

## 线性代数第七周第二次作业解答

### 《线性代数与几何》

**Exercise 4.1** 判断矩阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$  行向量组和列向量组的线性相关性。

**解答：**

#### (1) 行向量组的线性相关性分析

设矩阵  $A$  的行向量为：

$$\mathbf{r}_1 = (1, 2, 1)$$

$$\mathbf{r}_2 = (1, 3, 2)$$

考虑线性组合  $k_1\mathbf{r}_1 + k_2\mathbf{r}_2 = \mathbf{0}$ ，即：

$$k_1(1, 2, 1) + k_2(1, 3, 2) = (0, 0, 0)$$

得到线性方程组：

$$k_1 + k_2 = 0$$

$$2k_1 + 3k_2 = 0$$

$$k_1 + 2k_2 = 0$$

由第一个方程得  $k_1 = -k_2$ ，代入第二个方程：

$$2(-k_2) + 3k_2 = k_2 = 0$$

因此  $k_2 = 0$ ，进而  $k_1 = 0$ 。

由于只有零解  $k_1 = k_2 = 0$ ，故行向量组线性无关。

#### (2) 列向量组的线性相关性分析

设矩阵  $A$  的列向量为：

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

考虑线性组合  $\lambda_1\mathbf{c}_1 + \lambda_2\mathbf{c}_2 + \lambda_3\mathbf{c}_3 = \mathbf{0}$ ，即：

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

得到线性方程组：

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

$$\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0$$

将第一个方程乘以 2 减去第二个方程：

$$(2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3) - (\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3) = \lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

所以  $\lambda_1 = -\lambda_2$ 。

代入第一个方程：

$$-\lambda_2 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

所以  $\lambda_3 = -\lambda_2$ 。

取  $\lambda_2 = 1$ ，则  $\lambda_1 = -1$ ， $\lambda_3 = -1$ ，得到非零解。

验证：

$$-1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

由于存在非零解，故列向量组线性相关。

### (3) 结论

综上所述：

行向量组线性无关，列向量组线性相关。

□

**Exercise 4.2** 判断下列各小题向量的线性相关性。

**解答：**

(1) 向量组  $\alpha_1 = (1, 1, 0, 0)$ ， $\alpha_2 = (1, 0, 1, 0)$ ， $\alpha_3 = (0, 0, 1, 1)$ ， $\alpha_4 = (0, 1, 0, 1)$

设  $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4\alpha_4 = 0$ ，即：

$$k_1(1, 1, 0, 0) + k_2(1, 0, 1, 0) + k_3(0, 0, 1, 1) + k_4(0, 1, 0, 1) = (0, 0, 0, 0)$$

得到方程组：

$$k_1 + k_2 = 0$$

$$k_1 + k_4 = 0$$

$$k_2 + k_3 = 0$$

$$k_3 + k_4 = 0$$

解得：  $k_1 = 1, k_2 = -1, k_3 = 1, k_4 = -1$  为一组非零解。

存在非零解，故**线性相关**。

**(2) 向量组**  $\alpha_1 = (1, 1, 0, 0), \alpha_2 = (1, 0, 0, 4), \alpha_3 = (0, 0, 1, 1), \alpha_4 = (0, 0, 0, 2)$

设  $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4\alpha_4 = 0$ ，即：

$$k_1(1, 1, 0, 0) + k_2(1, 0, 0, 4) + k_3(0, 0, 1, 1) + k_4(0, 0, 0, 2) = (0, 0, 0, 0)$$

得到方程组：

$$k_1 + k_2 = 0$$

$$k_1 = 0$$

$$k_3 = 0$$

$$4k_2 + k_3 + 2k_4 = 0$$

解得：  $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$ 。

仅有零解，故**线性无关**。

**(3) 向量组**  $\alpha_1 = (1, 3, -5, 1), \alpha_2 = (2, 6, 1, 4), \alpha_3 = (3, 9, 7, 0)$

设  $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0$ ，即：

$$k_1(1, 3, -5, 1) + k_2(2, 6, 1, 4) + k_3(3, 9, 7, 0) = (0, 0, 0, 0)$$

得到方程组：

$$k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 0$$

$$3k_1 + 6k_2 + 9k_3 = 0$$

$$-5k_1 + k_2 + 7k_3 = 0$$

$$k_1 + 4k_2 = 0$$

解得:  $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ 。

仅有零解, 故**线性无关**。

(4) 向量组  $\alpha_1 = (1, 2, 2, 3), \alpha_2 = (2, 5, -1, 4), \alpha_3 = (1, 4, -8, -1)$

设  $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0$ , 即:

$$k_1(1, 2, 2, 3) + k_2(2, 5, -1, 4) + k_3(1, 4, -8, -1) = (0, 0, 0, 0)$$

得到方程组:

$$k_1 + 2k_2 + k_3 = 0$$

$$2k_1 + 5k_2 + 4k_3 = 0$$

$$2k_1 - k_2 - 8k_3 = 0$$

$$3k_1 + 4k_2 - k_3 = 0$$

解得:  $k_1 = 3, k_2 = -1, k_3 = -1$  为一组非零解。

存在非零解, 故**线性相关**。

**最终结论:**

- (1) 线性相关
- (2) 线性无关
- (3) 线性无关
- (4) 线性相关

□

**Exercise 4.3** 证明上三角矩阵  $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$  的行向量组线性相关的充要条件是对角线元素至少有一个为 0。

**证明:**

(1) 行向量组表示

设矩阵  $A$  的行向量为：

$$\mathbf{r}_1 = (a, b, c)$$

$$\mathbf{r}_2 = (0, d, e)$$

$$\mathbf{r}_3 = (0, 0, f)$$

**(2) 行列式分析**

上三角矩阵的行列式等于其对角线元素的乘积：

$$\det(A) = a \cdot d \cdot f$$

**(3) 充分性证明**

若对角线元素至少有一个为 0，即  $a = 0$  或  $d = 0$  或  $f = 0$ ，则：

$$\det(A) = a \cdot d \cdot f = 0$$

由于矩阵行列式为零，故矩阵  $A$  的行向量组线性相关。

**(4) 必要性证明**

若行向量组线性相关，则矩阵  $A$  的行列式为零：

$$\det(A) = a \cdot d \cdot f = 0$$

因此  $a = 0$  或  $d = 0$  或  $f = 0$ ，即对角线元素至少有一个为 0。

**(5) 结论**

由充分性和必要性证明可知：

上三角矩阵的行向量组线性相关的充要条件是对角线元素至少有一个为 0。

□

**Exercise 4.5** 判断命题正误，正确给出证明，错误举出反例。

**解答：**

- (1) 如果  $\alpha_1, \alpha_2$  线性相关； $\beta_1, \beta_2$  线性相关，则  $\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2$  线性相关。  
该命题错误。

**反例：**取  $\alpha_1 = (1, 0), \alpha_2 = (2, 0)$ ，由于  $\alpha_2 = 2\alpha_1$ ，故  $\alpha_1, \alpha_2$  线性相关。

取  $\beta_1 = (0, 1), \beta_2 = (0, 3)$ , 由于  $\beta_2 = 3\beta_1$ , 故  $\beta_1, \beta_2$  线性相关。  
但  $\alpha_1 + \beta_1 = (1, 1), \alpha_2 + \beta_2 = (2, 3)$ , 考虑线性组合:

$$k_1(1, 1) + k_2(2, 3) = (0, 0)$$

得到方程组:

$$k_1 + 2k_2 = 0$$

$$k_1 + 3k_2 = 0$$

解得:  $k_1 = k_2 = 0$ , 仅有零解。

故  $\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2$  线性无关。

**(2) 如果  $\beta$  不能由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性表出, 则  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$  线性无关。**  
该命题错误。

**反例:** 取  $\alpha_1 = (1, 0, 0), \alpha_2 = (2, 0, 0), \beta = (0, 1, 0)$ 。

显然  $\beta$  不能由  $\alpha_1, \alpha_2$  线性表出 (因为  $\alpha_1, \alpha_2$  都在  $x$  轴上, 而  $\beta$  在  $y$  轴上)。

但  $\alpha_1, \alpha_2$  本身线性相关 ( $\alpha_2 = 2\alpha_1$ ), 故向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \beta$  线性相关。

**(3) 如果  $k_1, k_2, \dots, k_s$  不全为零时,  $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s \neq 0$ , 则  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关。**

该命题正确。

**证明:**

根据线性无关的定义: 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关当且仅当

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0 \quad \text{蕴含} \quad k_1 = k_2 = \dots = k_s = 0$$

其逆否命题为: 如果存在不全为零的  $k_1, k_2, \dots, k_s$  使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$$

则向量组线性相关。

原命题的条件是: 对于任意不全为零的  $k_1, k_2, \dots, k_s$ , 都有

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s \neq 0$$

这意味着不存在不全为零的系数使得线性组合为零, 即只有全零系数才能使线性组合为零。

因此, 根据定义, 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关。

## 《线性代数入门》

**Exercise 2.1.11** 如果向量组  $\{\alpha, \beta, \gamma\}$  中任意两个都线性无关, 该向量组是否一定线性无关?

**解答:**

该命题**不一定成立**。

**反例:**

考虑三维空间中的向量:

$$\alpha = (1, 0, 0)$$

$$\beta = (0, 1, 0)$$

$$\gamma = (1, 1, 0)$$

验证任意两个向量的线性相关性:

(1)  $\alpha$  与  $\beta$ : 考虑  $k_1\alpha + k_2\beta = 0$ , 即:

$$k_1(1, 0, 0) + k_2(0, 1, 0) = (k_1, k_2, 0) = (0, 0, 0)$$

解得  $k_1 = k_2 = 0$ , 故  $\alpha$  与  $\beta$  线性无关。

(2)  $\alpha$  与  $\gamma$ : 考虑  $k_1\alpha + k_3\gamma = 0$ , 即:

$$k_1(1, 0, 0) + k_3(1, 1, 0) = (k_1 + k_3, k_3, 0) = (0, 0, 0)$$

解得  $k_1 = k_3 = 0$ , 故  $\alpha$  与  $\gamma$  线性无关。

(3)  $\beta$  与  $\gamma$ : 考虑  $k_2\beta + k_3\gamma = 0$ , 即:

$$k_2(0, 1, 0) + k_3(1, 1, 0) = (k_3, k_2 + k_3, 0) = (0, 0, 0)$$

解得  $k_2 = k_3 = 0$ , 故  $\beta$  与  $\gamma$  线性无关。

但三个向量的整体线性相关性: 考虑  $k_1\alpha + k_2\beta + k_3\gamma = 0$ , 即:

$$k_1(1, 0, 0) + k_2(0, 1, 0) + k_3(1, 1, 0) = (k_1 + k_3, k_2 + k_3, 0) = (0, 0, 0)$$

取  $k_1 = 1, k_2 = 1, k_3 = -1$  (不全为零), 则:

$$1 \cdot (1, 0, 0) + 1 \cdot (0, 1, 0) + (-1) \cdot (1, 1, 0) = (0, 0, 0)$$

存在非零解, 故向量组  $\{\alpha, \beta, \gamma\}$  线性相关。

**几何解释：**虽然任意两个向量都线性无关（不共线），但三个向量都位于  $xy$  平面内，因此它们共面，在三维空间中是线性相关的。

**结论：**

向量组中任意两个向量线性无关，不能保证整个向量组线性无关。

□

**Exercise 2.1.12** 设  $\mathbb{R}^n$  中的向量  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  满足  $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0$ ，其中  $k_1k_2 \neq 0$ ，求证： $\text{span}(\alpha_1, \alpha_3) = \text{span}(\alpha_2, \alpha_3)$ 。

**证明：**

(1) 已知条件分析

由题设： $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0$ ，且  $k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$ 。

由此可得：

$$\alpha_1 = -\frac{k_2}{k_1}\alpha_2 - \frac{k_3}{k_1}\alpha_3 \quad (1)$$

$$\alpha_2 = -\frac{k_1}{k_2}\alpha_1 - \frac{k_3}{k_2}\alpha_3 \quad (2)$$

(2) 证明  $\text{span}(\alpha_1, \alpha_3) \subseteq \text{span}(\alpha_2, \alpha_3)$

任取  $x \in \text{span}(\alpha_1, \alpha_3)$ ，则存在实数  $\lambda, \mu$  使得：

$$x = \lambda\alpha_1 + \mu\alpha_3$$

代入 (1) 式：

$$x = \lambda \left( -\frac{k_2}{k_1}\alpha_2 - \frac{k_3}{k_1}\alpha_3 \right) + \mu\alpha_3 = -\frac{\lambda k_2}{k_1}\alpha_2 + \left( \mu - \frac{\lambda k_3}{k_1} \right) \alpha_3$$

因此  $x \in \text{span}(\alpha_2, \alpha_3)$ 。

故  $\text{span}(\alpha_1, \alpha_3) \subseteq \text{span}(\alpha_2, \alpha_3)$ 。

(3) 证明  $\text{span}(\alpha_2, \alpha_3) \subseteq \text{span}(\alpha_1, \alpha_3)$

任取  $y \in \text{span}(\alpha_2, \alpha_3)$ ，则存在实数  $\lambda', \mu'$  使得：

$$y = \lambda'\alpha_2 + \mu'\alpha_3$$

代入 (2) 式：

$$y = \lambda' \left( -\frac{k_1}{k_2}\alpha_1 - \frac{k_3}{k_2}\alpha_3 \right) + \mu'\alpha_3 = -\frac{\lambda' k_1}{k_2}\alpha_1 + \left( \mu' - \frac{\lambda' k_3}{k_2} \right) \alpha_3$$

因此  $y \in \text{span}(\alpha_1, \alpha_3)$ 。

故  $\text{span}(\alpha_2, \alpha_3) \subseteq \text{span}(\alpha_1, \alpha_3)$ 。

**(4) 结论**

由 (2) 和 (3) 可得：

$$\boxed{\text{span}(\alpha_1, \alpha_3) = \text{span}(\alpha_2, \alpha_3)}$$

□

**Exercise 2.1.19 (1) (2)** 设  $M, N$  是  $\mathbb{R}^m$  的两个子空间，定义集合： $M + N := \{m + n \mid m \in M, n \in N\}$ 。

证明：(1) 集合  $M + N$  是  $\mathbb{R}^m$  的子空间；(2)  $M \cap N$  是  $\mathbb{R}^m$  的子空间。

**证明：**

**(1) 证明  $M + N$  是  $\mathbb{R}^m$  的子空间**

根据子空间的判定定理，需要验证：

1.  $0 \in M + N$
2. 对任意  $x, y \in M + N$ ，有  $x + y \in M + N$
3. 对任意  $x \in M + N$  和任意  $k \in \mathbb{R}$ ，有  $kx \in M + N$

**验证 1：** 由于  $M, N$  是子空间，故  $0 \in M$  且  $0 \in N$ ，于是：

$$0 = 0 + 0 \in M + N$$

**验证 2：** 设  $x, y \in M + N$ ，则存在  $m_1, m_2 \in M$  和  $n_1, n_2 \in N$  使得：

$$x = m_1 + n_1$$

$$y = m_2 + n_2$$

于是：

$$x + y = (m_1 + n_1) + (m_2 + n_2) = (m_1 + m_2) + (n_1 + n_2)$$

由于  $M, N$  是子空间，故  $m_1 + m_2 \in M$ ， $n_1 + n_2 \in N$ ，因此  $x + y \in M + N$ 。

**验证 3：** 设  $x \in M + N$ ，则存在  $m \in M$  和  $n \in N$  使得  $x = m + n$ 。对任意  $k \in \mathbb{R}$ ：

$$kx = k(m + n) = km + kn$$

由于  $M, N$  是子空间, 故  $km \in M$ ,  $kn \in N$ , 因此  $kx \in M + N$ 。

综上,  $M + N$  是  $\mathbb{R}^m$  的子空间。

**(2) 证明  $M \cap N$  是  $\mathbb{R}^m$  的子空间**

同样验证子空间的三条性质:

**验证 1:** 由于  $M, N$  是子空间, 故  $0 \in M$  且  $0 \in N$ , 于是  $0 \in M \cap N$ 。

**验证 2:** 设  $x, y \in M \cap N$ , 则  $x, y \in M$  且  $x, y \in N$ 。由于  $M, N$  是子空间, 故  $x + y \in M$  且  $x + y \in N$ , 因此  $x + y \in M \cap N$ 。

**验证 3:** 设  $x \in M \cap N$ , 则  $x \in M$  且  $x \in N$ 。对任意  $k \in \mathbb{R}$ , 由于  $M, N$  是子空间, 故  $kx \in M$  且  $kx \in N$ , 因此  $kx \in M \cap N$ 。

综上,  $M \cap N$  是  $\mathbb{R}^m$  的子空间。

**结论:**

$M + N$  和  $M \cap N$  都是  $\mathbb{R}^m$  的子空间。

□

**Exercise 2.1.20** 设  $\mathbb{R}^m$  中子空间  $M = \text{span}(a_1, a_2, \dots, a_s)$ ,  $N = \text{span}(b_1, b_2, \dots, b_t)$ 。

证明:  $M + N = \text{span}(a_1, a_2, \dots, a_s, b_1, b_2, \dots, b_t)$ 。

**证明:**

**(1) 记号和定义回顾**

由题设:

$$M = \text{span}(a_1, a_2, \dots, a_s) = \left\{ \sum_{i=1}^s \lambda_i a_i \mid \lambda_i \in \mathbb{R} \right\}$$

$$N = \text{span}(b_1, b_2, \dots, b_t) = \left\{ \sum_{j=1}^t \mu_j b_j \mid \mu_j \in \mathbb{R} \right\}$$

$$M + N = \{m + n \mid m \in M, n \in N\}$$

$$\text{span}(a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_t) = \left\{ \sum_{i=1}^s \lambda_i a_i + \sum_{j=1}^t \mu_j b_j \mid \lambda_i, \mu_j \in \mathbb{R} \right\}$$

**(2) 证明  $M + N \subseteq \text{span}(a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_t)$**

任取  $x \in M + N$ , 则存在  $m \in M$  和  $n \in N$  使得  $x = m + n$ 。

由于  $m \in M = \text{span}(a_1, \dots, a_s)$ , 故存在  $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{R}$  使得:

$$m = \sum_{i=1}^s \lambda_i a_i$$

由于  $n \in N = \text{span}(b_1, \dots, b_t)$ , 故存在  $\mu_1, \dots, \mu_t \in \mathbb{R}$  使得:

$$n = \sum_{j=1}^t \mu_j b_j$$

于是:

$$x = m + n = \sum_{i=1}^s \lambda_i a_i + \sum_{j=1}^t \mu_j b_j \in \text{span}(a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_t)$$

因此  $M + N \subseteq \text{span}(a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_t)$ 。

**(3) 证明  $\text{span}(a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_t) \subseteq M + N$**

任取  $y \in \text{span}(a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_t)$ , 则存在  $\lambda_1, \dots, \lambda_s, \mu_1, \dots, \mu_t \in \mathbb{R}$  使得:

$$y = \sum_{i=1}^s \lambda_i a_i + \sum_{j=1}^t \mu_j b_j$$

令:

$$m = \sum_{i=1}^s \lambda_i a_i \in M$$

$$n = \sum_{j=1}^t \mu_j b_j \in N$$

则  $y = m + n \in M + N$ 。

因此  $\text{span}(a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_t) \subseteq M + N$ 。

**(4) 结论**

由 (2) 和 (3) 可得:

$$\boxed{M + N = \text{span}(a_1, a_2, \dots, a_s, b_1, b_2, \dots, b_t)}$$

□

**Exercise 2.1.21** (1) 给定  $m \times n, m \times s$  矩阵  $A, B$ , 证明  $R(A) + R(B) = R(C)$ , 其中  $C = [A \ B]$  (列分块矩阵)。

(2) 给定  $m \times n, l \times n$  矩阵  $A, B$ , 证明  $N(A) \cap N(B) = N(D)$ , 其中  $D = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$  (行分块矩阵)。

**证明：**

**(1) 证明**  $R(A) + R(B) = R(C)$ , 其中  $C = [A \ B]$

记  $A$  的列向量为  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m$ ,  $B$  的列向量为  $b_1, \dots, b_s \in \mathbb{R}^m$ 。  
则：

$$R(A) = \text{span}\{a_1, \dots, a_n\}$$

$$R(B) = \text{span}\{b_1, \dots, b_s\}$$

$$R(C) = \text{span}\{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_s\}$$

根据习题 2.1.20 的结论, 有：

$$R(A) + R(B) = \text{span}\{a_1, \dots, a_n\} + \text{span}\{b_1, \dots, b_s\} = \text{span}\{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_s\} = R(C)$$

因此：

$$\boxed{R(A) + R(B) = R(C)}$$

**(2) 证明**  $N(A) \cap N(B) = N(D)$ , 其中  $D = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$

**(i) 证明**  $N(A) \cap N(B) \subseteq N(D)$

任取  $x \in N(A) \cap N(B)$ , 则  $x \in N(A)$  且  $x \in N(B)$ , 即：

$$Ax = 0$$

$$Bx = 0$$

于是：

$$Dx = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} Ax \\ Bx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

故  $x \in N(D)$ , 因此  $N(A) \cap N(B) \subseteq N(D)$ 。

**(ii) 证明**  $N(D) \subseteq N(A) \cap N(B)$

任取  $x \in N(D)$ , 则  $Dx = 0$ , 即：

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} Ax \\ Bx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

这意味着：

$$Ax = 0$$

$$Bx = 0$$

所以  $x \in N(A)$  且  $x \in N(B)$ , 即  $x \in N(A) \cap N(B)$ 。  
因此  $N(D) \subseteq N(A) \cap N(B)$ 。

**(iii) 结论**

由 (i) 和 (ii) 可得:

$$\boxed{N(A) \cap N(B) = N(D)}$$

□