

# 《微积分A1》第十七讲

教师 杨利军

清华大学数学科学系

2025年11月17日

# 斜渐近线(slant asymptotes), 例子

## Definition

定义: 设  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上定义. 称直线  $y = kx + b$  为函数  $f(x)$  的斜渐近线, 如果  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (kx + b)] = 0$ .

注: 显然水平渐近线是斜渐近线的特殊情形, 即  $k = 0$  的情形. 当  $f(x)$  在  $(-\infty, b]$  上定义时, 类似可定义函数  $f(x)$  的(负向)斜渐近线.

## Example

例: 函数  $y = x + 2 - \frac{1}{x}$  在  $(0, +\infty)$  上有斜渐近线  $y = x + 2$ . 因为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \left( x + 2 - \frac{1}{x} \right) - (x + 2) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} = 0.$$

同理, 函数  $y = x + 2 - \frac{1}{x}$  在  $(-\infty, 0)$  上有相同的斜渐近线  $y = x + 2$ .

# 斜渐近线的存在性

## Theorem

定理: 设  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上定义, 则  $f(x)$  有斜渐近线  $\Leftrightarrow$

- (i) 极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  存在, 极限值记作  $k$ ;
- (ii) 极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx]$  存在, 极限值记作  $b$ .

当条件 (i) 和 (ii) 成立时,  $f(x)$  有斜渐近线  $y = kx + b$ .

例: 考虑  $f(x) = x + 2 - \frac{1}{x}$ . 验证条件 (i), (ii):

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 2 - \frac{1}{x}}{x} = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x + 2 - \frac{1}{x} - x] = 2.$$

因此函数  $f(x)$  有斜渐近线  $y = x + 2$ .

# 定理证明

证明:  $\Rightarrow$ : 当  $f(x)$  有渐近线  $y = kx + b$  时, 即

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (kx + b)] = 0, \quad (*)$$

则  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[f(x) - (kx + b)]}{x} = 0.$

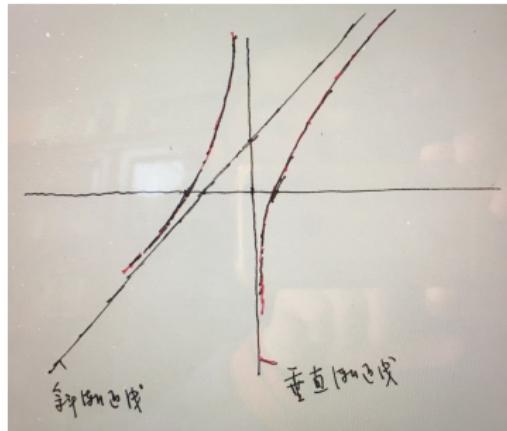
由此可知  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k$ . 即条件 (i) 成立. 再根据极限式 (\*) 可知  
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] = b$ . 即条件 (ii) 成立.

$\Leftarrow$ : 假设条件 (i) 和 (ii) 成立, 则由 (ii), 即  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx]$  存在, 其极限值记作  $b$ . 于是  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (kx + b)] = 0$ . 即函数  $f(x)$  有斜渐近线  
 $y = kx + b$ . 定理得证. □

注: 实际上  $f(x)$  有斜渐近线  $\iff$  存在  $k$ , 使得极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx]$  存在.  
条件 (i) 显得多余. 但条件 (i) 提供了求  $k$  的方法, 即  $k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ .

# 例子

例：仍考虑曲线  $y = x + 2 - \frac{1}{x}$ . 已求得曲线的一条斜渐近线  $y = x + 2$ . 此外  
曲线还有一条垂直渐近线  $x = 0$ , 即  $y$  轴. 因为  $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} [x + 2 - \frac{1}{x}] = \mp\infty$ .  
曲线  $y = x + 2 - \frac{1}{x}$  的函数图像, 及其渐近线如图所示.



# 函数作图的一般步骤

为定性地画出  $y = f(x)$  的函数图像，需要确定函数如下性质：

1. 定义域；
2. 是否有奇偶性，周期性，对称性；
3. 单调区间与极值点(利用一阶导数)；
4. 凸性和拐点(利用二阶导数)；
5. 演近线；
6. 特殊点，例如零点等；
7. 定性作图.

# 例一

例一: 考虑函数  $f(x) = x^4 - 4x^3$ . 简单计算得

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3),$$

$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2).$$

1. 驻点: 易见函数有两个驻点  $x = 0, x = 3$ . 由于  $f''(3) = 36 > 0$ , 故  $x = 3$  是极小点, 极小值为  $f(3) = -27$ . 因  $f''(0) = 0$ , 故不能用二阶导数来确定驻点  $x = 0$  是否为极值点. 因  $f'(x) = 4x^2(x - 3) \leq 0, \forall x \in (-\infty, 3)$ , 且仅在

$x = 0$  处为零, 故  $f(x)$  在这个区间里严格单调下降. 因此驻点  $x = 0$  不是极值点.

2. 单调区间: 如上所述在区间  $(-\infty, 3)$  上,  $f'(x) = 4x^2(x - 3) \leq 0$ , 故函数严格单调减. 在区间  $(3, +\infty)$  上,  $f'(x) > 0$ , 故函数严格单调增.

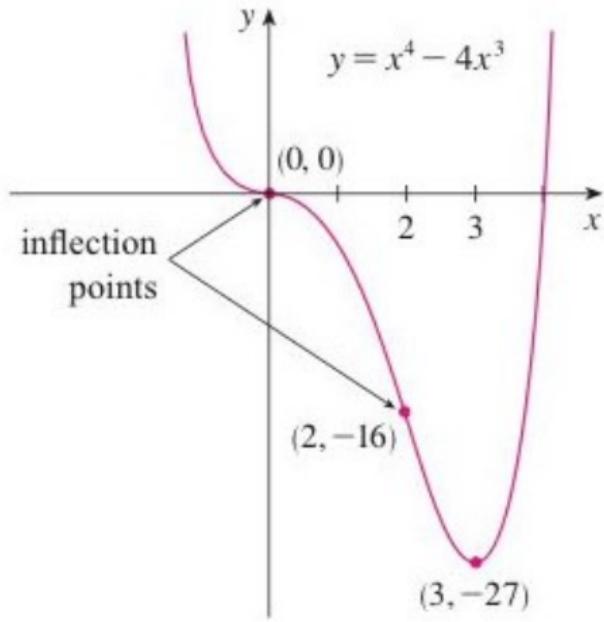
## 例一, 续一

3. 拐点: 根据  $f''(x) = 12x(x - 2)$  不难看出函数有两个拐点  $(x, y) = (0, 0)$ ,  $(x, y) = (2, -16)$ . 函数的凸性区间如下表所述.

区间	$f''(x) = 12x(x - 2)$	凸性
$(-\infty, 0)$	+	下凸
$(0, 2)$	-	上凸
$(2, +\infty)$	+	下凸

4. 根据以上信息, 不难画出函数图像.

# 例一, 续二



## 例二

例二: 定性地画出函数  $f(x) = x^{2/3}(6 - x)^{1/3}$  的函数图像.

解: (1). 函数有两个特殊点, 即不可导点  $x = 0$  和  $x = 6$ ;

(2). 是否存在渐近线? 考虑

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^{2/3}(6-x)^{1/3}}{x} = \left(\frac{6}{x} - 1\right)^{\frac{1}{3}} \rightarrow -1, \quad |x| \rightarrow +\infty.$$

再考虑

$$\begin{aligned} f(x) + x &= x \left[ 1 - \left( 1 - \frac{6}{x} \right)^{\frac{1}{3}} \right] \\ &= x \left[ 1 - \left( 1 - \frac{6}{x} \frac{1}{3} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) \right] = x \left[ \frac{2}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \right] \rightarrow 2, \end{aligned}$$

当  $|x| \rightarrow +\infty$ . 因此函数有渐近线  $y = -x + 2$ .

## 例二, 续一

(3). 计算  $f(x)$  的一阶和二阶导数

$$f'(x) = \frac{4-x}{x^{1/3}(6-x)^{2/3}}, \quad f''(x) = \frac{-8}{x^{4/3}(6-x)^{5/3}}.$$

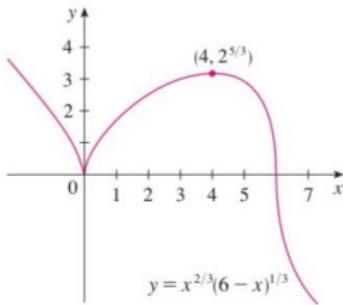
由此可得函数单调区间如下.

区间	$4-x$	$x^{1/3}$	$(6-x)^{2/3}$	$f'(x)$	$f(x)$
$(-\infty, 0)$	+	-	+	-	$\downarrow$
$(0, 4)$	+	+	+	+	$\uparrow$
$(4, 6)$	-	+	+	-	$\downarrow$
$(6, +\infty)$	-	+	+	-	$\downarrow$

## 例二, 续二

(4). 由上述表格可知  $x = 0$  是极小值点,  $x = 4$  是极大值点, 而点  $x = 6$  不是极值点.

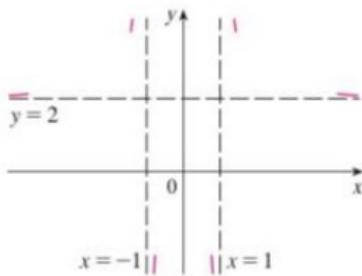
(5). 考虑函数的凸性. 注意  $f''(x) < 0, \forall x \in (-\infty, 0) \cup (0, 6)$ . 故函数于这两个区间上凸. 由于  $f''(x) > 0, \forall x \in (6, +\infty)$ , 故函数于这个区间下凸. 此外  $f(x)$  在  $x = 6$  处不可微, 其对应的点  $(x, y) = (6, 0)$  是拐点. 函数的图像如图所示.



### 例三

例三: 考虑曲线  $y = f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$  的函数图像.

1. 定义域为  $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ ;
2. 曲线经过原点  $(0, 0)$ ;
3. 曲线关于  $y$  轴对称, 即函数  $f(x)$  是偶函数;
4. 曲线有两条垂直渐近线  $x = \pm 1$ , 因为  $\lim_{x \rightarrow \pm 1} \frac{2x^2}{|x^2 - 1|} = +\infty$ ;
5. 曲线还有一条水平渐近线  $y = 2$  因为  $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = 2$ .



### 例三, 续一

6. 由

$$f'(x) = \frac{4x(x^2 - 1) - 2x^2 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$$

可知 (i) 在  $(-\infty, 0) \setminus \{-1\}$  上,  $f'(x) > 0$ , 故  $f(x) \uparrow$  严格;

(ii) 在  $(0, +\infty) \setminus \{1\}$  上,  $f'(x) < 0$ , 故  $f(x) \downarrow$  严格.

(iii) 函数有唯一驻点  $x = 0$ , 且驻点  $x = 0$  是极大值点.

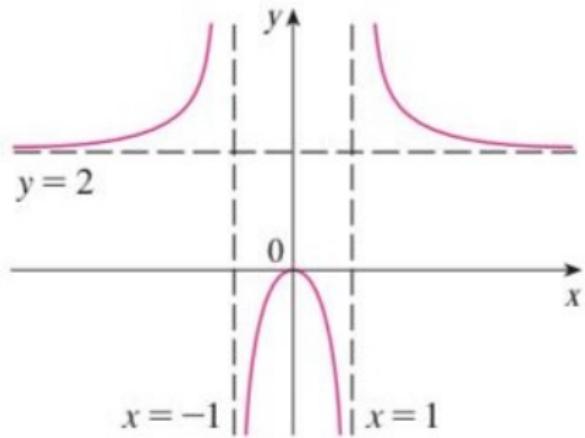
7. 计算二阶导数

$$f''(x) = \frac{-4}{(x^2 - 1)^2} + \frac{4x \cdot 2 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^3} = \frac{12x^2 + 4}{(x^2 - 1)^3}.$$

由此可见 (i) 当  $|x| < 1$  时,  $f''(x) < 0$ , 函数上凸; (ii) 当  $|x| > 1$  时,  $f''(x) > 0$ , 函数下凸; (iii) 函数无拐点.

8. 综合上述信息可得函数图形如下

### 例三, 续二



**FIGURE 6**

Finished sketch of  $y = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$

## 例四

例四: 考虑曲线  $y = f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$ .

1. 定义域为  $\mathbb{R}$ ;
2. 曲线经过原点  $(0, 0)$ ;
3. 曲线关于原点对称, 即函数  $f(x)$  为奇函数;
4. 无水平渐近线, 无垂直渐近线;
5. 函数有斜渐近线  $y = x$ . 因为

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x(x^2 + 1)} = 1, \quad \text{且}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[ \frac{x^3}{x^2 + 1} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - x^3 - x}{x^2 + 1} = 0;$$

6. 计算一阶导数

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2 + 1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2(x^2 + 3)}{(x^2 + 1)^2}.$$

这表明  $f'(x) > 0, \forall x \neq 0$ , 从而函数在  $\mathbb{R}$  上严格单调上升;

# 例四, 续一

## 7. 计算二阶导数

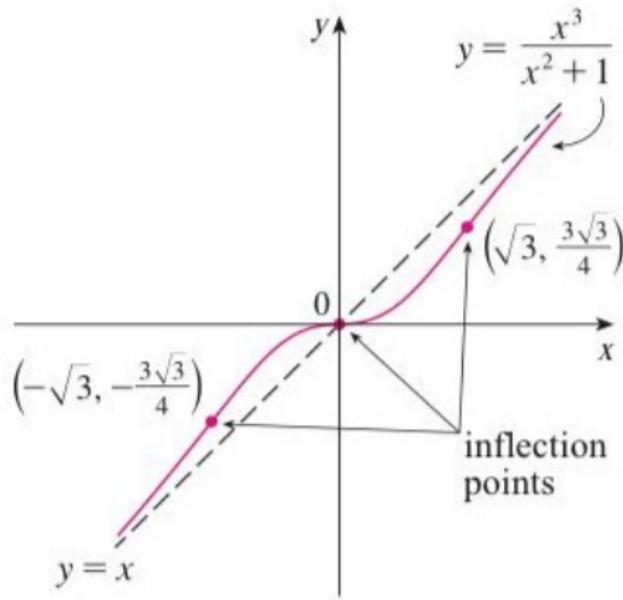
$$f''(x) = \frac{2x(x^2 + 3) + x^2 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} - \frac{x^2(x^2 + 3) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^3} = \frac{2x(3 - x^2)}{(x^2 + 1)^3}.$$

由此可得函数的三个拐点  $(-\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{4})$ ,  $(0, 0)$ ,  $(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{4})$ , 以及函数的凸性区间如下:

区间	x	$3 - x^2$	$(x^2 + 1)^3$	$f''(x)$	凸性
$(-\infty, -\sqrt{3})$	-	-	+	+	下凸
$(-\sqrt{3}, 0)$	-	+	+	-	上凸
$(0, \sqrt{3})$	+	+	+	+	下凸
$(\sqrt{3}, +\infty)$	+	-	+	-	上凸

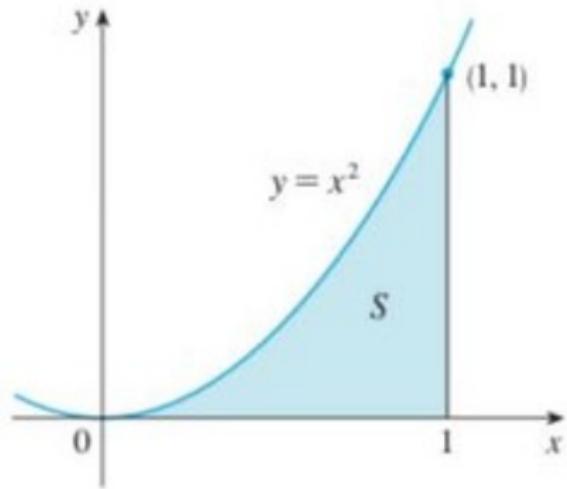
## 例四, 续二

8. 综合上述信息可得函数  $y = \frac{x^3}{x^2+1}$  的图像如下.



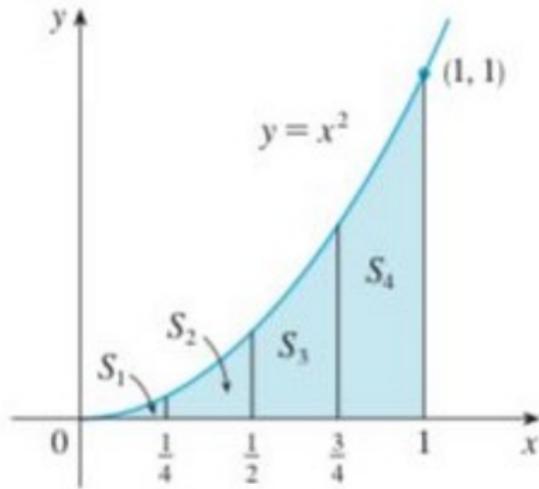
# 面积问题

例：考虑抛物线  $y = x^2$  与直线  $x = 1$ , 以及  $x$  轴所围图形  $S$  的面积. 如图所示.  
形如  $S$  的图形常称为曲边梯形.



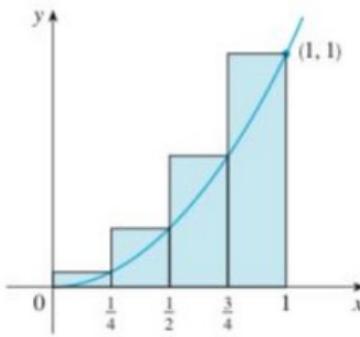
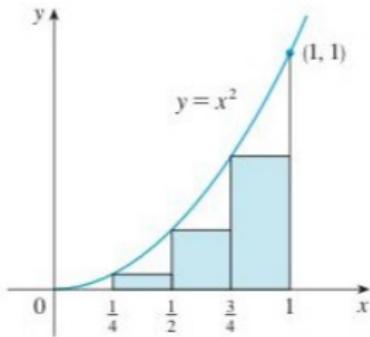
# 面积问题, 续一

我们用三条直线  $x = \frac{1}{4}$ ,  $x = \frac{2}{4}$ ,  $x = \frac{3}{4}$ , 将图形  $S$  分成四个条域  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ ,  $S_4$ , 则  $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$ , 如图所示.



## 面积问题, 续二

将区间  $[0, 1]$  分割成  $[0, 1] = [0, \frac{1}{4}] \cup [\frac{1}{4}, \frac{2}{4}] \cup [\frac{2}{4}, \frac{3}{4}] \cup [\frac{3}{4}, 1]$ , 我们可以用两种矩形来逼近每个条域  $S_i$ , 宽均为  $\frac{1}{4}$ : 高分别取函数  $x^2$  在子区间的左端点和右端点的值, 如图所示.



分别记  $L_4$  和  $R_4$  为左图和右图中的四个矩形面积之和,

## 面积问题, 续三

即

$$R_4 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{2}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{4}{4}\right)^2 = 0.46875,$$

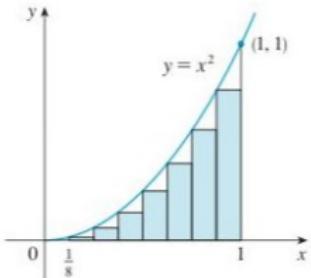
$$L_4 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{0}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{2}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 0.21875.$$

因此所求面积  $|S|$  满足  $L_4 < |S| < R_4$ .

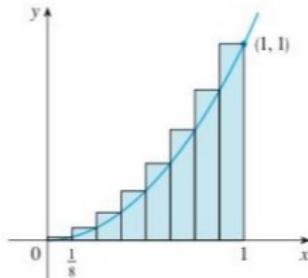
为了取得更好的逼近, 可以将区间  $[0, 1]$  分解得更小, 例如分成 8 等分.

# 面积问题, 续四

同样取函数  $f(x) = x^2$  在右端点和左端点的值为高分别作 8 个矩形, 如图所示.



(a) Using left endpoints



(b) Using right endpoints

记  $R_8$  和  $L_8$  为左图和右图中的 8 个矩形面积之和, 则经计算得

$$0.2734375 = L_8 < |S| < R_8 = 0.398475.$$

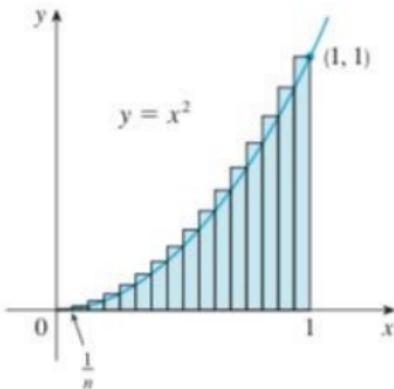
## 面积问题, 续五

下述表格表明, 随着等分数  $n$  的增加, 面积  $R_n$  和  $L_n$  越来越接近.

$n$	$L_n$	$R_n$
10	0.2850000	0.3850000
20	0.3087500	0.3587500
30	0.3168519	0.3501852
50	0.3234000	0.3434000
100	0.3283500	0.3383500
1000	0.3328335	0.3338335

# $R_n$ 的极限

将区间  $[0, 1]$  分割成  $n$  等分，第  $i$  个矩形条的高取为  $x_i^2$  (右端点的值)，记  $R_n$  为这  $n$  矩形条的面积之和，如图所示。



$$\begin{aligned} \text{即 } R_n &= \frac{1}{n} \left( \frac{1}{n} \right)^2 + \frac{1}{n} \left( \frac{2}{n} \right)^2 + \frac{1}{n} \left( \frac{3}{n} \right)^2 + \cdots + \frac{1}{n} \left( \frac{n}{n} \right)^2 \\ &= \frac{1}{n^3} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \rightarrow \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

# $L_n$ 的极限

与  $R_n$  情形类似,

$$\begin{aligned}L_n &= \frac{1}{n} \left( \frac{0}{n} \right)^2 + \frac{1}{n} \left( \frac{1}{n} \right)^2 + \frac{1}{n} \left( \frac{2}{n} \right)^2 + \cdots + \frac{1}{n} \left( \frac{n-1}{n} \right)^2 \\&= \frac{1}{n^3} [0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2] \\&= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{(n-1)n[2(n-1)+1]}{6} \\&= \frac{1}{6} \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \left( 2 - \frac{1}{n} \right) \rightarrow \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

由于  $L_n < |S| < R_n$ , 故可以定义所求面积  $|S| = \frac{1}{3}$ .

# $R_n, L_n$ 随 $n$ 的变化图示

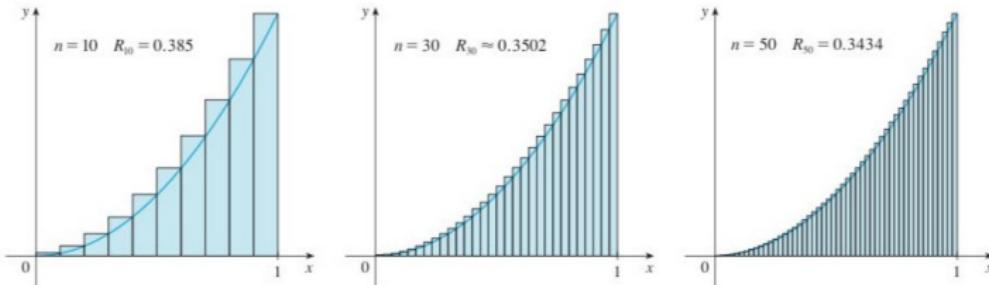


FIGURE 8 Right endpoints produce upper sums because  $f(x) = x^2$  is increasing

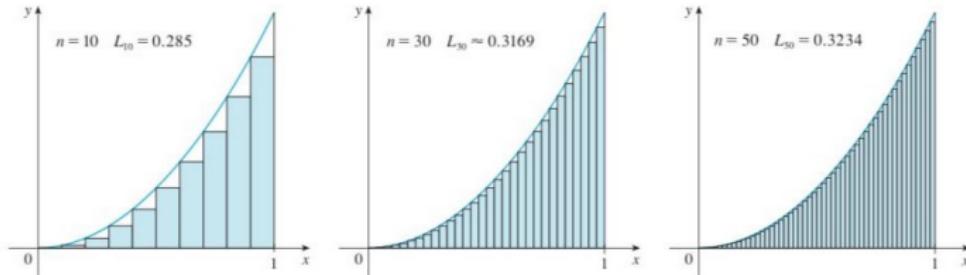


FIGURE 9 Left endpoints produce lower sums because  $f(x) = x^2$  is increasing

# 定积分定义

定义: 设  $f(x)$  是闭区间  $[a, b]$  上的函数.

1. 分割: 在区间  $[a, b]$  上取有限个分点  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ .

记  $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , 点集  $P$  称为区间  $[a, b]$  的一个分割 (partition).

2. 取样点 (sample points)  $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , 并作 Riemann 和

$$\sigma(P, \xi) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i,$$

其中  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ,  $\xi = \{x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\}$  称作样点集;

3. 取极限: 记  $\|P\| \stackrel{\text{def}}{=} \max\{\Delta x_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ , 并称之为分割  $P$  的密度.

如果极限  $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sigma(P, \xi)$  存在, 且极限值与样点集  $\xi$  的选择无关. 换言之,  
存在数  $J$ , 使得对  $\forall \varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得

$$\forall P : \|P\| < \delta \Rightarrow |\sigma(P, \xi) - J| < \varepsilon, \quad \forall \xi,$$

则称数  $J$  为函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上的 Riemann 积分,

# 定积分定义续, 注记

也称  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上 Riemann 可积. 此时数  $J$  记作  $\int_a^b f(x) dx$ . 即

$$\int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i.$$

- 注记: 1. 记号  $\int_a^b f(x) dx$  中,  $a$  和  $b$  称为积分下限和上限,  $f(x)$  称作被积函数.  
2.  $\int_a^b f(x) dx$  应看作一个整体. 它代表 Riemann 和的极限.  
3.  $\int_a^b f(x) dx$  中的  $x$  称作哑元, 可以换成任意一个符号, 例如

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(s) ds = \int_a^b f(\heartsuit) d\heartsuit = \dots$$

就好比  $\sin x$ ,  $\sin t$ ,  $\sin s$  等均表示同一个正弦函数一样.

4. 记  $R[a, b]$  为区间  $[a, b]$  上 Riemann 可积函数的全体.

5. 积分  $\int_a^b f(x) dx$  有时可简写作  $\int_a^b f$ .

# 定积分的几何意义

当  $f(x) \geq 0$  时, 积分  $\int_a^b f(x) dx$  可看作或定义为, 曲线  $y = f(x)$  在区间  $[a, b]$  下的面积. 如图所示

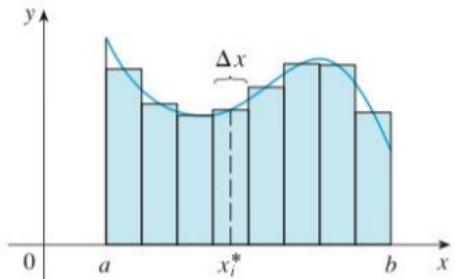


FIGURE 1

If  $f(x) \geq 0$ , the Riemann sum  $\sum f(x_i^*) \Delta x$  is the sum of areas of rectangles.

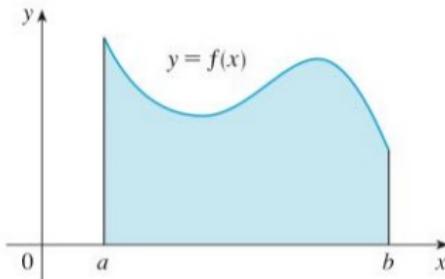


FIGURE 2

If  $f(x) \geq 0$ , the integral  $\int_a^b f(x) dx$  is the area under the curve  $y = f(x)$  from  $a$  to  $b$ .

# 定积分的几何意义, 续

当  $f(x)$  有正有负时, 积分  $\int_a^b f(x) dx$  可以看作曲线  $y = f(x)$  在区间  $[a, b]$  下的面积的代数和(净面积). 如图所示

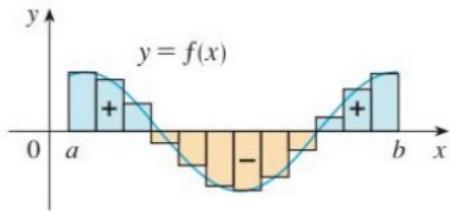


FIGURE 3

$\sum f(x_i^*) \Delta x$  is an approximation to the net area.

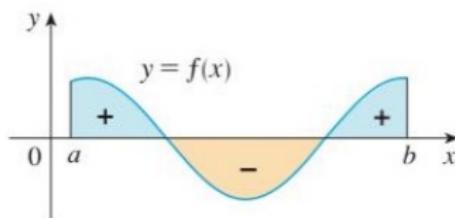


FIGURE 4

$\int_a^b f(x) dx$  is the net area.

# 定积分的物理意义

1. 设在区间  $[a, b]$  上分布有某种物质,  $\rho(x) \geq 0$  为其分布密度, 则积分  $\int_a^b \rho(x)dx$  可解释为(或定义为)该物质的总量.
2. 设质点作直线运动, 时刻  $t$  时速度为  $v(t)$ , 则积分  $\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$  可解释为(或定义为), 质点在时间间隔  $t_1$  到  $t_2$  所经过的路程.
3. 设质点沿着  $x$  轴作直线运动,  $f(x)$  为质点位于位置  $x$  处所受的力 (沿着  $x$  轴方向的力), 则积分  $\int_a^b f(x)dx$  可解释为(或定义为) 力  $f(x)$  关于质点从点  $x = a$  运动到点  $x = b$  所做的功.

# 定积分的简单性质

1. 保号性: 设  $f \in R[a, b]$  且  $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$ , 则

$$\int_a^b f \geq 0.$$

2. 线性性: 设  $f, g \in R[a, b]$ , 则对任意常数  $\lambda$ ,  $\lambda f, f \pm g \in R[a, b]$ , 且

$$\int_a^b (\lambda f) = \lambda \int_a^b f, \quad \int_a^b (f \pm g) = \int_a^b f \pm \int_a^b g.$$

3. 保序性: 设  $f, g \in R[a, b]$ , 且  $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a, b]$ , 则

$$\int_a^b f \geq \int_a^b g.$$

# 例一

## Example

例：证明  $\int_a^b 1 dx = b - a$ .

证明：记  $f(x) = 1$ . 对任意分割  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ , 以及任意关于分割  $P$  的样点集  $\xi = \{x_i^*\}$ , 相应的 Riemann 和为

$$\sigma(P, \xi) = \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \Delta x_i = b - a,$$

即 Riemann 和  $\sigma(P, \xi)$  为常数  $b - a$ , 因此极限  $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sigma(P, \xi)$  存在, 且极限为  $= b - a$ . 由积分定义知, 函数  $f(x) = 1$  在任意闭区间  $[a, b]$  上可积, 且  $\int_a^b 1 dx = b - a$ . 证毕.

## 例二

例二: 计算  $\int_a^b x dx$ .

解: 对任意分割  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ , 对于任意关于分割  $P$  的样点集  $\{x_i^*\}$ ,  
 $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ , 相应的 Riemann 和为  $\sum_{i=1}^n x_i^* \Delta x_i$ . 记子区间  $[x_{i-1}, x_i]$  的中点  
为  $x_i^{**} = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$ . 于是

$$\sum_{i=1}^n x_i^* \Delta x_i = \sum_{i=1}^n x_i^{**} \Delta x_i + \sum_{i=1}^n (x_i^* - x_i^{**}) \Delta x_i.$$

上式右边第一个和式为

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_i^{**} \Delta x_i &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}(x_i + x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i^2 - x_{i-1}^2) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2). \end{aligned}$$

再考虑第二个和式, 即和式  $\sum_{i=1}^n (x_i^* - x_i^{**}) \Delta x_i$ .

## 例二, 续

由于  $x_i^*, x_i^{**} \in [x_{i-1}, x_i]$ , 故  $|x_i^* - x_i^{**}| \leq x_i - x_{i-1} = \Delta x_i \leq \|P\|$ . 于是

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n (x_i^* - x_i^{**}) \Delta x_i \right| &\leq \sum_{i=1}^n |x_i^* - x_i^{**}| \Delta x_i \\ &\leq \|P\| \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \|P\|(b - a). \end{aligned}$$

因此对于任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta = \varepsilon$ , 使得当任意分割  $P$  满足  $\|P\| < \delta = \varepsilon$  时,  
对任意样点集  $\{x_i^*\}$ ,

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i^* \Delta x_i - \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \right| \leq \|P\|(b - a) \leq (b - a)\varepsilon.$$

根据积分定义, 函数  $x$  在任意区间  $[a, b]$  上可积, 且

$$\int_a^b x dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

解答完毕.

# 定积分的两个基本问题, 连续函数可积

定积分的两个基本问题:

- (i) 如何判断一个函数是否可积?
- (ii) 如何计算定积分.

关于第一个问题, 我们有如下结论.

## Theorem

定理: 若  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积, 即  $C[a, b] \subset R[a, b]$ .

证明稍后给出.

# 微积分学基本定理, Newton - Leibniz 公式

## Theorem

定理: 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积. 如果存在函数  $F(x)$  在  $[a, b]$  上的连续, 在  $(a, b)$  上可导, 且  $F'(x) = f(x), \forall x \in (a, b)$ , 则

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (\text{Newton - Leibniz 公式})$$

注: 这定理称为微积分学基本定理 (the fundamental theorem of Calculus). 有时简记作 FTC, 它为我们提供了计算定积分的有效方法.

## Definition

定义: 给定  $(a, b)$  上的函数  $f(x)$ , 若存在可微函数  $F(x)$ , 使得  $F'(x) = f(x)$ ,  
 $\forall x \in (a, b)$ , 则称  $F(x)$  为函数  $f(x)$  的一个原函数 (primitive functions), 或反  
导数 (anti-derivatives).

例一.  $\frac{1}{n}x^n$  是  $x^{n-1}$  的一个原函数, 因为  $[\frac{1}{n}x^n]' = x^{n-1}$ ;

例二.  $\sin x$  是函数  $\cos x$  的一个原函数, 因为  $[\sin x]' = \cos x$ .

例三. Dirichlet 函数  $D(x)$  没有原函数, 因为导函数有介值性质, 而  $D(x)$  没有.

注: 后面将专门讨论如何求给定函数的原函数, 即如何求不定积分.

# 微积分学基本定理证明

证：对区间  $[a, b]$  作  $n$  等分,  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ ,  $x_i = a + ih$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $h = \frac{b-a}{n}$ , 则

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})] = \sum_{i=1}^n F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \rightarrow \int_a^b f(x)dx, \quad n \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

其中  $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . 定理得证. □

注：为了表示微分和积分的互逆关系, N-L 公式常形式地写作

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b dF(x) = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

# 例子

## Example

例：利用 N-L 公式计算如下积分：

$$\int_0^1 x^2 dx = \int_0^1 d\left(\frac{x^3}{3}\right) = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3};$$

$$\int_a^b x^n dx = \int_a^b d\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_a^b = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1};$$

$$\int_a^b \sin x dx = \int_a^b d(-\cos x) = -\cos x \Big|_a^b = \cos a - \cos b;$$

$$\int_a^b \cos x dx = \int_a^b d(\sin x) = \sin x \Big|_a^b = \sin b - \sin a.$$

# 利用积分求极限

例(课本第 147 页习题 14): 求极限

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n}\right) \right]^{\frac{1}{n}}.$$

解: 将上述极限转化为某个函数的 Riemann 和的极限. 记

$$a_n = \ln \left[ \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n}\right) \right]^{\frac{1}{n}},$$

$$\text{则 } a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n}\right).$$

于是  $a_n$  可看作函数  $\ln(1+x)$  在区间  $[0, 1]$  上的一个 Riemann 和. 由于  $\ln(1+x)$  在区间  $[0, 1]$  上连续, 故在区间  $[0, 1]$  上可积. 因此

# 利用积分求极限, 续

$$a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left( 1 + \frac{k}{n} \right) \rightarrow \int_0^1 \ln(1+x) dx.$$

易证  $F(x) = (1+x) \ln(1+x) - x$  是函数  $f(x) = \ln(1+x)$  的一个原函数(我们将在不定积分部分学习如何求  $f(x)$  的原函数). 因此

$$\int_0^1 \ln(1+x) dx = [(1+x) \ln(1+x) - x] \Big|_0^1 = 2 \ln 2 - 1.$$

于是原极限为

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \left( 1 + \frac{2}{n} \right) \cdots \left( 1 + \frac{n}{n} \right) \right]^{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{a_n} = e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n} = e^{2 \ln 2 - 1} = \frac{4}{e}.$$

解答完毕.

# 积分性质一：可积函数有界

## Theorem

定理：若函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积，则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有界。

证：设  $\int_a^b f(x) dx = J$ , 由积分定义知对于  $\varepsilon = 1$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得对分割  $P$ ,  $\|P\| < \delta$ , 则有

$$\left| \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i - J \right| < 1,$$

这里样点  $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . 由上式得

$$\left| \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i \right| < |J| + 1.$$

于是

$$f(x_1^*) \Delta x_1 = \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i - \sum_{i=2}^n f(x_i^*) \Delta x_i.$$

由此得

# 证明, 续

$$|f(x_1^*)\Delta x_1| \leq \left| \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x_i \right| + \left| \sum_{i=2}^n f(x_i^*)\Delta x_i \right|.$$

上式两边同时除以  $\Delta x_1$  得

$$|f(x_1^*)| < \frac{1}{\Delta x_1} \left( |J| + 1 + \left| \sum_{i=2}^n f(x_i^*)\Delta x_i \right| \right).$$

对每个  $i = 2, \dots, n$ , 固定样点  $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ , 则上式右边是一个确定的数, 而  $x_1^*$  则可以在子区间  $[x_0, x_1]$  上任意取值. 这就证明了  $f(x)$  在子区间  $[x_0, x_1]$  上有界. 同理可证  $f(x)$  在  $[x_{i-1}, x_i]$  上有界,  $i = 2, \dots, n$ . 从而  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有界. 证毕.

注记: 定义函数  $f(0) = 0, f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \forall x \in (0, 1]$ . 显然  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上无界.

根据上述定理可知, 函数  $f(x)$  在区间  $[0, 1]$  上不可积. 但这个函数在下述意义  
下时广义可积的:

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_{\varepsilon}^1 d2\sqrt{x} = 2\sqrt{x}\Big|_{\varepsilon}^1 = 2(1 - \sqrt{\varepsilon}) \rightarrow 2, \quad \varepsilon \rightarrow 0^+.$$

稍后我们将详细讨论广义积分.

# 积分性质二：积分可加性

## Theorem

定理：设  $f$  为  $[a, b]$  上定义的函数,  $c \in (a, b)$ , 则  $f$  在  $[a, b]$  上可积, 当且仅当  $f$  在区间  $[a, c]$  和  $[c, b]$  上可积. 并且当  $f$  在  $[a, b]$  上可积时,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (*)$$

证：关于可加性的结论是稍后介绍的 Lebesgue 大定理的推论. 以下证明, 当  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积时, 积分等式 (\*) 成立. 由于可积性得到保证, 故在分割时, 可以始终将点  $x = c$  取为分点, 然后取极限即得到等式 (\*).

□

# 例子

课本第140页习题5.2题3: 设  $f$  是  $[a, b]$  上的非负连续函数, 不恒为零, 证明

$$\int_a^b f(x) dx > 0.$$

证: 因  $f$  非负且不恒为零, 故存在点  $x_0 \in [a, b]$ , 使得  $f(x_0) > 0$ . 根据连续函数保号性知, 存在一个包含  $x_0$  的闭区间  $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ , 使得  $f(x) > \frac{1}{2}f(x_0)$ ,  $\forall x \in [\alpha, \beta]$ . 再根据积分可加性知

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^\alpha f(x) dx + \int_\alpha^\beta f(x) dx + \int_\beta^b f(x) dx$$

$$\geq \int_\alpha^\beta f(x) dx \geq \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}f(x_0) dx = \frac{1}{2}f(x_0)(\beta - \alpha) > 0.$$

命题得证.

# Darboux 上和与下和

设  $f(x)$  为定义在闭  $[a, b]$  上的有界函数. 取  $[a, b]$  中一个分割  $P$ :  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ . 记

$$M_i \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \{f(x)\}, \quad m_i \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \{f(x)\},$$

再记  $\omega_i = M_i - m_i$ , 称  $\omega_i$  为函数  $f(x)$  在第  $i$  个子区间  $[x_{i-1}, x_i]$  上的振幅,  
 $i = 1, 2, \dots, n$ . 分别称

$$U_P \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i, \quad L_P \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$$

为函数  $f(x)$  关于分割  $P$  的 Darboux 上和与 Darboux 下和. ( $U=upper$ ,  
 $L=lower$ )

# Darboux 上和与下和的性质

## Lemma

引理一: 对于任意  $[a, b]$  上的有界函数  $f(x)$ ,  $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a, b]$ , 以及对于区间  $[a, b]$  的任意一个分割  $P$ , 及其任意一个 Riemann 和  $\sigma(P, \xi) = \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i$ , 成立

$$m(b - a) \leq L_P \leq \sigma(P, \xi) \leq U_P \leq M(b - a).$$

## Proof.

证明: 对于  $1 \leq i \leq n$ , 显然有  $m \leq m_i \leq f(x_i^*) \leq M_i \leq M$ , 于是  $m \Delta x_i \leq m_i \Delta x_i \leq f(x_i^*) \Delta x_i \leq M_i \Delta x_i \leq M \Delta x_i$ . 关于  $i = 1, 2, \dots, n$  求和即得所要证明的不等式. 证毕. □

# 分割加密

## Definition

定义: 设  $P : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$  和  $P' : a = x'_0 < x'_1 < x'_2 < \cdots < x'_m = b$  为  $[a, b]$  的两个分割. 若  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subsetneq \{x'_0, x'_1, \dots, x'_m\}$ , 则称分割  $P'$  是分割  $P$  的一个加密.

换言之, 若分割  $P'$  是  $P$  的一个加密, 则  $P'$  可看作在分割  $P$  中添加若干个分点所得到的分割.

# Darboux 上下和与分割加密的关系

## Lemma

引理二：若分割  $P'$  是在分割  $P$  中添加  $k$  个新的分点而得，则

(i)  $U_{P'} \leq U_P \leq U_{P'} + k\omega\|P\|;$

(ii)  $L_P \leq L_{P'} \leq L_P + k\omega\|P\|,$

其中  $\omega = M - m$ , 称为  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的振幅,  $M$  和  $m$  为  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的上  
下确界,  $\|P\| = \max \{\Delta x_i\}$ ,  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ .

粗略地说, 随着分割  $P$  的加密, 上和  $U_P$  不增, 下和  $L_P$  不减.

## 引理二证明

证明：只证(i)且  $k=1$  情形。设  $P' = P \cup \{x'\}$ ,  $x' \in (x_{i-1}, x_i)$ . 为明确计不妨设  $i=1$ , 即  $x' \in (x_0, x_1)$ . 记

$$M'_1 = \sup\{f(x), x \in [x_0, x']\}, \quad M''_1 = \sup\{f(x), x \in [x', x_1]\},$$

则  $M'_1, M''_1 \leq M_1$ , 其中  $M_1 = \sup\{f(x), x \in [x_0, x_1]\}$ . 于是

$$U_P - U_{P'} = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i - \left( M'_1 \Delta x'_1 + M''_1 \Delta x''_1 + \sum_{i=2}^n M_i \Delta x_i \right)$$

$$= M_1 \Delta x_1 - M'_1 \Delta x'_1 - M''_1 \Delta x''_1 \geq M_1 (\Delta x_1 - \Delta x'_1 - \Delta x''_1) = 0,$$

其中  $\Delta x'_1 = x'_1 - x_0$ ,  $\Delta x''_1 = x_1 - x'_1$ ,  $\Delta x_1 = x_1 - x_0$ .

# 证明, 续

另一方面

$$\begin{aligned} U_P - U_{P'} &= M_1 \Delta x_1 - M'_1 \Delta x'_1 - M''_1 \Delta x''_1 \\ &\leq M_1 \Delta x_1 - m_1 \Delta x'_1 - m_1 \Delta x''_1 \\ &= (M_1 - m_1) \Delta x_1 = \omega_1 \Delta x_1 \leq \omega \|P\|. \end{aligned}$$

这就证明了  $0 \leq U_p - U_{P'} \leq \omega \|P\|$ . 当分割  $P'$  是在分割  $P$  中添加  $k$  个新的分点而得时, 则  $0 \leq U_p - U_{P'} \leq k\omega \|P\|$ . 引理得证.

任意一个Darboux下和  $\leq$  任意一个Darboux上和

Lemma

引理三：设  $P_1$  和  $P_2$  为  $[a, b]$  的任意两个分割，则  $L_{P_1} \leq U_{P_2}$ .

Proof.

证明：记  $P = P_1 \cup P_2$ , 即  $P$  为分割  $P_1$  和  $P_2$  分点的合并, 则  $P$  既是  $P_1$  又是  $P_2$  的加密分割. 根据引理二可知

$$L_{P_1} \leq L_P \leq U_P \leq U_{P_2}.$$

证毕.



# Darboux 上积分与 Darboux 下积分

设  $f(x)$  是  $[a, b]$  上的有界函数, 即  $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a, b]$ , 则对  $[a, b]$  的任何分割  $P$ ,  $m(b - a) \leq L_P \leq U_P \leq M(b - a)$ .

## Definition

定义: 分别称

$$\int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{U_P\} \quad \text{和} \quad \underline{\int_a^b f(x) dx} \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{L_P\}$$

为有界函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的 Darboux 上积分和下积分.

显然对  $[a, b]$  的任意分割  $P$ ,

$$L_P \leq \int_a^b f(x) dx \leq \bar{\int_a^b f(x) dx} \leq U_P.$$

# Darboux 引理

## Lemma

引理: 设  $f$  为  $[a, b]$  上的有界函数, 则

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} U_P = \int_a^b f(x) dx, \quad \lim_{\|P\| \rightarrow 0} L_P = \int_a^b f(x) dx.$$

证明: 只证第一个等式. 第二个等式的证明类似. 要证第一个等式, 即要证对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得对任意分割  $P$  满足  $\|P\| < \delta$ , 成立

$$0 \leq U_P - \int_a^b f(x) dx < \varepsilon.$$

由 Darboux 上积分定义知,  $\forall \varepsilon > 0$ , 存在分割  $P_0$ , 使得  $U_{P_0} < \int_a^b f(x) dx + \varepsilon$ .

## 证明, 续

设分割  $P_0$  有  $m$  个内分点 (除去两个端点的分点), 则对任意分割  $P$ , 作加密分割  $P' = P \cup P_0$ , 即分割  $P'$  可看作在分割  $P$  中, 再添加至多  $m$  个新分点所得的分割. 由加密分割的性质可知

$$U_{P'} \leq U_P \leq U_{P'} + m\omega \|P\| \quad \text{且} \quad U_{P'} \leq U_{P_0}.$$

于是

$$\begin{aligned} 0 &\leq U_P - \int_a^b f(x)dx \leq U_{P'} + m\omega \|P\| - \int_a^b f(x)dx \\ &\leq U_{P_0} - \int_a^b f(x)dx + m\omega \|P\| < \varepsilon + m\omega \|P\| < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

最后一个不等式成立, 只要分割  $\|P\| < \frac{\varepsilon}{1+m\omega}$  即可, 其中  $\omega$  表示  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上的振幅, 即  $\omega = M - m$ ,  $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a, b]$ . 证毕.

# Darboux 可积性定理

## Theorem

定理：设  $f(x)$  为  $[a, b]$  上的有界函数，则下述条件等价

- (i)  $f$  在  $[a, b]$  上可积；
- (ii) 对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在分割  $P$ , 使得  $U_P - L_P < \varepsilon$ ;
- (iii)  $\underline{\int_a^b} f(x) dx = \overline{\int_a^b} f(x) dx.$

以下证 (i)  $\Rightarrow$  (ii)  $\Rightarrow$  (iii)  $\Rightarrow$  (i).

(i)  $\Rightarrow$  (ii): 设  $f$  在  $[a, b]$  上可积. 记  $J = \int_a^b f(x) dx$ . 根据可积定义知对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i - J \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall P : \|P\| < \delta, \quad \forall \xi = \{\xi_i\}.$$

$$\Rightarrow -\frac{\varepsilon}{3} + J < \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i < J + \frac{\varepsilon}{3}$$

# 证明, 续一

$$\Rightarrow -\frac{\varepsilon}{3} + J < \sum_{i=1}^n \sup_{\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]} \{f(\xi_i)\} \Delta x_i \leq J + \frac{\varepsilon}{3},$$

此即  $-\frac{\varepsilon}{3} + J < \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i \leq J + \frac{\varepsilon}{3}$ . 亦即  $|U_P - J| \leq \varepsilon/3$ . 同理我们有  $|L_P - J| \leq \varepsilon/3$ . 于是

$$0 \leq U_P - L_P = U_P - J - (L_P - J) \leq |U_P - J| + |L_P - J| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

即条件(ii)成立.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii): 假设条件 (ii) 成立, 即对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在分割 P, 使得  $U_P - L_P < \varepsilon$ , 则根据定义得

$$0 \leq \int_a^b f(x) dx - \underline{\int_a^b} f(x) dx \leq U_P - L_P < \varepsilon.$$

由  $\varepsilon > 0$  的任意性知  $\underline{\int_a^b} f(x) dx = \bar{\int_a^b} f(x) dx$ , 即条件(iii) 成立.

## 证明, 续二

(iii)  $\Rightarrow$  (i): 假设条件 (iii) 成立, 即  $\underline{\int}_a^b f(x)dx = \bar{\int}_a^b f(x)dx$ , 要证  $f$  可积. 记 Darboux 上积分与 Darboux 下积分的共同值为  $J$ . 对任意分割  $P$ , 以及任意样点集  $\xi = \{\xi_i\}$ , 显然成立

$$L_P \leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \leq U_P. \quad (*)$$

由 Darboux 引理知当  $\|P\| \rightarrow 0$  时,  $U_P \rightarrow \bar{\int}_a^b f(x)dx = J$ , 且  $L_P \rightarrow \underline{\int}_a^b f(x)dx = J$ . 于不等式 (\*) 中关于  $\|P\| \rightarrow 0$  取极限, 并根据极限的两边夹法则即得

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = J.$$

即条件 (i) 成立. 定理得证. □

# Dirichlet 函数不可积

例： Dirichlet 函数  $D(x)$  在任何闭区间  $[a, b]$  上不可积，其中

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数,} \\ 0, & x \text{ 为无理数.} \end{cases}$$

证明： 对  $[a, b]$  的任意分割  $P : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ,

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \{D(x)\} = 1, \quad m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \{D(x)\} = 0,$$

其中  $i = 1, 2, \dots, n$ . 于是  $U_P = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \Delta x_i = b - a$ ,  $L_P = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i = 0$ . 因此

$$\int_a^b D(x) dx = \inf\{U_P\} = b - a, \quad \underline{\int}_a^b D(x) dx = \sup\{L_P\} = 0.$$

故  $\int_a^b D(x) dx \neq \underline{\int}_a^b D(x) dx$ . 根据 Darboux 可积性定理知 Dirichlet 函数  $D(x)$  在任意有界闭区间  $[a, b]$  上不可积. 证毕.

# Nov 17 作业, 四道大题

习题一. 课本第123页习题4.3题1: 求下列函数的渐近线

(1)  $y = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$ ;

(2)  $y = \sqrt{x^2 + 1} - x - 1$ ;

(3) 设函数  $y = f(x)$  由参数方程  $x = \frac{3t}{1+t^3}$ ,  $y = \frac{3t^2}{1+t^3}$  确定.

习题二: 课本第123页习题4.3题2: 作出下列函数的图形.

(1)  $y = x^3 + 6x^2 - 15x - 20$ ;

(2)  $y = \frac{3x}{1+x^2}$ ;

(3)  $y = \ln \frac{1+x}{1-x}$ ;

(4)  $y = x + \arctan x$ .

# 作业, 续

习题三：课本第124页第4章总复习题1：设函数  $f(x)$  在  $(a, +\infty)$  内可导，证明  
(1) 若  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ , 则  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ ;  
(2) 若  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ ,  
则存在序列  $x_n \rightarrow +\infty$ , 使得  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f'(x_n) = 0$ .

注：(2) 的证明提示：考虑  $\frac{f(2n) - f(n)}{n}$ .

习题四：课本第124页第4章总复习题2：设

(i)  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上二阶连续可微;

(ii)  $f''(x) \geq a > 0$ ;

(iii)  $f(0) = 0$ ;

(iv)  $f'(0) < 0$ ,

问  $f(x)$  在开区间  $(0, +\infty)$  上有多少个零点.