# 《微积分A1》第十讲

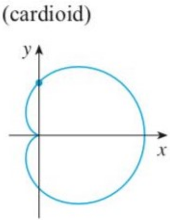
教师 杨利军

清华大学数学科学系

2025年10月22日

# 极坐标下曲线的斜率, 例子

例: 已知心脏线 (cardioid) 的极坐标方程为 $\rho = a(1+\cos\phi)$, $a > 0$, $\phi \in [0, 2\pi]$. 如图所示.




在直角坐标系下心脏线的参数方程为

$$\begin{cases} x = \rho\cos\phi = a(1+\cos\phi)\cos\phi, \\ y = \rho\sin\phi = a(1+\cos\phi)\sin\phi. \end{cases}$$

# 例子，续

于是心脏线的斜率为

$$y'(x)=\frac{y'(\phi)}{x'(\phi)}=\frac{\left[a(1+\cos\phi)\sin\phi\right]'}{\left[a(1+\cos\phi)\cos\phi\right]'}$$

$$=\frac{(\sin\phi+\frac{1}{2}\sin 2\phi)'}{\left[\cos\phi+\frac{1}{2}(1+\cos 2\phi)\right]'}=\frac{\cos\phi+\cos 2\phi}{-\sin\phi-\sin 2\phi}=-\frac{\cos\phi+\cos 2\phi}{\sin\phi+\sin 2\phi}.$$

解答完毕.

**Definition**

定义：设 $f(x)$ 在开区间 $(a,b)$ 上处处可导. 如果其导函数 $f'(x)$ 作为 $(a,b)$ 上的函数在点 $x_0 \in (a,b)$ 处可导，即极限

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$$

存在，则称函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处二阶可导，称极限值为 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处二阶导数，记作 $f''(x_0)$，或 $\frac{d^2f}{dx^2}(x_0)$，或 $\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x_0}$，或 $D^2f(x_0)$，或 $\left.D^2f\right|_{x_0}$，$\cdots$. 类似可以定义三阶导数，以及一般 $n$ 阶导数. 函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处的 $n$ 导数通常记作 $f^{(n)}(x_0)$.

# 例子

**Example**

例: (i) 已证函数 $y=\sin x$ 在 $\mathbb{R}$ 上处处可导，且 $y'=\cos x$. 由此可见 $y=\sin x$ 在 $\mathbb{R}$ 上处处二阶可导，且 $y''=-\sin x$. 由归纳法可知对任意正整数 $n$，函数 $y=\sin x$ 在 $\mathbb{R}$ 上处处 $n$ 次可导.

(ii) 由于 $[\sin x]'=\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{2})$，故二阶导数为 $y''=[\sin(x+\frac{\pi}{2})]'$ $=\sin(x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})=\sin(x+\frac{2\pi}{2})$. 不难用归纳法证明，对任意正整数 $n\geq 1$，$[\sin x]^{(n)}=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$.

(iii) 类似可证函数 $\cos x$ 在 $\mathbb{R}$ 上处处有任意阶导数，对任意正整数 $n\geq 1$，$[\cos x]^{(n)}=\cos(x+\frac{n\pi}{2})$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

记号: 设 $J$ 为一开区间.

(i) $C^k(J)$ 记区间 $J$ 上有连续的 $k$ 阶导数的函数全体. 显然

$$C(J) \supseteq C^1(J) \supseteq C^2(J) \supseteq \cdots \supseteq C^n(J) \supseteq C^{n+1}(J) \supseteq \cdots$$

(ii) $C^\infty(J)$ 记区间 $J$ 上有任意阶导数的函数全体. 显然

$$C^\infty(J) = \bigcap_{k\geq 0} C^k(J).$$

# 高阶导数三个例子

**Example**

例一: 考虑 $y = \ln(1+x)$, $x > -1$. 显然函数 $y = \ln(1+x)$ 可导, 且 $y' = \frac{1}{1+x}$, $x > -1$. 由此进一步可知函数二阶可导, 且 $y'' = \frac{-1}{(1+x)^2}$. 用归纳法可证, 对任意正整数 $k$, 函数有 $k$ 阶导数, 且$y^{(k)} = (-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{(1+x)^k}$.

**Example**

例二: 考虑 $y = x^{\alpha}$, $x > 0$ 的 $n$ 阶导数. 已证 $y' = \alpha x^{\alpha-1}$. 由此可知 $y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$. 用归纳法可证

$$y^{(k)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)x^{\alpha-k}, \quad \forall k \geq 1.$$

当 $\alpha$ 为正整数, 即 $\alpha = n$ 时, $y^{(n)} = n!$, $y^{(n+1)} = 0$.

# 例三

**Example**

例三: 考虑 $y = a^x$ 的 $n$ 阶导数, 其中 $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$, 已证 $y' = \ln a \cdot a^x$. 由此可知 $y'' = (\ln a)^2 a^x$. 用归纳法可证

$$y^{(n)} = (\ln a)^n a^x, \quad \forall n \geq 1.$$

# Leibniz 法则

**Theorem**

定理: 设 $f, g \in C^n(J)$, 则它们的乘积 $fg \in C^n(J)$, 且

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)},$$

其中 $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ 为二项式系数, $C_n^0 = C_n^n = 1$. 特别

$$n = 1, \quad (fg)' = f'g + fg',$$

$$n = 2, \quad (fg)'' = f''g + 2f'g' + fg'',$$

$$n = 3, \quad (fg)''' = f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''.$$

例一: 求函数 $y=\frac{1}{x^2-x-2}$ 的 $n$ 阶导数.

解: 先将函数化为最简分式. 由于 $x^2-x-2=(x-2)(x+1)$. 令

$$\frac{1}{(x-2)(x+1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1},$$

其中 $A,B$ 为待定常数. 上式两边同乘 $(x-2)(x+1)$ 得

$$1=A(x+1)+B(x-2).$$

由此得 $A+B=0$, $A-2B=1$. 解之得 $B=-\frac{1}{3}$, $A=\frac{1}{3}$. 于是

$$\frac{1}{x^2-x-2}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+1}\right).$$

$$\left(\frac{1}{x-2}\right)'=-\frac{1}{(x-2)^2},\quad \left(\frac{1}{x-2}\right)''=\frac{2}{(x-2)^3},$$

# 例一，续

$$\text{一般}\quad \left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}}.$$

$$\text{同理}\quad \left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}.$$

因此所求函数的 n 阶导数为

$$\left(\frac{1}{x^2-x-2}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{3}\left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right].$$

注：在稍后学习不定积分时，我们将详细讨论分式分解问题.

例二: 求函数 $y = x^2 \cos x$ 的 n 阶导数.

解:

$$y' = x^2\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 2x\cos x;$$

$$y'' = x^2\cos\left(x + \frac{2\pi}{2}\right) + 4x\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 2\cos x;$$

$$y^{(n)} = C_n^0 x^2[\cos x]^{(n)} + C_n^1[x^2]'[\cos x]^{(n-1)} + C_n^2[x^2]''[\cos x]^{(n-2)}$$

$$= x^2\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + 2nx\cos\left(x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right)$$

$$+n(n-1)\cos\left(x + \frac{(n-2)\pi}{2}\right), \quad \forall n \geq 3.$$

# Leibniz 法则之证明

证明：显然结论对 $n=1$ 成立．因为在证明导数的四则运算规则时，已经证明，当 $f,g\in C^1(J)$ 时，它们的乘积 $fg\in C^1(J)$，且 $(fg)'=f'g+fg'$．假设结论对正整数 $n$，即当 $f,g\in C^n(J)$ 时，则乘积 $fg\in C^n(J)$，且

$$(fg)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(k)}g^{(n-k)}. \qquad (*)$$

当 $f,g\in C^{n+1}(J)$ 时，则有 $f,g\in C^n(J)$，故由归纳假设知乘积 $fg\in C^n(J)$，且公式 (*) 成立．由于公式 (*) 右边的每一项都是连续可微的，因此 $(fg)^{(n)}$ 也连续可微．于是 $fg\in C^{n+1}(J)$．对公式 (*) 两边求导得

$$(fg)^{(n+1)}=\left[(fg)^{(n)}\right]'=\left(\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(k)}g^{(n-k)}\right)'=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left[f^{(k)}g^{(n-k)}\right]'$$

$$=\sum_{k=0}^{n} C_n^k\left[f^{(k+1)}g^{(n-k)}+f^{(k)}g^{(n-k+1)}\right]=\sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k+1)}g^{(n-k)}+\sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}g^{(n-k+1)}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k f^{(k+1)}g^{(n-k)}+C_n^n f^{(n+1)}g+C_n^0 fg^{(n+1)}+\sum_{k=1}^{n} C_n^k f^{(k)}g^{(n+1-k)}$$

$$=C_{n+1}^0 fg^{(n+1)}+\sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} f^{(k)}g^{(n-k+1)}+\sum_{k=1}^{n} C_n^k f^{(k)}g^{(n+1-k)}+C_{n+1}^{n+1} f^{(n+1)}g$$

$$=C_{n+1}^0 fg^{(n+1)}+\sum_{k=1}^{n}\left(C_n^{k-1}+C_n^k\right)f^{(k)}g^{(n+1-k)}+C_{n+1}^{n+1} f^{(n+1)}g$$

$$\text{即}\quad (fg)^{(n+1)}=\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k f^{(k)}g^{(n+1-k)},$$

这里用到到了组合公式 $C_n^{k-1}+C_n^k=C_{n+1}^k$. 这表明 Leibniz 公式对情形 $n+1$ 成立. 定理得证.

# 注记

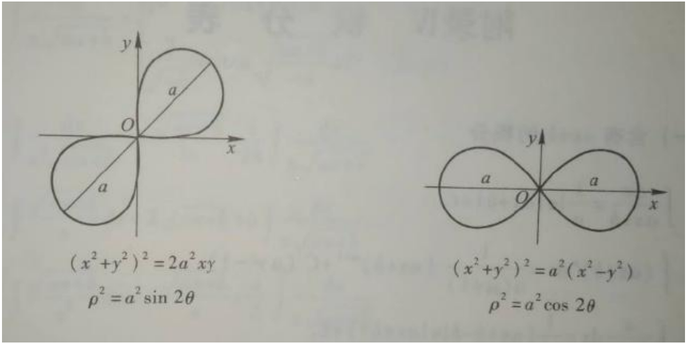
注一: 组合公式 $C_n^{k-1}+C_n^k=C_{n+1}^k$ 可如下直接证明:

$$C_n^{k-1}+C_n^k=\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}+\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$=\frac{n!}{k!(n+1-k)!}(k+n-k+1)=\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}=C_{n+1}^k.$$

注二. 组合公式 $C_n^{k-1}+C_n^k=C_{n+1}^k$ 可如下解释: 设一个箱子里有 n 个小球. 再往箱子里添加一个新球. 然后从中取出 k 个球, 共有 $C_{n+1}^k$ 取法. 另一方面, 取法分为两类: k 个球中包含新球和不包含新球. 显然不含新球的取法有 $C_n^k$ 种, 而包含新球的取法有 $C_n^{k-1}$ 种. 因此 $C_n^{k-1}+C_n^k=C_{n+1}^k$.

**例**: 由隐函数定理(下学期学)易证在点 $(1,1)$ 附近, 双纽线 $(x^2+y^2)^2=4xy$ (见下图) 确定了唯一一个 $C^\infty$ 函数 $y(x)$, $x\in(1-\delta,1+\delta)$, 满足 $y(1)=1$ 且 $[x^2+y^2(x)]^2=4xy(x)$, $\forall x\in(1-\delta,1+\delta)$. 求 $y''(1)$.



解：对恒等式 $[x^2+y^2(x)]^2 = 4xy(x)$ 两边求导得

$$2(x^2+y^2)(2x+2yy') = 4(y+xy') \text{ or } (x^2+y^2)(x+yy') = y+xy', \ (1)$$

其中 $y = y(x)$，$y' = y'(x)$. 对上式再次求导得

$$(2x+2yy')(x+yy') + (x^2+y^2)(1+[y']^2+yy'') = 2y'+xy''. \ (2)$$

在式 (1) 中，令 $(x,y) = (1,1)$ 得 $2\left[1+y'(1)\right] = 1+y'(1)$. 由此得 $y'(1) = -1$. 再将 $(x,y) = (1,1)$ 以及 $y'(1) = -1$ 代入等式 (2) 得

$$2(1-1)(1-1) + 2[1+1+y''(1)] = -2+y''(1).$$

解之得 $y''(1) = -6$. 解答完毕.

# 求由参数方程确定的函数之高阶导数，例子

例：设 $y=y(x)$ 由参数方程 $x=a(\theta-\sin\theta)$，$y=a(1-\cos\theta)$，$\theta\in(0,2\pi)$ 所确定的函数，其函数图像为旋轮线．求 $y''(x)$．旋轮线如图所示．

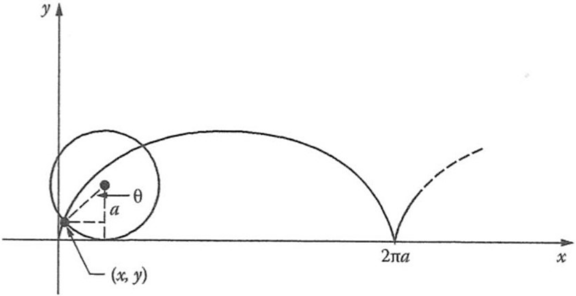



FIGURE 11

# 例子，续

<u>解</u>: 回忆已证 $y'(x) = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$，其中 $\theta = \theta(x)$ 是函数 $x = a(\theta - \sin\theta)$ 的反函数．于是

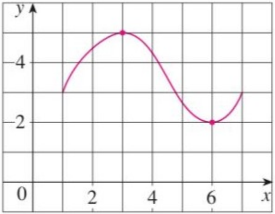
$$y''(x) = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{d\theta}\frac{d\theta}{dx} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\right)\frac{d\theta}{dx}$$

$$= \left(\frac{\cos\theta}{1-\cos\theta} - \frac{\sin^2\theta}{(1-\cos\theta)^2}\right)\cdot\frac{1}{a(1-\cos\theta)}$$

$$= \frac{\cos\theta(1-\cos\theta)-\sin^2\theta}{(1-\cos\theta)^2}\cdot\frac{1}{a(1-\cos\theta)} = \frac{-1}{a(1-\cos\theta)^2}.$$

解答完毕.

在工程和商业活动中，常需要确定一个函数在某个区间上的最大值和最小值. 例如在容积一定的情形下，罐头做成什么形状时，可使得表面积最小，以节省材料(成本). 如图为一函数图像.




易见在区间 $[1,7]$ 上，$f(3)=5$ 是最大值，而 $f(6)=2$ 是最小值.

# 极值与极值点

**Definition**

定义: 设 $f(x)$ 在开区间 $(a,b)$ 上定义, $x_0 \in (a,b)$.

(i) 若 $\exists \delta > 0$, 使得 $f(x) \geq f(x_0)$, $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$, 则称 $x_0$ 为函数 $f$ 的一个(局部)极小值点, 称 $f(x_0)$ 为函数 $f$ 的一个(局部)极小值.

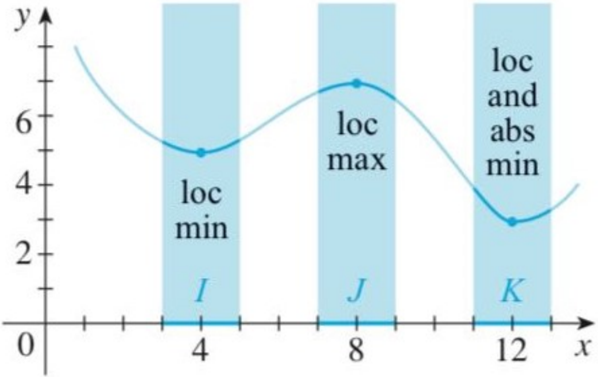
(ii) 若 $\exists \delta > 0$, 使得 $f(x) > f(x_0)$, $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)\backslash\{x_0\}$, 则称 $x_0$ 为函数 $f$ 的一个(局部)严格极小值点, 称 $f(x_0)$ 为函数 $f$ 的一个(局部)严格极小值.

(iii) 若 $\exists \delta > 0$, 使得 $f(x) \leq f(x_0)$, $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$, 则称 $x_0$ 为函数 $f$ 的一个(局部)极大值点, 称 $f(x_0)$ 为函数 $f$ 的一个(局部)极大值.

(iv) 若 $\exists \delta > 0$, 使得 $f(x) < f(x_0)$, $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)\backslash\{x_0\}$, 则称 $x_0$ 为函数 $f$ 的一个(局部)严格极大值点, 称 $f(x_0)$ 为函数 $f$ 的一个(局部)严格极大值.

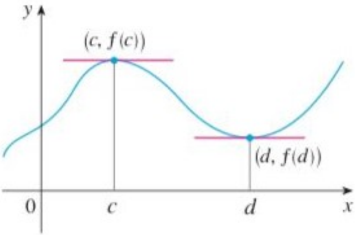
(v) 严格或非严格极大值和极小值均称作极值, 严格或非严格极大值点和极小值点均称作极值点.

# 极大极小(点)值图示



**Theorem**

定理 [Pierre Fermat, 1601-1665]: 设函数 $f(x)$ 在开区间上定义. 若点 $x_0 \in (a, b)$ 是 $f(x)$ 的一个极值点, 且 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处可导, 则 $f'(x_0) = 0$.



# 定理证明

Proof.

证明: 不妨设 $x_0$ 是极小点, 则由定义知存在 $\delta > 0$, 使得 $f(x) \geq f(x_0)$, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. 于是

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0),$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0, \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta).$$

在上述两个不等式中, 分别令 $x \to x_0^-$, 以及 $x \to x_0^+$, 并且根据函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 处的可导性知 $f'_-(x_0) \leq 0$ 且 $f'_+(x_0) \geq 0$. 因此 $f'(x_0) = 0$. 证毕. □

显然函数 $|x|$ 在 $x = 0$ 处取得极小值，但在点 $x = 0$ 处不可导.

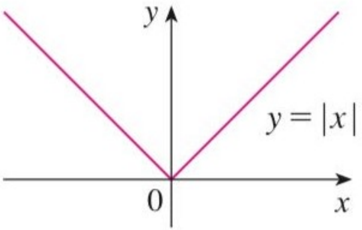



**FIGURE 12**

If $f(x) = |x|$, then $f(0) = 0$ is a minimum value, but $f'(0)$ does not exist.

**Definition**

定义: 函数 $f(x)$ 的导数之零点, 即 $f'(x) = 0$ 的点称为函数 $f(x)$ 的驻点 (stationary points) 或临界点 (critical points).

注: Fermat 定理的另一个说法: 假设函数在极值点处可导, 则极值点必为驻点.

# 驻点不必是极值点

例如函数 $x^3$ 有驻点 $x = 0$. 但这个驻点不是极值点. 如图所示.

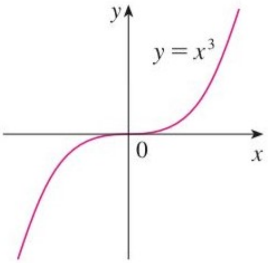



**FIGURE 11**
If $f(x) = x^3$, then $f'(0) = 0$ but $f$ has no maximum or minimum.

**Theorem**

定理 [Michel Rolle, 1652-1719]：设函数 $f$ 满足如下三个条件:

(i) $f$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续;

(ii) $f$ 在开区间 $(a, b)$ 上可导;

(iii) $f(a) = f(b)$,

则存在一点 $c \in (a, b)$，使得 $f'(c) = 0$.

# Rolle 定理图示

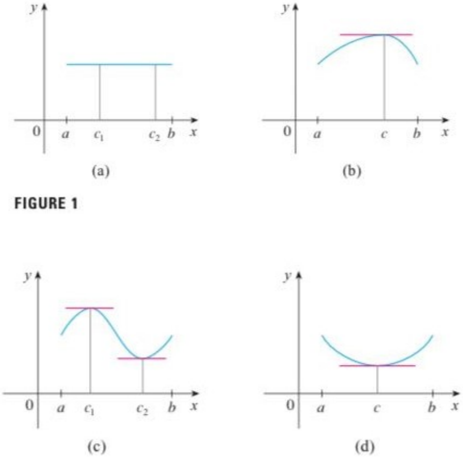



**FIGURE 1**

Proof.

证: 由连续函数最值性知，函数 $f$ 在 $[a,b]$ 上必取得最大最小值，即存在 $x_1, x_2 \in [a,b]$，使得 $f(x_1) = \min\{f(x), x \in [a,b]\}$，$f(x_2) = \max\{f(x), x \in [a,b]\}$. 若 $f(x_1) = f(x_2)$，则 $f$ 必为常数函数，从而有 $f'(x) = 0$, $\forall x \in (a,b)$. 设 $f(x_1) < f(x_2)$，则 $x_1$ 和 $x_2$ 不都是端点. 记不是端点的最值点为 $c$. 则根据 Fermat 定理知 $f'(c) = 0$. 证毕. □

# Rolle 定理的应用，例一

**Example**

例一：证明方程 $x^2 = x\sin x + \cos x$ 在实轴上恰有两个实根.

证：记 $f(x) = x^2 - x\sin x - \cos x$，则 $f(-\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2} > 0$，$f(0) = -1$，$f(\frac{\pi}{2}) = f(-\frac{\pi}{2}) > 0$. 由介值定理知 $f$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 和 $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ 上各至少有一个零点. 故方程 $x^2 = x\sin x + \cos x$ 在实轴上至少有两个不同的实根. 假设 $f$ 有三个零点，则 $f'(x)$ 至少有两个零点. 但是

$$f'(x) = 2x - \sin x - x\cos x + \sin x = x(2 - \cos x)$$

在实轴上仅有一个零点. 因此方程 $x^2 = x\sin x + \cos x$ 在实轴上恰有两个不同的实根. 证毕.

# 例二

**Example**

例二: 证明方程 $4ax^3+3bx^2+2cx=a+b+c$ 在区间 $(0,1)$ 上至少存在一个实根.

证: 将方程改写为 $4ax^3+3bx^2+2cx-(a+b+c)=0$. 观察知左端是函数

$$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2-(a+b+c)x$$

的导数, 即 $f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx-(a+b+c)$. 由于 $f(0)=0$, $f(1)$ $=a+b+c-(a+b+c)=0$, 故根据 Rolle 定理知, 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)=0$, 即方程 $4ax^3+3bx^2+2cx=a+b+c$ 在区间 $(0,1)$ 上至少存在一个实根. 证毕.

**Example**

例: 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续, 在开区间 $(0,1)$ 上可导. 进一步假设 $f(0)=f(1)=0$, $f(\frac{1}{2})=1$, 证明存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)=1$.

证: 考虑函数 $F(x)=f(x)-x$. 要证存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)=1$, 只要证 $F'(x)$ 在 $(0,1)$ 上有零点即可. 由假设条件知 $F(0)=0$, $F(\frac{1}{2})=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0$, $F(1)=0-1<0$. 由介值定理知存在 $x_0\in(\frac{1}{2},1)$, 使得 $F(x_0)=0$. 再对函数 $F(x)$ 在闭区间 $[0,x_0]$ 上应用 Rolle 定理, 知存在 $\xi\in(0,x_0)$, 使得 $F'(\xi)=0$, 此即 $f'(\xi)=1$. 证毕.

**Theorem**

定理 [Joseph-Louis Lagrange, 1736-1813]: 设函数 $f(x)$ 满足如下两个条件

(i) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续;

(ii) 在开区间 $(a, b)$ 上可导,

则存在点 $c \in (a, b)$, 使得 $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$, 或等价地

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

注: 当 $f(a) = f(b)$ 时, Lagrange 中值定理就是 Rolle 定理. 因此 Lagrange 中值定理可看作 Rolle 定理的推广.

# Lagrange 中值定理的几何意义

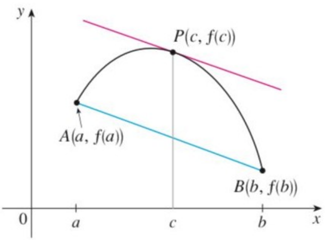



FIGURE 3

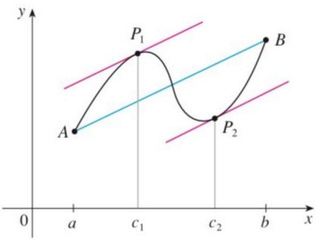
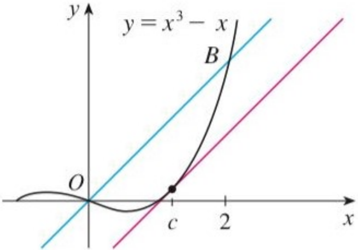



FIGURE 4

**Example**

例一: 考虑 $f(x) = x^3 - x$. 显然 $f$ 在 $\mathbb{R}$ 上处处可导. 对 $f$ 和区间 $[0, 2]$ 应用 Lagrange 中值定理知存在 $c \in (0, 2)$, 使得 $f(2) - f(0) = f'(c)(2 - 0)$, 即 $2^3 - 2 = (3c^2 - 1)(2 - 0)$ 即 $6 = 6c^2 - 2$. 解之得 $c^2 = \frac{4}{3}$, 即 $c = \frac{2}{\sqrt{3}}$.



# 例二

**Example**

例二: 设 $f(x)$ 在实轴上可导. 假设 $f(0)=-3$, 且 $f'(x)\leq 5$, $\forall x\in\mathbb{R}$. 问 $f(2)$ 可能有多大?

解: 在区间 $[0,2]$ 上应用 Lagrange 中值定理得 $f(2)-f(0)=f'(c)(2-0)$, 即

$$f(2)=f(0)+f'(c)(2-0)\leq -3+5\times 2=7.$$

这表明 $f(2)$ 的值不可能超过 7.

Example

例三: 设 $0 < a < b$, 证明

$$\frac{b-a}{b} < \ln\frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}.$$

证明: 根据 Lagrange 中值定理得

$$\ln\frac{b}{a} = \ln b - \ln a = \left(\ln x\right)'_{x=c}(b-a) = \frac{b-a}{c},$$

其中 $c \in (a,b)$. 于是

$$\frac{b-a}{b} < \frac{b-a}{c} < \frac{b-a}{a}.$$

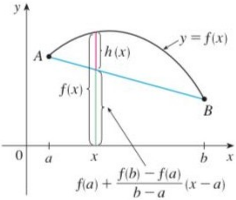
由此即得结论. 证毕.

证: 两点 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ 确定的直线方程为 $y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$.

令

$$h(x) \overset{\text{def}}{=} f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

函数 $h(x)$ 的几何意义如图所示.




不难验证函数 $h(x)$ 满足 Rolle 定理的条件. 特别 $h(a) = 0 = h(b)$. 于是存在 $c \in (a, b)$, 使得 $0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, 即 $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. 证毕. $\square$

# 推论一

**Corollary**

推论一：设函数 $f$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 $(a,b)$ 上可导，则 $f$ 为常数函数 $\Longleftrightarrow f'(x)\equiv 0,\ \forall x\in(a,b)$.

**Proof.**

证明：$\Rightarrow$：已证常数函数的导数恒为零.

$\Leftarrow$：设 $f'(x)\equiv 0,\ \forall x\in(a,b)$. 要证 $f(x)$ 为常数函数. 对于任意两点 $x_1,x_2\in[a,b]$，由 Lagrange 中值定理得 $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)=0$，其中 $\xi\in(x_1,x_2)$. 这说明 $f(x_2)=f(x_1)$，即 $f(x)$ 为常数函数. 命题得证. $\square$

# 推论二

**Corollary**

<u>推论二</u>: 设函数 $f, g$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 $(a, b)$ 上可导. 若 $f'(x) \equiv g'(x)$, $\forall x \in (a, b)$, 则 $g(x) \equiv f(x) + C$, 其中 $C$ 为常数. 换言之, 导数恒等的函数彼此相差一个常数.

# Lagrange 中值定理的另一种表现形式

Lagrange 中值定理断言，存在 $c \in (a, b)$，使得

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a),$$

其中不确定点 $c$ 可写作 $c = a + \theta(b - a)$，$\theta \in (0, 1)$，即不确定点 $c$ 转化为另一个不确定数 $\theta \in (0, 1)$. 对函数 $f(x)$ 在区间 $[x_0, x_0 + \triangle x]$ 上应用 Lagrange 中值定理，则可得到这个定理的一个常用的形式

$$\frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x} = f'(x_0 + \theta \triangle x), \quad \theta \in (0, 1)$$

$$\text{或} \quad f(x_0 + \triangle x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta \triangle x)\triangle x.$$

这个等式可与微分式 $f(x_0 + \triangle x) - f(x_0) = f'(x_0)\triangle x + o(\triangle x)$ 相比较.

**Theorem**

定理: 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 $(a,b)$ 上可导. 若对任意 $x\in(a,b)$, $f'(x)\geq 0(\leq 0)$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增(减).

**Proof.**

只证括号外情形: 对任意 $x_1,x_2\in[a,b]$, $x_1<x_2$, 应用 Lagrange 中值定理得 $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)\geq 0$, $\xi\in(x_1,x_2)$. 故 $f(x_2)\geq f(x_1)$. 因此 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增. 对于括号里的情形 $f'(x)\leq 0$, 证明完全类似. □

注: 当导数条件加强为 $f'(x)>0(<0)$, $\forall x\in(a,b)$, 则结论也加强为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调增(严格单调减).

习题一：课本第83页习题3.2题2：用求导的四则运算，求下列函数的导函数：

(1) $y = x^3 + 2\sqrt[3]{x} - \frac{1}{x^3} + \sqrt{2}$;

(2) $y = x\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 3x^{\frac{2}{3}}\right)$;

(3) $y = (x^2+1)(x-1)(3-x^3)$;

(4) $y = (x+x^2)^2$;

(5) $y = \frac{\tan x}{x}$;

(6) $y = e^x \cos x \ln x$;

(7) $y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

习题二：课本第83页习题3.2题4：利用复合函数求导法则，求下列函数导数：

(1) $y = 2\sin(3x)$;

(2) $y = \exp(x^2 - 2x + 3)$;

(3) $y = (1-x^3)^{\frac{3}{2}}$;

(4) $y=\sin(\cos^2 x)\cos(\sin^2 x)$;

(5) $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$;

(6) $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$;

(7) $y=\arcsin\left(\frac{1}{x}\right)$;

(8) $y=e^{-3x}\sin(2x)$.

习题三：课本第83页习题3.2题5：设 $f(x)$ 为可微函数，求下列函数的导函数

(1) $f(-x)$;

(2) $f(\sin^2 x)f(\cos(x^2))$;

(3) $f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$;

(4) $f(f(f(x)))$;

(5) $e^{f(x)}\tan\left(f(x^2)+f(2x)\right)$;

(6) $f(x)\ln\frac{1}{f(\sqrt{x})}$.

习题四：课本第83页习题3.2题6(1)(3)(5)：利用对数求导方法，求下列函数的导数：

(1) $y=\frac{x^2}{1-x}\sqrt{\frac{x+1}{1+x+x^2}}$;

(5) $y=(\ln x)^{\sin x}$;

(6) $y=x+x^x+x^{x^x}$.

习题五：课本第83页习题3.2题7：求下列函数的反函数导数

(1) $y=x+\ln x$;

(2) $y=x+e^x$;

(3) $y=\tanh x$;

(4) $y=\sinh x$.

注：函数 $\sinh x$ 和 $\tanh x$ 分别称为双曲正弦函数和双曲正切函数. 它们的定义为 $\sinh x\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$，$\tanh x\overset{\text{def}}{=}\frac{\sinh x}{\cosh x}$，$\cosh x\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$.

# 作业，续三

习题六：课本第84页习题3.2题8：假设下列各函数方程均确定了可导函数 $y = y(x)$，且导数 $y'(x)$：

(1) $xy = 1 + xe^y$;

(2) $(x^2 + y^2)^2 = 3x^2y - y^3$;

(3) $x - y - \arcsin y = 0$;

(4) $\arctan\frac{x}{y} = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$;

(5) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$;

(6) $x^y = y^x$.

习题七：课本第84页习题3.2题9：

(1) 求曲线 $xy + \ln y = 1$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线方程;

(2) 求曲线 $\frac{x^2}{100} + \frac{(y-2)^2}{64} = 1$ 在点 $(5\sqrt{3}, 6)$ 处的切线方程;

(3) 求曲线 $\cos(xy) - \ln\frac{x+1}{y} = 1$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程.

习题八：课本第84页习题3.2题10：求下列参数曲线的斜率 $y'(x)$：

(1) $x = \cos t$，$y = at\sin t$;

(2) $x = te^t$，$y = 2t + t^2$;

(3) $x = \frac{3at}{1+t^3}$，$y = \frac{3at^2}{1+t^3}$;

(4) $x = 3t^2 + 2t$，$e^y \sin t - y + 1 = 0$;

(5) 阿基米德螺线 $\rho = a\theta$;

(6) 对数螺线 $\rho = ae^{m\theta}$.

注：题(3)中的曲线称作笛卡尔叶形线. 原题中坐标 y 的参数方程似有误：分子应为 $3at^2$，而不是 $3at^3$.

习题九：课本第84页习题3.2题12：证明近似公式

$$\sqrt[n]{a^n + x} \simeq a + \frac{x}{na^{n-1}},$$

其中 $a > 0$，$|x| \ll a^n$，并利用这个近似公式

(1) 求 $\sqrt[3]{29}$ 的近似值，(2) 求 $\sqrt[10]{1000}$ 的近似值.