Linear Algebra	2025 Fall

Sample Solution

TA: Hang Li — *Week 8-1*

《线性代数与几何》Exercise 4：5(4)、6、7、8、9

Exercise 4：5(4)　如 $\mathrm{r}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\mathrm{r}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，则 α_4 必可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出。

证明： 设 $\mathrm{r}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\mathrm{r}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=r$。取 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$（$r\le 3$）作为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的一个极大线性无关组，由于它也是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的极大线性无关组（秩为 r），故 α_4 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$ 线性表出。而 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$ 是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的部分组，因此 α_4 必可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出。

Exercise 4：6　求下列向量组的秩及一个极大线性无关组，并将其余向量用极大线性无关组线性表出：

(1) 向量组：

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\2\\4\end{bmatrix},\ \alpha_2=\begin{bmatrix}0\\3\\1\\2\end{bmatrix},\ \alpha_3=\begin{bmatrix}3\\0\\7\\14\end{bmatrix},\ \alpha_4=\begin{bmatrix}1\\-1\\2\\0\end{bmatrix},\ \alpha_5=\begin{bmatrix}2\\1\\5\\0\end{bmatrix}$$

解答： 将向量组按列构成矩阵 $A=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4\ \alpha_5)$，对其作初等行变换：

$$A=\begin{bmatrix}1&0&3&1&2\\-1&3&0&-1&1\\2&1&7&2&5\\4&2&14&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&3&0&-\frac{1}{2}\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&\frac{5}{2}\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

1. 秩：行阶梯形矩阵有 3 个非零行，故 $\mathrm{rank}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=3$。
2. 极大线性无关组：非零行的首非零元位于第 1、2、4 列，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 是一个极大线性无关组。
3. 线性表出：由行最简形可得：

$$\alpha_3=3\alpha_1+\alpha_2+0\cdot\alpha_4,\quad \alpha_5=-\frac{1}{2}\alpha_1+\alpha_2+\frac{5}{2}\alpha_4$$

(2) 向量组：

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \ \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}, \ \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -9 \\ -16 \\ 22 \end{bmatrix}, \ \alpha_4 = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

解答：将向量组按列构成矩阵 $A = (\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)$，对其作初等行变换：

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 & 7 \\ 4 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -9 & 0 \\ -1 & 3 & -16 & -1 \\ 2 & -4 & 22 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1. 秩：行阶梯形矩阵有 3 个非零行，故 $\operatorname{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 3$。
2. 极大线性无关组：非零行的首非零元位于第 1、2、4 列，故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 是一个极大线性无关组。
3. 线性表出：由行最简形可得：

$$\alpha_3 = \alpha_1 - 5\alpha_2 + 0 \cdot \alpha_4$$

Exercise 4：7 在 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 中，α_s 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{s-1}$ 线性表出，而 α_1 是 $\alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 的线性组合。证明：α_1 可由 $\alpha_2, \ldots, \alpha_{s-1}$ 线性表出。

证明：

1. 由“α_1 是 $\alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 的线性组合”，根据线性组合的定义，存在数 $k_2, k_3, \ldots, k_s$，使得：

$$\alpha_1 = k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + \cdots + k_s\alpha_s \tag{1}$$

2. 假设 $k_s \neq 0$，则可将 α_s 解出：

$$\alpha_s = \frac{1}{k_s}\alpha_1 - \frac{k_2}{k_s}\alpha_2 - \cdots - \frac{k_{s-1}}{k_s}\alpha_{s-1}$$

   这表明 α_s 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{s-1}$ 线性表出，与“α_s 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{s-1}$ 线性表出”矛盾。因此，$k_s = 0$。

3. 当 $k_s = 0$ 时，式 (1) 变为：

$$\alpha_1 = k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + \cdots + k_{s-1}\alpha_{s-1}$$

   即 α_1 可由 $\alpha_2, \ldots, \alpha_{s-1}$ 线性表出。

Exercise 4：8 证明 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性无关的充要条件是它们可表示任一 n 维向量。

证明:

1. **必要性（线性无关 $\implies$ 可表示任一 n 维向量）**设 β 是任意一个 n 维向量，考虑向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta$。由于 n 维向量空间中任意 $n+1$ 个向量必线性相关，且 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 线性无关，因此 β 可由 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 线性表出。由 β 的任意性，得 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 可表示任一 n 维向量。

2. **充分性（可表示任一 n 维向量 $\implies$ 线性无关）**取 n 维单位向量组 $\varepsilon_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \varepsilon_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$，显然 $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ 线性无关且可表示任一 n 维向量。

   由题设,$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 也可表示任一 n 维向量,故 $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ 与 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 等价。又 $\operatorname{rank}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = n$，根据等价向量组的秩相等，得 $\operatorname{rank}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = n$，因此 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 线性无关。

综上，n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性无关的充要条件是它们可表示任一 n 维向量。

Exercise 4：9 如 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性相关，但其中任意 $s-1$ 个向量都线性无关，证明必存在 s 个全不为零的数 $k_1, k_2, \ldots, k_s$ 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = \mathbf{0}$ 成立。

证明:

1. 由 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性相关，根据线性相关的定义，存在不全为零的数 $k_1, k_2, \ldots, k_s$，使得:

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = \mathbf{0} \tag{1}$$

2. 假设存在某个 $k_i = 0$（不妨设 $k_s = 0$），则式 (1) 变为:

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_{s-1}\alpha_{s-1} = \mathbf{0}$$

   此时 $k_1, k_2, \ldots, k_{s-1}$ 不全为零，这与“任意 $s-1$ 个向量都线性无关”矛盾（线性无关的向量组不存在不全为零的数使其线性组合为零向量）。

   因此，所有 k_i 都不为零，即 $k_1, k_2, \ldots, k_s$ 全不为零。

综上，必存在 s 个全不为零的数 $k_1, k_2, \ldots, k_s$，使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = \mathbf{0}$ 成立。

《线性代数入门》Exercise 2.1：2、3

Exercise 2.1.2 判断满足下列性质的 $\mathbb{R}^3$ 子集 $\mathcal{M}$ 是否存在. 若存在, 进一步判断哪些是子空间:

1. M 含有 e_1, e_2, e_3; 对任意 $v, w \in M$, 都有 $v + w \in M$; 存在 $v \in M$, 使得 $\frac{1}{2}v \notin M$.

   ▲ 存在. 例: $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}$. 都不是子空间. ►

   验证过程:

   (a) 含标准基向量：$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，因分量均为整数，故 $e_1, e_2, e_3 \in M$。

   (b) 加法封闭性：任取 $v = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} \in M$，其中 $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{Z}$，则

   $$v + w = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 \end{bmatrix}$$

   因整数加法仍为整数，故 $v + w \in M$。

   (c) 数量乘法不封闭：取 $v = e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in M$，数 $k = \frac{1}{2}$，则

   $$\frac{1}{2}v = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   因 $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$，故 $\frac{1}{2}v \notin M$。

   结论：M 不满足数量乘法封闭性，故不是线性子空间。

2. M 含有所有形如 $\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 1 \end{bmatrix}$ 的向量; 对任意 $v \in M$, 都有 $kv \in M$; 存在 $v, w \in M$, 使得 $v + w \notin M$.

▲ 存在. 例: $\left\{\begin{bmatrix} k\cos\theta \\ k\sin\theta \\ k \end{bmatrix} \mid 0 \le \theta < 2\pi, k \in \mathbb{R}\right\}$. 都不是子空间. ►

验证过程:

(a) 含指定形式向量：取 $k=1$，则 $\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 1 \end{bmatrix} \in M$。

(b) 数量乘法封闭性：任取 $v = \begin{bmatrix} k\cos\theta \\ k\sin\theta \\ k \end{bmatrix} \in M$ 和 $t \in \mathbb{R}$，则

$$tv = \begin{bmatrix} tk\cos\theta \\ tk\sin\theta \\ tk \end{bmatrix}$$

令 $k' = tk$，则 $tv \in M$。

(c) 加法不封闭：取 $\theta = 0$ 时，$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in M$；取 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时，$w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in M$，则

$$v + w = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

假设 $v + w \in M$，则存在 θ', k' 使:

$$k'\cos\theta' = 1, \quad k'\sin\theta' = 1, \quad k' = 2$$

代入得 $\cos\theta' = \sin\theta' = \frac{1}{2}$，但 $\cos^2\theta' + \sin^2\theta' = \frac{1}{2} \neq 1$，矛盾。故 $v + w \notin M$。

结论：M 不满足加法封闭性，故不是线性子空间。

3. M 含有 e_1, e_2 但不含有 e_3; 对任意 $v, w \in M, k \ge 0$, 都有 $v + w, kv \in M$.

▲ 存在. 例: $\left\{\begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix} \mid a, b \ge 0\right\}$; $\left\{\begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\right\}$ 是子空间. ►

例子 1（非子空间）: $M_1 = \left\{\begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix} \mid a, b \ge 0\right\}$。

验证:

(a) 含 e_1, e_2（因 $1 \geq 0$），不含 e_3（第三分量非 0）。

(b) 非负系数封闭：对 $k \geq 0$ 和 $v, w \in M_1$，kv 和 $v + w$ 分量仍非负，故属于 M_1。

(c) 不满足全体数乘封闭：取 $v = e_1$ 和 $k = -1$，则 $-v = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \notin M_1$。

例子 2（子空间）：$M_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$。

验证：

(a) 含 e_1, e_2，不含 e_3（同前）。

(b) 对任意加法和数乘封闭：分量运算均在 $\mathbb{R}$ 中封闭，故满足子空间条件。

结论：M_1 不是子空间，M_2 是线性子空间。

Exercise 2.1.3 证明命题 2.1.9：
命题 2.1.9 设 S 是 $\mathbb{R}^m$ 中的向量组，则：

1. 子集 $\text{span}(S)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间.
2. 如果 S 中的向量都在 $\mathbb{R}^m$ 的某个子空间中，则 $\text{span}(S)$ 中的向量也都在该子空间中.

证明：

1. 要证 $\text{span}(S)$ 是子空间，需验证线性子空间的三个条件：

   - **非空性**：因为 $0 = 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + \cdots + 0\mathbf{v}_k$（其中 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \in S$），所以 $0 \in \text{span}(S)$，即 $\text{span}(S)$ 非空。
   - **对加法封闭**：任取 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \text{span}(S)$，则存在实数 $a_1, a_2, \ldots, a_k$ 和 $b_1, b_2, \ldots, b_k$（不妨设 $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$），使得

     $$\mathbf{u} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_k\mathbf{v}_k, \quad \mathbf{v} = b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + \cdots + b_k\mathbf{v}_k$$

     于是

     $$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (a_1 + b_1)\mathbf{v}_1 + (a_2 + b_2)\mathbf{v}_2 + \cdots + (a_k + b_k)\mathbf{v}_k$$

     这是 S 中向量的线性组合，故 $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \text{span}(S)$。

- **对数量乘法封闭**：任取 $\mathbf{u} \in \operatorname{span}(S)$ 和实数 λ，设 $\mathbf{u} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_k\mathbf{v}_k$，则

$$\lambda\mathbf{u} = (\lambda a_1)\mathbf{v}_1 + (\lambda a_2)\mathbf{v}_2 + \cdots + (\lambda a_k)\mathbf{v}_k$$

  这也是 S 中向量的线性组合，故 $\lambda\mathbf{u} \in \operatorname{span}(S)$。

综上，$\operatorname{span}(S)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间。

2. 设 V 是 $\mathbb{R}^m$ 的一个子空间，且 $S \subseteq V$。任取 $\mathbf{u} \in \operatorname{span}(S)$，则 $\mathbf{u}$ 可表示为 S 中向量的线性组合，即 $\mathbf{u} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_k\mathbf{v}_k$（$\mathbf{v}_i \in S \subseteq V$，$a_i \in \mathbb{R}$）。因为 V 是子空间，对加法和数量乘法封闭，所以 $a_1\mathbf{v}_1, a_2\mathbf{v}_2, \ldots, a_k\mathbf{v}_k \in V$，进而它们的和 $\mathbf{u} \in V$。因此，$\operatorname{span}(S) \subseteq V$，即 $\operatorname{span}(S)$ 中的向量都在 V 中。