Linear Algebra 2025 Fall

Reference Solution

TA: 林漓尽致 *Assignment 9-2*

《线性代数与几何-上》习题 4: 22,23,24,25,26,28

习题 4.22 判断下列命题是否正确:

1. 如线性方程组 $Ax = 0$ 只有零解, 则线性方程组 $Ax = b$ 有唯一解;
2. 如 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 是线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系, 则 $\eta_1 + \eta_2, \eta_2 + \eta_3, \eta_3 + \eta_4, \eta_4 + \eta_1$ 也是线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系;
3. 如线性方程组 $Ax = b$ 有唯一解, 则线性方程组 $Ax = 0$ 只有零解.

解答:

1. 假: 令 $A = (1, 2)^T$, $b = (1, 1)^T$;
2. 假:$\eta_1 + \eta_2, \eta_2 + \eta_3, \eta_3 + \eta_4, \eta_4 + \eta_1$ 线性相关;
3. 真: 若存在 $x' \neq 0$ 使 $Ax' = 0$, 则对于使 $Ax = b$ 成立的 x 有 $A(x + x') = b$, 矛盾.

习题 4.23 求数域 F 上的齐次线性方程组的基础解系及通解:

1.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 0; \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

解答:

1. 消元得线性无关行 $(1,0,3/2,1)$ 和 $(0,1,-7/2,2)$, 基础解系为 $(-3/2,7/2,1,0)^T$ 和 $(-1,-2,0,1)^T$, 通解为 $\begin{pmatrix}-3/2 & -1\\ 7/2 & -2\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}F^2$.

2. 消元得线性无关行 $(1,0,-19/8,-3/8,4/8)$ 和 $(0,1,-7/8,25/8,-4/8)$, 基础解系为 $(19/8,7/8,1,0,0)^T$, $(3/8,-25/8,0,1,0)^T$ 和 $(-1/2,1/2,0,0,1)^T$, 通解为 $\begin{pmatrix}19/8 & 3/8 & -1/2\\ 7/8 & -25/8 & 1/2\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}F^3$.

习题 4.24 求数域 F 上的齐次线性方程组的通解:

1.

$$\begin{cases} 2x_1-7x_2+3x_3+x_4=6,\\ 3x_1+5x_2+2x_3+2x_4=4,\\ 9x_1+4x_2+x_3+7x_4=2;\end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3+x_4+x_5=7,\\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=-2,\\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=12;\end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+x_4=3,\\ x_1+4x_2+5x_3+2x_4=2,\\ 2x_1+9x_2+8x_3+3x_4=7,\\ 3x_1+7x_2+7x_3+2x_4=12.\end{cases}$$

解答:

1. 消元得增广矩阵 $\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 0 & 4/5 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1/5 & 2\end{array}\right)$. 故解集为 $\begin{pmatrix}0\\0\\2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4/5\\0\\1/5\\1\end{pmatrix}F$.

2. 消元得增广矩阵 $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -19/4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 38/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 9/4 \end{array}\right)$. 故解集为 $\begin{pmatrix} -19/4 \\ 38/4 \\ 0 \\ 0 \\ 9/4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} F^2$.

3. 消元得增广矩阵 $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 31/6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4/6 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -7/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. 故解集为 $\begin{pmatrix} 31/6 \\ 4/6 \\ -7/6 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} F$.

习题 4.25 讨论 λ 取何值时, 数域 F 上的线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2, \end{cases}$$

有唯一解, 有无穷多解, 无解. 有解时求其解.

解答: 分类讨论 (设 $F \subset \mathbb{C}$).

- 当 $\lambda \neq 1, -2$ 时有

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{(\lambda-1)(\lambda+2)} \begin{pmatrix} \lambda+1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda+1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda+1 \end{pmatrix}.$$

  于是方程有唯一解, 且解为

$$\frac{1}{(\lambda-1)(\lambda+2)} \begin{pmatrix} \lambda+1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda+1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda+2} \begin{pmatrix} -(1+\lambda) \\ 1 \\ (1+\lambda)^2 \end{pmatrix}.$$

- 当 $\lambda = 1$ 时方程组等价为 $(1,1,1)x = (1)$, 直接读出解集为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} F^2$.

- 当 $\lambda = -2$ 时方程组三式相加得 $0 = 1$, 故方程组无解.

习题 4.26 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & a+2 & -3 \\ 0 & -3a & a+2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix},$$

讨论 a 为何值时, 数域 F 上得线性方程组 $Ax=b$ 无解, 有唯一解, 有无穷多解. 有解时求其解.

解答: 做倍加后得等价方程

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & a & -1\\ 0 & 0 & a-1\end{pmatrix}x=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

当 $a=1$ 时解集为 $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}F$. 当 $a=0$ 时方程无解. 当 $a\neq 0,1$ 时方程解为 $\begin{pmatrix}1-1/a\\1/a\\0\end{pmatrix}$.

习题 4.28 设 A 是 $m\times n$ 矩阵,B 是 $n\times s$ 矩阵. 证明:$(AB)x=0$ 与 $Bx=0$ 同解 $\iff$ $\operatorname{rank}(AB)=\operatorname{rank}(B)$.

解答: 令 $Bx=0$ 的解集为 CF^t, 其中 C 为 $s\times t$ 矩阵,$t=s-\operatorname{rank}(B)$. 若 $ABx=0$ 的解集也为 CF^t, 则 $t=s-\operatorname{rank}(AB)$, 故 $\operatorname{rank}(AB)=\operatorname{rank}(B)$. 反之, 若 $\operatorname{rank}(AB)=\operatorname{rank}(B)$, 则 AB 和 B 的行空间相同. 因此 $\forall x\in F^s$ 有 $ABx=0\implies Bx=0$.

《线性代数入门》习题 2.4: 3,5,6,7

习题 2.4.3 求下列矩阵零空间的一组基:

1. $\begin{pmatrix}I_n & I_n\end{pmatrix}$.
2. $\begin{pmatrix}I_n & I_n\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.
3. $\begin{pmatrix}I_n & I_n & I_n\end{pmatrix}$.

解答: 注意到题三个矩阵均为简化阶梯形, 故可直接读出基. 记 e_i 为第 i 单位向量.

1. $\{e_i-e_{n+i}:1\le i\le n\}$.
2. $\{e_i-e_{n+i}:1\le i\le n\}$.
3. $\{e_i-e_{n+i}:1\le i\le n\}\cup\{e_i-e_{2n+i}:1\le i\le n\}$.

习题 2.4.5 线性方程组 $Ax=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ 的全部解是 $x=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $k\in\mathbb{R}$. 求 A.

解答: 可列方程

$$\begin{cases} A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, \\ A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 0. \end{cases}$$

解得 $A = \begin{pmatrix}1 & 0\\3 & 0\end{pmatrix}$. 回代求解 $Ax = (1,3)^T$ 可得解集与题中相同, 故该矩阵即为所求.

习题 2.4.6 求常数 a, b, c, 使得方程 $\begin{pmatrix}1 & -3 & -1\end{pmatrix} x = 12$ 的所有解都具有如下形式:

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}b\\1\\0\end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix}c\\0\\1\end{pmatrix} x_3.$$

解答: 可列方程

$$\begin{cases} a = 12, \\ b-3 = 0, \\ c-1 = 0. \end{cases}$$

故 $a = 12$, $b = 3$, $c = 1$. 回代验证.

习题 2.4.7 设 3×4 矩阵 A 的零空间一组基是 $\begin{pmatrix}2\\3\\1\\0\end{pmatrix}$.

1. 求 $\mathrm{rank}(A)$ 和 $\mathrm{rref}(A)$.
2. 线性方程组 $Ax = b$ 对哪些 b 有解?

解答:

1. $\mathrm{rank}(A) = 4 - 1 = 3$; $\mathrm{rref}(A) = \begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & 0\\0 & 1 & -3 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.
2. 由 $\mathrm{rank}(A) = 3$ 得 $Ax = b$ 对任意 $b \in \mathbb{R}^3$ 均有解.