《微积分A1》第四讲

教师 杨利军

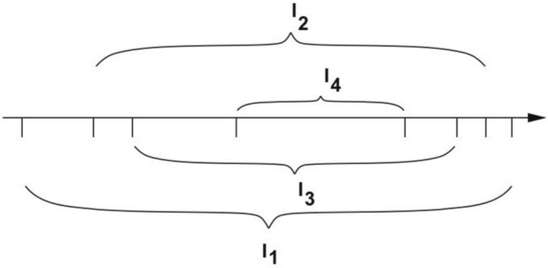
清华大学数学科学系

2025年09月24日

区间套定理(Nested intervals theorem)

Theorem

定理: 设 I_k $(\forall k \geq 1)$ 为逐个嵌套包含的闭区间列, 即 $I_{k+1} \subset I_k$, $\forall k \geq 1$. 若区间长度 $|I_k| \to 0$, 则存在唯一一个点 $\xi \in \bigcap_{k=1}^{+\infty} I_k$.



定理证明

证: 设 $I_k = [a_k, b_k]$, $\forall k \geq 1$, 由于 $I_{k+1} \subset I_k$, 故序列 $\{a_k\} \uparrow$, $\{b_k\} \downarrow$, 并且它们均有界, 从而均收敛. 我们设 $a_k \uparrow a$, $b_k \downarrow b$. 由于 $a_k < b_k$, 故 $a \leq b$. 因此 $a_k \leq a \leq b \leq b_k$, $\forall k \geq 1$. 依假设 $|I_k| = b_k - a_k \to 0$, 故 $|b - a| \leq b_k - a_k \to 0$. 即 $a = b$. 故存在唯一一点 $\xi = a = b \in \bigcap_{k=1}^{+\infty} I_k$. 证毕. $\square$

注: 区间套定理中区间是闭的条件不可少. 例如取 $I_k = (0, \frac{1}{k})$, $k = 1, 2, \cdots$, 则 $I_{k+1} \subset I_k$, 但交集 $\bigcap_{k=1}^{+\infty} I_k$ 是空集. 定理的结论不成立.

课本第19页习题1.4第15题(记号略有不同): 回忆两个正数 $a_0 > g_0 > 0$, 其算术平均和几何平均为 $a_1 = \frac{a_0+g_0}{2}$, $g_1 = \sqrt{a_0 g_0}$. 显然 $g_0 < g_1 < a_1 < a_0$. 令 $a_2 = \frac{a_1+g_1}{2}$, $g_2 = \sqrt{a_1 g_1}$, 则 $g_0 < g_1 < g_2 < a_2 < a_1 < a_0$. 如此继续下去, 即可得到两个单调序列 $\{g_n\}$, $\{a_n\}$ 满足

$$g_0 < g_1 < g_2 < \cdots < g_n < a_n < \cdots < a_2 < a_1 < a_0,$$

其中 $a_{k+1} = \frac{a_k+g_k}{2}$, $g_{k+1} = \sqrt{a_k g_k}$, $\forall k \geq 1$. 考虑闭区间 $I_n = [g_n, a_n]$ 的长度.

$$a_1 - g_1 = \frac{a_0 + g_0}{2} - \sqrt{a_0 g_0} = \frac{a_0 - g_0}{2} + g_0 - \sqrt{a_0 g_0} < \frac{a_0 - g_0}{2}.$$

即 $|I_1| < \frac{1}{2}|I_0|$. 类似可证 $|I_k| < \frac{1}{2}|I_{k-1}|$, $\forall k \geq 1$. 由此得 $|I_k| < \frac{1}{2}|I_{k-1}| < \cdots < \frac{1}{2^k}|I_0|$. 可见区间长度 $|I_k|$ 趋向于零. 由区间套定理知存在唯一 $\xi \in \bigcap_{k\geq 0} I_k$. 值 ξ 常记作 $AG(a_0, g_0)$. (注: Gauss 首先发现了这个数的一些特殊性质, 并利用它计算 π 的近似值.) 解答完毕.

Definition

<u>定义</u>: 给定一个序列 $\{a_n\}$, 如果对于任意大的正数 $M>0$, 存在正整数 N, 使得 $a_n>M$, $\forall n>N$, 则称序列 $\{a_n\}$ 趋向正无穷, 记作 $\lim_{n\to+\infty} a_n=+\infty$ 或 $a_n\to+\infty$. 类似可定义数列 $\{a_n\}$ 趋向负无穷, 记作 $\lim_{n\to+\infty} a_n=-\infty$ 或 $a_n\to-\infty$.

例如, $\sqrt{n}\to+\infty$; $n^2\to+\infty$.

<u>注一</u>: 趋向正无穷的序列必无上界, 但无上界序列不必趋向正无穷. 例如序列 $\{0,1,0,2,0,3,\cdots\}$ 无上界, 但并不趋向正无穷.

<u>注二</u>: 易证 $|a_n|\to+\infty \iff \frac{1}{a_n}\to 0$.

Stolz 定理

Theorem

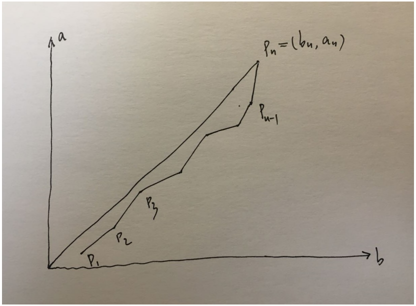
定理: 考虑极限 $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}$.

(i) ($\frac{*}{\infty}$ 型) 若 $b_n \uparrow +\infty$ 严格, 且极限 $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ 存在, 记作 L (允许 L 为正无穷或负无穷), 则 $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=L$.

(ii) ($\frac{0}{0}$ 型) 设 $a_n\to 0$ 且 $b_n\downarrow 0$ 严格. 若极限 $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ 存在, 记作 L (允许 L 为正无穷或负无穷), 则 $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=L$.

Stolz 定理的几何意义

记 $P_n = (b_n, a_n)$ 为给定的一个平面点列，则线段 $\overline{OP_n}$ 的斜率为 $\frac{a_n}{b_n}$，线段 $\overline{P_nP_{n+1}}$ 的斜率为 $\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$，由此可知 Stolz 定理的几何意义：若线段 $\overline{P_nP_{n+1}}$ 的斜率有极限，则线段 $\overline{OP_n}$ 的斜率也有极限，且极限相同.



例一: 求极限

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}.$$

解: 记 $a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$, $b_n=\ln n$, 则显然 $b_n\uparrow+\infty$ 严格. 考虑

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\frac{\frac{1}{n+1}}{\ln(n+1)-\ln n}=\frac{1}{(n+1)\ln(1+\frac{1}{n})}$$

$$=\frac{1}{\frac{n+1}{n}\ln(1+\frac{1}{n})^n}\to\frac{1}{1\cdot\ln e}=1.$$

根据 Stolz 定理可知所求极限为 $\lim\frac{a_n}{b_n}=1$. 解答完毕.

注: 级数 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$ 称为调和级数. 可以证明, 这是一个发散级数, 即 $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=+\infty$. 上述极限表明, 这个级数发散的速度和 $\ln n$ 差不多.

例二: 给定正整数 k, 求极限 $\lim_{n\to+\infty}\frac{1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}$.

解: 记 $a_n=1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k$, $b_n=n^{k+1}$, 显然 $b_n\uparrow+\infty$ 严格. 考虑

$$\triangle_n \overset{\text{def}}{=} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\frac{(n+1)^k}{(n+1)^{k+1}-n^{k+1}}.$$

展开二项式 $(n+1)^{k+1}$ 得

$$(n+1)^{k+1}=n^{k+1}+(k+1)n^k+\frac{(k+1)k}{2}n^{k-1}+\cdots$$

$$\Rightarrow\quad \triangle_n=\frac{(n+1)^k}{n^{k+1}+(k+1)n^k+\frac{(k+1)k}{2}n^{k-1}+\cdots-n^{k+1}}$$

$$=\frac{(n+1)^k}{(k+1)n^k+\frac{(k+1)k}{2}n^{k-1}+\cdots}=\frac{(1+\frac{1}{n})^k}{(k+1)+\frac{(k+1)k}{2}\frac{1}{n}+\cdots}\to\frac{1}{k+1}.$$

根据 Stolz 定理可知, 所求极限为 $\lim\frac{a_n}{b_n}=\frac{1}{k+1}$. 解答完毕.

例三

课本第8页习题1.2第7题(2): 设 $\lim_{n\to+\infty} x_n = A$, 证明

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} = A$$

证明: 在 Stolz 定理结论一中, 令 $a_n = x_1+x_2+\cdots+x_n$, $b_n = n$, 则 $b_n \uparrow +\infty$ 严格, 且

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \frac{x_{n+1}}{1} \to A.$$

因此由 Stolz 定理知

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} = A.$$

证毕. $\square$

例四: 记 $s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. (1) 证明 $\lim_{n\to+\infty} s_n$ 存在. 极限常记作 $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$. (2) 记 $\varepsilon_n = e - s_n$, 求极限 $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n (n+1)!$.

证 (1): 记 $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$. 已证极限 $\lim_{n\to+\infty} a_n$ 存在, 并记极限为 e. 一方面对 $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ 二项展开可得

$$a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

$$< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} = s_n.$$

另一方面, 任意固定正整数 m, 对任意正整数 $n > m$,

$$a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

$$> 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right).$$

于上式令 $n \to +\infty$ 即得

$$e \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{m!} = s_m.$$

这说明序列 $\{s_m\}$ 有上界 e. 又显然这个序列单调上升. 故极限 $\lim_{n\to+\infty} s_n$ 存在，极限记作 $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$. 因此

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq e.$$

在不等式 $a_n < s_n$ 两边令 $n \to +\infty$ 得 $e \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$. 因此 $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$. 结论 (1) 得证.

解(2): 将 $\varepsilon_n(n+1)!$ 写作 $\varepsilon_n(n+1)! = \frac{\varepsilon_n}{\frac{1}{(n+1)!}}$. 这是 $\frac{0}{0}$ 型的不定式. 考虑差商:

例四，续二

$$\varepsilon_{n+1}-\varepsilon_n=(e-s_{n+1})-(e-s_n)=s_n-s_{n+1}=-\frac{1}{(n+1)!},$$

$$\frac{1}{(n+2)!}-\frac{1}{(n+1)!}=-\frac{n+1}{(n+2)!},$$

于是

$$\frac{\varepsilon_{n+1}-\varepsilon_n}{\frac{1}{(n+2)!}-\frac{1}{(n+1)!}}=\frac{\frac{-1}{(n+1)!}}{\frac{-(n+1)}{(n+2)!}}=\frac{n+2}{n+1}\to 1.$$

根据 $\frac{0}{0}$ 型的 Stolz 定理可知所求极限为 $\varepsilon_n(n+1)!\to 1$. 解答完毕.

回忆: Stolz 定理

Theorem

定理: 考虑极限 $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}$.

(i) ($\frac{*}{\infty}$ 型) 若 $b_n \uparrow +\infty$ 严格, 且极限 $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ 存在, 记作 L (允许 L 为正无穷或负无穷), 则 $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = L$.

(ii) ($\frac{0}{0}$ 型) 设 $a_n \to 0$ 且 $b_n \downarrow 0$ 严格. 若极限 $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ 存在, 记作 L (允许 L 为正无穷或负无穷), 则 $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = L$.

Stolz 定理的证明(可略去)

证: 先证 $(\frac{*}{\infty})$ 情形结论. 考虑 $\lim \frac{a_n}{b_n}$. 假设 $b_n \uparrow +\infty$ 严格, 且 $\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \to L$. 以下分四种情况讨论 (i) $L = 0$; (ii) $L \neq \pm\infty$, $L \neq 0$; (iii) $L = +\infty$; (iv) $L = -\infty$.

情形 (i) $L = 0$. 即已知 $\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \to 0$, 要证 $\frac{a_n}{b_n} \to 0$, 即对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得 $|\frac{a_n}{b_n}| < \varepsilon$, $\forall n > N$. 由假设 $\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \to 0$ 知, 存在正整数 N_1, 使得

$$\left|\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}\right| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N_1.$$

即 $|a_{n+1}-a_n| < \varepsilon(b_{n+1}-b_n)$, $\forall n \geq N_1$. 由此得对任意 $n \geq N_1$

$$\begin{aligned}
|a_{N_1+1}-a_{N_1}| &< \varepsilon(b_{N_1+1}-b_{N_1}),\\
|a_{N_1+2}-a_{N_1+1}| &< \varepsilon(b_{N_1+2}-b_{N_1+1}),\\
&\vdots\\
|a_{n+1}-a_n| &< \varepsilon(b_{n+1}-b_n).
\end{aligned}$$

将上述不等式相加得

$$\sum_{k=N_1}^{n} |a_{k+1} - a_k| < \varepsilon(b_{n+1} - b_{N_1}).$$

将 a_{n+1} 写作

$$a_{n+1} = (a_{n+1} - a_n) + (a_n - a_{n-1}) + \cdots + (a_{N_1+1} - a_{N_1}) + a_{N_1},$$

则 $\quad |a_{n+1}| \leq \sum_{k=N_1}^{n} |a_{k+1} - a_k| + |a_{N_1}| \leq \varepsilon(b_{n+1} - b_{N_1}) + |a_{N_1}|.$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right| \leq \frac{\varepsilon(b_{n+1} - b_{N_1}) + |a_{N_1}|}{b_{n+1}}$$

$$= \varepsilon\left(1 - \frac{b_{N_1}}{b_{n+1}}\right) + \frac{|a_{N_1}|}{b_{n+1}} \leq \varepsilon + \frac{|a_{N_1}| + \varepsilon|b_{N_1}|}{b_{n+1}}.$$

证明，续二

根据假设 $b_n \uparrow +\infty$，知存在正整数 $N_2 > N_1$，使得

$$\frac{|a_{N_1}| + \varepsilon|b_{N_1}|}{b_{n+1}} < \varepsilon, \quad \forall n \geq N_2.$$

综上可知对于 $\forall \varepsilon > 0$，存在正整数 N_2，使得对任意 $n \geq N_2$，$\left|\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right| < 2\varepsilon$. 这就证明了 $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$. 情形 (i) 得证.

情形 (ii): $L \neq \pm\infty$ 且 $L \neq 0$. 将情形 (ii) 转化为情形 (i). 由于

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} - L = \frac{(a_{n+1} - Lb_{n+1}) - (a_n - Lb_n)}{b_{n+1} - b_n}.$$

令 $\hat{a}_n = a_n - Lb_n$，则

$$\frac{\hat{a}_{n+1} - \hat{a}_n}{b_{n+1} - b_n} \to 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \to L.$$

故由假设 $\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \to L$ 知 $\frac{\hat{a}_{n+1} - \hat{a}_n}{b_{n+1} - b_n} \to 0$. 再由情形 (i) 的结论知

证明，续三

$$\frac{\hat{a}_n}{b_n} \to 0 \quad 即 \quad \frac{\hat{a}_n}{b_n} = \frac{a_n - Lb_n}{b_n} = \frac{a_n}{b_n} - L \to 0.$$

这就证明了 $\lim \frac{a_n}{b_n} = L$. 情形 (ii) 得证.

情形 (iii) $L = +\infty$. 已知 $\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \to +\infty$, 要证 $\frac{a_n}{b_n} \to +\infty$. 设法将情形 (iii) 转化到情形 (i). 考虑 $\frac{b_n}{a_n}$. 假设 $\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \to +\infty$ 意味着 $\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n} \to 0$. 为应用结论 (i), 需验证 $\{a_n\} \uparrow +\infty$ 严格. 由假设 $\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \to +\infty$ 可知存在正整数 N, 使得对任意 $n \geq N$

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} > 1 \quad 即 \quad a_{n+1} - a_n > b_{n+1} - b_n > 0.$$

这表明 $\{a_n\} \uparrow$ 严格, $\forall n \geq N$. 之前已证 $a_{n+1} - a_n > b_{n+1} - b_n > 0$, $\forall n \geq N$.

因此对 $n \geq N$

$$a_{N+1} - a_N > b_{N+1} - b_N,$$
$$a_{N+2} - a_{N+1} > b_{N+2} - b_{N+1},$$
$$\vdots$$
$$a_{n+1} - a_n > b_{n+1} - b_n.$$

将上述不等式两边分别相加得 $a_{n+1} - a_N > b_{n+1} - b_N \to +\infty$. 这表明 $\{a_n\} \uparrow +\infty$ 严格. 对序列 $\frac{b_n}{a_n}$ 应用结论 (i) 可知 $\frac{b_n}{a_n} \to 0$. 由于 $a_n \to +\infty$, $b_n \to +\infty$, 故当 n 充分大时, $a_n > 0$, $b_n > 0$. 因此 $\frac{a_n}{b_n} \to +\infty$. 情形 (iii) 得证.

情形 (iv): $L = -\infty$. 考虑序列 $\frac{-a_n}{b_n}$, 即可将情形 (iv) 转化到情形 (iii). 至此 Stolz 定理关于 $\frac{*}{\infty}$ 型的结论得证.

证明，续五

再证情形 $(\frac{0}{0})$ 的结论. 仅考虑 L 为有限情形. 情形 $L=\pm\infty$ 的证明类似. 由假设 $\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}\to L$ 可知，对 $\forall\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$，使得 $|\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}-L|<\varepsilon$，即

$$L-\varepsilon<\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\frac{a_n-a_{n+1}}{b_n-b_{n+1}}<L+\varepsilon,\quad \forall n>N.$$

由 $b_n\downarrow$ 严格知

$$(L-\varepsilon)(b_n-b_{n+1})<a_n-a_{n+1}<(L+\varepsilon)(b_n-b_{n+1}).$$

于是对于任意 $m>n>N$，

$$(L-\varepsilon)(b_n-b_{n+1})<a_n-a_{n+1}<(L+\varepsilon)(b_n-b_{n+1})$$

$$(L-\varepsilon)(b_{n+1}-b_{n+2})<a_{n+1}-a_{n+2}<(L+\varepsilon)(b_{n+1}-b_{n+2})$$

$$\vdots$$

$$(L-\varepsilon)(b_{m-1}-b_m)<a_{m-1}-a_m<(L+\varepsilon)(b_{m-1}-b_m)$$

将上述各不等式相加得

$$(L-\varepsilon)(b_n-b_m)<a_n-a_m<(L+\varepsilon)(b_n-b_m).$$

$$\text{即}\quad L-\varepsilon<\frac{a_n-a_m}{b_n-b_m}<L+\varepsilon.$$

于上述不等式令 $m\to+\infty$ 并注意到 $a_m\to0$ 且 $b_m\to0$ 即得

$$L-\varepsilon\le\frac{a_n}{b_n}\le L+\varepsilon,\quad\forall n>N.$$

此即 $|\frac{a_n}{b_n}-L|\le\varepsilon$. 这就证明了 $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=L$. Stolz 定理得证.

Definition

定义: 设 $S \subset \mathbb{R}$ 为一个非空实数集. 一个点 $a \in \mathbb{R}$ 称为集 S 的一个聚点 (an accumulation point), 如果点 a 的任意一个 ε 邻域 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 均包含集 S 中的无穷多个点. 通常用符号 S' 表示集 S 的所有聚点的集合, 且称 S' 为 S 的导集.

Example

例一: 有限点集合没有聚点.

例二: 若 $S = \{\frac{1}{n} | n = 1, 2, \cdots\}$, 则 $S' = \{0\}$.

例三: 若记 $S = (a, b)$, 则 $S' = [a, b]$.

例四: 根据有理数的稠密性知, 任何一个实数任何一个 ε 邻域内, 包含无穷多个有理数. 因此有理数集合的导集就是全体实数, 即 $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$.

定理: 有界无穷的实数子集必有聚点.

证: 设 $E \subset \mathbb{R}$ 为有界无穷集, 则 $E \subset [a_1, b_1]$. 令 $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$, 则 $[a_1, c_1] \cap E$ 和 $[c_1, b_1] \cap E$ 中之一是无穷集. 若 $[a_1, c_1] \cap E$ 是无穷集, 则记 $[a_2, b_2] = [a_1, c_1]$. 否则记 $[a_2, b_2] = [c_1, b_1]$. 假设对于 $n \geq 2$, 取定 $[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}]$, 使得 $b_n - a_n = \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1})$, 且 $[a_n, b_n] \cap E$ 是无穷集, 则类似取 $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$, 使得 $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$, 且 $[a_{n+1}, b_{n+1}] \cap E$ 是无穷集. 于是 $\{[a_n, b_n]\}$ 满足区间套定理中各项条件, 故存在唯一的 $\xi \in \cap_{n\geq 1}[a_n, b_n]$. 由于 $a_n \to \xi$ 且 $b_n \to \xi$, 故对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \geq 1$, 使得 $[a_N, b_N] \subset (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$. 由于 $[a_n, b_n] \cap E$ 是无穷集, 故 $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon) \cap E$ 也是无穷集. 因此 ξ 是集合 E 的一个聚点. 定理得证. $\square$

Theorem

定理: 有界序列必存在收敛子列.

Example

例: 考虑 $\{\sin\frac{n\pi}{2}\}_{n\geq 1} = \{1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \cdots\}$. 显然这个序列有界.

记 $a_n = \sin\frac{n\pi}{2}$. 显然它有如下三个收敛子列:

子列一: $\{a_{4n+1}\} = \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = \{1, 1, \cdots\}$.

子列二: $\{a_{2n}\} = \{\sin(n\pi)\} = \{0, 0, \cdots\}$.

子列三: $\{a_{4n+3}\} = \{\sin(2n\pi + \pi + \frac{\pi}{2})\} = \{-1, -1, \cdots\}$.

证: 设 $\{a_n\}$ 为一有界序列, 对应的点集记作 E. (所有相同的项在 E 中只出现一次. 例如序列 $\{(-1)^n\}$ 对应的点集为 $\{1,-1\}$.) 显然集合 E 为有界集. 若 E 为有限集, 则必有某数 a 在序列 $\{a_n\}$ 中出现无限多次. 对应的项就构成一个常数子列, 收敛. 命题得证. 若 E 为无限集, 则由聚点原理知 E 存在聚点 ξ. 由定义知, $(\xi-1,\xi+1)\cap E$ 为无穷集, 取 $n_1\geq 1$, 使得 $a_{n_1}\in(\xi-1,\xi+1)$. 类似 $(\xi-\frac{1}{2},\xi+\frac{1}{2})\cap E$ 为无穷集, 可取 $n_2>n_1$, 使得 $a_{n_2}\in(\xi-\frac{1}{2},\xi+\frac{1}{2})$. 以此类推, 可取序列 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{n_k}\}$, 使得 $a_{n_k}\in(\xi-\frac{1}{k},\xi+\frac{1}{k})$, $k\geq 1$. 显然子列 $\{a_{n_k}\}$ 收敛于 ξ. 定理得证. $\square$

序列的极限点

Definition

<u>定义</u>: 点 $x \in \mathbb{R}$ 称为序列 $\{a_n\}$ 的极限点, 如果 $\{a_n\}$ 存在一个收敛子列 $\{a_{n_k}\}$, 使得 $a_{n_k} \to x$.

<u>例</u>: 序列 $\{(-1)^n\}$ 有两个极限点 1 和 -1. 而序列 $\{\frac{1}{n}\}$ 有唯一一个极限点 0.

<u>注</u>: B-W 定理可表述为: 有界序列必有极限点.

Lemma

引理: (i) 若序列 $\{a_n\}$ 无上界, 则存在一个子序列 $\{a_{n_k}\}$, 使得 $a_{n_k} \to +\infty$;

(ii) 若序列 $\{a_n\}$ 无下界, 则存在一个子序列 $\{a_{n_k}\}$, 使得 $a_{n_k} \to -\infty$.

证: 只证 (i). 若序列 $\{a_n\}$ 无上界, 则依定义知, 对 $\forall M > 0$, 存在项 $a_m > M$. 取 $M = 1$, 则存在 $a_{n_1} > 1$. 取 $M = 2$, 则存在 $a_{n_2} > 2$. 可要求指标 $n_2 > n_1$. 因为若不然, 则 $a_n \le 2$, $\forall n \ge n_1$. 从而原序列 $\{a_n\}_{n\ge1}$ 有上界. 矛盾. 取 $M = k$, 则存在指标 $n_k > n_{k-1}$, 使得 $a_{n_k} > k$. 于是子列 $a_{n_k} \to +\infty$. □

注: 当序列 $\{a_n\}$ 无上界时, 称 $\{a_n\}$ 有极限点 $+\infty$, 当序列 $\{a_n\}$ 无下界时, 称 $\{a_n\}$ 有极限点 $-\infty$.

Definition

定义: 给定一个序列 $\{a_n\}$. 记 E 为序列 $\{a_n\}$ 所有极限点(包括无穷极限点)的集合, 定义

$$\overline{\lim}\, a_n \overset{\text{def}}{=} \sup E, \quad \underline{\lim}\, a_n \overset{\text{def}}{=} \inf E,$$

并分别称它们为序列 $\{a_n\}$ 的上极限(superior limits) 和下极限 (inferior limits).

注: 粗略地说, 序列 $\{a_n\}$ 的上极限, 就是 $\{a_n\}$ 最大的极限点; 而序列 $\{a_n\}$ 的下极限, 就是 $\{a_n\}$ 最小的极限点.

例子

例一: 易证序列 $\{\sin\frac{n\pi}{2}\}_{n\geq 1} = \{1, 0, -1, 0, 1, \cdots\}$ 的极限点集合 $E = \{-1, 0, 1\}$. 因此 $\overline{\lim}\sin\frac{n\pi}{2} = 1$. $\underline{\lim}\sin\frac{n\pi}{2} = -1$.

例二: 易证序列 $\{n^{(-1)^n}\} = \{\frac{1}{1}, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, 6, \cdots\}$ 的极限点集合 $E = \{0, +\infty\}$, 故序列的上下极限为 $\overline{\lim}\, a_n = +\infty$, $\underline{\lim}\, a_n = 0$.

<u>记号</u>: 设 $\{a_n\}$ 为有界序列, 记

$$\bar{a}_n \overset{\text{def}}{=} \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots\}, \quad \underline{a}_n \overset{\text{def}}{=} \inf\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots\}.$$

显然 $\bar{a}_n$ 单调下降, $\underline{a}_n$ 单调上升, $\underline{a}_n \le \bar{a}_n$, 且 $\{\bar{a}_n\}$ 和 $\{\underline{a}_n\}$ 均有界. 因此极限 $\lim \bar{a}_n$ 和 $\lim \underline{a}_n$ 均存在.

Theorem

<u>定理</u>: (i) $\overline{\lim}\, a_n = \lim \bar{a}_n$; (ii) $\underline{\lim}\, a_n = \lim \underline{a}_n$.

定理证明(可忽略)

证: 只证结论 (i). 结论 (ii) 的证明类似. 记 $\bar{a} \overset{\text{def}}{=} \lim \bar{a}_n$, 记 E 为序列 $\{a_n\}$ 的极限点集合. 要证 $\bar{a} = \sup E$. 先证 $\bar{a}$ 是极限点. 由于 $\bar{a}_n \downarrow \bar{a}$, 故对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得对任意 $n \geq N$, $|\bar{a}_n - \bar{a}| < \varepsilon$. 取 $n = N$ 得 $|\bar{a}_N - \bar{a}| < \varepsilon$, 即

$$-\varepsilon + \bar{a} < \bar{a}_N < \varepsilon + \bar{a}.$$

取 $\varepsilon = 1$, 则存在正整数 N_1, 使得

$$-1 + \bar{a} < \bar{a}_{N_1} < 1 + \bar{a}.$$

因 $\bar{a}_{N_1} = \sup\{a_{N_1}, a_{N_1+1}, \cdots\}$, 故存在 $a_{n_1} \in \{a_{N_1}, a_{N_1+1}, \cdots\}$, 使得

$$-1 + \bar{a} < a_{n_1} \leq \bar{a}_{N_1} < 1 + \bar{a}, \quad n_1 \geq N_1.$$

取 $\varepsilon = \frac{1}{2}$, 则存在正整数 $N_2 > n_1$, 使得

证明，续

$$-\frac{1}{2}+\bar{a}<\bar{a}_{N_2}<\frac{1}{2}+\bar{a}.$$

同理存在 $a_{n_2}\in\{a_{N_2},a_{N_2+1},\cdots\}$，使得

$$-\frac{1}{2}+\bar{a}<a_{n_2}\le\bar{a}_{N_2}<\frac{1}{2}+\bar{a},\quad n_2\ge N_2.$$

取 $\varepsilon=\frac{1}{k}$, $k\ge3$，则存在正整数 $n_k\ge N_k>n_{k-1}\ge N_{k-1}$，使得

$$-\frac{1}{k}+\bar{a}<a_{n_k}\le\bar{a}_{N_k}<\frac{1}{k}+\bar{a}.$$

于是我们得到序列 $\{a_n\}$ 的一个子列 $a_{n_k}\to\bar{a}$. 故 $\bar{a}$ 是一个极限点，即 $\bar{a}\in E$. 因此 $\bar{a}\le\sup E$. 再证相反的不等式，即 $\bar{a}\ge\sup E$. 对 $\forall b\in E$，即 b 是序列 $\{a_n\}$ 的一个极限点，故存在子列 $a_{m_k}\to b$. 由于 $a_{m_k}\le\bar{a}_{m_k}$，故令 $k\to+\infty$，则得 $b\le\bar{a}$. 这表明对 $\forall b\in E$, $b\le\bar{a}$. 因此 $\sup E\le\bar{a}$. 证毕.

注记

注一: 序列 $\{a_n\}$ 的上下极限也常分别记作 $\limsup\{a_n\}$, $\liminf\{a_n\}$.

注二: 实际上, 序列 $\{a_n\}$ 的上极限就是序列的最大极限点, 下极限就是序列的最小极限点. 当序列无上界或无下界时, 结论显然. 当序列 $\{a_n\}$ 有界时, 可以证明其极限点集合 E 是有界闭集. 而有界闭集必存在最大点(即最大极限点) 和最小点(即最小极限点).

Theorem

定理：有界序列 $\{a_n\}$ 有极限，当且仅当 $\overline{\lim}\, a_n = \underline{\lim}\, a_n$.

Proof.

证明：有界序列 $\{a_n\}$ 有极限 $\Longleftrightarrow$ 序列 $\{a_n\}$ 有唯一一个有限极限点 $\Longleftrightarrow$ $\overline{\lim}\, a_n = \underline{\lim}\, a_n$. $\square$

性质：设 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 为两个有界序列，则以下结论成立.

(i) 若 $a_n \le b_n$，$\forall n \ge n_0$，n_0 为某个正整数，则

$$\overline{\lim}\, a_n \le \overline{\lim}\, b_n, \quad \underline{\lim}\, a_n \le \underline{\lim}\, b_n;$$

(ii)

$$\underline{\lim}\, a_n + \underline{\lim}\, b_n \le \underline{\lim}\,(a_n + b_n)$$

$$\le \overline{\lim}\,(a_n + b_n) \le \overline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n;$$

(iii) 若 $a_n \ge 0$，$b_n \ge 0$，则

$$(\underline{\lim}\, a_n)(\underline{\lim}\, b_n) \le \underline{\lim}\,(a_n b_n)$$

$$\le \overline{\lim}\,(a_n b_n) \le (\overline{\lim}\, a_n)(\overline{\lim}\, b_n);$$

性质，续

(iv) $\underline{\lim}\,(-a_n) = -\overline{\lim}\,a_n$，$\overline{\lim}\,(-a_n) = -\underline{\lim}\,a_n$；

(v) 若极限 $\lim a_n$ 存在，则

$$\underline{\lim}\,(a_n + b_n) = \lim\ a_n + \underline{\lim}\,b_n,$$

$$\overline{\lim}\,(a_n + b_n) = \lim\ a_n + \overline{\lim}\,b_n;$$

(vi) 若 $a_n \geq 0$，$b_n \geq 0$，且极限 $\lim a_n$ 存在，则

$$\underline{\lim}\,(a_n b_n) = (\lim\ a_n)(\underline{\lim}\,b_n),$$

$$\overline{\lim}\,(a_n b_n) = (\lim\ a_n)(\overline{\lim}\,b_n).$$

证明

证明详见吉米多维奇的数学分析习题集习题解答(共六册)，第一册，题解 131，132，133，134. 以下只证结论 (ii)，即

$$\underline{\lim}\, a_n + \underline{\lim}\, b_n \leq \underline{\lim}\,(a_n + b_n) \leq \overline{\lim}\,(a_n + b_n) \leq \overline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n.$$

中间的不等号显然成立. 第一个和第三个不等式的证明类似. 以下只证最后第三个不等式.

证明，续

记 $c_n = a_n + b_n$，则对任意正整数 m，$\forall n \geq m$，$c_n = a_n + b_n$

$$\leq \sup\{a_m, a_{m+1}, \cdots\} + \sup\{b_m, b_{m+1,\cdots}\} = \bar{a}_m + \bar{b}_m$$

$$\Rightarrow \quad \bar{c}_m = \sup\{c_m, c_{m+1}, \cdots\}$$

$$\leq \sup\{\bar{a}_m + \bar{b}_m, \bar{a}_m + \bar{b}_m, \cdots\} = \bar{a}_m + \bar{b}_m,$$

即 $\bar{c}_m \leq \bar{a}_m + \bar{b}_m$．于是 $\lim \bar{c}_m \leq \lim \bar{a}_m + \lim \bar{b}_m$．此即 $\overline{\lim}\,(a_n + b_n)$
$\leq \overline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n$．此即性质 (ii) 成立.

回忆 Stolz 定理关于 $\frac{*}{\infty}$ 型极限的结论.

定理: 考虑极限 $\lim \frac{a_n}{b_n}$. 若 $b_n \uparrow +\infty$ 严格, 且 $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ 存在 (包括正无穷或负无穷情形), 记作 L, 则 $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$.

另证: 只证 L 为有限数情形. 根据假设可知对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得

$$L - \varepsilon < \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} < L + \varepsilon, \quad \forall n \geq N.$$

$$\text{于是} \quad L - \varepsilon < \frac{a_{N+1} - a_N}{b_{N+1} - b_N} < L + \varepsilon$$

$$L - \varepsilon < \frac{a_{N+2} - a_{N+1}}{b_{N+2} - b_{N+1}} < L + \varepsilon$$

$$\vdots$$

$$L - \varepsilon < \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} < L + \varepsilon.$$

应用，续一

引理 (分数不等式): 对任意 n 个分数 $\frac{x_k}{y_k}$ (约定 $y_k > 0$), $k = 1, 2, \cdots, n$, 则

$$\min\left\{\frac{x_1}{y_1}, \cdots, \frac{x_n}{y_n}\right\} \le \frac{x_1 + \cdots + x_n}{y_1 + \cdots + y_n} \le \max\left\{\frac{x_1}{y_1}, \cdots, \frac{x_n}{y_n}\right\}.$$

(引理的证明已留作补充习题)

将引理应用于上述不等式得

$$L - \varepsilon < \frac{(a_{N+1} - a_N) + \cdots + (a_{n+1} - a_n)}{(b_{N+1} - b_N) + \cdots + (b_{n+1} - b_n)} < L + \varepsilon.$$

此即 $$L - \varepsilon < \frac{a_{n+1} - a_N}{b_{n+1} - b_N} < L + \varepsilon.$$

亦即 $$L - \varepsilon < \frac{\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - \frac{a_N}{b_{n+1}}}{1 - \frac{b_N}{b_{n+1}}} < L + \varepsilon. \qquad (*)$$

注意到 $\frac{a_N}{b_{n+1}} \to 0$, $\frac{b_N}{b_{n+1}} \to 0$. 在不等式 (*) 中分别取上下极限, 并利用上下极限的性质可得

$$L-\varepsilon \le \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \le L+\varepsilon, \quad L-\varepsilon \le \underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \le L+\varepsilon.$$

由于 $\varepsilon > 0$ 为任意小正数，上下极限均为常数，故它们必相等，且等于 L，即

$$\overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = L.$$

从而极限 $\lim \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$ 存在且等于 L. 命题得证. $\square$

例子

课本第1章总复习题第14题(p. 24): 设序列 $\{x_n\}$ 满足 $0 \le x_{n+m} \le x_n + x_m$, $\forall n, m$ 正整数. 证明 $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n}$ 存在.

证: 由假设 $0 \le x_{n+m} \le x_n + x_m$ 可知 $0 \le x_n \le nx_1$, 即 $0 \le \frac{x_n}{n} \le x_1$. 因此

$$0 \le \underline{\lim} \frac{x_n}{n} \le \overline{\lim} \frac{x_n}{n} \le x_1.$$

任意固定一个正整数 m, 则任意正整数 n 可表为 $n = qm + r$, 其中 $0 \le r < m$. 于是 $x_n = x_{mq+r} \le x_{qm} + x_r \le qx_m + x_r$.

$$\Rightarrow \quad 0 \le \frac{x_n}{n} \le \frac{qx_m}{qm + r} + \frac{x_r}{n} \le \frac{qx_m}{qm} + \frac{x_r}{n} \le \frac{x_m}{m} + \frac{M}{n},$$

其中 $M = \max\{x_1, \cdots, x_{m-1}\}$. 因此

例子，续

$$0 \le \frac{x_n}{n} \le \frac{x_m}{m} + \frac{M}{n},$$

注意上式 m 为固定的正整数，与指标 n 无关. 令 $n \to +\infty$ 取上极限得

$$\overline{\lim} \frac{x_n}{n} \le \frac{x_m}{m}.$$

上式对任意正整数 m 均成立. 于上式中关于 m 取下极限即得

$$\overline{\lim} \frac{x_n}{n} \le \underline{\lim} \frac{x_m}{m} \quad \Rightarrow \quad \overline{\lim} \frac{x_n}{n} = \underline{\lim} \frac{x_n}{n}.$$

这就证明了极限 $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n}$ 存在. 证毕. □

Definition

定义: 序列 $\{a_n\}$ 称为 Cauchy 序列或基本序列, 如果对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得 $|a_n - a_m| < \varepsilon$, $\forall n, m \geq N$, 或者 $|a_n - a_{n+p}| < \varepsilon$, $\forall n \geq N$, $\forall p \geq 1$.

Theorem

定理 [Cauchy 收敛准则]: 序列 $\{a_n\}$ 收敛, 当且仅当序列 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 序列.

注: Cauchy 收敛准则的优点: 判断序列的收敛性, 无需事先知道序列的极限值. 为证明 Cauchy 收敛准则, 我们回忆 Bolzano - Weierstrass 定理: 有界序列必有收敛子列.

证: $\Rightarrow$: 设 $a_n \to a$, 即对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ 正整数 N, 使得 $|a_n - a| < \varepsilon$, $\forall n \geq N$. 于是对 $\forall n, m \geq N$,

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

这表明收敛序列 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 序列.

$\Leftarrow$: 设 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 序列. 要证 $\{a_n\}$ 收敛. 为此要证 (i) 序列 $\{a_n\}$ 有界; (ii) 序列 $\{a_n\}$ 收敛. 证 (i): 序列 $\{a_n\}$ 有界. 证法与证有理数 Cauchy 列有界完全一样. 由于序列 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 列, 故对于 $\varepsilon = 1$, 存在正整数 N, 使得对 $\forall n \geq N$, $|a_n - a_N| < 1$, 即 $-1 + a_N < a_n < a_N + 1$. 故 $|a_n| < |a_N| + 1$. 于是对任意 $n \geq 1$, $|a_n| \leq \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_{N-1}|, |a_N| + 1\}$. 这就证明了序列 $\{a_n\}$ 有界.

证明，续

证 (ii): $\{a_n\}$ 收敛. 由于 $\{a_n\}$ 有界，根据 B-W 定理知 $\{a_n\}$ 有收敛子列 $\{a_{n_k}\}$. 设 $a_{n_k} \to a$，则对任意 $\varepsilon > 0$，存在正整数 K，使得 $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$, $\forall k \geq K$. 因 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 序列，故对上述 $\varepsilon > 0$，存在正整数 N_1，使得对 $\forall n, m \geq N_1$, $|a_n - a_m| < \varepsilon$. 取 $k_1 \geq K$ 充分大，使得 $n_{k_1} \geq N_1$. 于是对于 $\forall n \geq N_1$,

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_{k_1}}| + |a_{n_{k_1}} - a| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

这就证明了 Cauchy 序列 $\{a_n\}$ 收敛. 证毕.

关于实数的完备性总结

总结: 以下七个定理反映了实数的完备性(也称连续性):

确界存在定理, 单调有界定理, 区间套定理, 聚点原理, B-W 定理, Cauchy 收敛准则, 有限覆盖定理(尚未介绍).

可以证明以上七个定理相互等价. 到目前为止, 我们已证明了如下蕴含关系:

确界存在定理 $\Rightarrow$ 单调有界定理 $\Rightarrow$ 区间套定理 $\Rightarrow$ 聚点原理 $\Rightarrow$ B-W 定理 $\Rightarrow$ Cauchy 收敛准则.

例一：记 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$，证明序列 $\{a_n\}$ 不收敛.

证：反证. 假设序列 $\{a_n\}$ 收敛，则序列 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 序列. 于是对于 $\varepsilon = \frac{1}{2}$，存在正整数 N，使得 $|a_{n+p} - a_n| < \frac{1}{2}$，$\forall n \geq N$，$\forall p \geq 1$. 取 $p = n \geq N$，则

$$|a_{2n} - a_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

矛盾. 这说明序列 $\{a_n\}$ 不收敛. 证毕. □

例二: 设序列 $\{a_n\}$ 满足 $\sum_{k=1}^{n} |a_{k+1} - a_k| \leq M$, $\forall n \geq 1$, 其中 $M > 0$ 为一正常数, 与 n 无关. 证明序列 $\{a_n\}$ 收敛.

证: 记 $b_n = \sum_{k=1}^{n} |a_{k+1} - a_k|$, 则序列 $\{b_n\}$ 单调增加, 且有上界 M. 故序列 $\{b_n\}$ 收敛, 从而是 Cauchy 列. 因此对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, 使得对 $\forall n \geq N$, $\forall p \geq 1$, $|b_{n+p} - b_n| < \varepsilon$, 即 $\sum_{k=n+1}^{n+p} |a_{k+1} - a_k| < \varepsilon$. 因此

$$|a_{n+p} - a_n| = |(a_{n+p} - a_{n+p-1}) + (a_{n+p-1} - a_{n+p-2}) + \cdots + (a_{n+1} - a_n)|$$

$$\leq |a_{n+p} - a_{n+p-1}| + |a_{n+p-1} - a_{n+p-2}| + \cdots + |a_{n+1} - a_n| < \varepsilon.$$

这说明序列 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 序列, 从而收敛. 证毕. □

习题一. 课本第18-19页习题1.4题2: 假设 (i) 数列 $\{a_n\}$ 严格单调上升, (ii) 数列 $\{b_n\}$ 严格单调下降, (iii) $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$, 证明数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 均收敛, 且收敛域同一个极限.

习题二. 课本第18-19页习题1.4题3: 求极限

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n.$$

习题三. 课本第18-19页习题1.4题4: 利用单调有界定理, 证明极限 $\lim_{n\to+\infty}$ 存在, 其中 a_n 为如下三种情形:

$$(1)\quad a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^n};$$

$$(2)\quad a_n=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right);$$

$$(3)\quad a_n=\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n^2}\right).$$

习题四. 课本第18-19页习题1.4题5: 利用单调有界定理，证明极限 $\lim_{n\to+\infty} a_n$ 存在，并求出极限，其中 a_n 由如下递推关系确定:

$$(1)\quad a_1=\sqrt{2},\ a_{n+1}=\sqrt{2a_n};\qquad (2)\quad a_1>0,\ a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{4}{a_n}\right);$$

$$(3)\quad a_1>0,\ a_{n+1}=\sin a_n;\qquad (4)\quad a_1>0,\ a_{n+1}=2-\frac{1}{1+a_n}.$$

习题五．课本第18页习题1.4题12：求下列极限

$$(1)\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln n}\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right);$$

$$(2)\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right);$$

$$(3)\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{3/2}}\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}\right);$$

$$(4)\quad \lim_{n\to+\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}.$$

习题六．课本第19页习题1.4题13：设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$. 求极限

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n}{n^2}.$$

习题七．课本第19页习题1.4题14：设 $a_1=1,\ a_{n+1}=1+\frac{1}{a_n}$. 证明极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$ 存在．

习题八．课本第19页习题1.4题16：令

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

证明 (1) 序列 $\{b_n\}$ 严格单调下降；(2) $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$, $\forall n \geq 1$. 注：(1) 的证明可利用几何算术平均不等式.

习题九．课本第19页习题1.4题17：证明极限

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right)$$

存在．(注：这个极限常称作 Euler 常数，常记作 γ．常数 γ 的重要性仅次于圆周率 π 和自然对数底 e．但人们对 γ 的了解很少．例如至今尚不知 γ 是否为无理数，虽然人们一般期待 γ 是超越数．Euler 常数有近似值 $\gamma \simeq 0.577$)

作业，续四

补充习题. 证明分数不等式：对任意 n 个分数 $\frac{x_k}{y_k}$ (约定分母 $y_k > 0$)，$k = 1, 2, \cdots, n$，则

$$\min\left\{\frac{x_1}{y_1}, \cdots, \frac{x_n}{y_n}\right\} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{y_1 + \cdots + y_n} \leq \max\left\{\frac{x_1}{y_1}, \cdots, \frac{x_n}{y_n}\right\}.$$