第十四周习题参考解答　　　　　　　　　　　杨利军　　Dec 15, 17, 2025

Dec 15 作业

习题一: 课本第193页习题6.1题 2(1)(3)(5)(7)(9). 利用广义积分定义计算下列积分:

(1) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)}$;

(3) $\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx$;

(5) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x^2)}$;

(7) $\int_0^1 \frac{e^{\frac{-1}{x}}}{x^2} dx$;

(9) $\int_{-1}^0 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

解(1): 对任意 $b > 1$

$$\int_1^b \frac{dx}{x(x+1)} = \int_1^b \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx = \int_1^b d\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

$$= \ln\frac{b}{b+1} - \ln\frac{1}{2} = \ln 2 - \ln\frac{b}{b+1}.$$

故

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{x(x+1)} = \lim_{b\to+\infty}\left(\ln 2 - \ln\frac{b}{b+1}\right) = \ln 2.$$

解(3): 回忆一个不定积分公式

$$\int e^{\alpha x} \sin\beta x dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\sin\beta x - \beta\cos\beta x) + C.$$

由此得

$$\int_0^b e^{-x}\sin x dx = \frac{e^{-x}}{2}(-\sin x - \cos x)\Big|_0^b = \frac{1}{2}\left[1 - e^{-b}(\sin b + \cos b)\right].$$

于是

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x dx = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{2}\left[1 - e^{-b}(\sin b + \cos b)\right] = \frac{1}{2}.$$

解(5): 由于

$$\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}$$

故

$$\int_1^b \frac{1}{x(x^2+1)}dx=\int_1^b\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right)dx$$

$$=\ln\frac{b}{\sqrt{b^2+1}}-\ln\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\ln 2-\ln\frac{b}{\sqrt{b^2+1}}$$

于是

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(1+x^2)}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{1}{x(x^2+1)}dx$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\ln 2-\ln\frac{b}{\sqrt{b^2+1}}\right)=\frac{1}{2}\ln 2.$$

解(7): 对任意 $\varepsilon\in(0,1)$, 考虑积分

$$\int_\varepsilon^1\frac{e^{\frac{-1}{x}}}{x^2}dx.$$

对上述积分, 作变量代换 $y=\frac{1}{x}$, 则

$$\int_\varepsilon^1\frac{e^{\frac{-1}{x}}}{x^2}dx=\int_1^{\frac{1}{\varepsilon}}e^{-y}dy=e^{-1}-e^{-\frac{1}{\varepsilon}}.$$

于是

$$\int_0^1\frac{e^{\frac{-1}{x}}}{x^2}dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^1\frac{e^{\frac{-1}{x}}}{x^2}dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}\left(e^{-1}-e^{-\frac{1}{\varepsilon}}\right)=e^{-1}.$$

解(9): 对任意 $a\in(-1,0)$, 考虑积分

$$\int_a^0\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

由于

$$\int_a^0\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\frac{1}{2}\int_a^0\frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\sqrt{1-x^2}\Big|_a^0=\sqrt{1-a^2}-1.$$

于是

$$\int_{-1}^0\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\lim_{a\to-1^+}\int_a^0\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\lim_{a\to-1^+}(\sqrt{1-a^2}-1)=-1.$$

习题二: 课本第193页习题6.1题 3(1)(3)(5). 利用广义积分定义计算下列积分:

(1) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$;

(3) $\int_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$;

(5) $\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$.

解(1): 对积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$$

作变量代换 $x = \tan t$ 或 $t = \arctan x$, 则当 $x = 1$ 时, $t = \frac{\pi}{4}$, 当 $x = +\infty$ 时, $t = \frac{\pi}{2}$, 且 $dx = (1+x^2)dt$,

$$1 + x^2 = 1 + \tan^2 t = 1 + \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t}.$$

于是

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cos^2 t}dt}{\tan^2 t\frac{1}{\cos t}} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t dt}{\sin^2 t}$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\sin t}{\sin^2 t} = -\frac{1}{\sin t}\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2} - 1.$$

解(3): 为方便对积分

$$\int_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

作变换 $x = -u$ 得

$$\int_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = -\int_2^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}}.$$

对上式右边的积分作变量代换 $u = \frac{1}{\sin t}$, 则当 $u = 2$ 时, $t = \frac{\pi}{6}$, 当 $u = +\infty$ 时, $t = 0$, 且 $du = \frac{-\cos t dt}{\sin^2 t}$. 于是

$$\int_2^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{0} \frac{\frac{-\cos t}{\sin^2 t}dt}{\frac{1}{\sin t}\sqrt{\frac{1}{\sin^2 t} - 1}} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos t}{\cos t}dt = \frac{\pi}{6}.$$

于是

$$\int_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = -\frac{\pi}{6}.$$

解(5): 对积分

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$$

作变量代换 $u=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, 则当 $x=-1$ 时, $u=0$; 当 $x=1$ 时, $u=+\infty$. 由 $u=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ 得 $u^2=\frac{1-x}{1+x}$. 由此易解得

$$x=\frac{1-u^2}{1+u^2}=-1+\frac{2}{1+u^2},\qquad dx=\frac{-4u}{(1+u^2)^2}.$$

于是

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx=\int_{+\infty}^{0}\frac{-4u^2}{(1+u^2)^2}du=\int_{0}^{+\infty}\frac{4(1+u^2)-4}{(1+u^2)^2}du$$

$$=4\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+u^2}-4\int_0^{+\infty}\frac{du}{(1+u^2)^2}=2\pi-4\int_0^{+\infty}\frac{du}{(1+u^2)^2}.$$

为计算积分 $\int_0^{+\infty}\frac{du}{(1+u^2)^2}$, 我们来求不定积分 $\int\frac{du}{(1+u^2)^2}$:

$$\arctan u=\int\frac{du}{1+u^2}=\frac{u}{1+u^2}-\int\frac{u(-2u)}{(1+u^2)^2}du=\frac{u}{1+u^2}+2\int\frac{u^2}{(1+u^2)^2}du$$

$$=\frac{u}{1+u^2}+2\int\frac{du}{1+u^2}-2\int\frac{du}{(1+u^2)^2}=\frac{u}{1+u^2}+2\arctan u-2\int\frac{du}{(1+u^2)^2}.$$

由此解得

$$\int\frac{du}{(1+u^2)^2}=\frac{u}{2(1+u^2)}+\frac{1}{2}\arctan u+C.$$

于是

$$\int_0^{+\infty}\frac{du}{(1+u^2)^2}=\Big[\frac{u}{2(1+u^2)}+\frac{1}{2}\arctan u\Big]_0^{+\infty}=\frac{\pi}{4}.$$

因此所求积分为

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx=2\pi-4\cdot\frac{\pi}{4}=\pi.$$

习题三: 课本第193页习题6.1题 4(1)(3)(5). 考察下列广义积分的类型(无穷限积分, 瑕积分, 或混合型广义积分), 并根据广义积分收敛性定义来考察计算下列积分的收敛性. 收

敛时, 求出积分的值; 发散时说明理由.

$$(1)\quad \int_{-2}^{2}\frac{2xdx}{x^2-4};\qquad (3)\quad \int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}};\qquad (5)\quad \int_{0}^{+\infty}e^{-\sqrt{x}}dx.$$

解(1): 积分

$$\int_{-2}^{2}\frac{2xdx}{x^2-4}\qquad (*)$$

是瑕积分, 积分有两个瑕点 $x=\pm 2$. 以下我们来说明这个积分发散. 积分收敛当且仅当如下两个瑕积分

$$\int_{-2}^{0}\frac{2xdx}{x^2-4}\quad 和\quad \int_{0}^{2}\frac{2xdx}{x^2-4}$$

均收敛. 但是

$$\int_{0}^{2}\frac{2xdx}{x^2-4}=\lim_{b\to 2^-}\int_{0}^{b}\frac{2xdx}{x^2-4}=\lim_{b\to 2^-}\int_{0}^{b}\frac{d(x^2-4)}{x^2-4}$$

$$=\lim_{b\to 2^-}\ln|x^2-4|\Big|_0^2=\lim_{b\to 2^-}\ln\frac{|b^2-4|}{4}=-\infty.$$

这表明广义积分 $\int_0^2\frac{2xdx}{x^2-4}$ 发散. 故积分广义积分 (*) 发散.

解(3): 积分

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}\qquad (*)$$

是混合型关于积分, 即积分有一个无穷瑕点 $x=+\infty$, 以及一个有限瑕点 $x=1$. 显然积分在这两个瑕点处均收敛. 对于瑕点 $x=1$, 被积函数

$$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\qquad (**)$$

与函数 $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ 同阶. 二者在瑕点 $x=1$ 处均收敛. 对于瑕点 $x=+\infty$, 函数 (**) 与函数 $\frac{1}{x^2}$ 等价, 故积分 (*) 在无穷瑕点 $x=+\infty$ 处收敛. 因此积分 (*) 收敛. 以下我们来计算积分 (*) 的值. 对积分 (*) 作变量代换 $x=\frac{1}{\sin t}$, 则 $dx=\frac{-\cos t dt}{\sin^2 t}$. 当 $x=1$ 时, $t=\frac{\pi}{2}$; 当 $x=+\infty$ 时, $t=0$. 于是

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\frac{-\cos t}{\sin^2 t}dt}{\frac{1}{\sin t}\sqrt{\frac{1}{\sin^2 t}-1}}=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\cos t}dt=\frac{\pi}{2}.$$

解(5): 积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}dx$$

有唯一的一个瑕点, 即无穷瑕点 $x=+\infty$. 显然积分收敛, 因为

$$\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{x^2}{e^{\sqrt{x}}} \to 0, \quad x \to +\infty.$$

且积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ 收敛. 以下我们来计算这个积分. 作变量代换 $x=u^2$, 则

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}dx = \int_0^{+\infty} 2ue^{-u}du = -2ue^{-u}\Big|_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} e^{-u}du = -2e^{-u}\Big|_0^{+\infty} = 2.$$

习题四: 课本第194页习题6.1 题5: 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上内闭可积. 若 $F(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上的原函数, 且极限 $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ 存在, 记作 $F(+\infty)$, 证明积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 且

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a). \qquad \text{(无穷限积分的 Newton-Leibniz 公式)}$$

证明: 根据正常积分的 Newton-Leibniz 公式得

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \qquad \forall b > a.$$

于上式中令 $b \to +\infty$ 取极限得

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}[F(b)-F(a)] = F(+\infty) - F(a).$$

证毕.

习题五: 课本第194页习题6.1 题6(修正版): 假设 (1) 函数 $u(x)$ 和 $v(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续可微; (2) 积分 $\int_a^{+\infty} u'(x)v(x)dx$ 收敛; (3) 极限 $\lim_{x\to+\infty} u(x)v(x)$ 存在, 证明积分 $\int_a^{+\infty} u(x)v'(x)dx$ 收敛, 且

$$\int_a^{+\infty} u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} u'(x)v(x)dx,$$

其中 $u(x)v(x)\Big|_a^{+\infty} = [\lim_{x\to+\infty} u(x)v(x)] - u(a)v(a)$.

证明: 任取 $b>a$. 一方面根据正常积分的 Newton-Leibniz 公式得

$$\int_a^b [u(x)v(x)]'dx = u(b)v(b) - u(a)v(a).$$

另一方面

$$\int_a^b [u(x)v(x)]'dx = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx.$$

因此

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx = u(b)v(b) - u(a)v(a).$$

上式可写作

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

根据假设 (2) 和 (3) 知极限

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b u(x)v'(x)dx$$

存在, 且

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b u(x)v'(x)dx = \lim_{b\to+\infty}[u(b)v(b)] - u(a)v(a) - \lim_{b\to+\infty}\int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

此即

$$\int_a^{+\infty} u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} u'(x)v(x)dx,$$

证毕.

习题六: 课本第194页习题 6.1 题7: 求由曲线 $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$, $0\le x\le 1$, 和曲线 $y=\frac{1}{x^2}$, $x\ge 1$, 以及正 x 轴和正 y 轴所围图形的面积.

解: 依题意知所求面积为

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx + \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx = 2\sqrt{x}\Big|_0^1 - \frac{1}{x}\Big|_1^{+\infty} = 2+1=3.$$

解答完毕.

Dec 17 作业

习题一: 课本第204页习题6.2题3: 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上内闭可积. 问下列两个命题是否成立? 为什么?

(1) 若极限 $\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}f(x)dx$ 存在, 则广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 收敛;

(2) 若极限 $\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}|f(x)|dx$ 存在, 则广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 收敛.

解答: 命题 (1) 不成立. 例如考虑函数 $f(x)=x$. 显然对任意 $A>0$, $\int_{-A}^{A}xdx=0$. 故 $\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}xdx=0$. 但是广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}xdx$ 发散, 这是因为广义积分 $\int_{0}^{+\infty}xdx$ 和 $\int_{-\infty}^{0}xdx$ 都发散.

命题 (2) 成立. 理由如下. 由定义知, 积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 收敛, 当且仅当积分 $\int_{0}^{+\infty}xdx$ 和 $\int_{-\infty}^{0}xdx$ 均收敛. 记

$$M=\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}|f(x)|dx.$$

对任意 $A>0$,

$$\int_{0}^{A}|f(x)|dx\le\int_{-A}^{A}|f(x)|dx\le M.$$

故积分 $\int_{0}^{+\infty}|f(x)|dx$, 即积分 $\int_{0}^{+\infty}f(x)dx$ 绝对收敛, 从而收敛. 同理可证积分 $\int_{-\infty}^{0}f(x)dx$ 也收敛. 故命题 (2) 成立.

习题二: 课本第205页习题6.2题4. 判断下列积分的敛散性 (1)(3)(5)(7)(9)(11):

$$(1)\quad \int_{1}^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}dx;\quad (3)\quad \int_{2}^{+\infty}\frac{\sin x}{x\sqrt{x^2+1}}dx;\quad (5)\quad \int_{1}^{+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1}{x^p\ln(1+\frac{1}{x^2})}dx;$$

$$(7)\quad \int_{-2}^{0}\frac{1}{x-\sin x}dx;\quad (9)\quad \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos x}{x^n}dx;\quad (11)\quad \int_{1}^{2}\frac{1}{\ln x}dx.$$

解(1): 积分

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}dx\qquad(*)$$

收敛. 理由如下. 首先我们有不等式

$$0 < \frac{\arctan x}{x^2} < \frac{\pi}{2x^2}, \quad \forall x \geq 1.$$

又显然积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\pi}{2x^2} dx$ 收敛. 根据广义积分的比较判别法知积分 (*) 收敛.

解(3): 积分

$$\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x\sqrt{x^2+1}} dx \qquad (**)$$

收敛. 因为

$$\left|\frac{\sin x}{x\sqrt{x^2+1}}\right| \leq \frac{1}{x^2}, \quad x \geq 2,$$

且积分 $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ 收敛. 因此积分 (**) 绝对收敛, 从而收敛.

解(5): 积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1}{x^p \ln(1+\frac{1}{x^2})} dx$$

收敛, 当且仅当 $p > 2$. 证明如下. 由于当 $x \to +\infty$ 时,

$$\sqrt{1+\frac{1}{x}} - 1 \sim \frac{1}{2x}, \qquad \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \sim \frac{1}{x^2},$$

故

$$\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1}{x^p \ln(1+\frac{1}{x^2})} \sim \frac{\frac{1}{2x}}{x^p \cdot \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2x^{p-1}}, \quad x \to +\infty.$$

因此积分 (**) 收敛, 当且仅当积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x^{p-1}} dx$$

收敛. 而上述积分收敛, 当且仅当 $p > 2$. 结论得证.

解(7): 积分

$$\int_{-2}^{0} \frac{1}{x - \sin x} dx \qquad (*)$$

发散. 理由如下. 由于积分有唯一瑕点 $x=0$, 且

$$x-\sin x \sim \frac{1}{6}x^3, \qquad x \to 0,$$

而积分

$$\int_{-2}^{0} \frac{1}{x^3} dx$$

发散. 故积分 (*) 发散.

解(9): 积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{x^n} dx \qquad (*)$$

收敛, 当且仅当 $n<3$. 理由如下. 积分有唯一一个积分瑕点 $x=0$. 由于

$$\frac{1-\cos x}{x^n} \sim \frac{1}{2}\frac{x^2}{x^n} = \frac{1}{2x^{n-2}}, \quad x \to 0.$$

故积分 (*) 收敛, 当且仅当 $n<3$.

解(11): 积分

$$\int_1^2 \frac{dx}{\ln x} \qquad (*)$$

发散. 理由如下. 积分有唯一瑕点 $x=1$. 由于

$$\frac{1}{\ln x} \Bigg/ \frac{1}{x-1} = \frac{x-1}{\ln[1+(x-1)]} \to 1, \quad x \to 1,$$

而积分 $\int_1^2 \frac{dx}{x-1}$ 发散. 故积分 (*) 发散.

习题三: 课本第205页习题6.2题5. 讨论下列积分的敛散性(2)(4)(6)(8):

$$(2) \quad \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^p} dx; \qquad (4) \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x^3}};$$

$$(6) \quad \int_3^{+\infty} \frac{dx)}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}; \qquad (8) \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p+(\ln x)^q}, p>0.$$

解(2): 积分
$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^p} dx \qquad (*)$$
有两个瑕点 $x=0$ 和 $x=+\infty$. 由于
$$\frac{\ln(1+x^2)}{x^p} \sim \frac{x^2}{x^p} = \frac{1}{x^{p-2}}, \quad x \to 0,$$
故积分
$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{x^p} dx$$
收敛, 当且仅当 $p<3$.

往下考虑积分在瑕点 $x=+\infty$ 处的收敛性.

情形一: $p>1$. 取 $\varepsilon>0$ 充分小, 使得 $p-\varepsilon>1$. 于是
$$\frac{\ln(1+x^2)}{x^p} \Big/ \frac{1}{x^{p-\varepsilon}} = \frac{\ln(1+x^2)}{x^\varepsilon} \to 0, \quad x \to +\infty,$$
而积分
$$\int_0^1 \frac{1}{x^{p-\varepsilon}} dx$$
收敛. 因此积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^p} dx$ 收敛.

情形二: $p \leq 1$. 此时
$$\frac{\ln(1+x^2)}{x^p} \geq \frac{1}{x^p}, \qquad \forall x \geq 2,$$
且积分
$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} dx$$
发散, 故积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^p} dx$ 发散.

综上可知, 积分 (*) 收敛, 当且仅当 $1<p<3$.

解(4): 积分
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x^3}} dx \qquad (*)$$

收敛. 理由如下. 积分有两个瑕点 $x=0$ 和 $x=+\infty$. 考虑瑕点 $x=0$ 处的收敛性. 由于

$$\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}\bigg/\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{\sin x}{x}\to 1,\qquad x\to 0^+,$$

而积分 $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx$ 收敛, 故积分 $\int_0^1\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}dx$ 收敛. 再考虑瑕点 $x=+\infty$ 处的收敛性. 由于

$$\left|\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}\right|\le\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}},\qquad \forall x\ge 1,$$

而积分 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$ 收敛, 故积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x dx}{\sqrt{x^3}}$ 绝对收敛, 从而收敛. 综上知积分 (*) 收敛.

解(6): 积分

$$\int_3^{+\infty}\frac{dx)}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}\qquad (*)$$

有唯一一个瑕点 $x=+\infty$. 我们需要对 p,q,r 的各种情况作讨论.
情形一: $p>1$. 取 $\varepsilon>0$ 充分小, 可使得 $p-\varepsilon>1$. 于是对任意 q 和任意 r,

$$\frac{1}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}\bigg/\frac{1}{x^{p-\varepsilon}}=\frac{1}{x^{\varepsilon}(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}\to 0,\qquad x\to+\infty,$$

并且积分 $\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x^{p-\varepsilon}}$ 收敛, 故积分 (*) 收敛.
情形二: $p<1$. 取 $\varepsilon>0$ 充分小, 可使得 $p+\varepsilon<1$. 于是对任意 q 和任意 r,

$$\frac{1}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}\bigg/\frac{1}{x^{p+\varepsilon}}=\frac{x^{\varepsilon}}{(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}\to+\infty,\qquad x\to+\infty,$$

又积分 $\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x^{p+\varepsilon}}$ 发散, 故积分 (*) 发散.
情形三: $p=1$. 此时对积分

$$\int_3^{+\infty}\frac{dx)}{x(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}$$

作变量代换 $y=\ln x$ 得

$$\int_3^{+\infty}\frac{dx)}{x(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}=\int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{dy}{y^q(\ln y)^r}.$$

而对于积分 $\int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{dy}{y^q(\ln y)^r}$, 作类似的讨论可得如下收敛性结论

$q>1, r$ 任意	积分收敛
$q<1, r$ 任意	积分发散
$q=1,$	$r>1$ 积分收敛, $r\le 1$ 积分发散.

综上可知, 积分

$$\int_3^{+\infty} \frac{dx)}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}$$

的收敛性如下表

$p>1$	q 任意	r 任意	积分收敛
$p<1$	q 任意	r 任意	积分发散
$p=1$	$q>1$	r 任意	积分收敛
$p=1$	$q<1$	r 任意	积分发散
$p=1$	$q=1$	$r>1$	积分收敛
$p=1$	$q=1$	$r\le 1$	积分发散

解(8): 积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p+(\ln x)^q} \qquad (*)$$

有唯一一个瑕点 $x=+\infty$. 当 $p>0$ 时,

$$\frac{dx}{x^p+(\ln x)^q}\Big/\frac{1}{x^p}=\frac{1}{1+\frac{(\ln x)^q}{x^p}}\to 1, \quad x\to+\infty,$$

故积分 (*) 和积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$$

的收敛性相同, 即积分 (*) 收敛, 当且仅当 $p>1$.

习题四: 课本第205页习题 6.2 题6: 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上内闭可积, 且广义积分

$$\int_a^{+\infty} f^2(x)dx \quad 和 \quad \int_a^{+\infty} g^2(x)dx \qquad (*)$$

均收敛, 证明

(1) 积分 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 绝对收敛;

(2) 积分 $\int_a^{+\infty}[f(x)+g(x)]^2dx$ 收敛.

证明: 由于两个积分 (*) 均收敛, 故积分

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{2}\left[f^2(x)+g^2(x)\right]dx$$

收敛. 再由不等式

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{1}{2}[f^2(x)+g^2(x)],$$

以及广义积分收敛性的比较判别法知, 积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$$

绝对收敛. 结论 (1) 得证.

证(2): 由于

$$[f(x)+g(x)]^2 = f^2(x)+2f(x)g(x)+g^2(x),$$

且三个积分

$$\int_a^{+\infty} f^2(x)dx, \quad \int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx, \quad \int_a^{+\infty} g^2(x)dx$$

均收敛, 故积分 $\int_a^{+\infty}[f(x)+g(x)]^2dx$ 收敛. 结论 (2) 得证.

习题五: 课本第205页习题6.2 题7(有修改): 设

(i) $f(x)$, $g(x)$ 和 $h(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上内闭可积;

(ii) $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$, $\forall x\in[a,+\infty]$;

(iii) 两个积分 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 和 $\int_a^{+\infty} h(x)dx$ 均收敛,

证明积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 也收敛.

证明: 由假设 (iii), 以及广义积分的 Cauchy 收敛准则知, 对任意 $\forall\varepsilon>0$, $\exists A>a$, 使得对任意 $A_2>A_1\geq A$, 成立

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} g(x)dx\right| < \varepsilon, \qquad \left|\int_{A_1}^{A_2} h(x)dx\right| < \varepsilon.$$

再由假设 (ii) 以及积分保序性质知

$$\int_{A_1}^{A_2} g(x)dx \leq \int_{A_1}^{A_2} f(x)dx \leq \int_{A_1}^{A_2} h(x)dx.$$

由此得

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)dx\right| \leq \max\left\{\left|\int_{A_1}^{A_2} g(x)dx\right|, \left|\int_{A_1}^{A_2} h(x)dx\right|\right\} < \varepsilon.$$

再次利用广义积分的 Cauchy 收敛准则知积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 也收敛. 证毕.

习题六: 课本第205页习题6.2题8(有修改): 假设积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

收敛, 且极限 $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 存在(有限), 证明 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

证明: 即极限 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$. 要证 $L = 0$. 反证 $L \neq 0$. 不妨设 $L > 0$. 一方面由极限 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ 知, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $M_1 > a$, 使得对任意 $x \geq M_1$, $|f(x) - L| < \varepsilon$, 即 $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$. 取 $\varepsilon = \frac{L}{2}$, 则有 $f(x) > \frac{L}{2} > 0, \forall x \geq M_1$. 另一方面, 由假设积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛知, 对上述任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $M_2 > a$, 使得对任意 $A_2 > A_1 \geq M_2$, 成立

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)dx\right| < \varepsilon.$$

取 $M = \max\{M_1, M_2\}$, 则任意 $A_2 > A_1 \geq M$,

$$\int_{A_1}^{A_2} f(x)dx \geq \frac{L}{2}(A_2 - A_1).$$

即对任意 $A_2 > A_1 \geq M$,

$$\frac{L}{2}(A_2 - A_1) \leq \int_{A_1}^{A_2} f(x)dx < \varepsilon.$$

这不可能成立, 因为 $A_2 - A_1$ 可以任意大. 矛盾. 证毕.

习题七: 课本第205页习题6.2题9: 考虑下列广义积分的绝对收敛性和条件收敛性

(1) $\int_0^{+\infty} \sin(x^2)dx$;

(2) $\int_0^{+\infty} x\cos(x^3)dx$;

(3) $\int_1^{+\infty} x\left(\arctan\frac{2}{x} - \arctan\frac{1}{x}\right)dx$.

解(1): 对积分

$$J = \int_0^{+\infty} \sin(x^2)dx \qquad (*)$$

作变换 $y = x^2$ 得

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{\sqrt{y}}dy. \qquad (**)$$

注意积分仅有一个积分瑕点 $y = +\infty$, $y = 0$ 不是瑕点, 因为 $\frac{\sin y}{\sqrt{y}} \to 0$, $y \to 0^+$. 显然积分 (*) 和 (**) 的绝对收敛性, 以及条件收敛相同. 根据广义积分的 Dirichlet 判别法知积分 (**) 收敛. 因此积分 (*) 收敛. 再考虑积分 (**) 的绝对收敛性, 即积分 $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin y|}{\sqrt{y}}dy$ 的收敛性. 由于

$$\frac{|\sin y|}{\sqrt{y}} \geq \frac{\sin^2 y}{\sqrt{y}} = \frac{1-\cos 2y}{2\sqrt{y}}.$$

由于积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{y}}dy$ 发散, 而积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2y}{2\sqrt{y}}dy$ 收敛(由 Dirichlet 判别法得), 故积分 $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin y|}{\sqrt{y}}dy$ 发散. 因此积分 (*) 条件收敛. 解答完毕.

解(2): 考虑积分

$$J = \int_0^{+\infty} x\cos(x^3)dx \qquad (*)$$

的绝对收敛性, 方法基本与上题相同. 对积分 (*) 作变量代换 $y = x^3$ 或 $x = y^{\frac{1}{3}}$. 于是

$$J = \frac{1}{3}\int_0^{+\infty} \frac{\cos y}{\sqrt[3]{y}}dy. \qquad (**)$$

式 (**) 中的广义积分有两个积分瑕点 $y = 0$ 和 $y = +\infty$, 积分在瑕点 $y = 0$ 处收敛. 显然式 (*) 和 (**) 中的两个积分在无穷远瑕点处的绝对收敛性相同. 由 Dirichlet 判别法知积分 (**) 收敛. 以下考虑积分 (**) 的绝对收敛性. 由于

$$\frac{|\cos y|}{\sqrt[3]{y}} \geq \frac{\cos^2 y}{\sqrt[3]{y}} = \frac{1+\cos(2y)}{2\sqrt[3]{y}}.$$

由于积分
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt[3]{y}}dy$$
发散, 而根据 Dirichlet 判别法知积分
$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2y)}{2\sqrt[3]{y}}dy$$
收敛. 由此可知积分
$$\int_1^{+\infty} \frac{|\cos y|}{\sqrt[3]{y}}dy$$
发散. 故积分 (**) 条件收敛, 从而积分 (*) 也条件收敛. 解答完毕.

解(3): 对积分
$$J \stackrel{\text{def}}{=} \int_1^{+\infty} x\left(\arctan\frac{2}{x} - \arctan\frac{1}{x}\right)dx \qquad (*)$$
作变量代换 $y = \frac{1}{x}$, 则当 $x = 1$ 时, $y = 1$; 当 $x = +\infty$ 时, $y = 0$. 于是
$$J = \int_1^0 \frac{1}{y}\left[\arctan(2y) - \arctan y\right]\frac{-1}{y^2}dy = \int_0^1 \frac{\arctan(2y) - \arctan y}{y^3}dy. \qquad (**)$$
易见在瑕点 $y = 0$ 处, 被积函数与 $\frac{1}{y^2}$ 同阶. 因为
$$\lim_{y\to 0}\frac{\arctan(2y) - \arctan y}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{[\arctan(2y) - \arctan y]'}{[y]'}$$
$$= \lim_{y\to 0}\left(\frac{2}{1+4y^2} - \frac{1}{1+y^2}\right) = 1.$$
这说明
$$\frac{\arctan(2y) - \arctan y}{y^3} \sim \frac{1}{y^2}.$$
显然积分 $\int_0^1 \frac{1}{y^2}dy$ 发散, 故积分 (**) 发散, 从而积分 (*) 发散. 解答完毕.