作业 12-1

2025 年 12 月 4 日

1 线性代数与几何

6.19. 求下列矩阵的特征多项式：

(1) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

解：

$$(1)\ f(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 \\ 1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 7$$

$$(2)\ f(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1$$

$$(3)\ f(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -2 \\ -3 & 1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 2\lambda - 7$$

(4) $f(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 1 & -3\\ 0 & \lambda-4 & -1\\ 0 & 0 & \lambda-3\end{vmatrix}=\lambda^3-9\lambda^2+26\lambda-24$

20. 求下列矩阵的特征值及特征向量:

(1) $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix}2 & -3\\ -3 & 1\end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 4\end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix}0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

(5) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & 3 & 2\end{bmatrix}$

(6) $\begin{bmatrix}3 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{bmatrix}$

(7) $\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$

(8) $\begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 0\end{bmatrix}$

(9) $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$

(10) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}$

解:

计算过程较基础，仅展示结果:

(1) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \mathbf{x}_1 = (1, -1)^{\mathrm{T}}, \mathbf{x}_2 = (1, 1)^{\mathrm{T}}$

(2) $\lambda_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{37}}{2}, \mathbf{x}_{1,2} = (6, 1 \mp \sqrt{37})^{\mathrm{T}}$

(3) $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \mathbf{x} = (1, -1)^{\mathrm{T}}, \mathbf{x}_2 = (-1, 2)^{\mathrm{T}}$

(4) $\lambda_{1,2,3} = 0, \mathbf{x} = (1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$

(5) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 2, \mathbf{x}_1 = (2, 1, -7)^{\mathrm{T}}, \mathbf{x}_2 = (0, 1, -1)^{\mathrm{T}}, \mathbf{x}_3 = (0, 0, 1)^{\mathrm{T}}$

(6) $\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = 2, \mathbf{x} = (0, 1, 1)^{\mathrm{T}}, \mathbf{x}_2 = (1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$

(7) $\lambda_{1,2,3} = 2, \mathbf{x}_1 = (1, 1, -1)^{\mathrm{T}}, \mathbf{x}_2 = (1, -1, 1)^{\mathrm{T}}$

(8) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = -2, \mathbf{x}_1 = (-2, -1, 2)^{\mathrm{T}}, \mathbf{x}_2 = (2, -2, 1)^{\mathrm{T}}, \mathbf{x}_3 = (1, 2, 2)^{\mathrm{T}}$

(9) $\lambda_1 = -2, \lambda_{2,3,4} = 2, \mathbf{x}_1 = (-1, 1, 1, 1)^{\mathrm{T}}, \mathbf{x}_2 = (1, 0, 0, 1)^{\mathrm{T}}, \mathbf{x}_3 = (1, 0, 1, 0)^{\mathrm{T}}, \mathbf{x}_4 = (1, 1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$

(10) $\lambda = 0(n\text{重}), \mathbf{x} = (1, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$

21. 已知 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & -4 & x \end{bmatrix}$ 的特征值 $\lambda_1 = 3(\text{二重}), \lambda_2 = 12$, 求 x，并求特征向量。

解:

$tr(\mathbf{A}) = 7 + 7 + x = 3 + 3 + 12 = 18$，解得 $x = 4$。当 $\lambda = 3$ 时，$\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & -4 & 1 \\ -4 & -4 & 1 \\ 4 & 4 & -1 \end{bmatrix}$，行阶梯型 $\begin{bmatrix} -4 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，主元为 x_1，特征向量

为 $\mathbf{x}=k_1\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\\0\\1\end{bmatrix}(k_1\cdot k_2\neq 0)$ 当 $\lambda=12$ 时，同理解得特征向量为

$\mathbf{x}=k\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}(k\neq 0)$

22. 已知四阶方阵 $\mathbf{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=3$(二重)$,\lambda_2=-1$(二重), 求 $\mathrm{tr}\mathbf{A}$ 及 $\det\mathbf{A}$。

解:

$\mathrm{tr}\mathbf{A}=2\times 3+2\times(-1)=4$，$\det\mathbf{A}=3\times 3\times(-1)\times(-1)=9$。

24. 设 α_1,α_2 是 $\mathbf{A}$ 的属于不同特征值的特征向量，证明 $\alpha_1+\alpha_2$ 不是 $\mathbf{A}$ 的特征向量。

证明:

令 α_1 对应特征值 λ_1，α_2 对应特征值 λ_2。反证法，假设 $\alpha_1+\alpha_2$ 是 $\mathbf{A}$ 属于特征值 λ_3 的特征向量，则 $\mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha_1}+\boldsymbol{\alpha_2})=\lambda_1\boldsymbol{\alpha_1}+\lambda_2\boldsymbol{\alpha_2}=\lambda_3(\boldsymbol{\alpha_1}+\boldsymbol{\alpha_2})\Rightarrow(\lambda_1-\lambda_3)\boldsymbol{\alpha_1}+(\lambda_2-\lambda_3)\boldsymbol{\alpha_2}=0$。又因属于不同特征值的特征向量线性无关，$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$，矛盾，证毕。

26. 已知 λ 是 $\mathbf{A}$ 的特征值，求 $\mathbf{A}^2+2\mathbf{A}-\mathbf{I}$ 的特征值。

解:

若 λ 为 $\mathbf{A}$ 的特征值，则 $f(\lambda)$ 为 $f(\mathbf{A})$ 的特征值。故 $\lambda^2+2\lambda-1$ 是 $\mathbf{A}^2+2\mathbf{A}-\mathbf{I}$ 的特征值。

27. 求下列矩阵对应于特征值的特征子空间的基。

(1) $\begin{bmatrix}2&3&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

解:

类似 20，也是直接求特征值和特征向量。直接给出答案：(1)$\mathbf{V}_{\lambda=2}$ 的基是 $(1,0,0)^{\mathrm{T}}, (0,0,1)^{\mathrm{T}}$，)$\mathbf{V}_{\lambda=1}$ 的基是 $(-3,1,0)^{\mathrm{T}}$。

(2)$\mathbf{V}_{\lambda=2}$ 的基是 $(1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{V}_{\lambda=1}$ 的基是 $(3,-3,1,0)^{\mathrm{T}}$。

2 线性代数入门

5.2.2 构造符合要求的矩阵 $\mathbf{A}$:

1. $\mathbf{A}$ 的特征多项式为 $\lambda^2 - 9\lambda + 20$，构造三个不同的 $\mathbf{A}$。

2. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ * & * \end{bmatrix}$，且 $\mathbf{A}$ 的特征值为 $4, 7$。

3. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ * & * & * \end{bmatrix}$，且 $\mathbf{A}$ 的特征值为 $1, 2, 3$。

证明:

1. 阶数为 2, 迹为 9, 行列式为 20, 不唯一。几个例子: $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$

2. 特征值是 $4, 7$，迹为 11，行列式为 28，所以 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -28 & 11 \end{bmatrix}$

3. 设 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\x&y&z\end{bmatrix}$，$\mathbf{A}$ 的特征多项式是

$$f(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda&-1&0\\0&\lambda&-1\\-x&-y&\lambda-z\end{vmatrix}=\lambda^3-z\lambda^2-y\lambda-x=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3),$$

解得 $x=6,y=-11,z=6.$

5.2.5 设 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$. 1. 利用一元二次方程求根公式，写出 $\mathbf{A}$ 的两个特征值 λ_1,λ_2 的表达式。

2. 构造一个非对角的 $\mathbf{A}$，满足 $\lambda_1=\lambda_2$。

3. 设 λ 为 $\mathbf{A}$ 的特征值, 证明 $\mathbf{A}\begin{bmatrix}b\\\lambda-a\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}b\\\lambda-a\end{bmatrix},\mathbf{A}\begin{bmatrix}\lambda-d\\c\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}\lambda-d\\c\end{bmatrix}$

4. 若上述两个向量中有且仅有一个是零向量，求 $\mathbf{A}$ 的特征值和特征向量。

5. 若上述两个向量都是零向量，求 $\mathbf{A}$ 的特征值和特征向量。

解： 1.$\mathbf{A}$ 的特征多项式为 $(\lambda-a)(\lambda-d)-bc$，解得 $\lambda=\frac{a+d}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2+2bc+d^2}{2}}$。

2. 不唯一，如 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a&b\\0&a\end{bmatrix}$。

3. 记另一个特征值为 λ', 则 $\lambda+\lambda'=a+d$。有 $\begin{bmatrix}\lambda-d&b\\c&\lambda-a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a-\lambda'&b\\c&d-\lambda'\end{bmatrix}$,

则 $\mathbf{A}\begin{bmatrix}\lambda-d&b\\c&\lambda-a\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}\lambda-d&b\\c&\lambda-a\end{bmatrix}=(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})(\mathbf{A}-\lambda'\mathbf{I})$。由 Caylay-Hamilton 定理，该式 = 零矩阵。

4. 有 $\lambda=a,b=0$ 或 $\lambda=d,c=0$。

第一种情况 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a&0\\c&d\end{bmatrix}$，有 $\lambda_1=a,\lambda_2=d,\mathbf{x}_1=(a-d,c)^{\mathrm{T}},\mathbf{x}_2=(0,1)^{\mathrm{T}}$。

第二种情况 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a&b\\0&d\end{bmatrix}$，有 $\lambda_1=a,\lambda_2=d,\mathbf{x}_1=(1,0)^{\mathrm{T}},\mathbf{x}_2=(b,d-a)^{\mathrm{T}}$。

5.$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a&0\\0&d\end{bmatrix}$，有 $\lambda_1=a,\lambda_2=d,\mathbf{x}_1=(1,0)^{\mathrm{T}},\mathbf{x}_2=(0,1)^{\mathrm{T}}$。