2022-2023学年度秋季学期线性代数期末考题

由于疫情影响，2022-2023学年度秋季学期的线性代数期末考试方式有所放松，为纯选择题形式，20道选择题，每题6分，超过100分的按100分计分。由于本次考试采取雨课堂+题库抽题的方式，因此这套考题展示的只是本次期末考试所涉及题库的一部分。由于条件有限，题目可能存在错误且暂无答案，请谅解。

1-18题为单选题，19-20题为不定项选择题。

1. 小明称量一批规格相同但是质量参差不齐的砝码，取1个砝码，测得其质量为0.9g；取2个砝码，测得其质量为1.8g；取3个砝码，测得其质量为3.3g。从最小二乘法的角度，单个砝码的质量应取（　　）

   A. 0.9g
   B. 1g
   C. 37/36g
   D. 36/35g

D

2. 向量$\boldsymbol{b}=[1,1,2,0]^T$在和向量$\boldsymbol{a}=[1,2,0,-2]^T$垂直的子空间上的正交投影为（　　）

   A. $\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3},0,-\frac{2}{3}\right]^T$

   B. $\left[\frac{4}{3},-\frac{1}{3},0,\frac{1}{3}\right]^T$

   C. $\left[\frac{4}{3},\frac{5}{3},2,-\frac{2}{3}\right]^T$

   D. $\left[\frac{2}{3},\frac{1}{3},2,\frac{1}{3}\right]^T$

D,选项最后应为2/3

3. 矩阵$A=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$有QR分解，则矩阵R的(1,3)元是（　　）

   A. $\frac{1}{\sqrt{6}}$

   B. $\frac{1}{\sqrt{14}}$

   C. $\sqrt{\frac{8}{3}}$

   D. $\sqrt{\frac{7}{3}}$

A

4. A为三阶方阵。设$A=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}^T\\\boldsymbol{b}^T\\\boldsymbol{c}^T\end{bmatrix}$，其行列式为2。令$B=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}^T-\boldsymbol{b}^T\\\boldsymbol{b}^T+\boldsymbol{c}^T\\\boldsymbol{c}^T-\boldsymbol{a}^T\end{bmatrix}$，则$B$的行列式为（　　）

   A. 0
   B. 4
   C. -4
   D. 2

B

5. 计算行列式的值：$\begin{vmatrix}5&2&2&2\\2&5&2&2\\2&2&5&2\\2&2&2&5\end{vmatrix}$

A. -144

B. 112　　　　　　　　　C

C. 297

D. -112

6. 设A和B都是n阶可逆矩阵，且A和B相似。下列命题中正确的有（　　）个

① A^{-1}和B^{-1}相似

② A^2和B^2相似

③ AB和BA相似

④ $A+B$和$A-B$相似　　　　　　　　C

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

7. 下列矩阵中，哪个一定和$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$相似（　　）

A. $\begin{bmatrix} d & c \\ b & a \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} d & c \\ a & b \end{bmatrix}$　　　　　　　　A

D. $\begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$

8. 已知 1 是矩阵$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & a \end{bmatrix}$的一个特征值。这个矩阵的另一个特征值为（　　）

A. $a+2$　　　　　　　　D

B. $a+1$

C. 0

D. -2

9. 6 阶方阵$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$，其中$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$。该矩阵的特征值 1 的代数重数和几何重数分别为（　　）

A. 5，4　　　　　　　　B

B. 5，3

C. 4，4

D. 4，3

10. 按重数计，矩阵$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$的实特征值个数为（　　）

A. 0　　　　　　　　B

B. 1

C. 2

D. 3

11. 设矩阵$\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$的奇异值为$\sigma_1$和$\sigma_2$，则$\sigma_1^2+\sigma_2^2$的值为（　　）

A. 1　　　　　　　　　　　　D

B. 3

C. 5

D. 7

12. 矩阵$\begin{bmatrix}4 & 6\\6 & 4\end{bmatrix}$的奇异值为（　　）

A. 10，-2　　　　　　B

B. 10，2

C. 6，4

D. 4，4

13. 哪个不是“n阶实对称矩阵A是正定矩阵”的等价命题？

A. A的特征值全部大于 0

B. A的行列式大于 0　　　　　　B

C. A合同于n阶单位矩阵

D. 存在可逆矩阵B，使得$A=BB^T$

14. n阶实对称矩阵A的秩为r，其奇异值分解为$A=U\begin{bmatrix}\Sigma_r & O\\O & O\end{bmatrix}V^T$，记$U=[\boldsymbol{u}_1\,\boldsymbol{u}_2\ldots\boldsymbol{u}_n]$，$V=[\boldsymbol{v}_1\,\boldsymbol{v}_2\ldots\boldsymbol{v}_n]$，则$A$的零空间的一组标准正交基为（　　）

A. $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_r$　　　　　　D

B. $\boldsymbol{u}_{r+1},\ldots,\boldsymbol{u}_n$

C. $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_r$

D. $\boldsymbol{v}_{r+1},\ldots,\boldsymbol{v}_n$

15. 所有从$\mathbb{R}^3$到$\mathbb{R}^4$的线性映射在标准的加法/数乘下构成$\mathbb{R}$上的线性空间。其维数是（　　）

A. 7　　　　　　　　　　　　B

B. 12

C. 1

D. 10

16. 利用矩阵计算$a_0=0$，$a_{n+1}+a_n=3^n\ (n=0,1,2,\ldots)$的通项的步骤中，错误的是（　　）

A. 考虑向量$\begin{bmatrix}a_n\\3^n\end{bmatrix}$，可得矩阵形式的通项公式$\begin{bmatrix}a_{n+1}\\3^{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_n\\3^n\end{bmatrix}$；

B. 系数矩阵$\begin{bmatrix}-1 & 1\\0 & 3\end{bmatrix}$的一组特征值和特征向量为$(3,\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix})$和$(-1,\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix})$；

C. 利用矩阵计算：$\begin{bmatrix}a_{n+1}\\3^{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(-1)^n & 0\\0 & 3^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$　　　　C

D. 得出通项公式：$a_n=\frac{-(-1)^n+3^n}{4}$，$(n=0,1,2,\ldots)$

17. $\begin{cases} x_n = 4x_{n-1} - 5y_{n-1} \\ y_n = 2x_{n-1} - 3y_{n-1} \end{cases}$，$x_0 = 2, y_0 = 1$，$x_{100} =$（　　）

A. $\frac{3 \cdot 2^{100}+1}{3}$

D

B. $\frac{3 \cdot 2^{100}-1}{3}$

C. $\frac{5 \cdot 2^{100}-1}{3}$

D. $\frac{5 \cdot 2^{100}+1}{3}$

18. 矩阵$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$的第一行元素对应的代数余子式之和$C_{11} + C_{12} + C_{13} + C_{14} =$（　　）

A. -6

C

B. 6

C. -2

D. 2

19. （本题是不定项选择题）下列说法中正确的有（　　）

C

A. AB的奇异值和BA的奇异值一致

A选项可能0奇异值的个数不同，但奇异值到底能不能为0呢

B. 若A和B相似，则A和B的奇异值一致

奇异值可以为0

C. 若A是非零正交投影矩阵，则其奇异值为其特征值的算术平方根

D. 若A的行列式小于 0，则A的左奇异向量构成的正交矩阵与右奇异向量构成的正交矩阵有相同的行列式。

20. （本题是不定项选择题）$\mathbb{R}^4$的子空间M=$span(\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0,0\right]^T, \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right]^T, \left[\frac{2\sqrt{5}}{5}, 0, -\frac{\sqrt{5}}{5}, 0\right]^T)$,则下列说法中正确的是（　　）

A. $dim\, M^{\perp} = 1$

C

B. $dim\, M \cap M^{\perp} = 1$

C. $dim (M^{\perp})^{\perp} = 2$

D. $dim\, M - dim\, M^{\perp} = 2$