《微积分A1》第一讲

教师 杨利军

清华大学数学科学系

2025年09月15日

联系方式

办公室: 理科楼 A323

电话: 62796895(O), 13521891215(M)

email: lyang@tsinghua.edu.cn

微信群名: 25秋微A1甲班

群聊: 25秋微 A1 甲班

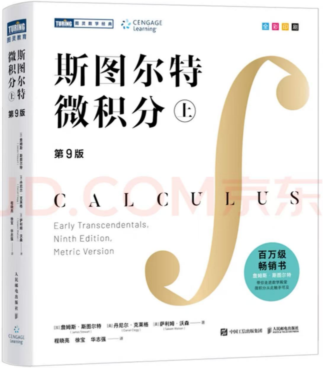
该二维码7天内(9月21日前)有效,
重新进入将更新

教材

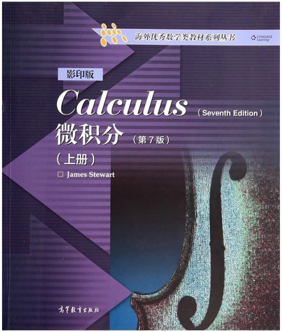
教材:《高等微积分教程》(上), 刘智新, 闫浩, 章纪民编著, 清华大学出版社, 2014 (价32元, 教材中心有售), 网络学堂上载有电子版

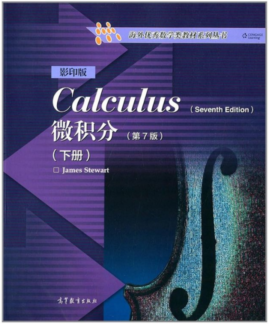
参考书

1. 斯图尔特微积分(上), 第九版, 中国工信出版集团, 人民邮电出版社, 2025 年6月1日, 722 页. 这本教材图文并茂, 通俗易懂, 说理透彻, 强烈推荐!



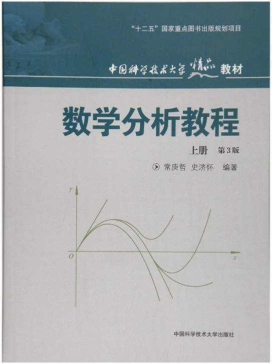
2. James Stewart, Calculus, 9 th edition, 2019 年, pp. 1421. 这是《斯图尔特微积分》(上) 中文版的原英文版. 其电子版已上载于网络学堂. 这本教材图文并茂, 书店里有这书的第七版影印版出售.

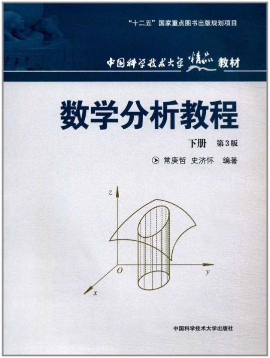




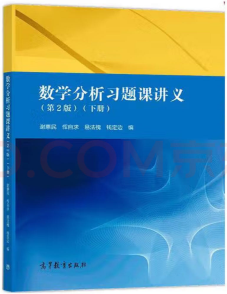
参考书，续二

3. 《数学分析教程》上下两册，第三版，常庚哲史济怀编著. 清华数学系课程《数学分析》采用的教材之一，上册第三版的电子版已上载到网络学堂.



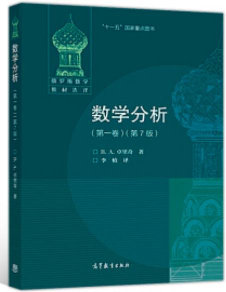


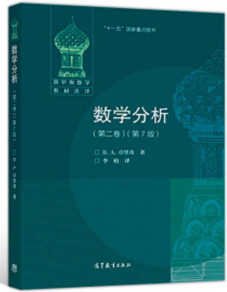
4. 《数学分析习题课讲义》第二版，上下两册，谢惠民等编著，高等教育出版社，分别于 2018 年和 2019 年出版



参考书，续四

5. 《数学分析》第一,二卷，第七版，卓里奇著，李植译，2019. 清华大学数学系课程《数学分析》采用的教材之一.





6. Peter Lax and Maria Terrell,

《微积分及其应用》，2018，现代数学译丛，科学出版社

《多元微积分及其应用》，2020，现代数学译丛，科学出版社

作业，答疑，考试及成绩事宜

作业: 每周一和周三各布置一次作业，两周后的周三晚12点之前，以电子版形式在网络学堂的"课程作业"里提交.

答疑: 周一和周三下午2:00-6:00，答疑在办公室(理科楼A323). 也可通过微信或邮件方式，商定其他答疑时间.

期中考试: 闭卷，11月15日(第9周周六)，上午 9:50-11:25

成绩评定: 总成绩 = max{成绩 A, 成绩 B}

成绩 A: 20% 作业成绩 + 30% 期中成绩 + 50% 期末成绩

成绩 B: 20% 作业成绩 + 80% 期末成绩

什么是数?

什么是数(实数)？什么是自然数? 即什么是数 1, 2, 3, $\cdots$. 进一步, 为什么 $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2 = 6$？为什么数学归纳法成立?

定义实数的两种方法:

一. 构造性方法 (Cantor 的基本序列方法, Dedekind 分割方法):

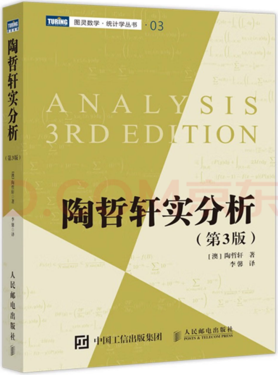
自然数 $\Rightarrow$ 整数 $\Rightarrow$ 有理数 $\Rightarrow$ 实数 $\Rightarrow$ 复数.

二. Hilbert 公理化方法:

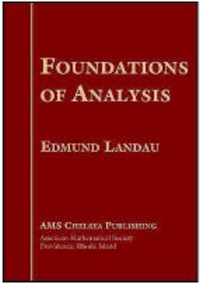
一个集合 $\mathbb{R}$ 如果满足四组公理(条件) (i) 加法公理, (ii) 乘法公理, (iii) 序公理, (iv) 完备化公理(即连续性公理), 则称集合 $\mathbb{R}$ 为一个实数系统. 注意实数系统虽然不唯一, 但可以证明任意两个实数系统线性同构.

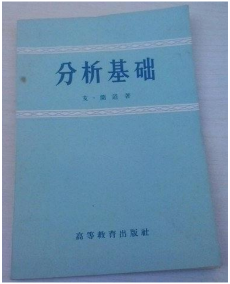
关于实数理论的参考书一

Terence Tao 的书《陶哲轩实分析》，第三版，中译本. 这本书用前五章共计100页的篇幅介绍了实数的一般理论.



关于实数理论的参考书二

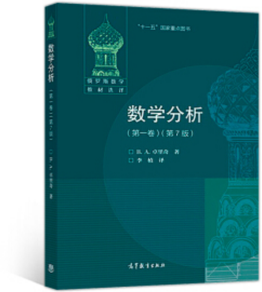




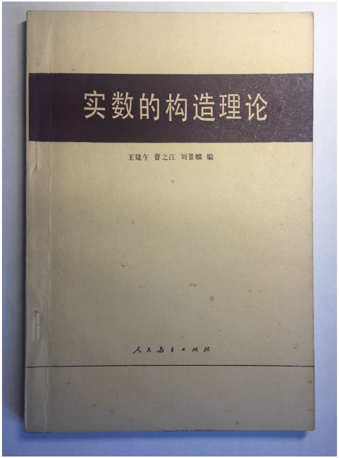
Landau 在这本名著里用电报文体(公理, 定义, 定理, 证明) 由 Peano 的 5 个公理出发, 通过 73 个定义, 和 301 个定理, 严格定义了自然数, 整数, 有理数, 实数和复数, 及其加减乘除的运算规则. Landau 在序言里表示, 一个普通的大学生, 可以在两天内读完这本书. 本书英文版和中译本均为 134 页. 注意区别本书作者 Edmund Landau 与物理学家列夫朗道.

关于实数理论的参考书三

《数学分析》，第七版，卓里奇，李植译，第一卷．本书第28-64页给出了实数的公理化定义，并讨论了实数的性质．



这是我国数学家编写的一本比较好的关于实数理论的书.



德国数学家 Leopold Kronecker (1823-1891) 语录:

上帝创造了自然数，其余都是人工作品.

英译: God created the integers, all else is the work of man.

原始德文: Die [positiven] ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.

两千多年前古希腊数学家欧几里得编写的《几何原本》(Euclid's Elements)被誉为科学圣经，学问之宗. 《几何原本》人类历史上最伟大的著作之一，对数学，自然科学以及人类一切文化领域都产生了极其深远的影响.

公理化演绎方法

《几何原本》开篇给出 23 个定义, 5 个公设, 以及 5 个公理. 以此为基础, 通过逻辑方法, 推导出 465 个命题和定理, 以及若干推论.

古往今来,《几何原本》一直被视为纯数学公理化演绎结构的典范, 其逻辑公理化方法广泛应用于自然科学和社会科学. 例如哥白尼, 开普勒, 伽利略和牛顿等人自然科学著作中, 以及霍布斯, 斯宾诺莎, 怀特海和罗素等人的人文科学著作中, 均采用了公理化演绎方法.

《几何原本》中点，线，面的定义

第一卷

定义(Definitions)[①]

1. 点是没有部分的东西。

   A *point* is that which has no part.[②]

2. 线是没有宽的长。

   A *line* is breadthless length.

3. 线之端是点。

   The extremities of a line are points.

4. 直线是其上均匀放置着点的线。

   A *straight line* is a line which lies evenly with the points on itself.

---

① 欧几里得的希腊文本(第一个印刷版于 1533 年问世)中的定义、公设和公理本来是没有编号的。其定义是连续地叙述出来的，它更像是一篇讨论术语如何使用的序言，而不是充当后续命题的公理基础。这里我们遵循英译者托马斯·希思(Thomas L. Heath)所使用的格式。——译者

② 为读者更好地理解，附上了希思英译本中定义、公设、公理和命题部分的英文。——译者

《几何原本》中的5个公设

公设（Postulates）

让我们假定：

1. 从任一点到任一点可作一条直线。

   To draw a straight line from any point to any point.

2. 一条有限直线可沿直线继续延长。

   To produce a finite straight line continuously in a straight line.

3. 以任一点为心和任意距离可以作圆。

   To describe a circle with any centre and distance.

4. 所有直角都彼此相等。

   That all right angles are equal to one another.

5. 一条直线与两条直线相交，若在同侧的两内角之和小于两直角，则这两条直线无定限延长后在该侧相交。

   That, if a straight line falling on two straight lines make the interior angles on the same side less than two right angles, the two straight lines, if produced indefinitely, meet on that side on which are the angles less than the two right angles.

《几何原本》中的5个公理

公理（Common Notions）

1. 等于同量的量也彼此相等。
   Things which are equal to the same thing are also equal to one another.
2. 等量加等量，其和相等。
   If equals be added to equals, the wholes are equal.
3. 等量减等量，其差相等。
   If equals be subtracted from equals, the remainders are equal.
4. 彼此重合的东西彼此相等。
   Things which coincide with one another are equal to one another.
5. 整体大于部分。
   The whole is greater than the part.

命题 1

在一给定的有限直线上作一个等边三角形。

On a given finite straight line to construct an equilateral triangle.

徐光启关于《几何原本》的评价

... 能精此书者，无一事不可精；好学此书者，无一事不可学. ... 此书有四不必：不必疑，不必揣，不必试，不必改. 有四不可得：欲脱之不可得，欲驳之不可得，欲减之不可得，欲前后更置之不可得. 有三至三能：似至晦实至明，故能以其明明他物之至晦；似至繁实至简，故能以其简简他物之至繁；似至难实至易，故能以其易易他物之至难. ... 此书有五不可学：躁心人不可学，粗心人不可学，满心人不可学，妒心人不可学，傲心人不可学. 故学此者不止增才，亦德基也. ...

参见《几何原本》古希腊欧几里得著，张卜天译，商务印书馆，2020，第 931 - 932 页.

注：徐光启(1562 - 1633)，万历进士，官至崇祯朝礼部尚书，兼文渊阁大学士，内阁次辅. 他和意大利传教士利玛窦 (Matteo Ricci, 1552 - 1610) 首次共同将拉丁文版的《几何原本》的前6卷翻译成中文. 《几何原本》全书共13卷.

定义: 一个集合$\mathbb{N}$称作自然数集, 如果集合$\mathbb{N}$中存在一个特别元素, 记作0, 且存在映射$s:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\backslash\{0\}$, 满足如下条件:

1) s是单射, 即如果$a\neq b$, 则$s(a)\neq s(b)$;

2) 设$\mathbb{N}_1$是$\mathbb{N}$的子集. 若$0\in\mathbb{N}_1$, 且对$\forall a\in\mathbb{N}_1$, $s(a)\in\mathbb{N}_1$, 则$\mathbb{N}_1=\mathbb{N}$(数学归纳法).

记号: $1\overset{\text{def}}{=}s(0)$, $2\overset{\text{def}}{=}s(1)$, $3\overset{\text{def}}{=}s(2)$, $\cdots$.

注一: 映射$s(\cdot)$称为后继函数 (successor function), $s(a)$称为元素a的后继 (successor),

注二: Giuseppe Peano (1858-1932), 意大利数学家. 他于1889年提出上述自然数的公理化定义.

自然数集的 von Neumann 构造

利用集合论公理：存在空集，即存在不含任何元素的集合，空集记作 ϕ，von Neumann (1903-1957，匈牙利犹太人) 于 1923 年无中生有地构造出一个自然数集：

$$\begin{aligned}
0 &\overset{\text{def}}{=} \phi \\
1 &\overset{\text{def}}{=} \{\phi\} = \{0\} \\
2 &\overset{\text{def}}{=} \{\phi, \{\phi\}\} = \{0, 1\} \\
3 &\overset{\text{def}}{=} \{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}\} = \{0, 1, 2\} \\
&\cdots \\
n + 1 &\overset{\text{def}}{=} n \cup \{n\} = \{0, 1, 2, \cdots, n\}
\end{aligned}$$

也就是说，集合 $\left\{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}, \cdots\right\} = \{0, 1, 2, \cdots\}$ 满足自然数集的定义. 特别元素即零元素为 $\phi = 0$，后继函数 $s(n) = n \cup \{n\}$.

注：按上述记号，每个自然数都是一个集合，并且 $0 \subset 1 \subset 2 \subset 3 \subset \cdots$.

自然数的加法和乘法定义

设 $\mathbb{N}$ 为一个自然数集合, s 为后继函数. 在 $\mathbb{N}$ 上可用递归法定义加法, 即定义二元运算(映射): $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $(m,n)\mapsto m+n$,

i) $0+m \overset{\text{def}}{=} m$, $\forall m\in\mathbb{N}$;

ii) $s(n)+m \overset{\text{def}}{=} s(n+m)$, $\forall m,n\in\mathbb{N}$.

在 $\mathbb{N}$ 上再定义乘法, 即定义二元运算(映射): $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $(m,n)\mapsto m\times n$,

常记作 mn,

i) $0\times m \overset{\text{def}}{=} 0$, $\forall m\in\mathbb{N}$;

ii) $s(n)\times m \overset{\text{def}}{=} (n\times m)+m$, $\forall m,n\in\mathbb{N}$.

Theorem

<u>定理</u>: 上述在自然数集$\mathbb{N}$中定义的加法和乘法运算满足

i) $m+n=n+m$, $mn=nm$, $\forall m,n\in\mathbb{N}$;

ii) $(k+m)+n=k+(n+m)$, $(km)n=k(mn)$, $\forall k,m,n\in\mathbb{N}$;

iii) $(k+m)n=kn+mn$, $n(k+m)=nk+nm$, $\forall k,m,n\in\mathbb{N}$.

证明详见《陶哲轩实分析》第20-27页.

注: 结论 i) 称为交换律, ii) 称为结合律, iii) 称为分配律.

自然数的排序，三分律

Definition

定义：设$n, m \in \mathbb{N}$为两个自然数. 称n大于等于m，记作$n \geq m$或$m \leq n$，如果存在$a \in \mathbb{N}$，使得$n = m + a$. 称n严格大于m，记作$n > m$或$m < n$，如果$n \geq m$且$n \neq m$.

Theorem

定理(自然数的三分律)：对于任意两个自然数$a, b \in \mathbb{N}$，三个关系$a < b$，$a = b$和$a > b$有且仅有一个成立.

证明见《陶哲轩实分析》第24页.

<u>定义</u>: i) 设 $a, b \in \mathbb{N}$ 为两个自然数，形如 a—b 的表达式称作一个整数．所有整数所构成的集合记作 $\mathbb{Z}$;

ii) 两个整数 a—b 和 c—d 称作相等，记作 a—b=c—d，如果 $a + d = c + b$;

iii) 对于整数 a—b，定义其负数为 $-$(a—b)=(b—a);

iv) 称 n—0 为正整数，简记作 n; 称 0—n 为负整数，简记作 $-$n.

<u>定义</u>: 对于整数 a—b 和 c—d，定义它们的加法和乘法如下:

(a—b)+(c—d)=(a+c)—(b+d),

(a—b)$\times$(c—d)=(ac+bd)—(ad+bc),

<u>例</u>: (3—5)+(1—4) =(3+1)—(5+4) =4—9,

(3—5)$\times$(1—4) =(3$\times$1+5$\times$4)—(3$\times$4+5$\times$1) =23—17.

整数的三分律

Theorem

定理: 每个整数 x 可表示为如下三者之一:

(i) $x=0$;

(ii) $x=n$, 即 x 为正整数;

(iii) $x=-n$, 即 x 为负整数.

例: 整数 $2—1=1—0=1$, 而整数 $2—4=0—2=-2$.

定理证明见《陶哲轩实分析》第62-63页.

整数的代数运算律

Theorem

定理: 设 $x, y, z \in \mathbb{Z}$ 为三个任意整数, 则

$$\begin{aligned}
x + y &= y + x \\
(x + y) + z &= x + (y + z) \\
x + 0 = 0 + x &= x \\
x + (-x) = (-x) + x &= 0 \\
xy &= yx \\
(xy)z &= x(yz) \\
x1 = 1x &= x \\
x(y + z) &= xy + xz \\
(y + z)x &= yx + zx
\end{aligned}$$

注一: 遵从习惯, 这里乘法符号 $\times$ 略去不写了. 即 $xy = x \times y$.

注二: 定理证明详见《陶哲轩实分析》第61-65页.

有理数，及其加法，乘法，取负，以及取逆运算

Definition

定义：1) 形如 $a//b$ 的表达式称为一个有理数(a rational number)，其中 $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$;

2) 两个有理数 $a//b$ 和 $c//d$ 称为相等，并记作 $a//b = c//d$，如果 $ad = bc$;

3) 全体有理数集合记作 $\mathbb{Q}$，即 $\mathbb{Q} = \{a//b, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$.

Definition

定义：对任意两个有理数 $a//b$ 和 $c//d$，定义

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{加法} & a//b + c//d & := & (ad + bc)//(bd) \\
\text{乘法} & a//b \times c//d & := & (ac)//(bd) \\
\text{取负} & -(a//b) & := & (-a)//b \\
\text{取逆} & (a//b)^{-1} & := & b//a,\ \text{其中}\ a \neq 0, b \neq 0
\end{array}
$$

有理数的代数运算律

Theorem

定理: 设 $x, y, z \in \mathbb{Q}$ 为三个任意有理数, 则

$$\begin{aligned}
x+y &= y+x \\
(x+y)+z &= x+(y+z) \\
x+0=0+x &= x \\
x+(-x)=(-x)+x &= 0 \\
xy &= yx \\
(xy)z &= x(yz) \\
x1=1x &= x \\
x(y+z) &= xy+xz \\
(y+z)x &= yx+zx \\
xx^{-1}=x^{-1}x &= 1,\ x \neq 0.
\end{aligned}$$

注: 用代数术语, 满足上述十个条件的有理数集合构成一个域(field), 故常称作有理数域. 定理证明详见《陶哲轩实分析》第67-68页.

有理数的商

Definition

定义：定义两个有理数 $x, y \in \mathbb{Q}$, $y \neq 0$ 的商为 $x/y := xy^{-1}$.

Example

例：$(3//4)/(5//6) = (3//4) \times (6//5) = (3 \times 6)//(4 \times 5) = 18//20$

$= 9//10$.

注：以下有理数 $a//b$ 的记号改为 a/b，其中 a, b 为整数，$b \neq 0$.

Definition

定义: 1) 一个有理数 x 称为正的, 记作 $x > 0$, 如果 x 可表为 $x = a/b$, 其中 a, b 均为正整数.

2) 一个有理数 x 称为负的, 记作 $x < 0$, 如果 $-x$ 是正的.

3) 设 $x, y \in \mathbb{Q}$ 为两个有理数, 称 x 大于 y, 记作 $x > y$, 如果 $x - y > 0$; 称 x 小于 y, 记作 $x < y$, 如果 $x - y < 0$.

4) 记号 $x \geq y$ 表示 $x > y$ 或 $x = y$. 记号 $x \leq y$ 的意义类似.

5) 设 x 是一个有理数, 那么 x 的绝对值, 记作 $|x|$, 定义如下: (i) 若 x 是正的, 则 $|x| \overset{\text{def}}{=} x$; (ii) 若 x 是负的, 则 $|x| \overset{\text{def}}{=} -x$; (iii) 若 x 为零, 则 $|x| \overset{\text{def}}{=} 0$.

注一: 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 引入了排序后, 可称为有序域, 即 $\mathbb{Q}$ 满足十个条件, 并加上排序. 注二: 任意两个有理数之间, 必含有另一个有理数. 因为对于任意两个有理数 $x < y$, 则显然 $(x + y)/2$ 也是有理数, 且 $x < (x + y)/2 < y$.

有理数的间隙

Theorem

定理: 不存在有理数 x 使得 $x^2=2$.

Proof.

证明: 反证. 假设存在有理数 $x=\frac{p}{q}$, 使得 $x^2=2$, 其中 p,q 均为正整数, 且 p 和 q 无大于 1 的公因子, 则 $(\frac{p}{q})^2=2$, 即 $p^2=2q^2$. 由此得 p 是偶数, 即 $p=2k$, 其中 k 也是正整数. 于是 $4k^2=2q^2$, 即 $2k^2=q^2$. 可见 q 也为偶数. 矛盾. 证毕. □

注: 可以证明, 若 n 不是完全平方数, 即 $n\neq 1,4,9,\cdots$, 则不存在有理数 x 使得 $x^2=n$. 参见常庚哲史济怀《数学分析教程》(上), 第三版, 第 5 页例 1.

Cauchy 序列, 有界序列

Definition

定义: 设 $\{a_n\} = \{a_1, a_2, \cdots\}$ 为一个有理数列 (或序列). 假设对任意正有理数 $\varepsilon > 0$, 存在自然数 N, 使得 $|a_j - a_k| < \varepsilon$, $\forall j, k \geq N$, 则称 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 序列.

Example

例: 易证序列 $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\}$ 是 Cauchy 序列.

Definition

定义: 一个有理序列 $\{a_n\}$ 称为有界的(bounded), 如果存在一个正有理数 $M > 0$, 使得 $|a_n| \leq M$, $\forall n \geq 1$.

Theorem

定理: 1) 每个有理 Cauchy 序列均有界;

2) 若两个有理数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 均为 Cauchy 序列，则它们的和与乘积序列，即序列 $\{a_n+b_n\}$ 和 $\{a_nb_n\}$ 均为 Cauchy 序列.

证明留作习题.

Definition

定义: 两个有理数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 称为是等价的(equivalent)，如果对任意正有理数 $\varepsilon>0$，存在自然数 N，使得 $|a_n-b_n|<\varepsilon, \forall n\geq N$.

Example

例: 设 $a_n=1+10^{-n}$, $b_n=1-10^{-n}$. 易证序列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 均为 Cauchy 序列. 显然它们等价. 因为 n 充分大时，$|a_n-b_n|=|1+10^{-1}-(1-10^{-n})|$ $=2\cdot10^{-n}$ 可以任意小.

实数的 Cauchy 序列定义

Definition

定义: 1) 每个有理数 Cauchy 序列 $\{a_n\}$ 均称为(或定义为)一个实数, 并记作 $\mathrm{LIM}_{n\to\infty}a_n$; 2) 两个实数 $\mathrm{LIM}_{n\to\infty}a_n$ 和 $\mathrm{LIM}_{n\to\infty}b_n$ 称为相等的, 并记作 $\mathrm{LIM}_{n\to\infty}a_n = \mathrm{LIM}_{n\to\infty}b_n$, 如果序列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 等价. 3) 全体实数所构成的集合记作 $\mathbb{R}$.

注: (i) 可以简单地说, 一个实数就是一个有理数 Cauchy 序列的等价类, 即若干个 Cauchy 序列, 这些 Cauchy 序列彼此等价. (ii) 记号 $\mathrm{LIM}_{n\to\infty}a_n$ 与极限无关. 目前还没有极限定义. (iii) 实数也有其他记号: $x = \overline{\{a_n\}}$ 或 $a = (a_n)$.

Example

例: 设 $a_n = 1$, $b_n = 0.99\cdots9$ (n 个数字 9). 易见序列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 均为 Cauchy 列, 且彼此等价. 因此它们定义同一个实数.

有理数和无理数

每个有理数 $p/q \in \mathbb{Q}$ 确定了一个实数，即有理数 Cauchy 序列

$$\{p/q, p/q, p/q, \cdots\}. \qquad (*)$$

为简单计，我们直接称实数集合中的这样的有理数 Cauchy 序列为有理数，并仍用 p/q 表示. 显然有理 Cauchy 序列

$$\left\{p/q + 1, p/q + 1/2, p/q + 1/3, \cdots\right\}. \qquad (**)$$

与序列 (*) 等价. 故有理 Cauchy 序列 (**) 也对应实数 p/q.

实数集 $\mathbb{R}$ 中非有理数的实数，称作无理数 (irrational numbers).

Definition

定义: 设 $x = \mathrm{LIM}_{n\to\infty} a_n$ 和 $y = \mathrm{LIM}_{n\to\infty} b_n$ 为两个实数. 它们的和 $x + y$ 和积 xy 定义如下: $x + y := \mathrm{LIM}_{n\to\infty}(a_n + b_n)$; $xy := \mathrm{LIM}_{n\to\infty}(a_n b_n)$.

例: $\mathrm{LIM}_{n\to\infty}(1 + 1/n) + \mathrm{LIM}_{n\to\infty}(2 + 3/n)$

$$= \mathrm{LIM}_{n\to\infty}\Big[(1 + 1/n) + (2 + 3/n)\Big] = \mathrm{LIM}_{n\to\infty}(3 + 4/n)$$

$$\Big[\mathrm{LIM}_{n\to\infty}(1 + 1/n)\Big] \cdot \Big[\mathrm{LIM}_{n\to\infty}(2 + 3/n)\Big]$$

$$= \mathrm{LIM}_{n\to\infty}\Big[(1 + 1/n) \cdot (2 + 3/n)\Big] = \mathrm{LIM}_{n\to\infty}(2 + 5/n + 3/n^2).$$

远离零的有理数列

Definition

<u>定义</u>: 称一个有理数列 $\{a_n\}$ 远离零的序列 (sequences bounded away from zero), 如果存在正有理数 $\varepsilon_0 > 0$, 使得 $|a_n| \geq \varepsilon_0$, $\forall n \geq 1$.

Theorem

<u>定理</u>: 设实数 $x \neq 0$, 则存在远离零的有理数 Cauchy 序列 $\{a_n\}$, 使得 $x = \mathrm{LIM}_{n\to\infty} a_n$.

证明大意: 设 $x = \mathrm{LIM}_{n\to\infty} b_n$, 其中 $\{b_n\}$ 为 Cauchy 序列. 由于 $x \neq 0$, 故序列 $\{b_n\}$ 不与零序列 $\{0, 0, 0, \cdots\}$ 等价. 于是存在正有理数 $\varepsilon_0 > 0$, 使得对任意正整数 N, 存在 $n_0 \geq N$, 成立 $|b_{n_0}| \geq \varepsilon_0$. 由于$\{b_n\}$ 为 Cauchy 序列, 故对于 $\varepsilon_0 > 0$, 存在正整数 M, 使得 $|b_j - b_k| < \varepsilon_0/2$, $\forall j, k \geq M$. 对这个 M, 存在 $n_0 \geq M$, 使得 $|b_{n_0}| \geq \varepsilon_0$. 故对任意 $n > M$,

$$|b_n| = |b_{n_0} - (b_{n_0} - b_n)| \geq |b_{n_0}| - |b_{n_0} - b_n| \geq \varepsilon_0 - \varepsilon_0/2 = \varepsilon_0/2.$$

令 $a_n = b_n$, $\forall n \geq M$, $a_n = \varepsilon_0/2$, $n = 1, 2, \cdots, M-1$. 于是 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 序列, 远离零, 且 $x = \mathrm{LIM}_{n\to\infty} a_n$. 命题得证.

远离零的 Cauchy 序列的一个性质，非零实数的逆

Theorem

定理：设 $\{a_n\}$ 是远离零的 Cauchy 序列，则 $\{a_n^{-1}\}$ 也是 Cauchy 序列.

证：由于序列 $\{a_n\}$ 远离零，故存在正有理数 $\varepsilon_0 > 0$，使得 $|a_n| \geq \varepsilon_0$，$\forall n \geq 1$. 于是 $|a_n^{-1} - a_m^{-1}| = |(a_m - a_n)/(a_m a_n)| \leq |a_m - a_n|/(\varepsilon_0^2)$. 由此可见 $\{a_n^{-1}\}$ 也是 Cauchy 序列. □

Definition

定义：设 $x \neq 0$ 为非零实数，且 $x = \mathrm{LIM}_{n\to\infty} a_n$，其中 $\{a_n\}$ 为远离零的 Cauchy 序列，定义其逆元为 $x^{-1} := \mathrm{LIM}_{n\to\infty} a_n^{-1}$.

注一：由定义知，对于非零实数 x，成立 $xx^{-1} = 1 = x^{-1}x$;

注二：可如下定义实数的除法：实数 x 除以非零数 y，记作 x/y，可定义为 $x/y := xy^{-1}$.

Definition

定义: 1) 有理数列 $\{a_n\}$ 称为正(负)远离零, 如果存在正有理数 $c > 0$, 使得 $a_n \geq c$ $(a_n \leq -c)$, $\forall n \geq 1$;

2) 称实数 x 为正的(负的), 记作 $x > 0$ $(x < 0)$, 若 x 可表为 $x = \mathrm{LIM}_{n\to\infty} a_n$, 其中 Cauchy 序列 $\{a_n\}$ 是正(负)远离零的.

Example

例: Cauchy 序列 $\{1.1, 1.01, 1.001, \cdots\}$ 为正远离零, 因为 $a_n \geq 1$, $\forall n \geq 1$, 所对应的实数为 1, 或确切地说 $\{1, 1, 1, \cdots\}$.

实数的排序，续

Definition

定义：设 x, y 为两个实数.

(i) 若 $x-y$ 是正的，则称 x 大于 y，记作 $x>y$;

(ii) 若 $x-y$ 是负的，则称 x 小于 y，记作 $x<y$;

(iii) 记号 $x \geq y$ 表示 $x>y$ 或 $x=y$. 特别若 $x \geq 0$，则称 x 为非负的;

(iv) 记号 $x \leq y$ 表示 $x<y$ 或 $x=y$. 特别若 $x \leq 0$，则称 x 为非正的.

非负实数集的闭性

Theorem

定理: (i) 设 $\{a_n\}$ 为非负有理数 Cauchy 列, 则实数 $\mathrm{LIM}_{n\to\infty}a_n$ 非负; (ii) 设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 为两个有理数 Cauchy 列, 且 $a_n \le b_n$, $\forall n \ge 1$, 则 $\mathrm{LIM}_{n\to\infty}a_n \le \mathrm{LIM}_{n\to\infty}b_n$.

证: 显然结论(ii)是结论(i)的直接推理. 只证(i). 记实数 $a = \mathrm{LIM}_{n\to\infty}a_n$, 要证 $a \ge 0$. 反证. 假设 $a < 0$, 依定义知存在一个负远离零的 Cauchy 序列 $\{b_n\}$, 使得 $a = \mathrm{LIM}_{n\to\infty}b_n$. 由于 $\{b_n\}$ 负远离零, 故存在正有理数 c, 使得 $b_n \le -c$, $\forall n \ge 1$. 由于 $|b_n - a_n| \ge |b_n| \ge c$, $\forall n \ge 1$, 故两个序列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 不可能等价. 矛盾. 命题得证.

Theorem

定理: 设 $x, y, z \in \mathbb{R}$ 为三个任意实数, 则

$$\begin{aligned}
x + y &= y + x \\
(x + y) + z &= x + (y + z) \\
x + 0 = 0 + x &= x \\
x + (-x) = (-x) + x &= 0 \\
xy &= yx \\
(xy)z &= x(yz) \\
x1 = 1x &= x \\
x(y + z) &= xy + xz \\
(y + z)x &= yx + zx \\
xx^{-1} = x^{-1}x &= 1, \ x \neq 0.
\end{aligned}$$

注: 与有理数域相同, 实数集合也构成一个域, 常称为实数域, 或简称为实域. 定理证明可由有理数域的运算律得到.

实数的Archimedes性质

Theorem

定理: (i) 设 $x > 0$ 和 $\varepsilon > 0$ 为两个正实数，则存在正整数 $M > 0$，使得 $M\varepsilon > x$;

(ii) 设 $x < 0$ 和 $\varepsilon > 0$ 为两个实数，一负一正，则存在负整数 $L < 0$，使得 $L\varepsilon < x$.

证明详见《陶哲轩实分析》第92页.

Definition

定义: (i) 称实数子集 $E \subset \mathbb{R}$ 有上界 (bounded above) 是指, 存在实数 $M \in \mathbb{R}$, 使得 $x \le M$, $\forall x \in E$. 此时称 M 为集 E 的一个上界(an upper bound);

(ii) 设实数集 $E \subset \mathbb{R}$ 有上界. 若 M 是 E 的一个上界, 使得对 E 的任意一个上界 M_1, 均有 $M \le M_1$, 则称 M 为集 E 的最小上界 (或上确界), 并记之为 $\sup E$ (sup=supremum)

例: 实数集 $E = \{x \in \mathbb{R}, 0 \le x \le 1\}$ 有上界, 1 是集 E 的一个上界, 且是上确界, 即 $\sup E = 1$. 而实数集 $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}, x > 0\}$ 无上界.

注: 若集 E 的上确界存在, 则必唯一. 当集 E 无上界时, 常记 $\sup E = +\infty$. 因此对于例中的数集 $\mathbb{R}^+$, $\sup \mathbb{R}^+ = +\infty$.

实数子集的下界, 以及最大下界(下确界)

Definition

定义: (i) 称实数子集 $E \subset \mathbb{R}$ 有下界 (bounded below) 是指, 存在实数 $M \in \mathbb{R}$, 使得 $x \geq M, \forall x \in E$. 此时称 M 为集 E 的一个下界 (a lower bound);

(ii) 设实数子集 $E \subset \mathbb{R}$ 有下界. 若 M 是 E 的一个下界, 使得对 E 的任意一个下界 M_1, 均有 $M \geq M_1$, 则称 M 为集 E 的最大下界 (或下确界), 并记之为 $\inf E$ (inf=infimum)

Theorem

定理: 设 $E \subset \mathbb{R}$ 为一非空实数集. (i) 若 E 有上界, 则 E 必有上确界, 即 $\sup E$ 存在; (ii) 若 E 有下界, 则 E 必有下确界, 即 $\inf E$ 存在.

证: 易证结论 (i) 和 (ii) 相互等价. 以下只证 (i). 设 M 是 E 的一个上界. 对任意正整数 n, 由实数的 Archimedes 性质知, 存在整数 K, 使得 $\frac{K}{n} > M$, 从而 $\frac{K}{n}$ 是 E 的一个上界. 取一点 $x_0 \in E$, 再次利用 Archimedes 性质知, 存在整数 L, 使得 $\frac{L}{n} < x_0$. 因此 $\frac{L}{n} < x_0 < \frac{K}{n}$. 由于 $\frac{K}{n}$ 是 E 的上界, 故存在唯一整数 m_n, 使得 $\frac{m_n}{n}$ 是 E 的上界, 而 $\frac{m_n-1}{n}$ 不是. 于是得到一个整数序列 $m_1, m_2, m_3, \cdots$, 使得 $\frac{m_n}{n}$ 是 E 的上界, 而 $\frac{m_n-1}{n}$ 不是. 对任意正整数 N, 以及正整数 $n, n' \geq N$, 由于 $\frac{m_n}{n}$ 是 E 的上界, 而 $\frac{m_{n'}-1}{n'}$ 不是, 故 $\frac{m_n}{n} > \frac{m_{n'}-1}{n'} = \frac{m_{n'}}{n'} - \frac{1}{n'}$. 从而得

$$\frac{m_n}{n}-\frac{m_{n'}}{n'}>-\frac{1}{n'}\geq-\frac{1}{N}.\quad (*)$$

同理因 $\frac{m_{n'}}{n'}$ 是 E 的上界，而 $\frac{m_n-1}{n}$ 不是，故 $\frac{m_{n'}}{n'}>\frac{m_n-1}{n}=\frac{m_n}{n}-\frac{1}{n}$. 从而得

$$\frac{m_n}{n}-\frac{m_{n'}}{n'}<\frac{1}{n}\leq\frac{1}{N}.\qquad (**)$$

结合两个不等式 (*) 和 (**) 可知 $|\frac{m_n}{n}-\frac{m_{n'}}{n'}|\leq\frac{1}{N}$, $\forall n,n'\geq N$. 这表明 $\{\frac{m_n}{n}\}$ 为有理数 Cauchy 序列. 记这序列所对应的实数为 s, 即 $s=\mathrm{LIM}_{n\to\infty}\frac{m_n}{n}$. 显然两个序列 $\{\frac{m_n}{n}\}$ 和 $\{\frac{m_n-1}{n}\}$ 相互等价. 故 s 还可以写作 $s=\mathrm{LIM}_{n\to\infty}\frac{m_n-1}{n}$.

以下证实数 s 就是 E 的上确界. 一方面，由于 m_n/n 是 E 的上界，故 $x\leq\frac{m_n}{n}$, $\forall x\in E$, $\forall n\geq 1$. 由此可以证明 $x\leq s$. (参见陶哲轩实分析第93页习题5.4.8) 这表明 s 是 E 的上界. 令一方面，假设 M 是 E 的任意一个上界. 由于 $\frac{m_n-1}{n}$ 不是 E 的上界，故 $\frac{m_n-1}{n}\leq M$, $\forall n\geq 1$. 由此可得 $s=\mathrm{LIM}_{n\to\infty}\frac{m_n-1}{n}\leq M$. 这说明 s 是 E 的最小上界. 命题得证.

确界存在性的意义

确界存在性的意义在于，它保证了在实数域上许多极限的存在性．由于整个微积分就是极限理论，例如连续，导数和积分等基本概念都是某种极限，故实数的确界存在性是整个微积分的基石．

方程 $x^2 = 2$ 有唯一正实数根

Theorem

定理: 存在唯一正实数 x, 使得 $x^2 = 2$.

注: 定理中所述方程 $x^2 = 2$ 的唯一正实根, 常记作 $\sqrt{2}$ 或 $2^{1/2}$.

证: 唯一性. 假设存在两个正实数 x, y, 使得 $x^2 = 2 = y^2$, 则 $0 = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. 由于 $x > 0$ 且 $y > 0$, 故 $x + y > 0$. 因此 $x - y = 0$, 此即 $x = y$. 唯一性得证.

存在性. 记 $E = \{y \in \mathbb{R}, y \geq 0, y^2 < 2\}$. 显然集 E 非空, 因为 $1 \in E$, 并且 E 有上界. 因为 2 就是 E 的一个上界. 反证. 若不然, 则存在 $y \in E$, 使得 $y > 2$. 于是 $y^2 > 2^2 = 4$. 另一方面由于 $y \in E$, 故 $y^2 < 2$. 矛盾. 因此 E 有上界. 由确界存在定理知, 上确界 $a := \sup E$ 存在, 且 $1 \leq a \leq 2$. 以下证 $a^2 = 2$. 为此只要证 $a^2 > 2$ 和 $a^2 < 2$ 均不可能成立.

定理证明，续

(i) 假设 $a^2 < 2$. 取 $0 < \varepsilon < 1$. 由于 $a \leq 2$, $\varepsilon^2 < \varepsilon$, 故 $(a+\varepsilon)^2 = a^2 + 2\varepsilon a + \varepsilon^2 < a^2 + 4\varepsilon + \varepsilon = a^2 + 5\varepsilon$. 由于 $a^2 < 2$, 故可取 $\varepsilon > 0$ 充分小, 例如取 $0 < \varepsilon < \frac{2-a^2}{5}$, 可使 $(a+\varepsilon)^2 < 2$. 这表明 $a+\varepsilon \in E$. 此与 $a = \sup E$ 相矛盾. 故 $a^2 < 2$ 不可能成立.

(ii) 假设 $a^2 > 2$. 取 $\varepsilon > 0$. 由于 $a \leq 2$, $\varepsilon^2 > 0$, 故 $(a-\varepsilon)^2 = a^2 - 2\alpha\varepsilon + \varepsilon^2 > a^2 - 2a\varepsilon \geq a^2 - 4\varepsilon$. 由于 $a^2 > 2$, 故可取 $\varepsilon > 0$ 充分小, 例如取 $0 < \varepsilon < \frac{a^2-2}{4}$, 则可使 $(a-\varepsilon)^2 > 2$. 这说明对于任意 $x \in E$, $x \leq a - \varepsilon$. (若不然, 即存在 $x_0 \in E$, 使得 $x_0 > a - \varepsilon$. 于是 $x_0^2 > (a-\varepsilon)^2 > 2$. 此与 $x_0 \in E$ 相矛盾.) 这说明 $a - \varepsilon$ 是 E 的一个上界. 此与 $a = \sup E$ 为 E 的最小上界相矛盾. 故 $a^2 > 2$ 不可能成立. 命题得证.

当 $c > 0$ 时，方程 $x^n = c$ 有唯一正实根

Theorem

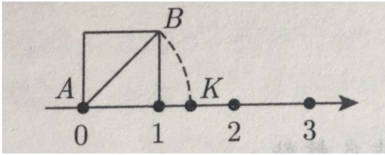
定理：设 $n \geq 2$ 为自然数，$c > 0$ 为一正实数，则存在唯一正实数 $a > 0$，使得 $a^n = c$.

注：定理中的唯一正根 a 称为正数 c 的 n 次方根，常记作 $\sqrt[n]{c}$ 或 $c^{1/n}$. 定理的证明思想同情形 $n = 2, c = 2$. 详见《陶哲轩实分析》第98页.

实数的几何表示, 数轴

实数常用一条直线来表示. 这条直线称为实轴或数轴. 先选一个点代表数 0, 再在点 0 的右边选一个点代表数 1. 这样就确定了数轴的尺度. 于是实数与数轴上的点就一一对应起来了.

The number line



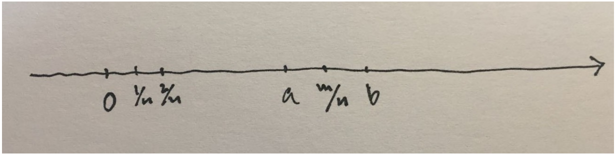
数轴上对应无理数 $\sqrt{2}$ 的点为 K.

有理数的稠密性

命题: 对 $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, 存在有理数 $r \in \mathbb{Q}$, 使得 $a < r < b$.

注: 一个子集 $S \subset \mathbb{R}$ 称为在实数域 $\mathbb{R}$ 上稠密, 如果任意开区间 (a, b) 均包含 S 中的元素. 故上述命题是说, 有理数集在实数域中稠密.

证: 若 $a < 0 < b$, 则取 $r = 0$ 即可. 设 a, b 同号. 不妨设 $b > a \geq 0$. 由于 $b - a > 0$, 故存在正整数 n, 使得 $n(b - a) > 1$. (实数的 Archimedes 性质). 因此 $\frac{1}{n} < b - a$. 因此存在正整数 m, 使得 $a < \frac{m}{n} < b$. 如图所示. 命题得证. $\square$



命题: 对 $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, 存在无理数 ξ, 使得 $a < \xi < b$.

证: 由假设 $a < b$ 可知 $\sqrt{2}a < \sqrt{2}b$. 由有理数的稠密性知, 存在有理数 $r \in (\sqrt{2}a, \sqrt{2}b)$. 若 $r \neq 0$, 则 $\frac{r}{\sqrt{2}}$ 为无理数, 且 $\frac{r}{\sqrt{2}} \in (a, b)$. 若 $r = 0$, 即 $0 \in (\sqrt{2}a, \sqrt{2}b)$. 再次由有理数的稠密性知, 存在有理数 $s \in (0, \sqrt{2}b)$. 由此可得, 无理数 $\frac{s}{\sqrt{2}} \in (0, b) \subset (a, b)$. 命题得证. $\square$

Definition

<u>定义</u>: 1) 有理数集合 $\mathbb{Q}$ 的一个 Dedekind 分割 (cut) (简记 D 分割) 是指 $\mathbb{Q}$ 的一个分解 $\mathbb{Q} = L \cup U$ 满足如下三个条件:

(i) 不空, 即集合 L 和 U 都不是空集;

(ii) 不乱, 即 L 中的任意有理数, 均小于 U 中的任意有理数, 即对 $\forall x \in L$, $\forall y \in U$, 均成立 $x < y$;

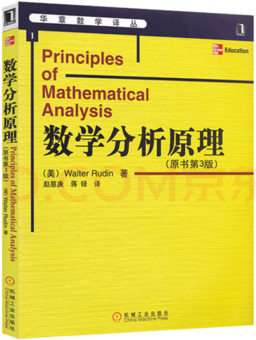
(iii) 子集 L 中无最大数, 即对 $\forall x \in L$, 存在 $r \in L$, 使得 $x < r$.

2) 有理数集合的一个 Dedekind 分割 (L, U) 称作一个实数. 以下用 $\mathbb{R}$ 表示全体实数, 即 $\mathbb{R} = \{(L, U)\}$.

注: 常用 (L, U) 表示 D 分割 $\mathbb{Q} = L \cup U$, L 称作下集, U 称作上集. 由 D 分割 $\mathbb{Q} = L \cup U$ 的定义知, 若 $x_0 \in L$, 则对每个小于 x_0 的有理数 $x < x_0$, $x \in L$.

参考书

关于 Dedekind 分割，可参考 Landau 的书(分析基础)，也可参考 Walter Rudin, Principles of Mathematical Analysis, pages 1–23. 有中译本.



Definition

定义：每个有理数 $p \in \mathbb{Q}$，均对应一个 Dedekind 分割 $p^* = (L_p, U_p)$，其中 $L_p = \{r \in \mathbb{Q}, r < p\}$，$U_p = \mathbb{Q} \backslash L_p$. 这样的 Dedekind 分割称为有理分割，对应的实数也称为有理数. 不是有理分割的 Dedekind 分割称为无理分割，对应的实数称为无理数.

例一：$0^* = (L_0, U_0)$ 和 $1^* = (L_1, U_1)$ 均为有理分割，分别对应有理数 0 和 1，其中 $L_0 = \{r \in \mathbb{Q}, r < 0\}$，$U_0 = \mathbb{Q} \backslash L_0$，$L_1 = \{r \in \mathbb{Q}, r < 1\}$，$U_1 = \mathbb{Q} \backslash L_1$.

例二：记 $L = \{r \in \mathbb{Q}, r < 0 \text{ 或 } r^2 < 2\}$，$U = \mathbb{Q} \backslash L$，则 (L, U) 是一个无理分割. 这个分割所确定的实数为无理数，并且这个无理数将记作 $\sqrt{2}$.

记号：注意一个 Dedekind 分割 (L, U) 完全由其下集 L 确定，因为 $U = \mathbb{Q} \backslash L$. 因此一个实数即分割 (L, U) 可简单地记作 L. 为了遵从习惯，往下我们用小写字母 $x, y, \ldots, \alpha, \beta, \ldots$ 来记来表示实数即 Dedekind 分割.

Definition

定义: 设 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. 如果 $\alpha \subsetneq \beta$, 即 α 是 β 的有理数真子集, 则称 α 小于 β, 记作 $\alpha < \beta$ 或 $\beta > \alpha$. 记号 $\alpha \leq \beta$ 或 $\beta \geq \alpha$ 表示 $\alpha < \beta$ 或 $\alpha = \beta$.

Theorem

定理: 序关系 $<$ 满足如下条件: (1) (全序性) 对任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 三个命题 $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$, $\beta < \alpha$ 有且仅有一个成立; (2) (传递性) 若 $\alpha < \beta$ 且 $\beta < \gamma$, 则 $\alpha < \gamma$.

证 (1): 对 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 且假设 $\alpha \neq \beta$. 此时有且仅有两种可能性: (i) 存在 $x_0 \in \beta$ 但 $x_0 \notin \alpha$; 或 (ii) 存在 $y_0 \in \alpha$ 但 $y_0 \notin \beta$. 假设 (i) 成立. 设 α 对应的 D 分割为 (α, α'), 则 $x_0 \in \alpha'$(上集). 于是对 $\forall x \in \alpha$, $x < x_0 \in \beta$, 故 $x \in \beta$. 因此 $\alpha \subsetneq \beta$. 即 $\alpha < \beta$. 假设 (ii) 成立, 则可类似证明 $\beta \subsetneq \alpha$. 故 (1) 成立.
(2) 显然成立, 因为子集的子集仍为子集. $\square$

确界存在定理

Theorem

定理: (1) 设 $A \subset \mathbb{R}$ 非空子集, 且有上界, 则 A 存在上确界 $\gamma \in \mathbb{R}$, 即 (i) γ 是 A 的一个上界, (ii) 若 $\beta \in \mathbb{R}$ 是 A 的任意一个上界, 则 $\gamma \leq \beta$. (γ 记作 $\sup A$)
(2) 设 $B \subset \mathbb{R}$ 非空子集, 且有下界, 则 B 存在下确界 $\ell \in \mathbb{R}$, 即 (i) ℓ 是 B 的一个下界, (ii) 若 $\beta \in \mathbb{R}$ 是 B 的任意一个下界, 则 $\ell \geq \beta$. (ℓ 记作 $\inf B$)

证明大意: 证 (1): 令 $\gamma = \cup_{\alpha \in A} \alpha$. (i) 对 $\alpha \in A$, $\alpha \subset \gamma$, 即 $\alpha \leq \gamma$. (ii) 设 $\beta \in \mathbb{R}$ 是 A 的任意一个上界, 即 $\alpha \subset \beta$, $\forall \alpha \in A$, 则 $\gamma = \cup_{\alpha \in A} \alpha \subset \beta$. 此即 $\gamma \leq \beta$. 结论 (1) 得证. 证 (2): 令 $\ell = \cap_{\alpha \in B} \alpha$, 可类似证明 $\ell = \inf B$. 结论 (2) 得证. $\square$

加法定义

Definition

定义: 对 $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, 定义 $\alpha+\beta=\{a+b, a\in\alpha, b\in\beta\}\subset\mathbb{Q}$.

Theorem

定理: 上述定义的加法满足如下性质:

(1) (封闭性) 对 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha+\beta\in\mathbb{R}$;

(2) (交换律) 对 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha+\beta=\beta+\alpha$;

(3) (结合律) 对 $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$;

(4) (存在零元素) $\mathbb{R}$ 有零元 $0^*=\{r\in\mathbb{Q}, r<0\}$, 满足 $0^*+\alpha=\alpha$, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$;

(5) (存在负元素) 对任意 $\alpha\in\mathbb{R}$, 存在 $\beta\in\mathbb{R}$, 使得 $\alpha+\beta=0^*$. (注: 这样的元素 β 可以证明是唯一的. 故可记作 $-\alpha$)

证明详见 Rudin, page 18–19.

乘法定义

Definition

定义: (1) 先在正实数集 $\mathbb{R}^+ = \{\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0^*\}$ 上定义乘法. 对任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, 定义它们的乘积, 记作 $\alpha\beta$, 由这样一些有理数 p 构成, 即存在 $r > 0$, $s > 0$, $r \in \alpha$, $s \in \beta$, 使得 $p \leq rs$.

(2) 对任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 定义 $\alpha 0^* = 0^* \alpha = 0^*$, 且

$$\alpha\beta = \begin{cases} (-\alpha)(-\beta), & \text{if } \alpha < 0^*, \beta < 0^* \\ -[(-\alpha)\beta], & \text{if } \alpha < 0^*, \beta > 0^* \\ -[\alpha(-\beta)], & \text{if } \alpha > 0^*, \beta < 0^* \end{cases}$$

Theorem

定理: 在 $\mathbb{R}$ 上定义的乘法满足如下性质:

(1) (封闭性) 对任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha\beta \in \mathbb{R}$;

(2) (交换律) 对任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha\beta = \beta\alpha$;

(3) (结合律) 对任意 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$;

(4) (存在单位元) 实数 1^* 满足 $1^*\alpha = \alpha$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$;

(5) (存在逆元) 对实数 $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0^*$, 存在 $\beta \in \mathbb{R}$, 使得 $\alpha\beta = 1^*$. 实数 β 称作 α 的逆元, 常记作 $\frac{1}{\alpha}$.

证明略. 详见 Walter Rudin, Principles of Mathematical Analysis, pages 19–20.

作业

习题一. 课本第3页习题1.1 题2(1)(3)(4): 求下列实数子集的上下确界:

(1) 有限个实数构成的集合 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$;

(3) $\{x|x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x - 3 < 0\}$;

(4) $\left\{x_n | x_n = [1 + (-1)^n] \frac{n+1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$.

习题二. 课本第3页习题1.1 题4(有修改): 设 $A \subset \mathbb{R}$ 为一个实数子集, 记 $A^- \stackrel{\text{def}}{=} \{-a, a \in A\}$. 证明

(1) $\sup A^- = -\inf A$,

(2) $\inf A^- = -\sup A$.

补充题一: 设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 为两个等价的有理数列. 证明 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 列, 当且仅当 $\{b_n\}$ 是 Cauchy 列.

作业

补充题二: 证明: (1) 每个有理数 Cauchy 序列均有界; (2) 假设两个有理数序列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 均为 Cauchy 序列, 则它们的和与乘积序列, 即序列 $\{a_n + b_n\}$ 和 $\{a_n b_n\}$ 均为 Cauchy 序列.

补充题三: 证明 $\sqrt{3}$ 是无理数, 这里 $\sqrt{3}$ 记方程 $x^2 = 3$ 的唯一正实数解.