

《微积分A1》第二讲

教师 杨利军

清华大学数学科学系

2025年09月17日

确界存在定理

Theorem

定理: 设 $E \subset \mathbb{R}$ 为一非空实数集. (i) 若 E 有上界, 则 E 必有上确界, 即 $\sup E$ 存在; (ii) 若 E 有下界, 则 E 必有下确界, 即 $\inf E$ 存在.

证: 易证结论 (i) 和 (ii) 相互等价. 以下只证 (i). 设 M 是 E 的一个上界. 对任意正整数 n , 由实数的 Archimedes 性质知, 存在整数 K , 使得 $\frac{K}{n} > M$, 从而 $\frac{K}{n}$ 是 E 的一个上界. 取一点 $x_0 \in E$, 故 $x_0 < \frac{K}{n}$. 由于 $\frac{K}{n}$ 是 E 的上界, 故存在唯一整数 $m_n \leq K$, 使得 $\frac{m_n}{n}$ 是 E 的上界, 而 $\frac{m_n - 1}{n}$ 不是. 于是得到一个整数序列 m_1, m_2, m_3, \dots , 使得 $\frac{m_n}{n}$ 是 E 的上界, 而 $\frac{m_n - 1}{n}$ 不是. 对任意正整数 N , 以及任意正整数 $n, n' \geq N$, 由于 $\frac{m_n}{n}$ 是 E 的上界, 而 $\frac{m_{n'} - 1}{n'}$ 不是上界, 故 $\frac{m_n}{n} > \frac{m_{n'} - 1}{n'} = \frac{m_{n'}}{n'} - \frac{1}{n'}$. 从而得

定理证明, 续

$$\frac{m_n}{n} - \frac{m_{n'}}{n'} > -\frac{1}{n'} \geq -\frac{1}{N}. \quad (*)$$

同理因 $\frac{m_{n'}}$ 是 E 的上界, 而 $\frac{m_n-1}{n}$ 不是, 故 $\frac{m_{n'}}{n'} > \frac{m_n-1}{n} = \frac{m_n}{n} - \frac{1}{n}$. 从而得

$$\frac{m_n}{n} - \frac{m_{n'}}{n'} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N}. \quad (**)$$

结合两个不等式 (*) 和 (**) 可知 $|\frac{m_n}{n} - \frac{m_{n'}}{n'}| \leq \frac{1}{N}$, $\forall n, n' \geq N$. 这表明 $\{\frac{m_n}{n}\}$ 为有理数 Cauchy 序列. 记这序列所对应的实数为 s, 即 $s = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m_n}{n}$. 显然两个序列 $\{\frac{m_n}{n}\}$ 和 $\{\frac{m_n-1}{n}\}$ 相互等价. 故 s 还可以写作 $s = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m_n-1}{n}$. 以下证实数 s 是 E 的上确界. 一方面由于 $\frac{m_n}{n}$ 是 E 的上界, 故 $x \leq \frac{m_n}{n}, \forall x \in E, \forall n \geq 1$. 由此可以证明 $x \leq s$. (参见陶哲轩实分析第93页习题5.4.8) 这表明 s 是 E 的上界. 令一方面, 假设 M 是 E 的任意一个上界. 由于 $\frac{m_n-1}{n}$ 不是 E 的上界, 故 $\frac{m_n-1}{n} \leq M, \forall n \geq 1$. 由此可得 $s = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m_n-1}{n} \leq M$. 这说明 s 是 E 的最小上界. 命题得证.

确界存在性的意义

确界存在性的意义在于，它保证了在实数域上许多极限的存在性。由于整个微积分就是极限理论，例如连续，导数和积分等基本概念都是某种极限，故实数的确界存在性是整个微积分的基石。

方程 $x^2 = 2$ 有唯一正实数根

Theorem

定理: 存在唯一正实数 x , 使得 $x^2 = 2$.

注: 定理中所述方程 $x^2 = 2$ 的唯一正实根, 常记作 $\sqrt{2}$ 或 $2^{1/2}$.

证: 唯一性. 假设存在两个正实数 x, y , 使得 $x^2 = 2 = y^2$, 则 $0 = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. 由于 $x > 0$ 且 $y > 0$, 故 $x + y > 0$. 因此 $x - y = 0$, 此即 $x = y$. 唯一性得证.

存在性. 记 $E = \{y \in \mathbb{R}, y \geq 0, y^2 < 2\}$. 显然集 E 非空, 因为 $1 \in E$, 并且 E 有上界. 因为 2 就是 E 的一个上界. 反证. 若不然, 则存在 $y \in E$, 使得 $y > 2$. 于是 $y^2 > 2^2 = 4$. 另一方面由于 $y \in E$, 故 $y^2 < 2$. 矛盾. 因此 E 有上界. 由确界存在定理知, 上确界 $a := \sup E$ 存在, 且 $1 \leq a \leq 2$. 以下证 $a^2 = 2$. 为此只要证 $a^2 > 2$ 和 $a^2 < 2$ 均不可能成立.

定理证明, 续

(i) 假设 $a^2 < 2$. 取 $0 < \varepsilon < 1$. 由于 $a \leq 2$, $\varepsilon^2 < \varepsilon$, 故 $(a + \varepsilon)^2 = a^2 + 2a\varepsilon + \varepsilon^2 < a^2 + 4\varepsilon + \varepsilon = a^2 + 5\varepsilon$. 由于 $a^2 < 2$, 故可取 $\varepsilon > 0$ 充分小, 例如取 $0 < \varepsilon < \frac{2-a^2}{5}$, 可使 $(a + \varepsilon)^2 < 2$. 这表明 $a + \varepsilon \in E$. 此与 $a = \sup E$ 相矛盾. 故 $a^2 < 2$ 不可能成立.

(ii) 假设 $a^2 > 2$. 取 $\varepsilon > 0$. 由于 $a \leq 2$, $\varepsilon^2 > 0$, 故 $(a - \varepsilon)^2 = a^2 - 2a\varepsilon + \varepsilon^2 > a^2 - 2a\varepsilon \geq a^2 - 4\varepsilon$. 由于 $a^2 > 2$, 故可取 $\varepsilon > 0$ 充分小, 例如取 $0 < \varepsilon < \frac{a^2-2}{4}$, 则可使 $(a - \varepsilon)^2 > 2$. 这说明对于任意 $x \in E$, $x \leq a - \varepsilon$. (若不然, 即存在 $x_0 \in E$, 使得 $x_0 > a - \varepsilon$. 于是 $x_0^2 > (a - \varepsilon)^2 > 2$. 此与 $x_0 \in E$ 相矛盾.) 这说明 $a - \varepsilon$ 是 E 的一个上界. 此与 $a = \sup E$ 为 E 的最小上界相矛盾. 故 $a^2 > 2$ 不可能成立. 命题得证.

当 $c > 0$ 时, 方程 $x^n = c$ 有唯一正实数根

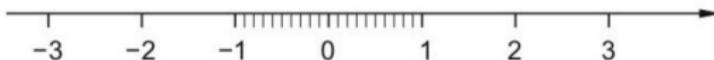
Theorem

定理: 设 $n \geq 2$ 为自然数, $c > 0$ 为一正实数, 则存在唯一正实数 $a > 0$, 使得 $a^n = c$.

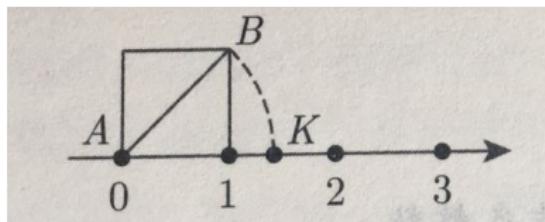
注: 定理中的唯一正根 a 称为正数 c 的 n 次方根, 常记作 $\sqrt[n]{c}$ 或 $c^{1/n}$. 定理的证明思想同情形 $n = 2, c = 2$. 详见《陶哲轩实分析》第98页.

实数的几何表示, 数轴

实数常用一条直线来表示. 这条直线称为实轴或数轴. 先选一个点代表数 0, 再在点 0 的右边选一个点代表数 1. 这样就确定了数轴的尺度. 于是实数与数轴上的点就一一对应起来了.



The number line



数轴上对应无理数 $\sqrt{2}$ 的点为 K.

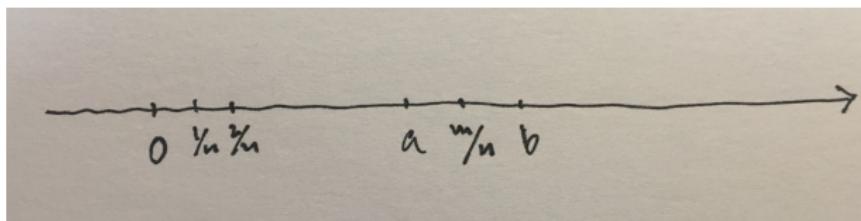
有理数的稠密性

命题：对 $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, 存在有理数 $r \in \mathbb{Q}$, 使得 $a < r < b$.

注：一个子集 $S \subset \mathbb{R}$ 称为在实数域 \mathbb{R} 上稠密，如果任意开区间 (a, b) 均包含 S 中的元素。故上述命题是说，有理数集在实数域中稠密。

证：若 $a < 0 < b$, 则取 $r = 0$ 即可。设 a, b 同号。不妨设 $b > a \geq 0$. 由于 $b - a > 0$, 故存在正整数 n , 使得 $n(b - a) > 1$. (实数的 Archimedes 性质)。因此 $\frac{1}{n} < b - a$. 因此存在正整数 m , 使得 $a < \frac{m}{n} < b$. 如图所示。命题得证。

□



无理数的稠密性

命题：对 $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, 存在无理数 ξ , 使得 $a < \xi < b$.

证：由假设 $a < b$ 可知 $\sqrt{2}a < \sqrt{2}b$. 由有理数的稠密性知, 存在有理数 $r \in (\sqrt{2}a, \sqrt{2}b)$. 若 $r \neq 0$, 则 $\frac{r}{\sqrt{2}}$ 为无理数, 且 $\frac{r}{\sqrt{2}} \in (a, b)$. 若 $r = 0$, 即 $0 \in (\sqrt{2}a, \sqrt{2}b)$. 再次由有理数的稠密性知, 存在有理数 $s \in (0, \sqrt{2}b)$. 由此可得, 无理数 $\frac{s}{\sqrt{2}} \in (0, b) \subset (a, b)$. 命题得证. □

实数构造方法二, Dedekind(戴德金)分割

Definition

定义: 1) 有理数集合 \mathbb{Q} 的一个 Dedekind 分割 (cut) (简记 D 分割) 是指 \mathbb{Q} 的一个分解 $\mathbb{Q} = L \cup U$ 满足如下三个条件:

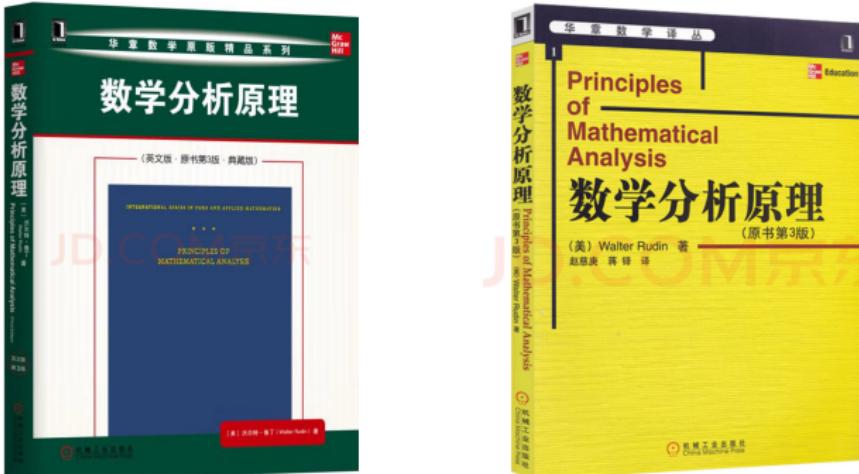
- (i) 不空, 即集合 L 和 U 都不是空集;
- (ii) 不乱, 即 L 中的任意有理数, 均小于 U 中的任意有理数, 即对 $\forall x \in L$,
 $\forall y \in U$, 均成立 $x < y$;
- (iii) 子集 L 中无最大数, 即对 $\forall x \in L$, 存在 $r \in L$, 使得 $x < r$.

2) 有理数集合的一个 Dedekind 分割 (L, U) 称作一个实数. 以下用 \mathbb{R} 表示全体实数, 即 $\mathbb{R} = \{(L, U)\}$.

注: 常用 (L, U) 表示 D 分割 $\mathbb{Q} = L \cup U$, L 称作下集, U 称作上集. 由 D 分割 $\mathbb{Q} = L \cup U$ 的定义知, 若 $x_0 \in L$, 则对每个小于 x_0 的有理数 $x < x_0$, $x \in L$.

参考书

关于 Dedekind 分割, 可参考 Landau 的书(分析基础), 也可参考 Walter Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, pages 1–23. 有中译本.



有理分割, 无理分割

Definition

定义: 每个有理数 $p \in \mathbb{Q}$, 均对应一个 Dedekind 分割 $p^* = (L_p, U_p)$, 其中 $L_p = \{r \in \mathbb{Q}, r < p\}$, $U_p = \mathbb{Q} \setminus L_p$. 这样的 Dedekind 分割称为有理分割, 对应的实数也称为有理数. 不是有理分割的 Dedekind 分割称为无理分割, 对应的实数称为无理数.

例一: $0^* = (L_0, U_0)$ 和 $1^* = (L_1, U_1)$ 均为有理分割, 分别对应有理数 0 和 1, 其中 $L_0 = \{r \in \mathbb{Q}, r < 0\}$, $U_0 = \mathbb{Q} \setminus L_0$, $L_1 = \{r \in \mathbb{Q}, r < 1\}$, $U_1 = \mathbb{Q} \setminus L_1$.

例二: 记 $L = \{r \in \mathbb{Q}, r < 0 \text{ 或 } r^2 < 2\}$, $U = \mathbb{Q} \setminus L$, 则 (L, U) 是一个无理分割. 这个分割所确定的实数为无理数, 并且这个无理数将记作 $\sqrt{2}$.

记号: 注意一个 Dedekind 分割 (L, U) 完全由其下集 L 确定, 因为 $U = \mathbb{Q} \setminus L$. 因此一个实数即分割 (L, U) 可简单地记作 L . 为了遵从习惯, 往下我们用小写字母 $x, y, \dots, \alpha, \beta, \dots$ 来记来表示实数即 Dedekind 分割.

Definition

定义: 设 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. 如果 $\alpha \subsetneq \beta$, 即 α 是 β 的有理数真子集, 则称 α 小于 β ,
记作 $\alpha < \beta$ 或 $\beta > \alpha$. 记号 $\alpha \leq \beta$ 或 $\beta \geq \alpha$ 表示 $\alpha < \beta$ 或 $\alpha = \beta$.

Theorem

定理: 序关系 $<$ 满足如下条件: (1) (全序性) 对任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 三个命题
 $\alpha < \beta, \alpha = \beta, \beta < \alpha$ 有且仅有一个成立; (2) (传递性) 若 $\alpha < \beta$ 且 $\beta < \gamma$,
则 $\alpha < \gamma$.

证 (1): 对 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 且假设 $\alpha \neq \beta$. 此时有且仅有两种可能性: (i) 存在
 $x_0 \in \beta$ 但 $x_0 \notin \alpha$; 或 (ii) 存在 $y_0 \in \alpha$ 但 $y_0 \notin \beta$. 假设 (i) 成立. 设 α 对应的
 D 分割为 (α, α') , 则 $x_0 \in \alpha'$ (上集). 于是对 $\forall x \in \alpha, x < x_0 \in \beta$, 故 $x \in \beta$.
因此 $\alpha \subsetneq \beta$. 即 $\alpha < \beta$. 假设 (ii) 成立, 则可类似证明 $\beta \subsetneq \alpha$. 故 (1) 成立.
(2) 显然成立, 因为子集的子集仍为子集.

确界存在定理

Theorem

定理: (1) 设 $A \subset \mathbb{R}$ 非空子集, 且有上界, 则 A 存在上确界 $\gamma \in \mathbb{R}$, 即 (i) γ 是 A 的一个上界, (ii) 若 $\beta \in \mathbb{R}$ 是 A 的任意一个上界, 则 $\gamma \leq \beta$. (γ 记作 $\sup A$)
(2) 设 $B \subset \mathbb{R}$ 非空子集, 且有下界, 则 B 存在下确界 $\ell \in \mathbb{R}$, 即 (i) ℓ 是 B 的一个下界, (ii) 若 $\beta \in \mathbb{R}$ 是 B 的任意一个下界, 则 $\ell \geq \beta$. (ℓ 记作 $\inf B$)

证明大意: 证(1): 令 $\gamma = \cup_{\alpha \in A} \alpha$. (i) 对 $\alpha \in A$, $\alpha \subset \gamma$, 即 $\alpha \leq \gamma$. (ii) 设 $\beta \in \mathbb{R}$ 是 A 的任意一个上界, 即 $\alpha \subset \beta$, $\forall \alpha \in A$, 则 $\gamma = \cup_{\alpha \in A} \alpha \subset \beta$. 此即 $\gamma \leq \beta$. 结论(1)得证. 证(2): 令 $\ell = \cap_{\alpha \in B} \alpha$, 可类似证明 $\ell = \inf B$. 结论(2)得证.



加法定义

Definition

定义: 对 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 定义 $\alpha + \beta = \{a + b, a \in \alpha, b \in \beta\} \subset \mathbb{Q}$.

Theorem

定理: 上述定义的加法满足如下性质:

- (1) (封闭性) 对 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha + \beta \in \mathbb{R}$;
- (2) (交换律) 对 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;
- (3) (结合律) 对 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$;
- (4) (存在零元素) \mathbb{R} 有零元 $0^* = \{r \in \mathbb{Q}, r < 0\}$, 满足 $0^* + \alpha = \alpha$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$;
- (5) (存在负元素) 对任意 $\alpha \in \mathbb{R}$, 存在 $\beta \in \mathbb{R}$, 使得 $\alpha + \beta = 0^*$. (注: 这样的元素 β 可以证明是唯一的. 故可记作 $-\alpha$)

证明详见 Rudin, page 18–19.

乘法定义

Definition

定义: (1) 先在正实数集 $\mathbb{R}^+ = \{\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0^*\}$ 上定义乘法. 对任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, 定义它们的乘积, 记作 $\alpha\beta$, 由这样一些有理数 p 构成, 即存在 $r > 0$, $s > 0$, $r \in \alpha$, $s \in \beta$, 使得 $p \leq rs$.

(2) 对任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 定义 $\alpha 0^* = 0^* \alpha = 0^*$, 且

$$\alpha\beta = \begin{cases} (-\alpha)(-\beta), & \text{if } \alpha < 0^*, \beta < 0^* \\ -[(-\alpha)\beta], & \text{if } \alpha < 0^*, \beta > 0^* \\ -[\alpha(-\beta)], & \text{if } \alpha > 0^*, \beta < 0^* \end{cases}$$

Theorem

定理: 在 \mathbb{R} 上定义的乘法满足如下性质:

- (1) (封闭性) 对任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha\beta \in \mathbb{R}$;
- (2) (交换律) 对任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha\beta = \beta\alpha$;
- (3) (结合律) 对任意 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$;
- (4) (存在单位元) 实数 1^* 满足 $1^*\alpha = \alpha$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$;
- (5) (存在逆元) 对实数 $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0^*$, 存在 $\beta \in \mathbb{R}$, 使得 $\alpha\beta = 1^*$. 实数 β 称作 α 的逆元, 常记作 $\frac{1}{\alpha}$.

证明略. 详见 Walter Rudin, Principles of Mathematical Analysis, pages 19–20.

算术几何平均不等式

Theorem

定理 (The arithmetic-geometric mean inequality): 对任意两个正数

$a, b > 0$, 成立 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$, 且等号成立当且仅当 $a = b$.

注: 记 $G(a, b) = \sqrt{ab}$, $A(a, b) = \frac{a+b}{2}$, 分别称 $G(a, b)$ 和 $A(a, b)$ 为正数 a, b 的几何平均和算术平均. 因此定理可表为, 几何平均小于等于算术平均.

Proof.

代数证明: 由于 $0 \leq (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, 故 $4ab \leq a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$. 于是 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$. 显然等号成立, 当且仅当 $a = b$. 命题得证.



图形证明 (proofs without words)

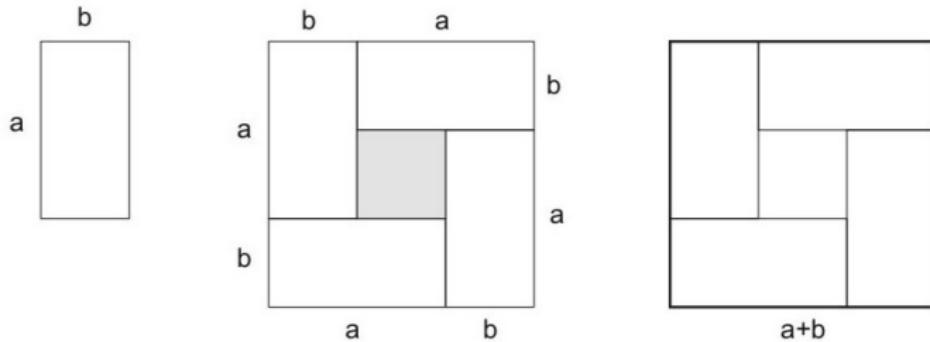
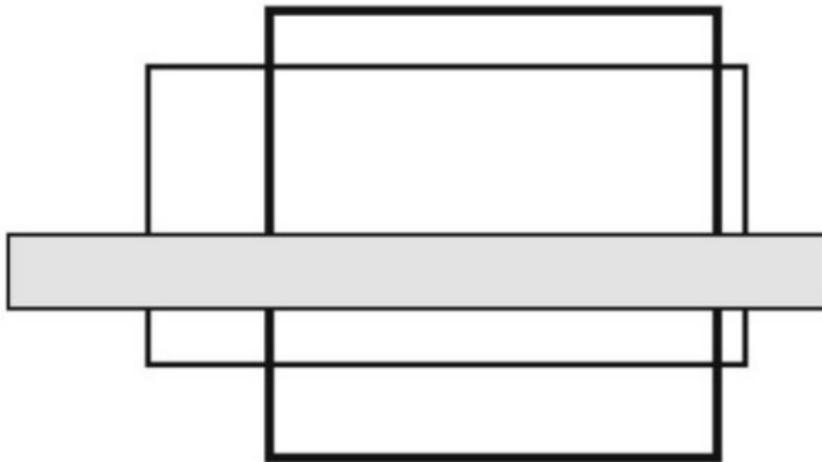


Fig. 1.9 A visual proof that $4ab \leq (a+b)^2$, by comparing areas

例子

例：证明在给定周长的矩形中，正方形的面积最大. 如图所示.



证明

Proof.

证明：设矩形的长和宽分别为 L 和 W , 则其面积为 LW . 根据算术几何平均不等式可知 $\sqrt{LW} \leq \frac{L+W}{2}$, 或等价地

$$LW \leq \left(\frac{L+W}{2} \right)^2.$$

注意上式右边是具有相同周长的正方形之面积. 命题得证. □

算术平均与几何平均不等式之推广

Theorem

定理: 对任意 n 个正数 a_1, a_2, \dots, a_n ,

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n),$$

且等号成立, 当且仅当这 n 个数相等, 即 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

注: 同两个数的情形, 记 $G(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$, $A(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$. 它们分别称为正数 a_1, a_2, \dots, a_n 的几何平均和算术平均. 因此定理可表为, 任意 n 个正数的几何平均小于等于其算术平均.

Corollary

对任意 n 个正数 a_1, a_2, \dots, a_n , 成立

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{1}{n} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n),$$

且两个不等式其中之一等号成立, 当且仅当这 n 个数相等, 即 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

注: 上述最左边的表达式称作正数 a_1, a_2, \dots, a_n 的调和平均. 因此推论的结论可简单地表为: 调和平均 \leq 几何平均 \leq 算术平均.

推论的证明

证：稍后证明几何平均 \leq 算术平均，以下利用这个不等式证明调和平均 \leq 几何平均。将几何平均 \leq 算术平均，应用于正数 $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}$ 得

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_n}} \leq \frac{1}{n} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \right).$$

对上述不等式取倒数即得

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

显然根据不等式几何平均 \leq 算术平均，成立等号的充分必要条件知，不等式调和平均 \leq 几何平均成立等号，当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. 命题得证.

算术平均与几何平均不等式之证明

证明大意：已证结论对 $n = 2$ 成立。以下证明当 $n = 4$ 时结论成立。设 a_1, a_2, a_3, a_4 为四个正数，记

$$A_1 = \frac{a_1 + a_2}{2}, \quad A_2 = \frac{a_3 + a_4}{2}.$$

多次应用 $n = 2$ 时的结论得

$$\sqrt{a_1 a_2} \leq A_1, \quad \sqrt{a_3 a_4} \leq A_2, \quad \sqrt{A_1 A_2} \leq \frac{A_1 + A_2}{2}.$$

于是

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4} &= \sqrt{\sqrt{a_1 a_2} \sqrt{a_3 a_4}} \leq \sqrt{A_1 A_2} \leq \frac{A_1 + A_2}{2} \\ &= \frac{\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_3 + a_4}{2}}{2} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}.\end{aligned}$$

等号成立，当且仅当 $A_1 = A_2$ 且 $a_1 = a_2, a_3 = a_4$ 。这等价于 $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$ 。因此 $n = 4$ 时结论成立。

证明, 续一

以下再证明 $n = 3$ 时的结论. 设 a_1, a_2, a_3 为三个正数. 记它们的算术平均值为

$$m = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}.$$

不难证明 m 也是四个数 a_1, a_2, a_3, m 的算术平均值, 即

$$m = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + m}{4}.$$

现在对这四个数应用 $n = 4$ 时的结论得 $(a_1 a_2 a_3 m)^{\frac{1}{4}} \leq m$. 两边取四次方即得 $(a_1 a_2 a_3 m) \leq m^4$. 此即 $(a_1 a_2 a_3) \leq m^3$. 亦即 $(a_1 a_2 a_3)^{\frac{1}{3}} \leq m$, 且等式成立, 当且仅当 $a_1 = a_2 = a_3 = m$. 这就证明了结论当 $n = 3$ 时成立.

以下证情形 $n = 2^3 = 8$. 任意给定正数 a_1, a_2, \dots, a_8 . 记 $A_1 = a_1 a_2 a_3 a_4$, $A_2 = a_5 a_6 a_7 a_8$, 则由 $n = 4$ 情形的结论知

证明, 续二

$$\sqrt[4]{A_1} \leq \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}, \quad \sqrt[4]{A_2} \leq \frac{a_5 + a_6 + a_7 + a_8}{4}.$$

再由 $n = 2$ 情形的结论知 $\sqrt{A_1 A_2} \leq \frac{a_1 + a_2}{2}$. 此即

$$\sqrt[8]{a_1 a_2 \cdots a_8} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_8}{8}.$$

易见上述非严格不等式等式成立, 当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_8$, 即当 $n = 8$ 时命题成立.

再考虑情形 $n = 5$. 任意给定 5 个正数 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 . 记这 $n = 5$ 个数的算数平均为 m , 即

$$m = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{5}.$$

考虑 8 个正数 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, m, m, m$. 易证这 8 个数的算数平均也是 m , 即

证明, 续三

$$m = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + 3m}{8}.$$

利用情形 $n = 8$ 的结论得

$$\sqrt[8]{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 m^3} \leq \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + 3m}{8} = m.$$

对上述不等式两边取 8 次方得 $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 m^3 \leq m^8$, 此即 $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \leq m^5$,
且等式成立, 当且仅当 $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = m$. 这就证明了当 $n = 5$ 时
命题成立. 类似可以证明命题对 $n = 6, 7$ 也成立. 对一般情形的 n , 命题证明
类似. 细节略.

Cauchy 不等式

Theorem

定理: 对于任意两组实数 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$, 成立

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right). \quad (*)$$

等式成立, 当且仅当向量 $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ 和 $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ 线性相关.

注一: 西方人常称不等式 (*) 为 Cauchy 不等式, 或 Cauchy–Schwarz 不等式;
而俄国人则称之为 Bunyakovsky 不等式.

注二: 不等式方面的参考书: 1. Inequalities, Hardy, Littlewood and Pólya,
Cambridge University Press, 1934, 有中译本; 2. Inequalities, Beckenbach
and Bellman, Springer Verlag, 1961.

证明

证法一: 当 $2n$ 个数 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ 全为零时, Cauchy 不等式显然成立. 假设这 $2n$ 个数不全为零, 不失一般性 (without loss of generality), 可设 $\sum_{k=1}^n a_k^2 > 0$, 则对 $\forall t \in \mathbb{R}$, 我们有

$$0 \leq \sum_{k=1}^n (ta_k - b_k)^2 = t^2 \sum_{k=1}^n a_k^2 - 2t \sum_{k=1}^n a_k b_k + \sum_{k=1}^n b_k^2.$$

$$\text{记 } A = \sum_{k=1}^n a_k^2, \quad B = \sum_{k=1}^n a_k b_k, \quad C = \sum_{k=1}^n b_k^2,$$

则 $At^2 - 2Bt + C \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$. 由一元二次方程判别式知 $AC - B^2 \geq 0$. 此即 Cauchy 不等式成立. 当 $AC - B^2 = 0$ 时, 方程 $At^2 - 2Bt + C = 0$ 有唯一一个实根(二重根) t_0 . 此时 $t_0 a_k - b_k = 0, k = 1, 2, \dots, n$. 此即向量 a, b 线性相关. 命题得证.

证明, 续

证法二: Cauchy 不等式可直接由如下 Lagrange 恒等式得到

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right) - \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 = \sum_{1 \leq r < s \leq n} (a_r b_s - a_s b_r)^2.$$

命题得证.

注一: 展开 Lagrange 恒等式的三项, 即可证明这个恒等式.

注二: Lagrange 恒等式也可由更一般的矩阵乘法理论中的 Cauchy - Binet 公式得到, 参见《高等代数学》第三版, 姚慕生, 吴泉水, 谢启鸿编著, 复旦大学出版社, 2014年, 第105-108页.

注记

注：根据 Lagrange 恒等式

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right) - \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 = \sum_{1 \leq r < s \leq n} (a_r b_s - a_s b_r)^2$$

可知, Cauchy 不等式

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right).$$

成立等号, 当且仅当 $a_r b_s - a_s b_r = 0$ 成立, 对任意指标 r, s 满足

$1 \leq r < s \leq n$. 此即向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} 线性相关.

数列 (sequences), 例子

Definition

定义: 任意一个映射 $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ 均称作一个数列或序列, 其中 \mathbb{N} 代表自然数集. 数列常记作 $\{f(n)\}$ 或 $\{a_n\}$, 其中 $a_n = f(n)$, 并称 a_n 为数列的一般项. 有时也将各项列出来, 即 $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$, 其中 a_1 称为数列的第一项, a_2 称为第二项, a_n 称为第 n 项.

Example

例一: $\{\frac{n}{n+1}\}_{n \geq 1}$, $a_n = \frac{n}{n+1}$, $\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots\}$.

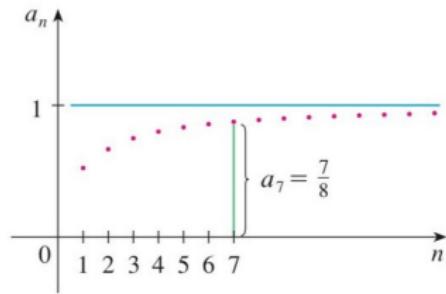
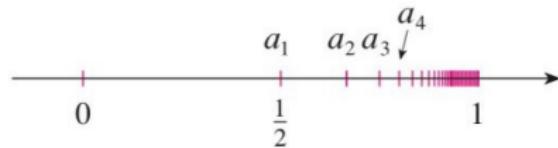
例二: $\{\cos \frac{n\pi}{6}\}_{n \geq 0}$, $a_n = \cos \frac{n\pi}{6}$, $\{1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0, \dots, \cos \frac{n\pi}{6}, \dots\}$.

例三: Fibonacci 数列: $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, $n \geq 3$. 数列的前几项为 $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots\}$.

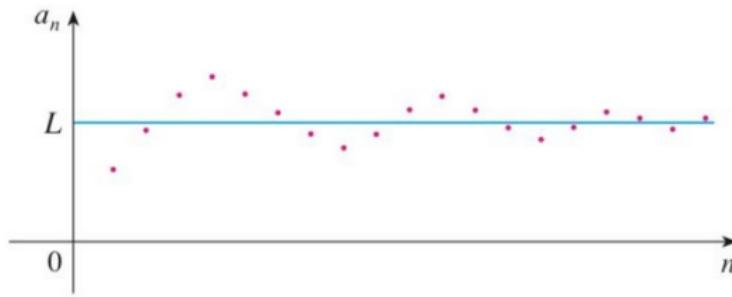
数列的极限, 例子

考虑数列 $\{\frac{n}{n+1}\}_{n \geq 1}$. 一般项 $a_n = \frac{n}{n+1}$ 随着 n 的增加越来越接近数 1, 因为

$1 - a_n = 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$. 两种方式图示如下.



数列极限的几何图示



数列极限的精确定义

Definition

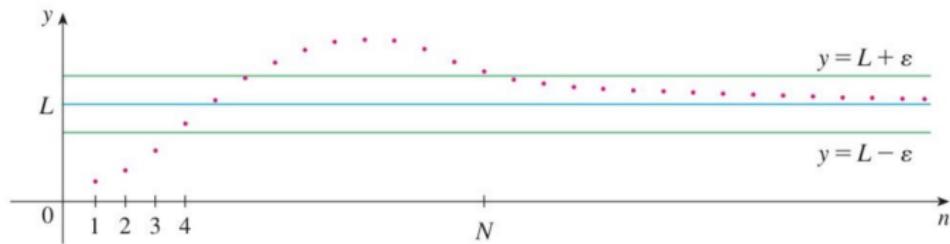
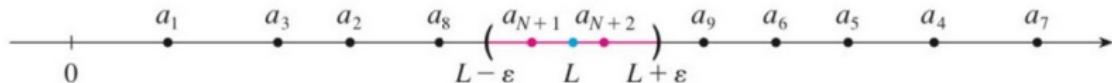
定义: 设 $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ 为一数列(或序列), 若存在 $L \in \mathbb{R}$, 使得对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N , 使得

$$|a_n - L| < \varepsilon, \quad \forall n > N,$$

则称序列 $\{a_n\}$ 收敛于 L , 或 $\{a_n\}$ 有极限且极限值为 L . 这件事情记作 $a_n \rightarrow L$ ($n \rightarrow +\infty$) 或 $\lim a_n = L$ 或 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$.

注: 显然 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$ 等价于 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - L) = 0$.

数列极限精确定义的几何意义



收敛数列的例子

定义: 函数 $[x]$ 称作取整函数, 它的值定义为不大于 x 的最大整数. 例如

$[1.5] = 1$, $[2] = 2$, $[-1.5] = -2$. 注意函数 $[x]$ 满足 $[x] \leq x < [x] + 1$ 或 $x - 1 < [x] \leq x$.

例一: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, 因为 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = [\frac{1}{\varepsilon}]$, 当 $n > N$, 即当 $n \geq N + 1$ 时, $|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N+1} = \frac{1}{[\frac{1}{\varepsilon}]+1} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$.

例二: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} = 1$, 因为 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = [\frac{1}{\varepsilon}]$, 当 $n > N$ 时, $|\frac{n+1}{n} - 1| = \frac{1}{n} < \varepsilon$.

例三: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$, 因为 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = [\frac{1}{\varepsilon}]$, 当 $n > N$ 时, $|\frac{\sin n}{n} - 0| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$.

关于数列极限定义的注记

回忆极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$ 的定义. 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N , 使得
 $|a_n - L| < \varepsilon, \forall n > N.$

注一. 不等式 $|a_n - L| < \varepsilon$ 可以用 $|a_n - L| < M\varepsilon$ 代替, 其中 M 为任意一个事先给定的正常数, 只要与 ε 和 n 无关即可.

注二. 上述定义所涉及的严格不等号, 可以部分地或全部地改为相应的非严格不等号. 例如, 极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$ 也可如下定义: 任给 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N , 使得 $|a_n - L| \leq M\varepsilon, \forall n \geq N$, 其中 $M > 0$ 为正常数, 与 n 无关. 参见课本习题 1.2 题 1(第 7 页).

发散数列

Definition

定义: 设 $\{a_n\}$ 为一数列. 若对任意 $a \in \mathbb{R}$, 数列 $\{a_n\}$ 均不以 a 为极限, 即 $a_n \rightarrow a$ 不成立, 则称数列 $\{a_n\}$ 发散或无极限. 更确切地说, 若对任意 $a \in \mathbb{R}$, 存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得对任意正整数 N , 存在 $n_0 \geq N$, $|a_{n_0} - a| \geq \varepsilon_0$, 则称数列 $\{a_n\}$ 发散或无极限.

Example

例: 序列 $\{1 - (-1)^n\}$ 发散. 易见序列可写作 $\{2, 0, 2, 0, \dots\}$. 对任意 $a \in \mathbb{R}$.

- (i) 若 $a = 0$, 则 $|a_{2n-1} - a| = 2 \not\rightarrow 0$;
- (ii) 若 $a = 2$, 则 $|a_{2n} - a| = 2 \not\rightarrow 0$;
- (iii) 若 $a \neq 0$ 且 $a \neq 2$, 则

$$|a_{2n} - a| = \begin{cases} |a|, & n \text{ 为偶数}, \\ |2 - a|, & n \text{ 为奇数}. \end{cases}$$

因此 $|a_n - a| \not\rightarrow 0$, $n \rightarrow +\infty$.

收敛数列的例子, 例一

Example

例一: 证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

证明: 记 $a_n = \sqrt[n]{n} - 1$, 则 $\sqrt[n]{n} = 1 + a_n$. 于是

$$n = (1 + a_n)^n = 1 + na_n + \frac{1}{2}n(n-1)a_n^2 + \dots > \frac{1}{2}n(n-1)a_n^2$$

$$\text{故 } a_n^2 < \frac{2}{n-1} \quad \text{或} \quad 0 < a_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}} \rightarrow 0.$$

这表明 $a_n \rightarrow 0$. 故 $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$. 证毕.

例二

例二：设 $\lim a_n = A$, 证明

- (i) $\lim e^{a_n} = e^A$;
- (ii) 设 $a_n > 0$ 且 $A > 0$, 则 $\lim \ln a_n = \ln A$.
- (iii) $\lim \frac{\ln n}{n} = 0$.

证 (i). 对任意 $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}|e^{a_n} - e^A| < \varepsilon &\iff |e^{a_n - A} - 1| < \varepsilon e^{-A} \\&\iff -\varepsilon e^{-A} < e^{a_n - A} - 1 < \varepsilon e^{-A} \\&\iff 1 - \varepsilon e^{-A} < e^{a_n - A} < 1 + \varepsilon e^{-A} \\&\iff \ln(1 - \varepsilon e^{-A}) < a_n - A < \ln(1 + \varepsilon e^{-A}).\end{aligned}$$

这里不妨取 $\varepsilon > 0$ 充分小, 使得 $1 - \varepsilon e^{-A} > 0$. 记

例二, 续一

$$\delta \stackrel{\text{def}}{=} \min \left\{ |\ln(1 - \varepsilon e^{-A})|, \ln(1 + \varepsilon e^{-A}) \right\} > 0,$$

由假设 $a_n \rightarrow A$ 知, 对 $\delta > 0$, 存在正整数 N , 使得 $|a_n - A| < \delta$, $\forall n \geq N$. 于是当 $n \geq N$ 时, $|e^{a_n} - e^A| < \varepsilon$. 结论 (i) 得证.

证 (ii). 设 $\varepsilon > 0$, $|\ln a_n - \ln A| < \varepsilon$, 即

$$\begin{aligned} \left| \ln \frac{a_n}{A} \right| < \varepsilon &\iff -\varepsilon < \ln \frac{a_n}{A} < \varepsilon \\ \iff e^{-\varepsilon} < \frac{a_n}{A} < e^\varepsilon &\iff Ae^{-\varepsilon} < a_n < Ae^\varepsilon \\ \iff A(e^{-\varepsilon} - 1) < a_n - A < A(e^\varepsilon - 1) \end{aligned}$$

记 $\delta \stackrel{\text{def}}{=} \min\{A(1 - e^{-\varepsilon}), A(e^\varepsilon - 1)\}$. 由假设 $a_n \rightarrow A$ 知, 对 $\delta > 0$, 存在正整数 N , 使得 $|a_n - A| < \delta$, $\forall n \geq N$. 由上述等价关系知 $|\ln a_n - \ln A| < \varepsilon$, $\forall n \geq N$. 此即 $\lim \ln a_n = \ln A$. 结论 (ii) 得证.

例二, 续二

证 (iii): 已证 $\lim \sqrt[n]{n} = 1$. 记 $a_n = \sqrt[n]{n}$, $A = 1$, 则 $a_n \rightarrow A$. 由 (ii) 知
 $\lim \ln a_n = \ln A = \ln 1 = 0$, 即 $\lim \frac{\ln n}{n} = 0$. (iii) 得证. □

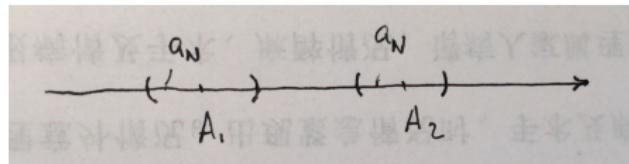
极限性质, 极限的唯一性

命题: 如果序列 $\{a_n\}$ 有极限, 则极限值唯一.

证明: 设序列 $\{a_n\}$ 有两个极限 A_1 和 A_2 , $A_1 \neq A_2$. 取 $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}|A_1 - A_2|$, 根据极限定义可知, 存在正整数 N , 使得对任意 $n \geq N$, $|a_n - A_1| < \varepsilon$ 且 $|a_n - A_2| < \varepsilon$. 于是

$$\begin{aligned} |A_1 - A_2| &= |A_1 - a_N + a_N - A_2| \leq |A_1 - a_N| + |a_N - A_2| \\ &< 2\varepsilon < 2 \cdot \frac{1}{2}|A_1 - A_2| = |A_1 - A_2|. \end{aligned}$$

矛盾. 命题得证. □



收敛序列有界

命题：若序列 $\{a_n\}$ 收敛，则序列 $\{a_n\}$ 有界，即存在正数 $M > 0$ ，使得 $|a_n| \leq M, \forall n \geq 1$.

证：设序列 $\{a_n\}$ 收敛于 A . 由极限定义知，对于 $\varepsilon = 1$ ，存在正整数 N ，使得对任意 $n > N$, $|a_n - A| < 1$, 即 $-1 + A < a_n < A + 1$. 故 $|a_n| < 1 + |A|$, $\forall n > N$. 记

$$M = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_N|, 1 + |A|\},$$

则 $|a_n| \leq M, \forall n \geq 1$. 证毕.

□

子序列 (subsequences)

Definition

定义: 设 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ 为一序列, 若映射 $\phi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ 满足 $\phi(k) < \phi(k+1)$,
 $\forall k \geq 1$, 则称序列 $\{a_{\phi(k)}\}$ 为 $\{a_n\}$ 的一个子序列, 其中 $\mathbb{N}^* := \{1, 2, \dots\}$.

例: (i) $\phi(k) = 2k$, $\{a_{2k}\}$ 为序列 $\{a_n\}$ 的一个子序列.

(ii) $\phi(k) = 2k + 1$, $\{a_{2k+1}\}$ 为序列 $\{a_n\}$ 的一个子序列.

(iii) $\phi(k) = 3k$, $\{a_{3k}\}$ 为序列 $\{a_n\}$ 的一个子序列.

(iv) $\phi(k) = k$, 序列 $\{a_n\}$ 为其自身的一个子序列.

注: 序列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ 的子列 $\{a_{\phi(k)}\}$ 也常常记作 $\{a_{n_k}\}$, 其中 $n_k = \phi(k)$ 满足
 $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ 为严格递增的正整数序列.

子序列的收敛性

Theorem

定理: 收敛序列的每个子序列均收敛, 且收敛于同一个极限值.

Proof.

证明: 设序列 $\{a_n\}$ 收敛于 a , 设 $\{a_{\phi(k)}\}$ 为其任意一个子序列. 依极限定义可知, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N , 使得对任意 $n > N$, $|a_n - a| < \varepsilon$. 由于映射 $\phi(\cdot)$ 满足 $\phi(k) < \phi(k + 1)$, 故 $\phi(k) \geq k$, $\forall k \geq 1$. 于是 $|a_{\phi(k)} - a| < \varepsilon$, $\forall k > N$. 因为 $\phi(k) \geq k > N$. 故子序列也收敛于 a . 证毕. (用归纳法证明 $\phi(k) \geq k$, $\forall k \geq 1$. 显然 $\phi(1) \geq 1$. 假设 $\phi(k) \geq k$. 由于 $\phi(k + 1) > \phi(k) \geq k$, 故 $\phi(k + 1) \geq k + 1$.)



例子

Example

例：证明序列 $\{(-1)^n\}_{n \geq 1}$ 发散.

证明：反证. 假设序列 $\{(-1)^n\}$ 收敛，则根据上述定理可知它的每个子序列均收敛于同一个极限值. 但是这个序列的偶脚标和奇脚标子序列

$$\{(-1)^{2n}\} = \{1, 1, 1, \dots\},$$

$$\{(-1)^{2n-1}\} = \{-1, -1, -1, \dots\}$$

分别收敛于两个不同的极限值 1 和 -1. 矛盾. 故序列 $\{(-1)^n\}$ 发散. 证毕.



收敛序列的保序性

Theorem

定理：设 $a_n \rightarrow a$ 且 $b_n \rightarrow b$.

(1) 若 $a < b$, 则存在正整数 N , 使得 $a_n < b_n, \forall n > N$.

(2) 若存在正整数 n_0 , 使得 $a_n \leq b_n, \forall n \geq n_0$, 则 $a \leq b$.

注：结论(2)不能推广如下：若 $a_n < b_n, \forall n \geq n_0$, 且 $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$, 则 $a < b$. 例如序列 $\{\frac{1}{2n}\}$ 和 $\{\frac{1}{n}\}$ 均收敛, 且满足 $\frac{1}{2n} < \frac{1}{n}, \forall n \geq 1$. 但它们有相同的极限零.

证明

证明: (1) 由假设 $a_n \rightarrow a$ 且 $b_n \rightarrow b$ 可知, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N , 使得当 $n > N$ 时,

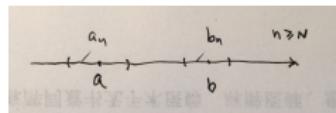
$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{且} \quad |b_n - b| < \varepsilon,$$

$$\text{即} \quad -\varepsilon + a < a_n < a + \varepsilon \quad \text{且} \quad -\varepsilon + b < b_n < b + \varepsilon.$$

由于 $a < b$, 故可取 $\varepsilon = \frac{1}{2}(b - a) > 0$, 则

$$a_n < a + \frac{1}{2}(b - a) = \frac{1}{2}(a + b), \quad b_n > -\frac{1}{2}(b - a) + b = \frac{1}{2}(a + b),$$

即 $a_n < \frac{1}{2}(a + b) < b_n, \forall n > N$. 结论 (1) 得证.



证 (2). 反证. 若 $a > b$. 由结论 (1) 知存在正整数 N , 使得 $a_n > b_n, \forall n > N$. 此与假设 $a_n \leq b_n, \forall n > n_0$ 相矛盾. 证毕.

Theorem

定理: 设两个数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 均收敛, 且 $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b$, 则这两个数列的和 $\{a_n + b_n\}$, 差 $\{a_n - b_n\}$, 乘积 $\{a_n b_n\}$, 以及商 $\frac{a_n}{b_n}$ (补充假设 $b \neq 0$) 均收敛, 并且

- (i) $a_n \pm b_n \rightarrow a \pm b$;
- (ii) $c a_n \rightarrow c a$;
- (iii) $a_n b_n \rightarrow a b$;
- (iv) 设 $b \neq 0$, 则 $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b}$.

证明

证明：(i) 和 (ii) 的证明容易，略去。证 (iii)。要证 $a_n b_n \rightarrow ab$ ，即要证对 $\forall \varepsilon > 0$, \exists 正整数 N , 使得 $|a_n b_n - ab| < \varepsilon$, $\forall n > N$ 。一方面我们有估计

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| \leq |a_n - a||b_n| + |a||b_n - b|.$$

另一方面，由于收敛序列有界，故存在 $M > 0$, 使得 $|b_n| \leq M$, $\forall n \geq 1$ 。再由假设 $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b$ 可知对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N , 使得 $|a_n - a| < \varepsilon$ 且 $|b_n - b| < \varepsilon$, $\forall n > N$ 。于是

$$|a_n b_n - ab| \leq |a_n - a||b_n| + |a||b_n - b| \leq \varepsilon M + |a|\varepsilon = (M + |a|)\varepsilon, \quad \forall n > N.$$

(iii) 得证。证 (iv)。要证 $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b}$, 即要证对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N , 使得

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} \right| < \varepsilon, \quad \forall n > N.$$

证明, 续

先注意 $\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} \right| = \left| \frac{a_n b - a b_n}{b_n b} \right| = \frac{1}{|bb_n|} |a_n b - ab + ab - ab_n|$

$$\leq \frac{1}{|bb_n|} (|b||a_n - a| + |a||b - b_n|).$$

由 $b_n \rightarrow b$ 知, 对 $\varepsilon = \frac{|b|}{2} > 0$, 存在正整数 N_1 , 使得 $|b_n - b| < \frac{|b|}{2}$, $\forall n > N_1$.

于是对 $\forall n > N_1$

$$-\frac{|b|}{2} + b < b_n < \frac{|b|}{2} + b \quad \Rightarrow \quad |b_n| \geq \frac{|b|}{2}.$$

再由假设 $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b$ 可知, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N_2 , 使得

$|a_n - a| < \varepsilon$ 且 $|b_n - b| < \varepsilon$, $\forall n > N_2$. 于是对 $\forall n > \max\{N_1, N_2\}$,

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} \right| \leq \frac{1}{|bb_n|} (|b||a_n - a| + |a||b - b_n|) \leq \frac{2}{|b|^2} (|b|\varepsilon + |a|\varepsilon) = M\varepsilon,$$

其中 $M = \frac{2}{|b|^2} (|b| + |a|)$. 结论 (iv) 得证.

例一

例一：求极限

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 - n + 1}{2n^2 + 3n + 2}.$$

解：由于

$$\frac{n^2 - n + 1}{2n^2 + 3n + 2} = \frac{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}},$$

故

$$\begin{aligned}\lim \frac{n^2 - n + 1}{2n^2 + 3n + 2} &= \lim \frac{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}} = \frac{\lim \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{\lim \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}\right)} \\ &= \frac{\lim 1 - \lim \frac{1}{n} + \lim \frac{1}{n^2}}{\lim 2 + \lim \frac{3}{n} + \lim \frac{2}{n^2}} = \frac{1 - 0 + 0}{2 + 0 + 0} = \frac{1}{2}. \quad \#\end{aligned}$$

作业

习题一：利用算术几何平均不等式证明，对于任意 $x > 0$,

(i) $x^{\frac{1}{3}} \leq \frac{x+2}{3}$.

(ii) 对于每个正整数 n , $x^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x+n-1}{n}$.

(iii) 对于每个正整数 n , $n^{\frac{1}{n}} \leq \frac{2n-1}{n}$.

习题二：对任意 n 实数 a_1, a_2, \dots, a_n , 证明如下两个不等式

$$\sum_{k=1}^n a_k \leq \sqrt{n} \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

和

$$\sum_{k=1}^n a_k \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^{\frac{4}{3}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

作业, 续

习题三: 利用 Cauchy 不等式证明

$$\left(\sum_{k=1}^n c_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{c_k} \right) \geq n^2,$$

其中 $c_k > 0$, $k = 1, 2, \dots, n$ 为任意 n 个正数.

习题四: 设 a, b, c 为三个正数, 且 $a + b + c = 1$. 证明

$$\left(\frac{1}{a} - 1 \right) \left(\frac{1}{b} - 1 \right) \left(\frac{1}{c} - 1 \right) \geq 8.$$

习题五: 设 a 和 b 为两个正实数. 证明 (1) 对任意正整数 $n \geq 1$, 成立

$$\frac{a^n + b^n}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2} \right)^n;$$

(2) 进一步假设 $a + b = 1$, 证明

$$\left(a + \frac{1}{a} \right)^2 + \left(b + \frac{1}{b} \right)^2 \geq \frac{25}{2}.$$