《微积分A1》第八讲

教师 杨利军

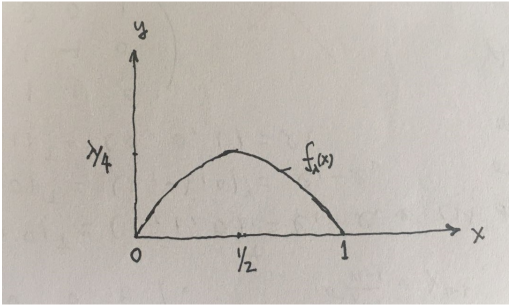
清华大学数学科学系

2025年10月15日

Logistic 映射

设 $f_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$. 不难证明当 $\lambda \in [0,4]$ 时, $f_\lambda : [0,1] \hookleftarrow$, 即由区间 $[0,1]$ 到自身的映射. 这个著名映射称为 Logistic 映射.

建议同学们 Google 一下 Logistic maps, 或百度一下 Logistic 映射.



周期点

Definition

定义: 点 $x_0 \in J$ 称为映射 $f: J \hookleftarrow$ 的 k 周期点, 如果

$$f^j(x_0) \neq x_0, \quad j = 1, 2, \cdots, k-1, \quad f^k(x_0) = x_0.$$

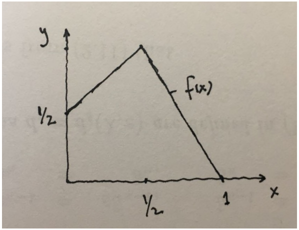
特别 1 周期点又称为不动点, 即 $f(x_0) = x_0$.

注: 当 $x_0 \in J$ 为 k 周期点时, 其轨道 $\{f^n(x_0)\}_{n \geq 0}$ 为 k 个点 $x_0, f(x_0), \cdots, f^{k-1}(x_0)$ 的无穷次重复. 此时轨道可简单地记作 $\{x_0, f(x_0), \cdots, f^{k-1}(x_0)\}$.

例子

考虑函数

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 2(1 - x), & x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$



显然 $x = 0$ 是 3 周期点: $f(0) = \frac{1}{2}$, $f(\frac{1}{2}) = 1$, $f(1) = 0$.

几个简单事实

Lemma

引理一: 设 x_0 为映射 $f: J \hookleftarrow$ 的 k 周期点, 则 k 个点 $x_0, f(x_0), \cdots, f^{k-1}(x_0)$ 两两互异.

Lemma

引理二: 设 x_0 为映射 $f: J \hookleftarrow$ 的 k 周期点. 若 $f^n(x_0) = x_0$, 则 n 为 k 的倍数, 即 $n = mk$.

Lemma

引理三: 设函数 $f: J = [a, b] \hookleftarrow$ 连续, 则 f 必有 1 周期点, 即不动点.

简单事实，续

Lemma

引理四：设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 连续．若 f 有 2 周期点，则 f 有 1 周期点，即不动点．

Lemma

引理五：设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 连续．若 f 的值域包含定义域，即 $f([a,b])\supseteq[a,b]$，则 f 有不动点．

以上引理一至引理五的证明均留作习题．

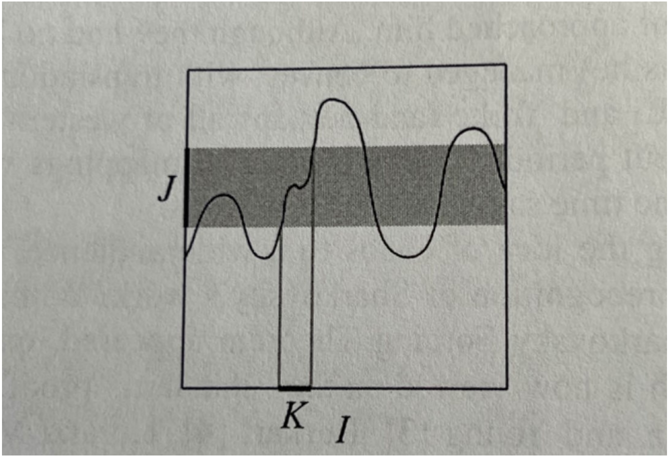
引理六，记号

Lemma

引理六：设函数 $f(x)$ 在闭区间 I 上连续. 如果值域 $f(I)$ 包含一个闭区间 J，即 $f(I) \supseteq J$，那么存在一个闭子区间 $K \subseteq I$，使得 $f(K) = J$，且 f 映射区间 K 的端点为区间 J 的端点，映区间 K 的内部为区间 J 的内部. 也就是说，如果我们记 $K = [c, d]$，$J = [a, b]$，则 $\{f(c), f(d)\} = \{a, b\}$，$f((c, d)) = (a, b)$.

记号：条件 $f(I) \supseteq J$ 将记作 $I \xrightarrow{f} J$ 或 $I \to J$.

引理六的图形证明



解析证明

证: 设 $J = [a, b]$. 由于 $f(I) \supset J$, 故存在 $x \in I$, 使得 $f(x) = a$. 记 c 为象点 a 的最大原象, 即 $c = \max\{x \in I, f(x) = a\}$, 则 $f(c) = a$.

情形1: $\exists x \in I$ 且 $x > c$, 使得 $f(x) = b$, 取 $d = \min\{x \in I, x > c, f(x) = b\}$, 则 $f(d) = b$, 且 $f([c, d]) = [a, b]$. 命题得证.

情形2: $\exists x \in I$ 且 $x < c$, 使得 $f(x) = b$, 取 $c' = \max\{x \in I, x < c, f(x) = b\}$, $d' = \min\{x \in I, x > c', f(x) = a\}$, 则 $f([c', d']) = [a, b]$. 引理六得证.

引理七, 及其证明

Lemma

引理七: 设 $f: J \hookleftarrow$ 连续, $J_k \subseteq J$, $k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$ 为 J 的 n 个有界闭子区间. 若

$$J_0 \to J_1 \to J_2 \to \cdots \to J_{n-2} \to J_{n-1} \to J_0,$$

则存在 $x_0 \in J_0$, 使得 $f^n(x_0) = x_0$, $f^k(x_0) \in J_k$, $k = 1, 2, \cdots, n-1$.

证: 为清晰计, 考虑情形 $n = 5$. 此时引理假设为 $J_0 \to J_1 \to J_2 \to J_3 \to J_4 \to J_0$. 反复应用引理六, 我们有如下结论:

(i) 由 $J_3 \to J_4$ 知, $f(J_3) \supseteq J_4$, 故存在闭区间 $J_3^0 \subseteq J_3$, 使得 $f(J_3^0) = J_4$.

(ii) 由 $J_2 \to J_3$ 知, $f(J_2) \supseteq J_3 \supseteq J_3^0$, 故存在闭区间 $J_2^0 \subseteq J_2$, 使得 $f(J_2^0) = J_3^0$.

(iii) 由 $J_1 \to J_2$ 知, $f(J_1) \supseteq J_2 \supseteq J_2^0$, 故存在闭区间 $J_1^0 \subseteq J_1$, 使得 $f(J_1^0) = J_2^0$.

(iv) 由 $J_0 \to J_1$ 知, $f(J_0) \supseteq J_1 \supseteq J_1^0$, 故存在闭区间 $J_0^0 \subseteq J_0$, 使得 $f(J_0^0) = J_1^0$.

证明，续

于是 $f^4(J_0^0) = J_4$. 因为

$$f^4(J_0^0) = f^3(f(J_0^0)) = f^3(J_1^0) = f^2(f(J_1^0))$$

$$= f^2(J_2^0) = f(f(J_2^0)) = f(J_3^0) = J_4.$$

再根据假设 $J_4 \to J_0$，即 $f(J_4) \supseteq J_0$ 得

$$f^5(J_0^0) = f(f^4(J_0^0)) = f(J_4) \supseteq J_0 \supseteq J_0^0.$$

由引理五可知存在 $x_0 \in J_0^0$，使得 $f^5(x_0) = x_0$.

现断言 $f^k(x_0) \in J_k$，$k = 1, 2, 3, 4$. 理由如下.

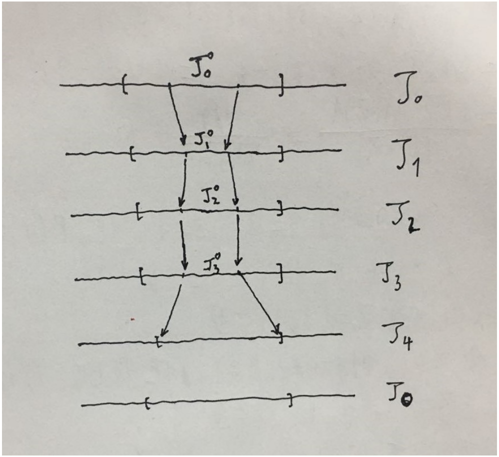
(1) 由于 $f(J_0^0) = J_1^0$，故 $f(x_0) \in J_1^0 \subseteq J_1$.

(2) 由于 $f^2(J_0^0) = J_2^0 \subseteq J_2$，故 $f^2(x_0) \in J_2$.

(3) 由于 $f^3(J_0^0) = J_3^0 \subseteq J_3$，故 $f^3(x_0) \in J_3$.

(4) 由于 $f^4(J_0^0) = J_4$，故 $f^4(x_0) \in J_4$. 引理得证.

引理七证明图示, $n = 5$ 情形

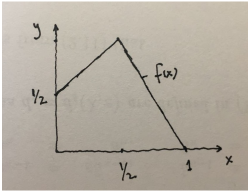


Li-Yorke 第一定理

Theorem

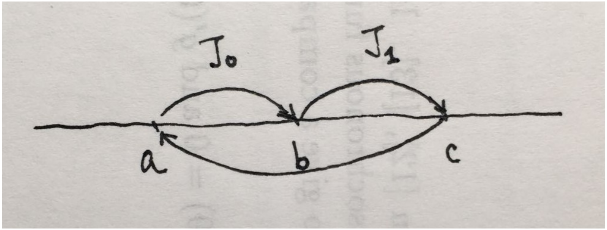
第一定理 [Tienyien Li & James Yorke, 1975]: 设 $f: J \hookleftarrow$ 连续. 若 f 有 3 周期点, 则对任意正整数 n, f 有 n 周期点.

例: 之前已指出, 函数 $f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 2(1-x), & x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$



有 3 周期点 $x = 0$, 因为 $f(0) = \frac{1}{2}$, $f(\frac{1}{2}) = 1$, $f(1) = 0$. 根据 Li-Yorke 第一定理可知, f 在区间 $[0, 1]$ 上拥有任意正整数 n 的周期点.

证明大意: 假设连续函数 $f: J \hookleftarrow$ 有一个 3 周期点, 要证对任意正整数 n, f 有 n 周期点. 设 $\{a, b, c\} \subset J$ 是 f 的一个 3 周期轨道, 且 $f(a) = b$, $f(b) = c$, $f(c) = a$. 不妨设 $a < b < c$, 其他情形类似处理. 记 $J_0 = [a, b]$, $J_1 = [b, c]$, 则 $f(J_0) \supseteq J_1$, $f(J_1) \supseteq J_0 \cup J_1 = [a, c]$. 如图所示.



证明，续一

(i) 1 周期点的存在性. 由于 $f(J_1) \supseteq J_1$，根据引理五可知 f 在区间 $J_1 = [b, c]$ 中存在不动点，即存在 1 周期点.

(ii) 2 周期点的存在性. 由 $J_0 \to J_1 \to J_0$ 知，$f(J_0) \supseteq J_1$ 且 $f(J_1) \supseteq J_0$. 故 $f^2(J_0) \supseteq J_0$. 根据引理七可知映射 f^2 存在不动点 $x_0 \in J_0$，即 $f^2(x_0) = x_0$ 且 $f(x_0) \in J_1$. 如果 x_0 的最小周期不是 2，则 x_0 是 f 的不动点，即 $f(x_0) = x_0$. 由于 $x_0 = f(x_0) \in J_0 \cap J_1 = [a, b] \cap [b, c] = \{b\}$，故 $x_0 = b$. 但是 b 不是 f 的 1 周期点，而是 3 周期点. 矛盾. 因此 x_0 是 f 的 2 周期点.

证明，续二

(iii) 对 $\forall n \geq 4$，n 周期点的存在性．记 $J_k = J_1 = [b, c]$，$k = 2, 3, \cdots, n-1$，于是

$$J_0 \to J_1 \to J_2 \to \cdots \to J_{n-1} \to J_0.$$

由引理七知存在 $x_0 \in J_0$，使得 $f^n(x_0) = x_0$，$f^k(x_0) \in J_k = J_1$，$k = 1, 2, \cdots, n-1$．若 x_0 是 f 的 n 周期点，命题得证．若 x_0 不是 f 的 n 周期点，则存在正整数 p，$1 \leq p < n$，使得 $f^p(x_0) = x_0$．由于 $f^p(x_0) \in J_p = J_1 = [b, c]$ 且 $x_0 \in J_0 = [a, b]$．故 $x_0 = b$ 即 x_0 是 3 周期点．一方面 $f^2(x_0) = f^2(b) = f(c) = a$．另一方面 $a = f^2(x_0) \in J_2 = [b, c]$．矛盾．因此 x_0 的最小周期为 n．定理证毕．

Li-Yorke 第二定理

Theorem

Li-Yorke 第二定理: 设 $f : J \hookleftarrow$ 连续. 假设 f 存在 3 周期点, 则存在不可数子集 $S \subset J$, 使得对 $\forall x, y \in S$, $x \neq y$

(i) $\underline{\lim}_{n \to +\infty} |f^n(x) - f^n(y)| = 0$;

(ii) $\overline{\lim}_{n \to +\infty} |f^n(x) - f^n(y)| > 0$;

(iii) $\overline{\lim}_{n \to +\infty} |f^n(x) - f^n(p)| > 0$, $\forall x \in S$, $p \in \mathcal{P}$, 其中 $\mathcal{P}$ 记所有周期点集合.

注: 结论(i)和(ii)表明, 集合 S 上的任意两点 $x, y \in S$ $(x \neq y)$ 的轨道 $\{f^n(x)\}$ 和 $\{f^n(y)\}$ 既无穷次靠近, 也无穷次隔离, 忽分忽合, 若即若离. 因此 f 在 S 上的运动(迭代)呈现出混乱的状态. 于是 Li-Yorke 引入了如下混沌概念.

Li-Yorke 混沌定义

Definition

定义: 如果 $f: J \hookleftarrow$ 满足如下条件:

(i) f 的周期点的最小周期无上界;

(ii) 存在不可数子集 $S \subset J$, 使得对任何两点 $x, y \in S$, $x \neq y$,

$$\overline{\lim}_{n\to+\infty}|f^n(x) - f^n(y)| > 0,$$

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty}|f^n(x) - f^n(y)| = 0,$$

则称由 f 在区间 J 上所定义的动力系统是混沌的(chaotic).

Lemma

引理八: 设 $f:[a,b] \hookleftarrow$ 连续. 若存在两个点 $c,d \in [a,b]$, $c<d$, 使得 $f(d) \le c < d \le f(c)$, 则 f 有 2 周期点.

证: 由于 $f([c,d]) \supset [c,d]$, 故由引理五知 f 在 $[c,d]$ 上有不动点. 记 w 为 f 在 $[c,d]$ 中最小不动点, 即 $w = \min\{x \in [c,d], f(x) = x\}$. 由于 $f(w) = w < d \le f(c)$, 即 $d \in (f(w), f(c)]$, 故存在 $v \in [c,w)$, 使得 $f(v) = d$. 于是 $f^2(v) = f(d) \le c \le v$.

情形一: f 在 $[a,c]$ 上没有不动点. 此时 f 在 $[a,w)$ 上也没有不动点. 由于 $f^2(a) \ge a$, $f^2(v) \le v$, 故存在 $\xi \in [a,v]$, 使得 $f^2(\xi) = \xi$. 由于 f 在 $[a,v] \subset [a,w)$ 上没有不动点. 故 ξ 不是 f 的不动点. 故 ξ 为 f 的 2 周期点. 命题得证.

证明，续

情形二：f 在 $[a, c]$ 上存在不动点. 记 t 是 f 在 $[a, c]$ 上最大的不动点，即 $t = \max\{x \in [a, c], f(x) = x\}$，则 f 在开区间 $(t, v) \subset (t, w)$ 上没有不动点. 由于 $c \in (f(t), f(c)) = (t, f(c))$，故存在 $u \in (t, c)$，使得 $f(u) = c$. 于是 $f^2(u) = f(c) \geq d > c > u$. 因此 $f^2(u) > u$ 且 $f^2(v) \leq v$. 故存在 $\eta \in (u, v]$，使得 $f^2(\eta) = \eta$. 又由于 f 在 $[u, v]$ 上没有不动点，故 η 是 f 在 $(u, v]$ 上的 2 周期点.

命题得证.

任意周期 $n \geq 3$ 蕴含周期 2

Theorem

定理: 设 $f : [a,b] \hookleftarrow$ 连续. 假设 f 存在 n-周期点, 且 $n \geq 3$, 则 f 存在 2-周期点.

注: 正是由于 Sharkovsky 首先发现了这个结论, 才导致他最终得到著名的 Sharkovsky 定理.

证: 设 $P = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 是 f 的一个 n 周期点集合, $n \geq 3$, 且 $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. 显然 $f(x_1) > x_1$ 且 $f(x_n) < x_n$. 取 $x_s = \max\{x \in P, f(x) > x\}$, 则正整数 s: $1 \leq s < n$. 于是 $f(x_{s+1}) \leq x_s < x_{s+1} \leq f(x_s)$. 再根据引理八知, f 存在 2-周期点. 定理得证.

下述正整数的排序称为 Sharkovsky 序(1965):

$$
\begin{array}{ccccc}
3, & 5, & 7, & 9, & \cdots \\
2\times 3, & 2\times 5, & 2\times 7, & 2\times 9, & \cdots \\
2^2\times 3, & 2^2\times 5, & 2^2\times 7, & 2^2\times 9, & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\end{array}
$$

$$\cdots, \quad 2^n, \quad 2^{n-1}, \quad \cdots, \quad 2^2, \quad 2, \quad 1.$$

<u>记号</u>: 如果按照上述 Sharkovsky 排序, 正整数 n 排在正整数 m 之前, 则记作 $n \rhd m$ 或 $m \lhd n$. 于是 $3 \rhd m$, $\forall m \neq 3$. 如果定义上述排序为由大到小的排序, 那么 3 最大, 1 最小.

Theorem

定理 [Sharkovsky, 1965]: 设 $f: J \hookleftarrow$ 连续, 其中 J 为一区间, 若 f 有 n 周期点, 则对任意正整数 $m \lhd n$, f 有 m 周期点.

注一: 显然 Li-Yorke 第一定理是 Sharkovsky 定理的一个特殊情形. 也就是说, 当 f 有 3 周期点时, 则对任意正整数 m, f 有 m 周期点.

注二: 有许多 Sharkovsky 定理的证明, 可参见 A collection of simple proofs of Sharkovsky's theorem (2007), http://arxiv.org/abs/math/0703592

迭代序列收敛的两个特征

Theorem

定理一: 设 $f:[a,b] \hookleftarrow$ 连续, 即 f 为闭区间 $[a,b]$ 到自身的连续映射. 若点 $x \in [a,b]$ 满足 $(f^{n+1}(x) - f^n(x)) \to 0$, $n \to +\infty$, 则序列 $\{f^n(x)\}$ 收敛.

Theorem

定理二: 设 $f:[a,b] \hookleftarrow$ 连续, 即 f 是闭区间 $[a,b]$ 到自身的连续函数. 若 f 没有 2-周期点, 则任意点 $x \in [a,b]$ 的轨道 $\{f^n(x)\}$ 均收敛.

选作题: 证明定理一和(或)定理二. 解答直接交给老师. 定理二的证明可获得总成绩加分1分或2分的奖励. 本学期结束之前提交均有效.

Definition

定义: 设函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上有定义, $x_0 \in (a,b)$. 若极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad 或 \quad \lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(x_0+\triangle x)-f(x_0)}{\triangle x}$$

存在, 则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, 且上述极限值称为 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数 (derivative), 记作 $f'(x_0)$ 或 $Df(x_0)$ 或 $\frac{df}{dx}(x_0)$, $\cdots$.

注: 式 $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 通常称为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的差商 (difference quotient). 因此导数就是差商的极限.

例一，例二

Example

<u>例一</u>：常数函数处处可导，且导数恒为零．即对于常数函数 $f(x) = C$，$f'(x) = 0$．因为

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{C - C}{x - x_0} = 0 \to 0, \quad x \to x_0.$$

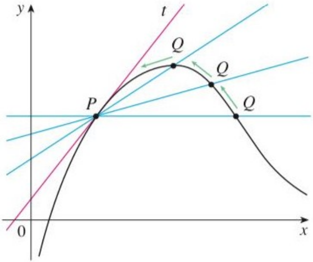
Example

<u>例二</u>：函数 $f(x) = x^2$ 在任意点 x_0 处导数为 $f'(x_0) = 2x_0$ 或写作 $f'(x) = 2x$．因为

$$\frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{(x + x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = x + x_0 \to 2x_0, \quad x \to x_0.$$

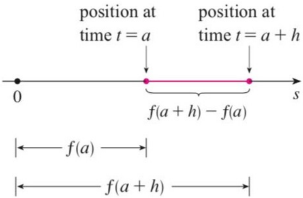
导数的几何意义

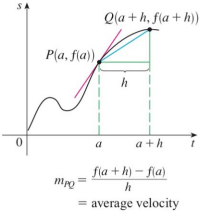
依定义，曲线在一点的切线就是割线的极限位置. 如图所示.



任取函数曲线 $\Gamma: y = f(x)$ 上一点 $P = (x_0, f(x_0))$，再取曲线 Γ 上 P 附近的一点 $Q = (x, f(x))$，则割线 $\overline{PQ}$ 的斜率为 $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x0}$. 因此导数 $f'(x_0)$ 就是曲线 Γ 在点 (x_0, y_0) 处切线的斜率. 这正是导数的几何意义.

设质点沿着直线运动，其位置坐标记作 $s = f(t)$，即在时刻 t 时，物体位于位置 $s = f(t)$. 在时刻 $t = a$ 到 $t = a + h$ 间隔内，位置变化为 $f(a + h) - f(a)$. 于是在这个时间间隔的平均速度为 $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. 令 $h \to 0$ 可知极限(假设存在)即导数 $f'(a)$，代表了在时刻 $t = a$ 时物体运动的瞬时速度.





函数 $\sin x$ 的导数

例: $(\sin x)' = \cos x,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

证: 任意固定 $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \frac{\sin x\cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h}$$

$$= \frac{\sin x(\cos h - 1)}{h} + \frac{\cos x \sin h}{h} \to \cos x, \quad h \to 0.$$

因此函数 $\sin x$ 在任意点 x 处可导, 且 $(\sin x)' = \cos x$.

另证: 当 $x \to x_0$ 时,

$$\frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \frac{2\cos\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}}{x-x_0} = \cos\frac{x+x_0}{2}\cdot\frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}} \to \cos x_0.$$

因此 $(\sin x)'_{x_0} = \cos x_0$. 因 x_0 任意, 故 $(\sin x)' = \cos x$. $\square$

例: $(\cos x)' = -\sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

证: 任意固定 $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \frac{\cos x\cos h - \sin x\sin h - \cos x}{h}$$

$$= \frac{\cos x(\cos h - 1)}{h} - \frac{\sin x\sin h}{h} \to -\sin x, \quad h \to 0.$$

因此函数 $\cos x$ 在任意点 x 处可导, 且 $(\cos x)' = -\sin x$.

另证: 当 $x \to x_0$ 时,

$$\frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} = -\frac{2\sin\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}}{x-x_0} = -\sin\frac{x+x_0}{2}\cdot\frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}} \to -\sin x_0.$$

因此 $(\cos x)'_{x_0} = -\sin x_0$. 因 x_0 任意, 故 $(\cos x)' = -\sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. $\square$

函数 a^x 的导数, $a > 0$

Example

例: $(a^x)' = a^x \ln a, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

证: 对任意 $x \in \mathbb{R}$, 以及任意增量 h,

$$\frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h} \to a^x \ln a, \quad h \to 0.$$

故 $(a^x)' = a^x \ln a, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

函数 $\ln|x|$ 的导数

Example

例: $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}, \forall x \neq 0.$

证: 设 $x \neq 0$, 则当 $|h| < |x|$ 时,

$$\frac{\ln|x+h| - \ln|x|}{h} = \frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{x \cdot \frac{h}{x}} \to \frac{1}{x}, \quad h \to 0.$$

故 $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}, \forall x \neq 0.$

函数 x^α 的导数, $x > 0$

Example

例: $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\forall x > 0$.

证: $\forall x > 0$, $\forall h$,

$$\frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h} = x^\alpha \cdot \frac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^\alpha - 1}{h}$$

$$= x^\alpha \cdot \frac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^\alpha - 1}{x \cdot \frac{h}{x}} \to \alpha x^{\alpha-1}, \quad h \to 0.$$

故 $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\forall x > 0$.

可导蕴含连续

Theorem

定理: 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

Proof.

证明: 由于 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, 即 $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在, 故

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)=f'(x_0)\cdot 0=0.$$

这表明 $f(x)$ 在 x_0 处连续. 证毕. □

左导数与右导数

Definition

定义: (i) 若极限$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在, 则称极限值为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的右导数, 记作 $f'_+(x_0)$;

(ii) 若极限$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在, 则称极限值为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左导数, 记作$f'_-(x_0)$.

注意左右导数 $f'_\pm(x_0)$, 与左右极限 $f(x_0^\pm)$ 的区别.

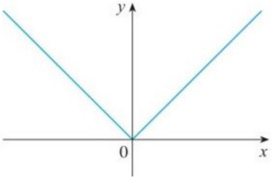
Theorem

定理: 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导 $\Leftrightarrow$ 左右导数 $f'_-(x_0)$ 和 $f'_+(x_0)$ 均存在, 且相等.

证明: 依可导定义结论显然. 细节略.

<u>例</u>: 考虑函数 $f(x)=|x|$ 在点 $x=0$ 处左右导数，以及可导性.

<u>解</u>: 对于 $x>0$, $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x-0}{x}=1\to 1$, 当 $x\to 0^{+}$ 时. 故 $|x|$ 在点 $x=0$ 处的右导数存在且 $f'_{+}(0)=1$. 同理可得 $|x|$ 在点 $x=0$ 处的左导数存在且 $f'_{-}(0)=-1$. 根据上述定理可知函数 $|x|$ 在点 $x=0$ 处不可导. 根据函数 $y=|x|$ 图像可知点 $(0,0)$ 是尖点，无切线. 故不可导. 解答完毕.



Definition

定义: 设函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上定义. 若 f 在点 $x_0 \in (a,b)$ 处的改变量可表示为: 齐次线性部分 + 高阶部分, 即

$$f(x_0+\triangle x)-f(x_0)=\lambda\triangle x+o(\triangle x),\quad \triangle x\to 0,$$

其中 λ 为常数, $\triangle x$ 代表变量 x 的改变量($\triangle x$ 也是一个独立变量), 则称函数 f 在点 x_0 处可微(differentiable), 称齐次线性部分 $\lambda\triangle x$ 为函数 f 在点 x_0 处的微分, 并记之为 $df(x_0)=\lambda\triangle x$, 或 $df\big|_{x_0}=\lambda\triangle x$.

例: 考虑函数 x^2 在任意点 x_0 处的可微性. 由于

$$(x_0+\triangle x)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0\triangle x + \triangle x^2 - x_0^2$$

$$= 2x_0\triangle x + o(\triangle x),$$

故函数 x^2 在任意点 x_0 处的可微, 且 $d(x^2)\Big|_{x_0} = 2x_0\triangle x$.

Theorem

定理: (i) f 在点 x_0 处可微 $\Longleftrightarrow$ f 在点 x_0 处可导.

(ii) 当 f 在点 x_0 可微时, $df(x_0) = f'(x_0)\triangle x$.

证(i) $\Rightarrow$: 设 $f(x)$ 在点 x_0 处可微, 即存在常数 λ, 使得

$$f(x_0 + \triangle x) - f(x_0) = \lambda\triangle x + o(\triangle x), \quad \triangle x \to 0.$$

$$\text{故} \quad \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x} = \lambda + \frac{o(\triangle x)}{\triangle x} \to \lambda, \quad \triangle x \to 0.$$

这表明函数 f 在点 x_0 处可导, 且导数就是 λ, 即 $f'(x_0) = \lambda$.

$\Leftarrow$: 设 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, 即

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x} = f'(x_0),$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{\triangle x \to 0} \left[\frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x} - f'(x_0) \right] = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0) - f'(x_0)\triangle x}{\triangle x} = 0$$

$$\Rightarrow \ f(x_0 + \triangle x) - f(x_0) - f'(x_0)\triangle x = o(\triangle x), \quad \triangle x \to 0$$

$$\Rightarrow \ f(x_0 + \triangle x) - f(x_0) = f'(x_0)\triangle x + o(\triangle x), \quad \triangle x \to 0.$$

这表明 $f(x)$ 在点 x_0 处可微. 结论(i)得证.

证(ii). 当 f 在点 x_0 可微时，即 $f(x_0 + \triangle x) - f(x_0) = \lambda \triangle x + o(\triangle x)$. 已证 $\lambda = f'(x_0)$. 因此 $df(x_0) = f'(x_0)\triangle x$. 定理得证. □

注记

注一: 当 $f(x) = x$ 时, $f'(x) = 1$. 因此函数 $f = x$ 在任意点 x_0 处的微分为 $dx\big|_{x_0} = 1 \cdot \triangle x = \triangle x$. 因此常记 $\triangle x = dx$. 于是一般可导函数 $f(x)$ 的微分可写作 $df(x_0) = f'(x_0)dx$.

注二: 一元函数导数的概念不能直接推广到多元函数情形. 但微分概念则可以推广. 下个学期将详细讨论.

第五周第一次作业，共十六大题

习题一：证明如下五个引理．先回忆一下记号 f^n 的意义：$f^0 = id$，即恒同映射，$f^1 = f$，$f^2 = f \circ f$，即 $f^2(x) = f(f(x))$，$f^3 = f \circ f \circ f$，$f^n = f \circ f \circ f \cdots \circ f$（$n$ 次复合）．显然 $f^{n+m} = f^n \circ f^m$．

引理一：设 x_0 为映射 $f : J \hookleftarrow$ 的 k 周期点，则 k 个点 x_0，$f(x_0)$，$\cdots$，$f^{k-1}(x_0)$ 两两互异．

引理二：设 x_0 为映射 $f : J \hookleftarrow$ 的 k- 周期点，$k \geq 1$ 为正整数．若 $f^n(x_0) = x_0$，则 n 为 k 的倍数，即 $n = mk$．

引理三：设函数 $f : J = [a, b] \hookleftarrow$ 连续，则 f 必有 1- 周期点，即不动点．

引理四：设 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 连续．若 f 有 2- 周期点，则 f 有 1- 周期点，即不动点．

引理五：设函数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ 连续，其值域包含定义域，即 $f([a, b]) \supseteq [a, b]$，则 f 有不动点．

习题二：课本第59-60页习题2.5题2：讨论下列函数在给定点处的连续性(1)(3)(5).

(1) 设

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

讨论函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

(3) 设 $f(x)=\mathrm{sgn}(x)$，其中 $\mathrm{sgn}(x)$ 为符号函数，即

$$\mathrm{sgn}(x)=\begin{cases} -1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

讨论函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

(5) 设

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1-e^{\frac{x}{x-2}}}{x}, & x\neq 0,2,\\ 0, & x=2,\\ \frac{1}{2}, & x=0.\end{cases}$$

讨论函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 和 $x=2$ 处的连续性.

习题三: 课本第60页习题2.5题3: 确定常数 a, 使得函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续.

$$(1)\quad f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x^2}, & x<0,\\ 3e^x+a, & x\geq 0;\end{cases}$$

$$(2)\quad f(x)=\begin{cases}x+a, & x\leq 0,\\ \frac{\ln(1+x)}{x}, & x>0.\end{cases}$$

作业，续二

习题四：课本第60页习题2.5题4：确定常数 a, b，使得函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续.

$$(1)\quad f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x < -1, \\ ax+b, & -1 \le x \le 1, \\ x^2 - x & x > 1. \end{cases}$$

$$(2)\quad f(x) = \begin{cases} \sin x - 2, & x < 0, \\ ax^2+b, & 0 \le x \le 1, \\ 2^x + x & x > 1. \end{cases}$$

习题五：课本第60页习题2.5题5：指出下列函数的间断点及其类型

$$(1)\, f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad (2)\, f(x) = [|\sin x|], \ (3)\, f(x) = \mathrm{sgn}(|x|),$$

其中 $[\cdot]$ 为取整函数.

习题六：课本第60页习题2.5题6：设

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{x^{2n+1}+1}{x^{2n+1}-x^{n+1}+x},$$

试确定函数 $f(x)$ 的表达式，间断点及其类型.

习题七：课本第63页习题2.6题1：设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续. 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上处处不等于零，证明 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上不变号.

习题八：课本第63页习题2.6题2：证明实系数多项式 $x^{2m}+a_1x^{2m-1}+\cdots+a_{2m-1}x+a_{2m}$ 至少有两个零点，其中 $a_{2m}<0$.

习题九：课本第63页习题2.6题3：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，设 $x_1,x_2,\cdots,x_n \in [a,b]$，证明存在 $\xi\in[a,b]$，使得

$$f(\xi) = \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

作业，续四

习题十：课本第63页习题2.6题4：设 $f(x)$ 在区间 $[0,2a]$ 上连续，且 $f(0)=f(2a)$. 证明存在 $\xi\in[0,a]$，使得 $f(\xi)=f(\xi+a)$.

习题十一：课本第63页习题2.6题5：设 $a<b<c$，证明函数

$$f(x)=\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}$$

在开区间 (a,b) 和 (b,c) 内各恰有一个零点.

习题十二：课本第63页习题2.6题6(有修改)：设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)=f(1)$，证明对任意正整数 n，存在 $\xi\in[0,1-\frac{1}{n}]$，使得 $f(\xi)=f(\xi+\frac{1}{n})$.

习题十三：课本第63页习题2.6题7：设 $f(x)$ 在半开半闭区间 $[a,b)$ 上连续. 若极限点 $x=b$ 处的左极限 $\lim_{x\to b^-}f(x)$ 存在(有限)，证明 $f(x)$ 在区间 $[a,b)$ 上有界.

作业，续五

习题十四：课本第63页习题2.6题9：设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上，且满足 $f(x^2)=f(x)$, $\forall x>0$. 证明若 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，则 $f(x)$ 为常数函数.

习题十五：课本第63页习题2.6题10：设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续，且 $\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = +\infty$. 证明 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上存在最小值，即 $\exists\xi\in\mathbb{R}$，使得 $f(\xi)\leq f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

习题十六：课本第63页习题2.6题14：设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有定义. 假设存在正常数 $0<L<1$，使得对任意两点 $x,y\in\mathbb{R}$, $|f(x)-f(y)|\leq L|x-y|$. 证明

(i) 对任意一点 $a_0\in\mathbb{R}$，由迭代 $a_{n+1}=f(a_n)$, $\forall n\geq 1$，产生的序列 $\{a_n\}$ 收敛；

(ii) 设 $a_n\to a$，则 a 是 $f(x)$ 的不动点，即 $f(a)=a$，且 $f(x)$ 的不动点唯一.

选作题

选作题. 证明如下定理一和(或)定理二. 选作解答直接交给老师.

定理一: 设 $f:[a,b]\hookleftarrow$ 连续, 即 f 为闭区间 $[a,b]$ 到自身的连续映射. 若点 $x\in[a,b]$ 满足 $(f^{n+1}(x)-f^{n}(x))\to 0,\ n\to+\infty$, 则序列 $\{f^{n}(x)\}$ 收敛.

定理二: 设 $f:[a,b]\hookleftarrow$ 连续, 即 f 是闭区间 $[a,b]$ 到自身的连续函数. 若 f 没有 2-周期点, 则任意点 $x\in[a,b]$ 的轨道 $\{f^{n}(x)\}$ 均收敛.

注一: 选作题可作可不作.

注二: 提供正确的定理二之证明者, 可获得总成绩加分1分或2分的奖励, 提供证明的截止时间是本学期期末.