**20.** 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,1)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,1,-1)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,-1,-2,2)^T$。
(1) 求 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的长度及彼此间夹角；
(2) 求与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 都正交的向量。

**解：**

(1) 由已知向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,1)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,1,-1)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,-1,-2,2)^T$，计算各向量的长度（模）：

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{\alpha}_1\| &= \sqrt{1^2+2^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{7}\\
\|\boldsymbol{\alpha}_2\| &= \sqrt{2^2+3^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{15}\\
\|\boldsymbol{\alpha}_3\| &= \sqrt{(-1)^2+(-1)^2+(-2)^2+2^2}=\sqrt{10}
\end{aligned}$$

计算向量间的内积：

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2) &= 1\times 2+2\times 3+(-1)\times 1+1\times(-1)=6\\
(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3) &= 1\times(-1)+2\times(-1)+(-1)\times(-2)+1\times 2=1\\
(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3) &= 2\times(-1)+3\times(-1)+1\times(-2)+(-1)\times 2=-9
\end{aligned}$$

设 $\theta_{ij}$ 为向量 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_j$ 的夹角，则：

$$\begin{aligned}
\cos\theta_{12} &= \frac{(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|\|\boldsymbol{\alpha}_2\|}=\frac{6}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{15}}=\frac{6}{\sqrt{105}}\\
\cos\theta_{13} &= \frac{(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3)}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|\|\boldsymbol{\alpha}_3\|}=\frac{1}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{70}}\\
\cos\theta_{23} &= \frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)}{\|\boldsymbol{\alpha}_2\|\|\boldsymbol{\alpha}_3\|}=\frac{-9}{\sqrt{15}\cdot\sqrt{10}}=-\frac{3\sqrt{6}}{10}
\end{aligned}$$

故夹角分别为 $\arccos\frac{6}{\sqrt{105}},\arccos\frac{1}{\sqrt{70}},\arccos\left(-\frac{3\sqrt{6}}{10}\right)$。

(2) 设与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 都正交的向量为 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$。根据正交的定义，有方程组：

$$\begin{cases}
x_1+2x_2-x_3+x_4=0\\
2x_1+3x_2+x_3-x_4=0\\
-x_1-x_2-2x_3+2x_4=0
\end{cases}$$

对系数矩阵进行初等行变换：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由行最简形可得：

$$\begin{cases} x_2 = 3x_3 - 3x_4 \\ x_1 = -2x_2 + x_3 - x_4 = -5x_3 + 5x_4 \end{cases}$$

令 $x_3 = 1, x_4 = 0$，得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1 = (-5, 3, 1, 0)^T$；令 $x_3 = 0, x_4 = 1$，得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_2 = (5, -3, 0, 1)^T$。

故所求向量为：

$$\boldsymbol{x} = k_1 \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (k_1, k_2 \text{ 为不全为零的常数})$$

**21.** 如 $\beta$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 都正交，证明 $\beta$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的任一线性组合也正交。

**证明：**

设 $\gamma$ 为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的任意线性组合，即存在标量 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 使得：

$$\gamma = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = \sum_{i=1}^{s} k_i\alpha_i$$

我们要证明 $\beta$ 与 $\gamma$ 正交，即证明它们的内积为 0。计算 $\beta$ 与 $\gamma$ 的内积：

$$\begin{aligned} \langle \beta, \gamma \rangle &= \left\langle \beta, \sum_{i=1}^{s} k_i\alpha_i \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{s} k_i \langle \beta, \alpha_i \rangle \quad (\text{利用内积的线性性质}) \end{aligned}$$

由已知条件可知，$\beta$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 都正交，故：

$$\langle \beta, \alpha_i \rangle = 0, \quad (i = 1, 2, \cdots, s)$$

将此代入上式可得：

$$\langle \beta, \gamma \rangle = \sum_{i=1}^{s} k_i \cdot 0 = 0$$

由于 $\langle \beta, \gamma \rangle = 0$，故 $\beta$ 与该线性组合 $\gamma$ 正交。

$\square$

**22.** 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 是欧氏空间 $V$ 的标准正交基，证明：

$$\eta_1 = \frac{1}{3}(2\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 - \varepsilon_3), \quad \eta_2 = \frac{1}{3}(2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3), \quad \eta_3 = \frac{1}{3}(\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 - 2\varepsilon_3)$$

也是 $V$ 的一组标准正交基。

**证明：**

要证明 $\eta_1, \eta_2, \eta_3$ 是 $V$ 的一组标准正交基，只需证明它们满足以下两个条件：

1. 单位性：$|\eta_i| = 1$ (即 $\langle \eta_i, \eta_i \rangle = 1$)；
2. 正交性：$\langle \eta_i, \eta_j \rangle = 0$ $(i \neq j)$。

已知 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 为标准正交基，故满足 $\langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle = \delta_{ij}$。我们可以利用系数的坐标运算来计算内积。

**1. 验证单位性（长度为 1）：**

$$\begin{aligned}
\langle \eta_1, \eta_1 \rangle &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 (2^2 + 2^2 + (-1)^2) = \frac{1}{9}(4+4+1) = \frac{9}{9} = 1 \\
\langle \eta_2, \eta_2 \rangle &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 (2^2 + (-1)^2 + 2^2) = \frac{1}{9}(4+1+4) = \frac{9}{9} = 1 \\
\langle \eta_3, \eta_3 \rangle &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 (1^2 + (-2)^2 + (-2)^2) = \frac{1}{9}(1+4+4) = \frac{9}{9} = 1
\end{aligned}$$

故 $\eta_1, \eta_2, \eta_3$ 均为单位向量。

**2. 验证正交性（内积为 0）：**

$$
\begin{aligned}
\langle \eta_1, \eta_2 \rangle &= \frac{1}{9}[2 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2] = \frac{1}{9}(4 - 2 - 2) = 0 \\
\langle \eta_1, \eta_3 \rangle &= \frac{1}{9}[2 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) + (-1) \cdot (-2)] = \frac{1}{9}(2 - 4 + 2) = 0 \\
\langle \eta_2, \eta_3 \rangle &= \frac{1}{9}[2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) + 2 \cdot (-2)] = \frac{1}{9}(2 + 2 - 4) = 0
\end{aligned}
$$

故 $\eta_1, \eta_2, \eta_3$ 两两正交。

**结论：**

综上所述，向量组 $\eta_1, \eta_2, \eta_3$ 是由单位向量组成的两两正交的向量组。又因为 $V$ 是 3 维空间，包含 3 个向量的标准正交向量组必然是 $V$ 的一组标准正交基。

□

**25.** 证明：$n$ 阶主对角元素为正数的上三角正交矩阵是单位矩阵。

**证明：**

设 $A = (a_{ij})$ 为 $n$ 阶上三角矩阵，且主对角元 $a_{ii} > 0$。因为 $A$ 是正交矩阵，所以 $A$ 的列向量组构成 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基。记 $A$ 的列向量为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$。

由于 $A$ 是上三角矩阵，其列向量形式如下：

$$
\alpha_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \alpha_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{jj} \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}
$$

**第一步：考察第一列** $\alpha_1$

由正交矩阵性质可知 $|\alpha_1|^2 = 1$，即：

$$
a_{11}^2 = 1
$$

因为已知 $a_{11} > 0$，故解得 $\mathbf{a_{11} = 1}$。

**第二步：考察第二列** $\alpha_2$

由正交性 $\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle=0$，代入计算：

$$a_{11}a_{12}+0\cdot a_{22}+\cdots=1\cdot a_{12}=0 \implies \mathbf{a_{12}=0}$$

由单位性 $|\alpha_2|^2=1$，即：

$$a_{12}^2+a_{22}^2=0+a_{22}^2=1$$

因为 $a_{22}>0$，故解得 $\mathbf{a_{22}=1}$。

**第三步：数学归纳法推广**

假设对于 $k-1$ 列，结论成立，即 $A$ 的左上角 $(k-1)\times(k-1)$ 子块为单位矩阵，且第 1 到 $k-1$ 列在对角线下方及上方元素均为 0。考察第 $k$ 列 $\alpha_k=(a_{1k},a_{2k},\cdots,a_{kk},0,\cdots,0)^T$。

利用正交性，$\alpha_k$ 与前 $k-1$ 列分别正交：

$$\begin{cases}\langle\alpha_1,\alpha_k\rangle=1\cdot a_{1k}=0 \implies a_{1k}=0\\ \langle\alpha_2,\alpha_k\rangle=1\cdot a_{2k}=0 \implies a_{2k}=0\\ \vdots\\ \langle\alpha_{k-1},\alpha_k\rangle=1\cdot a_{k-1,k}=0 \implies a_{k-1,k}=0\end{cases}$$

这意味着第 $k$ 列在对角线以上的元素全为 0。再利用单位性 $|\alpha_k|^2=1$：

$$a_{kk}^2=1$$

因 $a_{kk}>0$，故 $\mathbf{a_{kk}=1}$。

**结论：**

综上所述，矩阵 $A$ 的对角元均为 1，非对角元均为 0。

$$A=I$$

即 $n$ 阶主对角元素为正数的上三角正交矩阵必然是单位矩阵。

□

**26.** 已知 $Q=\begin{bmatrix}a & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7}\\ b & c & d\\ -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} & e\end{bmatrix}$ 为正交矩阵，求 $a,b,c,d,e$ 的值。

**解：**

正交矩阵的行向量组和列向量组均为标准正交基。我们利用这一性质分步求解。

**第一步：确定 $a$ 和 $e$ 的值**

考察矩阵 $Q$ 的第 1 行 $\mathbf{r}_1$ 和第 3 行 $\mathbf{r}_3$。

1. **利用单位性（模长为 1）：**

$$|\mathbf{r}_1|^2 = a^2 + \left(-\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{2}{7}\right)^2 = a^2 + \frac{9}{49} + \frac{4}{49} = 1$$

$$\implies a^2 = 1 - \frac{13}{49} = \frac{36}{49} \implies a = \pm\frac{6}{7}$$

同理，对于第 3 行：

$$|\mathbf{r}_3|^2 = \left(-\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{2}{7}\right)^2 + e^2 = 1 \implies e^2 = \frac{36}{49} \implies e = \pm\frac{6}{7}$$

2. **利用正交性（内积为 0）：**

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_3 = a\left(-\frac{3}{7}\right) + \left(-\frac{3}{7}\right)\left(\frac{2}{7}\right) + \left(\frac{2}{7}\right)e = 0$$

两边同乘 49 化简得：

$$-3(7a) - 6 + 2(7e) = 0 \implies -21a + 14e = 6$$

我们将 $a = \pm\frac{6}{7}$ 和 $e = \pm\frac{6}{7}$ 代入检验：

- 若 $a = \frac{6}{7}$，则 $-21(\frac{6}{7}) + 14e = 6 \implies -18 + 14e = 6 \implies 14e = 24 \implies e = \frac{12}{7}$（舍去，因为 $|e| \leq 1$）。
- 若 $a = -\frac{6}{7}$，则 $-21(-\frac{6}{7}) + 14e = 6 \implies 18 + 14e = 6 \implies 14e = -12 \implies e = -\frac{6}{7}$（成立）。

故唯一确定：$\mathbf{a = -\frac{6}{7}}, \quad \mathbf{e = -\frac{6}{7}}$。

**第二步：确定 $b, c, d$ 的值**

利用列向量的单位性和正交性。

1. **求 $b$：** 考察第 1 列的模长。

$$a^2+b^2+\left(-\frac{3}{7}\right)^2=1 \implies \frac{36}{49}+b^2+\frac{9}{49}=1 \implies b^2=\frac{4}{49} \implies b=\pm\frac{2}{7}$$

2. **求 $d$：** 考察第 1 列与第 3 列的正交性。

$$\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{c}_3=a\left(\frac{2}{7}\right)+bd+\left(-\frac{3}{7}\right)e=0$$

代入 $a,e$ 的值：

$$\left(-\frac{6}{7}\right)\left(\frac{2}{7}\right)+bd+\left(-\frac{3}{7}\right)\left(-\frac{6}{7}\right)=0$$

$$-\frac{12}{49}+bd+\frac{18}{49}=0 \implies bd=-\frac{6}{49}$$

3. **求 $c$：** 考察第 1 列与第 2 列的正交性。

$$\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{c}_2=a\left(-\frac{3}{7}\right)+bc+\left(-\frac{3}{7}\right)\left(\frac{2}{7}\right)=0$$

$$\left(-\frac{6}{7}\right)\left(-\frac{3}{7}\right)+bc-\frac{6}{49}=0$$

$$\frac{18}{49}+bc-\frac{6}{49}=0 \implies bc=-\frac{12}{49}$$

**第三步：综合求解**

我们有 $b=\pm\frac{2}{7}$ 以及关系式 $bd=-\frac{6}{49}$ 和 $bc=-\frac{12}{49}$。

- **情形 1：** 当 $b=\frac{2}{7}$ 时：

$$d=\frac{-6/49}{2/7}=-\frac{3}{7},\quad c=\frac{-12/49}{2/7}=-\frac{6}{7}$$

- **情形 2：** 当 $b=-\frac{2}{7}$ 时：

$$d=\frac{-6/49}{-2/7}=\frac{3}{7},\quad c=\frac{-12/49}{-2/7}=\frac{6}{7}$$

(注：这两种情形对应矩阵行列式为 1 或 -1，均为正交矩阵的合法解)。

**结论：**

方程组有两组解：

$$\begin{cases} a = -\frac{6}{7}, \quad b = \frac{2}{7}, \quad c = -\frac{6}{7}, \quad d = -\frac{3}{7}, \quad e = -\frac{6}{7} \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} a = -\frac{6}{7}, \quad b = -\frac{2}{7}, \quad c = \frac{6}{7}, \quad d = \frac{3}{7}, \quad e = -\frac{6}{7} \end{cases}$$

**27.** 写出所有三阶正交矩阵，它的元素是 0 或 1。

**解：**

设三阶矩阵 $A = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$，其中 $\mathbf{c}_i$ 为列向量。由于 $A$ 是正交矩阵，且元素为 0 或 1，则每一列向量必须满足 $\|\mathbf{c}_i\|^2 = 1$。这意味着每一列中恰好有一个元素为 1，其余为 0。同时，由于列向量两两正交 $\mathbf{c}_i^T\mathbf{c}_j = 0$ $(i \neq j)$，这意味着不同列的 1 不能在同一行。因此，满足条件的矩阵即为三阶置换矩阵，共有 $3! = 6$ 个：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**28.** 如果一个正交阵中每个元素都是 $\frac{1}{4}$ 或 $-\frac{1}{4}$，这个正交矩阵是几阶的？

**解：**

设该正交矩阵为 $A$，其阶数为 $n$。设 $A$ 的列向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$。

根据正交矩阵的定义，其列向量组构成一组标准正交基，因此每一个列向量都是单位向量。即对于任意 $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$，满足：

$$\|\boldsymbol{\alpha}_j\|^2 = 1$$

设列向量 $\boldsymbol{\alpha}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj})^T$。根据题目条件，矩阵中每个元素 $a_{ij}$ 均为 $\frac{1}{4}$ 或 $-\frac{1}{4}$。因此，每个元素的平方为：

$$a_{ij}^2 = \left(\pm\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

将此代入单位向量的模长公式中：

$$\|\boldsymbol{\alpha}_j\|^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{16} = 1$$

上式即为 $n$ 个 $\frac{1}{16}$ 相加等于 1：

$$n \cdot \frac{1}{16} = 1$$

解得：

$$n = 16$$

**结论：**该正交矩阵是 16 阶的。

**29.** 若 $\boldsymbol{\alpha}$ 是一个单位向量，证明 $Q = I - 2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$ 是一个正交阵（豪斯霍尔德 (Householder) 变换阵）。当 $\boldsymbol{\alpha} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T$ 时，具体求出 $Q$。

**解：**

(1) **证明：**

首先验证 $Q$ 的对称性：

$$Q^T = (I - 2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T)^T = I^T - 2(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T)^T = I - 2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T = Q$$

要证明 $Q$ 是正交阵，只需验证 $Q^TQ = I$。由于 $Q^T = Q$，即验证 $Q^2 = I$：

$$\begin{aligned} Q^2 &= (I - 2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T)(I - 2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T) \\ &= I - 2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T - 2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T + 4\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T \\ &= I - 4\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T + 4\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}^T \end{aligned}$$

已知 $\boldsymbol{\alpha}$ 为单位向量，故 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha} = \|\boldsymbol{\alpha}\|^2 = 1$。代入上式得：

$$Q^2 = I - 4\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T + 4\boldsymbol{\alpha}(1)\boldsymbol{\alpha}^T = I$$

故 $Q$ 是正交矩阵。

(2) **计算：**

当 $\boldsymbol{\alpha} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T$ 时，

$$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

则:

$$Q = I - 2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

**30.** 证明正交阵的伴随矩阵 $A^*$ 也是正交阵。

**证明:**

**1. 回顾定义与性质**已知 $A$ 是正交矩阵，根据正交矩阵的定义与性质，满足以下条件:

1. $A$ 可逆，且 $A^{-1} = A^T$;
2. $|A| = 1$ 或 $|A| = -1$，即 $|A|^2 = 1$。

**2. 建立 $A^*$ 与 $A$ 的关系**根据伴随矩阵的性质公式 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$，可得:

$$A^* = |A|A^{-1}$$

将 $A^{-1} = A^T$ 代入上式，得:

$$A^* = |A|A^T$$

**3. 验证正交性**要证明 $A^*$ 是正交矩阵，只需证明 $(A^*)^T A^* = I$。

将 $A^* = |A|A^T$ 代入计算:

$$\begin{aligned} (A^*)^T A^* &= (|A|A^T)^T \cdot (|A|A^T) \\ &= (|A|(A^T)^T) \cdot (|A|A^T) \quad \text{(常数转置不变，} (A^T)^T = A) \\ &= |A|A \cdot |A|A^T \\ &= |A|^2(AA^T) \end{aligned}$$

由于 $|A|^2 = 1$ 且 $A$ 为正交阵（$AA^T = I$），故:

$$(A^*)^T A^* = 1 \cdot I = I$$

**结论:** 因为 $(A^*)^T A^* = I$，所以 $A^*$ 也是正交矩阵。

□

**练习 3.1.3** 求证:

1. 在 $\mathbb{R}^n$ 中的非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 夹角为 $0$, 当且仅当存在 $k>0$, 使得 $\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{b}$。
2. 在 $\mathbb{R}^n$ 中的两向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 正交, 当且仅当对任意实数 $t$, 有 $\|\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}\|\geq\|\boldsymbol{a}\|$。
3. 在 $\mathbb{R}^n$ 中的非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 正交，当且仅当 $\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|=\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|$。

**解答 3.1.3**

1. **证明:**

   设 $\theta$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之间的夹角。根据内积的定义，有

   $$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|}$$

   $(\Rightarrow)$ 必要性：若夹角为 $0$，即 $\theta=0$，则 $\cos\theta=1$。此时有

   $$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$$

   根据柯西-施瓦茨不等式 (Cauchy-Schwarz Inequality) 的取等条件, 当且仅当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 线性相关时等号成立，即存在实数 $k$ 使得 $\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{b}$。代入上式得 $k\|\boldsymbol{b}\|^2=\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$。由于 $\|\boldsymbol{a}\|,\|\boldsymbol{b}\|>0$，故必须有 $k>0$。

   $(\Leftarrow)$ 充分性：若存在 $k>0$ 使得 $\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{b}$，则

   $$\cos\theta=\frac{(k\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}}{\|k\boldsymbol{b}\|\|\boldsymbol{b}\|}=\frac{k\|\boldsymbol{b}\|^2}{|k|\|\boldsymbol{b}\|^2}$$

   因为 $k>0$，所以 $|k|=k$，从而 $\cos\theta=1$，即夹角为 $0$。 □

2. **证明:**

   考虑 $\|\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}\|^2$ 的展开式：

   $$\|\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}\|^2=(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b})=\|\boldsymbol{a}\|^2+2t(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})+t^2\|\boldsymbol{b}\|^2$$

   $(\Rightarrow)$ 必要性：若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 正交，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$。上式变为：

   $$\|\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}\|^2=\|\boldsymbol{a}\|^2+t^2\|\boldsymbol{b}\|^2$$

   因为 $t^2\|\boldsymbol{b}\|^2\geq 0$，所以 $\|\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}\|^2\geq\|\boldsymbol{a}\|^2$，开方即得 $\|\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}\|\geq\|\boldsymbol{a}\|$。

   $(\Leftarrow)$ 充分性：若对任意实数 $t$，都有 $\|\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}\|\geq\|\boldsymbol{a}\|$，则平方后有：

   $$\|\boldsymbol{a}\|^2+2t(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})+t^2\|\boldsymbol{b}\|^2\geq\|\boldsymbol{a}\|^2$$

化简得：

$$2t(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})+t^2\|\boldsymbol{b}\|^2\geq 0$$

定义函数 $f(t)=t^2\|\boldsymbol{b}\|^2+2t(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$。这是一个关于 $t$ 的二次函数（或线性函数，若 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$）。由于 $f(0)=0$ 且 $f(t)\geq 0$ 对任意 $t$ 恒成立，说明 $t=0$ 是该函数的极小值点。根据极值条件，其在 $t=0$ 处的导数必须为 0：

$$f'(0)=2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=0\implies \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$$

故 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 正交。 □

3. **证明：**

利用范数的平方展开性质：

$$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2=\|\boldsymbol{a}\|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\|\boldsymbol{b}\|^2$$

$$\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|^2=\|\boldsymbol{a}\|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\|\boldsymbol{b}\|^2$$

($\Rightarrow$) 必要性：若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 正交，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$。此时上述两式均为 $\|\boldsymbol{a}\|^2+\|\boldsymbol{b}\|^2$，故 $\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|=\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|$。

($\Leftarrow$) 充分性：若 $\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|=\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|$，则两边平方相等：

$$\|\boldsymbol{a}\|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\|\boldsymbol{b}\|^2=\|\boldsymbol{a}\|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\|\boldsymbol{b}\|^2$$

消去相同项 $\|\boldsymbol{a}\|^2$ 和 $\|\boldsymbol{b}\|^2$，得：

$$2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\implies 4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\implies \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$$

故 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 正交。 □

**练习 3.1.7**　设 $\|\boldsymbol{a}\|=3,\|\boldsymbol{b}\|=4$，确定 $\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|$ 的取值范围。

**解：**

根据向量范数的三角不等式（Triangle Inequality），对于任意向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，有如下关系成立：

$$\big|\|\boldsymbol{a}\|-\|\boldsymbol{b}\|\big|\leq\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|\leq\|\boldsymbol{a}\|+\|\boldsymbol{b}\| \tag{1}$$

将已知条件 $\|\boldsymbol{a}\| = 3$ 和 $\|\boldsymbol{b}\| = 4$ 代入上述不等式，可得：

$$\begin{aligned}|3-4| \le \|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\| &\le 3+4\\ |-1| \le \|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\| &\le 7\\ 1 \le \|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\| &\le 7\end{aligned}$$

因此，$\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|$ 的取值范围为 $[1, 7]$。

**练习 3.1.8** 设 $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} z \\ x \\ y \end{bmatrix}$，且 $x+y+z=0$。确定 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 夹角的取值范围。

**解答 3.1.8**

**解：**

设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\theta$。根据向量夹角的余弦公式：

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|}$$

其中，我们需要假设 $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$（即 $x, y, z$ 不全为 0），否则夹角无定义。

1. **计算模长：**

$$\|\boldsymbol{a}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\|\boldsymbol{b}\|^2 = z^2 + x^2 + y^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

   显然 $\|\boldsymbol{a}\| = \|\boldsymbol{b}\|$。于是分母为：

$$\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| = \|\boldsymbol{a}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

2. **计算内积：**

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = xz + yx + zy = xy + yz + zx$$

3. **利用约束条件化简：**已知 $x+y+z=0$，我们将该式两边平方：

$$(x+y+z)^2 = 0^2 \implies x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 0$$

   从而得到内积与模长平方的关系：

$$2(xy + yz + zx) = -(x^2 + y^2 + z^2)$$

即：

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = xy + yz + zx = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$$

4. **计算夹角：** 将上述结果代入余弦公式：

$$\cos\theta = \frac{-\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)}{x^2 + y^2 + z^2} = -\frac{1}{2}$$

由于 $\theta \in [0, \pi]$，且 $\cos\theta = -\frac{1}{2}$，故：

$$\theta = \frac{2\pi}{3} \quad (\text{即}120^\circ)$$

**结论：** 在 $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ 的前提下，向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为固定值 $\frac{2\pi}{3}$。

**练习 3.1.10**

**1.** 找到 $\mathbb{R}^2$ 中的三个向量，使它们之间两两内积为负。

**2.** 找到 $\mathbb{R}^3$ 中的四个向量，使它们之间两两内积为负。

**3.** $\mathbb{R}^n$ 中最多有多少个向量，使它们之间两两内积为负？

**练习 3.1.10 解答**

**1.** $\mathbb{R}^2$ **中的三个向量**

我们需要找到三个向量，使它们两两之间的夹角大于 $90^\circ$（即 $\cos\theta < 0$）。最自然的构造是取平面上互成 $120^\circ$ 角的三个单位向量（类似于正三角形的重心指向顶点的方向）。

令：

$$\boldsymbol{u}_1 = (0, 1)$$
$$\boldsymbol{u}_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$
$$\boldsymbol{u}_3 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

验证内积：

- $\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2 = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0$
- $\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_3 = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0$

- $\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_3 = -\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} < 0$

满足条件。

**2. $\mathbb{R}^3$ 中的四个向量**

我们需要在三维空间中找到四个向量，使其两两夹角为钝角。这对应于正四面体（Tetrahedron）中心指向四个顶点的向量。我们可以利用立方体的顶点来构造一组简单的整数解：

令：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_1 &= (1, 1, 1) \\
\boldsymbol{v}_2 &= (1, -1, -1) \\
\boldsymbol{v}_3 &= (-1, 1, -1) \\
\boldsymbol{v}_4 &= (-1, -1, 1)
\end{aligned}$$

验证任意两向量的内积（以 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 为例）：

$$\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 = (1)(1) + (1)(-1) + (1)(-1) = 1 - 1 - 1 = -1 < 0$$

由于对称性，所有两两组合的内积均为 $-1$，满足条件。

**3. $\mathbb{R}^n$ 中的最大向量数量**

**结论：** 在 $\mathbb{R}^n$ 中，最多有 $n+1$ 个向量，使得它们之间两两内积为负。

**简要说明：** 这种几何构型对应于 $\mathbb{R}^n$ 空间中 ** 正单纯形 **（Regular Simplex）的 $n+1$ 个顶点（相对于其几何中心）。

- 当 $n = 1$ 时（直线），最多 2 个向量（1 和 $-1$）。
- 当 $n = 2$ 时（平面），最多 3 个向量（互成 $120°$）。
- 当 $n = 3$ 时（空间），最多 4 个向量（正四面体结构）。

若存在 $n+2$ 个向量，则必然存在至少一对向量的夹角小于或等于 $90°$（即内积非负）。