本次习题课有两个部分内容:
第一部分是关于实数确界的习题(讨论题 1, 2),
第二部分是关于序列极限的习题(其余题目).
注: 带星号 * 的题目有些难度. 带双星号 ** 的题目难度更大些.

讨论题 1*: 设 $A \subset \mathbb{R}$ 是有下界的非空实数子集. 记 B 为集合 A 的所有下界所构成的集合. 证明 $\sup B = \inf A$.

证明: 为方便记 $\xi \overset{\text{def}}{=} \sup B$. 以下证 $\xi = \inf A$, 即要证 ξ 是 A 的最大下界. 为此要证:
(1) ξ 是数集 A 的一个下界;
(2) ξ 是数集 A 的最大下界, 即对于 $\forall \varepsilon > 0$, $\xi + \varepsilon$ 不是 A 的下界, 即存在 $a_\varepsilon \in A$, 使得 $a_\varepsilon < \xi + \varepsilon$.
根据 ξ 的定义我们有
(i) ξ 是数集 B 的一个上界.
(ii) 对于 $\forall \varepsilon > 0$, $\xi - \varepsilon$ 不是 B 的上界. 故存在 $b \in B$, 使得 $b > \xi - \varepsilon$.
证(1). 反证. 假设(1)不成立, 即 ξ 不是 A 的一个下界, 则存在 $a \in A$, 使得 $a < \xi$. 根据(ii)知, 对于 $\varepsilon \in (0, \xi - a)$, 存在 $b \in B$, 使得 $b > \xi - \varepsilon > \xi - (\xi - a) = a$. 但 $b \in B$ 是数集 A 的一个下界. 这就得到一个矛盾. 故结论(1)成立.
证(2). 反证. 假设(2)不成立, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得 $\xi + \varepsilon_0$ 是 A 的下界, 故 $\xi + \varepsilon_0 \in B$. 另一方面由 ξ 定义即 $\xi = \sup B$ 是 B 的一个上界. 因此 $\xi + \varepsilon_0 \le \xi$. 矛盾. 证毕.

讨论题 2. 设 $A, B \subset \mathbb{R}$ 为非空有界子集. 定义 $A + B \overset{\text{def}}{=} \{x + y, x \in A, y \in B\}$. 证明 (1) $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$; (2) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

证. (1)和(2) 的证明类似.以下只证(1). 记 $a = \inf A$, $b = \inf B$. 根据确界定义可知
(i) 对任意 $x \in A$, $y \in B$, $x \ge a$, $y \ge b$, 从而 $x + y \ge a + b$. 故 $a + b$ 是集合 $A + B$ 的一

个下界.

(ii) 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $x_\varepsilon \in A$, $y_\varepsilon \in B$, 使得 $x_\varepsilon > a+\varepsilon$, $y_\varepsilon > b+\varepsilon$. 故 $x_\varepsilon + y_\varepsilon > a+\varepsilon+b+\varepsilon = a+b+2\varepsilon$. 这说明 $a+b$ 是集合 $A+B$ 的最大下界, 即 $a+b=\inf(A+B)$. 证毕.

讨论题 3: (课本第13页习题1.3题5) 设 k 为正整数, $a>1$ 为正实数. 证明 $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^k}{a^n}=0$.

证明: 考虑情形 $k=1$, 即考虑极限 $\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{a^n}$. 将 $a>1$ 写作 $a=1+\delta$, 其中 $\delta>0$. 于是

$$a^n=(1+\delta)^n=1+n\delta+\frac{1}{2}n(n-1)\delta^2+\cdots>\frac{1}{2}n(n-1)\delta^2.$$

于是

$$0<\frac{n}{a^n}<\frac{n}{\frac{1}{2}n(n-1)\delta^2}=\frac{2}{(n-1)\delta^2}\to 0,\quad n\to+\infty.$$

故结论对情形 $k=1$ 成立. 再考虑情形 $k>1$. 令 $b=a^{\frac{1}{k}}$ 或 $a=b^k$. 由于 $a>1$, 故 $b>1$. 因此 $\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{b^n}=0$ 于是

$$\frac{n^k}{a^n}=\frac{n^k}{b^{kn}}=\left(\frac{n}{b^n}\right)^k.$$

根据极限的四则运算规则得

$$\left(\frac{n}{b^n}\right)^k=\overbrace{\frac{n}{b^n}\cdot\frac{n}{b^n}\cdot\frac{n}{b^n}\cdots\frac{n}{b^n}}^{k\text{ 个}}\to\overbrace{0\cdot 0\cdots\cdot 0}^{k\text{ 个零}}=0.$$

因此所求极限 $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^k}{a^n}=0$. 证毕.

讨论题 4 (课本第23-24页第一章总复习题题8): 设 $\lim_{n\to+\infty}a_n=a$, $\lim_{n\to+\infty}b_n=b$, 证明

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}=ab.$$

证明: 设 $a_n=a+\varepsilon_n$, 则 $\varepsilon_n\to 0$. 于是

$$a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1=(a+\varepsilon_1)b_n+(a+\varepsilon_2)b_{n-1}+\cdots+(a+\varepsilon_n)b_1$$

$$= a(b_n + b_{n-1} + \cdots + b_1) + (\varepsilon_1 b_n + \varepsilon_2 b_{n-1} + \cdots + \varepsilon_n b_1).$$

进而有

$$\frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} = a\frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n} + \frac{\varepsilon_1 b_n + \varepsilon_2 b_{n-1} + \cdots + \varepsilon_n b_1}{n}. \qquad (*)$$

回忆熟知的结论: 若 $x_n \to x^*$, 则 $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \to x^*$. 由此可知

$$\frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n} \to b, \qquad \frac{|\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| + \cdots + |\varepsilon_n|}{n} \to 0.$$

考虑 $\frac{\varepsilon_1 b_n+\varepsilon_2 b_{n-1}+\cdots+\varepsilon_n b_1}{n}$. 由于收敛序列有界, 故存在 $M > 0$, 使得 $|b_n| \le M, \forall n \ge 1$. 于是

$$0 \le \left|\frac{\varepsilon_1 b_n + \varepsilon_2 b_{n-1} + \cdots + \varepsilon_n b_1}{n}\right| \le M\frac{|\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| + \cdots + |\varepsilon_n|}{n} \to 0, \quad n \to +\infty.$$

于式(*)中取极限即得

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} = ab.$$

证毕.

讨论题 5*: 证明

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1\right) = \frac{1}{4}.$$

解: 记

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1\right),$$

则

$$a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{n^2 + k} - n\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{n^2 + k} + n}$$

由此可知

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} k}{n(\sqrt{n^2 + n} + n)} \le a_n \le \frac{\sum_{k=1}^{n} k}{n(\sqrt{n^2 + 1} + n)}.$$

求出左右两端分子的和就得到

$$\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n(\sqrt{n+n^2}+n)} \le a_n \le \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n(\sqrt{1+n^2}+n)}.$$

注意

$$\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n(\sqrt{n+n^2}+n)} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2(\sqrt{\frac{1}{n}+1}+1)} \to \frac{1}{4},$$

$$\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n(\sqrt{1+n^2}+n)} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2(\sqrt{\frac{1}{n^2}+1}+1)} \to \frac{1}{4}.$$

根据两边夹法则知 $a_n \to \frac{1}{4}$. 证毕.

讨论题 6 (课本第24页第一章总复习题题5): 设序列 $x_n \in (0,1)$ 且满足 $x_{n+1}(1-x_n) > \frac{1}{4}$, 求证 $\lim_{n\to+\infty} x_n = \frac{1}{2}$.

证明: 根据假设 $x_{n+1}(1-x_n) > \frac{1}{4}$, 以及均值不等式可得

$$\frac{1}{2} < \sqrt{x_{n+1}(1-x_n)} \le \frac{1-x_n+x_{n+1}}{2}.$$

由此可见 $x_{n+1} - x_n > 0$, $\forall n \ge 1$, 即序列 x_n 严格单调上升且有上界. 因此极限 $\lim_{n\to+\infty} x_n$ 存在, 记作 x^*. 由于 $x_n \in (0,1)$, 故有 $x^* \in [0,1]$. 于不等式 $x_{n+1}(1-x_n) > \frac{1}{4}$ 中令 $n \to +\infty$ 得 $x^*(1-x^*) \ge \frac{1}{4}$. 另一方面, 二次函数 $x(1-x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的最大值为 $\frac{1}{4}$, 且仅在点 $x = \frac{1}{2}$ 处达到. 因此 $x^* = \frac{1}{2}$. 这就证明了 $\lim_{n\to+\infty} x_n = \frac{1}{2}$. 证毕.

注记: 也可直接证明 $\{x_n\}$ 的单调增性质. 根据关系式 $x_{n+1}(1-x_n) > \frac{1}{4}$ 可得

$$x_{n+1} - x_n > \frac{1}{4(1-x_n)} - x_n = \frac{1-4(1-x_n)x_n}{4(1-x_n)} = \frac{(2x_n-1)^2}{4(1-x_n)} \ge 0.$$

由此得序列 $\{x_n\}$ 的单调增性质.

讨论题 7* (课本第19页习题1.4题14): 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$, $\forall n \ge 1$. 证明数列 $\{a_n\}$ 有极限, 并求出极限.

证明: 简单计算表明

$$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = \frac{3}{2},\ a_4 = \frac{5}{3}. \tag{1}$$

由此可见序列 $\{a_n\}$ 并不单调. 但观察知 $a_1 < a_3$, $a_4 < a_2$. 可猜测奇指标项单调增, 偶指标项单调减少.

第一步: 证明对任意正整数 k

$$a_1 < a_3 < a_5 < \cdots < a_{2k-1}, \quad a_2 > a_4 > a_6 > \cdots > a_{2k-2} > a_{2k}. \tag{2}$$

以下用归纳法证之. 不等式 (1) 说明结论 (2) 对 $k = 2$ 成立. 假设结论 (2) 对任意自然数 k 成立. 考虑 $k+1$ 情形:

$$a_{2k+1} = 1 + \frac{1}{a_{2k}} > 1 + \frac{1}{a_{2k-2}} = a_{2k-1}; \quad a_{2k+2} = 1 + \frac{1}{a_{2k+1}} < 1 + \frac{1}{a_{2k-1}} = a_{2k}.$$

即结论 (2) 对 $k+1$ 成立. 从而结论 (2) 对任意正整数 k 成立.

第二步: 子列 $\{a_{2k-1}\}$ 和 $\{a_{2k}\}$ 均有界. 实际上 $a_{2k-1} < 2$, $a_{2k} > 1$, $\forall k \geq 1$. 当 $k = 1$ 时显然成立. 假设结论对 k 成立,

$$a_{2k+1} = 1 + \frac{1}{a_{2k}} < 1 + \frac{1}{1} = 2, \quad a_{2k+2} = 1 + \frac{1}{a_{2k+1}} > 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} > 1.$$

故结论对 $k+1$ 成立.

第三步: 根据前两步的结论可知两个子列 $\{a_{2k-1}\}$ 和 $\{a_{2k}\}$ 均收敛. 设 $a_{2k-1} \to \xi$, $a_{2k} \to \eta$. 根据极限性质我们有

$$a_{2k+1} = 1 + \frac{1}{a_{2k}} \quad \Rightarrow \quad \xi = 1 + \frac{1}{\eta},$$

$$a_{2k+2} = 1 + \frac{1}{a_{2k+1}} \quad \Rightarrow \quad \eta = 1 + \frac{1}{\xi}.$$

由此可知 $\xi\eta = \eta + 1 = \xi + 1$. 即 $\xi = \eta$. 这就证明了序列 $\{a_n\}$ 收敛, 并且其极限 ξ 满足 $\xi = 1 + \frac{1}{\xi}$, 即 $\xi^2 - \xi - 1 = 0$. 解之得

$$\xi = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5}).$$

由于 $\xi > 0$, 故所求极限为

$$\xi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}).$$

解答完毕.

另解(利用上下极限技术): 根据假设 $a_1 = 1$, 以及递推关系 $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$, 可知 $1 \le a_n \le 2$, $\forall n \ge 1$. 不难证明上下极限有如下性质: 设序列 $\{x_n\} \subset [c, d]$, 其中 $d > c > 0$, 则

$$\overline{\lim} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\underline{\lim}\, x_n}, \qquad \underline{\lim} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\overline{\lim}\, x_n}. \tag{3}$$

于是对关系式 $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$ 两边分别取上极限和下极限得

$$\overline{\lim}\, a_{n+1} = 1 + \overline{\lim} \frac{1}{a_n} = 1 + \frac{1}{\underline{\lim}\, a_n}, \tag{4}$$

$$\underline{\lim}\, a_{n+1} = 1 + \underline{\lim} \frac{1}{a_n} = 1 + \frac{1}{\overline{\lim}\, a_n}. \tag{5}$$

记 $\xi = \underline{\lim}\, a_n$, $\eta = \overline{\lim}\, a_n$, 则等式 (4) 和 (5) 可写作

$$\eta = 1 + \frac{1}{\xi}, \quad \xi = 1 + \frac{1}{\eta}.$$

由此得 $\xi\eta = \xi + 1$, $\xi\eta = \eta + 1$. 故 $\xi = \eta$, 即 $\underline{\lim}\, a_n = \overline{\lim}\, a_n$. 因此极限 $\lim_{n\to+\infty} a_n$ 存在. 若记这个极限为 a, 则在根据关系式 $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$ 中取极限得 $a = 1 + \frac{1}{a}$. 解之得 $a = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$.

注: 关于等式 (3) 可由如下引理得到:

引理: 设实数子集 $E \subset [c, d]$, 其中 $d > c > 0$. 记子集 $F = \{\frac{1}{x}, x \in E\}$, 则

$$\sup F = \frac{1}{\inf E}, \qquad \inf F = \frac{1}{\sup E}. \tag{6}$$

证明: 只证式 (6) 中的第一个等式 $\sup F = \frac{1}{\inf E}$. 另一个等式的证明类似. 记 $\xi \stackrel{\text{def}}{=} \inf E$. 要证 $\frac{1}{\xi} = \sup F$, 即要证 (1) $\frac{1}{\xi}$ 是 F 的一个上界; (2) $\frac{1}{\xi}$ 是 F 的最小上界.

证(1): 由 ξ 的定义知 ξ 是 E 的一个下界, 即对任意 $x \in E$, $x \ge \xi$, 此即 $\frac{1}{x} \le \frac{1}{\xi}$. 这表明 $\frac{1}{\xi}$ 是 F 的一个上界.

证(2): $\frac{1}{\xi}$ 是 F 的最小上界. 反证. 若不然, 则 $\frac{1}{\xi}$ 不是 F 的最小上界, 即存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得 $\frac{1}{\xi} - \varepsilon_0$ 也是 F 的上界, 即对任意 $y = \frac{1}{x} \in F$, $\frac{1}{x} \le \frac{1}{\xi} - \varepsilon_0$, $\forall x \in E$. 由此得

$$x \ge \frac{1}{\frac{1}{\xi} - \varepsilon_0} = \frac{\xi}{1 - \xi\varepsilon_0}, \qquad \forall x \in E.$$

这表明 $\frac{\xi}{1-\xi\varepsilon_0}$ 是 E 的一个下界, 且 $\frac{\xi}{1-\xi\varepsilon_0}>\xi$. 此与 ξ 是 E 的最大下界矛盾. 引理得证.

讨论题 8: 设 $a_k>0$ 且满足 $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n a_k$ 存在, 证明

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n}{n}=0, \tag{7}$$

$$\text{且}\quad \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n!a_1a_2\cdots a_n}=0. \tag{8}$$

证明: (i) 记

$$S_n\overset{\text{def}}{=}\sum_{k=1}^n a_k.$$

由假设知极限 $\lim_{n\to+\infty}S_n$ 存在. 设 $S_n\to S$. 注意到 $a_n=S_n-S_{n-1}$, 其中 $S_0=0$. 于是

$$\frac{a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n}{n}=\frac{\sum_{k=1}^n k(S_k-S_{k-1})}{n}=\frac{\sum_{k=1}^n kS_k-\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)S_k}{n}$$

$$=\frac{nS_n-\sum_{k=1}^{n-1}S_k}{n}=S_n-\frac{\sum_{k=1}^{n-1}S_k}{n}\to S-S=0.$$

这里已利用了 Stolz 定理得到

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n-1}S_k}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{1}=S.$$

故极限式(7)成立. 根据结论(7)以及几何平均与算术平均不等式得

$$0<\sqrt[n]{n!a_1a_2a_3\cdots a_n}=\sqrt[n]{a_1(2a_2)(3a_3)\cdots(na_n)}\le\frac{a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n}{n}\to 0.$$

即极限式(8)成立. 证毕.

讨论题 9: 证明极限 $\lim_{n\to+\infty}\sin n$ 不存在.

证法一: 用反证法. 假设极限 $\lim_{n\to+\infty}\sin n$ 存在, 并记作 A. 对任意正整数 k, 记区间 $I_k=[2k\pi+\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{3\pi}{4}]$. 由函数 $y=\sin x$ 的图像可知, $\sin x\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\forall x\in I_k$, 且区间 I_k 长度为 $\frac{\pi}{2}>1$. 因此存在正整数 $n_k\in I_k$, 使得 $\sin n_k\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$. 于是存在正整数列 $n_k\uparrow+\infty$. 由极限的保序性质知 $A\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$.

再记区间 $J_k = [2k\pi + \frac{5\pi}{4}, 2k\pi + \frac{7\pi}{4}]$. 显然 $\sin x \le \frac{-\sqrt{2}}{2}, \forall x \in J_k$, 且区间 J_k 长度为 $\frac{\pi}{2} > 1$. 因此存在正整数 $m_k \in J_k$, 使得 $\sin m_k \le \frac{-\sqrt{2}}{2}$. 于是存在正整数列 $m_k \uparrow +\infty$. 由极限的保序性质知 $A \le \frac{-\sqrt{2}}{2}$. 此与 $A \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$ 相矛盾. 证毕.

证法二: 反证法. 假设极限 $\lim_{n\to+\infty} \sin n = A$ 存在, 则 $\lim_{n\to+\infty} \sin(n+2) = A$. 故 $\lim_{n\to+\infty}(\sin(n+2) - \sin n) = 0$. 由和差化积公式得

$$\sin(n+2) - \sin n = 2\sin 1 \cos(n+1)$$

可知 $\lim_{n\to+\infty} \cos(n+1) = 0$, 即 $\lim_{n\to+\infty} \cos n = 0$. 于是

$$A = \lim_{n\to+\infty} \sin 2n = 2 \lim_{n\to+\infty} \sin n \cos n = 0.$$

于是

$$1 = \sin^2 n + \cos^2 n \to 0.$$

矛盾. 这就证明极限 $\lim_{n\to+\infty} \sin n$ 不存在. 证毕.

讨论题 10: 假设序列 $\{x_n\}$ 由如下递推关系生成, 证明它们收敛, 并求它们的极限.
(1) 给定实数 x_1, x_2, 且 $x_{n+1} = \frac{x_n + x_{n-1}}{2}, \forall n \ge 2$;
(2) 给定正数 x_1, x_2, 且 $x_{n+1} = \sqrt{x_n x_{n-1}}, \forall n \ge 2$.
(参见课本第24页第一章总复习题题10)

证明: (1) 由递推关系式 $x_{n+1} = \frac{x_n + x_{n-1}}{2}, \forall n \ge 2$ 我们得到

$$x_{n+1} - x_n = \left(\frac{-1}{2}\right)(x_n - x_{n-1}) = \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1}(x_2 - x_1),$$

其中 $\forall n \ge 2$. 进一步我们有

$$x_{n+1} - x_1 = \sum_{k=1}^{n}(x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{-1}{2}\right)^{k-1}(x_2 - x_1)$$

$$= \frac{1 - (-1/2)^n}{1 + \frac{1}{2}}(x_2 - x_1) \to \frac{2}{3}(x_2 - x_1).$$

因此

$$x_{n+1} \to \frac{2x_2 + x_1}{3}.$$

情形(1)得证. 考虑情形(2). 记 $y_n = \ln x_n$, $\forall n \geq 1$, 则序列 $\{y_n\}$ 属于情形(1). 因此序列 $\{y_n\}$ 收敛且

$$y_n \to \frac{2y_2 + y_1}{3}.$$

因此序列 $\{x_n\}$ 收敛且

$$x_n = e^{\ln y_n} \to e^{\frac{2y_2+y_1}{3}} = (x_1 x_2^2)^{1/3}.$$

证毕.

注: 上述证明思想可用于研究由如下递推关系

$$x_{n+1} = \lambda x_n + (1-\lambda) x_{n-1}, \quad \lambda \in (0,1)$$

所生成的序列 $\{x_n\}$, 其中 x_1, x_2 给定. 类似可以证明

$$x_n \to \frac{x_2 + (1-\lambda)x_1}{2-\lambda}.$$

讨论题 11 (参见课本习题1.4题16,17):

(i) 利用均值不等式证明 $(1+\frac{1}{n})^n$ 严格单调上升, $(1+\frac{1}{n})^{n+1}$ 严格单调下降;

(ii) 证明 $(1+\frac{1}{n})^n < e < (1+\frac{1}{n})^{n+1}$, $\forall n \geq 1$;

(iii) 证明 $\frac{1}{n+1} < \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$, $\forall n \geq 1$;

(iv) 证明如下极限存在

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right).$$

解: (i)

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

则根据几何算术平均不等式得

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left[\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}\right]^{n+1}=\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}=a_{n+1}.$$

这就证明了 a_n 严格单调增. (注: 课堂上我们直接对 a_n 作二项式展开, 得到了 a_n 的单调增性质.) 再考虑 $\frac{1}{b_n}$.

$$\frac{1}{b_n}=1\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}<\left(\frac{(n+1)(\frac{n}{n+1})+1}{n+2}\right)^{n+2}=\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}=\frac{1}{b_{n+1}}$$

这说明序列 $\{\frac{1}{b_n}\}$ 严格单调上升, 从而序列 $\{b_n\}$ 严格单调下降.

另证 $\frac{b_{n-1}}{b_n}>1$:

$$\frac{b_{n-1}}{b_n}=\frac{(1+\frac{1}{n-1})^n}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}=\left(\frac{1+\frac{1}{n-1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^n\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=\left(\frac{n-1+1}{n+1}\right)^n\cdot\left(\frac{n}{n-1}\right)^n\cdot\frac{n}{n+1}$$

$$=\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n\cdot\frac{n}{n+1}=\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n\cdot\frac{n}{n+1}>\left(1+\frac{n}{n^2-1}\right)\cdot\frac{n}{n+1}$$

$$=\frac{n^2+n-1}{n^2-1}\cdot\frac{n}{n+1}=\frac{n^3+n^2-n}{n^3+n^2-n-1}>1.$$

显然分子大于分母, 故 $\frac{b_{n-1}}{b_n}>1$.

(ii) 由 (i) 的结论: $(1+\frac{1}{n})^n\uparrow e$ 严格, $(1+\frac{1}{n})^{n+1}\downarrow e$ 严格, 可知 $(1+\frac{1}{n})^n<e<(1+\frac{1}{n})^{n+1}$, $\forall n\geq 1$;

(iii) 对不等式 $(1+\frac{1}{n})^n<e<(1+\frac{1}{n})^{n+1}$, $\forall n\geq 1$; 取对数得 $n\ln(1+\frac{1}{n})<1$, 以及 $1<(n+1)\ln(1+\frac{1}{n})$. 由此得 $\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}, \forall n\geq 1$.

(iv) 记 $c_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$. 由于 $c_{n+1}-c_n=\frac{1}{n+1}-\ln(1+\frac{1}{n})<0$, 故序列 $\{c_n\}$ 严格单调下降. 为了证明序列 $\{c_n\}$ 有极限, 只要证明 $\{c_n\}$ 有下界即可. 根据结论 (ii) 得 $\frac{1}{k}>\ln(1+\frac{1}{k})$. 对不等式 $\frac{1}{k}>\ln(1+\frac{1}{k})$ 关于 $k=1,2,\cdots,n$ 求和得

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}>\ln\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{n+1}{n}\right)=\ln(n+1).$$

由此得

$$c_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n > 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n+1) > 0.$$

因此 $\{c_n\}$ 有下界, 从而有极限. 解答完毕.

讨论题 12**. 给定序列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$, 记 $S_n=\sum_{k=1}^n a_k^2$. 假设 $\lim_{n\to+\infty} a_nS_n = 1$. 证明

(1) $S_n\to+\infty$;

(2) $a_n\to 0$;

(3) $S_n^3-S_{n-1}^3\to 3$;

(4) $3na_n^3\to 1$.

证(1): 显然 S_n 单调上升. 假设 $S_n\not\to+\infty$, 则序列 $\{S_n\}$ 有上界, 从而 $\{S_n\}$ 收敛. 设 $S_n\to S$. 若 $S=0$, 则 $a_n=0$, $\forall n\geq 1$. 此与假设 $\lim_{n\to+\infty} a_nS_n=1$ 相矛盾. 故 $S>0$. 仍由假设 $\lim_{n\to+\infty} a_nS_n=1$ 可知, $a_n=\frac{a_nS_n}{S_n}\to\frac{1}{S}$. 于是存在正整数 N, 使得 $a_n\geq\frac{1}{2S}$, $\forall n\geq N$. 因此

$$S_{N+m} > \sum_{k=1}^N a_k^2 + \frac{m}{4S^2}\to+\infty, \qquad m\to+\infty.$$

此与假设 $S_n\not\to+\infty$ 相矛盾. 这就证明了 $S_n\to+\infty$.

证(2). 根据假设 $\lim_{n\to+\infty} a_nS_n=1$, 以及结论(1), 即 $S_n\to+\infty$, 即得

$$a_n=\frac{a_nS_n}{S_n}\to\frac{1}{+\infty}=0, \qquad n\to+\infty.$$

证(3).

$$\begin{aligned} S_n^3-S_{n-1}^3 &= (S_n-S_{n-1})(S_n^2+S_nS_{n-1}+S_{n-1}^2) = a_n^2\Big[S_n^2+S_n(S_n-a_n^2)+(S_n-a_n^2)^2\Big] \\ &= a_n^2\big(S_n^2+S_n^2-a_n^2S_n+S_n^2-2a_n^2S_n+a_n^4\big) = a_n^2(3S_n^2-3a_n^2S_n+a_n^4) \\ &= 3a_n^2S_n^2-3a_n^3(a_nS_n)+a_n^6\to 3, \qquad n\to+\infty. \end{aligned}$$

证(4). 注意到 $3na_n^3=3a_n^3S_n^3\cdot\frac{n}{S_n^3}$, 并且 $a_n^3S_n^3\to 1$, $S_n^3-S_{n-1}^3\to 3$, 以下我们利用 Stolz 定理来求极限 $\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{S_n^3}$. 由于

$$\frac{n-(n-1)}{S_n^3-S_{n-1}^3}=\frac{1}{S_n^3-S_{n-1}^3}\to\frac{1}{3}, \qquad n\to+\infty,$$

故根据 Stolz 定理知 $\frac{n}{S_n^3} \to \frac{1}{3}$. 因此

$$3na_n^3 = 3a_n^3 S_n^3 \cdot \frac{n}{S_n^3} \to 3 \cdot 1^3 \cdot \frac{1}{3} = 1.$$

命题得证.