

《微积分A1》第二十一讲

教师 杨利军

清华大学数学科学系

2025年12月01日

计算不定积分的递推关系方法, 例一

例一: 计算积分 $J_m = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^m}$, 其中 $a > 0$, m 为正整数.

解:

$$\begin{aligned} J_m &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^m} - \int x \left[\frac{1}{(x^2 + a^2)^m} \right]' dx \\ &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^m} + 2m \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{m+1}} dx \\ &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^m} + 2m \int \frac{x^2 + a^2}{(x^2 + a^2)^{m+1}} dx - 2ma^2 \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{m+1}} \\ &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^m} + 2mJ_m - 2ma^2J_{m+1}, \\ \text{即 } J_m &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^m} + 2mJ_m - 2ma^2J_{m+1}. \end{aligned}$$

例一, 续

$$2ma^2 J_{m+1} = \frac{x}{(x^2 + a^2)^m} + (2m - 1)J_m$$

$$J_{m+1} = \frac{x}{2ma^2(x^2 + a^2)^m} + \frac{2m - 1}{2ma^2} J_m.$$

$$J_1 = \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

$$\begin{aligned} J_2 &= \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^2} = \frac{x}{2a^2(x^2 + a^2)} + \frac{1}{2a^2} J_1 \\ &= \frac{x}{2a^2(x^2 + a^2)} + \frac{1}{2a^3} \arctan \frac{x}{a} + C. \end{aligned}$$

解答完毕.

例二

例二: 求积分 $J_n = \int \tan^n x dx$, 其中 n 为正整数.

解: 对于任意正整数 $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} J_n &= \int \tan^n x dx = \int \tan^{n-2} x \tan^2 x dx \\ &= \int \tan^{n-2} x \left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \right) dx = \int \tan^{n-2} x \left(\frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \right) dx \\ &= \int \tan^{n-2} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int \tan^{n-2} x dx \\ &= \int \tan^{n-2} x d \tan x - J_{n-2} = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - J_{n-2}. \end{aligned}$$

这样我们就得到递推关系式 $J_n = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - J_{n-2}, \forall n \geq 2$.

例二, 续

当 $n = 1$ 时,

$$J_1 = \int \tan x dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = -\ln |\cos x| + C.$$

当 $n = 2$ 时,

$$\begin{aligned} J_2 &= \int \tan^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx \\ &= \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int dx = \tan x - x + C. \end{aligned}$$

解答完毕.

有理分式, 真分式, 假分式

Definition

定义: (i) 多项式的商, 即形如 $P(x)/Q(x)$ 的函数, 称为有理函数, 或有理分式, 其中 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 均为多项式.

(ii) 多项式 $P(x)$ 的次数记作 $\deg P(x)$. 例如 $\deg(1+x^3) = 3$.

(iii) 有理分式 $P(x)/Q(x)$ 称为真(假)分式, 如果 $\deg P(x) < (\geq) \deg Q(x)$.

例如 $\frac{x^2+1}{x^3+2}$ 是真分式, 而 $\frac{x^4+2}{x^3+1}$ 是假分式.

假分式化简

Lemma

引理: 每个假分式均可表为一个多项式加上一个真分式.

引理的证明可以由如下例子得到. 例如有理分式 $\frac{x^4}{1+x^2}$ 是假分式. 可用辗转相除法, 将其化为一个多项式, 加上一个真分式:

$$\begin{aligned}\frac{x^4}{x^2+1} &= \frac{x^4 + x^2 - x^2}{x^2+1} = x^2 + \frac{-x^2}{x^2+1} \\ &= x^2 + \frac{-x^2 - 1 + 1}{x^2+1} = x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1}.\end{aligned}$$

实系数多项式在实数域中的分解

Theorem

定理: 一个实系数多项式 $Q(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ 在实数域中有如下分解式

$$Q(x) = (x - d_1)^{n_1} \cdots (x - d_r)^{n_r} (x^2 + p_1x + q_1)^{m_1} \cdots (x^2 + p_sx + q_s)^{m_s},$$

其中 $d_1, \dots, d_r, p_1, q_1, \dots, p_s, q_s$ 均为实数, $p_1^2 - 4q_1 < 0, \dots, p_s^2 - 4q_s < 0$, $n_1, \dots, n_r, m_1, \dots, m_s$ 均为正整数.

证明: 根据代数基本定理知, 多项式 $Q(x)$ 在复数域里有 n 个复根. 设在这 n 个复根中, 有 r 个互异的实数根 d_1, \dots, d_r , 对应的重数为 n_1, \dots, n_r , 以及 s 对互异的共轭复根 $c_1, \bar{c}_1, \dots, c_s, \bar{c}_s$, 对应的重数为 m_1, \dots, m_s , 则

$$n = n_1 + \cdots + n_r + 2(m_1 + \cdots + m_s).$$

于是多项式 $Q(x)$ 有如下分解式

实分解, 续一

$$Q(x) = (x - d_1)^{n_1} \cdots (x - d_r)^{n_r} [(x - c_1)(x - \bar{c}_1)]^{m_1} \cdots [(x - c_s)(x - \bar{c}_s)]^{m_s}.$$

设 $c_1 = a_1 + ib_1, \dots, c_s = a_s + ib_s$, 则

$$\begin{aligned}(x - c_1)(x - \bar{c}_1) &= [(x - a_1) + ib_1][(x - a_1) - ib_1] \\ &= (x - a_1)^2 + b_1^2 = x^2 - 2a_1x + a_1^2 + b_1^2 = x^2 + p_1x + q_1,\end{aligned}$$

其中 $p_1 = -2a_1, q_1 = a_1^2 + b_1^2$. 显然

$$p_1^2 - 4q_1 = (-2a_1)^2 - 4(a_1^2 + b_1^2) = -4b_1^2 < 0.$$

同理

$$(x - c_2)(x - \bar{c}_2) = x^2 + p_2x + q_2, \dots, (x - c_s)(x - \bar{c}_s) = x^2 + p_sx + q_s,$$

其中 $p_2^2 - 4q_2 = -4b_2^2 < 0, \dots, p_s^2 - 4q_s = -4b_s^2 < 0$.

实分解, 续二

于是多项式 $Q(x)$ 可分解为

$$Q(x) = (x - d_1)^{n_1} \cdots (x - d_r)^{n_r} (x^2 + p_1x + q_1)^{m_1} \cdots (x^2 + p_sx + p_s)^{m_s}.$$

定理得证. □

分式分解情形一

Theorem

定理一: 设 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 为真分式, 且 $Q(x) = (x-a)^k Q_1(x)$, 其中 $Q_1(x)$ 为多项式且 $Q_1(a) \neq 0$, $k \geq 1$, 则分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 有如下分解式

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)}, \quad (*)$$

其中 A 为实常数, $P_1(x)$ 为多项式, 它们由 $P(x)$, $Q(x)$ 唯一确定, 且分式

$\frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)}$ 为真分式.

证明: 对任意常数 $A \in \mathbb{R}$, 恒成立

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{P(x) - AQ_1(x)}{(x-a)^k Q_1(x)}.$$

取 A 使 $P(a) - AQ_1(a) = 0$, 即取 $A = \frac{P(a)}{Q_1(a)}$, 可使得 $P(x) - AQ_1(x)$ 含有因子 $x-a$,

情形一分解, 续一

即存在唯一多项式 $P_1(x)$, 使得 $P(x) - AQ_1(x) = (x - a)P_1(x)$. 于是成立分解式 (*) 成立, 即

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x - a)^k} + \frac{P_1(x)}{(x - a)^{k-1}Q_1(x)}.$$

以下我们证明分式 $\frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)}$ 为真分式. 由于

$$\begin{aligned}\deg(P_1) &= \deg(P - AQ_1) - 1 \leq \max\{\deg(P), \deg(Q_1)\} - 1 \\ &\leq \max\{\deg(P), \deg(Q) - k\} - 1,\end{aligned}$$

并且 $\deg(P) < \deg(Q)$, $\deg(Q) - k < \deg(Q)$, 故

$$\deg(P_1) < \deg(Q) - 1 = \deg[(x - a)^{k-1}Q_1].$$

这表明 $\frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)}$ 为真分式. 定理得证. □

情形一分解, 续二

Corollary

推论: 设 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 为真分式, 且 $Q(x) = (x-a)^k Q_1(x)$, 其中 $Q_1(x)$ 为多项式且 $Q_1(a) \neq 0$, $k \geq 1$, 则分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 有如下分解式

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{P_k(x)}{Q_1(x)},$$

其中常数 A_1, A_2, \dots, A_k 为实常数, $P_k(x)$ 为多项式, 它们由 $P(x)$, $Q(x)$ 唯一确定, 且分式 $\frac{P_k(x)}{Q_1(x)}$ 为真分式.

证明: 逐次利用定理一即可得到结论. □

例子

例: 考虑分式 $\frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}$. 显然分母有分解式 $x^3+4x = x(x^2+4)$. 由定理一知这个分式有如下分解

$$\frac{2x^2-x+4}{x^3+4x} = \frac{A}{x} + \frac{P_1(x)}{x^2+4}, \quad (*)$$

其中常数 A 和多项式 $P_1(x)$ 待定. 以 $x(x^2+4)$ 乘以等式 $(*)$ 两边得

$$2x^2-x+4 = A(x^2+4) + P_1(x)x. \quad (**)$$

令 $x=0$ 得 $A=1$. 将式 $(**)$ 右边的项 $A(x^2+4) = x^2+4$ 移到左边即可得 $2x^2-x+4 - (x^2+4) = x^2-x = P_1(x)x$. 由此得 $P_1(x) = x-1$. 于是分解式 $(*)$ 为

$$\frac{2x^2-x+4}{x^3+4x} = \frac{1}{x} + \frac{x-1}{x^2+4}.$$

分式分解情形二

Theorem

定理二: 设 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 为真分式. 若 $Q(x) = (x^2 + px + q)^k Q_1(x)$, 其中 $Q_1(x)$ 为多项式, $k \geq 1$, $p^2 - 4q < 0$, 且 $x^2 + px + q$ 不整除 $Q_1(x)$, 则分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 有如下分解式

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k} + \frac{P_1(x)}{(x^2 + px + q)^{k-1} Q_1(x)}, \quad (*)$$

其中 A, B 均为实常数, $P_1(x)$ 为多项式, 它们由 $P(x), Q(x)$ 唯一确定, 且分式 $\frac{P_1(x)}{(x^2 + px + q)^{k-1} Q_1(x)}$ 为真分式.

证明: 对任意常数 $A, B \in \mathbb{R}$, 恒成立

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k} + \frac{P(x) - (Ax + B)Q_1(x)}{(x^2 + px + q)^k Q_1(x)}.$$

可取常数 $A, B \in \mathbb{R}$, 使多项式 $P(x) - (Ax + B)Q_1(x)$ 含有因子 $x^2 + px + q$.

情形二分解, 续一

设 $x^2 + px + q = (x - \alpha)^2 + \beta^2$, 其中 $\alpha = -\frac{p}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}\sqrt{4q - p^2} > 0$, 即 $x^2 + px + q$ 有一对共轭复根 $\alpha \pm i\beta$. 取 $A, B \in \mathbb{R}$, 使得

$$P(\alpha + i\beta) - [A(\alpha + i\beta) + B]Q_1(\alpha + i\beta) = 0,$$

即

$$A(\alpha + i\beta) + B = \frac{P(\alpha + i\beta)}{Q_1(\alpha + i\beta)}.$$

具体说来, 若设 $\frac{P(\alpha+i\beta)}{Q_1(\alpha+i\beta)} = K + iL$, 则取 $A = \frac{L}{\beta}$, $B = \frac{K\beta - L\alpha}{\beta}$ 即可满足要求. 对这样的 A, B , 可使得多项式 $P(x) - (Ax + B)Q_1(x)$ 含有因子 $x^2 + px + q$, 即存在多项式 $P_1(x)$, 使得 $P(x) - (Ax + B)Q_1(x) = (x^2 + px + q)P_1(x)$. 于是我们得到

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k} + \frac{P_1(x)}{(x^2 + px + q)^{k-1}Q_1(x)}.$$

情形二分解, 续二

以下证明 $\frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}Q_1(x)}$ 是真分式. 由分解式 $P(x) - (Ax + B)Q_1(x) = (x^2 + px + q)P_1(x)$ 可知

$$\begin{aligned}\deg(P_1) &= \deg[P - (Ax + b)Q_1] - 2 \leq \max\{\deg(P), \deg(Q_1) + 1\} - 2 \\ &= \max\{\deg(P), \deg(Q) - 2k + 1\} - 2 < \deg(Q) - 2 \\ &= \deg[(x^2 + px + q)^{k-1}Q_1].\end{aligned}$$

命题得证. □

情形二分解, 续三

Corollary

推论二: 设 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 为真分式. 若 $Q(x) = (x^2 + px + q)^k Q_1(x)$, 其中 $Q_1(x)$ 为多项式, $k \geq 1$, $p^2 - 4q < 0$, 且 $x^2 + px + q$ 不整除 $Q_1(x)$, 则分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 有如下分解式

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1x + B_1}{(x^2 + px + q)} + \frac{A_2x + B_2}{(x^2 + px + q)^2} + \cdots + \frac{A_kx + B_k}{(x^2 + px + q)^k} + \frac{P_k(x)}{Q_1(x)},$$

其中 $A_1, B_1, \dots, A_k, B_k$ 均为实常数, $P_k(x)$ 为多项式, 它们由 $P(x), Q(x)$ 唯一确定, 且分式 $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ 为真分式.

证明: 逐次利用定理二即可得到结论. □

例子

例: 考虑分式 $\frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2}$. 根据定理一和定理二知这个分式有如下分解

$$\frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}, \quad (*)$$

其中 A, B, C, D, E 为待定常数. 以 $x(x^2+1)^2$ 乘以等式 $(*)$ 两边得

$$1-x+2x^2-x^3 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x^2+1)x + (Dx+E)x. \quad (**)$$

令 $x=0$ 得 $A=1$. 将式 $(**)$ 右边的项 $A(x^2+1)^2 = (x^2+1)^2$ 移到左边得

$$\begin{aligned} 1-x+2x^2-x^3 - (x^2+1)^2 &= 1-x+2x^2-x^3-x^4-2x^2-1 \\ &= -(x^4+x^3+x) = (Bx+C)(x^2+1)x + (Dx+E)x. \end{aligned}$$

于上式约去因子 x 得

$$\begin{aligned} -(x^3+x^2+1) &= (Bx+C)(x^2+1) + (Dx+E) \\ &= Bx^3 + Cx^2 + (B+D)x + (C+E). \end{aligned}$$

例子, 续

比较系数得

$$B = -1$$

$$C = -1$$

$$B + D = 0$$

$$C + E = -1.$$

易解得 $D = 1$, $E = 0$. 于是分解式 (*) 为

$$\frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2 + 1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{x + 1}{(x^2 + 1)} + \frac{x}{(x^2 + 1)^2}.$$

分解完毕.

一般分式分解定理

定理: 设 P/Q 为真分式. 假设其分母 Q 有分解

$$Q(x) = (x - d_1)^{n_1} \cdots (x - d_r)^{n_r} (x^2 + p_1x + q_1)^{m_1} \cdots (x^2 + p_sx + q_s)^{m_s},$$

其中 $d_1, \dots, d_r, p_1, q_1, \dots, p_s, q_s$ 均为实数, $p_1^2 - 4q_1 < 0, \dots, p_s^2 - 4q_s < 0$, $n_1, \dots, n_r, m_1, \dots, m_s$ 均为正整数, 则 P/Q 有如下分解式 (称为最简分式)

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} = & \frac{A_1}{x - d_1} + \cdots + \frac{A_{n_1}}{(x - d_1)^{n_1}} + \cdots + \frac{B_1}{x - d_r} + \cdots + \frac{B_{n_r}}{(x - d_r)^{n_r}} \\ & + \frac{K_1x + L_1}{x^2 + p_1x + q_1} + \cdots + \frac{K_{m_1}x + L_{m_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{m_1}} + \cdots \\ & + \frac{M_1x + N_1}{x^2 + p_sx + q_s} + \cdots + \frac{M_{m_s}x + N_{m_s}}{(x^2 + p_sx + q_s)^{m_s}}, \end{aligned}$$

其中 $A_i, \dots, B_i, K_i, L_i, \dots, M_i, N_i$ 均为实数. 进一步上述分解式是唯一的.

证明: 由上述的推论一和推论二即可得到结论.

例一

例一: 化分式 $\frac{x+1}{x^2-4x+3}$ 为最简分式.

解: 注意分母有分解式 $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$. 根据上述分式分解定理知分式可分解为

$$\frac{x+1}{x^2-4x+3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3},$$

其中 A, B 为待定常数. 于上式两边同乘以分母得

$$x+1 = A(x-3) + B(x-1).$$

确定常数 A, B 有两种方法. 方法一: 分别用 $x = 1$ 和 $x = 3$ 代入上式即得 $2 = -2A$ 和 $4 = 2B$. 由此得 $A = -1, B = 2$.

例一, 续

方法二: 比较等式 $x + 1 = A(x - 3) + B(x - 1)$ 常数项和一次项的系数得 $A + B = 1$ 和 $-3A - B = 1$. 解之得同样的结果 $A = -1, B = 2$. 于是求得如下分式分解

$$\frac{x + 1}{x^2 - 4x + 3} = \frac{-1}{x - 1} + \frac{2}{x - 3}.$$

注: 通常使用方法一比较简单快捷.

例二

例二: 化分式 $\frac{x}{x^3+x^2+3x+3}$ 为最简分式.

解: 先将分母作分解 $x^3 + x^2 + 3x + 3 = (x+1)(x^2+3)$. 依据分式分解定理知上述分式可分解成如下形式

$$\frac{x}{x^3+x^2+3x+3} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+3}.$$

去分母得 $x = A(x^2+3) + (Bx+C)(x+1)$. 令 $x = -1$ 得 $-1 = 4A$, 即 $A = -\frac{1}{4}$. 将项 $A(x^2+3)$ 移至等式左边得

$$x + \frac{1}{4}(x^2+3) = \frac{1}{4}x^2 + x + \frac{3}{4} = (Bx+C)(x+1) = Bx^2 + (B+C)x + C.$$

由此得 $B = \frac{1}{4}$, $C = \frac{3}{4}$. 于是所求分式的分解为

$$\frac{x}{x^3+x^2+3x+3} = \frac{-1}{4} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{4} \frac{x+3}{x^2+3}. \quad \#$$

例三

例三: 将分式 $\frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}$ 化为最简分式.

解: 显然分母有分解 $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x = x(x-1)^3$. 根据分式分解定理知上述分式有如下分解

$$\frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)^3} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{x-1},$$

其中 A, B, C, D 为待定系数. 去分母后得

$$x^3 + 1 = A(x-1)^3 + Bx + Cx(x-1) + Dx(x-1)^2.$$

为确定这些系数, 令 $x=0$ 得 $A=-1$. 于是

$$x^3 + 1 + (x-1)^3 = 2x^3 - 3x^2 + 3x = Bx + Cx(x-1) + Dx(x-1)^2.$$

约去因子 x 得 $2x^2 - 3x + 3 = B + C(x-1) + D(x-1)^2$.

例三, 续

令 $x = 1$ 即得 $B = 2$. 于是

$$2x^2 - 3x + 1 = C(x - 1) + D(x - 1)^2.$$

上式左边可因式分解为 $(2x - 1)(x - 1)$. 故约去因子 $x - 1$ 得

$$2x - 1 = C + D(x - 1).$$

再令 $x = 1$ 得 $C = 1$. 进而得 $2x - 2 = D(x - 1)$. 约去因子 $x - 1$ 最后确定

$D = 2$. 综上即得分式 $\frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}$ 的最简分式为

$$\frac{x^3 + 1}{x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x} = \frac{-1}{x} + \frac{2}{(x - 1)^3} + \frac{1}{(x - 1)^2} + \frac{2}{x - 1}.$$

解答完毕.

有理分式的不定积分

根据分式分解定理知, 真分式的不定积分可转化为如下两类简单分式

$$\frac{A}{(x-a)^k}, \quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k}$$

的不定积分, 其中 $p^2 - 4q < 0$. 第一类分式的不定积分可立刻写出

$$\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C,$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)^k} = \frac{(x-a)^{1-k}}{1-k} + C, \quad k \geq 2.$$

第二类简单分式的不定积分

考虑第二类分式的不定积分, 即

$$\int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k} dx,$$

其中 $p^2 - 4q < 0$. 经过配方得 $x^2 + px + q = (x + \frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}$. 令

$u = x + \frac{p}{2}$, $a^2 = q - \frac{p^2}{4} > 0$. 于是

$$\int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k} dx = A \int \frac{u du}{(a^2 + u^2)^k} + B_1 \int \frac{du}{(a^2 + u^2)^k}$$

其中 $B_1 = B - \frac{Ap}{2}$. 上式第一个积分可简单计算. 第二个不定积分可用递推方法求得.

例一

例一: 计算积分

$$\int \frac{x^3 + 1}{x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x} dx.$$

解: 之前已分解被积有理分式如下

$$\frac{x^3 + 1}{x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x} = \frac{-1}{x} + \frac{2}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1}.$$

于是

$$\begin{aligned} & \int \frac{(x^3 + 1)dx}{x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x} \\ &= -\int \frac{dx}{x} + 2\int \frac{dx}{(x-1)^3} + \int \frac{dx}{(x-1)^2} + 2\int \frac{dx}{x-1} \\ &= -\ln|x| - \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + \ln(x-1)^2 + C. \quad \# \end{aligned}$$

例二

例二: 求积分

$$J = \int \frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2} dx.$$

解: 分母已分解妥. 故被积分式有如下形式的最简分式

$$\frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2},$$

其中 A, B, C, D, E 为待定常数. 去分母得

$$2x^2 + 2x + 13 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x-2)(x^2+1) + (Dx+E)(x-2).$$

令 $x=2$ 得 $25 = 25A$. 由此得 $A=1$. 再将项 $A(x^2+1)^2$ 移至左边得

例二, 续一

$$2x^2 + 2x + 13 - (x^2 + 1)^2 = -x^4 + 2x + 12$$

$$= (Bx + C)(x - 2)(x^2 + 1) + (Dx + E)(x - 2).$$

由上式可知左端含有因子 $x - 2$. 仍由待定系数法可得

$$-x^4 + 2x + 12 = (x - 2)(-x^3 - 2x^2 - 4x - 6)$$

$$= (Bx + C)(x - 2)(x^2 + 1) + (Dx + E)(x - 2).$$

消去因子 $x - 2$ 得

$$-x^3 - 2x^2 - 4x - 6 = (Bx + C)(x^2 + 1) + (Dx + E)$$

$$= Bx^3 + Cx^2 + (B + D)x + (C + E).$$

比较上式两边系数得 $B = -1, C = -2, B + D = -4, C + E = -6$.

例二, 续二

由此解得 $D = -3$, $E = -4$. 于是得到如下分解

$$\frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{1}{x-2} - \frac{x+2}{x^2+1} - \frac{3x+4}{(x^2+1)^2}.$$

由此得

$$\begin{aligned} & \int \frac{(2x^2 + 2x + 13)dx}{(x-2)(x^2+1)^2} \\ &= \int \frac{dx}{x-2} - \int \frac{(x+2)dx}{x^2+1} - \int \frac{(3x+4)dx}{(x^2+1)^2} \\ &= \ln|x-2| - \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} - 2 \int \frac{dx}{1+x^2} - \frac{3}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{(1+x^2)^2} - 4 \int \frac{dx}{(1+x^2)^2} \\ &= \ln|x-2| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - 2 \arctan x + \frac{3}{2(1+x^2)} - 4 \int \frac{dx}{(1+x^2)^2}. \end{aligned}$$

例二, 续三

已求得关于积分 $J_m = \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^m}$ 的递推关系式

$$J_{m+1} = \frac{x}{2ma^2(x^2 + a^2)^m} + \frac{2m-1}{2ma^2} J_m.$$

令 $m = 1$ 得

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \arctan x + C.$$

于是所求不定积分为

$$\int \frac{(2x^2 + 2x + 13)dx}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{(x-2)^2}{1+x^2} + \frac{3-4x}{2(1+x^2)} - 4 \arctan x + C.$$

解答完毕.

有理函数的不定积分总结

总结: 任何有理函数的不定积分均可积得出来, 并且可以表示为若干个有理函数, 对数函数, 以及反正切函数之和.

有理三角函数的不定积分

Definition

定义: 设 $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$ 均为二元多项式, 商 $R(x, y) = P(x, y)/Q(x, y)$ 称为二元有理函数. 称 $R(\cos\theta, \sin\theta)$ 为三角有理函数, 或有理三角函数.

考虑如何计算 $\int R(\cos x, \sin x)dx$. (这里遵从习惯用变量 x 而不用 θ .)

Theorem

定理: 任何三角有理函数的不定积分 $\int R(\cos x, \sin x)dx$, 均可通过变换 (称为万能代换) $t = \tan(x/2)$ ($|x| < \pi$), 化为有理函数的不定积分.

定理证明

证明: 由代换 $t = \tan(x/2)$ 得

$$\sin x = 2 \sin(x/2) \cos(x/2)$$

$$= \frac{2 \sin(x/2) \cos(x/2)}{\sin^2(x/2) + \cos^2(x/2)} = \frac{2 \tan(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)} = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$\cos x = \cos^2(x/2) - \sin^2(x/2)$$

$$= \frac{\cos^2(x/2) - \sin^2(x/2)}{\sin^2(x/2) + \cos^2(x/2)} = \frac{1 - \tan^2(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$$

进一步由代换 $t = \tan(x/2)$ 得 $x = 2 \arctan t$. 于是 $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

因此

$$\int R(\cos x, \sin x) dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2}.$$

显然被积函数

$$R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2}$$

为有理函数. 于是不定积分 $\int R(\cos x, \sin x) dx$ 就化作有理函数的不定积分了. 定理得证.

例一

例一: 求不定积分 $\int \frac{dx}{\sin x(1+\cos x)}$.

解: 作万能代换 $t = \tan(x/2)$ 得

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sin x(1+\cos x)} &= \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}(1+\frac{1-t^2}{1+t^2})} \frac{2dt}{(1+t^2)} \\&= \int \frac{1+t^2}{2t} dt = \frac{1}{2} \int \left(t + \frac{1}{t}\right) dt = \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2} \ln |t| + C \\&= \frac{1}{4}\tan^2(x/2) + \frac{1}{2} \ln |\tan(x/2)| + C.\end{aligned}$$

注: 对于有理三角函数的不定积分, 万能代换解法总是可行的, 但不一定是最简便的方法. 请看下例

例二

例二: 计算 $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x} dx$.

解法一: 作代换 $t = \tan \frac{x}{2}$, 则 $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$. 于是

$$\begin{aligned}\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x} dx &= \int \frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{1+t^2+2t}{2} \frac{2dt}{1+t^2} \\&= \int \frac{(1+t^2+2t)dt}{1+t^2} = \int \left(1 + \frac{2t}{1+t^2}\right) dt \\&= t + \ln(1+t^2) + C = \tan \frac{x}{2} + \ln(1+\tan^2 \frac{x}{2}) + C \\&= \tan \frac{x}{2} - 2\ln \left| \cos \frac{x}{2} \right| + C.\end{aligned}$$

但下述解法二更简单.

例二, 续

解法二:

$$\begin{aligned}\int \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} dx &= \int \left(\frac{1}{1 + \cos x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x} \right) dx \\ &= \int \frac{dx}{2\cos^2 \frac{x}{2}} - \int \frac{d \cos x}{1 + \cos x} = \tan \frac{x}{2} - \ln(1 + \cos x) + C.\end{aligned}$$

解答完毕.

双曲函数, 及其基本性质

定义双曲余弦和双曲正弦函数如下(见课本第 36-37 页习题 2.1 题23)

$$\cosh x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad \sinh x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

不难证明双曲余弦与双曲正弦函数有如下性质:

1. $\cosh x$ 是偶函数, $\sinh x$ 是奇函数;
2. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \forall x \in \mathbb{R};$
3. $[\cosh x]' = \sinh x, [\sinh x]' = \cosh x, \forall x \in \mathbb{R};$
4. $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x; \forall x \in \mathbb{R};$
5. $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x, \forall x \in \mathbb{R};$
6. 函数 $y = \sinh x$ 有反函数 $x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R};$
7. 函数 $y = \cosh x$ 有反函数 $x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}): (1, +\infty) \rightarrow (0, +\infty).$

证明留作自我练习.

双曲函数的函数图像

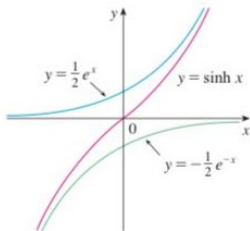


FIGURE 1

$$y = \sinh x = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}$$

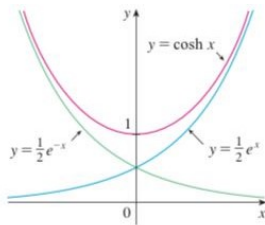


FIGURE 2

$$y = \cosh x = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$$

双曲函数的反函数图像

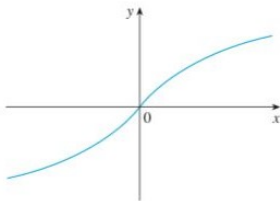


FIGURE 8 $y = \sinh^{-1} x$
domain = \mathbb{R} range = \mathbb{R}

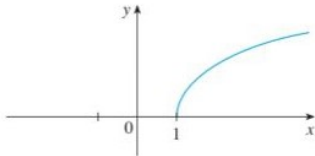


FIGURE 9 $y = \cosh^{-1} x$
domain = $[1, \infty)$ range = $[0, \infty)$

双曲函数应用于不定积分的计算, 例一

例一: 求不定积分

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}, \quad a > 0.$$

解: 作代换 $x = a \sinh t$, 则 $dx = a \cosh t dt$, $\sqrt{a^2 + x^2} = a \cosh t$. 于是

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} &= \int \frac{a \cosh t}{a \cosh t} dt = \int dt = t + C \\ &= \ln \left(\frac{x}{a} + \sqrt{1 + \left(\frac{x}{a} \right)^2} \right) + C = \ln \left(x + \sqrt{a^2 + x^2} \right) + C_1, \end{aligned}$$

其中 $C_1 = C - \ln a$ 仍为一个任意常数. 解答完毕.

另解

另解: 同一个不定积分常常可以用不同的方法积出来. 对于上述例一, 也可以用三角函数代换积出来. 记

$$J = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}},$$

其中 $a > 0$. 作变换 $x = a \tan t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, 则 $dx = \frac{adt}{\cos^2 t}$,

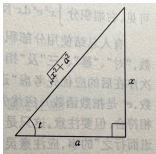
$$\sqrt{a^2 + x^2} = a\sqrt{1 + \tan^2 t} = a\sqrt{1 + \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}} = \frac{a}{\cos t}.$$

$$\begin{aligned} \text{于是 } J &= \int \frac{\frac{adt}{\cos^2 t}}{\frac{a}{\cos t}} = \int \frac{dt}{\cos t} = \int \frac{\cos t dt}{\cos^2 t} = \int \frac{d \sin t}{1 - \sin^2 t} \\ &= \int \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - \sin t} + \frac{1}{1 + \sin t} \right) d \sin t \end{aligned}$$

另解, 续

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin t}{1 - \sin t} + C = \ln \frac{1 + \sin t}{\cos t} + C.$$

根据 $x = a \tan t$ 可解得 $\sin t = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$, $\cos t = \frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}$, 如图.



于是

$$J = \ln \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}}{\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}} + C = \ln \left(x + \sqrt{a^2 + x^2} \right) + C_1,$$

其中 $C_1 = C - \ln a$ 仍为任意常数. 解答完毕.

例二

例二: 求不定积分

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}, \quad a > 0.$$

解: 作代换 $x = a \cosh t$, 则 $dx = a \sinh t dt$, $\sqrt{x^2 - a^2} = a \sinh t$. 于是

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} &= \int \frac{a \sinh t dt}{a \sinh t} = \int dt = t + C \\ &= \ln \left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \right) + C = \ln \left(x + \sqrt{x^2 - a^2} \right) + C_1, \end{aligned}$$

其中 $C_1 = C - \ln a$, 仍为一任意常数. 解答完毕.

笔记一

注一: 作变换 $x = a \cosh t$, 默认 $x > a > 0$. 实际上被积函数 $\frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ 对 $x < -a < 0$ 也有定义. 此时做变换 $x = -a \cosh t$, 类似得到不定积分为

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = -\ln \left| x - \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C,$$

其中 $x < -a < 0$. 由于

$$\begin{aligned} -\ln \left| x - \sqrt{x^2 - a^2} \right| &= \ln \frac{1}{\left| x - \sqrt{x^2 - a^2} \right|} \\ &= \ln \frac{\left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right|}{\left| (x - \sqrt{x^2 - a^2})(x + \sqrt{x^2 - a^2}) \right|} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| - \ln a^2, \end{aligned}$$

故对于 $|x| > a$, 我们有一个统一的积分公式

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C.$$

注记二

注二: 对于例二中的不定积分 $J = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$, $a > 0$, 我们也可以用三角函数代换解之. 作代换的目标是去根号. 故令 $x = \frac{a}{\sin t}$, $0 < t < \frac{\pi}{2}$, 则

$$J = \int \frac{-\frac{a \cos t}{\sin^2} dt}{\sqrt{\frac{a^2}{\sin^2 t} - a^2}} = - \int \frac{\cos t \sin t dt}{\sin^2 t \sqrt{1 - \sin^2 t}} = - \int \frac{dt}{\sin t}.$$

之前我们已经计算过积分 $\int \frac{dt}{\sin t} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 - \cos t}{1 + \cos t} \right| + C$. 再由 $x = \frac{a}{\sin t}$ 解得 $\cos t = \sqrt{1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2} = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x}$. 于是

$$\int \frac{dt}{\sin t} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x}}{1 + \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x}} + C = \frac{1}{2} \ln \frac{x - \sqrt{x^2 - a^2}}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} + C.$$

$$\begin{aligned} \text{因此 } J &= - \int \frac{dt}{\sin t} = - \frac{1}{2} \ln \frac{x - \sqrt{x^2 - a^2}}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} + C = \frac{1}{2} \ln \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{x - \sqrt{x^2 - a^2}} + C \\ &= \ln \left(x + \sqrt{x^2 - a^2} \right) + C_1, \quad C_1 = C - \ln a. \quad \# \end{aligned}$$

某些特殊无理函数的不定积分

含有根号的函数称作无理函数. 不是每个无理函数的不定积分都可以积得出来, 即可以表示为初等函数. 例如可以证明不定积分 $\int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} dx$ 积不出来, 这里 $0 < k < 1$. 这个积分称作椭圆(函数)积分. 此外可以证明如下不定积分积不出来.

$$\int e^{-x^2} dx, \int \sin(x^2) dx, \int \cos(x^2) dx,$$

$$\int \frac{\sin x}{x} dx, \int \frac{\cos x}{x} dx, \int \frac{dx}{\ln x}.$$

以下考虑某些无理函数的不定积分, 它们可以化为有理函数的不定积分, 从而积得出来. 计算原则: 有理化(即去根号).

一类可积的无理函数

以下我们将证明形如 $R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})$ 的无理函数可以积出来, 其中 $R(x, y)$ 为二元有理函数, n 为正整数, 且 $ad \neq bc$. (若不然, 则 $\frac{ax+b}{cx+d}$ 就是一个常数, 从而被积函数为一个有理函数) 对于这类无理函数的不定积分, 作变换

$$t = \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{1/n} \quad \text{即} \quad t^n = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

由此可解出 $x = \frac{dt^n - b}{a - ct^n}$. 于是

$$\int R \left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \right) dx = \int R \left(\frac{dt^n - b}{a - ct^n}, t \right) \left(\frac{dt^n - b}{a - ct^n} \right)' dt.$$

从而原积分化为有理函数的不定积分了.

例一

例一: 计算积分 $\int \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} dx$, 其中 $a < x < b$.

解: 令 $t^2 = \frac{x-a}{b-x}$, 则 $t^2(b-x) = x-a$, $a+bt^2 = x(1+t^2)$, 即

$$x = \frac{a+bt^2}{1+t^2} = b + \frac{a-b}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2(b-a)t dt}{(1+t^2)^2}.$$

因此

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} dx &= \int \frac{t \cdot 2(b-a)t dt}{(1+t^2)^2} = 2(b-a) \int \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^2} \\ &= 2(b-a) \left(\int \frac{dt}{1+t^2} - \int \frac{dt}{(1+t^2)^2} \right) \\ &= 2(b-a) \left(\arctan t - \int \frac{dt}{(1+t^2)^2} \right). \end{aligned}$$

例一, 续一

利用之前关于积分 $J_m = \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^m}$ 的递推关系式

$$J_{m+1} = \frac{x}{2ma^2(x^2 + a^2)^m} + \frac{2m-1}{2ma^2} J_m$$

可得

$$\int \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2} \arctan t + C. \quad \text{于是}$$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} dx &= 2(b-a) \left(\arctan t - \frac{t}{2(1+t^2)} - \frac{1}{2} \arctan t \right) + C \\ &= (b-a) \arctan t - \frac{(b-a)t}{1+t^2} + C \\ &= (b-a) \arctan \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} - \sqrt{(x-a)(b-x)} + C. \end{aligned}$$

解答完毕.

另解(非常规解法): 由于 $\frac{x-a}{b-a} + \frac{b-x}{b-a} = 1$, $x \in (a, b)$, 我们可以尝试作变换

$$\frac{x-a}{b-a} = \sin^2 t, \quad 0 < t < \frac{\pi}{2}, \quad \text{则} \quad \frac{b-x}{b-a} = \cos^2 t,$$

例一, 续二

$$\frac{x-a}{b-x} = \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \tan^2 t.$$

由 $\frac{x-a}{b-x} = \sin^2 t$ 得 $dx = 2(b-a) \sin t \cos t dt$. 于是

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} dx &= \int \tan t \cdot 2(b-a) \sin t \cos t dt \\ &= 2(b-a) \int \sin^2 t dt = (b-a) \int (1 - \cos 2t) dt \\ &= (b-a) \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) + C = (b-a) (t - \sin t \cos t) + C \\ &= (b-a) \left(\arcsin \sqrt{\frac{x-a}{b-a}} - \frac{\sqrt{(x-a)(b-x)}}{b-a} \right) + C \\ &= (b-a) \arcsin \sqrt{\frac{x-a}{b-a}} - \sqrt{(x-a)(b-x)} + C. \end{aligned}$$

解答完毕.

例二

例二: 求 $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}$.

解: 将被积函数写作如下形式

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}} = \frac{1}{x+1} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}.$$

令 $t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$, 则 $t^3(x-1) = x+1$ 或写作 $t^3x - x = t^3 + 1$. 由此解得

$$x = \frac{t^3 + 1}{t^3 - 1} = 1 + \frac{2}{t^3 - 1},$$

故 $dx = -\frac{6t^2 dt}{(t^3-1)^2}$. 于是

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}} &= \int \frac{1}{x+1} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} dx \\ &= \int \frac{1}{1 + \frac{2}{t^3-1} + 1} \cdot t \cdot \frac{-6t^2}{(t^3-1)^2} dt = \int \frac{t^3-1}{2t^3} \frac{-6t^3}{(t^3-1)^2} dt = -3 \int \frac{dt}{t^3-1}. \end{aligned}$$

例二, 续一

根据分式分解定理知

$$\frac{1}{t^3 - 1} = \frac{1}{(t - 1)(t^2 + t + 1)} = \frac{A}{t - 1} + \frac{Bt + C}{t^2 + t + 1},$$

其中 A, B, C 为待定系数. 去分母得

$$1 = A(t^2 + t + 1) + (Bt + C)(t - 1).$$

令 $t = 1$ 得 $1 = 3A$, $A = \frac{1}{3}$. 将 $A(t^2 + t + 1)$ 移至左边得 $1 - \frac{1}{3}(t^2 + t + 1) = (Bt + C)(t - 1)$, 即 $-\frac{1}{3}t^2 - \frac{1}{3}t + \frac{2}{3} = Bt^2 + (C - B)t - C$. 比较两边系数得 $B = -\frac{1}{3}$, $C = -\frac{2}{3}$. 于是

$$\frac{1}{t^3 - 1} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{t - 1} - \frac{t + 2}{t^2 + t + 1} \right).$$

于是所求积分为

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x - 1)(x + 1)^2}} = \int \frac{-3dt}{t^3 - 1}$$

例二, 续二

$$\begin{aligned} &= \int \left(\frac{-1}{t-1} + \frac{t+2}{t^2+t+1} \right) dt = \dots \\ &= -\ln|t-1| + \frac{1}{2} \ln(t^2+t+1) + \sqrt{3} \arctan \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

再将

$$t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$$

回代上式即得所求的不定积分. 解答完毕.

例二

例二: 求不定积分 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}}$.

解: 由于 $x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1)$, 故被积函数的定义域为 $x > 1$, 或者 $x < -4$. 往下只考虑情形 $x > 1$. 故积分可写作

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}} = \int \frac{dx}{(x+4)\sqrt{\frac{x-1}{x+4}}}.$$

故上述积分化为之前讨论过的积分类型. 作变换

$$t^2 = \frac{x-1}{x+4} \quad \text{或} \quad x = \frac{1+4t^2}{1-t^2} = -4 + \frac{5}{1-t^2}, \quad \text{故} \quad dx = \frac{10tdt}{(1-t^2)^2}.$$

于是

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}} = \int \frac{dx}{(x+4)\sqrt{\frac{x-1}{x+4}}} = \int \frac{\frac{10tdt}{(1-t^2)^2}}{\left(\frac{4t^2+1}{1-t^2} + 4\right) \cdot t}$$

例二, 续

$$\begin{aligned} &= \int \frac{2dt}{1-t^2} = \int \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) dt \\ &= \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C = \ln \left| \frac{1 + \sqrt{\frac{x-1}{x+4}}}{1 - \sqrt{\frac{x-1}{x+4}}} \right| + C \\ &= \ln \left| \frac{\sqrt{x+4} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+4} - \sqrt{x-1}} \right| + C. \end{aligned}$$

对情形 $x < -4$ 类似考虑. 解答完毕.

杂例, 例一

例一: 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}$.

解: 为去根号, 作变换 $x = t^6$, 则 $dx = 6t^5 dt$. 于是

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} &= \int \frac{6t^5 dt}{t^3(1+t^2)} = \int \frac{6t^2 dt}{1+t^2} \\&= 6 \int \frac{(1+t^2)dt}{1+t^2} - 6 \int \frac{dt}{1+t^2} = 6t - 6 \arctan t + C \\&= 6\sqrt[6]{x} - 6 \arctan \sqrt[6]{x} + C.\end{aligned}$$

解答完毕.

例二

例二: 计算不定积分 $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}, a < x < b.$

常规解法: 被积函数的分母可写作 $(x-a)\sqrt{\frac{b-x}{x-a}}$. 按常规解法, 作变换

$t^2 = \frac{b-x}{x-a}$ 得 $t^2(x-a) = b-x$ 或 $x = \frac{b+at^2}{1+t^2} = a + \frac{b-a}{1+t^2}$. 故 $dx = \frac{-2t(b-a)dt}{(1+t^2)^2}$.

于是

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} &= \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{\frac{b-x}{x-a}}} \\&= \int \frac{1}{\frac{b-a}{1+t^2} \cdot t} \frac{-2t(b-a)dt}{(1+t^2)^2} = -2 \int \frac{dt}{1+t^2} \\&= -2 \arctan t + C = -2 \arctan \sqrt{\frac{b-x}{x-a}} + C.\end{aligned}$$

解答完毕.

非常规解法

非常规解法: 令 $x = a\cos^2 t + b\sin^2 t$, $t \in (0, \frac{\pi}{2})$, 则 $x - a = (b - a)\sin^2 t$,
 $b - x = (b - a)\cos^2 t$, $dx = 2(b - a) \sin t \cos t dt$.

$$\begin{aligned}\text{于是 } \int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} &= \int \frac{2(b-a) \sin t \cos t dt}{(b-a) \sin t \cos t} \\ &= 2t + C = 2\arctan \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} + C. \quad \left(\frac{x-a}{b-x} = \tan^2 t \right)\end{aligned}$$

注: 根据上述不定积分, 可求得如下广义积分的值:

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = 2\arctan \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} \Big|_a^{b^-} = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$

注意积分值与积分上下限 a, b 无关.

习题一: 课本第163-164页习题5.5题1: 求下列不定积分

$$(1) \int \frac{1}{(x+1)(x+2)^2} dx; \quad (3) \int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} dx;$$

$$(5) \int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4} dx; \quad (7) \int \frac{x^7}{(1-x^2)^5} dx.$$

习题二: 课本第164页习题5.5题2: 求下列不定积分

$$(1) \int \frac{\sin^4 x dx}{\cos^3 x}; \quad (3) \int \frac{\sin^2 x dx}{1+\sin^2 x};$$

$$(5) \int \frac{1-\tan x}{1+\tan x} dx; \quad (7) \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx; \quad (9) \int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx.$$

习题三: 课本第164页习题5.5题3: 求下列不定积分

$$(1) \int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})}; \quad (2) \int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} dx;$$

$$(3) \int x\sqrt{x+2} dx; \quad (5) \int x\sqrt{x^4 + 2x^2 - 1} dx; \quad (9) \int \frac{1}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}} dx.$$

习题四: 课本第164页习题5.5题4: 求下列不定积分

$$(1) \int \frac{\sqrt{1 + \cos x}}{\sin x} dx; \quad (3) \int \frac{x}{1 - \cos x} dx; \quad (5) \int \frac{1 - \ln x}{\ln^2 x} dx;$$

$$(7) \int \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1} dx; \quad (8) \int \frac{x \ln x}{(x^2 + 1)^2} dx; \quad (9) \int \frac{\arctan x}{x^2(1 + x^2)} dx.$$