# 清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程 **微积分 A1**　　A 卷　　2024 年 11 月 10 日 9:50-11:50

**系名**__________　**班级**__________　**姓名**__________　**学号**__________

**一．填空题（每个空 3 分，共 10 题）（请将答案直接填写在横线上！）**

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x+\sin x)}{1-\cos x}=$________。答案：4

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\sin\left(x^2\sin\dfrac{2}{x}\right)=$________。答案：0

3. 设 $f(x)$ 为可导函数，且 $f(1)=0$，$f'(1)=2$，$g(x)=f(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^{f(x+1)}$，则 $g'(0)=$________。

答案：2

4. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(3^x-1\right)^{\frac{1}{x}}=$_____ 。答案：3

5. 设 $f(x)=x\sin x$，则 $f^{(2024)}(\pi)=$________。答案：2024

6. 函数 $y=4x+\sin^2 x$ 的反函数的微分 $\mathrm{d}x=$________。答案：$\dfrac{1}{4+2\sin x\cos x}\mathrm{d}y$

7. 设 $y=f(x)$ 是由参数方程 $\begin{cases}x=\sin t+t^3\\ y=t+\cos t\end{cases}$ 所确定的可微函数，则在参数 $t=0$ 对应的点处

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$________。

答案：1

8. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 点可导，且 $f(0)=1$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(\frac{x}{2})}{x}=\dfrac{1}{4}$，则 $f'(0)=$________。

答案：$\dfrac{1}{2}$

9. 设 $f(x)=\begin{cases}\ln(1+x), & x\geq 0;\\ ax^2+x, & x<0\end{cases}$ 二阶可导，则 $a=$________。答案：$-\dfrac{1}{2}$

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(1+1)+2\ln\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)+\cdots+n\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)}{\mathrm{e}+\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}+\cdots+\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-n}=$________。

答案：1.

# 2024 秋微积分 A(1) 期中考试填空题目答案解析

2024 年 11 月 10 日

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(x+\sin x)}{1-\cos x}=$ ________.
答案：4.
解析：由于在 $x\to 0$ 时，$x$ 与 $\sin x$ 为等价无穷小，$1-\cos x$ 与 $\frac{x^2}{2}$ 为等价无穷小，因此

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{x(x+\sin x)}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}+\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{1-\cos x}\\=&\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2/2}+\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2/2}=4.\end{aligned}$$

2. $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\sin\left(x^2\sin\frac{2}{x}\right)=$ ________.
答案：0.
解析：由于 $|\sin\frac{2}{x}|\le 1$，又 $|\sin y|\le|y|$，故

$$0\le\left|\sin\left(x^2\sin\frac{2}{x}\right)\right|\le\left|x^2\sin\frac{2}{x}\right|\le x^2.$$

由于 $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=0$，又 $\lim_{x\to 0}\frac{0}{x}=0$，故由夹挤原理，知道

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\sin\left(x^2\sin\frac{2}{x}\right)=0.$$

3. 设 $f(x)$ 为可导函数，且 $f(1)=0$，$f'(1)=2$，$g(x)=f(e^x)e^{f(x+1)}$，则 $g'(0)=$ ________.
答案：2.
解析：由复合函数求导法则，知

$$(f(e^x))'=f'(e^x)e^x,$$
$$\left(e^{f(x+1)}\right)'=f'(x+1)e^{f(x+1)}.$$

进一步由乘积求导法则，知

$$\begin{aligned}g'(x)=&(f(e^x))'e^{f(x+1)}+f(e^x)\left(e^{f(x+1)}\right)'\\=&f'(e^x)e^xe^{f(x+1)}+f(e^x)f'(x+1)e^{f(x+1)}\\=&2+0=2.\end{aligned}$$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}(3^x-1)^{\frac{1}{x}}=$ ________.

答案：3.

解析：注意到 $(3^x-1)^{\frac{1}{x}}=\exp\left(\frac{\ln(3^x-1)}{x}\right)$。而

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(3^x-1)}{x}\\
=&\lim_{x\to+\infty}\ln 3\cdot\frac{\ln(3^x-1)}{\ln 3^x}\\
=&\ln 3+\ln 3\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(3^x-1)-\ln 3^x}{\ln 3^x}\\
=&\ln 3+\ln 3\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1-3^{-x})}{\ln 3^x}\\
=&\ln 3+\ln 3\cdot\lim_{x\to+\infty}-\frac{1}{3^x\ln 3^x}=\ln 3.
\end{aligned}$$

因而

$$\lim_{x\to+\infty}(3^x-1)^{\frac{1}{x}}=3.$$

5. 设 $f(x)=x\sin x$，则 $f^{(2024)}(\pi)=$ __________.

答案：2024.

解析：由 Leibniz 求导法则，知

$$\begin{aligned}
&f^{(2024)}(x)\\
=&\binom{2024}{0}\cdot x\cdot(\sin x)^{(2024)}+\binom{2024}{1}\cdot(x)'\cdot(\sin x)^{(2023)}\\
=&x\sin x-2024\cos x.
\end{aligned}$$

故 $f^{(2024)}(\pi)=2024$。

6. 函数 $y=4x+\sin^2 x$ 的反函数的微分 $\mathrm{d}x=$ __________.

答案：$\frac{1}{4+2\sin x\cos x}\mathrm{d}y$.

解析：对原式两端求微分，得到

$$\mathrm{d}y=(4+2\sin x\cos x)\mathrm{d}x.$$

移项即得

$$\mathrm{d}x=\frac{1}{4+2\sin x\cos x}\mathrm{d}y.$$

7. 设 $f(x)$ 是由 $\begin{cases}x=\sin t+t^2\\ y=t+\cos t\end{cases}$ 所确定的可微函数，则在参数 $t=0$ 对应的点处 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$ __________.

答案：1.

解析：分别求导，得到

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\cos t+2t,$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=1-\sin t.$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^{-1}=\frac{1-\sin t}{\cos t+2t}.$$

代入 $t=0$，得到

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}=1.$$

8. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 点可导，且 $f(0)=1$，$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(\frac{x}{2})}{x}=\frac{1}{4}$，则 $f'(0)=$ ________.
答案：$\frac{1}{2}$.
解析：由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处导数存在，故

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(\frac{x}{2})}{x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x}-\frac{f(\frac{x}{2})-f(0)}{x}\right)\\=&\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}-\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{f(\frac{x}{2})-f(0)}{\frac{x}{2}-0}\\=&f'(0)-\frac{1}{2}f'(0)=\frac{1}{2}f'(0).\end{aligned}$$

故 $f'(0)=\frac{1}{2}$.

9. 设 $f(x)=\begin{cases}\ln(1+x), & x\geq0\\ x+ax^2, & x<0\end{cases}$ 二阶可导，则 $a=$ ________.

答案：$-\frac{1}{2}$.
解析：不难验证，$f(x)$ 是一阶可导的，并且

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+x}, & x\geq0\\ 1+2ax, & x<0\end{cases}.$$

$f'(x)$ 在 $x\neq0$ 处是可导的，且在 $x=0$ 处存在左右导数，且

$$f''_+(0)=\left.\left(-\frac{1}{(x+1)^2}\right)\right|_{x=0}=-1,$$

$$f''_-(0)=2a.$$

于是由 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处可导，知 $f''_+(0)=f''_-(0)$。于是 $a=-\frac{1}{2}$。

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(1+1)+2\ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\cdots+n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{e+e^{\frac{1}{2}}+\cdots+e^{\frac{1}{n}}-n}=$ ________.
答案：1.
解析：注意到分母的值 $\sum\limits_{k=1}^{n}(e^{\frac{1}{k}}-1)\geq\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\to\infty$。所以可以用 Stolz 定理计算极限。故

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+1)+2\ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\cdots+n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{e+e^{\frac{1}{2}}+\cdots+e^{\frac{1}{n}}-n}\\=&\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{e^{\frac{1}{n}}-1}\\=&\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}}=1.\end{aligned}$$

二.　解答题（请写出详细的计算过程和必要的根据！）

11. （12 分）设 $a \in$ ¡ ， $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln x+(x-\mathrm{e})\mathrm{e}^{(x-\mathrm{e})t+x}}{1+(x-\mathrm{e})\mathrm{e}^{(x-\mathrm{e})t+a}}\ (x>0)$.

（I）求 $f(x)$；

（II）讨论 $f(x)$ 的连续性（ $a$ 为何值时，$f(x)$ 为连续函数； $a$ 为何值时，$f(x)$ 存在间断点，求间断点并判断间断点类型）.

解：（I）当 $x>\mathrm{e}$ 时， $f(x)=\mathrm{e}^{x-a}$；

当 $x=\mathrm{e}$ 时， $f(\mathrm{e})=1$；

当 $0<x<\mathrm{e}$ 时， $f(x)=\ln x$ 。

即 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{x-a}, & x>\mathrm{e},\\ \ln x & 0<x\le \mathrm{e}.\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to \mathrm{e}^-} f(x)=1$， $\lim\limits_{x\to \mathrm{e}^+} f(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{e}-a}$， $f(\mathrm{e})=1$ 。

所以当 $a=\mathrm{e}$ 时， $f(x)$ 为连续函数；

当 $a\neq \mathrm{e}$ 时， $f(x)$ 存在间断点 $x=\mathrm{e}$，

该间断点为第一类间断点（或跳跃型间断点）。

12. （12 分）设 $a_1=1$， $a_{n+1}=\dfrac{1+2a_n}{1+a_n}$ （$n\ge 1$）。证明数列$\{a_n\}$收敛，并求其极限。

解: 由递推关系式可知$\forall n\geq 1$, 均有$a_n>0$, 于是$a_{n+1}=2-\frac{1}{1+a_n}<2$.

下面对$n\geq 1$应用数学归纳法证明$a_{n+1}\geq a_n$.

当$n=1$时, $a_2=\frac{3}{2}>a_1$. 此时所证成立.

假设所证结论对$n\geq 1$成立, 即$a_{n+1}\geq a_n$, 则

$$a_{n+2}=2-\frac{1}{1+a_{n+1}}\geq 2-\frac{1}{1+a_n}=a_{n+1}.$$

于是由数学归纳法可知所证结论成立.

由于数列$\{a_n\}$递增且有上界, 由单调有界定理可知该数列收敛,

设其极限为$A$. 由保号性可知$A\geq 0$,

则由递推关系式可知$A=\frac{1+2A}{1+A}$. 由此可得$A=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

另解：先有 $A=\dfrac{1+2A}{1+A}$ 以及 $A\geq 0$ 猜得极限值 $A=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

用迭代关系和数学归纳法证明 $1\leq a_n<A$

$$|a_{n+1}-A|=\left|\frac{1+2a_n}{1+a_n}-A\right|=\left|\frac{(2-A)(a_n-A)}{1+a_n}\right|\leq\frac{3-\sqrt{5}}{4}|a_n-A|\leq\left(\frac{3-\sqrt{5}}{4}\right)^n|a_1-A|\to 0$$

13. （10 分）设 $f(u)$ 在 $u=1$ 点可导，且满足关系式 $f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+\alpha(x)$，

其中 $\alpha(x)=o(x)$， $x\to 0$。求 $f(1)$ 和 $f'(1)$。

解：因为 $f(u)$ 在 $u=1$ 点可导，所以连续，当 $x\to 0$ 时，在等式 $f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+\alpha(x)$ 两边取极限，

得到 $f(1)=0$。

又因为 $f(u)$ 在 $u=1$ 点可导， $f(1)=0$，所以

$$f(1+\sin x)=f'(1)\sin x+o(\sin x)，\quad x\to 0，$$

$$f(1-\sin x)=-f'(1)\sin x+o(\sin x)，\quad x\to 0，$$

代入关系式 $f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+\alpha(x)$，其中 $\alpha(x)=o(x)$， $x\to 0$，

$$4f'(1)\sin x=8x+o(x)，\quad x\to 0，$$

所以 $f'(1)=2$。

14. （11 分）已知 $f(x)=\dfrac{1+x}{\sin x}-\dfrac{1}{x}$。

（I）计算 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$；

（II）记 $a=\lim\limits_{x\to 0}f(x)$，求当 $x\to 0$ 时，无穷小量 $f(x)-a$ 的阶。

解：（I） $a=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+x^2-\sin x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x-\sin x}{x^2}+1\right)=1$。

或者 $a=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+x^2-\sin x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+x^2-x+o(x^2)}{x(x+o(x))}=1$。

（II）设当 $x\to 0$ 时， $f(x)-a$ 为 $p$ 阶无穷小，则

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-a}{x^p}=\lim_{x\to0}\frac{x+x^2-\sin x-x\sin x}{x^{p+1}\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{x+x^2-\sin x-x\sin x}{x^{p+2}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1+2x-\cos x-\sin x-x\cos x}{(p+2)x^{p+1}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2+\sin x-2\cos x+x\sin x}{(p+2)(p+1)x^{p}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos x+3\sin x+x\cos x}{(p+2)(p+1)px^{p-1}},$$

所以当 $p=1$时， $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-a}{x^p}=\frac{1}{6}\neq0$，

故当 $x\to0$ 时， $f(x)-a$ 为1阶无穷小， $p=1$。

另解：

$$f(x)-1=\frac{1+x}{\sin x}-\frac{1}{x}-1=\frac{x(1+x)-\sin x-x\sin x}{x\sin x}$$

$$=\frac{x(1+x)-\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)-x(x+o(x^2))}{x^2+o(x^2)}$$

$$=\frac{1}{6}x+o(x)$$

所以 $p=1$

15.（10 分）设 $f(x)$ 在 $x=a$ 点二阶可导，且 $f'(a)\neq0$，求 $\lim\limits_{x\to a}\left[\frac{1}{f(x)-f(a)}-\frac{1}{(x-a)f'(a)}\right]$。

解：由洛必达法则，

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{1}{f(x)-f(a)}-\frac{1}{(x-a)f'(a)}\right]=-\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-(x-a)f'(a)}{(x-a)f'(a)[f(x)-f(a)]}$$

$$=-\frac{1}{f'(a)}\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{f(x)-f(a)+(x-a)f'(x)}$$

$$=-\frac{1}{f'(a)}\lim_{x\to a}\frac{\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a}}{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+f'(x)}$$

因为 $f(x)$ 在 $x=a$ 点二阶可导，所以

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a}=f''(a),\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a),\lim_{x\to a}f'(x)=f'(a),$$

故 $\lim_{x\to a}\left[\frac{1}{f(x)-f(a)}-\frac{1}{(x-a)f'(a)}\right]=-\frac{f''(a)}{2[f'(a)]^2}$。

解法 2：Taylor 展开

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{1}{f(x)-f(a)}-\frac{1}{(x-a)f'(a)}\right]=\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{f'(a)h+\frac{f''(a)}{2}h^2+o(h^2)}-\frac{1}{f'(a)h}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-\frac{f''(a)}{2}h^2+o(h^2)}{\left[f'(a)h+o(h)\right]f'(a)h}$$

$$=-\frac{f''(a)}{2f'(a)^2}$$

16. （10 分）已知 $f\in C^2[0,1]$。

（I）设 $x_0\in(0,1)$，写出 $f(x)$ 在 $x_0$ 点带有拉格朗日余项的一阶泰勒公式；

（II）若 $f(0)=f(1)=0$，证明：$\max\limits_{0\le x\le 1}|f(x)|\leqslant\frac{1}{8}\max\limits_{0\le x\le 1}|f''(x)|$.

**证明**：（I） $f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2$，其中 $x\in[0,1]$，$\xi$ 介于 $x$，$x_0$ 之间。

（II）因为 $f\in C^2[0,1]$，所以 $f(x)$，$|f(x)|$ 和 $|f''(x)|$ 都是连续函数，在有界闭区间 $[0,1]$ 上它们都存在最大值。

记 $M=\max\limits_{0\le x\le 1}|f''(x)|$。因为 $f(0)=f(1)=0$，所以存在 $x_1\in(0,1)$，使得 $|f(x_1)|=\max\limits_{0\le x\le 1}|f(x)|$。

此 $x_1$ 要么是 $f(x)$ 的最大值点，要么是 $f(x)$ 的最小值点。

无论哪种情形，$x_1$ 都是 $f(x)$ 的极值点，因此 $f'(x_1)=0$。

$$0=f(0)=f(x_1)+\frac{f'(x_1)}{1!}(0-x_1)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(0-x_1)^2=f(x_1)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}x_1^2,$$

$$0=f(1)=f(x_1)+\frac{f'(x_1)}{1!}(1-x_1)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(1-x_1)^2=f(x_1)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(1-x_1)^2,$$

所以 $|f(x_1)|=\frac{|f''(\xi_1)|}{2!}x_1^2\le\frac{M}{2!}x_1^2$，$|f(x_1)|=\frac{|f''(\xi_2)|}{2!}(1-x_1)^2\le\frac{M}{2!}(1-x_1)^2$。

故 $|f(x_1)| \le \min\left\{\frac{M}{2!}(1-x_1)^2, \frac{M}{2!}x_1^2\right\} \le \frac{M}{8}$ 。

17. （5 分）设 $K=\{f \mid f$ 在有界闭区间 $[a,b]$ 上可导，在开区间 $(a,b)$ 内二阶可导 $\}$.

命题 $P$： $\forall f \in K$ 都存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $f'(b)-f'(a)=f''(\xi)(b-a)$ .

（I） 是否可以在区间 $[a,b]$ 上对 $f'$ 直接用 Lagrange 微分中值定理得到命题 $P$ ？为什么？

（II）请判断命题 $P$ 是否成立？若成立，请给出证明.若不成立，请举出反例.

解：(I) 不能对 $f'$ 直接使用 Lagrange 微分中值定理。

对 $f'$ 直接使用 Lagrange 微分中值定理要求函数 $f'$ 在有界闭区间上连续，在开区间内可导。存在 $f \in K$ 使得 $f'$ 在 $a,b$ 不连续，所以对这样的 $f$ ， $f'$ 不满足 Lagrange 微分中值定理的条件。

所以不能对 $f'$ 直接使用 Lagrange 微分中值定理。

(2) 命题 $P$ 成立。

证明如下。

令 $F(x)=f'(x)-\dfrac{f'(b)-f'(a)}{b-a}(x-a)$ ，则 $F$ 在开区间 $(a,b)$ 内可微， $F(a)=F(b)=f'(a)$ 。

因为 $f$ 在开区间 $(a,b)$ 内二阶可微，所以 $F$ 在开区间 $(a,b)$ 内连续。

假设不存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $F'(\xi)=0$ 。则由 Darboux 定理，要么对任意 $x \in (a,b)$ ， $F'(x)>0$ ，要么对任意 $x \in (a,b)$ ， $F'(x)<0$ 。

不妨设对任意 $x \in (a,b)$ ， $F'(x)>0$ 。

此时，由 Lagrange 微分中值定理知 $F$ 在开区间 $(a,b)$ 内严格增。

于是可以记 $A=\lim\limits_{x\to a^+} F(x), B=\lim\limits_{x\to b^-} F(x)$ 。因此 $A=-\infty$ 或 $B=+\infty$ 或 $-\infty<A<B<+\infty$ 。

假设 $A=-\infty$ 或 $A<f'(a)$ ，则存在 $\varepsilon_1>0$ 以及 $\delta>0$ 使得 $\forall x \in (a,a+\delta)$ ，

$$F(x)<f'(a)-\varepsilon_1 , \quad \frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}(x-a)<\frac{\varepsilon_1}{2} ,$$

从而

$$f'(x)<\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}(x-a)+f'(a)-\varepsilon_1<f'(a)-\frac{\varepsilon_1}{2} ,$$

这与 $f'$ 在区间 $[a,a+\delta)$ 上满足介值性质（Darboux 定理）矛盾。

因此 $A \ge f'(a)$ 。同理可证 $B \le f'(a)$ 。

但这与 $A=-\infty$ 或 $B=+\infty$ 或 $-\infty<A<B<+\infty$ 矛盾。

因此存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $F'(\xi)=0$ ，即 $f'(b)-f'(a)=f''(\xi)(b-a)$ 。