《微积分A1》第十二讲

教师 杨利军

清华大学数学科学系

2025年10月29日

例: 当 $x \to +\infty$ 时, 可依照无穷大量级, 由小到大将如下函数 (无穷大量) 排列为 $\ln x, x^a, e^x, x^x$, 即后一个函数是前一个函数的高阶无穷大, 其中 $a > 0$. 证明如下.

(i) x^a 是 $\ln x$ 的高阶无穷大, 因为

$$\lim \frac{\ln x}{x^a} = \lim \frac{\frac{1}{x}}{ax^{a-1}} = \lim \frac{1}{ax^a} = 0.$$

(ii) e^x 是 x^a 的高阶无穷大. 理由如下. 假设 $n-1 \le a < n$, 则

$$\lim \frac{x^a}{e^x} = \lim \frac{ax^{a-1}}{e^x} = \cdots = a(a-1)\cdots(a-n+1)\lim \frac{x^{a-n}}{e^x} = 0.$$

(iii) x^x 是 e^x 的高阶无穷大, 因为

$$\lim \frac{e^x}{x^x} = \lim e^{x - x\ln x} = \lim e^{x(1-\ln x)} = 0.$$

例一：考虑 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\cot x}{x}\right)$.

解：这是 $\infty-\infty$ 型的极限. 将其转化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{*}{\infty}$ 型的极限.

$$\frac{1}{x^2}-\frac{\cot x}{x}=\frac{1}{x^2}-\frac{\cos x}{x\sin x}=\frac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x}$$

上式最右边的分式是 $\frac{0}{0}$ 型的不定式. 故可以使用 L'Hospital 法则. 但为了简化计算，可按如下方式将分母中的因子 $\sin x$ 用 x 替换：

$$\frac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x}=\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}.$$

以下用 L'Hospital 法则求极限 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}$：

$$\frac{[\sin x-x\cos x]'}{[x^3]'}=\frac{\cos x-\cos x+x\sin x}{3x^2}$$

$$=\frac{x\sin x}{3x^2}=\frac{1}{3}\frac{\sin x}{x}\to\frac{1}{3},\quad x\to 0.$$

因此极限 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\cot x}{x}\right)=\frac{1}{3}$. 解答完毕.

例二: 求极限 $\lim_{x\to 0^+} x^x$.

解: 这是 0^0 型极限. 将 x^x 写作 $x^x = e^{x\ln x}$. 再将 $x\ln x$ 写作 $x\ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$. 这是 $\frac{*}{\infty}$ 型极限. 可用 L'Hospital 法则求其极限.

$$\frac{[\ln x]'}{[\frac{1}{x}]'} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = -x \to 0, \quad x \to 0^+.$$

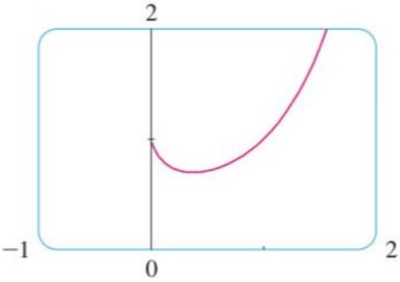
$$\text{故} \quad \lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim_{x\to 0^+} x\ln x} = e^0 = 1.$$

另解: 也可不用 L'Hospital 法则, 直接求极限 $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$.

$$x\ln x = \frac{-\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = -\frac{\ln y}{y} \to 0, \quad y \to +\infty,$$

其中 $y = \frac{1}{x}$. 因此原极限为 $\lim_{x\to 0^+} x^x = 1$. 解答完毕.

The graph of the function $y = x^x$, $x > 0$, is shown in Figure 7. Notice that although 0^0 is not defined, the values of the function approach 1 as $x \to 0^+$. This confirms the result of Example 10.



例三: 求极限 $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$.

解: 这是 $\infty-\infty$ 型极限. 化为 $\frac{0}{0}$ 型后, 可多次应用 L'Hospital 法则求得极限.

通分得

$$\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}=\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}$$

$$\frac{\left(x\ln x-x+1\right)'}{\left[(x-1)\ln x\right]'}=\frac{\ln x}{\frac{x-1}{x}+\ln x}=\frac{x\ln x}{x-1+x\ln x}$$

$$\frac{\left(x\ln x\right)'}{\left(x-1+x\ln x\right)'}=\frac{\ln x+1}{1+1+\ln x}\to\frac{1}{2},\quad x\to 1.$$

故原极限为 $\frac{1}{2}$.

L'Hospital 法则应用, 例四

例四: 求极限 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\tan x)^{\frac{\pi}{2}-x}$.

解: 这是 ∞^0 型极限. 先做变换 $y=\frac{\pi}{2}-x$, 则当 $x\to\frac{\pi}{2}^-$ 时, $y\to 0^+$. 于是

$$(\tan x)^{\frac{\pi}{2}-x}=\left[\tan\left(\frac{\pi}{2}-y\right)\right]^y=(\cot y)^y=\left(\frac{\cos y}{\sin y}\right)^y$$

令 $z=\left(\frac{\cos y}{\sin y}\right)^y$, 则

$$\ln z=y(\ln\cos y-\ln\sin y)=\frac{\ln\cos y-\ln\sin y}{\frac{1}{y}}.$$

这是 $\frac{*}{\infty}$ 型不定式. 可用 L'Hospital 法则:

$$\frac{(\ln\cos y-\ln\sin y)'}{\left(\frac{1}{y}\right)'}=\frac{-\frac{\sin y}{\cos y}-\frac{\cos y}{\sin y}}{-\frac{1}{y^2}}=\frac{y^2}{\sin y\cos y}\to 0,\quad y\to 0^+.$$

因此极限

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\tan x)^{\frac{\pi}{2}-x}=\lim_{y\to 0^+}\left(\frac{\cos y}{\sin y}\right)^y=\lim_{y\to 0^+}e^{\ln z}\to e^0=1.\quad \#$$

Example

例五: 设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上可导, $\lim_{x\to+\infty}[f'(x)+f(x)]=A$, 证明 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=A$ 且 $\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

证明: 将 $f(x)$ 写作 $f(x)=\frac{e^x f(x)}{e^x}$, 对后者可应用 L'Hospital 求极限:

$$\frac{\left[e^x f(x)\right]'}{(e^x)'}=\frac{e^x\left[f'(x)+f(x)\right]}{e^x}=f'(x)+f(x)\to A.$$

因此 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=A$. 进一步得 $f'(x)=[f'(x)+f(x)]-f(x)\to A-A=0$. □

例六

Example

例六: 设 $\varepsilon > 0$, 求极限 $\lim_{x\to 0^+} x^\varepsilon \ln x$

解:

$$\lim x^\varepsilon \ln x = \lim \frac{\ln x}{x^{-\varepsilon}} = \lim \frac{\frac{1}{x}}{-\varepsilon x^{-\varepsilon-1}} = \lim \frac{x^\varepsilon}{-\varepsilon} = 0.$$

注: 上述极限 $\lim_{x\to 0^+} x^\varepsilon \ln x = 0$ 可与极限 $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\varepsilon} = 0$ 相比较. 粗略地说, 对于任意 $\varepsilon > 0$,

(i) 当 $x \to +\infty$, $\ln x$ 是 x^ε 的低阶无穷大;

(ii) 当 $x \to 0^+$, $\ln x$ 是 $\frac{1}{x^\varepsilon}$ 的低阶无穷大.

例七：求极限 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

解：记 $y=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$，则

$$\lim \ln y=\lim \frac{\ln \frac{\sin x}{x}}{x^2}=\lim \frac{\ln|\sin x|-\ln|x|}{x^2}$$

$$=\lim \frac{\left(\ln|\sin x|-\ln|x|\right)'}{(x^2)'}=\lim \frac{\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}}{2x}$$

$$=\lim \frac{x\cos x-\sin x}{2x^2\sin x}=\lim \frac{x}{2\sin x}\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}$$

$$=\frac{1}{2}\lim \frac{\left(x\cos x-\sin x\right)'}{(x^3)'}=\frac{1}{2}\lim \frac{-x\sin x}{3x^2}=-\frac{1}{6}.$$

因此原极限为 $e^{-1/6}$.　　#

一. L'Hospital 法则不能用于非不定式极限

例: 极限 $\lim_{x\to 1}\frac{x}{1+x}=\frac{1}{2}$. 这是正常极限, 非不定式情形. 若用 L'Hospital 法则, 则得到错误的结论

$$\frac{[x]'}{[1+x]'}=\frac{1}{1}\to 1,\quad x\to 1.$$

二. 使用 L'Hospital 法则可能出现死循环.

例:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\frac{1}{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}=\lim\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$$

$$=\lim\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{1}=\lim\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\quad \text{死循环!}$$

实际上无需使用L'Hospital 法则就可求出极限为 1.

三. 极限 $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在 $\not\Rightarrow$ 极限 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ 不存在.

例: 极限 $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{2x-\sin x}$ 存在且等于 $\frac{1}{2}$. 但

$$\frac{(x+\sin x)'}{(2x-\sin x)'}=\frac{1+\cos x}{2-\cos x} \quad \text{极限不存在,} \quad x\to+\infty.$$

导数的介值性质

Theorem

定理 [Darboux, 1842-1917]: 设 $f(x)$ 在开区间 J 上可导, 设 $a, b \in J$, $a < b$. 若 $f'(a) \neq f'(b)$, 则对任意介于 $f'(a)$ 和 $f'(b)$ 之间的值 γ, 存在 $c \in (a, b)$, 使得 $f'(c) = \gamma$.

注: 如果导函数 $f'(x)$ 在区间 J 上连续, 那么根据连续函数的介值性立刻得到定理的结论. Darboux 定理表明, 即使导数 $f'(x)$ 不连续, $f'(x)$ 仍然具有介值性. 根据 Darboux 定理可知, 不存在可导函数, 其导数为 Dirichlet 函数 $D(x)$. 因为函数 $D(x)$ 不具有介值性.

导函数可以不连续，例子

Example

例：令

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

易见 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上处处可导. 因为对于 $x \neq 0$, $f(x)$ 显然可导, 且 $f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$, 而在点 $x = 0$ 处, $f(x)$ 也可导, 且 $f'(0) = 0$. 因为

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{x} = x\sin\frac{1}{x} \to 0, \quad x \to 0.$$

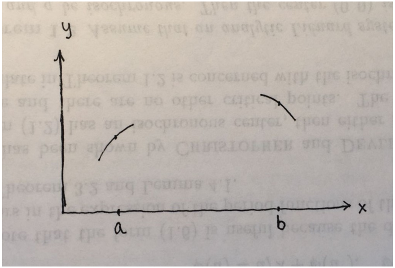
因此

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

显然极限 $\lim_{x\to 0} f'(x)$ 不存在, 故 $x = 0$ 是导函数 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处间断.

证明. 情形一：$f'(a)$ 和 $f'(b)$ 异号，且 $\gamma = 0$. 不妨设 $f'(a) > 0$, $f'(b) < 0$. 要证存在 $c \in (a, b)$, 使得 $f'(c) = 0$. 此时可断言存在 $\delta > 0$, 使得

$$f(x) > f(a), \quad \forall x \in (a, a+\delta),$$
$$f(x) > f(b), \quad \forall x \in (b-\delta, b).$$



证明，续

理由如下．由于
$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)>0,$$
及极限的保号性知存在 $\delta_1>0$，使得对于 $\forall x\in(a,a+\delta_1)$，$f(x)>f(a)$．同理存在 $\delta_2>0$，使得对于 $\forall x\in(b-\delta_2,b)$，$f(x)>f(b)$．取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则断言成立．故函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 内部取得最大值，即 f 在某点 $c\in(a,b)$ 取得最大值．根据 Fermat 定理知 $f'(c)=0$．

情形二．一般情形 $f'(a)\neq f'(b)$，且 γ 是任意一个介于 $f'(a)$ 和 $f'(b)$ 之间的一个数．令 $g(x)=f(x)-\gamma x$，则 $g'(a)=f'(a)-\gamma$ 和 $g'(b)=f'(b)-\gamma$ 异号，由情形一的结论知存在 $c\in(a,b)$，使得 $g'(c)=0$．此即 $f'(c)=\gamma$．定理得证．

(i) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左右导数定义为

$$\text{左导数}\quad f'_-(x_0) \overset{\text{def}}{=} \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

$$\text{右导数}\quad f'_+(x_0) \overset{\text{def}}{=} \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

(ii) 设函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 处处可导，$x_0 \in (a,b)$，那么导函数 $f'(x)$ 在点 x_0 处的左右极限定义为

$$f'(x_0^-) \overset{\text{def}}{=} \lim_{x\to x_0^-} f'(x), \quad f'(x_0^+) \overset{\text{def}}{=} \lim_{x\to x_0^+} f'(x),$$

其中左右极限均假设存在.

Theorem

定理: (i) 设 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上连续, 除点 $x_0 \in (a,b)$ 外处处可导. 若极限 $\lim_{x\to x_0} f'(x)$ 存在, 记作 A, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, 且导数 $f'(x_0) = A$. 换言之, 导函数 $f'(x)$ 没有可去间断点.

(ii) 设 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上处处可导. 对于 $\forall x_0 \in (a,b)$, 若右极限 $f'(x_0^+)$ 存在, 则 $f'(x_0^+) = f'(x_0)$, 即导数 $f'(x)$ 在 x_0 处右连续; 若左极限 $f'(x_0^-)$ 存在, 则 $f'(x_0^-) = f'(x_0)$, 即导数 $f'(x)$ 在 x_0 处左连续. 换言之, 导函数 $f'(x)$ 没有跳跃间断点.

注: 参见课本第 95 页习题 4.2 题 15.

证(i). 对 $x \neq x_0$, 由 Lagrange 中值定理得

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(\xi) \to A, \quad x \to x_0.$$

因此 $f(x)$ 在 x_0 处可导.

证(ii). 对 $x > x_0$, 由 Lagrange 中值定理得

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(\xi) \to f'(x_0^+), \quad x \to x_0^+.$$

另一方面, 由定义知上述差商的极限等于 $f'(x_0)$. 因此 $f'(x)$ 在 x_0 处右连续.

同理对 $x < x_0$,

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(\xi) \to f'(x_0^-), \quad x \to x_0^-.$$

因此 $f'(x)$ 在 x_0 处左连续. 定理得证. □

例: 定义函数

$$f(x)=\begin{cases}(1+x)^{\frac{1}{x}}, & 0<|x|<1,\\ e, & x=0,\end{cases}$$

以下说明对 $f(x)$ 而言，上述定理结论 (i) 成立，即证明 (1) $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导，(2) 极限 $\lim_{x\to 0} f'(x)$ 存在，且极限为 $f'(0)$.

解: 先证明 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导，并计算出导数 $f'(0)$. 然后计算出极限 $\lim_{x\to 0} f'(x)$. 看看极限是否为 $f'(0)$. (1) 按定义证明 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导. 对 $x\neq 0$，考虑

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}.$$

这是 $\frac{0}{0}$ 型极限．可使用 L'Hospital 法则求这个极限：

$$\frac{\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}-e\right]'}{(x)'}=\left[e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}-e\right]'=e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)\right]'$$

$$=e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}\cdot\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}.$$

显然极限 $\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}=e$．考虑第二个因子的极限，并使用 L'Hospital 法则求之：

$$\frac{\left[x-(1+x)\ln(1+x)\right]'}{\left[x^2(1+x)\right]'}=\frac{-\ln(1+x)}{2x+3x^2}\to-\frac{1}{2},\quad x\to 0.$$

故 $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\to-\frac{e}{2}$．此即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)=-\frac{e}{2}$．

(2) 求极限 $\lim_{x\to 0} f'(x)$. 对于 $x \neq 0$,

$$f'(x) = \left[e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}\right]' = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)\right]'.$$

$$= e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} \cdot \frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}.$$

在 (1) 中已经计算了上述函数当 $x \to 0$ 的极限为 $-\frac{e}{2}$. 这表明

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = -\frac{e}{2} = f'(0).$$

也就是说，对于函数 $f(x)$ 以及点 $x = 0$，上述定理结论(i)成立. 解答完毕.

导函数可以有第二类间断点, 例子

Example

例: 考虑

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

我们已经说明 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上处处可导. 对于 $x\neq 0$, $f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$, 而在点 $x=0$ 处 $f(x)$ 也可导, 且 $f'(0)=0$. 但导函数 $f'(x)$ 在 $x=0$ 的左右极限都不存在. 这说明 $f'(x)$ 在点 $x=0$ 处间断, 且是第二类间断.

当 $f(x)$ 在点 x_0 处可导时，$f(x)$ 在 x_0 附近可表为

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0).$$

这表明以线性函数 $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ 代替函数 $f(x)$ 的误差为 $o(x - x_0)$. 假设 $f''(x_0)$ 存在，函数 $f(x)$ 可否用 $(x - x_0)$ 的二次多项式逼近，并且逼近的阶为二，即

$$f(x) = A + B(x - x_0) + C(x - x_0)^2 + o(x - x_0)^2.$$

假设上式成立. 那么常数 A, B, C 应该如何选取？在上式中令 $x = x_0$ 即得 $A = f(x_0)$. 将 $A = f(x_0)$ 带入上式，并两边同时除以 $x - x_0$ 得

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=B+C(x-x_0)+o(x-x_0).$$

由于 $f(x)$ 在 x_0 处可导，故令 $x\to x_0$ 即得

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=B.$$

于是

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+C(x-x_0)^2+o(x-x_0)^2.$$

上式表明常数 C 可表为

$$C=\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{(x-x_0)^2}+\frac{o(x-x_0)^2}{(x-x_0)^2}.$$

由 L'Hospital 法则得，

$$C = \lim_{x \to x_0} \frac{[f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)]'}{[(x - x_0)^2]'}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{2(x - x_0)} = \frac{1}{2} f''(x_0).$$

这样我们证明了存在唯一一个二次多项式

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2,$$

在 x_0 附近，可以二阶逼近函数 $f(x)$.

Theorem

定理 (带 Peano 余项的 Taylor 公式): 设 $f(x)$ 在 (x_0-r, x_0+r) 上定义. 若 $f^{(n)}(x_0)$ 存在, 则 $f(x)$ 可表为 $f(x) = T_n(x) + o(x-x_0)^n$, 其中

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Definition

定义: (i) 定理中的多项式 $T_n(x)$ 称为 $f(x)$ 在点 x_0 处的 n 阶(次) Taylor 多项式. (ii) 函数 $f(x)$ 的表达式 $f(x) = T_n(x) + o(x-x_0)^n$, 称为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处, 带 Peano 余项的 n 阶 Taylor 展式, 高阶无穷小量 $o(x-x_0)^n$ 称为 Peano 余项.

注记

注一：上述 Taylor 展式表明，当 $f^{(n)}(x_0)$ 存在时，以 n 次 Taylor 多项式代替 $f(x)$ 时的误差为 $o(x-x_0)^n$.

注二：Taylor 多项式 $T_n(x)$ 有时也写作 $T_n(f,x)$ 或 $T_n(f,x,x_0)$，以强调 Taylor 多项式关于函数 f 以及展开点 x_0 的依赖关系.

注三：条件 $f^{(n)}(x_0)$ 存在意味着 $f(x)$ 的各低阶导数 $f^{(k)}(x)$，$0 \leq k \leq n-1$，在某个邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 上处处存在. 特别当我们说函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，或 $f'(x_0)$ 存在时，一个不言自明的假设是 $f(x)$ 在一个邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 上有定义.

Maclaurin 展式

Definition

定义：函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处的 Taylor 展式

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n).$$

又称作 Maclaurin 展式

指数函数 $f(x) = e^x$ 在实轴上无穷次可微，满足 Taylor 展式的条件，且 $f^{(k)}(x) = [e^x]^{(k)} = e^x$，故 $f^{(k)}(0) = 1$, $k \geq 1$. 因此指数函数 e^x 的 n 阶 Maclaurin 展式为

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n).$$

指数函数 e^x 的前三个 Taylor 多项式如下

$$T_1(x) = 1 + x, \quad T_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2, \quad T_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3.$$

函数 e^x 的 Taylor 多项式逼近图示

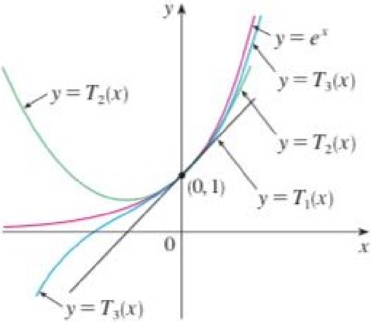


FIGURE 1

As n increases, $T_n(x)$ appears to approach e^x in Figure 1. This suggests that e^x is equal to the sum of its Taylor series.

记 $f(x) = \sin x$，则

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sin x, & f(0) &= 0, \\
f'(x) &= \cos x, & f'(0) &= 1, \\
f''(x) &= -\sin x, & f''(0) &= 0, \\
f'''(x) &= -\cos x, & f'''(0) &= -1, \\
f^{(4)}(x) &= \sin x, & f^{(4)}(0) &= 0.
\end{aligned}
$$

注意导数已经出现了循环，即 $f^{(4n+k)}(x) = f^{(k)}(x)$，$k = 0, 1, 2, 3$. 因此我们不难写出函数 $\sin x$ 的 Maclaurin 展式

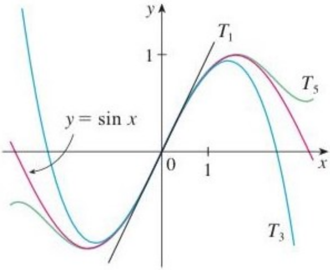
$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}).$$

函数 $\sin x$ 的 Taylor 多项式逼近图示

函数 $\sin x$ 的前几个 Taylor 多项式如下

$$T_1(x) = x,\ T_3(x) = x - \frac{1}{3!}x^3,\ T_5(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5,$$

注意 $T_2(x) = T_1(x)$, $T_4(x) = T_3(x)$, $T_6(x) = T_5(x)$.



$\cos x$ 的 Maclaurin 展式

类似对 $\sin x$ 的处理，我们可以构造 $\cos x$ 的 Maclaurin 展式. 不过根据关系式 $\cos x = [\sin x]'$，我们可以更加快捷得到 $\cos x$ 的 Maclaurin 展式如下

$$\cos x = (\sin x)' = \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})\right)'$$

$$= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}),$$

这里用到了结论 $[o(x^{2n+1})]' = o(x^{2n})$. (见下页说明). 由 Taylor 展式的唯一性(稍后介绍)知，上式就是函数 $\cos x$ 的 Maclaurin 展式.

注: 以下我们来说明展式 $\sin x = T_{2n+1}(x) + o(x^{2n+1})$ 中的 $o(x^{2n+1})$ 满足 $[o(x^{2n+1})]' = o(x^{2n})$. 令

$$h(x) = \begin{cases} \frac{\sin x - T_{2n+1}(x)}{x^{2n+1}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

利用 L'Hosptial 法则, 不难证明 $h(x)$ 是 C^∞. 于是

$$[o(x^{2n+1})]' = [x^{2n+1}h(x)]'$$

$$= x^{2n}[(2n+1)h(x) + xh'(x)] = o(x^{2n}).$$

我们来求函数 $f(x) = \arctan x$ 的 Maclaurin 展式，为此我们需要计算各阶导数 $f^{(k)}(0)$, $k = 1, 2, \cdots$. 对 $f(x) = \arctan x$ 求导得

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{或} \quad (1+x^2)f'(x) = 1.$$

由此得 $f'(0) = 1$. 进一步关于上面第二个等式取 n 阶导数，并利用求高阶导数的 Leibniz 公式得

$$(1+x^2)f^{(n+1)}(x) + 2nxf^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) = 0.$$

将 $x = 0$ 代入上式得

$$f^{(n+1)}(0) = -n(n-1)f^{(n-1)}(0), \quad \forall n \geq 1.$$

由此得

$\arctan x$ 的 Maclaurin 展式，续一

$$
\begin{aligned}
f^{(1)}(0) &= 1,\\
f^{(2)}(0) &= -1(1-1)f(0) = 0,\\
f^{(3)}(0) &= -2(2-1)f'(0) = -2,\\
f^{(4)}(0) &= -3(3-1)f^{(2)}(0) = 0,\\
&\vdots\\
f^{(2n)}(0) &= 0,\\
f^{(2n+1)}(0) &= (-1)^n(2n)!.
\end{aligned}
$$

于是我们得到所求的 Maclaurin 展式

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + o(x^{2n+1}).$$

$\arctan x$ 的 Maclaurin 展式，续二

注：稍后我们将证明如下展式成立

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n}). \quad (**)$$

对式 (**) 两边积分，从 0 到 x，即得

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$$

$$= \int_0^x dt - \int_0^x t^2 dt + \int_0^x t^4 dt + \cdots + (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt + o(x^{2n+1})$$

$$= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}).$$

于是我们再次得到 $\arctan x$ 的 Maclaurin 展式.

$\sin x$ 在点 $\frac{\pi}{3}$ 处的 Taylor 展式

记 $f(x)=\sin x$，则

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sin x, & f(\tfrac{\pi}{3}) &= \tfrac{\sqrt{3}}{2}, \\
f'(x) &= \cos x, & f'(\tfrac{\pi}{3}) &= \tfrac{1}{2}, \\
f''(x) &= -\sin x, & f''(\tfrac{\pi}{3}) &= -\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \\
f'''(x) &= -\cos x, & f'''(\tfrac{\pi}{3}) &= -\tfrac{1}{2}, \\
f^{(4)}(x) &= \sin x, & f^{(4)}(\tfrac{\pi}{3}) &= \tfrac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}
$$

导数同样出现了循环. 函数 $\sin x$ 在点 $\frac{\pi}{3}$ 处的 Taylor 展式

$$
\sin x = f(\frac{\pi}{3}) + \frac{f'(\frac{\pi}{3})}{1!}(x-\frac{\pi}{3}) + \frac{f''(\frac{\pi}{3})}{2!}(x-\frac{\pi}{3})^2
$$

$$
+\cdots+\frac{f^{(n)}(\frac{\pi}{3})}{n!}(x-\frac{\pi}{3})^n + o(x-\frac{\pi}{3})^n
$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{1!}(x-\frac{\pi}{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2!}(x-\frac{\pi}{3})^2 - \frac{1}{2}\frac{1}{3!}(x-\frac{\pi}{3})^3$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(\frac{\pi}{3})}{n!}(x-\frac{\pi}{3})^n + o(x-\frac{\pi}{3})^n,$$

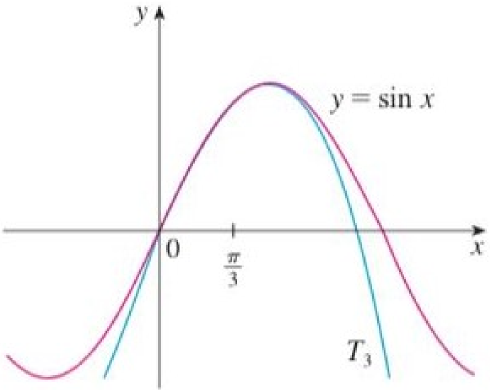
其中 $f^{(n)}(\frac{\pi}{3})$ 根据 $n=4k+r$ 的余数 $r=0,1,2,3$ 分别取值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{2}$. 函数 $\sin x$ 在点 $\frac{\pi}{3}$ 处的前三项 Taylor 多项式分别为

$$T_1(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2\cdot 1!}(x-\frac{\pi}{3}),$$

$$T_2(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2\cdot 1!}(x-\frac{\pi}{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2\cdot 2!}(x-\frac{\pi}{3})^2,$$

$$T_3(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2\cdot 1!}(x-\frac{\pi}{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2\cdot 2!}(x-\frac{\pi}{3})^2 - \frac{1}{2\cdot 3!}(x-\frac{\pi}{3})^3$$

三阶 Taylor 多项式逼近图示



Theorem

定理 (带 Peano 余项的 Taylor 公式)：设 $f(x)$ 在 (x_0-r, x_0+r) 上定义．若 $f^{(n)}(x_0)$ 存在，则 $f(x)$ 可表为 $f(x)=T_n(x)+o(x-x_0)^n$，其中

$$T_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

证：要证展式 $f(x)=T_n(x)+o(x-x_0)^n$，即要证

$$\frac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^n}\to 0,\quad x\to x_0.$$

以下用归纳法证．情形 $n=1$:

$$\frac{f(x)-T_1(x)}{x-x_0}=\frac{f(x)-\left[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\right]}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0).$$

当 $x \to x_0$ 时，上式趋于零．结论成立．假设命题对正整数 n 成立，即当 $f^{(n)}(x_0)$ 存在时，等式

$$\frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^n} \to 0, \quad x \to x_0.$$

考虑 $n + 1$ 情形．假设 $f^{(n+1)}(x_0)$ 存在，要证

$$\frac{f(x) - T_{n+1}(x)}{(x - x_0)^{n+1}} \to 0, \quad x \to x_0.$$

注意 $T'_{n+1}(x) = T'_{n+1}(f, x) = T_n(f', x)$．例如当 $n = 3$ 时，

$$T_3(f, x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x - x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2!} + \frac{f'''(x_0)(x - x_0)^3}{3!}.$$

于是 $T'_3(f, x) = f'(x_0) + \dfrac{f''(x_0)(x - x_0)}{1!} + \dfrac{f'''(x_0)(x - x_0)^2}{2!} = T_2(f', x).$

证明，续二

由于极限函数 $\frac{f(x)-T_{n+1}(x)}{(x-x_0)^{n+1}}$ 为 $\frac{0}{0}$ 型的，可应用 L'Hospital 法则求极限得

$$\frac{\Big[f(x)-T_{n+1}(x)\Big]'}{\Big[(x-x_0)^{n+1}\Big]'} = \frac{f'(x)-T'_{n+1}(x)}{(n+1)(x-x_0)^n} = \frac{1}{n+1}\,\frac{f'(x)-T_n(f',x)}{(x-x_0)^n} \xrightarrow{(*)} 0,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f(x)-T_{n+1}(x)}{(x-x_0)^{n+1}} \to 0, \quad x \to x_0,$$

即情形 $n+1$ 时，结论成立. □

注: 极限式 (*) 之所以成立，是因为对导函数 $f'(x)$ 应用关于 n 的归纳假设.

习题一：课本第94页习题4.1题6：设 (i) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续；(ii) 在 (a,b) 上可导；(iii) $f(a)=f(b)$；(vi) $f(x)$ 不是常数函数，证明存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)>0$.

习题二：课本第94页习题4.1题7:

设 (i) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续；(ii) 在 (a,b) 上二阶可导；(iii) $f(a)=f(b)=0$；(vi) 存在 $c\in(a,b)$，使得 $f(c)>0$；证明存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)<0$.

习题三：课本第94页习题4.1题8(1)：证明下列恒等式

$$\arctan x+\operatorname{arccot} x=\frac{\pi}{2},\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

习题四：课本第95页习题4.1题9：证明下列不等式:

(1) $|\sin x-\sin y|\le|x-y|,\ \forall x\in\mathbb{R},$

(2) $|\arctan x-\arctan y|\le|x-y|,\ \forall x\in\mathbb{R};$

作业，续一

(4) $py^{p-1}(x-y) \le x^p - y^p \le px^{p-1}(x-y)$, $0 < y < x$, $p > 1$.

习题五：课本第95页习题4.1题10：设 (i) 函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续；(ii) 在 $(0,1)$ 上可导；(iii) $f(0)=0$, $f(1)=1$; (iv) $f(x)$ 不恒等于函数 x，证明存在 $\xi \in (0,1)$，使得 $f'(\xi) > 1$.

习题六：课本第95页习题4.1题11：证明广义 Rolle 定理：

(1) 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上可导，极限 $\lim_{x\to a^+} f(x)$ 和 $\lim_{x\to b^-} f(x)$ 均存在且相等，则存在 $\xi \in (a,b)$，使得 $f'(\xi) = 0$.

(2) 设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上可导，极限 $\lim_{x\to a^+} f(x)$ 和 $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 均存在且相等，则存在 $\xi \in (a,+\infty)$，使得 $f'(\xi) = 0$.

注：若将 (2) 中的区间 $(a,+\infty)$ 改为 $(-\infty,a)$ 或 $(-\infty,+\infty)$，其他条件保持不变，则结论仍然成立.

习题七：课本第95页习题4.1题12：设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导，且满足

$$\lim_{|x|\to+\infty}\frac{f(x)}{|x|}=+\infty.$$

证明对任意 $a\in\mathbb{R}$，存在 $\xi\in\mathbb{R}$，使得 $f'(\xi)=a$.

习题八：课本第95页习题4.1题13：设函数 $f(x)$, $g(x)$ 和 $h(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，证明存在点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) \end{vmatrix}=0.$$

习题九：课本第95页习题4.1题16：设 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上可导．若 $\lim_{x\to-\infty}f'(x)=A>0$，证明 $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

习题十：课本第100页习题4.2题2：利用 L'Hospital 法则求下列函数极限：

(1) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1-\cos x)}{\ln x}$;

(3) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1+2\cos x}-1}{x-\frac{\pi}{2}}$;

(5) $\lim_{x\to \frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{(\arcsin x)^2-\frac{\pi^2}{16}}{2x^2-1}$;

(7) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\alpha x)-\cos(\beta x)}{\ln(1+x^2)}$;

(9) $\lim_{x\to +\infty}(x-\sqrt{x^2+x})$;

(11) $\lim_{x\to 0}\left(\cot x-\frac{1}{x}\right)$;

(13) $\lim_{x\to 1}(x-1)\tan\frac{\pi x}{2}$;

(15) $\lim_{x\to +\infty}(\pi-2\arctan x)\ln x$;

(17) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{x}-1\right)^{\tan x}$;

(19) $\lim_{|x|\to +\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2}$.

习题十一：课本第101页习题4.2题3：设 $f(x)$ 二阶可导，求极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}.$$

习题十二：课本第101页习题4.2题4：设 $f(x)$ 可导且 $f(0)=f'(0)=1$，求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin x)-1}{\ln f(x)}.$$