=|f(x_A)+f(x)-f(x_A)|$$

$$\geq|f(x_A)|-|f(x)-f(x_A)|>\varepsilon_0-\frac{\varepsilon_0}{2}=\frac{\varepsilon_0}{2}.$$

这说明 $f(x)$ 在 $[x_A,x_A+\delta_0]$ 上定号. 因此

例子，续

$$\left|\int_{x_A}^{x_A+\delta_0} f(x)dx\right| = \int_{x_A}^{x_A+\delta_0} |f(x)|dx \geq \frac{1}{2}\varepsilon_0\delta_0 > 0. \quad (*)$$

另一方面由于广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，故由 Cauchy 收敛准则知，对 $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}\varepsilon_0\delta_0 > 0$，存在 $M_1 > a$，使得 $|\int_b^{b'} f(x)dx| < \varepsilon_1$，$\forall b, b' \geq M_1$. 取 $A \geq M_1$，则 x_A，$x_A + \delta_0 > A > M_1$，故

$$\left|\int_{x_A}^{x_A+\delta_0} f(x)dx\right| < \varepsilon_1 = \frac{1}{2}\varepsilon_0\delta_0.$$

此与式 (*) 相矛盾. 命题得证.

一般而言，广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，并不意味着 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$，即使 $f(x)$ 是非负连续的. 例如可以证明广义积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{1+x^6\sin^2 x}$$

收敛. 参见谢惠民等人编写的《数学分析习题课讲义》第2版(上册)第386页. 显然被积函数，记作 $f(x)$，非负，且当 $x\to+\infty$ 时并不趋于零. 实际上 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上无界. 因为 $f(k\pi)=k\pi$，$k=1,2,\cdots$. 函数 $f(x)$ 的函数图像如下:

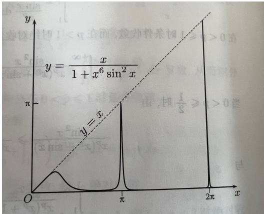


图 12.1

考虑广义积分

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}dx.$$

因积分可能有一个有限瑕点 $x=0$，以及一个无穷瑕点 $x=+\infty$，故将积分分成两个部分 $\Gamma(s)=J_1+J_2$，其中

$$J_1=\int_0^1 x^{s-1}e^{-x}dx,\quad J_2=\int_1^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}dx.$$

考虑积分 J_1. 显然积分 J_1 与积分 $\int_0^1 x^{s-1}dx$ 的收敛性相同. 这两个积分收敛，当且仅当 $s>0$. 再考虑积分 J_2. 对任意 $s>0$，由于

$$\frac{x^{s-1}e^{-x}}{\frac{1}{x^2}}=\frac{x^{s+1}}{e^x}\to 0,\quad x\to+\infty.$$

由于积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ 收敛，故根据比较判别法的极限形式可知积分 J_2 收敛. 因此积分 $\Gamma(s)$ 作为函数对 $s>0$ 有定义. 函数 $\Gamma(s)$ 称作 Gamma 函数.

考虑广义积分

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx.$$

这个积分可能有瑕点 $x=0$ 和 $x=1$. 将其一分为二, 即 $B(p,q)=J_1+J_2$, 其中

$$J_1=\int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx,\quad J_2=\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx.$$

考虑广义积分 J_1. 由于

$$\frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{x^{p-1}}\to 1,\quad x\to 0^+,$$

故由比较判别法的极限形式知, 积分 $J_1=\int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ 和积分 $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}dx$ 有相同的收敛性.

显然积分 $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}dx$ 收敛，当且仅当 $p > 0$. 故积分 J_1 收敛，当且仅当 $p > 0$. 同理可证积分 $J_2 = \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ 收敛，当且仅当 $q > 0$. 因此积分

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

可看作定义在 $p > 0$, $q > 0$ 的函数，称作 Beta 函数.

以下介绍 $\Gamma(s)$ 和 $B(p,q)$ 的一些性质. 它们的证明，可参见常庚哲史济怀的《数学分析教程》(下)，第三版，第383-400页.

Theorem

定理一: $\Gamma(s)$ 函数满足如下三个性质:

(i) $\Gamma(s) > 0$, $\forall s > 0$ 且 $\Gamma(1) = 1$;

(ii) $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$, $\forall s > 0$.

(iii) $\ln\Gamma(s)$ 是开区间 $(0, +\infty)$ 内的下凸函数.

证: 只证 (i) 和 (ii). 证 (i): 显然 $\Gamma(s) > 0$, $\forall s > 0$, 且 $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1$. 证 (ii): 分部积分得

$$\Gamma(s+1) = \int_0^{+\infty} x^s e^{-x} dx = -e^{-x}x^s\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}(x^s)'dx$$

$$= s\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx = s\Gamma(s). \qquad \square$$

注: 由性质 (ii) 知, 对任意正整数 n, $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \cdots = n!$. 因此 $\Gamma(n+1) = n!$.

$\Gamma(s)$ 函数的性质，续

Theorem

定理二(Bohr, Mollerup, 1922)：假设 $(0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足定理一中的三个性质，即

(i) $\forall x>0$, $f(x)>0$ 且 $f(1)=1$;

(ii) $\forall x>0$, $f(x+1)=xf(x)$;

(iii) $\ln f(x)$ 是开区间 $(0,+\infty)$ 内的下凸函数，

则 $f(x)=\Gamma(x)$.

Theorem

定理三(余元公式)：对 $\forall p\in(0,1)$, $\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin(p\pi)}$.

注：如果已知 $\Gamma(s)$ 在 $(0,\frac{1}{2})$ 上的值，则由余元公式可知 $\Gamma(s)$ 在 $(0,1)$ 上的值. 再根据公式 $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$，可知 $\Gamma(s)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的值.

函数 $B(p,q)$ 的性质

Theorem

定理: (i) $B(p,q)$ 在 $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$ 上连续, 且有各阶连续的偏导数;

(ii) $B(p,q)=B(q,p)$, $\forall p>0, q>0$;

(iii) $B(p+1,q+1)=\frac{pq}{(p+q+1)(p+q)}B(q,p)$, $\forall p>0, q>0$;

(iv) $B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$, $\forall p>0, q>0$.

微分方程, 常微分方程, 偏微分方程

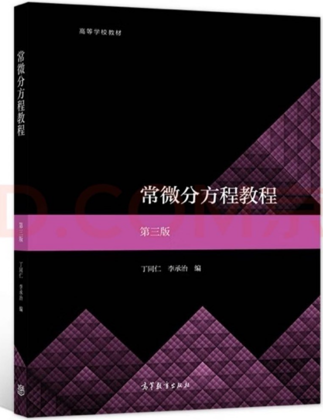
Definition

定义: (i) 含有未知函数之导数的方程 (等式) 称为微分方程 (Differential Equations, DE);

(ii) 如果一个微分方程的未知函数是单变量函数, 那么这个方程就称为常微分方程 (Ordinary Differential Equations, ODE);

(iii) 如果一个微分方程的未知函数是多变量函数, 则称这个方程为偏微分方程 (Partial Differential Equations, PDE).

常微分方程的参考书



例一, 例二, 例三

Example

例一: Malthas 人口 (物种) 模型 $x' = ax$, 这里 $x = x(t)$ 代表未知函数, $t \in \mathbb{R}$ 代表独立变量, 通常可看作时间变量. 符号 $'$ 代表关于变量 t 的导数, $a \in \mathbb{R}$ 为某个是实常数.

Example

例二: Logistic 方程 $x' = ax(1 - \frac{x}{K})$, 其中正常数 K 可解释为最大人口承载量. 作尺度变换 (scaling) $y = \frac{x}{K}$, 则原方程可化为 $y' = ay(1 - y)$. 故不妨设 $K = 1$, 即 $x' = ax(1 - x)$. 这个方程可看作方程 Malthas 方程 $x' = ax$ 的一个修正或摄动.

Example

例三: 方程 $x'' + x = 0$ 常称为简谐振动方程, 这里 x'' 代表未知函数 $x(t)$ 的二阶导数. 这是描述物体(质点)在弹簧的作用下无摩擦的运动方程.

例四, 例五, 例六

Example

例四: 非线性振动方程 $x'' + \sin x = 0$. 这是单摆在重力作用下的运动方程. 确切地说, 单摆与垂直方向所成的角度 x (弧度) 满足这个方程.

Example

例五: Airy 方程 $x'' - tx = 0$. 方程描述光波在弯曲光学元件中的传播行为, 如透镜和棱镜等. Airy 方程也可以描述粒子在不同势场中的运动.

Example

例六: Riccati 方程 $x' = x^2 - t$. Liouville 于 1841 年证明了这类方程的解不能用初等函数表示, 即这类方程不可积.

方程的阶 (order), 一般正规 n 阶方程

Definition

定义: 如果一个常微分方程中, 未知函数导数的最高阶为 n, 则称该方程为 n 阶方程.

Example

例: 方程 $x' = ax$ 和 $x' = x - x^2$ 均为一阶的; 方程 $x'' + x = 0$ 和 $x'' - tx = 0$ 均为二阶的.

一般正规 n 阶方程是指如下形式的 n 阶方程

$$x^{(n)} = f(x, x', \cdots, x^{(n-1)}, t).$$

某些方程可以写成正规方程. 例如方程 $1 + (x')^2 = x^2$ 等价于两个正规方程 $x' = \sqrt{x^2 - 1}$ 和 $x' = -\sqrt{x^2 - 1}$. 往后我们基本上只考虑正规方程.

线性与非线性方程

形如 $x^{(n)}=a_{n-1}(t)x^{(n-1)}+a_{n-2}(t)x^{(n-2)}+\cdots+a_1(t)x'+a_0(t)x+b(t)$ 的方程称为 n 阶线性方程，其中系数函数 $a_0(t)$，$a_1(t)$，$\cdots$，$a_{n-1}(t)$，$b(t)$ 为某开区间上的连续函数．换言之，方程 $x^{(n)}=f(x,x',\cdots,x^{(n-1)},t)$ 的右端函数 $f(x,x',\cdots,x^{(n-1)},t)$ 关于变量 $x,x',\cdots,x^{(n-1)}$ 是线性时，则称作线性方程．否则方程称作非线性方程．例如方程 $x'=a(t)x+b(t)$ 为一阶线性方程，方程 $x''=a(t)x'+b(t)x+c(t)$ 为二阶线性方程．而方程 $x'=a(t)x^2+b(t)x+c(t)$ 为一阶非线性方程 (Riccati 方程)，假设 $a(t)$ 不恒为零．

方程的解，例一

Definition

定义：我们称 n 阶正规方程 $x^{(n)} = f(x, x', \cdots, x^{(n-1)}, t)$ 有解 $x = \phi(t)$, $t \in J$, 意思是函数 $x = \phi(t)$ 在区间 J 上 n 阶连续可微，且

$$\phi^{(n)}(t) \equiv f\big(\phi(t), \phi'(t), \cdots, \phi^{(n-1)}(t), t\big), \quad \forall t \in J.$$

Example

例一：方程 $x' = ax$ 有解 $\phi(t) = e^{at}$, $\forall t \in \mathbb{R}$. 因为左边 $= (e^{at})' = ae^{at} =$ 右边, $\forall t \in \mathbb{R}$. 显然对任意常数 $c \in \mathbb{R}$, ce^{at} 也是解. 以下证明方程的每个解都有这种形式. 假设 $x(t)$ 是方程的解，即 $x'(t) - ax(t) = 0$. 方程两边同乘 e^{-at} (称作积分因子) 得 $e^{-at}[x'(t) - ax(t)] = 0$, 即 $[e^{-at}x(t)]' = 0$. 故 $e^{-at}x(t) = C$. 因此 $x(t) = Ce^{at}$. 这表明 $x = Ce^{at}$, $\forall C \in \mathbb{R}$, 囊括了方程 $x' = ax$ 的所有解，无一遗漏.

Example

例二: 考虑方程 $x'' + x = 0$. 不难验证方程有解 $\phi_1(t) = \cos t$, $\phi_2(t) = \sin t$, $\forall t \in \mathbb{R}$, 并且对任意常数 $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, 线性组合 $c_1 \cos t + c_2 \sin t$ 都是解. 因为

$$(c_1 \cos t + c_2 \sin t)'' + (c_1 \cos t + c_2 \sin t)$$

$$= c_1[(\cos t)'' + \cos t] + c_2[(\sin t)'' + \sin t] = 0.$$

我们将证明线性组合 $\{c_1 \cos t + c_2 \sin t, c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$ 构成了方程 $x'' + x = 0$ 的全部解, 无一遗漏. 因此 $x'' + x = 0$ 的全部解构成一个二维线性空间, ϕ_1 和 ϕ_2 是空间的基底, 称为方程的基本解组. 因此方程的每个解 (一般解) 可表为 $c_1 \cos t + c_2 \sin t$.

一阶方程的初值问题(也称 Cauchy 问题)

已知一阶方程 $x' = ax$ 有一般解 ce^{at}，其中 $c \in \mathbb{R}$ 为任意常数．因此若要确定方程的某个特别的解(特解)，需要这个解的进一步信息．例如指定解在某个特定时刻的值，即初值(初始)条件．显然方程 $x' = ax$ 满足初值条件 $x(0) = b$ 有解 $x(t) = be^{at}$，且满足这个初值条件的解存在且唯一．

求一阶方程 $x' = f(t,x)$ 满足条件 $x(t_0) = x_0$ 的解 $x(t)$ 的问题称为初值问题，也称 Cauchy 问题．这个问题常记作

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

课本第 210 页例 7.1.3, 略有修改: 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 且对 $\forall x>0$, $f(x)>0$. 还设 $f(1)=\frac{1}{2}$. 假设对 $\forall t>0$, 由曲线 $y=f(x)$, 直线 $x=t$ 与 x 轴所围平面图形, 绕 x 轴旋转所形成的旋转体体积为 $V(t)=\frac{\pi}{3}t^2f(t)$. 试求函数 $f(x)$.

解: 由旋转体体积公式知 $V(t)=\int_0^t \pi[f(s)]^2ds$. 由此得

$$\int_0^t \pi[f(s)]^2ds=\frac{\pi}{3}t^2f(t) \quad \text{或} \quad 3\int_0^t [f(s)]^2ds=t^2f(t).$$

由于 $f(x)$ 连续, 故上式左边连续可微, 从而 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续可微. 对上式两边求导得 $3[f(t)]^2=[t^2f(t)]'$. 将变量 t 换回 x 得 $3[f(x)]^2=[x^2f(x)]'$. 为求解 $f(x)$, 令 $y(x)=x^2f(x)$ 或 $f(x)=\frac{y(x)}{x^2}$, 故方程 $3[f(x)]^2=[x^2f(x)]'$ 可写作 $3\left[\frac{y}{x^2}\right]^2=y'$ 或 $y'=\frac{3y^2}{x^4}$. 由于当 $\forall x>0$, $f(x)>0$, 故 $y(x)=x^2f(x)>0$. 因此可令 $z=\frac{1}{y}$. 于是 $z'=\frac{-y'}{y^2}=\frac{-3}{x^4}$.

例子解析，续

对等式 $z' = \frac{-3}{x^4}$ 从 $x=1$ 到 $x=x$ 积分得 $z(x)-z(1)=\frac{1}{x^3}-1$. 由此得 $z(x)=z(1)-1+\frac{1}{x^3}$. 根据初值条件 $f(1)=\frac{1}{2}$ 得 $y(1)=f(1)=\frac{1}{2}$, 进而 $z(1)=\frac{1}{y(1)}=2$. 于是 $z(x)=1+\frac{1}{x^3}$. 再将变量 z 换回 $f(x)$ 得 $\frac{1}{x^2 f(x)}=1+\frac{1}{x^3}$ $=\frac{1+x^3}{x^3}$. 由此解得 $f(x)=\frac{x}{1+x^3}$. 解答完毕.

一阶方程的方向场 (the direction field)

给定一阶方程 $x' = f(t,x)$，设 D 为函数 f 的定义域．对任意点 $(t_0,x_0) \in D$，以该点为起始点，以 $f(t_0,x_0)$ 为斜率画出一个小箭头 (或线段)．这个小箭头称点 (t_0,x_0) 处的一个方向．若 $x(t)$ 是经过点 (t_0,x_0) 的解，即 $x(t_0) = x_0$，则

$$x'(t_0) = f(t_0, x(t_0)) = f(t_0, x_0).$$

即解曲线 $x = x(t)$ 在点 (t_0,x_0) 处的斜率为 $f(t_0,x_0)$．这表明点 (t_0,x_0) 的小箭头代表了解曲线的走向．若对开区域 D 中比较密集的点上画出方向，那么我们可以大致看出解曲线的走向．粗略地说，这些小箭头 (或线段) 构成了一阶方程 $x' = f(t,x)$ 的方向场．

Riccati 方程的方向场，以及几条解曲线

Riccati 方程 $x' = x^2 - t$ 的方向场，以及几条解曲线如图所示.

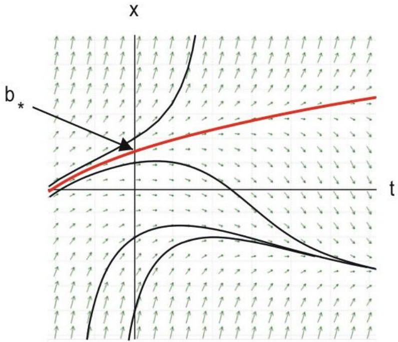


Figure 1.1: *Direction field for the Riccati equation* (1.6), *with several solution trajectories corresponding to different choices of initial condition* $x(0)$.

Theorem (Picard 定理)

考虑一阶方程 $x' = f(t,x)$，其中函数 f 以及偏导数 f_x 在平面开域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 上连续，则对任意点 $(t_0, x_0) \in \Omega$，

(i) (存在性) Cauchy 问题 $x' = f(t,x)$，$x(t_0) = x_0$ 有解 $\phi(t)$，$t \in J_1$，J_1 是包含 t_0 的一个开区间.

(ii) (唯一性) 若还有其他解 $\psi(t)$，$t \in J_2$，其中 J_2 是包含 t_0 的一个开区间，则 $\psi(t) \equiv \phi(t)$，$\forall t \in J_1 \cap J_2$.

注：这是 ODE 理论中最重要的定理(没有之一)！定理证明略.

大部分常微分方程的解没有显式表达. 例如 Liouville 于 1841 年证明, Riccati 方程 $x' = x^2 - t$ 无显式解, 即其解不能用初等函数表示. 以下是几类具有显式表达式的方程.

1) 一阶线性方程;

2) 变量分离型方程;

3) 恰当方程.

一阶线性方程的基本定理

Theorem

定理: 考虑一阶线性方程 $x' + a(t)x = b(t)$. 假设函数 $a(t)$ 和 $b(t)$ 在开区间 J 上连续, 则对于任意时刻 $t_0 \in J$, 以及任意初始值 $x_0 \in \mathbb{R}$, Cauchy 问题 $x' + a(t)x = b(t)$, $x(t_0) = x_0$ 有唯一解如下

$$x(t) = x_0 e^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} + e^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} \int_{t_0}^{t} e^{\int_{t_0}^{s} a(\tau)d\tau} b(s)ds,$$

其中 $t \in J$.

<u>例一</u>: 求方程 $x' + 2tx = e^{-t^2}$ 满足初值条件 $x(0) = x_0$ 的解.

<u>解</u>: 系数函数 $a(t) = 2t$, $b(t) = e^{-t^2}$ 的定义域为 $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$. 在通解公式

$$x(t) = x_0 e^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} + e^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} \int_{t_0}^{t} e^{\int_{t_0}^{s} a(\tau)d\tau} b(s)ds.$$

中，取 $t_0 = 0$. 于是 $\int_0^t a(\tau)d\tau = \int_0^t 2\tau d\tau = t^2$. 故方程 $x' + 2tx = e^{-t^2}$ 满足初值条件 $x(0) = x_0$ 的唯一解为

$$x(t) = x_0 e^{-t^2} + e^{-t^2} \int_0^t e^{-s^2} e^{s^2} ds = x_0 e^{-t^2} + te^{-t^2}.$$

解答完毕.

例二: 求一阶线性方程 $x' + \frac{x}{t} = 3t$ 的一般解(也称通解), $t > 0$.

解: 函数 $a(t) = \frac{1}{t}$, $b(t) = 3t$, 定义域为 $J = (0, +\infty)$. 为方便取 $t_0 = 1$ (注意 t_0 可以取定义域中的任意点. 怎么方便怎么取), 则

$$\int_1^t a(\tau)d\tau = \int_1^t \frac{d\tau}{\tau} = \ln t, \quad e^{-\int_1^t a(\tau)d\tau} = e^{-\ln t} = 1/t,$$

$$\int_1^t b(s)e^{\int_1^s a(\tau)d\tau} ds = \int_1^t 3s \cdot s ds = t^3 - 1.$$

因此方程满足 $x(1) = x_0$ 的唯一解为

$$x(t) = x_0 e^{-\int_1^t a(\tau)d\tau} + e^{-\int_1^t a(\tau)d\tau} \int_1^t b(s)e^{\int_1^s a(\tau)d\tau} ds$$

$$= \frac{x_0}{t} + \frac{1}{t}(t^3 - 1) = \frac{x_0}{t} + (t^2 - \frac{1}{t}). \quad \#$$

注一: 一阶线性方程 $x' + a(t)x = b(t)$ 初值问题 $x(t_0) = x_0$ 的求解公式

$$x(t) = x_0 e^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} + e^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} \int_{t_0}^{t} b(s) e^{\int_{t_0}^{s} a(\tau)d\tau} ds,$$

可写作

$$x(t) = x_0 e^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} + \int_{t_0}^{t} b(s) e^{\int_{t}^{s} a(\tau)d\tau} ds, \quad \forall t \in J.$$

注二: 如果不关心解的初值条件, 则求解公式可写作不定积分的形式, 即

$$x(t) = ce^{-\int a(t)dt} + e^{-\int a(t)dt} \int b(t) e^{\int a(t)dt} dt. \quad \forall t \in J.$$

根据一阶线性方程 $x' + a(t)x = b(t)$ 的通解公式

$$x(t) = x_0 e^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} + \int_{t_0}^{t} b(s) e^{\int_{t}^{s} a(\tau)d\tau} ds, \quad \forall t \in J,$$

可知方程每个解均可定义在整个区间 J 上. 这个性质称作线性方程解的整体存在性. 对于非线性方程, 这样的性质不再成立. 例如方程 $\frac{dx}{dt} = 2t(1+x^2)$ 是非线性的, 有解 $x = \tan(t^2)$. 这个解的最大存在区间为 $(-\sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2})$, 虽然右端函数 $2t(1+x^2)$ 在全平面上定义. 但并不是每个解都是整体有定义, 即不是每个解的定义域是整个实轴 $(-\infty, +\infty)$.

证：设 $x(t)$ 是方程 $x' + a(t)x = b(t)$ 的解，且满足初值条件 $x(t_0) = x_0$. 记 $\hat{a}(t) = \int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau$，则对 $x'(t) + a(t)x(t) = b(t)$ 两边同乘以 $e^{\hat{a}(t)}$ (称作积分因子) 得 $e^{\hat{a}(t)}[x' + a(t)x] = e^{\hat{a}(t)}b(t)$，其中 $x = x(t)$. 注意方程左边可写作 $[xe^{\hat{a}(t)}]'$，故 $[xe^{\hat{a}(t)}]' = e^{\hat{a}(t)}b(t)$. 两边从 t_0 到 t 积分，并注意 $\hat{a}(t_0) = 0$，即得

$$x(t)e^{\hat{a}(t)} - x_0 = \int_{t_0}^{t} e^{\hat{a}(s)}b(s)ds.$$

将 x_0 移到右边，且两边同除 $e^{\hat{a}(t)}$ 即得

$$x(t) = x_0e^{-\hat{a}(t)} + e^{-\hat{a}(t)}\int_{t_0}^{t} e^{\hat{a}(s)}b(s)ds, \quad \forall t \in J. \quad (*)$$

这说明初值问题的解 $x(t)$ 都可写作公式 (*) 的形式. 解的唯一性同时得证. 将上述步骤可逆推回去，即可知公式 (*) 定义的 $x(t)$ 是方程的解，且满足初值条件 $x(t_0) = x_0$. 定理得证. $\square$

解的结构

观察 Cauchy 问题 $x' + a(t)x = b(t)$, $x(t_0) = x_0$ 的求解公式

$$x = x_0 e^{-\hat{a}(t)} + e^{-\hat{a}(t)} \int_{t_0}^{t} b(s) e^{\hat{a}(s)} ds, \qquad (*)$$

其中 $\hat{a}(t) = \int_{t_0}^{t} a(\tau) d\tau$, 可知线性方程 $x' + a(t)x = b(t)$ 的通解具有结构:

$$\text{非齐次方程通解} = \text{齐次方程通解} + \text{非齐次方程特解}.$$

这个结论可与线性代数方程组 $A\xi = b$ 解的结构相同.

<u>证</u>: 显然式 (*) 的第一项 $x_0 e^{-\hat{a}(t)}$ 是齐次方程 $x' + a(t)x = 0$ 的解. 而第二项 $\xi(t) = e^{-\hat{a}(t)} \int_{t_0}^{t} b(s) e^{\hat{a}(s)} ds$ 是非齐次方程 $x' + a(t)x = b(t)$ 的特解:

$$\xi'(t) = e^{-\hat{a}(t)} [-a(t)] \int_{t_0}^{t} b(s) e^{\hat{a}(s)} ds + e^{-\hat{a}(t)} b(t) e^{\hat{a}(t)} = -a(t)\xi(t) + b(t).$$

证毕.

之前用积分因子法，导出了一阶线性方程 $x' + a(t)x = b(t)$ 满足初值条件 $x(t_0) = x_0$ 的唯一解为

$$x(t) = x_0 e^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} + e^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} \int_{t_0}^{t} e^{\int_{t_0}^{s} a(\tau)d\tau} b(s)ds.$$

如果改变变量记号，即将独立变量 t 写作 x，未知函数 x 写作 y，并且将项 $a(t)x$ 放置在右边，则一阶线性方程可写作 $y' = a(x)y + b(x)$ 满足初值条件 $y(x_0) = y_0$ 的唯一解为

$$y = y_0 e^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds} + e^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds} \int_{x_0}^{x} e^{-\int_{x_0}^{t} a(s)ds} b(t)dt.$$

我们也可以利用 Euler 常数变易法 (variation of constants)，导出上述通解公式. 已知齐次方程 $y' = a(x)y$ 的一般解为 $y = Ce^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds}$. 现假设非齐次方程 $y' = a(x)y + b(x)$ 有解形如 $y = C(x)e^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds}$，即由常数 C 变为函数 $C(x)$，常数变易法因此得名. 将 $y = C(x)e^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds}$ 代入方程 $y' = a(x)y + b(x)$ 得

常数变易法，续

$$y' = C'e^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds} + Ce^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds}a(x) = a(x)Ce^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds} + b(x)$$

$$\Rightarrow \quad C'e^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds} = b(x) \quad \Rightarrow \quad C' = e^{-\int_{x_0}^{x} a(s)ds}b(x)$$

$$\Rightarrow \quad C(x) = C_1 + \int_{x_0}^{x} e^{-\int_{x_0}^{t} a(s)ds}b(t)dt.$$

因此非齐方程可能有如下形式的解

$$y = e^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds}\left(C_1 + \int_{x_0}^{x} e^{-\int_{x_0}^{t} a(s)ds}b(t)dt\right). \qquad (*)$$

由于上述步骤均可逆，故可知式(*)是非齐方程的一般解. 这与之前用积分因子方法求得通解公式相同.

例一

例一: 求方程 $y' + \frac{1}{x}y = \frac{\sin x}{x}$ 的通解, 其中 $x > 0$.

解: 我们可以利用通解公式求得方程的通解. 不过对于本例, 直接利用常数变易法求解更简单. 这样避免了记忆公式, 以及一些积分计算. 易知齐次方程 $y' + \frac{1}{x}y = 0$ 的通解为 $y = Ce^{\int \frac{-dx}{x}} = \frac{C}{x}$. 设方程 $y' + \frac{1}{x}y = \frac{\sin x}{x}$ 有解 $y = \frac{C(x)}{x}$. 代入方程得

$$\frac{C'}{x} - \frac{C}{x^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{C}{x} = \frac{\sin x}{x} \Rightarrow \frac{C'}{x} = \frac{\sin x}{x} \Rightarrow C' = \sin x.$$

故 $C(x) = C_1 - \cos x$. 于是方程 $y' + \frac{1}{x}y = \frac{\sin x}{x}$ 的通解为 $y = \frac{1}{x}(C_1 - \cos x)$. 解答完毕.

另解: 将方程 $y' + \frac{1}{x}y = \frac{\sin x}{x}$ 写作 $xy' + y = \sin x$. 此即 $(xy)' = \sin x$. 于是 $xy = C - \cos x$, 即 $y = \frac{1}{x}(C - \cos x)$. 解答完毕.

例一：求方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{y^2+2xy-x}$ 的通解.

解：若将 $x=x(y)$ 看作 y 的函数，则方程为一阶线性方程，即 $\frac{dx}{dy}=\frac{2y-1}{y^2}x+1$. 可按通解公式求解. 但用常数变易法求解更简单. 我们只考虑情形 $y>0$. 情形 $y<0$ 求解类似. 先求齐次方程 $\frac{dx}{dy}=\frac{2y-1}{y^2}x$ 的通解. 为此计算 $\int_1^y\frac{(2s-1)ds}{s^2}$ $=2\ln y+\frac{1}{y}-1$. 由此得 $e^{\int_1^y\frac{(2s-1)ds}{s^2}}=e^{-1}y^2e^{\frac{1}{y}}$. 故齐次方程 $\frac{dx}{dy}=\frac{2y-1}{y^2}x$ 的通解为 $x=Cy^2e^{\frac{1}{y}}$. 将 $x=C(y)y^2e^{\frac{1}{y}}$ 代入 $\frac{dx}{dy}=\frac{2y-1}{y^2}x+1$ 得

$$C'y^2e^{\frac{1}{y}}+2Cye^{\frac{1}{y}}-Ce^{\frac{1}{y}}=\frac{2y-1}{y^2}Cy^2e^{\frac{1}{y}}+1.$$

整理得 $C'(y)y^2e^{\frac{1}{y}}=1$. 故 $C'(y)=\frac{1}{y^2}e^{-\frac{1}{y}}$. 积分得 $C(y)=C_1+e^{\frac{-1}{y}}$. 故方程 $\frac{dx}{dy}=\frac{2y-1}{y^2}x+1$ 的通解为 $x=y^2+C_1y^2e^{\frac{1}{y}}$. 解答完毕.

例二: 求解 $y' = \frac{y}{x+y^3}$.

解: 方程是非线性的. 显然 $y \equiv 0$ 是解. 因此其他解无零点(解的唯一性). 考虑等价方程 $x' = \frac{x+y^3}{y} = \frac{x}{y} + y^2$. (只考虑 $y > 0$ 情形). 这是关于未知函数 $x = x(y)$ 的一阶线性方程. 以下用常数变易法求解. 易知齐次方程 $x' = \frac{x}{y}$ 有通解 $x = Ce^{\int \frac{dy}{y}} = Ce^{\ln y} = Cy$. 设方程 $x' = \frac{x}{y} + y^2$ 有解形如 $x = C(y)y$. 代入方程得 $C'y + C = \frac{Cy}{y} + y^2$. 化简得 $C' = y$. 解之得 $C = \frac{1}{2}y^2 + C_1$. 由此得方程 $x' = \frac{x}{y} + y^2$ 的通解为 $x = C_1 y + \frac{y^3}{2}$, 其中 C_1 为任意常数. 解答完毕.

一阶线性周期方程，周期解问题

考虑一阶线性方程 $y' = p(x)y + q(x)$，这里 $p(x)$，$q(x)$ 假设为 $\mathbb{R}$ 上的周期连续函数. 这类方程称为一阶线性周期方程.

注: 根据线性方程解的整体存在性可知，对于一阶线性周期方程，其每个解的最大存在区间均为 $(-\infty, +\infty)$.

不失一般性，可设周期为 2π. 关于这类方程，我们关心:

(1) 方程是否存在 2π 周期解? 判别条件?

(2) 存在时，有多少个? 可否表示出来.

Theorem

考虑一阶线性方程 $y' = p(x)y + q(x)$，这里 $p(x)$，$q(x)$ 为周期连续函数，周期为 2π，则

i) 若 $\int_0^{2\pi} p(x)dx \neq 0$，则方程有唯一一个 2π 周期解；

ii) 若 $\int_0^{2\pi} p(x)dx = 0$，但 $\int_0^{2\pi} q(x)e^{\int_x^{2\pi} p(s)ds}dx \neq 0$，则方程没有 2π 周期解；

iii) 若 $\int_0^{2\pi} p(x)dx = 0$，且 $\int_0^{2\pi} q(x)e^{\int_x^{2\pi} p(s)ds}dx = 0$，则方程的每个解都是 2π 周期解.

周期解存在的充要条件

Lemma

记号与假设如上，设 $y = \phi(x)$ 是线性周期方程 $y' = p(x)y + q(x)$ 的一个解，则 $\phi(x)$ 是 2π 周期解 $\Longleftrightarrow \phi(2\pi) = \phi(0)$.

证：$\Rightarrow$：显然成立. $\Leftarrow$：设 $\phi(2\pi) = \phi(0)$. 要证 $\phi(x + 2\pi) = \phi(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. 令 $\psi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \phi(x + 2\pi)$，则显然 $\psi(0) = \phi(2\pi) = \phi(0)$，并且 $\psi(x)$ 也是解. 因为

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= \phi'(x + 2\pi) \\ &= p(x + 2\pi)\phi(x + 2\pi) + q(x + 2\pi) \\ &= p(x)\psi(x) + q(x). \end{aligned}$$

根据解的唯一性可知 $\psi(x) = \phi(x)$，即 $\phi(x + 2\pi) = \phi(x)$. 此即解 $\phi(x)$ 是 2π 周期的. Lemma 得证. $\square$

证: 记 Cauchy 问题 $y' = p(x)y + q(x)$, $y(0) = y_0$ 的唯一解为 $\phi(x, y_0)$. 由通解公式知 $\phi(x, y_0) = y_0 e^{\int_0^x p(s)ds} + \int_0^x q(s) e^{\int_s^x p(\tau)d\tau} ds$. 由 Lemma 知解 $\phi(x, y_0)$ 是 2π 周期解 $\iff \phi(2\pi, y_0) = \phi(0, y_0) = y_0$

$$\iff y_0 e^{\int_0^{2\pi} p(s)ds} + \int_0^{2\pi} q(s) e^{\int_s^{2\pi} p(\tau)d\tau} ds = y_0$$

$$\iff \left(1 - e^{\int_0^{2\pi} p(s)ds}\right) y_0 = \int_0^{2\pi} q(s) e^{\int_s^{2\pi} p(\tau)d\tau} ds. \quad (*)$$

i) 若 $\int_0^{2\pi} p(x)dx \neq 0$, 则方程 (*) 关于 y_0 有且仅有一个解. 于是周期线性方程 $y' = p(x)y + q(x)$ 有且仅有一个 2π 周期解. 进一步这个周期解对应的初值 y_0 由式(*)唯一确定.

ii) 若 $\int_0^{2\pi} p(x)dx = 0$, 但 $\int_0^{2\pi} q(s) e^{\int_s^{2\pi} p(\tau)d\tau} ds \neq 0$, 则方程 (*) 关于 y_0 无解, 于是方程 $y' = p(x)y + q(x)$ 无 2π 周期解.

iii) 若 $\int_0^{2\pi} p(x)dx = 0$, 且 $\int_0^{2\pi} q(s) e^{\int_s^{2\pi} p(\tau)d\tau} ds = 0$, 则方程 (*) 关于任意 y_0 成立. 此即方程 $y' = p(x)y + q(x)$ 的每个解都是 2π 周期解. 证毕. $\square$

考虑周期 Riccati 方程 $y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$，这里 $p(x)$，$q(x)$ 和 $r(x)$ 均为周期连续函数，周期为 2π. 我们关心：方程是否存在 2π 周期解？若存在，有多少？

Theorem

若 $p(x)$ 不变号，且不恒为零，则周期 Riccati 方程 $y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$ 至多有两个不同的 2π 周期解.

定理证明

反证: 假设 $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$, $\phi_3(x)$ 为三个不同的 2π 周期解. 由解的存在唯一性可设 $\phi_1(x) < \phi_2(x) < \phi_3(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. 考虑解 ϕ_k 所满足的方程

$$\phi_1' = p(x)\phi_1^2 + q(x)\phi_1 + r(x),$$
$$\phi_2' = p(x)\phi_2^2 + q(x)\phi_2 + r(x),$$
$$\phi_3' = p(x)\phi_3^2 + q(x)\phi_3 + r(x).$$

这里解 $\phi_k(x)$ 已经简写为 ϕ_k. 将第二个方程减去第一个方程, 并且两边同除 $\phi_2 - \phi_1$ 得

$$\frac{\phi_2' - \phi_1'}{\phi_2 - \phi_1} = p(x)(\phi_2 + \phi_1) + q(x).$$

同样将第三个方程减去第一个方程, 并且同除以 $\phi_3 - \phi_1$ 得

$$\frac{\phi_3' - \phi_1'}{\phi_3 - \phi_1} = p(x)(\phi_3 + \phi_1) + q(x).$$

定理证明，续

再将上述两个等式相减得

$$\frac{\phi_3' - \phi_1'}{\phi_3 - \phi_1} - \frac{\phi_2' - \phi_1'}{\phi_2 - \phi_1} = p(x)(\phi_3 - \phi_2).$$

于上式两边从 0 到 2π 积分得

$$\ln \frac{\phi_3(x) - \phi_1(x)}{\phi_2(x) - \phi_1(x)}\bigg|_0^{2\pi} = \int_0^{2\pi} p(x)[\phi_3(x) - \phi_2(x)]dx.$$

注意上式左边为零，因为解是 2π 周期的. 考虑等式右边. 根据假设 $p(x)$ 不变号且不恒为零，而函数 $\phi_3(x) - \phi_2(x)$ 恒大于零. 因此右边的积分不为零. 这就得到了一个矛盾. 矛盾说明方程至多有两个不同的以 2π 为周期的周期解. 定理得证. □

形如 $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ 的方程称作变量分离型方程 (separable equations).

形式解法: 先分离变量，再取不定积分，即

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx, \quad \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + c.$$

第二个等式可看作一族函数方程，并称之为方程的通解或一般解. 首先注意到，函数 $g(y)$ 的每个零点都是方程的常数解. 也就是说，若 $g(y_0) = 0$，则 $y(x) \equiv y_0$ 是常数解.

Example

例一: 求方程 $y' = e^{x-y}$ 的通解.

解: 分离变量得 $e^y dy = e^x dx$，两边积分得通解 $e^y = e^x + C$.

变量分离型方程，例二

Example

例二：求解初值问题 $y' = y^2 \cos x$，$y(0) = 1$.

解：对方程 $y' = y^2 \cos x$ 分离变量得 $\frac{dy}{y^2} = \cos x dx$，积分 $\int \frac{dy}{y^2} = \int \cos x dx$，即可求得方程的通解 $-1/y = \sin x + C$. 令 $x = 0$ 得 $-1 = C$. 于是所求初值问题的解为 $y = \frac{1}{1-\sin x}$.

例三: 考虑 Logistic 方程 $\frac{dx}{dt} = ax(1-x)$. 首先注意方程有两个常数解 $x = 0$ 和 $x = 1$. 再将方程分离变量并积分得

$$\frac{dx}{x(1-x)} = adt, \quad \int \frac{dx}{x(1-x)} = a\int dt.$$

计算上述不定积分得通解

$$\ln|x| - \ln|1-x| = at + c \quad 或 \quad \ln\left|\frac{x}{1-x}\right| = at + c,$$

其中 $c \in \mathbb{R}$ 为任意常数. 上式可等价地写作

$$\left|\frac{x}{1-x}\right| = c_1e^{at} \quad 或 \quad \frac{x}{1-x} = c_2e^{at},$$

其中 $c_1 = e^c > 0$, $c_2 = \pm c_1 \neq 0$.

例三，续一

由 $\frac{x}{1-x} = c_2 e^{at}$ 可解得

$$x(t) = \frac{c_2 e^{at}}{1 + c_2 e^{at}}. \quad (*)$$

当 $c_2 = 0$ 时，由式 (*) 得到方程的特解 $x = 0$. (在式 (*) 中取 $c_2 = +\infty$ 可得到方程另一特解 $x = 1$) 因此对任意 $c_2 \in \mathbb{R}$，由式 (*) 得到的 $x(t)$ 都是解. 再来考虑初值问题的解. 在式 (*) 中令 $t = 0$ 得

$$x(0) = \frac{c_2}{1 + c_2} \quad 或 \quad c_2 = \frac{x(0)}{1 - x(0)}.$$

于是方程满足初始条件 $x(0) = x_0$ 的解可表为

$$x = \frac{x_0 e^{at}}{1 - x_0 + x_0 e^{at}}.$$

例三，续二

由通解公式

$$x(t) = \frac{c_2 e^{at}}{1 + c_2 e^{at}},$$

可知当 $c_2 \geq 0$ 时，对应的解在整个实轴上有定义．而当 $c_2 < 0$ 时，对应的解仅定义在单边无穷区间上，而不是在整个实轴上．所以不同的解，最大存在区间可能不同．

Logistic 方程的方向场, 解曲线和相图

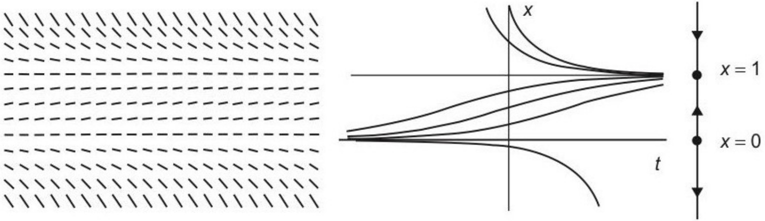


Figure 1.3 Slope field, solution graphs, and phase line for $x' = ax(1-x)$.

Theorem

定理: 考虑方程 $\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$, 其中 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续, $g(y)$ 在 (c,d) 上连续可微, 则对 $\forall(x_0,y_0)\in(a,b)\times(c,d)$, Cauchy 问题 $y'=f(x)g(y)$, $y(x_0)=y_0$ 的唯一解 $y=\phi(x)$ 可如下确定.

(i) 若 $g(y_0)=0$, 则 $\phi(x)\equiv y_0$;

(ii) 若 $g(y_0)\neq 0$, 则解 $y=\phi(x)$ 由方程 $G(y)=F(x)$ 唯一确定, 即 $\phi(x)=G^{-1}(F(x))$, $x\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$, 其中 $G^{-1}(z)$ 表示 $z=G(y)$ 的反函数,

$$G(y)=\int_{y_0}^{y}\frac{dv}{g(v)},\quad F(x)=\int_{x_0}^{x}f(u)du.$$

定理证明(可忽略)

情形一: 若 $g(y_0)=0$, 则易知 Cauchy 问题 $y'=f(x)g(y)$, $y(x_0)=y_0$ 有常数解 $y=y_0$. 由解的唯一性知 $\phi(x)\equiv y_0$.

情形二: 设 $g(y_0)\neq 0$. 此时定义函数

$$G(y)\overset{\text{def}}{=\!=}\int_{y_0}^{y}\frac{dv}{g(v)},\quad F(x)\overset{\text{def}}{=\!=}\int_{x_0}^{x}f(u)du,$$

则 $G(\cdot)\in C^1(y_0-\delta,y_0+\delta)$, $F(\cdot)\in C^1(a,b)$ 且 $G(y_0)=0$, $F(x_0)=0$. 由于 $g(y_0)\neq 0$, 故 $G(y)$ 严格单调, 从而可逆, 即存在反函数 $y=G^{-1}(z)$, 满足 $y_0=G^{-1}(0)$. 再定义 $\phi(x)\overset{\text{def}}{=\!=}G^{-1}(F(x))$, 注意到 $F(x_0)=0$, 故当 $\varepsilon>0$ 充分小时, 复合函数 $G^{-1}(F(x))$ 在开区间 $(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$ 有意义. 进一步 $\phi(x)$ 连续可微, $\phi(x_0)=G^{-1}(F(x_0))=G^{-1}(0)=y_0$. 再根据 $\phi(x)=G^{-1}(F(x))$ 可知, $G(\phi)=F(x)$. 两边求导得

证明，续

$$G'(\phi)\phi'(x) = F'(x), \text{ 即 } \frac{1}{g(\phi)}\phi'(x) = f(x)$$

$$\Rightarrow \quad \phi'(x) = f(x)g(\phi(x)), \quad \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$

这表明 $y = \phi(x)$ 就是 Cauchy 问题 $y' = f(x)g(y)$，$y(x_0) = y_0$ 的解. 证毕. $\square$

注记

注一: 设 $\phi(x)$ 是初值问题 $y' = f(x)g(y)$, $y(x_0) = y_0$ 的解, 其中 $g(y_0) \neq 0$, 则必有 $g(\phi(x)) \neq 0$, $x \in J$, 这里 J 为解 $\phi(x)$ 的定义区间. 证明如下. 假设存在 $x_1 \in J$, 使得 $g(\phi(x_1)) = 0$. 记 $y_1 = \phi(x_1)$, 则 $y = \phi(x)$ 也是 Cauchy 问题 $y' = f(x)g(y)$, $y(x_1) = y_1$. 但另一方面这个 Cauchy 问题有常数解 $y \equiv y_1$. 由解的唯一性知 $\phi(x) \equiv y_1$. 令 $x = x_0$ 得 $y_0 = \phi(x_0) = y_1$. 这不可能. 因为 $g(y_0) \neq 0$, 而 $g(y_1) = 0$. 故 $g(\phi(x)) \neq 0$, $x \in J$.

注二: 解 $\phi(x) = G^{-1}(F(x))$ 也可用如下得到. 由等式 $\phi'(x) = f(x)g(\phi(x))$, $x \in J$ 可得

$$\frac{\phi'(x)}{g(\phi(x))} = f(x) \Rightarrow \int_{x_0}^{x} \frac{\phi'(u)du}{g(\phi(u))} = \int_{x_0}^{x} f(u)du \Rightarrow \int_{\phi(x_0)}^{\phi(x)} \frac{dv}{g(v)} = F(x),$$

即 $G(\phi(x)) = F(x)$, 故 $\phi(x) = G^{-1}(F(x))$.

初值问题解可以不唯一，例子

初值问题解的存在唯一性定理是说，当 $f(x,y)$ 及其偏导数 $f_y(x,y)$ 在平面区域 D 上连续时，则对任意点 $(x_0,y_0)\in D$，初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

的解存在唯一．如果仅 $f(x,y)$ 在 D 上连续，而 $f_y(x,y)$ 在 D 不连续，那么初值问题的解仍然存在，但可以不唯一．例如初值问题

$$\begin{cases} y' = 3y^{\frac{2}{3}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

至少有两个解 $y_1(x)=0$ 和 $y_2(x)=x^3$．实际上这个初值问题由无穷多个解．注意方程右端函数 $f(x,y)=3y^{\frac{2}{3}}$ 的偏导数 $f_y(x,y)$ 在点 $(x,y)=(0,0)$ 处不存在．

类型一. 齐次方程 $\frac{dy}{dx} = f(y/x)$. 令 $u = y/x$ 或 $y = ux$, 即将变量 u 看作新的未知函数, 则 $y' = u'x + u = f(u)$, 即 $u'x = f(u) - u$, 或 $u' = \frac{f(u)-u}{x}$. 这是变量分离型方程.

Example

例: 求解 Cauchy 问题 $y' = \frac{y}{x} + \tan\frac{y}{x}$, $y(1) = \frac{\pi}{2}$.

解: 令 $u = \frac{y}{x}$ 或 $y = ux$. 于是 $y' = xu' + u = u + \tan u$, 即 $xu' = \tan u = \frac{\sin u}{\cos u}$. 分离变量得

$$\frac{\cos u du}{\sin u} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|\sin u| = \ln|x| + C$$

$$\Rightarrow \sin u = C_1 x \Rightarrow u = \arcsin(C_1 x) \text{ 或 } y = x\arcsin(C_1 x).$$

由初值条件 $y(1) = \frac{\pi}{2}$ 得 $\arcsin C_1 = \frac{\pi}{2}$, 即 $C_1 = 1$. 故所求唯一解为 $y = x\arcsin x$.

例子. 求解方程

$$y' = \frac{x-y+1}{x+y-3}.$$

解: 如果将右端分子分母中的常数 1 和 -3 设法消去，则方程就变为齐次方程，从而可求解. 为此考虑线性代数方程组

$$\begin{cases} x-y+1=0, \\ x+y-3=0. \end{cases}$$

解之得 $x=1$, $y=2$. 令 $v=x-1$, $u=y-2$, 或 $x=v+1$, $y=u+2$. 即 v 为新的独立变量，u 为新的未知函数. 于是 $\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dv}=\frac{v-u}{v+u}$. 令 $w=\frac{u}{v}$ 或 $u=wv$, 则

$$\frac{du}{dv} = w + v\frac{dw}{dv} \quad 且 \quad \frac{v-u}{v+u} = \frac{v-vw}{v+vw} = \frac{1-w}{1+w}$$

例子，续

$$\Rightarrow \quad w + v\frac{dw}{dv} = \frac{1-w}{1+w} \quad \Rightarrow \quad v\frac{dw}{dv} = \frac{1-2w-w^2}{1+w}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(1+w)dw}{2-(1+w)^2} = \frac{dv}{v} \quad \Rightarrow \quad -\frac{d[2-(1+w)^2]}{2-(1+w)^2} = \frac{2dv}{v}$$

$$\Rightarrow \quad \ln v^2 + \ln|2-(1+w)^2| = C \quad \Rightarrow \quad v^2[2-(1+w)^2] = C_1$$

$$\Rightarrow \quad 2v^2 - v^2(1+w)^2 = C_1 \quad \Rightarrow \quad 2v^2 - (v+u)^2 = C_1$$

$$\Rightarrow \quad 2(x-1)^2 - (x+y-3)^2 = C_1. \quad (*)$$

式 (*) 为方程 $y' = \frac{x-y+1}{x+y-3}$ 的一般解，式 (*) 中 $C_1 = \pm e^C \neq 0$. 当 $C_1 = 0$ 时，由方程 (*) 所确定的两条直线. 不难证明，这两条直线也是解. 因此原方程的一般解为 $2(x-1)^2 - (x+y-3)^2 = C_2$，其中 C_2 为任意常数. 解答完毕.

称形如 $y' = a(x)y + b(x)y^{\alpha}$ 的方程为 Bernoulli 型方程，其中 $y > 0$. 当 $\alpha = 0$ 或 $\alpha = 1$，方程为线性的，可求显式解. 故可设 $\alpha \neq 0, 1$. 于方程两边同除 y^{α} 得 $y^{-\alpha}y' = a(x)y^{1-\alpha} + b(x)$. 令 $z = y^{1-\alpha}$，则 $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$. 于是关于未知函数 y 的方程 $y' = a(x)y + b(x)y^{\alpha}$ 就变为关于新的未知函数 z 的方程

$$\frac{1}{1-\alpha}z' = a(x)z + b(x).$$

这是关于新未知函数 z 的一阶线性方程，可以求得显式解.

例: 求方程 $y' - y + \frac{2x}{y} = 0$ 的通解.

解: 这是 Bernoulli 型方程, $\alpha = -1$. 方程两边同乘以 y 得 $yy' - y^2 + 2x = 0$. 令 $z = y^2$, 则 $\frac{1}{2}z' - z + 2x = 0$ 或 $z' = 2z - 4x$. 对应齐次方程 $z' = 2z$ 的通解 $z = Ce^{2x}$. 将 $z = C(x)e^{2x}$ 代入方程 $z' = 2z - 4x$ 得 $C'(x) = -4xe^{-2x}$. 积分得

$$C(x) = \int -4xe^{-2x}dx = \cdots = C_1 + (2x+1)e^{-2x}.$$

因此方程 $z' = 2z - 4x$ 的通解为 $z = C_1e^{2x} + 2x + 1$. 故原方程 $y' - y + \frac{2x}{y} = 0$ 的通解为 $y^2 = C_1e^{2x} + 2x + 1$. 解答完毕.

某些高阶方程可降阶，例一

例一：求解方程 $xy''' - 3y'' = 2x - 3$，其中 $x > 0$.

解：记 $p = y''$，则原方程变为 $xp' - 3p = 2x - 3$. 将方程写作关于 p 的一阶线性方程形式 $p' = \frac{3}{x}p + 2 - \frac{3}{x}$. 对应齐次方程 $p' = \frac{3}{x}p$ 有通解 $p = Ce^{\int \frac{3dx}{x}} = Cx^3$. 将 $p = C(x)x^3$ 代入方程 $p' = \frac{3}{x}p + 2 - \frac{3}{x}$ 得

$$C'x^3 + 3Cx^2 = \frac{3}{x}Cx^3 + 2 - \frac{3}{x} \quad 或 \quad C'x^3 = 2 - \frac{3}{x} \quad 或 \quad C' = \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^4}.$$

积分得 $C = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + C_1$. 于是方程 $p' = \frac{3}{x}p + 2 - \frac{3}{x}$ 的通解为

$$p = (C_1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3})x^3 = C_1x^3 - x + 1.$$

此即 $p = y'' = C_1x^3 - x + 1$. 积分得 $y' = \frac{C_1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + x + C_2$. 再次积分得 $y = C_1'x^5 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C_2x + C_3$. 其中 $C_1' = \frac{C_1}{20}$，C_2，C_3 均为任意常数. 解答完毕.

例二: 求解 $xy'' - y' = x^2$, $x > 0$.

解: 令 $p = y'$, 则 $xp' = p + x^2$ 或 $p' = \frac{1}{x}p + x$. 这是一阶线性方程, 可用公式或常数变易法求解. 细节略.

另解: 将方程 $xy'' - y' = x^2$ 写作

$$\frac{xy'' - y'}{x^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{y'}{x}\right)' = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y'}{x} = x + C_1 \quad \Rightarrow \quad y' = x^2 + C_1 x$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{3}x^3 + C_1' x^2 + C_2,$$

其中 $C_1' = \frac{C_1}{2}$, C_2 为任意常数. 解答完毕.

考虑不显含 x 的二阶正规方程 $y'' = f(y, y')$. 记 $p = y'$, 且将 p 看作 y 的函数, 即 $p = p(y)$, 则

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p'p.$$

故二阶方程 $y'' = f(y, y')$ 降为一阶方程 $pp' = f(y, p)$. 而方程 $pp' = f(y, p)$ 的独立变量为 y, 未知函数为 $p = p(y)$. 假设 $p = p(y)$ 是方程 $pp' = f(y, p)$ 的解, 那么解方程 $y' = p(y)$ 即可得原二阶方程 $y'' = f(y, y')$ 的解.

注: 视 $p = p(y)$ 的合理性: 对于 $y'(x) \neq 0$ 的 x, 可局部反解 $x = x(y)$. 因此至少对于这样 x, $p = p(x) = p(x(y))$.

例子

例: 求解 $yy'' = 2(y')^2$.

解: 将 $y' = p$, $y'' = p'p$ 代入方程 $yy'' = 2(y')^2$ 得 $ypp' = 2p^2$, 并视 y 为独立变量解这个方程. 令 $q = p^2$ 则 $yq' = 4q$. 解这个变量分离型方程得 $q = Cy^4$, 即 $p^2 = Cy^4$. 故 $y' = p = C_1y^2$. 以下解这个方程, 它也是变量分离型方程:

$$\frac{y'}{y^2} = C_1 \quad \Rightarrow \quad -(1/y)' = C_1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{y} = -C_1x + C_2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{C_1'x + C_2},$$

其中 C_1', C_2 为任意常数. 显然 $y = 0$ 是方程的一个特解. 解答完毕.

Dec 22 作业，共七大题和一道选作题

习题一：课本第212页习题 7.1 题1:(1)(3)(5)(7) 指出下列常微分方程的阶，并指出哪些方程是线性的和非线性的，齐次的和非齐次的.

$$(1)\quad x^2y''+xy'+2y=\sin x,\qquad (3)\quad (1+y^2)y''+xy'=e^x,$$

$$(5)\quad y^{(4)}-4y''+4y=\tan x,\qquad (7)\quad y'-\frac{x^2}{1-x^2}y=x.$$

习题二：课本第212页习题 7.1 题2(有修改)：设 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 分别是下列二阶线性方程的解

$$y''+a(x)y'+b(x)y=f_1(x),\qquad (*)$$

$$y''+a(x)y'+b(x)y=f_2(x),\qquad (**)$$

其中 $a(x)$ 和 $b(x)$ 为开区间 J 上的连续函数. 证明 $k_1y_1(x)+k_2y_2(x)$ 为方程

$$y''+a(x)y'+b(x)y=k_1f_1(x)+k_2f_2(x)$$

的解.

习题三：课本第212页习题7.1题3(有修改)：对下列微分方程，验证给定的函数是方程的解：

(1) $(x+y)dx + xdy = 0$, $y = \frac{c-x^2}{2x}$，其中 c 为任意常数；

(2) $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$, $y = x^2 + x$;

(3) $y' - 2xy = 1$, $y = e^{x^2}(1 + \int_0^x e^{-t^2}dt)$;

(4) $y'' + \omega^2 y = e^{-x}$, $y = c_1\cos\omega x + c_2\sin\omega x + \frac{1}{1+\omega^2}e^{-x}$.

习题四：课本第213页习题7.1题4：确定常数 k 的值，使得下列方程具有相应的特解：

(1) $y' + 2y = 0$, $\quad y = e^{kx}$;

(2) $y'' - 3y' - 4y = 0$, $\quad y = e^{kx}$;

(3) $x^2y'' + 4xy' - 10y = 0$, $\quad y = x^k$;

(4) $x^2y'' - 4xy' + 4y = 0$, $\quad y = x^k$.

作业，续二

习题五：课本第213页习题7.1题5：验证 $y = Cx^3$ 是微分方程 $3y - xy' = 0$ 的一般解，并分别求经过点 $A = (1,1)$ 和 $B = (1, -\frac{1}{3})$ 的两条积分曲线.

习题六：课本第220页习题7.2题2(1)(2)(4)(5)(7)：求解下列一阶线性常微分方程

(1) $\frac{dy}{dx} - 2y = \cos x$;

(2) $\frac{dy}{dx} + 5y = e^x$;

(4) $\frac{dy}{dx} + xy = x^3$, $y(0) = 0$;

(5) $xy' + 3y = \frac{1}{x^2}\sin x$;

(7) 一阶线性方程的初值问题

$$\begin{cases} (x+1)y' - 2(x^2+x)y = \frac{e^{x^2}}{x+1}, & x > -1, \\ y(0) = 5. \end{cases}$$

习题七：课本第221页习题7.2题4(有修改)：假设曲线 $y = y(x)$ 上任意一点处切线的斜率等于原点与切点连线斜率的 3 倍，且曲线经过点 $(-1, 1)$．求函数 $y(x)$．

选作题：考虑方程 $y' = p_3(x)y^3 + p_2(x)y^2 + p_1(x)y + p_0(x)$，这里 $p_k(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，且连续，$k = 0, 1, 2, 3$．这个方程通常称作 Abel 方程，它是 Riccati 方程的推广．假设 $p_3(x)$ 不变号，且不恒为零，证明方程至多有三个不同的以 2π 为周期的周期解．(解答直接发给老师本人)