第十三周习题参考解答　　　　杨利军　　Dec 08 and Dec 10, 2025

Dec 08 作业

习题一: 课本第172页习题5.6题11: 设 $f(x)$ 在闭区间 $[-a,a]$ 上连续. 证明

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-a}^{a}[f(x)+f(-x)]\,dx, \qquad (*)$$

并利用上述等式计算

$$\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}}dx. \qquad (**)$$

证明: 对积分 $\int_{-a}^{a} f(x)dx$ 作变量代换 $x=-u$ 得

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{a}^{-a} f(-u)d(-u) = \int_{-a}^{a} f(-u)du = \int_{-a}^{a} f(-x)dx.$$

故等式 (*) 成立. 应等式 (*) 到积分 (**) 得

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}}dx = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^x\left(\frac{1}{1+e^x}+\frac{1}{1+e^{-x}}\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^x\left(\frac{1}{1+e^x}+\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{4}.$$

解答完毕.

习题二: 课本第172页习题5.6题12: 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续, 单调不增(即单调下降), 证明对任意 $a\in[0,1]$, 成立

$$\int_0^a f(x)dx \ge a\int_0^1 f(x)dx. \qquad (*)$$

证明: 对不等式 (*) 左边的积分作变量代换 $x=au$, 则

$$\int_0^a f(x)dx = a\int_0^1 f(au)du.$$

再根据假设函数 $f(x)$ 单调不增, 故 $f(au) \geq f(u)$, $\forall u \in [0,1]$. 因此

$$\int_0^a f(x)dx = a\int_0^1 f(au)du \geq a\int_0^1 f(u)du = a\int_0^1 f(x)dx.$$

命题得证.

习题三: 课本第185页习题5.7题1: 求下列函数在区间 $[-a,a]$ 上的平均值, 其中 $a > 0$.

$$(1)\quad f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}, \qquad (2)\quad f(x) = x^3, \qquad (3)\quad f(x) = \cos x.$$

解(1). 函数 $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ 在区间 $[-a,a]$ 上的平均值为

$$\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} f(x)dx = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{1}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}$$
$$= \frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t \cdot a\cos t dt = a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{\pi a}{4}.$$

解(2). 由于函数 $f(x) = x^3$ 时奇函数, 故函数 $f(x) = x^3$ 在区间 $[-a,a]$ 上的平均值为零.

解(3). 函数 $f(x) = \cos x$ 在区间 $[-a,a]$ 上的平均值为

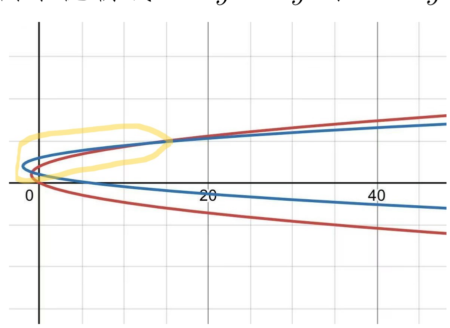
$$\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} f(x)dx = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}\cos x dx = \frac{1}{a}\int_0^a \cos x dx = \frac{\sin a}{a}.$$

习题四: 课本第185页习题5.7题2: 求下列图形的面积(1)(3):

(1) 抛物线 $x = y^2 - 2y$ 与 $x = 2y^2 - 8y + 6$ 所围成图形的面积;

(3) 抛物线 $y = x^2 - 5x + 4$, 与抛物线在点 $x = 0$ 和点 $x = 5$ 处两条切线所围图形的面积.

解(1): 用 desmos 软件画出两条抛物线 $x = y^2 - 2y$ 与 $x = 2y^2 - 8y + 6$, 如图所示.



我们在求这两条抛物线的交点. 令 $y^2-2y=2y^2-8y+6$, 即 $y^2-6y+6=0$. 解之得 $y=3\pm\sqrt{3}$. 所求面积为红色和蓝色的抛物线在范围 $3-\sqrt{3}\le y\le 3+\sqrt{3}$ 内所围图形, 即图中由由黄色线所表示部分的面积 S. 于是

$$S=\int_{3-\sqrt{3}}^{3+\sqrt{3}}\left(y^2-2y-[2y^2-8y+6]\right)dy=\int_{3-\sqrt{3}}^{3+\sqrt{3}}(6y-y^2-6)dy$$

$$=\left[3y^2-\frac{1}{3}y^3-6y\right]_{3-\sqrt{3}}^{3+\sqrt{3}}=3\left[(3+\sqrt{3})^2-(3-\sqrt{3})^2\right]-\frac{1}{3}\left[(3+\sqrt{3})^3-(3-\sqrt{3})^3\right]-12\sqrt{3}$$

$$=36\sqrt{3}-20\sqrt{3}-12\sqrt{3}=4\sqrt{3}.$$

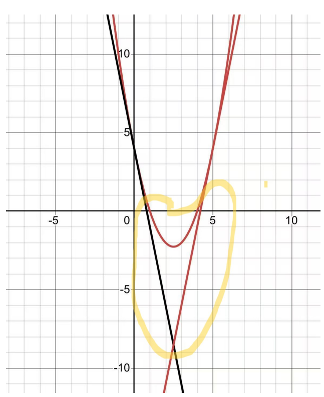
解(3). 对 $y=x^2-5x+4$ 求导得 $y=2x-5$. 由此得 $y'(0)=-5$, $y'(5)=5$. 于是抛物线 $y=x^2-5x+4$ 在点 $(x,y)=(0,4)$ 和点 $(x,y)=(5,4)$ 处两条切线方程分别为

$$y-4=y'(0)x=-5x,\quad \text{即}\quad y=-5x+4$$

和

$$y-4=y'(5)(x-5)=5x-25,\quad \text{即}\quad y=5x-21.$$

由抛物线 $y=x^2-5x+4$ 和两条切线 $y=-5x+4$, $y=5x-21$ 所为图形, 如下图黄色线条所标识.



显然抛物线 $y=x^2-5x+4$ 的对称轴为 $x=\frac{5}{2}$. 由对称性知所求图形面积 S 为

$$S=2\int_0^{\frac{5}{2}}\left(x^2-5x+4-[-5x+4]\right)dx=2\int_0^{\frac{5}{2}}x^2dx=\frac{2}{3}\left(\frac{5}{2}\right)^3=\frac{125}{12}.$$

解答完毕.

习题五: 课本第185页习题5.7题3: 求下列曲线段的弧长 (1)(2)(5):

(1) 曲线段 $y = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{x} \sqrt{\cos t}dt$, $\frac{-\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$;

(2) 曲线段 $x = \arctan t$, $y = \ln\sqrt{1+t^2}$, $0 \le t \le 1$;

(5) 阿基米德螺线段 $\rho = a\theta$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $a > 0$.

解(1). 求导得 $y' = \sqrt{\cos x}$. 于是所求弧长为

$$\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+(y')^2}dx = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos x}dx = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}\cos\frac{x}{2}dx$$

$$= 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\frac{x}{2}dx = 4\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos u du = 4.$$

解(2). 对参数方程 $x = \arctan t$, $y = \ln\sqrt{1+t^2}$ 求导得 $x'(t) = \frac{1}{1+t^2}$, $y'(t) = \frac{t}{1+t^2}$. 于是所求弧长为

$$\int_0^1 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \frac{\cosh u du}{\cosh u} = \ln(1+\sqrt{2}).$$

解(5). 根据极坐标曲线弧长的计算公式得, 阿基米德螺线段 $\rho = a\theta$ $(0 \le \theta \le 2\pi)$ 的弧长为

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(\theta) + r'(\theta)^2}d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\theta^2 + a^2}d\theta = a\int_0^{2\pi} \sqrt{\theta^2+1}d\theta.$$

回忆如下不定积分公式

$$\int \sqrt{x^2+a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C.$$

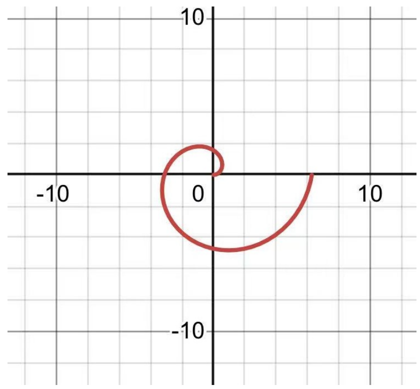
于是所求弧长为

$$a\int_0^{2\pi} \sqrt{\theta^2+1}d\theta = a\left[\frac{\theta}{2}\sqrt{\theta^2+1} + \frac{1}{2}\ln(\theta+\sqrt{\theta^2+1})\right]_0^{2\pi}$$

$$= a\pi\sqrt{4\pi^2+1} + \frac{a}{2}\ln(2\pi+\sqrt{4\pi^2+1}).$$

阿基米德螺线段 $\rho = \theta$, $0 \le \theta \le 2\pi$ 如图所示.

于是



习题六: 课本第185页习题5.7题4: 求下列曲线的曲率(1)(2)

$$(1)\quad y = x^3, \qquad (2)\quad x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

解(1). 根据直角坐标系下曲线 $y = f(x)$ 的曲率公式

$$\kappa = \frac{|f''(x)|}{[1 + f'(x)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

得曲线 $y = x^3$ 在点 $(x, y) = (x, x^3)$ 的曲率为

$$\kappa = \frac{|6x|}{[1 + 9x^4]^{\frac{3}{2}}}.$$

解(2). 回忆参数曲线 $x = x(t), y = y(t)$ 的曲率公式

$$\kappa = \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{[x'(t)^2 + y'(t)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

对于参数曲线 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$,

$$x'(t) = a(1 - \cos t), \quad x''(t) = a \sin t,$$

$$y'(t) = a \sin t, \quad y''(t) = a \cos t.$$

于是

$$x'y'' - x''y' = a(1 - \cos t)a \cos t - a \sin t \cdot a \sin t = a^2(\cos t - 1),$$

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 = a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t = 2a^2(1-\cos t).$$

因此曲线 $x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$ 在点 $(x,y) = (a(t-\sin t), a(1-\cos t))$ 的曲率为

$$\kappa = \frac{|a^2(\cos t - 1)|}{[2a^2(1-\cos t)]^{\frac{3}{2}}} = \frac{a^2(1-\cos t)}{[2a^2(1-\cos t)]^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}[a^2(1-\cos t)]^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{4a\sin\frac{t}{2}}.$$

习题七: 课本第185页习题5.7题5(1): 求极坐标曲线 $\rho = a(1+\cos\theta)$ 的曲率, 其中 $a > 0$.

解: 先将极坐标曲线 $\rho = a(1+\cos\theta)$, 按照 $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$ 写作参数式方程:

$$x = \rho\cos\theta = a(1+\cos\theta)\cos\theta = a\cos\theta + \frac{a}{2}(1+\cos 2\theta),$$

$$y = \rho\sin\theta = a(1+\cos\theta)\sin\theta = a\sin\theta + \frac{a}{2}\sin 2\theta.$$

为求曲线的曲率, 我们来计算 $x(\theta)$, $y(\theta)$ 的一阶和二阶导数:

$$x' = -a\sin\theta - a\sin 2\theta, \qquad x'' = -a\cos\theta - 2a\cos 2\theta,$$

$$y' = a\cos\theta + a\cos 2\theta, \qquad y'' = -a\sin\theta - 2a\sin 2\theta.$$

于是

$$x'y'' - x''y' = (-a\sin\theta - a\sin 2\theta)(-a\sin\theta - 2a\sin 2\theta) - (-a\cos\theta - 2a\cos 2\theta)(a\cos\theta + a\cos 2\theta)$$

$$= a^2\left[(\sin\theta + \sin 2\theta)(\sin\theta + 2\sin 2\theta) + (\cos\theta + 2\cos 2\theta)(\cos\theta + \cos 2\theta)\right]$$

$$= a^2(\sin^2\theta + 3\sin\theta\sin 2\theta + 2\sin^2 2\theta + \cos^2\theta + 3\cos\theta\cos 2\theta + 2\cos^2 2\theta)$$

$$= a^2\left[3 + 3(\sin\theta\sin 2\theta + \cos\theta\cos 2\theta)\right] = 3a^2(1+\cos\theta)$$

且

$$(x')^2 + (y')^2 = a^2(\sin\theta + \sin 2\theta)^2 + a^2(\cos\theta + \cos 2\theta)^2$$

$$= a^2(\sin^2\theta + 2\sin\theta\sin 2\theta + \sin^2 2\theta + \cos^2\theta + 2\cos\theta\cos 2\theta + \cos^2 2\theta)$$

$$= 2a^2(1+\sin\theta\sin 2\theta+\cos\theta\cos 2\theta) = 2a^2(1+\cos\theta).$$

于是所求曲线的曲率为

$$\kappa = \frac{|x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)|}{[x'(t)^2+y'(t)^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{3a^2|1+\cos\theta|}{[2a^2(1+\cos\theta)]^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{4a|\cos\frac{\theta}{2}|}.$$

解答完毕.

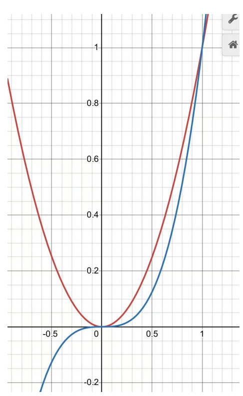
习题八: 课本第185页习题5.7题7(1)(2)(3):

(1) 求由曲线 $y=x^2$ 和 $y=x^3$ 所围图形绕 x 轴旋转生成的旋转体体积.

(2) 记曲线 $y=\sqrt{x}$, x 轴, 以及直线 $x=4$ 所围图形为 S. (i) 求图形 S 绕 $x=4$ 轴旋转生成的旋转体体积. (ii) 求图形 S 绕 y 轴旋转生成的旋转体体积.

(3) 记 S 为椭圆盘 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\le 1$. (i) 求图形 S 绕 x 轴旋转生成的旋转体体积; (ii) 求图形 S 绕 y 轴旋转生成的旋转体体积.

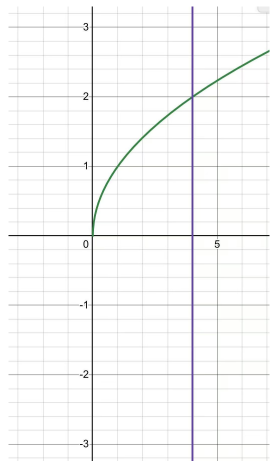
解(1). 由曲线 $y=x^2$ 和 $y=x^3$ 所围的平面区域, 如图所示.



根据绕 x 轴的旋转体的体积公式得所求体积为

$$\int_0^1 \pi(x^4-x^6)dx = \pi\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right) = \frac{2\pi}{35}.$$

解(2). 曲线 $y=\sqrt{x}$, x 轴, 以及直线 $x=4$ 所围区域 S, 如图所示.



(i) 图形 S 绕 $x=4$ 轴旋转生成的旋转体体积为

$$\int_0^4 2\pi(4-x)\sqrt{x}dx = 2\pi\int_0^4 (4x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}})dx = 2\pi\left(4\cdot\frac{2}{3}\cdot 4^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}\cdot 4^{\frac{5}{2}}\right)$$

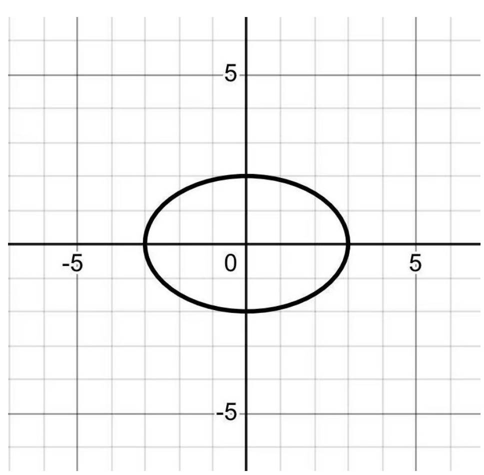
$$= 2\pi\left(\frac{64}{3} - \frac{64}{5}\right) = \frac{256\pi}{15}.$$

(ii) 图形 S 绕 y 轴旋转生成的旋转体体积为

$$\int_0^4 2\pi x\sqrt{x}dx = 2\pi\int_0^4 x^{\frac{3}{2}}dx = \frac{128\pi}{5}.$$

注: 课本答 8π 案疑似为图形 S 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积.

解(3). 椭圆盘 S: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\le 1$ 如图所示



(i) 椭圆盘 S: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\le 1$ 绕 x 轴旋转生成的旋转体体积为

$$\int_{-3}^{3}\pi y^2dx=\int_{-3}^{3}\pi 4\left(1-\frac{x^2}{9}\right)dx=8\pi\int_{0}^{3}\pi\left(1-\frac{x^2}{9}\right)dx=16\pi.$$

(ii) 椭圆盘 S 绕 y 轴旋转生成的旋转体体积为

$$\int_{-2}^{2}\pi x^2dy=\int_{-2}^{2}\pi 9\left(1-\frac{y^2}{4}\right)dy=18\pi\int_{0}^{2}\left(1-\frac{y^2}{4}\right)dx=24\pi.$$

Dec 10 作业

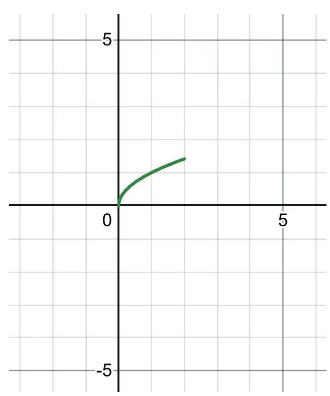
习题一. 课本第186页习题5.7题8(1)(3)(4):

(1) 求抛物线 $y=\sqrt{x}$ $(0\le x\le 2)$ 绕 x 轴旋转所生成的旋转面面积;

(3) 求圆周 $x^2+(y-b)^2=a^2$ $(b\ge a>0)$ 绕 x 轴旋转所生成的旋转面面积;

(3) 求星形线 $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ 绕 x 轴旋转所生成的旋转面面积.

解(1). 抛物线 $y=\sqrt{x}$ $(0\le x\le 2)$ 如图所示.

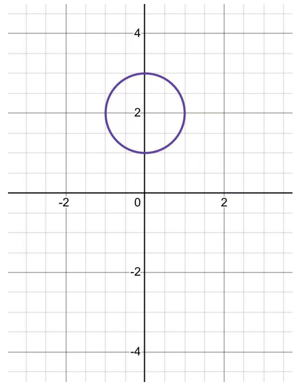


根据旋转面面积公式, 所求旋转面面积为

$$\int_0^2 2\pi y(x)\sqrt{1+y'(x)^2}dx=2\pi\int_0^2\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{4x}}dx=2\pi\int_0^2\sqrt{x+\frac{1}{4}}dx$$

$$=2\pi\cdot\frac{2}{3}\left(x+\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^2=\frac{13\pi}{3}.$$

解(3). 圆周 $x^2+(y-b)^2=a^2$ $(b\ge a>0)$ 绕 x 轴旋转所生成的旋转面为环面. 如图所示.

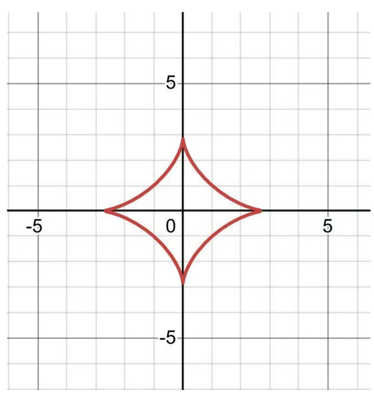


根据 Guldin 第一定理知, 环面面积 S 为

$$S = \text{ 圆周弧长 } \times \text{ 圆周形心(圆心)绕 } x \text{ 轴旋转一周的周长},$$

即 $S=2\pi\cdot 2\pi b=4\pi^2 ab$.

解(3). 所考虑的旋转面可看作由位于上半平面的星形线 $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, $0\le t\le\pi$, 绕 x 轴旋转所生成的旋转面, 如图所示.



根据参数曲线旋转而产生的旋转面的面积公式知, 所求面积 S 为

$$S=\int_0^\pi 2\pi y(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt.$$

对 $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ 求导得

$$x'=-3a\cos^2 t\sin t,\qquad y'=3a\sin^2 t\cos t.$$

由此得

$$x'(t)^2+y'(t)^2=9a^2(\cos^4 t\sin^2 t+\sin^4 t\cos^2 t)=9a^2\cos^2 t\sin^2 t.$$

于是

$$S=\int_0^{\pi}2\pi y(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt=\int_0^{\pi}2\pi a\sin^3 t\sqrt{9a^2\cos^2 t\sin^2 t}dt$$

$$=6\pi a^2\int_0^{\pi}a\sin^3 t|\cos t|\sin t dt=12\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\sin^4 t\cos t dt=\frac{12\pi a^2}{5}.$$

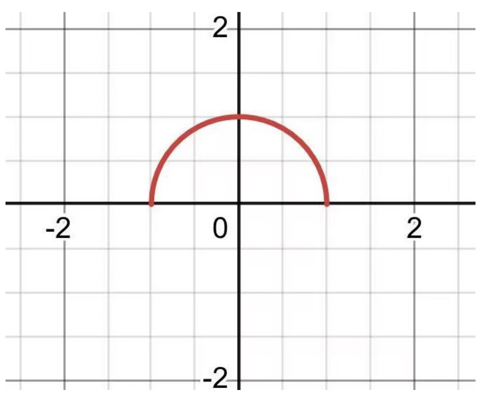
解答完毕.

习题二. 课本第186页习题5.7题9(1)(2):

(1) 求半径为 1 的半圆弧 $x^2+y^2=1$ $(y\geq 0)$ 的形心;

(2) 求星形线 $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ $(0\leq t\leq \frac{\pi}{2})$ 位于第一象限部分的形心.

解(1): 半径为 1 的半圆弧 $x^2+y^2=1$ $(y\geq 0)$ 如图所示.

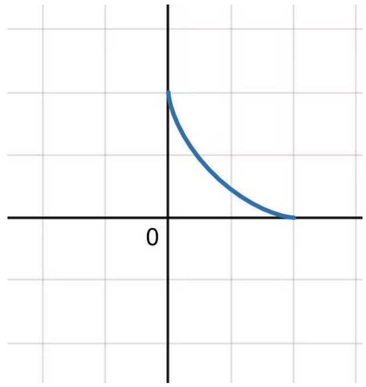


有对称性知形心 $(\bar{x},\bar{y})$ 闭位于 y 轴上, 即 $\bar{x}=0$. 以下我们来求 $\bar{y}$. 为此我们先求半圆弧关于 x 轴的总力矩. 半圆弧 $x^2+y^2=1$ $(y\geq 0)$ 的参数方程可写作 $x=\cos t$, $y=\sin t$, $0\leq t\leq \pi$. 于是半圆弧关于 x 轴的总力矩

$$\int_0^{\pi}y(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt=\int_0^{\pi}\sin t\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}dt=\int_0^{\pi}\sin t dt=2.$$

显然半圆弧的弧长为 π. 于是半圆弧关于 x 轴的总力矩为 $\frac{2}{\pi}$. 所求形心为 $(0,\frac{2}{\pi})$.

解(2): 星形线 $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ $(0\leq t\leq \frac{\pi}{2})$ 位于第一象限部分记作 Γ, 如图所示.



(i) 求曲线 Γ 弧长. 对参数方程 $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ 求导得

$$x' = -3a\cos^2 t\sin t, \qquad y' = 3a\sin^2 t\cos t.$$

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 = 9a^2(\cos^4 t\sin^2 t + \sin^4 t\cos^2 t) = 9a^2\cos^2 t\sin^2 t.$$

于是曲线 Γ 的弧长为

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2\cos^2 t\sin^2 t}dt = 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\sin tdt = \frac{3a}{2}.$$

(ii) 求曲线 Γ 关于 x 轴的总力矩:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} y(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3 t\sqrt{9a^2\cos^2 t\sin^2 t}dt$$

$$= 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\cos t\sin tdt = 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\cos tdt = \frac{3a^2}{5}.$$

(iii) 根据对称性, 曲线 Γ 关于 y 轴的总力矩也为 $\frac{3a^2}{5}$. 因此曲线 Γ 的形心 $(\bar{x}, \bar{y})$ 为

$$\bar{x} = \frac{\frac{3a^2}{5}}{\frac{3a}{2}} = \frac{2a}{5}, \qquad \bar{y} = \bar{x} = \frac{2a}{5}.$$

习题三. 课本第187页第5章复习题题7(修改版): 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续.

(1) 若极限 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, 证明 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续.

(2) 若极限 $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - x] = 0$, 证明 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续.

(3) 若极限 $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - x^2] = 0$, 证明 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上非一致连续.

证(1). 由假设 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ 知, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $M > 0$, 使得对任意 $x \ge M$, $|f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. 由于 $f(x)$ 在区间 $[0, M+1]$ 上连续, 从而一致连续. 于是对上述 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta_1 > 0$, 使得对任意 $x_1, x_2 \in [0, M+1]$, $|x_1 - x_2| < \delta_1$, 成立 $|f(x_1) - x_2| < \varepsilon$. 取 $\delta = \min\{\delta_1, 1\}$, 对任意 $x_1, x_2 \ge 0$, $|x_1 - x_2| < \delta_1$, 则 x_1, x_2 的位置只可能为如下两个情形:

(i) $x_1, x_2 \in [0, M+1]$. 此时成立 $|f(x_1) - x_2| < \varepsilon$;

(ii) $x_1, x_2 \ge M$. 此时

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le |f(x_1)| + |f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

这就证明了函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续.

证(2). 令 $g(x) = f(x) - x$, 则 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 且 $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. 根据结论 (1) 的结论知, $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续. 又函数 x 显然在 $[0, +\infty)$ 上一致连续. 因此 $f(x) = g(x) + x$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续.

证(3). 令 $h(x) = f(x) - x^2$, 则 $h(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 且 $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. 根据结论 (1) 的结论知, $h(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续. 假设函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续, 则 $x^2 = f(x) - h(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续, 但我们已经证明了函数 x^2 在 $[0, +\infty)$ 上非一致连续. 矛盾. 这就证明了函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上非一致连续. 证明.

习题四. 课本第187页第5章复习题题9: 设 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上连续可微, 试求极限

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{4x^2} \int_{-x}^{x} [f(t+x) - f(t-x)]\, dt.$$

解: 我们将使用 L'Hospital 法则求极限。 为此将积分化为方便求导的形式:

$$\int_{-x}^{x} f(t+x)dt = \int_0^{2x} f(u)du, \qquad \int_{-x}^{x} f(t-x)dt = \int_{-2x}^{0} f(u)du.$$

于是

$$\frac{1}{4x^2} \int_{-x}^{x} [f(t+x) - f(t-x)]\, dt = \frac{1}{4x^2} \left(\int_0^{2x} f(u)du - \int_{-2x}^{0} f(u)du \right).$$

考虑

$$\frac{1}{(4x^2)'} \left(\int_0^{2x} f(u)du - \int_{-2x}^{0} f(u)du \right)' = \frac{1}{8x} [2f(2x) - 2f(-2x)] = \frac{1}{4x} [f(2x) - f(-2x)].$$

再次分子分母求导得

$$\frac{1}{(4x)'}\left[f(2x)-f(-2x)\right]'=\frac{1}{4}\left[2f'(2x)+2f'(-2x)\right]\to f'(0),\qquad x\to 0^+.$$

故所求极限为

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{4x^2}\int_{-x}^{x}\left[f(t+x)-f(t-x)\right]dt=f'(0).$$

解答完毕.

习题五. 课本第187-188页第5章复习题题10(修改版): 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上非负连续. 假设对任意 $a>0$, 函数曲线 $y=f(x)$ 在闭区间 $[0,a]$ 上的面积为 $S(a)=\frac{a^2}{2}+\frac{a}{2}\sin a+\frac{\pi}{2}\cos a$, 试求 $f(\frac{\pi}{2})$.

解: 依题意有

$$\int_0^a f(t)dt=S(a)=\frac{a^2}{2}+\frac{a}{2}\sin a+\frac{\pi}{2}\cos a,\quad \forall a>0.$$

对上式求导得

$$f(a)=a+\frac{1}{2}\sin a+\frac{a}{2}\cos a-\frac{\pi}{2}\sin a,\quad \forall a>0.$$

由此得 $f(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}-\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}$. 解答完毕.

习题六. 课本第188页第5章复习题题12(修改版): 设 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上连续, 且极限 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 存在(有限), 记作 a. 定义 $\phi(x)\overset{\text{def}}{=}\int_0^1 f(xt)dt$, 试求导数 $\phi'(x)$, 并讨论导函数 $\phi'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解: 根据假设极限 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=a$ 存在(有限)可知, $f(0)=0$. 由此得 $\phi(0)=0$. 于是当 $x\neq 0$ 时, 函数 $\phi(x)$ 可写作

$$\phi(x)=\frac{1}{x}\int_0^1 f(xt)d(xt)=\frac{1}{x}\int_0^x f(u)du.$$

由此可见函数 $\phi(x)$ 对任意点 $x\neq 0$ 处可导, 且

$$\phi'(x)=\frac{f(x)}{x}-\frac{1}{x^2}\int_0^x f(u)du.$$

我们再来考虑函数 $\phi(x)$ 在 $x=0$ 处的可导性:

$$\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}=\frac{1}{x^2}\int_0^x f(u)du.$$

我们尝试用 L'Hospital 方法求当 $x\to 0$ 上述差商的极限:

$$\frac{1}{(x^2)'}\left(\int_0^x f(u)du\right)'=\frac{1}{2}\frac{f(x)}{x}\to\frac{a}{2}.$$

因此 $\phi'(0)=\frac{a}{2}$. 综上我们看到函数 $\phi(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 上处处可导. 以下考虑导函数 $\phi'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性:

$$\lim_{x\to 0}\phi'(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{x}-\frac{1}{x^2}\int_0^x f(u)du\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\int_0^x f(u)du=a-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}=\phi'(0).$$

由此可见, 导函数 $\phi'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续. 解答完毕.

习题七. 课本第188页第5章复习题题13: 求如下不定积分的递推关系式

$$I_n=\int\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}dx,\qquad \forall n\geq 1.$$

解: 显然

$$I_0=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C;$$

$$I_1=\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{2}\int\frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}=-\sqrt{1-x^2}+C.$$

对 $n\geq 2$

$$I_n=\int\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{x^n-x^{n-2}}{\sqrt{1-x^2}}dx+\int\frac{x^{n-2}}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{x^{n-2}(x^2-1)}{\sqrt{1-x^2}}dx+I_{n-2}$$

$$=I_{n-2}-\int x^{n-2}\sqrt{1-x^2}dx=I_{n-2}-\frac{1}{n-1}\int\sqrt{1-x^2}dx^{n-1}$$

$$= I_{n-2} - \frac{1}{n-1}\left(x^{n-1}\sqrt{1-x^2} - \int x^{n-1}\frac{-2xdx}{2\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$= I_{n-2} - \frac{x^{n-1}\sqrt{1-x^2}}{n-1} - \frac{1}{n-1}\int \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= I_{n-2} - \frac{1}{n-1}I_n - \frac{x^{n-1}\sqrt{1-x^2}}{n-1}.$$

于是我们得到

$$I_n = I_{n-2} - \frac{1}{n-1}I_n - \frac{x^{n-1}\sqrt{1-x^2}}{n-1}.$$

由此解得

$$I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2} - \frac{x^{n-1}\sqrt{1-x^2}}{n}, \quad \forall n \geq 2.$$

解答完毕

习题八. 课本第188页第5章复习题题14: 设常数 $a \neq 0$, 计算不定积分

$$\int \frac{dx}{x(x^n+a)}.$$

解: 注意到

$$\frac{1}{x(x^n+a)} = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{x} - \frac{x^{n-1}}{x^n+a}\right).$$

于是

$$\int \frac{dx}{x(x^n+a)} = \frac{1}{a}\left(\int \frac{dx}{x} - \int \frac{x^{n-1}dx}{x^n+a}\right) = \frac{1}{a}\left(\ln|x| - \frac{1}{n}\ln|x^n+a|\right) + C.$$

解答完毕.