Week 14 第一次作业答案

《线性代数入门》

6.2.7 (1) $\because$ A正定 $\therefore$ A可逆，对 $B=\begin{bmatrix} A & y \\ y^T & 0 \end{bmatrix}$ 作合同变换，记 $C=\begin{pmatrix} I_n & -A^{-1}y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

则 $CBC^T=\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -y^TA^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & y \\ y^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & -A^{-1}y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & \\ & -y^TA^{-1}y \end{pmatrix}$

$$\therefore \det\begin{pmatrix} A & y \\ y^T & 0 \end{pmatrix}\cdot(\det C)^2=\det\begin{pmatrix} A & \\ & -y^TA^{-1}y \end{pmatrix}=(-y^TA^{-1}y)\cdot\det A$$

$\because$ A正定 $\therefore \det A>0$，且 A^{-1}正定

又 $\because \det C=1$ $\therefore \det\begin{pmatrix} A & y \\ y^T & 0 \end{pmatrix}=-\underbrace{(y^TA^{-1}y)}_{\geq 0}\cdot\underbrace{\det A}_{>0}\leq 0$

(2) 类似的合同变换. $\because$ A正定 $\therefore$ A_{n-1}的行列式 >0，可逆 且也为对称正定

记 $A=\begin{pmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ \alpha^T & a_{nn} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ -\alpha^TA_{n-1}^{-1} & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} I_{n-1} & -A_{n-1}^{-1}\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{n-1} & 0 \\ 0 & a_{nn}-\alpha^TA_{n-1}^{-1}\alpha \end{pmatrix}$$

$$\therefore \det A=\det A_{n-1}\cdot(a_{nn}-\alpha^TA_{n-1}\alpha)$$

$$\therefore \det A-a_{nn}\det A_{n-1}=-\underbrace{(\alpha^TA_{n-1}\alpha)}_{\geq 0}\underbrace{\det A_{n-1}}_{>0}\leq 0.$$

$$\therefore \det A\leq a_{nn}\cdot\det A_{n-1}$$

(3) 由数学归纳. $n=1$. $\det A=a_{11}\leq a_{11}$ 成立.

假设 $n=k-1$时. $k-1$阶正定阵 $A_{k-1}\leq a_{11}\cdots a_{k-1,k-1}$.

$n=k$时. $\det A_k=\det\begin{pmatrix} \widetilde{A_{k-1}} & \alpha \\ \alpha^T & a_{kk} \end{pmatrix}\overset{由(2)}{\leq} a_{kk}\det\widetilde{A_{k-1}}\overset{由归纳假设}{\leq} a_{kk}\cdots a_{11}$

命题成立.

6.2.10.

1. $A \succ B$, $B \succ C$，则 $\forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$，$x^T(A-B)x > 0$，$x^T(B-C)x > 0$

则 $x^T(A-C)x = x^T(A-B)x + x^T(B-C)x > 0$，故 $B-C$ 正定，$B \succ C$.

2. 若 $A \succ B$，且 $B \succ A$，则 由 1 知，$A \succ A$，

但 $A-A=0$ 不正定！，矛盾，故不能同时成立.

3. $\because$ A 对称正定 $\therefore$ 存在 Q 同阶正交 s.t $Q^TAQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

其中 $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n > 0$ 为 A 特征值.

则 $\forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$，存在唯一 $y \in \mathbb{R}^n$，s.t $y = Q^{-1}x = Q^Tx$.（注意 $\|y\|^2 = \|x\|^2$）

$\therefore x^TAx = (Qy)^TAQy = y^TQ^TAQy = y^T\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}y = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$

由于 $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n > 0$ $\therefore \lambda_n(y_1^2 + \cdots + y_n^2) \leq x^TAx \leq \lambda_1(y_1^2 + \cdots + y_n^2)$

$$\lambda_n(y_1^2+\cdots+y_n^2) = \lambda_n\|y\|^2 = \lambda_n\|x\|^2 = \lambda_n x^T I_n x.$$

$$\lambda_1(y_1^2+\cdots+y_n^2) = \lambda_1\|y\|^2 = \lambda_1\|x\|^2 = \lambda_1 x^T I_n x$$

故取 $k_1 = 2\lambda_1$ $k_2 = \frac{1}{2}\lambda_n$. 即可满足条件

6.2.16.

1. √ $\because$ A对称正定 $\therefore$ A可逆

$\forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$，存在！ $y = A^{-1}x \neq 0$ $\therefore x = Ay$

$\therefore x^T A^{-1} x = y^T A A^{-1} A y = y^T A y \overset{(A正定)}{>} 0$ $\therefore A^{-1}$正定

2. √ 若 A，B正定， $\forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$， $x^T A x > 0$， $x^T B x > 0$.

$x^T (A+B) x = x^T A x + x^T B x > 0$. $\therefore$ A+B正定.

3. √ 若 A，B半正定， $\forall x \in \mathbb{R}^n$， $x^T A x \geq 0$， $x^T B x \geq 0$.

$\therefore x^T (A+B) x \geq 0$.

4. ×. 令 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 二者均不定

但 $A+B = I_2$ 正定

5. √ $\forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. $x^T A^T B A x = (Ax)^T B (Ax)$

$\because$ A列满秩 $\therefore$ $\underbrace{x \neq 0，则有\ Ax = x_1 \alpha_1 + \cdots + x_n \alpha_n \neq 0}_{列向量线性无关}$ $A = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$. $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

又 $\because$ B正定 $\therefore (Ax)^T B (Ax) > 0$ $\therefore A^T B A$正定.

6. √ 代入验证即可

7. √ $\because$ A正定 $\therefore \exists$ C可逆. s.t $A = CC^T$.

$\therefore AB = CC^T B$

则 $C^{-1} A B C = C^{-1} C C^T B C = C^T B C$ 故 AB 与 $C^T B C$ 相似

而B正定，$C^T B C$ 仍为正定阵，特征值均大于0实数.

$\therefore AB \sim C^T B C$ 特征值也全为正实数

《线性代数与几何》.

7.11. 只用证明对应二次型矩阵为正定阵

(1) 二次型对应矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&2&-2\\0&-2&4\end{bmatrix}$ Δ_k 为 k阶顺序主子式

求顺序主子式：$\Delta_1=1$ $\Delta_2=\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=2-1=1$ $\Delta_3=0$ 不是正定阵

(2) $A=\begin{bmatrix}-5&2&2\\2&-6&0\\2&0&-4\end{bmatrix}$ $\Delta_1=-5<0$ 非正定

(3) $A=\begin{bmatrix}7&-1&-2\\-1&1&0\\-2&0&1\end{bmatrix}$ $\Delta_1=7>0, \Delta_2=7\times1-(-1)\times(-1)=6>0$ $\Delta_3=2>0$

正定

(4) $A=\begin{bmatrix}1&2&\frac{1}{2}\\2&5&-3\\\frac{1}{2}&-3&9\end{bmatrix}$ $\Delta_1=1$, $\Delta_2=5-2\times2=1$, $\Delta_3=-\frac{29}{4}<0$ 不为正定阵.

7.12

(1) $\Delta_1=\frac{1}{2}>0$, $\Delta_2=\begin{vmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}-\frac{1}{16}=\frac{7}{16}>0$. $\Delta_3=\det A=-\frac{9}{8}<0$

不正定

(2) $\Delta_1=1$, $\Delta_2=2-1=1$, $\Delta_3=1\times(-2)+1\times(2-1)=-1<0$ 不正定

(3) $\Delta_1=-1<0$ 不正定

(4) $\Delta_1=2$, $\Delta_2=2-1=1$, $\Delta_3=(-1)\times(0+1)=-1<0$, 不正定

7.13

(2) 对应矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&0&-\frac{t}{2}\\0&1&\frac{t}{2}\\-\frac{t}{2}&\frac{t}{2}&1\end{bmatrix}$ $\Delta_1=1>0$, $\Delta_2=1>0$. $\Delta_3=1-\frac{t^2}{2}>0$

$\therefore t\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ 原二次型正定

(3) $A=\begin{bmatrix}t&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&t&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&t\end{bmatrix}$ $\Delta_1=t>0$, $\Delta_2=t^2-\frac{1}{4}>0$, $\Delta_3=(t+1)(t-\frac{1}{2})^2>0$

解得 $t>\frac{1}{2}$，即为正定二次型

14. (1) $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & t \\ 0 & t & 3 \end{bmatrix}$　　$\lambda_1=1,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=5$ 由已知条件

$$|\lambda I_3-A|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & & \\ & \lambda-3 & -t \\ & -t & \lambda-3 \end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-3-t)(\lambda-3+t)$$

由题设 $t>0$，知 $3+t=5,\ 3-t=1 \Rightarrow t=2$，

分别解三个齐次线性方程组，找一组单位解

$\lambda_1=1$，$(A-I)x=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & 2 \\ & 2 & 2 \end{pmatrix} x=0 \Rightarrow y_1=\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$\lambda_2=2$，$(A-2I)x=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & 2 \\ & 2 & 1 \end{pmatrix} x=0 \Rightarrow y_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_3=5$，$(5I-A)x=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 2 & -2 \\ & -2 & 2 \end{pmatrix} x=0 \Rightarrow y_3=\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

令 $Q=(y_2, y_1, y_3)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ 为正交线性替换矩阵

则 $Q^TAQ=\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$

(2) 由(1)知 $x=Qy$　　$\|x\|^2=x^Tx=y^TQ^TQy=y^Ty=\|y\|^2$.

$\because \|x\|^2=\|y\|^2=1$

$\therefore Q(\alpha)=2y_1^2+y_2^2+5y_3^2=1+y_1^2+4y_3^2=3y_3^2+2-y_2^2 \leq 3y_3^2+2 \leq 5$

当且仅当 $y_2=0$　　当且仅当 $y_3=1$

$\therefore y_1=y_2=0,\ y_3=1$ 取 max $Q(\alpha)=5$

20. 由上面《线性代数入门》 6.2.16.① 知.

若 A, B 对称正定，则 AB 特征值均为正数！

又 $\because AB = BA$ $\therefore (AB)^T = B^T A^T = BA = AB$ AB 实对称

$\therefore AB$ 可正交相似于一个对角线全为正的对角阵 $\Rightarrow AB$ 正定

25.

若 $r(A) = m \Rightarrow$ 行向量线性无关，则 $A^T x = 0$ 只有零解 故若 $x \neq 0$

$\therefore x^T (AA^T) x = (A^T x)^T (A^T x) = \|A^T x\|^2 > 0$

$\therefore AA^T$ 正定

若 AA^T 正定 $\Rightarrow$ 若 $r(A) < m$. 则 $\dim N(A^T) = m - r(A^T) > 0$.

$\therefore$ 存在 $x \neq 0$, s.t $A^T x = 0$.

$\therefore x^T AA^T x = 0$. 非正定，矛盾，故 $r(A) = m$, 行满秩

27. 若正定矩阵 $\Rightarrow$ 记此矩阵为 G.

反证，若存在不全为零 $x_1, \cdots, x_m$, s.t $x_1 \alpha_1 + \cdots + x_m \alpha_m = 0$.

则 $x^T G x = (x_1, \cdots, x_m) \begin{pmatrix} (\alpha_1, \alpha_1) & \cdots & (\alpha_1, \alpha_m) \\ \vdots & & \vdots \\ (\alpha_m, \alpha_1) & \cdots & (\alpha_m, \alpha_m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$

$= ((x_1\alpha_1 + \cdots + x_m\alpha_m, \alpha_1), \cdots, (x_1\alpha_1 + \cdots + x_m\alpha_m, \alpha_m)) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$

$= (x_1\alpha_1 + \cdots + x_m\alpha_m, x_1\alpha_1 + \cdots + x_m\alpha_m) = (0, 0) = 0$.

与 G 正定矛盾. $\therefore \alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 线性无关.

若线性无关 $\Rightarrow x^T G x = \|x_1\alpha_1 + \cdots + x_m\alpha_m\|^2 \geq 0$, 当且仅当 $x_1 = \cdots = x_m = 0$ 取等

$\therefore G$ 正定阵

28.

定理7.7：$A\in M_n(\mathbb{R})$ n阶实对称，则 A正定 $\Leftrightarrow$ A的所有顺序主子式 >0

Pr：$\Rightarrow$ 记 A_s 为 A的 s阶顺序主子阵. $1\le s\le n$.

$\forall\ \alpha\in\mathbb{R}^s-\{0\}$，$\alpha=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_s\end{pmatrix}$，记 $\tilde{\alpha}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_s\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$

则 $0<\tilde{\alpha}^TA\tilde{\alpha}=(\alpha^T\ 0)\begin{pmatrix}A_s & *\\ * & *\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ 0\end{pmatrix}=\alpha^TA_s\alpha$

$\therefore A_s$ 为正定阵，存在可逆阵 C. $A_s=C^TC$ $\therefore |A_s|=|C|^2>0$.

$\Leftarrow$ 数学归纳 $n=1$ 时显然成立.

假设 $\le n-1$ 阶均成立，所有顺序主子式 >0

对于n阶矩阵 A，$A=\begin{pmatrix}A_{n-1} & \beta\\ \beta^T & a_{nn}\end{pmatrix}$，$A_{n-1}$ 的 $1,2,\cdots,n-1$ 阶顺序主子式 也是A的顺序主子式 >0

由归纳假设 A_{n-1} 为正定阵，存在可逆阵 $C\in M_{n-1}(\mathbb{R})$. $C^TA_{n-1}C=I_n$.

故合同 $\begin{pmatrix}C^T & 0\\ -\beta^TCC^T & 1\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}A_{n-1} & \beta\\ \beta^T & a_{nn}\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}C & -CC^T\beta\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_{n-1} & \\ & a_{nn}-\beta^TCC^T\beta\end{pmatrix}$

求行列式 $\underbrace{(\det C)^2}_{>0}\cdot\underbrace{\det A}_{>0}=1\cdot(a_{nn}-\beta^TCC^T\beta)>0$.

$\therefore$ A合同于一个对角线元素均大于0的对角阵

$\therefore$ A合同于 I_n $\Rightarrow$ A为正定阵