线性代数习题解答

例 5.29

在 $\mathbb{R}^2$ 中，设 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta} = (b_1, b_2)^{\mathrm{T}}$，令

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = a_1b_1 - a_2b_1 - a_1b_2 + 3a_2b_2$$

写成矩阵的形式，即

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (a_1, a_2) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

可以验证这是 $\mathbb{R}^2$ 的内积。

证明. 我们需要验证给定的运算满足内积的三个公理：对称性、线性性和正定性。

设 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta} = (b_1, b_2)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\gamma} = (c_1, c_2)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2$，且 $k \in \mathbb{R}$。给定的运算可以表示为矩阵形式：

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{\beta}, \quad \text{其中} A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

1. **对称性**：由于矩阵 A 是对称矩阵（即 $A^{\mathrm{T}} = A$），因此：

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{\beta})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}).$$

2. **线性性**：利用矩阵乘法的性质，有：

$$\begin{aligned} (k\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta}) &= (k\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\gamma})^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{\beta} \\ &= (k\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}) A \boldsymbol{\beta} \\ &= k(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{\beta}) + (\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{\beta}) \\ &= k(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) + (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta}). \end{aligned}$$

3. **正定性**：计算 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})$ 并进行配方：

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) &= a_1^2 - a_1a_2 - a_2a_1 + 3a_2^2 \\ &= a_1^2 - 2a_1a_2 + 3a_2^2 \\ &= (a_1^2 - 2a_1a_2 + a_2^2) + 2a_2^2 \\ &= (a_1 - a_2)^2 + 2a_2^2. \end{aligned}$$

由于 $(a_1 - a_2)^2 \geq 0$ 且 $2a_2^2 \geq 0$，故 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) \geq 0$。

当且仅当 $(a_1 - a_2)^2 = 0$ 且 $2a_2^2 = 0$ 时，等号成立。此时解得 $a_2 = 0$ 且 $a_1 = a_2 = 0$，即 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$。因此，对于任意 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$，都有 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) > 0$。

综上所述，该运算满足内积的所有定义，是 $\mathbb{R}^2$ 上的一个内积。 $\square$

练习 2.4.4

给定

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 9 & 8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

求 A 的零空间、列空间、行空间、左零空间的一组基.

解:

已知矩阵 A 的 LU 分解为 $A = LU$，其中:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 9 & 8 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

矩阵 A 的大小为 3×4。由矩阵 U 可知，主元（Pivot）位于第 1、2、3 列，因此矩阵的秩 $r = 3$。

1. 行空间 $C(A^T)$

矩阵 A 的行空间与矩阵 U 的行空间相同。U 的三个非零行向量即为行空间的一组基:

$$\text{Basis for } C(A^T) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

2. 列空间 $C(A)$

矩阵 A 的列空间由对应于 U 中主元列的 A 的列向量张成。由于 U 的前三列是主元列，故 A 的前三列构成列空间的一组基。又因为 $A = LU$ 且 U 没有全零行，列空间 $C(A)$ 等同于 L 的列空间 $C(L)$。因此，可以直接取 L 的列向量作为基:

$$\text{Basis for } C(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

注：由于秩为 3 且 A 有 3 行，列空间实际上是整个 $\mathbb{R}^3$，因此 $\mathbb{R}^3$ 的任何基（如标准基）也是正确的答案。

3. 零空间 $N(A)$

零空间是方程 $Ax=0$ 即 $Ux=0$ 的解空间。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

变量 x_4 为自由变量。设 $x_4=1$，通过回代求解：

1. 第 3 行：$x_3+2x_4=0 \implies x_3=-2(1)=-2$
2. 第 2 行：$x_2+2x_3+3x_4=0 \implies x_2+2(-2)+3(1)=0 \implies x_2-4+3=0 \implies x_2=1$
3. 第 1 行：$x_1+2x_2+3x_3+4x_4=0 \implies x_1+2(1)+3(-2)+4(1)=0 \implies x_1=0$

解向量为 $\mathbf{x}=[0,1,-2,1]^T$。因此，零空间的一组基为：

$$\text{Basis for } N(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

4. 左零空间 $N(A^T)$

左零空间的维数为 $m-r$，其中 $m=3$（行数），$r=3$（秩）。

$$\dim N(A^T) = 3-3 = 0$$

这意味着左零空间只包含零向量 $\{\mathbf{0}\}$。其基为空集（或表示为仅含零向量）：

$$\text{Basis for } N(A^T) = \emptyset \quad \text{(The space contains only } \mathbf{0}\text{)}$$

练习 2.4.8

设 $A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\1&0&0&0\end{bmatrix}$, 对任意 $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^4$, 令 $S_{\boldsymbol{v}}:=\{\boldsymbol{v}+\boldsymbol{x}_0\mid\boldsymbol{x}_0\in\mathcal{N}(A)\}$, 即由 $\mathcal{N}(A)$ 沿着 $\boldsymbol{v}$ 平移后得到的子集.

令 $\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\2\end{bmatrix},\boldsymbol{v}_3=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\6\end{bmatrix}$, 求 $\boldsymbol{b}_i\,(i=1,2,3)$ 使得 $S_{\boldsymbol{v}_i}$ 是 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_i$ 的解集, 并分析 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3$ 之间的关系.

解:

根据非齐次线性方程组解的结构定理，若集合 $S_{\boldsymbol{v}}=\{\boldsymbol{v}+\boldsymbol{x}_0\mid\boldsymbol{x}_0\in\mathcal{N}(A)\}$ 是方程 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解集，则向量 $\boldsymbol{v}$ 必为该方程的一个特解。因此，我们只需计算 $\boldsymbol{b}_i=A\boldsymbol{v}_i$ 即可。

已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\1&0&0&0\end{bmatrix}$。

1. **计算 $\boldsymbol{b}_1$:**

$$\boldsymbol{b}_1=A\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\1&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot1+2\cdot2\\5\cdot1+6\cdot2\\1\cdot1+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\17\\1\end{bmatrix}$$

2. **计算 $\boldsymbol{b}_2$:**

$$\boldsymbol{b}_2=A\boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\1&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\cdot1+4\cdot2\\7\cdot1+8\cdot2\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11\\23\\0\end{bmatrix}$$

3. **计算 $\boldsymbol{b}_3$:**

$$\boldsymbol{b}_3=A\boldsymbol{v}_3=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\1&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+4+9+24\\5+12+21+48\\1+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}38\\86\\1\end{bmatrix}$$

分析 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3$ 之间的关系:

观察三个向量的分量：

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

显然存在线性关系：

$$\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2$$

根据矩阵乘法的线性性质，对应的右端向量 $\boldsymbol{b}_i$ 也满足同样的关系：

$$\boldsymbol{b}_3 = A\boldsymbol{v}_3 = A(\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2) = A\boldsymbol{v}_1 + 3A\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{b}_1 + 3\boldsymbol{b}_2$$

验证如下：

$$\boldsymbol{b}_1 + 3\boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 17 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 11 \\ 23 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+33 \\ 17+69 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38 \\ 86 \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}_3$$

结论成立。

练习 2.4.10

设 A, B, C, D 为二阶方阵，如果分块矩阵 $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ 满足每一行、每一列以及四个二阶子方阵中的四个元素都是 $1, 2, 3, 4$，则称 M 为四阶数独矩阵。写出一个四阶数独矩阵，并分别求其列空间、行空间、零空间和左零空间的一组基。

解：

1. 构造四阶数独矩阵 M

根据题目要求，我们构造如下矩阵 M：

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

验证：

- 每一行和每一列均为 $\{1, 2, 3, 4\}$ 的排列。
- 四个二阶子方阵分别为：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

  它们均包含元素 $\{1, 2, 3, 4\}$。

2. 矩阵的消元与秩

观察矩阵 M 的行向量，我们可以发现：

$$\text{Row}_1 + \text{Row}_4 = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{Row}_2 + \text{Row}_3 = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

因此存在线性相关关系：$\text{Row}_1 - \text{Row}_2 - \text{Row}_3 + \text{Row}_4 = \mathbf{0}$。这说明矩阵的秩 $r < 4$。

对 M 进行行化简（Gaussian Elimination）以求得行阶梯形矩阵（REF）：

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2-3r_1, r_3-2r_1, r_4-4r_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -3 & -2 & -5 \\ 0 & -5 & -10 & -15 \end{bmatrix}$$

继续化简：

$$\xrightarrow{\text{化简}r_2, r_3, r_4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

由此可知，矩阵的秩 $(M) = 3$。主元列为第 1、2、3 列。

3. 四个基本子空间的基

(1) 列空间 $C(M)$ 的基

列空间的基由原矩阵 M 的主元列组成（即前三列）：

$$\text{Basis for } C(M) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

(2) 行空间 $C(M^T)$ 的基

行空间的基由行阶梯形矩阵 U 的非零行组成（或原矩阵的前三行）：

$$\text{Basis for } C(M^T) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

(3) 零空间 $N(M)$ 的基

求解 $M\mathbf{x} = \mathbf{0}$，即求解 $U\mathbf{x} = \mathbf{0}$：

$$\begin{cases} x_3 + x_4 = 0 \implies x_3 = -x_4 \\ x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0 \implies x_2 - 4x_4 + 5x_4 = 0 \implies x_2 = -x_4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \implies x_1 - 2x_4 - 3x_4 + 4x_4 = 0 \implies x_1 = x_4 \end{cases}$$

令自由变量 $x_4 = 1$，解得 $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$。

$$\text{Basis for } N(M) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

(4) 左零空间 $N(M^T)$ 的基

求解 $\mathbf{y}^T M = \mathbf{0}$。根据之前发现的行向量线性相关关系：

$$\text{Row}_1 - \text{Row}_2 - \text{Row}_3 + \text{Row}_4 = \mathbf{0}$$

这直接给出了左零空间的一个非零向量：

$$\text{Basis for } N(M^T) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

练习 2.4.22

给定 $l \times n$ 矩阵 A 和 $m \times n$ 矩阵 B，证明 $\mathcal{N}(A) \subseteq \mathcal{N}(B)$ 当且仅当存在 $m \times l$ 矩阵 C，使得 $B = CA$。

证明. 我们将分两个方向进行证明。

1. 充分性 ($\Leftarrow$)

假设存在 $m \times l$ 矩阵 C 使得 $B = CA$。

任取 $x \in \mathcal{N}(A)$，根据定义有 $Ax = 0$。我们需要证明 $x \in \mathcal{N}(B)$，即验证 $Bx = 0$。计算如下：

$$Bx = (CA)x = C(Ax) = C(0) = 0$$

由于 $Bx = 0$，故 $x \in \mathcal{N}(B)$。因此 $\mathcal{N}(A) \subseteq \mathcal{N}(B)$ 得证。

2. 必要性 ($\Rightarrow$)

假设 $\mathcal{N}(A) \subseteq \mathcal{N}(B)$。

根据线性代数基本定理, 矩阵的行空间 (Row Space) 是其零空间的正交补, 即 $\mathrm{Row}(A) = \mathcal{N}(A)^\perp$。由假设 $\mathcal{N}(A) \subseteq \mathcal{N}(B)$，对两边取正交补，包含关系反转：

$$\mathcal{N}(B)^\perp \subseteq \mathcal{N}(A)^\perp$$

这意味着 B 的行空间被包含在 A 的行空间中：

$$\mathrm{Row}(B) \subseteq \mathrm{Row}(A)$$

也就是说，B 的每一行向量都是 A 的行向量的线性组合。

设 A 的行向量为 $r_1^T, r_2^T, \ldots, r_l^T$, B 的第 i 个行向量为 b_i^T $(1 \leq i \leq m)$。由于 $b_i^T \in \mathrm{Row}(A)$，存在标量 $c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{il}$ 使得：

$$b_i^T = c_{i1} r_1^T + c_{i2} r_2^T + \cdots + c_{il} r_l^T$$

我们将这些系数构成一个 $m \times l$ 的矩阵 C，其中 $C_{ij} = c_{ij}$。根据矩阵乘法的定义（行视角），上述线性组合关系等价于矩阵等式：

$$B = CA$$

证毕。 $\square$

练习 2.4.23

给定 $m \times n$ 矩阵 A, B，证明 $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(B)$ 当且仅当存在 m 阶可逆矩阵 T，使得 $B = TA$。

证明. 我们分两个方向来证明该命题。

1. 充分性 ($\Leftarrow$)

假设存在 m 阶可逆矩阵 T 使得 $B = TA$。对于任意列向量 $x \in \mathbb{R}^n$，我们考察其属于零空间的条件：

$$x \in \mathcal{N}(B) \iff Bx = 0 \iff (TA)x = 0$$

结合律可得 $T(Ax) = 0$。由于 T 是可逆矩阵，如果在等式两边左乘 T^{-1}，我们得到：

$$T^{-1}(T(Ax)) = T^{-1}0 \implies Ax = 0$$

反之，若 $Ax = 0$，则显然 $T(Ax) = T0 = 0$。因此：

$$Bx = 0 \iff Ax = 0$$

这表明 $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(B)$。

2. 必要性 ($\Rightarrow$)

假设 $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(B)$。我们需要利用矩阵的**行最简形** (Reduced Row Echelon Form, RREF) 的性质。

设 R_A 和 R_B 分别为矩阵 A 和 B 的行最简形。我们知道，齐次线性方程组的解空间（即零空间）完全由其系数矩阵的行最简形确定。因为 $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(B)$，即方程组 $Ax = 0$ 和 $Bx = 0$ 拥有完全相同的解集，这意味着矩阵 A 和 B 可以化简为同一个行最简形。记 $R = R_A = R_B$。

根据矩阵理论，将一个矩阵化为行最简形相当于对其进行一系列初等行变换，而初等行变换等价于左乘可逆矩阵。因此，存在可逆矩阵 P 和 Q，使得：

$$PA = R \quad \text{且} \quad QB = R$$

由此可得：

$$PA = QB$$

由于 Q 是可逆矩阵，其逆矩阵 Q^{-1} 存在。我们在等式两边同时左乘 Q^{-1}：

$$Q^{-1}(PA) = Q^{-1}(QB) \implies (Q^{-1}P)A = B$$

令 $T = Q^{-1}P$。由于 P 和 Q^{-1} 都是可逆矩阵，根据可逆矩阵的乘积性质，T 也是一个 m 阶可逆矩阵。故存在可逆矩阵 T 使得 $B = TA$。 $\square$

练习 2.4.24

给定 n 阶方阵 A。

1. 对任意 k，证明 $\mathcal{R}(A^k) \supseteq \mathcal{R}(A^{k+1})$；
2. 假设 $\mathcal{R}(A^k) = \mathcal{R}(A^{k+1})$，求证 $\mathcal{R}(A^{k+1}) = \mathcal{R}(A^{k+2})$；
3. 求证：存在 $k \leq n$，满足 $\operatorname{rank}(A^k) = \operatorname{rank}(A^{k+1}) = \cdots$。由此证明，如果存在 p 使得 $A^p = O$，则 $A^n = O$。

解：

设 $\mathcal{R}(M)$ 表示矩阵 M 的列空间（即图像 $\operatorname{Im}(M)$），$\operatorname{rank}(M)$ 表示矩阵的秩。

(1) 证明 $\mathcal{R}(A^k) \supseteq \mathcal{R}(A^{k+1})$

任取向量 $y \in \mathcal{R}(A^{k+1})$。根据列空间的定义，存在向量 x 使得：

$$y = A^{k+1}x$$

利用矩阵乘法的结合律，我们可以将其重写为：

$$y = A^k(Ax)$$

令 $z = Ax$，则 $y = A^k z$。这意味着 y 可以表示为 A^k 的列向量的线性组合，即 $y \in \mathcal{R}(A^k)$。

因此，对于任意 k，都有 $\mathcal{R}(A^{k+1}) \subseteq \mathcal{R}(A^k)$，即 $\mathcal{R}(A^k) \supseteq \mathcal{R}(A^{k+1})$。

(2) 假设 $\mathcal{R}(A^k) = \mathcal{R}(A^{k+1})$，求证 $\mathcal{R}(A^{k+1}) = \mathcal{R}(A^{k+2})$

由第 1 问的结论可知，$\mathcal{R}(A^{k+1}) \supseteq \mathcal{R}(A^{k+2})$ 恒成立。因此，我们只需证明 $\mathcal{R}(A^{k+1}) \subseteq \mathcal{R}(A^{k+2})$，或者利用线性变换的性质直接证明等式。

注意到 $\mathcal{R}(A^{m+1})$ 本质上是线性变换 A 作用在空间 $\mathcal{R}(A^m)$ 上得到的像，即：

$$\mathcal{R}(A^{m+1}) = \{Ax \mid x \in \mathcal{R}(A^m)\} = A(\mathcal{R}(A^m))$$

利用题目假设 $\mathcal{R}(A^k) = \mathcal{R}(A^{k+1})$，我们在等式两边同时作用矩阵 A：

$$A(\mathcal{R}(A^k)) = A(\mathcal{R}(A^{k+1}))$$

根据上述性质，左边即为 $\mathcal{R}(A^{k+1})$，右边即为 $\mathcal{R}(A^{k+2})$。

因此，$\mathcal{R}(A^{k+1}) = \mathcal{R}(A^{k+2})$。

注：这意味着一旦列空间停止收缩，它将永远保持稳定。

(3) 求证存在 $k \le n$ 满足秩稳定，并证明幂零性质

(a) 证明存在 $k \le n$ 使得 $\mathbf{rank}(A^k) = \mathbf{rank}(A^{k+1}) = \cdots$

令 $r_m = \text{rank}(A^m) = \dim(\mathcal{R}(A^m))$。由第 1 问可知，列空间是包含关系：

$$\mathbb{R}^n \supseteq \mathcal{R}(A) \supseteq \mathcal{R}(A^2) \supseteq \cdots$$

这意味着维数序列 $\{r_m\}$ 是单调不增的非负整数序列：

$$n \ge r_1 \ge r_2 \ge \cdots \ge 0$$

假设对于所有 $m < n$，都有 strict inequality $r_m > r_{m+1}$。那么：

$$r_1 \le n-1, \quad r_2 \le n-2, \quad \ldots, \quad r_n \le 0$$

这意味着序列必须在第 n 步之前（或恰好在第 n 步）停止严格递减。换句话说，不可能有超过 n 次的 "维数减少"。

因此，必然存在某个最小的整数 k $(0 \le k \le n)$，使得 $r_k = r_{k+1}$。此时 $\dim(\mathcal{R}(A^k)) = \dim(\mathcal{R}(A^{k+1}))$。结合第 1 问的包含关系 $\mathcal{R}(A^k) \supseteq \mathcal{R}(A^{k+1})$，我们可以得出：

$$\mathcal{R}(A^k) = \mathcal{R}(A^{k+1})$$

再根据第 2 问的结论，这个等式将向后传递，即 $r_k = r_{k+1} = r_{k+2} = \cdots$。

(b) 证明如果存在 p 使得 $A^p = O$，则 $A^n = O$

假设存在 p 使得 $A^p = O$（零矩阵）。这意味着 $\text{rank}(A^p) = 0$。

考虑秩的序列 $r_0, r_1, r_2, \ldots$。根据上面的分析，这个序列在达到稳定值之前必须严格递减。如果稳定值大于 0，则 $\text{rank}(A^m)$ 永远不会变成 0，这与 $A^p = O$ 矛盾。因此，稳定值必须为 0。

设 k 为序列首次达到稳定的下标。根据 (a) 中的论证，严格递减的过程最多持续 n 步，即 $k \le n$。既然稳定值为 0，说明 $r_k = 0$。

因为 $k \le n$，且序列单调不增，所以：

$$0 = r_k \ge r_n \ge 0 \implies r_n = 0$$

$\text{rank}(A^n) = 0$ 意味着 A^n 的列空间只有零向量，即 $A^n = O$。