

作业 12-2

2025 年 12 月 11 日

1 线性代数与几何

6.29. 若 \mathbf{A} 可逆, 证明 \mathbf{AB} 与 \mathbf{BA} 相似。若 \mathbf{A} 不可逆是否也有这一结论?

证明:

将相似的可逆矩阵定为 \mathbf{A} , 有 $\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AB})\mathbf{A} = \mathbf{BA}$ 恒成立, 即二者相似, 证毕。

当 \mathbf{A} 不可逆, 该结论不成立。反例: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}。$$

32. 若 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 都是 n 阶对角阵, 证明 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 相似当且仅当 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 的主对角元除排列次序外是完全相同的。

证明:

设 $\mathbf{A} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\mathbf{B} = \text{diag}(\lambda'_1, \dots, \lambda'_n)$ 。

“ \Rightarrow ”: 若 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 相似, 则其特征值相同。而 \mathbf{A} 特征值为 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, \mathbf{B} 特征值为 $\lambda'_1, \dots, \lambda'_n$, 因此二者除排列顺序外相同。

“ \Leftarrow ”: 若 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 的主对角元除排列次序外完全相同, 则可通过有限次

对角元对换将 \mathbf{A} 变为 \mathbf{B} 。令 $\mathbf{E}_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & 1 \\ & & & \ddots & \\ & 1 & & & 0 \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$ ，其中主对角线第 i 和第 j 个元素非 1，则 $\mathbf{E}_{ij}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{E}_{ij}$ 表示将 \mathbf{A} 的第 i 个和第 j 个对角元对换。因此，可由有限个 \mathbf{E}_{ij} 相乘得到满足要求的可逆阵。

33. 证明 $\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$ 与 \mathbf{N}^T 相似。

证明：

$$\text{取 } \mathbf{P} = \begin{bmatrix} & & & 1 \\ & & \cdots & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{bmatrix}, \text{ 则 } \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T (\text{置换阵的特点}) = \mathbf{P}.$$

$$\mathbf{NP} = \begin{bmatrix} & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \\ 1 & 0 & \\ 0 & & \end{bmatrix}, \mathbf{P}^{-1} \mathbf{NP} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{N}^T, \text{ 证毕。}$$

35. 若 $|\mathbf{I} - \mathbf{A}^2| = 0$ ，证明 1 或 -1 至少有一个是 \mathbf{A} 的特征值。

证明：

$|\mathbf{I} - \mathbf{A}^2| = |\mathbf{I} + \mathbf{A}| |\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$ ，则 $|\mathbf{I} + \mathbf{A}| = 0$ 或 $|\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$ ，即有非全零 \mathbf{x} 使矩阵乘 \mathbf{x} 为零向量，分别表示 -1 或 1 是 \mathbf{A} 的特征值。

37. 设 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & x & 1 \\ x & 1 & y \\ 1 & y & 1 \end{bmatrix}$ ， $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$ 。当 x, y 满足什么条件时， \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 相似？

解:

首先由 \mathbf{B} 不可逆, 有 $|\mathbf{A}| = 0$, 解得 $x = y$ 。又相似矩阵特征值相同,

因此 1 为 \mathbf{A} 的一个特征值, $|\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$, 即 $\begin{vmatrix} 0 & x & 1 \\ x & 0 & y \\ 1 & y & 0 \end{vmatrix} = 2xy = 0$, 因此

$x = y = 0$ 。

验证: 当 $x = y = 0$, $|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)$, 因此 \mathbf{B} 是 \mathbf{A} 的相似对角化, 二者相似。

38. 设矩阵 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$, 已知向量 $(1, 1, 1)^T, (1, 0, -1)^T, (1, -1, 0)^T$ 是 \mathbf{A} 的特征向量, 求 a, b, c, d, e, f 。

解:

令三个向量依次为 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ 。

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \lambda_1\mathbf{x}_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ a+b+c \\ d+e+f \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 3, a+b+c = 3, d+e+f = 3。$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \lambda_2\mathbf{x}_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ a-c \\ d-f \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_2 = 0, a = c, d = f。$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_3 = \lambda_3\mathbf{x}_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ a-b \\ d-e \end{pmatrix} = \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_3 = 0, a = b, d = e。$$

联立可得 $a = b = c = d = e = f = 1$ 。

41. 找出下列矩阵中哪些可对角化, 并对可对角化的矩阵, 求可逆矩阵 \mathbf{P} 和对角矩阵 \mathbf{D} 。(做偶数小题)

解:

较基础的计算, 求特征值与特征向量, 看特征向量是否线性无关即可。

过程略, 结果:

$$(2) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

不可对角化。

$$(4) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 13 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$(6) \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

不可对角化。

$$(8) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$(10) \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

44. 设 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, 求 \mathbf{A}^m , m 是正整数。

解:

对 \mathbf{A} 进行相似变换, 有 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D}$, 其中 $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 5 & \\ & & -5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}^m = \mathbf{P}\mathbf{D}^m\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \cdot 5^{m-1} + 2 \cdot (-5)^{m-1} & -1 + 4 \cdot 5^{m-1} - (-5)^{m-1} \\ 0 & 5^{m-1} - 4 \cdot (-5)^{m-1} & 2 \cdot 5^{m-1} + 2 \cdot (-5)^{m-1} \\ 0 & 2 \cdot 5^{m-1} + 2 \cdot (-5)^{m-1} & 4 \cdot 5^{m-1} - (-5)^{m-1} \end{bmatrix}$ 。

46. 已知复数域上 n 阶矩阵 \mathbf{A} 满足 $\mathbf{A}^2 + 2\mathbf{A} - 3\mathbf{I} = \mathbf{0}$, 证明 \mathbf{A} 可对角化, 并求其相似对角矩阵。

解:

设 λ 为 \mathbf{A} 特征值, 则 $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$ 或 -3 。

又 $\mathbf{A}^2 + 2\mathbf{A} - 3\mathbf{I} = \mathbf{0}$, 即 $(\mathbf{A} + 3\mathbf{I})(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = \mathbf{0}$, 即 $C(\mathbf{A} - \mathbf{I}) \subseteq N(\mathbf{A} + 3\mathbf{I})$, 有 $r(\mathbf{A} - \mathbf{I}) \leq n - r(\mathbf{A} + 3\mathbf{I})$, 即 $r(\mathbf{A} - \mathbf{I}) + r(\mathbf{A} + 3\mathbf{I}) \leq n$, $\dim N(\mathbf{A} + 3\mathbf{I}) + \dim N(\mathbf{A} - \mathbf{I}) \geq n$ 。又几何重数小于等于代数重数, $\dim N(\mathbf{A} + 3\mathbf{I}) + \dim N(\mathbf{A} - \mathbf{I}) \leq n$ 。因此 $\dim N(\mathbf{A} + 3\mathbf{I}) + \dim N(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = n$, 两个特征值共有 n 个线性无关的特征向量, \mathbf{A} 可对角化。

对角阵: $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -3 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & -3 \end{bmatrix}$, 其前 $r(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})$ 个对角元为 1。

2 线性代数入门

5.3.10 证明: n 阶方阵 $\mathbf{J}_n(\lambda_0) = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 & & \\ & \lambda_0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_0 \end{bmatrix}$ 只有一个特征值 λ_0 ,

其代数重数是 n , 几何重数是 1。

2. 分块对角矩阵 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{n_1}(\lambda_0) & \\ & \mathbf{J}_{n_2}(\lambda_0) \end{bmatrix}$ 只有一个特征值 λ_0 ，其代数重数是 $n_1 + n_2$ ，几何重数是 2。

证明：

1. $\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{J}_n(\lambda_0) = \mathbf{J}_n(\lambda - \lambda_0)$ ，所以 $\det(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{J}_n(\lambda_0)) = (\lambda - \lambda_0)^n$ ，代数重数是 n 。

$\lambda_0 \mathbf{I}_n - \mathbf{J}_n(\lambda_0) = \mathbf{J}_n(0)$ ， $r(\mathbf{J}_n(0)) = n - 1$ ，几何重数是 1。

2. $\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{n_1}(\lambda - \lambda_0) & \\ & \mathbf{J}_{n_2}(\lambda - \lambda_0) \end{bmatrix}$ ，所以 $\det(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A}) = (\lambda - \lambda_0)^{n_1 + n_2}$ ，代数重数是 $n_1 + n_2$ 。

$\lambda_0 \mathbf{I}_n - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{n_1}(0) & \\ & \mathbf{J}_{n_2}(0) \end{bmatrix}$ ，其秩为 $(n_1 - 1) + (n_2 - 1)$ ，零空间维度是 2，故几何重数是 2。

5.3.11 试分析秩为 1 的方阵何时可对角化。

解：

设 $\mathbf{A} = \mathbf{a}\mathbf{b}^T$ 是秩为 1 的矩阵，则 $\dim N(\mathbf{A}) = n - 1$ ，即 0 为 \mathbf{A} 的特征值，对应几何重数 $n - 1$ ，代数重数为 n 或 $n - 1$ 。另一方面， $\text{tr}(\mathbf{A}) = \mathbf{b}^T \mathbf{a}$ 为矩阵特征值的和，故 \mathbf{A} 还有一个特征值 $\mathbf{b}^T \mathbf{a}$ 。

若 $\mathbf{b}^T \mathbf{a} = 0$ ，0 的代数重数为 n ，不等于几何重数，不能对角化。

若 $\mathbf{b}^T \mathbf{a} \neq 0$ ，0 的代数重数为 $n - 1$ ， $\mathbf{b}^T \mathbf{a}$ 的几何重数只能是 1，可以对角化。

5.3.13 证明 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{O} \\ \mathbf{B} & -\mathbf{I}_{n-r} \end{bmatrix}$ 可对角化。

证明：

$\det(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A}) = (\lambda - 1)^r (\lambda + 1)^{n-r}$ ，故 \mathbf{A} 有两个特征值 1, -1，代数重数分别为 $r, n - r$ 。

$\mathbf{I}_n - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ -\mathbf{B} & 2\mathbf{I}_{n-r} \end{bmatrix}$ ，那么 $r(\mathbf{I}_n - \mathbf{A}) = n - r$ ， $\dim N(\mathbf{I}_n - \mathbf{A}) = r$ ，特征值 1 对应的几何重数为 r 。

$$-\mathbf{I}_n - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2\mathbf{I}_r & \mathbf{O} \\ -\mathbf{B} & \mathbf{O} \end{bmatrix}, \text{ 那么 } r(-\mathbf{I}_n - \mathbf{A}) = r, \dim N(-\mathbf{I}_n - \mathbf{A}) = n - r,$$

特征值 -1 对应的几何重数为 $n - r$ 。

综上，所有特征值对应几何重数等于代数重数，矩阵可对角化，证毕。