

《微积分A1》第十五讲

教师 杨利军

清华大学数学科学系

2025年11月10日

答题卡图片

试卷类型 A ☒ B ☐

清华大学 示例

本科生专用试卷

填 涂 说 明

1. 请考生按照自己的准考证号, 将准考证号填涂于下。

2. 请考生将答题卡上的信息, 填涂于准考证号下方。

3. Please use 02 pencil to fill in the student ID number and write on answer ID sheet.

4. This must answer by the answer sheet. Writing on the back answer sheet is invalid.

学号									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	1	0	1	0	1	0	1
3	2	1	0	1	0	1	0	1	0
4	3	2	1	0	1	0	1	0	1
5	4	3	2	1	0	1	0	1	0
6	5	4	3	2	1	0	1	0	1
7	6	5	4	3	2	1	0	1	0
8	7	6	5	4	3	2	1	0	1
9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
0	9	8	7	6	5	4	3	2	1

正读填涂 ☒ 错读标记 ☐

单项选择题

1. [A] [B] [C] [D] 9. [A] [B] [C] [D] 17. [A] [B] [C] [D] 25. [A] [B] [C] [D]

2. [A] [B] [C] [D] 10. [A] [B] [C] [D] 18. [A] [B] [C] [D] 26. [A] [B] [C] [D]

3. [A] [B] [C] [D] 11. [A] [B] [C] [D] 19. [A] [B] [C] [D] 27. [A] [B] [C] [D]

4. [A] [B] [C] [D] 12. [A] [B] [C] [D] 20. [A] [B] [C] [D] 28. [A] [B] [C] [D]

5. [A] [B] [C] [D] 13. [A] [B] [C] [D] 21. [A] [B] [C] [D] 29. [A] [B] [C] [D]

6. [A] [B] [C] [D] 14. [A] [B] [C] [D] 22. [A] [B] [C] [D] 30. [A] [B] [C] [D]

7. [A] [B] [C] [D] 15. [A] [B] [C] [D] 23. [A] [B] [C] [D] 31. [A] [B] [C] [D]

8. [A] [B] [C] [D] 16. [A] [B] [C] [D] 24. [A] [B] [C] [D] 32. [A] [B] [C] [D]

考 场 纪 律

一、考生必须遵守考场纪律, 服从监考, 严禁携带任何与考试无关的物品进入考场。

二、考生必须遵守考场纪律, 严禁携带任何与考试无关的物品进入考场, 严禁携带任何与考试无关的物品进入考场。

三、考生必须遵守考场纪律, 严禁携带任何与考试无关的物品进入考场, 严禁携带任何与考试无关的物品进入考场。

四、考生必须遵守考场纪律, 严禁携带任何与考试无关的物品进入考场, 严禁携带任何与考试无关的物品进入考场。

五、考生必须遵守考场纪律, 严禁携带任何与考试无关的物品进入考场, 严禁携带任何与考试无关的物品进入考场。

院系 (Department): 数学

姓名 (Name): XXX

日期 (Date): 2023 年 03 月 08 日

学号 (Seat): 数学

考试类别 (Course): 微积分A1

第1页 共1页

函数的凸性

Definition

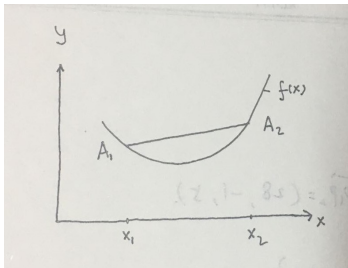
定义: 设函数 $f(x)$ 在 (a, b) 上定义. 若对曲线 $\Gamma: y = f(x)$ 上的任意两个点 $A_1 = (x_1, y_1), A_2 = (x_2, y_2) \in \Gamma$, 曲线段 A_1A_2 位于直线段 $\overline{A_1A_2}$ 的下方(上方), 即

$$f(x) \leq (\geq) f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1), \quad \forall x \in (x_1, x_2)$$

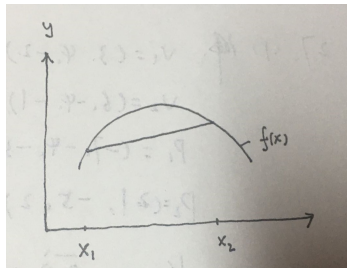
则称函数 $f(x)$ 下凸(上凸). 如果上述不等式严格成立, 则称函数 $f(x)$ 严格下凸(严格上凸).

注: 下凸 (convex downward) 也称为上凹 (concave upward), 上凸 (convex upward) 也称为下凹 concave downward.

凸性图示



下凸 convex downward



上凸 convex upward

等价定义

Definition

定义: 设函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上定义, 若对 $\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 \neq x_2$, 对 $\forall \lambda \in (0, 1)$,

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq (\geq) \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2),$$

则称 $f(x)$ 于区间 (a, b) 下凸(上凸). 若不等式严格成立, 则称 $f(x)$ 为严格下凸的(严格上凸的).

注: 显然 $f(x)$ 下凸(上凸), 当且仅当 $-f(x)$ 上凸(下凸). 例如抛物线 $y = x^2$ 下凸, 而抛物线 $y = -x^2$ 上凸.

两个定义的等价性证明

证明: 只证明下凸情形. 要证两个定义等价, 即要证明, 对于 $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$,
 $x_1 < x_2$,

$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1), \quad \forall x \in (x_1, x_2), \quad (*)$$

$$\iff f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2), \quad (**)$$

其中 $\forall \lambda \in (0, 1)$.

\Rightarrow : 设 $(*)$ 成立. 对 $\forall \lambda \in (0, 1)$, 记 $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$, 则

$$\lambda = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \quad 1 - \lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

于是根据不等式 $(*)$ 得

等价性证明, 续一

$$\begin{aligned}f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) &\leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1), \\&= f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} [f(x_2) - f(x_1)] \\&= f(x_1) + (1 - \lambda) [f(x_2) - f(x_1)] \\&= \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).\end{aligned}$$

即不等式(**) 成立.

\Leftarrow : 假设式(**) 成立, 即 $f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$,

$\forall \lambda \in (0, 1)$. 对任意 $x \in (x_1, x_2)$, 则 x 可表为

$$x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \quad \lambda = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \quad 1 - \lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

等价性证明, 续二

于是

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \\ &= \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) = f(x_1) - \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) \\ &= f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (x - x_1), \end{aligned}$$

即不等式(*)成立. 等价性得证. □

凸性的充要条件, Jensen 不等式

Theorem

定理: 函数 $f(x)$ 在 (a, b) 下凸 $\iff f(x)$ 满足 Jensen 不等式, 即对于

$$\forall n \geq 2, \forall x_1, \dots, x_n \in (a, b), \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1, \lambda_i > 0,$$

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i). \quad (*)$$

注一: 显然关于上凸的平行结论同样成立, 即函数 $f(x)$ 在 (a, b) 上凸, 当且仅当不等式 $(*)$ 中不等号改为 \geq 成立.

注二: 满足不等式 $(*)$ 的函数 $f(x)$ 称为具有次线性性.

注三: 对于 $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1, \lambda_i > 0$, 组合 $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ 称为点 x_1, x_2, \dots, x_n 的一个凸组合.

定理证明

证明: \Leftarrow : 当 $n = 2$ 时, Jensen 不等式如下

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2),$$

其中 $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. 由下凸的等价定义知 $f(x)$ 下凸.

\Rightarrow : 设 $f(x)$ 下凸, 要证 Jensen 不等式成立. 当 $n = 2$ 时, Jensen 不等式就是下凸的等价定义, 结论成立. 设当 $n = k$ 时, Jensen 不等式成立. 考虑 $n = k + 1$ 情形. 对于任意 $k + 1$ 个点 $x_1, \dots, x_k, x_{k+1} \in (a, b)$, 任意 $k + 1$ 个正实数 $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \lambda_{k+1} > 0$, 且 $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 1$, 由于 $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i$ 可以如下表示

$$\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i = \lambda_{k+1} x_{k+1} + (1 - \lambda_{k+1}) \frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i}{1 - \lambda_{k+1}}.$$

因此

$$f\left(\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i\right) = f\left(\lambda_{k+1} x_{k+1} + (1 - \lambda_{k+1}) \frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i}{1 - \lambda_{k+1}}\right)$$

证明, 续

$$\begin{aligned} &\leq \lambda_{k+1}f(x_{k+1}) + (1 - \lambda_{k+1})f\left(\frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i}{1 - \lambda_{k+1}}\right) \\ &= \lambda_{k+1}f(x_{k+1}) + (1 - \lambda_{k+1})f\left(\sum_{i=1}^k \mu_i x_i\right), \end{aligned}$$

其中 $\mu_i = \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{k+1}} > 0, i = 1, 2, \dots, k$. 注意

$$\sum_{i=1}^k \mu_i = \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{k+1}} = \frac{1 - \lambda_{k+1}}{1 - \lambda_{k+1}} = 1.$$

由于结论对 $n = k$ 成立, 故 $f(\sum_{i=1}^k \mu_i x_i) \leq \sum_{i=1}^k \mu_i f(x_i)$. 因此

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i\right) &\leq \lambda_{k+1}f(x_{k+1}) + (1 - \lambda_{k+1})f\left(\sum_{i=1}^k \mu_i x_i\right) \\ &\leq \lambda_{k+1}f(x_{k+1}) + (1 - \lambda_{k+1}) \sum_{i=1}^k \mu_i f(x_i) \leq \lambda_{k+1}f(x_{k+1}) + \sum_{i=1}^k \lambda_i f(x_i) \end{aligned}$$

$= \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i f(x_i)$, 即结论对 $n = k + 1$ 时成立. 定理得证.

凸性的充要条件

Theorem

定理: 函数 $f(x)$ 在 (a, b) 下凸

\iff 对任意 $x_1, x_2, x_3 \in (a, b)$, $x_1 < x_2 < x_3$,

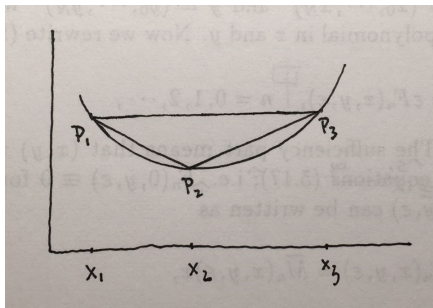
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}, \quad (*)$$

\iff 对任意 $x_1, x_2, x_3 \in (a, b)$, $x_1 < x_2 < x_3$,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}. \quad (**)$$

注: 条件(*)和(**)可以粗略地表述为, 割线斜率单调上升.

几何意义



对于曲线上的任意三个点 P_1, P_2, P_3 .

条件 (*) 的几何意义: $\overline{P_1P_2}$ 的斜率 $\leq \overline{P_2P_3}$ 的斜率;

(**) 的几何意义: $\overline{P_1P_2}$ 的斜率 $\leq \overline{P_1P_3}$ 的斜率 $\leq \overline{P_2P_3}$ 的斜率.

定理证明(可忽略)

先证条件(*) \Leftrightarrow (**). \Leftarrow 显然成立. \Rightarrow : 回忆分数不等式: 若 $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$, 其中 $b, d > 0$, 则 $\frac{a}{b} \leq \frac{a+c}{b+d} \leq \frac{c}{d}$. 因此当条件(*) 成立时, 即

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2},$$

于是
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1) + f(x_3) - f(x_2)}{x_2 - x_1 + x_3 - x_2} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

即
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

故条件(**) 成立.

再证 $f(x)$ 下凸 \Leftrightarrow 条件(*). 条件(*) 成立, 即

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

$$\Leftrightarrow (x_3 - x_2)[f(x_2) - f(x_1)] \leq (x_2 - x_1)[f(x_3) - f(x_2)]$$

证明, 续

$$\Leftrightarrow (x_3 - x_2)f(x_2) - (x_3 - x_2)f(x_1) \leq (x_2 - x_1)f(x_3) - (x_2 - x_1)f(x_2)$$

$$\Leftrightarrow (x_3 - x_2)f(x_2) + (x_2 - x_1)f(x_2) \leq (x_2 - x_1)f(x_3) + (x_3 - x_2)f(x_1)$$

$$\Leftrightarrow (x_3 - x_1)f(x_2) \leq (x_3 - x_2)f(x_1) + (x_2 - x_1)f(x_3)$$

$$\Leftrightarrow f(x_2) \leq \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}f(x_3).$$

注意 $x_2 \in (x_1, x_3)$ 是任意的. 记 x_2 为 x , 记

$$\lambda = \frac{x_3 - x}{x_3 - x_1}, \quad 1 - \lambda = 1 - \frac{x_3 - x}{x_3 - x_1} = \frac{x - x_1}{x_3 - x_1},$$

则有 $f(x) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_3)$, $\forall x \in (x_1, x_3)$. 这正是 $f(x)$ 在 (a, b) 下凸的等价定义. 证毕. □

一阶导数与凸性

定理: 设 $f(x)$ 于开区间 (a, b) 可导, 则 $f(x)$ 于 (a, b) 下凸(严格下凸) \iff $f'(x)$ 单调增(严格单调增).

证: 只证括号外情形. \Rightarrow : 设 $f(x)$ 下凸. 要证 $\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2$, $f'(x_1) \leq f'(x_2)$. 对 $\forall x \in (x_1, x_2)$, 由下凸性质知

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

于上式分别令 $x \rightarrow x_1^+$, $x \rightarrow x_2^-$ 得

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2).$$

由此得 $f'(x_1) \leq f'(x_2)$, 即导数 $f'(x)$ 单调增.

证明, 续

\Leftarrow : 假设 $f'(x)$ 单增, 要证 $f(x)$ 下凸. 对 $\forall x_1, x_2, x_3 \in (a, b)$, 且 $x_1 < x_2 < x_3$, 两次应用 Lagrange 中值定理知

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi_1), \quad \xi_1 \in (x_1, x_2),$$

$$\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = f'(\xi_2), \quad \xi_2 \in (x_2, x_3).$$

由 $f'(x)$ 的单调增性质知 $f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$. 于是

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

这表明函数 $f(x)$ 下凸. 证毕. □

二阶导数与凸性

Theorem

定理: 设函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 上二阶可导, 则

(i) $f(x)$ 下凸 $\iff f''(x) \geq 0, \forall x \in (a, b)$;

(ii) $f(x)$ 严格下凸 $\iff f''(x) \geq 0, \forall x \in (a, b)$ 且 $f''(x)$ 在 (a, b) 的任何子区间上不恒为零.

证明: 利用上述定理, 以及严格单调增函数的充要条件即可得到结论. 细节略.

例子

例: 考虑旋轮线 $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ 的凸性, 其中 $\theta \in (0, 2\pi)$, $a > 0$.

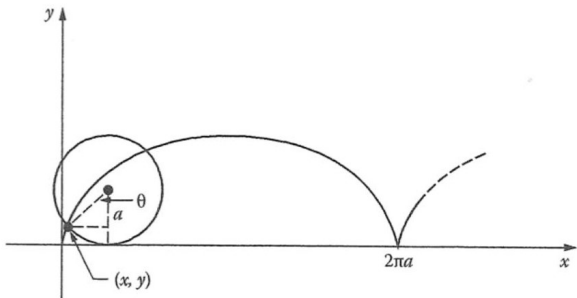


FIGURE 11

例子, 续

解: 设旋轮线是 $y = f(x)$ 的函数曲线, 已求得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(\theta)}{x'(\theta)} = \frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta},$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \frac{dy}{dx} = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{dy}{dx} \right) \frac{d\theta}{dx} = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta} \right) \frac{1}{a(1 - \cos\theta)} \\ &= \left(\frac{\cos\theta}{1 - \cos\theta} - \frac{\sin^2\theta}{(1 - \cos\theta)^2} \right) \frac{1}{a(1 - \cos\theta)} \\ &= \frac{\cos\theta - 1}{a(1 - \cos\theta)^3} = \frac{-1}{a(1 - \cos\theta)^2} < 0, \quad \forall \theta \in (0, 2\pi).\end{aligned}$$

因此旋轮线是严格上凸的. 解答完毕.

注: 也可以直接由一阶导数看出曲线是上凸的. 因为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} = \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} = \cotan\frac{\theta}{2}.$$

由于 $\cotan\frac{\theta}{2}$ 关于 θ 是严格单调下降的, 且 $\theta = \theta(x)$ 也是严格单调增的, 其中函数 $\theta(x)$ 是 $x = a(\theta - \sin\theta)$ 的反函数, 故一阶导数 $\frac{dy}{dx}$ 关于 x 是严格单调下降的. 因此曲线严格上凸.

算术几何平均不等式的凸函数证明

定理: 设 a_1, a_2, \dots, a_n 为 n 个正实数, 则

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}, \quad (*)$$

证: 考虑函数 $f(x) = \ln x$, $x \in (0, +\infty)$. 由于 $f'(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格单调下降, 故 $f(x)$ 于 $(0, +\infty)$ 上凸. 于是由 Jensen 不等式得

$$\begin{aligned} & \ln \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \right) \\ & \geq \frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n}{n} = \ln (a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

这显然等价于算术几何平均不等式 (*). 证毕. □

凸性的切线判别

Theorem

定理: 设函数 $f(x)$ 于 (a, b) 可导, 则 $f(x)$ 于 (a, b)

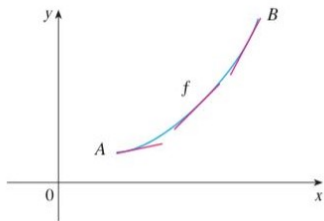
(1) 下凸 $\iff \forall x_0 \in (a, b), f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \forall x \in (a, b)$. (*)

(2) 上凸 $\iff \forall x_0 \in (a, b), f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \forall x \in (a, b)$. (**)

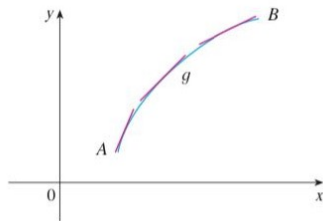
注一: 不等式 (*) 和 (**) 的几何意义分别是, 曲线位于切线之上和之下.

注二: 定理证明留作习题(课本第 120 页习题 4.5 习题 9).

切线判据图示



(a) Concave upward



(b) Concave downward

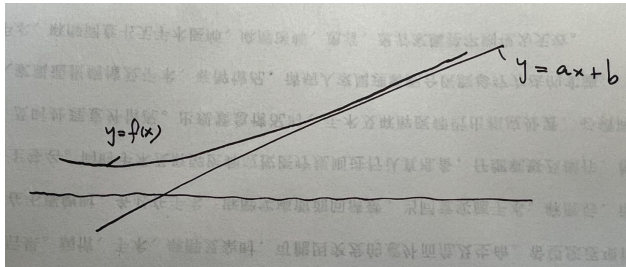
例子

例: 设函数 $y = f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上二次可导, 且 $f''(x) > 0, \forall x > 0$, 并且

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ (此时也说, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 曲线 $y = f(x)$ 有渐

近线 $y = ax + b$. 稍后将详细讨论渐近线.) 证明曲线 $y = f(x)$ 严格位于渐近

线的上方, 即 $f(x) > ax + b, \forall x > 0$.



例子, 续

证: 令 $g(x) = f(x) - ax - b$, 则要证 $g(x) > 0, \forall x > 0$. 由于 $g''(x) = f''(x) > 0, \forall x > 0$, 故函数 $g(x)$ 严格下凸. 根据凸性的切线判据知, 对任意 $x_0 > 0$, $g(x) > g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0), \forall x \neq x_0$. 根据假设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ 可知 $g'(x_0) \leq 0$. 由于 $x_0 > 0$ 任意, 故 $g'(x) \leq 0, \forall x > 0$. 故 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调下降.

(i) 若存在 $x_1 > 0$, 使得 $g(x_1) < 0$, 则 $g(x) \leq g(x_1) < 0, \forall x > x_1$. 此与假设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ 相矛盾. 故 $g(x) \geq 0, \forall x > 0$.

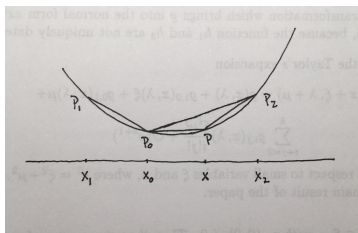
(ii) 若存在 $x_2 > 0$, 使得 $g(x_2) = 0$, 那么根据 $g(x)$ 的单调下降性质, 并且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$, 可知 $g(x) \equiv 0, \forall x > x_2$. 但这与 $g''(x) > 0$ 相矛盾. 因此 $g(x) > 0, \forall x > 0$. 这就证明了即 $f(x) > ax + b, \forall x > 0$. 命题得证. \square

开区间上的凸函数必连续, 定理证明(可忽略)

Theorem (参见课本第125页第四章总复习题第19题)

定理: 开区间上的凸函数必为连续函数.

证明: 设函数 $f(x)$ 于开区间 (a, b) 下凸, 以下证 $f(x)$ 在任意点 $x_0 \in (a, b)$ 处连续, 即要证 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续且右连续. 只证右连续, 因为左连续证明基本相同. 取两个固定点 x_1, x_2 , 使得 $x_1 < x_0 < x_2$. 再取点 $x \in (x_0, x_2)$, 如图所示.

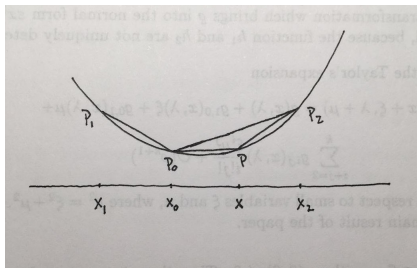


证明, 续一

由 f 的凸性有

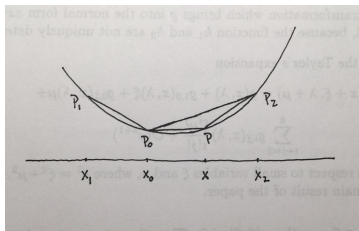
$\overline{P_1P_0}$ 的斜率 $\leq \overline{P_0P}$ 的斜率 $\leq \overline{P_0P_2}$ 的斜率,

$$\text{即 } \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$$



于上述不等式同乘以 $x - x_0 > 0$ 得

证明, 续二

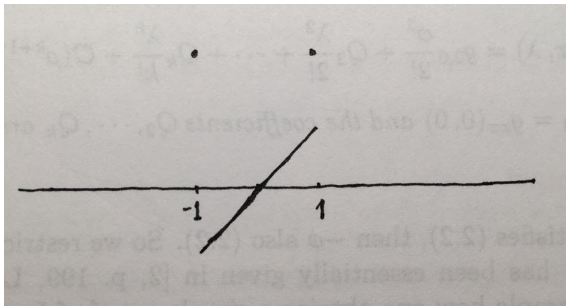


$$\frac{x - x_0}{x_0 - x_1} [f(x_0) - f(x_1)] \leq f(x) - f(x_0) \leq \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} [f(x_2) - f(x_0)].$$

令 $x \rightarrow x_0^+$ 可知 $f(x) \rightarrow f(x_0)$. 这表明 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续. 同理可证 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续. 证毕. □

闭区间上的凸函数未必连续

例: 设 $f(x) = x$, $x \in (-1, 1)$, $f(\pm 1) = 2$. 如图所示.



易见 $f(x)$ 于闭区间 $[-1, 1]$ 下凸. 显然 $f(x)$ 在闭区间 $[-1, 1]$ 的两个端点处均不连续.

凸函数单侧导数的存在性(可忽略)

Theorem (参见课本第125页第四章总复习题第19题)

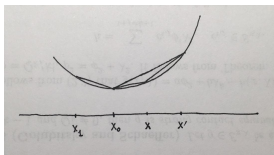
定理: 开区间上的任意下(上)凸函数, 处处存在两个单侧导数.

证明: 设 $f(x)$ 与开区间 (a, b) 下凸, $x_0 \in (a, b)$. 考虑函数

$$\triangle(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad \forall x \in (x_0, b).$$

固定一个 $x_1 < x_0$. 对任意两点 $x' > x > x_0$, 由 $f(x)$ 的下凸性得

$$\frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0}.$$



故 $\triangle(x)$ 在区间 (x_0, b) 上单调上升, 且有下界. 回忆单调函数在任意点处的左右极限都存在且左右极限都等于相应的上下确界, (见课本第40页例2.2.6) 即

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \inf\{\triangle(x), x \in (x_0, b)\}.$$

这表明 $f(x)$ 在点 x_0 处的右导数 $f'_+(x_0)$ 存在. 同理可证左导数 $f'_-(x_0)$ 也存在. 证毕.

左右导数的单调性(可忽略)

Theorem

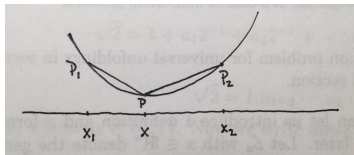
定理: 设函数 $f(x)$ 于 (a, b) 下凸, 则

$$(i) f'_-(x) \leq f'_+(x), \forall x \in (a, b);$$

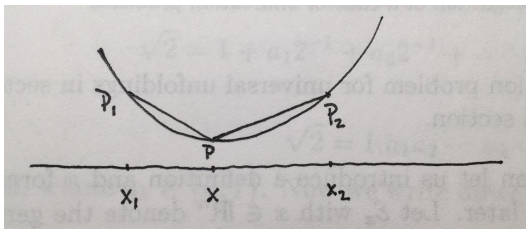
$$(ii) f'_+(x) \leq f'_-(y), \forall x, y \in (a, b), x < y.$$

证: 任取一点 $x \in (a, b)$, 并在点 x 的左右各取一点 $x_1 < x < x_2$. 根据函数 $f(x)$ 的下凸性质可知,

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$



证明, 续一



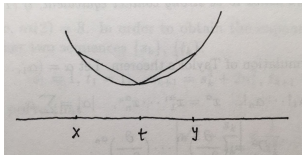
固定 x , 令 $x_1 \rightarrow x^-$ 得

$$f'_-(x) \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

于上式中, 令 $x_2 \rightarrow x^+$, 即得 $f'_-(x) \leq f'_+(x)$. 结论(i)成立.

证明, 续二

证(ii). 对任意 $x, y \in (a, b)$, $x < y$, 取 $t \in (x, y)$. 如图所示.



由 $f(x)$ 的下凸性知

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \leq \frac{f(y) - f(t)}{y - t}.$$

于上式中, 分别令 $t \rightarrow x^+$, 令 $t \rightarrow y^-$ 得

$$f'_+(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'_-(y).$$

结论 (ii) 得证. □

例子

例子: 设 a_1, a_2, \dots, a_n 为 n 个不全等的正数. 定义

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0, \\ \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}, & x = 0. \end{cases}$$

证明 $f(x)$ 在实轴 \mathbb{R} 严格单调上升.

注一: 特殊情形 $f(0) < f(1)$ 就是熟知的算数几何平均不等式 $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} < \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$.

注二: 以下两个极限的证明留作补充习题:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \min\{a_1, a_2, \dots, a_n\}.$$

例子, 续一

证: 情形一: $0 < \alpha < \beta$. 要证 $f(\alpha) < f(\beta)$, 即要证

$$\left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \cdots + a_n^\alpha}{n} \right)^{\frac{1}{\alpha}} < \left(\frac{a_1^\beta + a_2^\beta + \cdots + a_n^\beta}{n} \right)^{\frac{1}{\beta}}. \quad (*)$$

记 $p = \frac{\beta}{\alpha}$, 则 $p > 1$. 再记 $b_i = a_i^\alpha$, 则 $b_i^p = a_i^\beta$, $i = 1, 2, \dots, n$, 则待证的不等式 (*) 可写作

$$\left(\frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n} \right)^p < \frac{b_1^p + b_2^p + \cdots + b_n^p}{n}. \quad (**)$$

对于 $p > 1$, 由于 $[x^p]'' = p(p-1)x^{p-2} > 0, \forall x > 0$, 故 x^p 为严格下凸函数.

因此不等式 (**) 成立, 从而不等式 (*) 成立.

再在不等式 (*) 中, 固定 $\beta > 0$, 令 $\alpha \rightarrow 0^+$, 并利用熟知的极限

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \cdots + a_n^\alpha}{n} \right)^{\frac{1}{\alpha}} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n},$$

即可得到

例子, 续二

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} < \left(\frac{a_1^\beta + a_2^\beta + \cdots + a_n^\beta}{n} \right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

此即 $f(0) < f(\beta)$, $\forall \beta > 0$.

情形二: 设 $\alpha < \beta < 0$. 此时有 $0 < -\beta < -\alpha$. 对于数组 $a_1^{-1}, a_2^{-1}, \dots, a_n^{-1}$ 应用情形一的结论得

$$\begin{aligned} & \left(\frac{[a_1^{-1}]^{-\beta} + [a_2^{-1}]^{-\beta} + \cdots + [a_n^{-1}]^{-\beta}}{n} \right)^{\frac{1}{-\beta}} \\ & < \left(\frac{[a_1^{-1}]^{-\alpha} + [a_2^{-1}]^{-\alpha} + \cdots + [a_n^{-1}]^{-\alpha}}{n} \right)^{\frac{1}{-\alpha}}, \end{aligned}$$

$$\text{即} \quad \left(\frac{a_1^\beta + a_2^\beta + \cdots + a_n^\beta}{n} \right)^{\frac{1}{-\beta}} < \left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \cdots + a_n^\alpha}{n} \right)^{\frac{1}{-\alpha}},$$

$$\text{亦即} \quad \left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \cdots + a_n^\alpha}{n} \right)^{\frac{1}{\alpha}} < \left(\frac{a_1^\beta + a_2^\beta + \cdots + a_n^\beta}{n} \right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

例子, 续三

此即 $f(\alpha) < f(\beta)$, $\forall \alpha < \beta < 0$. 于上式固定 α , 令 $\beta \rightarrow 0^-$ 得

$$\left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \cdots + a_n^\alpha}{n} \right)^{\frac{1}{\alpha}} < \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

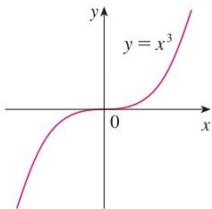
此即 $f(\alpha) < f(0)$, $\forall \alpha < 0$. 这就证明了 $f(x)$ 在实轴 \mathbb{R} 严格单调上升. □

拐点

Definition

定义: 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 附近的两侧有不同的凸性, 即一侧是下凸, 另一侧是上凸, 则称点 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线 $y = f(x)$ 的拐点 (inflection points). 有时也称 $x = x_0$ 为拐点.

例: 函数 $y = x^3$ 有拐点 $(0, 0)$. 因为 $y'' = 6x$, 当 $x < 0$ 时, 函数上凸; 当 $x > 0$ 时, 函数下凸. 如图所示.



拐点的必要条件

Theorem

定理: 若 $(x_0, f(x_0))$ 是函数 $f(x)$ 的拐点, 且 $f''(x_0)$ 存在, 则 $f''(x_0) = 0$.

证: 因 $f''(x_0)$ 存在, 故 $f'(x)$ 在某邻域 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 存在. 由于 $(x_0, f(x_0))$ 是拐点, 故函数在 x_0 的两侧凸性不同. 不妨设 $f(x)$ 于 $(x_0 - \delta, x_0)$ 下凸, 于 $(x_0, x_0 + \delta)$ 上凸. 由一阶导数与凸性定理知, $f'(x)$ 于 $(x_0 - \delta, x_0)$ 单调增, 于 $(x_0, x_0 + \delta)$ 单调减. 故 $f'(x)$ 在点 x_0 处有极大值. 由 Fermat 定理知 $f''(x_0) = 0$. 定理得证. □

例子

例: 求曲线 $y = f(x) = (x-1)^3(x+1)$ 的凸性区间以及拐点.

解: 先计算一阶和二阶导数

$$y' = 3(x-1)^2(x+1) + (x-1)^3 = 2(x-1)^2(2x+1);$$

$$y'' = 4(x-1)(2x+1) + 4(x-1)^2 = 12x(x-1).$$

- (i) 因为 y'' 在两个点 $x_1 = 0$ 和 $x_2 = 1$ 处均改变了符号, 从而曲线改变了凸性, 因此点 $(x_1, y_1) = (0, -1)$ 和 $(x_2, y_2) = (1, 0)$ 为曲线 $y = f(x)$ 的两个拐点, 其中 $y_1 = f(x_1) = -1$, $y_2 = f(x_2) = 0$,
- (ii) 当 $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ 时, $y'' > 0$, 故曲线下凸.
- (iii) 当 $x \in (0, 1)$ 时, $y'' < 0$, 故曲线上凸. 解答完毕.

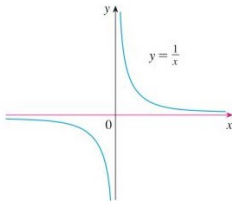
垂直渐近线 (vertical asymptotes)

Definition

定义: 设 $f(x)$ 在点 x_0 的单侧邻域 $(x_0 - \delta, x_0)$ 或 $(x_0, x_0 + \delta)$ 内定义. 若

$\lim_{x \rightarrow x_0^+} |f(x)| = +\infty$ 或 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} |f(x)| = +\infty$, 则称函数 $f(x)$ 有垂直渐近线 $x = x_0$.

例: 函数 $y = \frac{1}{x}$ 有垂直渐近线 $x = 0$.



水平渐近线(horizontal asymptotes)

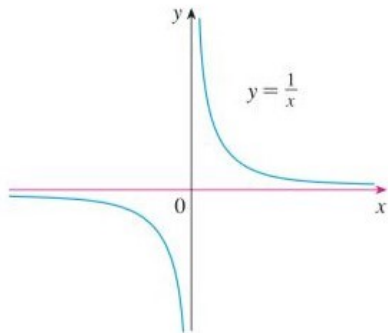
Definition

定义: (i) 当 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上定义, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = C$, 则称函数 $f(x)$ 有水平渐近线 $y = C$.

(ii) 当 $f(x)$ 在 $(-\infty, b]$ 上定义, 且 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = C$, 也称函数 $f(x)$ 有水平渐近线 $y = C$.

例一

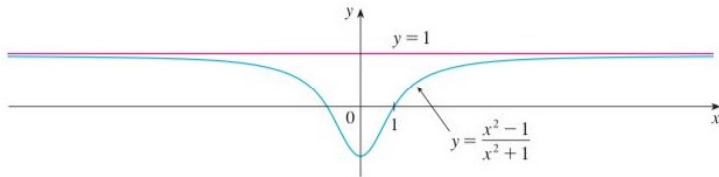
例一: 函数 $y = \frac{1}{x}$ 有水平渐近线 $y = 0$.



例二

例二: 函数 $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ 有水平渐近线 $y = 1$. 因为

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1.$$



斜渐近线(slant asymptotes), 例子

Definition

定义: 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上定义. 称直线 $y = kx + b$ 为函数 $f(x)$ 的斜渐近线, 如果 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (kx + b)] = 0$.

注: 显然水平渐近线是斜渐近线的特殊情形, 即 $k = 0$ 的情形. 当 $f(x)$ 在 $(-\infty, b]$ 上定义时, 类似可定义函数 $f(x)$ 的(负向)斜渐近线.

Example

例: 函数 $y = x + 2 - \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上有斜渐近线 $y = x + 2$. 因为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(x + 2 - \frac{1}{x} \right) - (x + 2) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} = 0.$$

同理, 函数 $y = x + 2 - \frac{1}{x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 上有相同的斜渐近线 $y = x + 2$.

斜渐近线的存在性

Theorem

定理: 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上定义, 则 $f(x)$ 有斜渐近线 \iff

(i) 极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 极限值记作 k ;

(ii) 极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx]$ 存在, 极限值记作 b .

当条件 (i) 和 (ii) 成立时, $f(x)$ 有斜渐近线 $y = kx + b$.

例: 考虑 $f(x) = x + 2 - \frac{1}{x}$. 验证条件 (i), (ii):

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 2 - \frac{1}{x}}{x} = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x + 2 - \frac{1}{x} - x] = 2.$$

因此函数 $f(x)$ 有斜渐近线 $y = x + 2$.

定理证明

证明: \Rightarrow : 当 $f(x)$ 有渐近线 $y = kx + b$ 时, 即

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (kx + b)] = 0, \quad (*)$$

$$\text{则} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[f(x) - (kx + b)]}{x} = 0.$$

由此可知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k$. 即条件 (i) 成立. 再根据极限式 (*) 可知

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] = b$. 即条件 (ii) 成立.

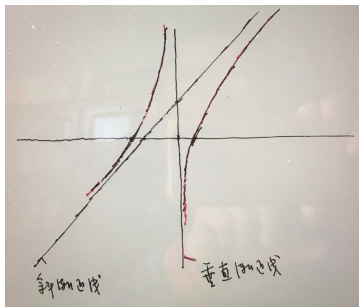
\Leftarrow : 假设条件 (i) 和 (ii) 成立, 则由 (ii), 即 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx]$ 存在, 其极限值记作 b . 于是 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (kx + b)] = 0$. 即函数 $f(x)$ 有斜渐近线 $y = kx + b$. 定理得证. □

注: 实际上 $f(x)$ 有斜渐近线 \Longleftrightarrow 存在 k , 使得极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx]$ 存在.

条件 (i) 显得多余. 但条件 (i) 提供了求 k 的方法, 即 $k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

例子

例: 仍考虑曲线 $y = x + 2 - \frac{1}{x}$. 已求得曲线的一条斜渐近线 $y = x + 2$. 此外曲线还有一条垂直渐近线 $x = 0$, 即 y 轴. 因为 $\lim_{x \rightarrow 0^{\pm}} [x + 2 - \frac{1}{x}] = \mp \infty$. 曲线 $y = x + 2 - \frac{1}{x}$ 的函数图像, 及其渐近线如图所示.



函数作图的一般步骤

为定性地画出 $y = f(x)$ 的函数图像, 需要确定函数如下性质:

1. 定义域;
2. 是否有奇偶性, 周期性, 对称性;
3. 单调区间与极值点(利用一阶导数);
4. 凸性和拐点(利用二阶导数);
5. 渐近线;
6. 特殊点, 例如零点等;
7. 定性作图.

例一

例一: 考虑函数 $f(x) = x^4 - 4x^3$. 简单计算得

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3),$$

$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2).$$

1. 驻点: 易见函数有两个驻点 $x = 0$, $x = 3$. 由于 $f''(3) = 36 > 0$, 故 $x = 3$ 是极小点, 极小值为 $f(3) = -27$. 因 $f''(0) = 0$, 故不能用二阶导数来确定驻点 $x = 0$ 是否为极值点. 因 $f'(x) = 4x^2(x - 3) \leq 0, \forall x \in (-\infty, 3)$, 且仅在 $x = 0$ 处为零, 故 $f(x)$ 在这个区间里严格单调下降. 因此驻点 $x = 0$ 不是极值点.

2. 单调区间: 如上所述在区间 $(-\infty, 3)$ 上, $f'(x) = 4x^2(x - 3) \leq 0$, 故函数严格单调减. 在区间 $(3, +\infty)$ 上, $f'(x) > 0$, 故函数严格单调增.

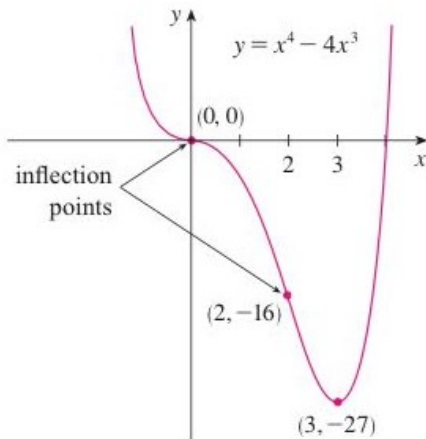
例一, 续一

3. 拐点: 根据 $f''(x) = 12x(x - 2)$ 不难看出函数有两个拐点 $(x, y) = (0, 0)$, $(x, y) = (2, -16)$. 函数的凸性区间如下表所述.

区间	$f''(x) = 12x(x - 2)$	凸性
$(-\infty, 0)$	+	下凸
$(0, 2)$	-	上凸
$(2, +\infty)$	+	下凸

4. 根据以上信息, 不难画出函数图像.

例一, 续二



例二

例二: 定性地画出函数 $f(x) = x^{2/3}(6-x)^{1/3}$ 的函数图像.

解: (1). 函数有两个特殊点, 即不可导点 $x = 0$ 和 $x = 6$;

(2). 是否存在渐近线? 考虑

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^{2/3}(6-x)^{1/3}}{x} = \left(\frac{6}{x} - 1\right)^{\frac{1}{3}} \rightarrow -1, \quad |x| \rightarrow +\infty.$$

再考虑

$$\begin{aligned} f(x) + x &= x \left[1 - \left(1 - \frac{6}{x} \right)^{\frac{1}{3}} \right] \\ &= x \left[1 - \left(1 - \frac{6}{x} \cdot \frac{1}{3} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) \right] = x \left[\frac{2}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \right] \rightarrow 2, \end{aligned}$$

当 $|x| \rightarrow +\infty$. 因此函数有渐近线 $y = -x + 2$.

例二, 续一

(3). 计算 $f(x)$ 的一阶和二阶导数

$$f'(x) = \frac{4-x}{x^{1/3}(6-x)^{2/3}}, \quad f''(x) = \frac{-8}{x^{4/3}(6-x)^{5/3}}.$$

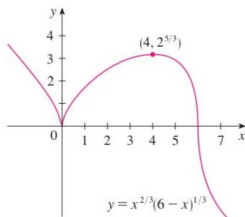
由此可得函数单调区间如下.

区间	$4-x$	$x^{1/3}$	$(6-x)^{2/3}$	$f'(x)$	$f(x)$
$(-\infty, 0)$	+	-	+	-	↓
$(0, 4)$	+	+	+	+	↑
$(4, 6)$	-	+	+	-	↓
$(6, +\infty)$	-	+	+	-	↓

例二, 续二

(4). 由上述表格可知 $x = 0$ 是极小值点, $x = 4$ 是极大值点, 而点 $x = 6$ 不是极值点.

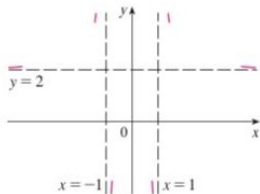
(5). 考虑函数的凸性. 注意 $f''(x) < 0, \forall x \in (-\infty, 0) \cup (0, 6)$. 故函数于这两个区间上凸. 由于 $f''(x) > 0, \forall x \in (6, +\infty)$, 故函数于这个区间下凸. 此外 $f(x)$ 在 $x = 6$ 处不可微, 其对应的点 $(x, y) = (6, 0)$ 是拐点. 函数的图像如图所示.



例三

例三: 考虑曲线 $y = f(x) = \frac{2x^2}{x^2-1}$ 的函数图像.

1. 定义域为 $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$;
2. 曲线经过原点 $(0, 0)$;
3. 曲线关于 y 轴对称, 即函数 $f(x)$ 是偶函数;
4. 曲线有两条垂直渐近线 $x = \pm 1$, 因为 $\lim_{x \rightarrow \pm 1} \frac{2x^2}{x^2-1} = +\infty$;
5. 曲线还有一条水平渐近线 $y = 2$ 因为 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2-1} = 2$.



例三, 续一

6. 由

$$f'(x) = \frac{4x(x^2 - 1) - 2x^2 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$$

可知 (i) 在 $(-\infty, 0) \setminus \{-1\}$ 上, $f'(x) > 0$, 故 $f(x) \uparrow$ 严格;

(ii) 在 $(0, +\infty) \setminus \{1\}$ 上, $f'(x) < 0$, 故 $f(x) \downarrow$ 严格.

(iii) 函数有唯一驻点 $x = 0$, 且驻点 $x = 0$ 是极大值点.

7. 计算二阶导数

$$f''(x) = \frac{-4}{(x^2 - 1)^2} + \frac{4x \cdot 2 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^3} = \frac{12x^2 + 4}{(x^2 - 1)^3}.$$

由此可见 (i) 当 $|x| < 1$ 时, $f''(x) < 0$, 函数上凸; (ii) 当 $|x| > 1$ 时,

$f''(x) > 0$, 函数下凸; (iii) 函数无拐点.

8. 综合上述信息可得函数图形如下

例三, 续二

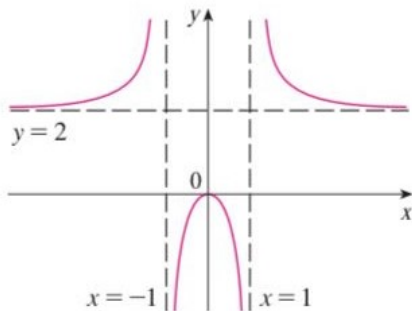


FIGURE 6

Finished sketch of $y = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$

例四

例四: 考虑曲线 $y = f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$.

1. 定义域为 \mathbb{R} ;
2. 曲线经过原点 $(0, 0)$;
3. 曲线关于原点对称, 即函数 $f(x)$ 为奇函数;
4. 无水平渐近线, 无垂直渐近线;
5. 函数有斜渐近线 $y = x$. 因为

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x(x^2+1)} = 1, \quad \text{且}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{x^3}{x^2+1} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - x^3 - x}{x^2+1} = 0;$$

6. 计算一阶导数

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2+1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}.$$

这表明 $f'(x) > 0, \forall x \neq 0$, 从而函数在 \mathbb{R} 上严格单调上升;

例四, 续一

7. 计算二阶导数

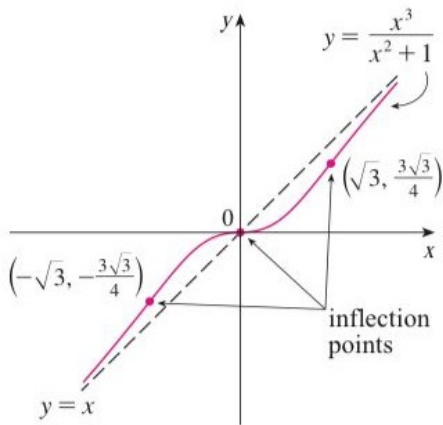
$$f''(x) = \frac{2x(x^2 + 3) + x^2 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} - \frac{x^2(x^2 + 3) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^3} = \frac{2x(3 - x^2)}{(x^2 + 1)^3}.$$

由此可得函数的三个拐点 $(-\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{4})$, $(0, 0)$, $(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{4})$, 以及函数的凸性区间如下:

区间	x	$3 - x^2$	$(x^2 + 1)^3$	$f''(x)$	凸性
$(-\infty, -\sqrt{3})$	$-$	$-$	$+$	$+$	下凸
$(-\sqrt{3}, 0)$	$-$	$+$	$+$	$-$	上凸
$(0, \sqrt{3})$	$+$	$+$	$+$	$+$	下凸
$(\sqrt{3}, +\infty)$	$+$	$-$	$+$	$-$	上凸

例四, 续二

8. 综合上述信息可得函数 $y = \frac{x^3}{x^2+1}$ 的图像如下.



习题一. 课本第119页习题4.5题1: 确定下列函数的上凸域下凸区间, 以及拐点.

(1) $y = 3x^2 - x^3$;

(2) $y = \ln(x^2 + 1)$;

(3) $y = x + \sin x$;

(4) $y = xe^{-x}$;

(5) $y = (x - 1)x^{\frac{2}{3}}$;

(6) $y = 2 + (x - 4)^{\frac{1}{3}}$.

习题二. 课本第119页习题4.5题2: 求常数 a, b , 使得点 $(1, 3)$ 是曲线 $y = ax^3 + bx^2$ 的拐点.

习题三. 课本第119页习题4.5题3: 求六次多项式 $f(x)$, 使得曲线 $y = f(x)$

(i) 经过原点 $(0, 0)$;

(ii) 有拐点 $(-1, 1)$ 和 $(1, 1)$;

(iii) 在原点和两个拐点处有水平的切线.

习题四. 课本第120页习题4.5题4: 设函数 $y = f(x)$ 由参数方程 $x = 3\cos^3 t$, $y = 3\sin^3 t$ ($0 < t < \pi$) 确定, 讨论函数 $y = f(x)$ 的凸性.

习题五. 课本第120页习题4.5题5: 利用凸函数的性质, 证明下列不等式

(1) 设 $a > 0$ 则对任意 $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, 成立 $a^{\frac{x_1+x_2}{2}} \leq \frac{1}{2}(a^{x_1} + a^{x_2})$;

(2) 对 $\forall x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0, p \geq 1$, 则

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right)^p \leq \frac{x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p}{n}.$$

(3) 对 $\forall x_1, x_2, \dots, x_n > 0, \forall a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0, \sum_{k=1}^n a_k = 1$, 成立

$$x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n} \leq a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n.$$

习题六. 课本第120页习题4.5题6: 设

(i) f, g 均为区间 $[a, b]$ 上的下凸函数;

(ii) 函数 f 单调上升;

(iii) 复合函数 $f \circ g$ 有意义, 即 $g[a, b] \subset [a, b]$, 证明复合函数 $f \circ g$ 是区间 $[a, b]$ 上的下凸函数.

习题七. 课本第120页习题4.5题7: 设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 内的下凸函数, 证明

$$\max_{a \leq x \leq b} f(x) = \max \{f(a), f(b)\}.$$

习题八. 课本第120页习题4.5题8: 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可微, 且为下凸. 若存在 $x_0 \in (a, b)$, 使得 $f'(x_0) = 0$, 证明 x_0 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最小值点.

习题九. 课本第120页习题4.5题9: 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 证明 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上是下凸的, 当且仅当

$$\forall x_0, x \in (a, b), \quad f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

(注: 上述不等式的几何意义是, 曲线 $y = f(x)$ 上任意点处的切线, 均位于曲线的下方).

作业, 续四

补充题: 设 a_1, a_2, \dots, a_n 为 n 个正数. 证明

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}} = \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\};$$

$$(ii) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}} = \min\{a_1, a_2, \dots, a_n\}.$$

注: 补充题是必做题