《微积分A1》第九讲

教师 杨利军

清华大学数学科学系

2025年10月20日

回忆：函数的导数

Definition

定义：设函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上有定义，$x_0 \in (a,b)$. 若极限

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad 或 \quad \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x}$$

存在，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，且上述极限值称为 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数 (derivative)，记作 $f'(x_0)$ 或 $Df(x_0)$ 或 $\frac{df}{dx}(x_0)$，$\cdots$.

注：式 $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 通常称为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的差商 (difference quotient). 因此导数就是差商的极限.

例: $(\sin x)' = \cos x, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

证: 任意固定 $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h}$$

$$= \frac{\sin x(\cos h - 1)}{h} + \frac{\cos x \sin h}{h} \to \cos x, \quad h \to 0.$$

因此函数 $\sin x$ 在任意点 x 处可导, 且 $(\sin x)' = \cos x$.

另证: 当 $x \to x_0$ 时,

$$\frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \frac{2\cos\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}}{x - x_0} = \cos\frac{x+x_0}{2} \cdot \frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}} \to \cos x_0.$$

因此 $(\sin x)'_{x_0} = \cos x_0$. 因 x_0 任意, 故 $(\sin x)' = \cos x$. □

例: $(\cos x)' = -\sin x,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

证: 任意固定 $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \frac{\cos x\cos h - \sin x\sin h - \cos x}{h}$$

$$= \frac{\cos x(\cos h - 1)}{h} - \frac{\sin x\sin h}{h} \to -\sin x, \quad h \to 0.$$

因此函数 $\cos x$ 在任意点 x 处可导，且 $(\cos x)' = -\sin x$.

另证: 当 $x \to x_0$ 时，

$$\frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} = -\frac{2\sin\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}}{x-x_0} = -\sin\frac{x+x_0}{2}\cdot\frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}} \to -\sin x_0.$$

因此 $(\cos x)'_{x_0} = -\sin x_0$. 因 x_0 任意，故 $(\cos x)' = -\sin x,\ \forall x \in \mathbb{R}$. □

函数 a^x 的导数, $a > 0$

Example

例: $(a^x)' = a^x \ln a$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

证: 对任意 $x \in \mathbb{R}$, 以及任意增量 h,

$$\frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h} \to a^x \ln a, \quad h \to 0.$$

故 $(a^x)' = a^x \ln a$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Example

例: $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$, $\forall x \neq 0$.

证: 设 $x \neq 0$, 则当 $|h| < |x|$ 时,

$$\frac{\ln|x+h| - \ln|x|}{h} = \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{x \cdot \frac{h}{x}} \to \frac{1}{x}, \quad h \to 0.$$

故 $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$, $\forall x \neq 0$.

函数 x^α 的导数, $x > 0$

Example

例: $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\forall x > 0$.

证: $\forall x > 0$, $\forall h$,

$$\frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h} = x^\alpha \cdot \frac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^\alpha - 1}{h}$$

$$= x^\alpha \cdot \frac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^\alpha - 1}{x \cdot \frac{h}{x}} \to \alpha x^{\alpha-1}, \quad h \to 0.$$

故 $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\forall x > 0$.

注: 当 $\alpha = n$ 为正整数时, 幂函数 x^n 的定义域是整个实轴, 导数公式仍然成立, 即 $[x^n]' = nx^{n-1}$.

Theorem

定理: 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

Proof.

证明: 由于 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, 即 $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在, 故

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)] = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)$$

$$= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0) = f'(x_0)\cdot 0 = 0.$$

这表明 $f(x)$ 在 x_0 处连续. 证毕. □

左导数与右导数

Definition

定义: (i) 若极限$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在, 则称极限值为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的右导数, 记作 $f'_+(x_0)$;

(ii) 若极限$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在, 则称极限值为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左导数, 记作$f'_-(x_0)$.

注意左右导数 $f'_\pm(x_0)$, 与左右极限 $f(x_0^\pm)$ 的区别.

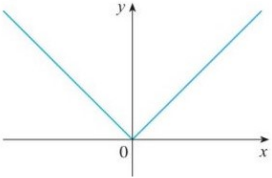
Theorem

定理: 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导 $\Leftrightarrow$ 左右导数 $f'_-(x_0)$ 和 $f'_+(x_0)$ 均存在, 且相等.

证明: 依可导定义结论显然. 细节略.

例: 考虑函数 $f(x)=|x|$ 在点 $x=0$ 处左右导数, 以及可导性.

解: 对于 $x>0$, $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x-0}{x}=1\to 1$, 当 $x\to 0^+$ 时. 故 $|x|$ 在点 $x=0$ 处的右导数存在且 $f'_+(0)=1$. 同理可得 $|x|$ 在点 $x=0$ 处的左导数存在且 $f'_-(0)=-1$. 根据上述定理可知函数 $|x|$ 在点 $x=0$ 处不可导. 根据函数 $y=|x|$ 图像可知点 $(0,0)$ 是尖点, 无切线. 故不可导. 解答完毕.



微分(differentials)

Definition

定义: 设函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上定义. 若 f 在点 $x_0 \in (a,b)$ 处的改变量可表示为: 齐次线性部分 + 高阶部分, 即

$$f(x_0+\triangle x)-f(x_0)=\lambda\triangle x+o(\triangle x),\quad \triangle x\to 0,$$

其中 λ 为常数, $\triangle x$ 代表变量 x 的改变量($\triangle x$ 也是一个独立变量), 则称函数 f 在点 x_0 处可微(differentiable), 称齐次线性部分 $\lambda\triangle x$ 为函数 f 在点 x_0 处的微分, 并记之为 $df(x_0)=\lambda\triangle x$, 或 $df\big|_{x_0}=\lambda\triangle x$.

微分的例子

例: 考虑函数 x^2 在任意点 x_0 处的可微性. 由于

$$(x_0 + \triangle x)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0\triangle x + \triangle x^2 - x_0^2$$

$$= 2x_0\triangle x + o(\triangle x),$$

故函数 x^2 在任意点 x_0 处的可微, 且 $d(x^2)\Big|_{x_0} = 2x_0\triangle x.$

Theorem

定理: (i) f 在点 x_0 处可微 $\Longleftrightarrow$ f 在点 x_0 处可导.

(ii) 当 f 在点 x_0 可微时, $df(x_0)=f'(x_0)\triangle x$.

证(i) $\Rightarrow$: 设 $f(x)$ 在点 x_0 处可微, 即存在常数 λ, 使得

$$f(x_0+\triangle x)-f(x_0)=\lambda\triangle x+o(\triangle x),\quad \triangle x\to 0.$$

$$\text{故}\quad \frac{f(x_0+\triangle x)-f(x_0)}{\triangle x}=\lambda+\frac{o(\triangle x)}{\triangle x}\to\lambda,\quad \triangle x\to 0.$$

这表明函数 f 在点 x_0 处可导, 且导数就是 λ, 即 $f'(x_0)=\lambda$.

$\Leftarrow$: 设 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, 即

$$\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(x_0+\triangle x)-f(x_0)}{\triangle x}=f'(x_0),$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{\triangle x \to 0}\left[\frac{f(x_0+\triangle x)-f(x_0)}{\triangle x}-f'(x_0)\right]=0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{\triangle x \to 0}\frac{f(x_0+\triangle x)-f(x_0)-f'(x_0)\triangle x}{\triangle x}=0$$

$$\Rightarrow \ f(x_0+\triangle x)-f(x_0)-f'(x_0)\triangle x=o(\triangle x), \quad \triangle x\to 0$$

$$\Rightarrow \ f(x_0+\triangle x)-f(x_0)=f'(x_0)\triangle x+o(\triangle x), \quad \triangle x\to 0.$$

这表明 $f(x)$ 在点 x_0 处可微. 结论(i)得证.

证(ii). 当 f 在点 x_0 可微时, 即 $f(x_0+\triangle x)-f(x_0)=\lambda\triangle x+o(\triangle x)$. 已证 $\lambda=f'(x_0)$. 因此 $df(x_0)=f'(x_0)\triangle x$. 定理得证. □

注记

注一: 当 $f(x)=x$ 时, $f'(x)=1$. 因此函数 $f=x$ 在任意点 x_0 处的微分为 $dx\big|_{x_0}=1\cdot\triangle x=\triangle x$. 因此常记 $\triangle x=dx$. 于是一般可导函数 $f(x)$ 的微分可写作 $df(x_0)=f'(x_0)dx$.

注二: 一元函数导数的概念不能直接推广到多元函数情形. 但微分概念则可以推广. 下个学期将详细讨论.

Theorem

定理: 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 x_0 处可导, 则 $f \pm g$, fg 及 f/g (假设 $g(x_0) \neq 0$) 在点 x_0 处可导, 且

$$
\begin{aligned}
&\text{(i)} \quad (f \pm g)'_{x_0} = f'(x_0) \pm g'(x_0),\\
&\text{(ii)} \quad (fg)'_{x_0} = (f'g + fg')_{x_0},\\
&\text{(iii)} \quad (f/g)'_{x_0} = \left.\frac{f'g - fg'}{g^2}\right|_{x_0}.
\end{aligned}
$$

例一

Example

例一: 求函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x} + e^x \sin x$ 的导数.

解: 根据求导得则运算定理得

$$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' + (e^x \sin x)'$$

$$= \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2} + e^x \sin x + e^x \cos x.$$

解答完毕.

例二

Example

例二: 求正切函数 $\tan x$ 的导数.

解:

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}\Big([\sin x]'\cos x - \sin x[\cos x]'\Big)$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \qquad \#$$

证: 关于和差的导数公式(i), 证明简单. 略去. 只证乘积的导数公式(ii), 和商的导数公式(iii). 证(ii): 考虑差商

$$\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$

$$=\frac{f(x)g(x)-f(x)g(x_0)+f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$

$$=f(x)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}+g(x_0)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$\to f(x_0)g'(x_0)+g(x_0)f'(x_0), \quad x\to x_0.$$

结论(ii)得证.

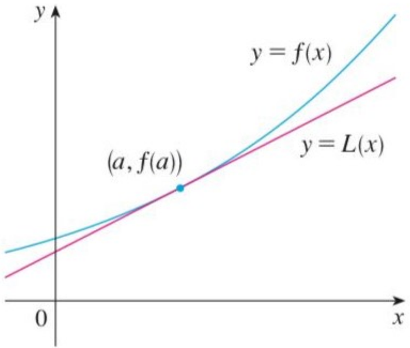
证(iii). 利用结论(ii), 只需证 $(\frac{1}{g})'_{x_0} = -(\frac{g'}{g^2})_{x_0}$.

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = -\frac{g(x) - g(x_0)}{g(x)g(x_0)(x - x_0)}$$

$$= -\frac{1}{g(x)g(x_0)} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \to -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}, \quad x \to x_0.$$

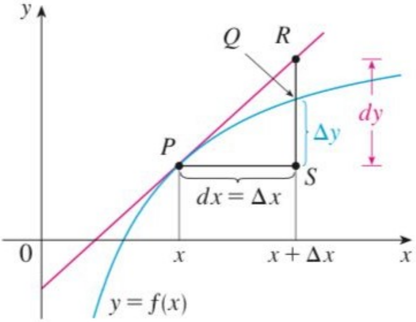
结论(iii)得证. 定理证毕. □

设函数 $f(x)$ 在点 a 处可微(或可导)，则曲线 $\Gamma: y=f(x)$ 在点 $(a, f(a))$ 处的切线方程为 $y=f(a)+f'(a)(x-a)$. 线性函数 $L(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$ 称为函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处的线性化(函数). 粗略地说，函数在一点处的线性化函数，就是函数在该点的函数值，再加上函数在该点处的微分.



微分的几何解释

设 $\mathsf{P} = (\mathsf{x}, \mathsf{f}(\mathsf{x}))$ 和 $\mathsf{Q} = (\mathsf{x} + \triangle\mathsf{x}, \mathsf{f}(\mathsf{x} + \triangle\mathsf{x}))$ 为曲线 $\mathsf{y} = \mathsf{f}(\mathsf{x})$ 的两个点，其中 $\mathsf{dx} = \triangle\mathsf{x}$ 为在点 $\mathsf{P} = (\mathsf{x}, \mathsf{f}(\mathsf{x}))$ 处的独立变量的增量，则函数改变量 $\triangle\mathsf{y} = \mathsf{f}(\mathsf{x} + \triangle\mathsf{x}) - \mathsf{f}(\mathsf{x})$，以及函数 f 在点 x 处的微分 $\mathsf{dy} = \mathsf{f}'(\mathsf{x})\mathsf{dx}$，如图所示.



Example

例一: 求 $\sin\left(\frac{\pi}{6}+0.01\right)$ 的近似值.

解: 已证函数 $\sin x$ 在 $\mathbb{R}$ 上处处可导. 为计算 $\sin\left(\frac{\pi}{6}+0.01\right)$ 的近似值, 记 $a=\frac{\pi}{6}$, $h=0.01$. 于是

$$\sin(a+h)=\sin a+[\sin x]'_a h+o(h)=\sin\frac{\pi}{6}+\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)h+o(h)$$

$$\simeq\sin\frac{\pi}{6}+\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)h=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times 0.01\simeq 0.50866.$$

例二

Example

例二: 求 $\sqrt{3.98}$ 的近似值.

解: 记 $a = 4$, $h = -0.02$. 于是

$$\sqrt{3.98} = \sqrt{a + h} = \sqrt{a} + (\sqrt{x})'_a h + o(h)$$

$$\simeq \sqrt{4} + \left.\frac{1}{2\sqrt{x}}\right|_{x=4} \times (-0.02) = 2 + \frac{1}{4} \times (-0.02) = 1.995.$$

Theorem

<u>定理</u> [链规则 The chain rule]：设 $g(x)$ 于 x 可导，$f(u)$ 于 $u = g(x)$ 可导，则复合函数 $f(g(x))$ 于 x 处可导，并且

$$[f(g(x))]' = f'(u)g'(x), \quad u = g(x)$$

$$或 \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}, \quad y = f(u), u = g(x).$$

Example

<u>例一</u>: 求导数 $\left[\sqrt{x^2+1}\right]'$.

<u>解</u>: 将函数 $\sqrt{x^2+1}$ 看作函数 $f(u)=\sqrt{u}$ 与 $g(x)=x^2+1$ 的复合, 即 $\sqrt{x^2+1}=f(g(x))$. 于是根据链规则得

$$\left[\sqrt{x^2+1}\right]' = [f(g(x))]' = f'(u)g'(x) = (\sqrt{u})'(x^2+1)'$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{u}}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}. \quad \#$$

Example

例二: 求导数 $\left[\ln\tan(x^2)\right]'$.

解: 函数 $\ln\tan(x^2)$ 可看作三个函数复合, 即 $f(u)=\ln u$, $u=g(v)=\tan v$, $v=\phi(x)=x^2$ 的复合. 两次利用链规则得

$$\left[\ln\tan(x^2)\right]'=\left[f(g(\phi(x)))\right]'=f'(u)g'(v)\phi'(x)$$

$$=(\ln u)'(\tan v)'(x^2)'=\frac{1}{u}\cdot\frac{1}{\cos^2 v}\cdot 2x=\frac{1}{\tan v}\cdot\frac{1}{\cos^2 v}\cdot 2x$$

$$=\frac{2x}{\sin v\cos v}=\frac{2x}{\sin(x^2)\cos(x^2)}.\quad \#$$

例三

Example

例: 设函数 $u(x)$ 和 $v(x)$ 可导, 且 $u(x) > 0$.

(i) 设 a 为常数, 则 $[u(x)^a]' = au(x)^{a-1}u'(x)$;

(ii) 设 $b > 0$ 为正常数, 则 $[b^{v(x)}]' = b^{v(x)}(\ln b)v'(x)$;

(iii) 函数 $u(x)^{v(x)}$ 的导数为

$$\left[u(x)^{v(x)}\right]' = \left[e^{v(x)\ln u(x)}\right]' = e^{v(x)\ln u(x)} \cdot \left[v(x)\ln u(x)\right]'$$

$$= e^{v(x)\ln u(x)}\left(v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right).$$

例四

例: 求导数 $f'(x)$, 其中

$$f(x)=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}}\left[x^2(2x+3)\right]^{\frac{1}{3}}.$$

解: 利用对数函数的性质(化乘除为加减), 可简化多因子函数的求导计算.

$$\ln|f(x)|=\frac{1}{2}\left(\ln|x+1|-\ln|x-1|\right)+\frac{1}{3}\left(2\ln|x|+\ln|2x+3|\right)$$

$$\Rightarrow\quad \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{x}+\frac{2}{2x+3}\right)$$

$$=\frac{-1}{x^2-1}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2x+3+x}{x(2x+3)}=\frac{2(x+1)}{x(2x+3)}-\frac{1}{x^2-1}.$$

$$\Rightarrow\quad f'(x)=f(x)\left(\frac{2(x+1)}{x(2x+3)}-\frac{1}{x^2-1}\right).\quad \#$$

链规则回忆

Theorem

定理 [链规则 The chain rule]: 设 $g(x)$ 于 x 可导, $f(u)$ 于 $u = g(x)$ 可导, 则复合函数 $f(g(x))$ 于 x 处可导, 并且

$$[f(g(x))]' = f'(u)g'(x), \quad u = g(x)$$

$$\text{或} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}, \quad y = f(u), u = g(x).$$

证: 只要证明复合函数 $f(g(x))$ 在任意一个固定点 x_0 处可微, 并且 $[f(g(x))]'_{x_0} = f'(u_0)g'(x_0)$, $u_0 = g(x_0)$ 即可. 定义

$$h(u) = \begin{cases} \frac{f(u)-f(u_0)}{u-u_0}, & u \neq u_0, \\ f'(u_0), & u = u_0, \end{cases}$$

则 $h(u)$ 在 u_0 处连续, 且 $f(u) - f(u_0) = h(u)(u - u_0)$. 于是

$$\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = h(g(x)) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \to f'(u_0)g'(x_0),$$

当 $x \to x_0$ 时. 定理得证. □

一阶微分形式的不变性

设函数 $y=f(u)$ 可导，则其微分为 $dy=f'(u)du$. 设函数 $u=u(x)$ 可导，且复合函数 $f(u(x))$ 有意义，则复合函数 $f(u(x))$ 的微分为

$$dy=[f(u(x))]'dx=f'(u)u'(x)dx=f'(u)du.$$

这表明函数 $f(u)$ 的微分总可以写作 $dy=f'(u)du$，无论 u 是独立变量或是函数 $u=u(x)$. 这个性质称为一阶微分形式的不变性. 一阶微分形式的不变性可用于计算复合函数的微分.

例：设 $y=\cos(ax+b)$，则 $y'(x)=-\sin(ax+b)a$. 于是函数的微分为

$$dy=-a\sin(ax+b)dx.$$

利用一阶微分形式的不变性可知

$$dy=[\cos u]'du=-(\sin u)u'(x)dx=-a\sin(ax+b)dx.$$

Theorem

定理: 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上严格单调, 连续, 在点 $x_0 \in (a,b)$ 处可导. 若 $f'(x_0) \neq 0$, 则反函数 $f^{-1}(y)$ 在点 $y_0 = f(x_0)$ 处可导, 且

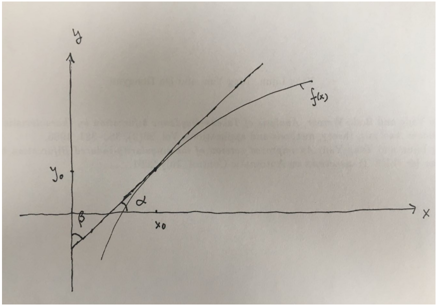
$$\left[f^{-1}(y)\right]'_{y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Example

例: 函数 $y = \sin x$ 在开区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上严格单调增, 且其导数 $(\sin x)' = \cos x \neq 0$, $\forall x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. 根据上述定理, 其反函数 $x = \arcsin y$ 在开区间 $(-1,1)$ 上可导, 且反函数的导数为

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

反函数导数的几何解释



由上图可知，函数 $f(x)$ 在点x_0 处的导数 $f'(x_0) = \tan\alpha$，反函数 $f^{-1}(y)$ 在点 y_0 处的导数 $\left[f^{-1}(y)\right]'_{y_0} = \tan\beta$. 而 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$，即 $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$. 故 $\left[f^{-1}(y)\right]'_{y_0}$

$= \tan\beta = \tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1}{f'(x_0)}$.

证: 取 y_0 附近 y, 记 $x_0 = f^{-1}(y_0)$, $x = f^{-1}(y)$, 则 $y_0 = f(x_0)$, $y = f(x)$. 于是

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} \to \frac{1}{f'(x_0)}, \quad y \to y_0.$$

定理得证.

注: 最后一步的解释: 当 $y \to y_0$ 时, 由反函数 $x = f^{-1}(y)$ 的连续性知 $f^{-1}(y) \to f^{-1}(y_0)$, 即 $x \to x_0$.

隐函数导数，例一

假设函数 $y = y(x)$ 是由方程 $F(x, y) = 0$ 确定的，且 $y(x)$ 可导．考虑如何求导数 $y'(x)$．至于函数方程 $F(x, y) = 0$ 在何种条件下能够确定一个可导函数(称作隐函数) $y = y(x)$，即隐函数存在唯一性问题，我们将在下个学期专门讨论．

Example

例一：假设由方程 $y^2 + 2\ln|y| = x^4$ 确定了一个可导函数 $y = y(x)$，即函数 $y(x)$ 可导，且满足 $y^2(x) + 2\ln|y(x)| \equiv x^4$．对这个恒等式两边求导得

$$2yy' + \frac{2y'}{y} = 4x^3, \quad \text{其中} \quad y = y(x),\ y' = y'(x)$$

$$\Rightarrow \quad y'\left(y + \frac{1}{y}\right) = 2x^3 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{2x^3}{(y + \frac{1}{y})} = \frac{2x^3 y}{1 + y^2}. \quad \#$$

Example

例二: 假设由方程 $x^2 + y\cos x - 2e^{xy} = 0$ 在点 $(x, y) = (0, 2)$ 附近确定了一个可导函数 $y = y(x)$. 求曲线 $y = y(x)$ 在点 $(0, 2)$ 处的切线方程.

解: 注意点 $(0, 2)$ 满足方程 $x^2 + y\cos x - 2e^{xy} = 0$. 因为将 $(x, y) = (0, 2)$ 代入方程得 $0^2 + 2\cos 0 - 2e^0 = 0$, 即方程成立. 求过点 $(0, 2)$ 处的切线方程, 即要求切线的斜率, 即 $y'(0)$. 为此关于恒等式 $x^2 + y(x)\cos x - 2e^{xy(x)} \equiv 0$ 两边求导得 $2x + y'\cos x + y(-\sin x) - 2e^{xy(x)}[y + xy'(x)] = 0$. 将点 $(x, y) = (0, 2)$ 代入上述方程得

$$2 \cdot 0 + y'(0) \cdot \cos 0 + 2 \cdot (-\sin 0) - 2e^{0\cdot 2}[2 + 0 \cdot y'(0)] = 0.$$

此即 $y'(0) - 2 \cdot 2 = 0$, 即 $y'(0) = 4$. 于是所求切线方程为 $y - 2 = 4(x - 0)$, 即 $y = 4x + 2$. 解答完毕.

参数式函数求导

考虑参数方程 $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in (a, b)$. 假设函数 $\phi(t)$, $\psi(t)$ 均可导，且 $\phi(t)$ 严格单调，$\phi'(t) \neq 0$, $\forall t \in (a, b)$. 故反函数 $\phi^{-1}(x)$ 可导，定义 $y(x) = \psi(\phi^{-1}(x))$, 并称函数 $y = y(x)$ 是由参数方程 $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ 所确定的.

显然 $y(x)$ 可导，因为 $\psi(\cdot)$ 和 $\phi^{-1}(\cdot)$ 均可导. 我们考虑 $y(x)$ 的导数. 根据链规则以及反函数求导定理得

$$y'(x) = \psi'(t) \cdot \left[\phi^{-1}(x)\right]' = \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}, \quad \text{其中} \quad t = \phi^{-1}(x).$$

例子: 由旋轮线方程确定的函数之导数

例: 考虑由旋轮线参数方程 $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$, $\theta \in (0, 2\pi)$ 所确定的函数 $y = y(x)$, 其中 $a > 0$ 为常数. 求导数 $y'(x)$.

解: 记 $\phi(\theta) = a(\theta - \sin\theta)$, $\psi(\theta) = a(1 - \cos\theta)$. 易证 $\phi(\theta)$ 在 $(0, 2\pi)$ 上严格单调上升, 且 $\phi'(\theta) = a(1 - \cos\theta) \neq 0$, $\forall \theta \in (0, 2\pi)$. 于是

$$y'(x) = \frac{\psi'(\theta)}{\phi'(\theta)} = \frac{a \sin\theta}{a(1 - \cos\theta)} = \frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta}.$$

解答完毕.

考虑半径为 a 的圆盘(轮子)在 x 轴上滚动, 轮子的边缘上的任意一点的轨迹即为旋轮线. 如图所示.

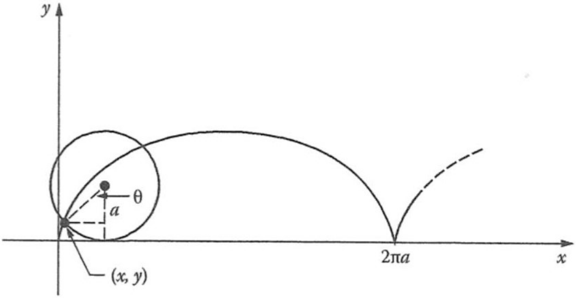
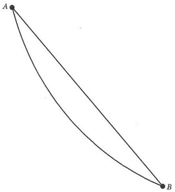


FIGURE 11

最速下降问题: Johann Bernoulli 于 1696 年在《教师学报》提出如下问题征解: 用一根金属丝串上一个珠子, 金属丝的两端连接空间两点 A 和 B. 如图所示.



问题: 当金属丝(可看作平面曲线)呈何种形状时, 珠子沿着金属丝从点 A 滑向点 B 的时间最短? 这样的平面曲线若存在, 则称作最速下降曲线(路径).

猜测: 直线段? 圆弧? 抛物线?

最速下降曲线，续

答案：旋轮线．如图建立平面坐标系，点 A 位于原点，y 轴的正向垂直向下．

Bernoulli 兄弟，Newton 等证明，最速下降曲线就是旋轮线，即其参数方程可以表示为 $x = a(\theta - \sin\theta)$，$y = a(1 - \cos\theta)$，$\theta \in (0, 2\pi)$

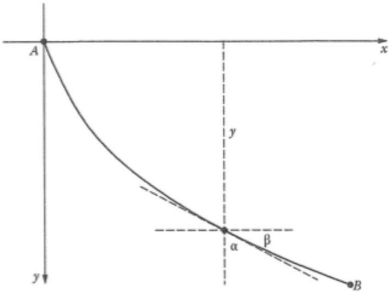
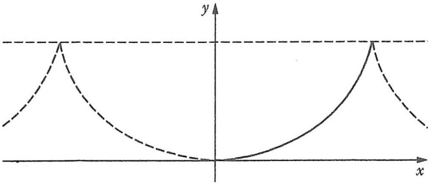


FIGURE 10

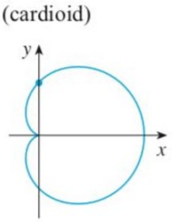
旋轮线性质二：等时性质

Christiaan Huygens (1629-1695) 证明旋轮线还具有如下等时性质：将一根金属丝弯成旋轮线形状，即 $x = a(\theta + \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$, $\theta \in (0, 2\pi)$.



如果金属丝串上一个珠子，那么珠子从曲线上任意点开始，下滑至原点(即最低点) 所需时间恒为常数，即与珠子开始下滑的位置无关.

例: 已知心脏线 (cardioid) 的极坐标方程为 $\rho = a(1+\cos\phi)$, $a>0$, $\phi \in [0, 2\pi]$. 如图所示.



在直角坐标系下心脏线的参数方程为

$$\begin{cases} x = \rho\cos\phi = a(1+\cos\phi)\cos\phi, \\ y = \rho\sin\phi = a(1+\cos\phi)\sin\phi. \end{cases}$$

例子，续

于是心脏线的斜率为

$$y'(x) = \frac{y'(\phi)}{x'(\phi)} = \frac{\left[a(1+\cos\phi)\sin\phi\right]'}{\left[a(1+\cos\phi)\cos\phi\right]'}$$

$$= \frac{(\sin\phi + \frac{1}{2}\sin2\phi)'}{\left[\cos\phi + \frac{1}{2}(1+\cos2\phi)\right]'} = \frac{\cos\phi + \cos 2\phi}{-\sin\phi - \sin 2\phi} = -\frac{\cos\phi + \cos 2\phi}{\sin\phi + \sin 2\phi}.$$

解答完毕.

高阶导数

Definition

<u>定义</u>: 设 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上处处可导. 如果其导函数 $f'(x)$ 作为 (a,b) 上的函数在点 $x_0 \in (a,b)$ 处可导, 即极限

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$$

存在, 则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处二阶可导, 称极限值为 $f(x)$ 在点 x_0 处二阶导数, 记作 $f''(x_0)$, 或 $\frac{d^2f}{dx^2}(x_0)$, 或 $\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x_0}$, 或 $D^2f(x_0)$, 或 $\left.D^2f\right|_{x_0}$, $\cdots$. 类似可以定义三阶导数, 以及一般 n 阶导数. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的 n 导数通常记作 $f^{(n)}(x_0)$.

例子

Example

例: (i) 已证函数 $y=\sin x$ 在 $\mathbb{R}$ 上处处可导, 且 $y'=\cos x$. 由此可见 $y=\sin x$ 在 $\mathbb{R}$ 上处处二阶可导, 且 $y''=-\sin x$. 由归纳法可知对任意正整数 n, 函数 $y=\sin x$ 在 $\mathbb{R}$ 上处处 n 次可导.

(ii) 由于 $[\sin x]'=\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{2})$, 故二阶导数为 $y''=[\sin(x+\frac{\pi}{2})]'$ $=\sin(x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})=\sin(x+\frac{2\pi}{2})$. 不难用归纳法证明, 对任意正整数 $n\geq 1$, $[\sin x]^{(n)}=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$.

(iii) 类似可证函数 $\cos x$ 在 $\mathbb{R}$ 上处处有任意阶导数, 对任意正整数 $n\geq 1$, $[\cos x]^{(n)}=\cos(x+\frac{n\pi}{2})$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

记号: 设 J 为一开区间.

(i) $C^k(J)$ 记区间 J 上有连续的 k 阶导数的函数全体. 显然

$$C(J) \supseteq C^1(J) \supseteq C^2(J) \supseteq \cdots \supseteq C^n(J) \supseteq C^{n+1}(J) \supseteq \cdots$$

(ii) $C^\infty(J)$ 记区间 J 上有任意阶导数的函数全体. 显然

$$C^\infty(J) = \bigcap_{k\geq 0} C^k(J).$$

Example

例一: 考虑 $y=\ln(1+x)$, $x>-1$. 显然函数 $y=\ln(1+x)$ 可导, 且 $y'=\frac{1}{1+x}$, $x>-1$. 由此进一步可知函数二阶可导, 且 $y''=\frac{-1}{(1+x)^2}$. 用归纳法可证, 对任意正整数 k, 函数有 k 阶导数, 且$y^{(k)}=(-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{(1+x)^k}$.

Example

例二: 考虑 $y=x^\alpha$, $x>0$ 的 n 阶导数. 已证 $y'=\alpha x^{\alpha-1}$. 由此可知 $y''=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$. 用归纳法可证

$$y^{(k)}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)x^{\alpha-k},\quad \forall k\geq 1.$$

当 α 为正整数, 即 $\alpha=n$ 时, $y^{(n)}=n!$, $y^{(n+1)}=0$.

Example

例三: 考虑 $y = a^x$ 的 n 阶导数, 其中 $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$, 已证 $y' = \ln a \cdot a^x$. 由此可知 $y'' = (\ln a)^2 a^x$. 用归纳法可证

$$y^{(n)} = (\ln a)^n a^x, \quad \forall n \geq 1.$$

Leibniz 法则

Theorem

定理: 设 $f, g \in C^n(J)$, 则它们的乘积 $fg \in C^n(J)$, 且

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)},$$

其中 $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ 为二项式系数, $C_n^0 = C_n^n = 1$. 特别

$$n = 1, \quad (fg)' = f'g + fg',$$

$$n = 2, \quad (fg)'' = f''g + 2f'g' + fg'',$$

$$n = 3, \quad (fg)''' = f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''.$$

例一: 求函数 $y=\frac{1}{x^2-x-2}$ 的 n 阶导数.

解: 先将函数化为最简分式. 由于 $x^2-x-2=(x-2)(x+1)$. 令

$$\frac{1}{(x-2)(x+1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1},$$

其中 A, B 为待定常数. 上式两边同乘 $(x-2)(x+1)$ 得 $A(x+1)+B(x-2)$ $=1$. 由此得 $A+B=0$, $A-2B=1$. 解之得 $B=-\frac{1}{3}$, $A=\frac{1}{3}$. 于是

$$\frac{1}{x^2-x-2}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+1}\right).$$

$$\left(\frac{1}{x-2}\right)'=-\frac{1}{(x-2)^2},\quad \left(\frac{1}{x-2}\right)''=\frac{2}{(x-2)^3},$$

一般 $$\left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}}.$$

同理 $$\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}.$$

因此所求函数的 n 阶导数为

$$\left(\frac{1}{x^2-x-2}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{3}\left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right].$$

注：在稍后学习不定积分时，我们将详细讨论分式分解问题.

例二: 求函数 $y = x^2 \cos x$ 的 n 阶导数.

解:

$$y' = x^2 \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 2x \cos x;$$

$$y'' = x^2 \cos\left(x + \frac{2\pi}{2}\right) + 4x \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 2\cos x;$$

$$y^{(n)} = C_n^0 x^2 [\cos x]^{(n)} + C_n^1 [x^2]' [\cos x]^{(n-1)} + C_n^2 [x^2]'' [\cos x]^{(n-2)}$$

$$= x^2 \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + 2nx \cos\left(x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right)$$

$$+ n(n-1)\cos\left(x + \frac{(n-2)\pi}{2}\right), \quad \forall n \geq 3.$$

Leibniz 法则之证明

证明: 显然结论对 $n=1$ 成立. 因为在证明导数的四则运算规则时, 已经证明, 当 $f,g\in C^1(J)$ 时, 它们的乘积 $fg\in C^1(J)$, 且 $(fg)'=f'g+fg'$. 假设结论对正整数 n, 即当 $f,g\in C^n(J)$ 时, 则乘积 $fg\in C^n(J)$, 且

$$(fg)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(k)}g^{(n-k)}. \qquad (*)$$

当 $f,g\in C^{n+1}(J)$ 时, 则有 $f,g\in C^n(J)$, 故由归纳假设知乘积 $fg\in C^n(J)$, 且公式 (*) 成立. 由于公式 (*) 右边的每一项都是连续可微的, 因此 $(fg)^{(n)}$ 也连续可微. 于是 $fg\in C^{n+1}(J)$. 对公式 (*) 两边求导得

$$(fg)^{(n+1)}=\left[(fg)^{(n)}\right]'=\left(\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(k)}g^{(n-k)}\right)'=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left[f^{(k)}g^{(n-k)}\right]'$$

证明，续

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left[f^{(k+1)}g^{(n-k)} + f^{(k)}g^{(n-k+1)}\right] = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k+1)}g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}g^{(n-k+1)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k f^{(k+1)}g^{(n-k)} + C_n^n f^{(n+1)}g + C_n^0 f g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k f^{(k)}g^{(n+1-k)}$$

$$= C_{n+1}^0 f g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} f^{(k)}g^{(n-k+1)} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k f^{(k)}g^{(n+1-k)} + C_{n+1}^{n+1} f^{(n+1)}g$$

$$= C_{n+1}^0 f g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \left(C_n^{k-1} + C_n^k\right) f^{(k)}g^{(n+1-k)} + C_{n+1}^{n+1} f^{(n+1)}g$$

$$\text{即}\quad (fg)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k f^{(k)}g^{(n+1-k)},$$

这里用到到了组合公式 $C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$. 这表明 Leibniz 公式对情形 $n+1$ 成立. 定理得证.

注一: 组合公式 $C_n^{k-1}+C_n^k=C_{n+1}^k$ 可如下直接证明:

$$C_n^{k-1}+C_n^k=\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}+\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$=\frac{n!}{k!(n+1-k)!}(k+n-k+1)=\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}=C_{n+1}^k.$$

注二. 组合公式 $C_n^{k-1}+C_n^k=C_{n+1}^k$ 可如下解释: 设一个箱子里有 n 个小球. 再往箱子里添加一个新球. 然后从中取出 k 个球, 共有 C_{n+1}^k 取法. 另一方面, 取法分为两类: k 个球中包含新球和不包含新球. 显然不含新球的取法有 C_n^k 种, 而包含新球的取法有 C_n^{k-1} 种. 因此 $C_n^{k-1}+C_n^k=C_{n+1}^k$.

习题一. 课本第73页习题3.1题1: 根据导数定义求下列函数 $f(x)$ 在给定点处的导数:

(1) 求 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在点 $x=-3$ 处的导数;

(2) 求 $f(x)=2^{-x}$ 在点 $x=0$ 处的导数.

习题二. 课本第73页习题3.1题2: 研究下列函数在点 $x=0$ 处的连续性与可导性. 若可导, 则求出导数值 $f'(0)$.

$$(1)\quad f(x)=|x-3|, \qquad (2)\quad f(x)=|x|+2x,$$

$$(3)\quad f(x)=\begin{cases} x, & x<0, \\ \ln(1+x), & x\geq 0. \end{cases} \qquad (4)\quad f(x)=\begin{cases} 3x^2+4x, & x<0, \\ x^2-1, & x\geq 0. \end{cases}$$

习题三. 课本第73页习题3.1题3: 设

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\le 1, \\ ax+b, & x>1. \end{cases}$$

讨论当 a,b 取何值时, $f(x)$ 在点 $x=1$ 处可导.

习题四. 课本第73页习题3.1题4: 判断下列条件是否等价于 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处可导:

(1) 极限 $\lim_{h\to+\infty} h\left[f\left(x_0+\frac{1}{h}\right)-f(x_0)\right]$ 存在;

(2) 极限 $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{h}$ 存在;

(3) 极限 $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$ 存在;

(4) 极限 $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$ 存在.

作业，续二

习题五．课本第73页习题3.1题5：设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，求下列极限

(1) $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+\alpha h)-f(x_0-\beta h)}{h}$；

(2) $\lim_{n\to+\infty} n\left[f\left(x_0+\frac{2}{n}\right)-f(x_0)\right]$；

(3) $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}$；

(4) $\lim_{h\to 0}[f(x_0+h)]^{\frac{1}{h}}$，其中 $f(x_0)=1$，$f'(x_0)\neq 0$．

习题六．课本第73页习题3.1题6：设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导．令

$$g(x)=\begin{cases}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}, & x\neq a,\\ f'(a), & x=a,\end{cases}$$

证明 $g(x)$ 在 $x=a$ 处连续．

作业，续三

习题七．课本第73页习题3.1题7：

(i) 设 $f(x)$ 可导且是偶函数，证明其导函数 $f'(x)$ 是奇函数；

(ii) 设 $f(x)$ 可导且是奇函数，证明其导函数 $f'(x)$ 是偶函数；

(iii) 设 $f(x)$ 可导且是周期函数，证明其导函数 $f'(x)$ 也是周期函数．

习题八．课本第73页习题3.1题9：求常数 a 使得曲线 $y = ax^2$ 与曲线 $y = \ln x$ 相切，并求出切点与切线方程．

习题九．课本第73页习题3.1题11：设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续且极限 $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = A$ 存在(有限)．证明 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导且 $f'(0) = A$．

习题十．课本第73页习题3.1题13：设 $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$, $\triangle x = 0.2$．计算函数 $f(x)$ 在 x_0 处的微分．