本次习题课主要讨论广义积分的计算及其收敛性判定. 具体有四方面的内容:

一. 广义积分计算

二. 广义积分的收敛性判定

三. 计算 Froullani (伏如兰尼)广义积分

四. 证明概率积分(也称 Euler-Poisson 积分)

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

两点说明:

(1) 为了判断广义积分 $J = \int_a^b f(x)dx$ 的收敛性, 其中 $x = a$ 或者 $x = b$ 是唯一一个有限或无限瑕点, 我们常常将被积函数 $f(x)$ 作分解 $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, 使得广义积分 $J_1 = \int_a^b f_1(x)dx$ 和 $J_2 = \int_a^b f_2(x)dx$ 的收敛性比较容易判断. 根据积分 J_1 和 J_2 的收敛性, 我们可以确定积分 J 的收敛性. 具体有如下结论:

(i) 如果积分 J_1 和 J_2 都收敛, 则积分 J 也收敛.

(ii) 如果积分 J_1 和 J_2 中, 一个收敛, 一个发散, 则积分 J 发散. 例: 根据广义积分的分解式

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{2x}dx - \int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x}dx,$$

可知左边积分发散, 因为右边第一个积分发散, 第二个积分收敛.

(iii) 如果两个积分 J_1 和 J_2 都发散, 则积分 J 收敛性尚不能确定. 此时只能说分解式 $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ 不管用.

(2) 对于正常积分, 积分 $\int_a^b f(x)dx$ 存在意味着 $\int_a^b |f(x)|dx$ 存在, 反之不然. 而对于广义积分情形则刚好相反, 广义积分 $\int_a^b |f(x)|dx$ 存在(收敛)意味着 $\int_a^b f(x)dx$ 存在(收敛), 反之不然.

一. 计算下列广义积分

注: 我们主要考虑如何计算以下广义积分, 积分收敛性不难证明, 故略去. 但同学们自己作为练习应该考虑.

题 1. 计算广义积分 $J=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}$

解: 注意当 $x\geq 1$ 时, $\frac{1}{1+x^3}\leq\frac{1}{1+x^2}$, 由此可以判断所求广义积分收敛. 为计算积分这个积分, 可以利用有理函数积分方法计算, 即先分解分母 $1+x^3=(1+x)(1-x+x^2)$, 得到如下分解式

$$\frac{1}{1+x^3}=\frac{A}{1+x}+\frac{Bx+C}{1-x+x^2},$$

然后确定系数 A,B,C. 再计算右边两个有理函数的积分. 这种方法比较繁琐. 下述解法比较简单.

另解: 先将积分分成两个部分 $\int_0^{+\infty}=\int_0^1+\int_1^{+\infty}$. 对第二个积分作变量代换 $x=\frac{1}{t}$

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}=\int_1^0\frac{\frac{-1}{t^2}dt}{1+\frac{1}{t^3}}=\int_0^1\frac{tdt}{1+t^3}.$$

于是原积分化为正常积分, 即

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}=\int_0^1\frac{1+t}{1+t^3}dt=\int_0^1\frac{dt}{1-t+t^2}=\int_0^1\frac{d(t-\frac{1}{2})}{(t-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$$

$$=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\arctan\frac{t-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\Bigg|_0^1=\frac{2}{\sqrt{3}}\Big(\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}-\arctan\frac{-1}{\sqrt{3}}\Big)=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

解答完毕.

题 2. 计算广义积分 $J=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$, 其中 $\alpha>0$.

解: 将积分 J 分成两个部分 $J=J_1+J_2$, 其中

$$J_1=\int_0^1\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)},\quad J_2=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}.$$

对积分 J_1 作变换 $x=\frac{1}{t}$ 得

$$J_1=\int_{+\infty}^1\frac{-t^\alpha dt}{(t^2+1)(t^\alpha+1)}=\int_1^{+\infty}\frac{t^\alpha dt}{(t^2+1)(t^\alpha+1)}.$$

因此

$$J = J_1 + J_2 = \int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha dt}{(x^2+1)(x^\alpha+1)} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^\alpha+1)} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{4}.$$

解答完毕. 注: 积分值与参数 α 无关.

题 3. 计算广义积分 $J = \int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4} dx$.

解法一: 按有理函数不定积分的标准方法积分. 先将分式函数分解为最简分式

$$\frac{1+x^2}{1+x^4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}x+x^2} + \frac{1}{1-\sqrt{2}x+x^2}\right).$$

于是

$$\int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4} dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+\sqrt{2}x+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1-\sqrt{2}x+x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^{+\infty} \frac{d(x+\frac{\sqrt{2}}{2})}{(x+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2} + \int_0^{+\infty} \frac{d(x-\frac{\sqrt{2}}{2})}{(x-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\arctan\frac{x+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \arctan\frac{x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

解法二: 作变量代换 $t = x - \frac{1}{x}$ (注: 这个变换有点怪异, 一般人很难想到. 但微积分中这样的特别技巧并不是很多, 我们最好都能记住), 则 $dt = (1+\frac{1}{x^2})dx$, 或 $dx = \frac{x^2 dt}{1+x^2}$, 且当 $x \to 0^+$ 时, $t \to -\infty$, 当 $x \to +\infty$ 时, $t \to +\infty$. 因此

$$\int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4} \frac{x^2}{1+x^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dt}{1+x^4},$$

其中 $x = x(t) = \frac{1}{2}(t+\sqrt{t^2+4})$, 由方程 $t = x - \frac{1}{x}$ 确定. 注意 $t^2 = (x-\frac{1}{x})^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2$. 于是

$$\frac{x^2}{x^4+1} = \frac{1}{x^2+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{t^2+2}.$$

因此
$$\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{t^2+2}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$
解答完毕.

二. 判断广义积分的收敛性

题 4. 判断广义积分 $J=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx$ 的收敛性, 其中 $p>0$.

解: 积分 J 既有限瑕点 $x=0$, 又有无穷瑕点 $x=+\infty$, 是混合型的广义积分, 需要分开处理. 记 $J=J_1+J_2$, 其中
$$J_1=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx,\quad J_2=\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx.$$
广义积分 J 收敛, 当且仅当 J_1 和 J_2 均收敛.
(1) 积分 J_1 收敛, 当且仅当 $p<2$. 证明如下. 在瑕点 $x=0$ 附近
$$\frac{\ln(1+x)}{x^p}\sim\frac{1}{x^{p-1}},\quad x\to 0^+,$$
所以广义积分
$$J_1=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx$$
收敛, 当且仅当广义积分
$$\int_0^1\frac{dx}{x^{p-1}}$$
收敛, 即当且仅当 $p<2$.
(2) 积分 J_2 收敛, 当且仅当 $p>1$. 当 $p>1$ 时, 可取 $\varepsilon\in(0,1)$ 充分小, 使得 $p-\varepsilon>1$. 由于
$$\frac{\ln(1+x)}{x^p}\Big/\frac{1}{x^{p-\varepsilon}}=\frac{\ln(1+x)}{x^{\varepsilon}}\to 0,\quad x\to+\infty,$$
且积分
$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{p-\varepsilon}}dx$$

收敛, 根据比较判别法的极限形式知

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^p} dx$$

收敛. 当 $p \leq 1$ 时, 由于

$$\frac{\ln(1+x)}{x^p} \Big/ \frac{1}{x} = x^{1-p} \ln(1+x) \to +\infty, \quad x \to +\infty,$$

故存在 $M > 1$, 使得

$$\frac{\ln(1+x)}{x^p} \geq \frac{1}{x}, \quad \forall x \geq M.$$

由于积分 $\int_M^{+\infty} \frac{dx}{x}$ 发散, 故根据比较判别法知积分

$$\int_M^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^p} dx$$

发散, 从而积分 J_2 发散. 综上知, 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^p} dx$ 收敛, 当且仅当 $1 < p < 2$.

题 5. 判断广义积分 $J = \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^\beta} dx$ 的收敛性, 其中 $\beta > 0$.

解: 将积分 J 分成两个部分 $J = J_1 + J_2$, 其中

$$J_1 = \int_0^1 \frac{x^\alpha}{1+x^\beta} dx, \quad J_2 = \int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^\beta} dx.$$

积分 J 收敛, 当且仅当积分 J_1 和 J_2 均收敛.

(1) 显然积分 J_1 收敛, 当且仅当 $\int_0^1 x^\alpha dx$ 收敛, 当且仅当 $\alpha > -1$.

(2) 由于

$$\frac{x^\alpha}{1+x^\beta} \sim \frac{1}{x^{\beta-\alpha}}, \quad x \to +\infty,$$

并且积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\beta-\alpha}}$$

收敛, 当且仅当 $\beta - \alpha > 1$, 即 $\beta > 1 + \alpha$ 故积分 J 当且仅当 $\alpha > -1$ 且 $\beta > 1 + \alpha$ 积分.

解答完毕.

题 6. 判断广义积分 $J=\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^p}dx$ 的收敛性, (课本第 206 页第六章复习题题 2(1)).

解: 先考虑积分在有限瑕点 $x=0$ 处的收敛性. 我们将被积函数写作

$$\frac{\sin^2 x}{x^p}=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{x^{p-2}}.$$

由此可见积分 J 在瑕点 $x=0$ 处的收敛, 当且仅当 $p-2<1$, 即 $p<3$. 我们再来考虑积分在无穷瑕点 $x=+\infty$ 处的收敛性. 我们将被积函数写作

$$\frac{\sin^2 x}{x^p}=\frac{1}{2x^p}-\frac{\cos 2x}{2x^p}.$$

显然积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{2x^p}$$

收敛, 当且仅当 $p>1$. 而积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x^p}dx$$

收敛, 当且仅当 $p>0$ (利用 Dirichlet 判别法). 由此可知积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^p}dx$$

收敛, 当且仅当 $p>1$. 综上所述积分 J 收敛, 当且仅当 $1<p<3$. 解答完毕.

题 7. 判断广义积分 $J=\int_1^{+\infty}x\cos(x^3)dx$ 的收敛性 (课本第 206 页题9(2)).

解: 对积分作变量替换 $y=x^3$ 得

$$\int_1^A x\cos(x^3)dx=\frac{1}{3}\int_1^{A^3}\frac{\cos y}{y^{\frac{1}{3}}}dy.$$

由此可见积分 J 为条件收敛. 解答完毕.

注: 对于无穷区间的广义积分而言, 积分收敛, 并不意味着被积函数有界, 当然更遑论被积函数有趋向于零的极限.

题 8. 判断广义积分 $J=\int_0^{+\infty}\sin x\sin\frac{1}{x}dx$ 的收敛性 (课本第 206 页第六章复习题题3).

解: 注意被积函数没有有限瑕点. 故只需考虑积分在无穷瑕点处的收敛性. 显然函数 $\sin x$ 的变上限积分有界, 而函数 $\sin\frac{1}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调减趋于 0. 根据 Dirichlet 判别法可知积分收敛.

我们进一步讨论积分的绝对收敛性. 注意当 $x\to+\infty$ 时, $\sin\frac{1}{x}\sim\frac{1}{x}$, 因此存在 $A>0$, 使得当 $x\geq A$ 时, $\sin\frac{1}{x}\geq\frac{1}{2x}$. 于是我们有估计

$$\left|\sin x\sin\frac{1}{x}\right|\geq\frac{|\sin x|}{2x}\geq\frac{\sin^2 x}{2x}=\frac{1}{2x}-\frac{\cos 2x}{2x}.$$

由此可知积分

$$\int_A^{+\infty}\left|\sin x\sin\frac{1}{x}\right|dx$$

发散. 综上可知原广义积分 J 条件收敛. 解答完毕.

题 9. 讨论如下广义积分的绝对收敛性和条件收敛性, 其中 $p>0$.

(i) $J_1=\int_2^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)}dx$;

(ii) $J_2=\int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p+\sin x}dx$;

(iii) $J_3=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p+\sin x}dx$.

解: (i) 由于被积函数为非负的, 因此它收敛即为绝对收敛. 当 $p>\frac{1}{2}$ 时, 我们有不等式

$$\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)}\leq\frac{1}{x^p(x^p-1)}.$$

又显然积分

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^p(x^p-1)}$$

收敛. 根据比较判别法知, 积分 J_1 收敛.

当 $0<p\leq\frac{1}{2}$ 时, 我们有不等式

$$\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)}\geq\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+1)}=\frac{1}{2x^p(x^p+1)}-\frac{\cos 2x}{2x^p(x^p+1)}.$$

由于积分

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{2x^p(x^p+1)}$$

发散, 而积分

$$\int_2^{+\infty} \frac{\cos 2x dx}{2x^p(x^p+1)}$$

收敛 (Dirichlet 判别法), 可见积分

$$\int_2^{+\infty} \frac{\sin^2 x dx}{x^p(x^p+\sin x)}$$

发散. 因此积分 J_1 收敛, 当且仅当 $p > \frac{1}{2}$.

(ii) 我们将积分 J_2 的被积函数作如下分解

$$\frac{\sin x}{x^p+\sin x} = \frac{\sin x}{x^p} - \frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)}.$$

注意上式右边的两个函数的收敛性比较容易判断. 因为第一个函数的积分

$$\int_2^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x^p}$$

对任意 $p > 0$ 均收敛 (Dirichlet 判别法). 再根据结论 (i) 知

$$\int_2^{+\infty} \frac{\sin^2 x dx}{x^p(x^p+\sin x)}$$

积分收敛, 当且仅当 $p > \frac{1}{2}$. 再来考虑 J_2 的绝对收敛性. 当 $0 < p \le 1$ 时, 根据不等式

$$\frac{|\sin x|}{x^p+\sin x} \ge \frac{\sin^2 x}{x^p+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^p+1} - \frac{\cos 2x}{x^p+1}\right)$$

可知积分

$$\int_2^{+\infty} \frac{|\sin x| dx}{x^p+\sin x}$$

发散. 当 $p > 1$ 时, 根据不等式

$$\frac{|\sin x|}{x^p+\sin x} \le \frac{1}{x^p-1}$$

可知积分

$$\int_2^{+\infty} \frac{|\sin x| dx}{x^p+\sin x}$$

收敛. 于是积分 J_2 条件收敛, 当且仅当 $\frac{1}{2} < p \le 1$, 积分 J_2 绝对收敛, 当且仅当 $p > 1$.

(iii) 注意对于任意 $p>0$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x^p+\sin x}=\begin{cases}1, & p>1,\\ \frac{1}{2}, & p=1,\\ 0, & p<1.\end{cases}$$

这表明点 $x=0$ 不是积分 J_3 的瑕点. 因此积分 J_3 与积分 J_2 的收敛性相同, 即积分 J_3 条件收敛, 当且仅当 $\frac{1}{2}<p\le 1$, 积分 J_3 绝对收敛, 当且仅当 $p>1$. 解答完毕.

三. 计算 Froullani (伏如兰尼) 广义积分.

设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续且极限 $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ 存在(有限), 记作 $f(+\infty)$. 证明 Froullani 广义积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\Big[f(0)-f(+\infty)\Big]\ln\frac{b}{a},$$

其中 a,b 为两个正数.

提示: 将 Froullani 积分 J 分解为 $J=J_1+J_2$, 其中 J_1 为区间 $[0,1]$ 上的积分, J_2 为区间 $[1,+\infty)$ 上的积分. 对于积分 J_1, 考虑从 $\varepsilon>0$ 到 1 的积分, 再将被积函数拆开, 并作适当的变量替换. 对于积分 J_2 可作类似处理.

证明: 我们将 Froullani 积分 J 分为两个部分 $J=J_1+J_2$, 其中

$$J_1=\int_0^1\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx,\quad J_2=\int_1^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx.$$

考虑 J_1. 对于任意 $\varepsilon\in(0,1)$, 我们有

$$\int_\varepsilon^1\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\int_\varepsilon^1\frac{f(ax)}{x}dx-\int_\varepsilon^1\frac{f(bx)}{x}dx$$

$$=\int_{\varepsilon a}^{a}\frac{f(u)}{u}du-\int_{\varepsilon b}^{b}\frac{f(u)}{u}du=\int_{\varepsilon a}^{\varepsilon b}\frac{f(u)}{u}du-\int_a^b\frac{f(u)}{u}du.$$

对积分 $\int_{\varepsilon a}^{\varepsilon b}\frac{f(u)}{u}du$ 应用积分中值定理得

$$\int_{\varepsilon a}^{\varepsilon b}\frac{f(u)}{u}du=f(\xi_\varepsilon)\int_{\varepsilon a}^{\varepsilon b}\frac{du}{u}=f(\xi_\varepsilon)\ln\frac{b}{a}\to f(0)\ln\frac{b}{a},\quad \varepsilon\to 0^+.$$

$$-\int_a^b \frac{f(u)}{u}du$$

因此

$$J_1=\int_0^1 \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(0)\ln\frac{b}{a}.-\int_a^b \frac{f(u)}{u}du$$

考虑积分 J_2. 对于任意 $A>1$, 类似有

$$\int_1^A \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\int_1^A \frac{f(ax)}{x}dx-\int_1^A \frac{f(bx)}{x}dx$$

$$=\int_a^{Aa} \frac{f(u)}{u}du-\int_b^{Ab} \frac{f(u)}{u}du=\int_a^b \frac{f(u)}{u}du-\int_{Aa}^{Ab} \frac{f(u)}{u}du.$$

同理对积分 $\int_{Aa}^{Ab}\frac{f(u)}{u}du$ 应用积分中值定理得

$$\int_{Aa}^{Ab} \frac{f(u)}{u}du=f(\eta_A)\int_{Aa}^{Ab}\frac{du}{u}=f(\eta_A)\ln\frac{b}{a}\to f(+\infty)\ln\frac{b}{a},\quad A\to+\infty.$$

因此原 Froullani 积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\Big[f(0)-f(+\infty)\Big]\ln\frac{b}{a},$$

证毕.

注: 我们可以直接对积分 $\int_r^R \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx$ 作分拆, 分别做变量替换. 然后令 $R\to+\infty$ 和 $r\to 0^+$, 即可得到相同的结论. 这样处理更简洁.

利用上述 Froullani 积分, 计算如下积分, 其中 a,b 为两个正数.

i) $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(ax)-\arctan(bx)}{x}dx$;

ii) $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx$.

四. 证明概率积分 (也称 Euler-Poisson 积分)

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

(证明有点长, 已超出教学要求, 可略去. 但证明所涉及的知识不超出我们这个学期所学的内容, 也不难理解)

注一: 根据 Euler 公式, 我们立刻得到 $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$, 因为

$$\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)=\int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}dx=2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}.$$

注二: 下个学期我们将学习二重积分. 届时我们将用更简单的方法证明概率积分公式.

证明思想: 回忆函数 e^t 的定义

$$e^t \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{t}{n}\right)^n.$$

令 $t=-x^2$, 则

$$e^{-x^2}=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n.$$

因此我们有理由期待

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\int_0^{+\infty}\left[\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n\right]dx=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n dx.$$

注意第二个等式是需要证明的. 由于积分

$$\int_0^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n dx$$

不方便处理, 故考虑它的截断积分

$$\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n dx.$$

这里积分上限取为 $\sqrt{n}$, 理由是这样的截断积分有一个较整齐的计算结果. 于是我们有理由期待

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n dx.$$

这不是证明, 而是希望.

证明: 定义

$$I_n=\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n dx.$$

Step 1. 作变量代换 $x=\sqrt{n}\sin t$ 得

$$I_n=\sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}tdt=\sqrt{n}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}. \tag{1}$$

Step 2. 回忆

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt$$

的计算公式

$$J_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}, \quad J_{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}. \tag{2}$$

由此得当 $n \to +\infty$ 时

$$\frac{J_{2n-1}}{J_{2n+1}} = \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}\bigg/\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} = \frac{2n+1}{2n} \to 1. \tag{3}$$

另一方面容易看出 $J_{2n+1} < J_{2n} < J_{2n-1}$, 由此得

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{J_{2n}}{J_{2n+1}} = 1. \tag{4}$$

将公式 (2) 代入上式得

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 = \frac{\pi}{2}. \tag{5}$$

公式 (5) 常称作 Wallis 公式(华莱士公式).

Step 3. 根据 Wallis 公式和式 (1), 我们立刻得到

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Step 4. 证明对任意 $a > 0$,

$$\left(1 - \frac{t}{a}\right)^a \le e^{-t}, \quad \forall t \in [0, a] \tag{6}$$

显然当 $t = a$ 时, 不等式 (6) 显然成立. 对于情形 $t \in [0, a)$, 显然待证的不等式成立, 当且仅当

$$\ln\left(1 - \frac{t}{a}\right) \le -\frac{t}{a},$$

根据熟知的不等式 $\ln(1 + x) \le x, \forall x > -1$, 可知上述不等式成立.

Step 5. 证明

$$e^{-t} \le \left(1 - \frac{t}{a}\right)^a + \frac{t^2}{a}e^{-t}, \quad \forall a \ge 1, \quad \forall t \in [0, a]. \tag{7}$$

证: 显然 (7) 成立, 当且仅当

$$1 \le e^t \left(1 - \frac{t}{a}\right)^a + \frac{t^2}{a}, \quad \forall a \ge 1, \quad \forall t \in [0, a]. \tag{8}$$

考虑函数

$$f(t) = e^t \left(1 - \frac{t}{a}\right)^a + \frac{t^2}{a}.$$

要证 $f(t) \ge 1, \forall t \in [0, a]$. 我们来考虑 $f(t)$ 在 $[0, a]$ 上的最小值. 设 $f(t)$ 在 $t = \xi$ 处取得最小值. 注意到 $f(0) = 1$, $f(a) = a \ge 1$, 故若 $\xi = 0$ 或 $\xi = a$, 则结论得证. 设 $\xi \in (0, a)$, 则 $f'(\xi) = 0$, 即

$$f'(t) = \frac{2t}{a} - \frac{te^t}{a}\left(1 - \frac{t}{a}\right)^{a-1}$$

在 $t = \xi$ 处为零, 即

$$e^\xi \left(1 - \frac{\xi}{a}\right)^{a-1} = 2.$$

于是

$$f(\xi) = e^\xi \left(1 - \frac{\xi}{a}\right)^a + \frac{\xi^2}{a} = 2 - \frac{2\xi}{a} + \frac{\xi^2}{a} = 1 + \frac{1}{a}\Big[(\xi - 1)^2 + a - 1\Big] \ge 1.$$

因此 $f(t) \ge f(\xi) \ge 1$. 结论得证.

Step 6. 在 Step 4 和 Step 5 的结论中, 取 $a = n$, $t = x^2$, 即得

$$0 \le e^{-x^2} - \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \le \frac{x^4}{n} e^{-x^2}.$$

容易证明广义积分

$$\int_0^{+\infty} x^4 e^{-x^2}$$

收敛. 由此可见

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left[e^{-x^2} - \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n\right] dx = 0.$$

Step 7. 根据 Step 6 中的不等式, 我们有

$$0 = \lim_{n \to +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left[e^{-x^2} - \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n\right] dx$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx - \lim_{n \to +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} - \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Euler - Poisson 积分公式得证. 证毕.