

《微积分A1》第十七讲

教师 杨利军

清华大学数学科学系

2025年11月17日

斜渐近线(slant asymptotes), 例子

Definition

定义: 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上定义. 称直线 $y = kx + b$ 为函数 $f(x)$ 的斜渐近线, 如果 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (kx + b)] = 0$.

注: 显然水平渐近线是斜渐近线的特殊情形, 即 $k = 0$ 的情形. 当 $f(x)$ 在 $(-\infty, b]$ 上定义时, 类似可定义函数 $f(x)$ 的(负向)斜渐近线.

Example

例: 函数 $y = x + 2 - \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上有斜渐近线 $y = x + 2$. 因为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(x + 2 - \frac{1}{x} \right) - (x + 2) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} = 0.$$

同理, 函数 $y = x + 2 - \frac{1}{x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 上有相同的斜渐近线 $y = x + 2$.

斜渐近线的存在性

Theorem

定理: 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上定义, 则 $f(x)$ 有斜渐近线 \iff

(i) 极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 极限值记作 k ;

(ii) 极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx]$ 存在, 极限值记作 b .

当条件 (i) 和 (ii) 成立时, $f(x)$ 有斜渐近线 $y = kx + b$.

例: 考虑 $f(x) = x + 2 - \frac{1}{x}$. 验证条件 (i), (ii):

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 2 - \frac{1}{x}}{x} = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x + 2 - \frac{1}{x} - x] = 2.$$

因此函数 $f(x)$ 有斜渐近线 $y = x + 2$.

定理证明

证明: \Rightarrow : 当 $f(x)$ 有渐近线 $y = kx + b$ 时, 即

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (kx + b)] = 0, \quad (*)$$

$$\text{则} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[f(x) - (kx + b)]}{x} = 0.$$

由此可知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k$. 即条件 (i) 成立. 再根据极限式 (*) 可知

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] = b$. 即条件 (ii) 成立.

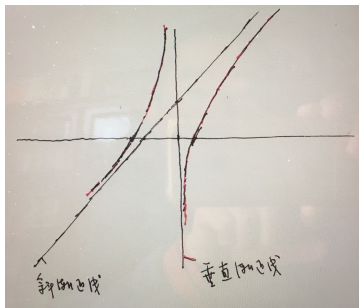
\Leftarrow : 假设条件 (i) 和 (ii) 成立, 则由 (ii), 即 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx]$ 存在, 其极限值记作 b . 于是 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (kx + b)] = 0$. 即函数 $f(x)$ 有斜渐近线 $y = kx + b$. 定理得证. □

注: 实际上 $f(x)$ 有斜渐近线 \iff 存在 k , 使得极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx]$ 存在.

条件 (i) 显得多余. 但条件 (i) 提供了求 k 的方法, 即 $k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

例子

例: 仍考虑曲线 $y = x + 2 - \frac{1}{x}$. 已求得曲线的一条斜渐近线 $y = x + 2$. 此外曲线还有一条垂直渐近线 $x = 0$, 即 y 轴. 因为 $\lim_{x \rightarrow 0^{\pm}} [x + 2 - \frac{1}{x}] = \mp \infty$. 曲线 $y = x + 2 - \frac{1}{x}$ 的函数图像, 及其渐近线如图所示.



函数作图的一般步骤

为定性地画出 $y = f(x)$ 的函数图像, 需要确定函数如下性质:

1. 定义域;
2. 是否有奇偶性, 周期性, 对称性;
3. 单调区间与极值点(利用一阶导数);
4. 凸性和拐点(利用二阶导数);
5. 渐近线;
6. 特殊点, 例如零点等;
7. 定性作图.

例一

例一: 考虑函数 $f(x) = x^4 - 4x^3$. 简单计算得

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3),$$

$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2).$$

1. 驻点: 易见函数有两个驻点 $x = 0$, $x = 3$. 由于 $f''(3) = 36 > 0$, 故 $x = 3$ 是极小点, 极小值为 $f(3) = -27$. 因 $f''(0) = 0$, 故不能用二阶导数来确定驻点 $x = 0$ 是否为极值点. 因 $f'(x) = 4x^2(x - 3) \leq 0, \forall x \in (-\infty, 3)$, 且仅在 $x = 0$ 处为零, 故 $f(x)$ 在这个区间里严格单调下降. 因此驻点 $x = 0$ 不是极值点.

2. 单调区间: 如上所述在区间 $(-\infty, 3)$ 上, $f'(x) = 4x^2(x - 3) \leq 0$, 故函数严格单调减. 在区间 $(3, +\infty)$ 上, $f'(x) > 0$, 故函数严格单调增.

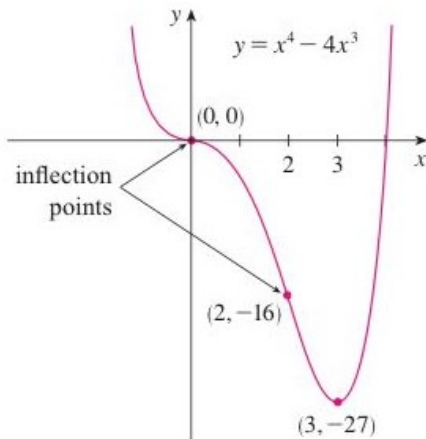
例一, 续一

3. 拐点: 根据 $f''(x) = 12x(x - 2)$ 不难看出函数有两个拐点 $(x, y) = (0, 0)$, $(x, y) = (2, -16)$. 函数的凸性区间如下表所述.

区间	$f''(x) = 12x(x - 2)$	凸性
$(-\infty, 0)$	+	下凸
$(0, 2)$	-	上凸
$(2, +\infty)$	+	下凸

4. 根据以上信息, 不难画出函数图像.

例一, 续二



例二

例二: 定性地画出函数 $f(x) = x^{2/3}(6-x)^{1/3}$ 的函数图像.

解: (1). 函数有两个特殊点, 即不可导点 $x = 0$ 和 $x = 6$;

(2). 是否存在渐近线? 考虑

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^{2/3}(6-x)^{1/3}}{x} = \left(\frac{6}{x} - 1\right)^{\frac{1}{3}} \rightarrow -1, \quad |x| \rightarrow +\infty.$$

再考虑

$$\begin{aligned} f(x) + x &= x \left[1 - \left(1 - \frac{6}{x} \right)^{\frac{1}{3}} \right] \\ &= x \left[1 - \left(1 - \frac{6}{x} \cdot \frac{1}{3} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) \right] = x \left[\frac{2}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \right] \rightarrow 2, \end{aligned}$$

当 $|x| \rightarrow +\infty$. 因此函数有渐近线 $y = -x + 2$.

例二, 续一

(3). 计算 $f(x)$ 的一阶和二阶导数

$$f'(x) = \frac{4-x}{x^{1/3}(6-x)^{2/3}}, \quad f''(x) = \frac{-8}{x^{4/3}(6-x)^{5/3}}.$$

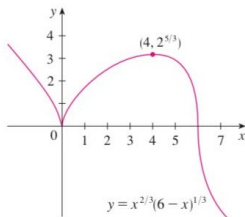
由此可得函数单调区间如下.

区间	$4-x$	$x^{1/3}$	$(6-x)^{2/3}$	$f'(x)$	$f(x)$
$(-\infty, 0)$	+	-	+	-	↓
$(0, 4)$	+	+	+	+	↑
$(4, 6)$	-	+	+	-	↓
$(6, +\infty)$	-	+	+	-	↓

例二, 续二

(4). 由上述表格可知 $x = 0$ 是极小值点, $x = 4$ 是极大值点, 而点 $x = 6$ 不是极值点.

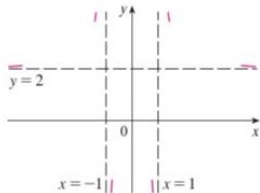
(5). 考虑函数的凸性. 注意 $f''(x) < 0, \forall x \in (-\infty, 0) \cup (0, 6)$. 故函数于这两个区间上凸. 由于 $f''(x) > 0, \forall x \in (6, +\infty)$, 故函数于这个区间下凸. 此外 $f(x)$ 在 $x = 6$ 处不可微, 其对应的点 $(x, y) = (6, 0)$ 是拐点. 函数的图像如图所示.



例三

例三: 考虑曲线 $y = f(x) = \frac{2x^2}{x^2-1}$ 的函数图像.

1. 定义域为 $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$;
2. 曲线经过原点 $(0, 0)$;
3. 曲线关于 y 轴对称, 即函数 $f(x)$ 是偶函数;
4. 曲线有两条垂直渐近线 $x = \pm 1$, 因为 $\lim_{x \rightarrow \pm 1} \frac{2x^2}{x^2-1} = +\infty$;
5. 曲线还有一条水平渐近线 $y = 2$ 因为 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2-1} = 2$.



例三, 续一

6. 由

$$f'(x) = \frac{4x(x^2 - 1) - 2x^2 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$$

可知 (i) 在 $(-\infty, 0) \setminus \{-1\}$ 上, $f'(x) > 0$, 故 $f(x) \uparrow$ 严格;

(ii) 在 $(0, +\infty) \setminus \{1\}$ 上, $f'(x) < 0$, 故 $f(x) \downarrow$ 严格.

(iii) 函数有唯一驻点 $x = 0$, 且驻点 $x = 0$ 是极大值点.

7. 计算二阶导数

$$f''(x) = \frac{-4}{(x^2 - 1)^2} + \frac{4x \cdot 2 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^3} = \frac{12x^2 + 4}{(x^2 - 1)^3}.$$

由此可见 (i) 当 $|x| < 1$ 时, $f''(x) < 0$, 函数上凸; (ii) 当 $|x| > 1$ 时,

$f''(x) > 0$, 函数下凸; (iii) 函数无拐点.

8. 综合上述信息可得函数图形如下

例三, 续二

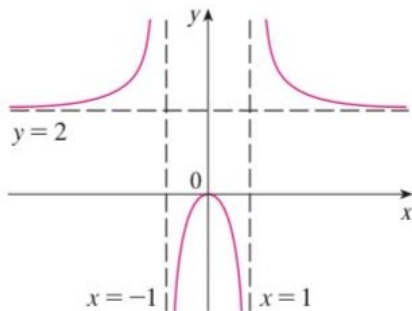


FIGURE 6

Finished sketch of $y = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$

例四

例四: 考虑曲线 $y = f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$.

1. 定义域为 \mathbb{R} ;
2. 曲线经过原点 $(0, 0)$;
3. 曲线关于原点对称, 即函数 $f(x)$ 为奇函数;
4. 无水平渐近线, 无垂直渐近线;
5. 函数有斜渐近线 $y = x$. 因为

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x(x^2+1)} = 1, \quad \text{且}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{x^3}{x^2+1} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - x^3 - x}{x^2+1} = 0;$$

6. 计算一阶导数

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2+1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}.$$

这表明 $f'(x) > 0, \forall x \neq 0$, 从而函数在 \mathbb{R} 上严格单调上升;

例四, 续一

7. 计算二阶导数

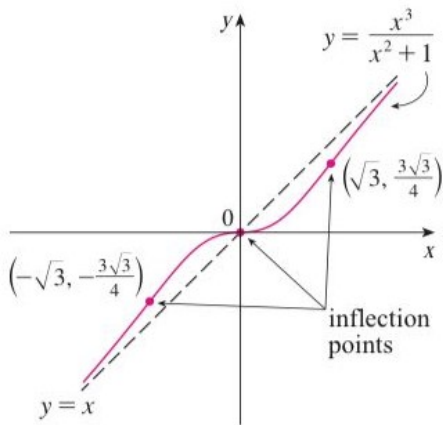
$$f''(x) = \frac{2x(x^2 + 3) + x^2 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} - \frac{x^2(x^2 + 3) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^3} = \frac{2x(3 - x^2)}{(x^2 + 1)^3}.$$

由此可得函数的三个拐点 $(-\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{4})$, $(0, 0)$, $(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{4})$, 以及函数的凸性区间如下:

区间	x	$3 - x^2$	$(x^2 + 1)^3$	$f''(x)$	凸性
$(-\infty, -\sqrt{3})$	-	-	+	+	下凸
$(-\sqrt{3}, 0)$	-	+	+	-	上凸
$(0, \sqrt{3})$	+	+	+	+	下凸
$(\sqrt{3}, +\infty)$	+	-	+	-	上凸

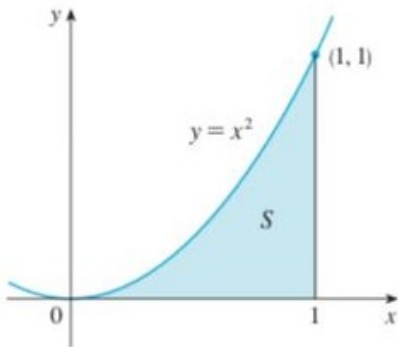
例四, 续二

8. 综合上述信息可得函数 $y = \frac{x^3}{x^2+1}$ 的图像如下.



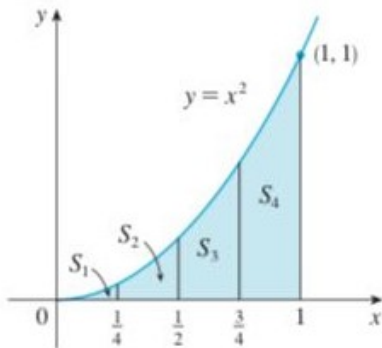
面积问题

例: 考虑抛物线 $y = x^2$ 与直线 $x = 1$, 以及 x 轴所围图形 S 的面积. 如图所示.
形如 S 的图形常称为曲边梯形.



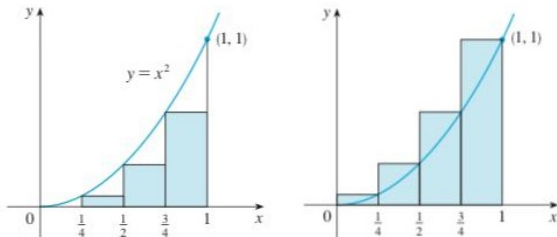
面积问题, 续一

我们用三条直线 $x = \frac{1}{4}$, $x = \frac{2}{4}$, $x = \frac{3}{4}$, 将图形 S 分成四个条域 S_1 , S_2 , S_3 , S_4 , 则 $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$, 如图所示.



面积问题, 续二

将区间 $[0, 1]$ 分割成 $[0, 1] = [0, \frac{1}{4}] \cup [\frac{1}{4}, \frac{2}{4}] \cup [\frac{2}{4}, \frac{3}{4}] \cup [\frac{3}{4}, 1]$, 我们可以用两种矩形来逼近每个条域 S_i , 宽均为 $\frac{1}{4}$: 高分别取函数 x^2 在子区间的左端点和右端点的值, 如图所示.



分别记 L_4 和 R_4 为左图和右图中的四个矩形面积之和,

面积问题, 续三

即

$$R_4 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{2}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{4}{4}\right)^2 = 0.46875,$$

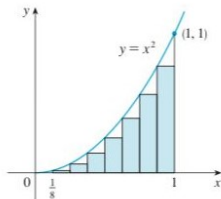
$$L_4 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{0}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{2}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 0.21875.$$

因此所求面积 $|S|$ 满足 $L_4 < |S| < R_4$.

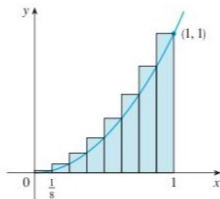
为了取得更好的逼近, 可以将区间 $[0, 1]$ 分解得更小, 例如分成 8 等分.

面积问题, 续四

同样取函数 $f(x) = x^2$ 在右端点和左端点的值为高分别作 8 个矩形, 如图所示.



(a) Using left endpoints



(b) Using right endpoints

记 R_8 和 L_8 为左图和右图中的 8 个矩形面积之和, 则经计算得

$$0.2734375 = L_8 < |S| < R_8 = 0.398475.$$

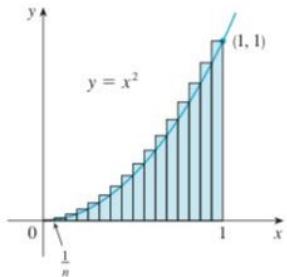
面积问题, 续五

下述表格表明, 随着等分数 n 的增加, 面积 R_n 和 L_n 越来越接近.

n	L_n	R_n
10	0.2850000	0.3850000
20	0.3087500	0.3587500
30	0.3168519	0.3501852
50	0.3234000	0.3434000
100	0.3283500	0.3383500
1000	0.3328335	0.3338335

R_n 的极限

将区间 $[0, 1]$ 分割成 n 等分, 第 i 个矩形条的高取为 x_i^2 (右端点的值), 记 R_n 为这 n 矩形条的面积之和, 如图所示.



$$\begin{aligned}\text{即 } R_n &= \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} \right)^2 + \frac{1}{n} \left(\frac{2}{n} \right)^2 + \frac{1}{n} \left(\frac{3}{n} \right)^2 + \cdots + \frac{1}{n} \left(\frac{n}{n} \right)^2 \\ &= \frac{1}{n^3} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \rightarrow \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

L_n 的极限

与 R_n 情形类似,

$$\begin{aligned}L_n &= \frac{1}{n} \left(\frac{0}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n} \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \\&= \frac{1}{n^3} [0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2] \\&= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{(n-1)n[2(n-1)+1]}{6} \\&= \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(2 - \frac{1}{n}\right) \rightarrow \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

由于 $L_n < |S| < R_n$, 故可以定义所求面积 $|S| = \frac{1}{3}$.

R_n, L_n 随 n 的变化图示

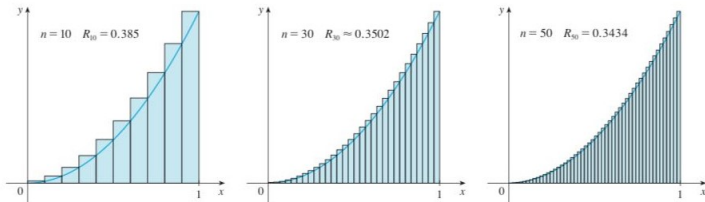


FIGURE 8 Right endpoints produce upper sums because $f(x) = x^2$ is increasing

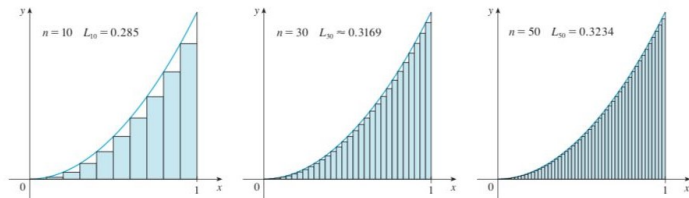


FIGURE 9 Left endpoints produce lower sums because $f(x) = x^2$ is increasing

定积分定义

定义: 设 $f(x)$ 是闭区间 $[a, b]$ 上的函数.

1. 分割: 在区间 $[a, b]$ 上取有限个分点 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$.

记 $P = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, 点集 P 称为区间 $[a, b]$ 的一个分割 (partition).

2. 取样点 (sample points) $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 并作 Riemann 和

$$\sigma(P, \xi) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i,$$

其中 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\xi = \{x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*\}$ 称作样点集;

3. 取极限: 记 $\|P\| \stackrel{\text{def}}{=} \max\{\Delta x_i, i = 1, 2, \cdots, n\}$, 并称之为分割 P 的密度.

如果极限 $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sigma(P, \xi)$ 存在, 且极限值与样点集 ξ 的选择无关. 换言之,

存在数 J , 使得对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得

$$\forall P : \|P\| < \delta \quad \Rightarrow \quad |\sigma(P, \xi) - J| < \varepsilon, \quad \forall \xi,$$

则称数 J 为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的 Riemann 积分,

定积分定义续, 注记

也称 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上 Riemann 可积. 此时数 J 记作 $\int_a^b f(x)dx$. 即

$$\int_a^b f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i.$$

注记: 1. 记号 $\int_a^b f(x)dx$ 中, a 和 b 称为积分下限和上限, $f(x)$ 称作被积函数.

2. $\int_a^b f(x)dx$ 应看作一个整体. 它代表 Riemann 和的极限.

3. $\int_a^b f(x)dx$ 中的 x 称作哑元, 可以换成任意一个符号, 例如

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(s)ds = \int_a^b f(\heartsuit)d\heartsuit = \dots$$

就好比 $\sin x$, $\sin t$, $\sin s$ 等均表示同一个正弦函数一样.

4. 记 $R[a, b]$ 为区间 $[a, b]$ 上 Riemann 可积函数的全体.

5. 积分 $\int_a^b f(x)dx$ 有时可简写作 $\int_a^b f$.

定积分的几何意义

当 $f(x) \geq 0$ 时, 积分 $\int_a^b f(x) dx$ 可看作或定义为, 曲线 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 下的面积. 如图所示

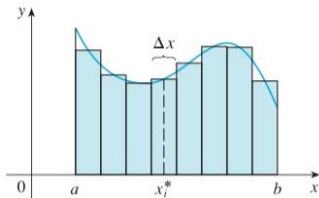


FIGURE 1

If $f(x) \geq 0$, the Riemann sum $\sum f(x_i^*) \Delta x$ is the sum of areas of rectangles.

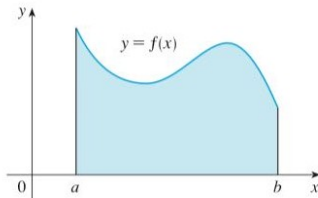


FIGURE 2

If $f(x) \geq 0$, the integral $\int_a^b f(x) dx$ is the area under the curve $y = f(x)$ from a to b .

定积分的几何意义, 续

当 $f(x)$ 有正有负时, 积分 $\int_a^b f(x)dx$ 可以看作曲线 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 下的面积的代数和 (净面积). 如图所示

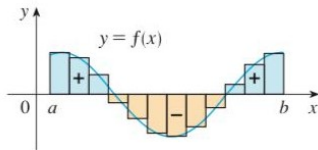


FIGURE 3

$\sum f(x_i^*) \Delta x$ is an approximation to the net area.

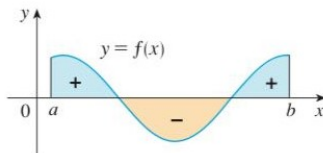


FIGURE 4

$\int_a^b f(x)dx$ is the net area.

定积分的物理意义

1. 设在区间 $[a, b]$ 上分布有某种物质, $\rho(x) \geq 0$ 为其分布密度, 则积分 $\int_a^b \rho(x) dx$ 可解释为(或定义为)该物质的总量.
2. 设质点作直线运动, 时刻 t 时速度为 $v(t)$, 则积分 $\int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$ 可解释为(或定义为), 质点在时间间隔 t_1 到 t_2 所经过的路程.
3. 设质点沿着 x 轴作直线运动, $f(x)$ 为质点位于位置 x 处所受的力(沿着 x 轴方向的力), 则积分 $\int_a^b f(x) dx$ 可解释为(或定义为) 力 $f(x)$ 关于质点从点 $x = a$ 运动到点 $x = b$ 所做的功.

定积分的简单性质

1. 保号性: 设 $f \in R[a, b]$ 且 $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$, 则

$$\int_a^b f \geq 0.$$

2. 线性性: 设 $f, g \in R[a, b]$, 则对任意常数 $\lambda, \lambda f, f \pm g \in R[a, b]$, 且

$$\int_a^b (\lambda f) = \lambda \int_a^b f, \quad \int_a^b (f \pm g) = \int_a^b f \pm \int_a^b g.$$

3. 保序性: 设 $f, g \in R[a, b]$, 且 $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a, b]$, 则

$$\int_a^b f \geq \int_a^b g.$$

例一

Example

例: 证明 $\int_a^b 1dx = b - a$.

证明: 记 $f(x) = 1$. 对任意分割 $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, 以及任意关于分割 P 的样点集 $\xi = \{x_i^*\}$, 相应的 Riemann 和为

$$\sigma(P, \xi) = \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \Delta x_i = b - a,$$

即 Riemann 和 $\sigma(P, \xi)$ 为常数 $b - a$, 因此极限 $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sigma(P, \xi)$ 存在, 且极限为 $b - a$. 由积分定义知, 函数 $f(x) = 1$ 在任意闭区间 $[a, b]$ 上可积, 且 $\int_a^b 1dx = b - a$. 证毕.

例二

例二: 计算 $\int_a^b x dx$.

解: 对任意分割 $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, 对于任意关于分割 P 的样点集 $\{x_i^*\}$, $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$, 相应的 Riemann 和为 $\sum_{i=1}^n x_i^* \Delta x_i$. 记子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 的中点为 $x_i^{**} = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$. 于是

$$\sum_{i=1}^n x_i^* \Delta x_i = \sum_{i=1}^n x_i^{**} \Delta x_i + \sum_{i=1}^n (x_i^* - x_i^{**}) \Delta x_i.$$

上式右边第一个和式为

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_i^{**} \Delta x_i &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (x_i + x_{i-1}) (x_i - x_{i-1}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i^2 - x_{i-1}^2) = \frac{1}{2} (b^2 - a^2). \end{aligned}$$

再考虑第二个和式, 即和式 $\sum_{i=1}^n (x_i^* - x_i^{**}) \Delta x_i$.

例二, 续

由于 $x_i^*, x_i^{**} \in [x_{i-1}, x_i]$, 故 $|x_i^* - x_i^{**}| \leq x_i - x_{i-1} = \Delta x_i \leq \|P\|$. 于是

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n (x_i^* - x_i^{**}) \Delta x_i \right| &\leq \sum_{i=1}^n |x_i^* - x_i^{**}| \Delta x_i \\ &\leq \|P\| \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \|P\| (b - a). \end{aligned}$$

因此对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \varepsilon$, 使得当任意分割 P 满足 $\|P\| < \delta = \varepsilon$ 时, 对任意样点集 $\{x_i^*\}$,

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i^* \Delta x_i - \frac{1}{2} (b^2 - a^2) \right| \leq \|P\| (b - a) \leq (b - a) \varepsilon.$$

根据积分定义, 函数 x 在任意区间 $[a, b]$ 上可积, 且

$$\int_a^b x dx = \frac{1}{2} (b^2 - a^2).$$

解答完毕.

定积分的两个基本问题, 连续函数可积

定积分的两个基本问题:

(i) 如何判断一个函数是否可积?

(ii) 如何计算定积分.

关于第一个问题, 我们有如下结论.

Theorem

定理: 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 即 $C[a, b] \subset R[a, b]$.

证明稍后给出.

微积分学基本定理, Newton - Leibniz 公式

Theorem

定理: 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积. 如果存在函数 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上的连续, 在 (a, b) 上可导, 且 $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in (a, b)$, 则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \quad (\text{Newton - Leibniz 公式})$$

注: 这定理称为微积分学基本定理 (the fundamental theorem of Calculus).

有时简记作 **FTC**, 它为我们提供了计算定积分的有效方法.

Definition

定义: 给定 (a, b) 上的函数 $f(x)$, 若存在可微函数 $F(x)$, 使得 $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in (a, b)$, 则称 $F(x)$ 为函数 $f(x)$ 的一个原函数 (primitive functions), 或反导数 (anti-derivatives).

例一. $\frac{1}{n}x^n$ 是 x^{n-1} 的一个原函数, 因为 $[\frac{1}{n}x^n]' = x^{n-1}$;

例二. $\sin x$ 是函数 $\cos x$ 的一个原函数, 因为 $[\sin x]' = \cos x$.

例三. Dirichlet 函数 $D(x)$ 没有原函数, 因为导函数有介值性质, 而 $D(x)$ 没有.

注: 后面将专门讨论如何求给定函数的原函数, 即如何求不定积分.

微积分学基本定理证明

证: 对区间 $[a, b]$ 作 n 等分, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, $x_i = a + ih$, $i = 1, 2, \cdots, n$, $h = \frac{b-a}{n}$, 则

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})] = \sum_{i=1}^n F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \rightarrow \int_a^b f(x)dx, \quad n \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

其中 $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$, $i = 1, 2, \cdots, n$. 定理得证. □

注: 为了表示微分和积分的互逆关系, N-L 公式常形式地写作

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b dF(x) = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

例子

Example

例: 利用 N-L 公式计算如下积分:

$$\int_0^1 x^2 dx = \int_0^1 d\left(\frac{x^3}{3}\right) = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3};$$

$$\int_a^b x^n dx = \int_a^b d\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_a^b = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1};$$

$$\int_a^b \sin x dx = \int_a^b d(-\cos x) = -\cos x \Big|_a^b = \cos a - \cos b;$$

$$\int_a^b \cos x dx = \int_a^b d(\sin x) = \sin x \Big|_a^b = \sin b - \sin a.$$

利用积分求极限

例(课本第 147 页习题 14): 求极限

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n}\right) \right]^{\frac{1}{n}}.$$

解: 将上述极限转化为某个函数的 Riemann 和的极限. 记

$$a_n = \ln \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n}\right) \right]^{\frac{1}{n}},$$

$$\text{则 } a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n}\right).$$

于是 a_n 可看作函数 $\ln(1+x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的一个 Riemann 和. 由于 $\ln(1+x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 故在区间 $[0, 1]$ 上可积. 因此

利用积分求极限, 续

$$a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right) \rightarrow \int_0^1 \ln(1+x) dx.$$

易证 $F(x) = (1+x) \ln(1+x) - x$ 是函数 $f(x) = \ln(1+x)$ 的一个原函数(我们将在不定积分部分学习如何求 $f(x)$ 的原函数). 因此

$$\int_0^1 \ln(1+x) dx = [(1+x) \ln(1+x) - x] \Big|_0^1 = 2 \ln 2 - 1.$$

于是原极限为

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(1 + \frac{2}{n} \right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n} \right) \right]^{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{a_n} = e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n} = e^{2 \ln 2 - 1} = \frac{4}{e}. \end{aligned}$$

解答完毕.

积分性质一: 可积函数有界

Theorem

定理: 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界.

证: 设 $\int_a^b f(x) dx = J$, 由积分定义知对于 $\varepsilon = 1$, 存在 $\delta > 0$, 使得对分割 P , $\|P\| < \delta$, 则有

$$\left| \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i - J \right| < 1,$$

这里样点 $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$. 由上式得

$$\left| \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i \right| < |J| + 1.$$

于是

$$f(x_1^*) \Delta x_1 = \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i - \sum_{i=2}^n f(x_i^*) \Delta x_i.$$

由此得

证明, 续

$$|f(x_1^*)\Delta x_1| \leq \left| \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x_i \right| + \left| \sum_{i=2}^n f(x_i^*)\Delta x_i \right|.$$

上式两边同时除以 Δx_1 得

$$|f(x_1^*)| < \frac{1}{\Delta x_1} \left(|J| + 1 + \left| \sum_{i=2}^n f(x_i^*)\Delta x_i \right| \right).$$

对每个 $i = 2, \dots, n$, 固定样点 $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$, 则上式右边是一个确定的数, 而 x_1^* 则可以在子区间 $[x_0, x_1]$ 上任意取值. 这就证明了 $f(x)$ 在子区间 $[x_0, x_1]$ 上有界. 同理可证 $f(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上有界, $i = 2, \dots, n$. 从而 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界. 证毕.

注记: 定义函数 $f(0) = 0$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $\forall x \in (0, 1]$. 显然 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上无界. 根据上述定理可知, 函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上不可积. 但这个函数在下述意义下时广义可积的:

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_{\varepsilon}^1 d2\sqrt{x} = 2\sqrt{x} \Big|_{\varepsilon}^1 = 2(1 - \sqrt{\varepsilon}) \rightarrow 2, \quad \varepsilon \rightarrow 0^+.$$

稍后我们将详细讨论广义积分.

积分性质二：积分可加性

Theorem

定理: 设 f 为 $[a, b]$ 上定义的函数, $c \in (a, b)$, 则 f 在 $[a, b]$ 上可积, 当且仅当 f 在区间 $[a, c]$ 和 $[c, b]$ 上可积. 并且当 f 在 $[a, b]$ 上可积时,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (*)$$

证: 关于可加性的结论是稍后介绍的 Lebesgue 大定理的推论. 以下证明, 当 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积时, 积分等式 $(*)$ 成立. 由于可积性得到保证, 故在分割时, 可以始终将点 $x = c$ 取为分点, 然后取极限即得到等式 $(*)$. □

例子

课本第140页习题5.2题3: 设 f 是 $[a, b]$ 上的非负连续函数, 不恒为零, 证明

$$\int_a^b f(x) dx > 0.$$

证: 因 f 非负且不恒为零, 故存在点 $x_0 \in [a, b]$, 使得 $f(x_0) > 0$. 根据连续函数保号性知, 存在一个包含 x_0 的闭区间 $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, 使得 $f(x) > \frac{1}{2}f(x_0)$, $\forall x \in [\alpha, \beta]$. 再根据积分可加性知

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^{\alpha} f(x) dx + \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\beta}^b f(x) dx \\ &\geq \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} f(x_0) dx = \frac{1}{2} f(x_0) (\beta - \alpha) > 0. \end{aligned}$$

命题得证.

Darboux 上和与下和

设 $f(x)$ 为定义在闭 $[a, b]$ 上的有界函数. 取 $[a, b]$ 中一个分割 $P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$. 记

$$M_i \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \{f(x)\}, \quad m_i \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \{f(x)\},$$

再记 $\omega_i = M_i - m_i$, 称 ω_i 为函数 $f(x)$ 在第 i 个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的振幅, $i = 1, 2, \dots, n$. 分别称

$$U_P \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i, \quad L_P \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$$

为函数 $f(x)$ 关于分割 P 的 Darboux 上和与 Darboux 下和. ($U=\text{upper}$, $L=\text{lower}$)

Darboux 上和与下和的性质

Lemma

引理一: 对于任意 $[a, b]$ 上的有界函数 $f(x)$, $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in [a, b]$, 以及对于区间 $[a, b]$ 的任意一个分割 P , 及其任意一个 Riemann 和 $\sigma(P, \xi) = \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i$, 成立

$$m(b-a) \leq L_P \leq \sigma(P, \xi) \leq U_P \leq M(b-a).$$

Proof.

证明: 对于 $1 \leq i \leq n$, 显然有 $m \leq m_i \leq f(x_i^*) \leq M_i \leq M$, 于是 $m \Delta x_i \leq m_i \Delta x_i \leq f(x_i^*) \Delta x_i \leq M_i \Delta x_i \leq M \Delta x_i$. 关于 $i = 1, 2, \dots, n$ 求和即得所要证明的不等式. 证毕. □

Definition

定义: 设 $P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ 和 $P': a = x'_0 < x'_1 < x'_2 < \cdots < x'_m = b$ 为 $[a, b]$ 的两个分割. 若 $\{x_0, x_1, \cdots, x_n\} \subsetneq \{x'_0, x'_1, \cdots, x'_m\}$, 则称分割 P' 是分割 P 的一个加密.

换言之, 若分割 P' 是 P 的一个加密, 则 P' 可看作在分割 P 中添加若干个分点所得到的分割.

Darboux 上下和与分割加密的关系

Lemma

引理二: 若分割 P' 是在分割 P 中添加 k 个新的分点而得, 则

$$(i) \quad U_{P'} \leq U_P \leq U_{P'} + k\omega \|P\|;$$

$$(ii) \quad L_P \leq L_{P'} \leq L_P + k\omega \|P\|,$$

其中 $\omega = M - m$, 称为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的振幅, M 和 m 为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的上下确界, $\|P\| = \max \{\Delta x_i\}$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

粗略地说, 随着分割 P 的加密, 上和 U_P 不增, 下和 L_P 不减.

引理二证明

证明: 只证 (i) 且 $k = 1$ 情形. 设 $P' = P \cup \{x'\}$, $x' \in (x_{i-1}, x_i)$. 为明确计不妨设 $i = 1$, 即 $x' \in (x_0, x_1)$. 记

$$M'_1 = \sup\{f(x), x \in [x_0, x']\}, \quad M''_1 = \sup\{f(x), x \in [x', x_1]\},$$

则 $M'_1, M''_1 \leq M_1$, 其中 $M_1 = \sup\{f(x), x \in [x_0, x_1]\}$. 于是

$$U_P - U_{P'} = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i - \left(M'_1 \Delta x'_1 + M''_1 \Delta x''_1 + \sum_{i=2}^n M_i \Delta x_i \right)$$

$$= M_1 \Delta x_1 - M'_1 \Delta x'_1 - M''_1 \Delta x''_1 \geq M_1 (\Delta x_1 - \Delta x'_1 - \Delta x''_1) = 0,$$

其中 $\Delta x'_1 = x'_1 - x_0$, $\Delta x''_1 = x_1 - x'_1$, $\Delta x_1 = x_1 - x_0$.

另一方面

$$\begin{aligned}U_P - U_{P'} &= M_1 \Delta x_1 - M'_1 \Delta x'_1 - M''_1 \Delta x''_1 \\&\leq M_1 \Delta x_1 - m_1 \Delta x'_1 - m_1 \Delta x''_1 \\&= (M_1 - m_1) \Delta x_1 = \omega_1 \Delta x_1 \leq \omega \|P\|.\end{aligned}$$

这就证明了 $0 \leq U_P - U_{P'} \leq \omega \|P\|$. 当分割 P' 是在分割 P 中添加 k 个新的分点而得时, 则 $0 \leq U_P - U_{P'} \leq k\omega \|P\|$. 引理得证.

任意一个 Darboux 下和 \leq 任意一个 Darboux 上和

Lemma

引理三: 设 P_1 和 P_2 为 $[a, b]$ 的任意两个分割, 则 $L_{P_1} \leq U_{P_2}$.

Proof.

证明: 记 $P = P_1 \cup P_2$, 即 P 为分割 P_1 和 P_2 分点的合并, 则 P 既是 P_1 又是 P_2 的加密分割. 根据引理二可知

$$L_{P_1} \leq L_P \leq U_P \leq U_{P_2}.$$

证毕. □

Darboux 上积分与 Darboux 下积分

设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的有界函数, 即 $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a, b]$, 则对 $[a, b]$ 的任何分割 $P, m(b-a) \leq L_P \leq U_P \leq M(b-a)$.

Definition

定义: 分别称

$$\int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \inf \{U_P\} \quad \text{和} \quad \int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \sup \{L_P\}$$

为有界函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的 Darboux 上积分和下积分.

显然对 $[a, b]$ 的任意分割 P ,

$$L_P \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq U_P.$$

Lemma

引理: 设 f 为 $[a, b]$ 上的有界函数, 则

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} U_P = \int_a^b f(x) dx, \quad \lim_{\|P\| \rightarrow 0} L_P = \int_a^b f(x) dx.$$

证明: 只证第一个等式. 第二个等式的证明类似. 要证第一个等式, 即要证对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对任意分割 P 满足 $\|P\| < \delta$, 成立

$$0 \leq U_P - \int_a^b f(x) dx < \varepsilon.$$

由 Darboux 上积分定义知, $\forall \varepsilon > 0$, 存在分割 P_0 , 使得 $U_{P_0} < \int_a^b f(x) dx + \varepsilon$.

证明, 续

设分割 P_0 有 m 个内分点 (除去两个端点的分点), 则对任意分割 P , 作加密分割 $P' = P \cup P_0$, 即分割 P' 可看作在分割 P 中, 再添加至多 m 个新分点所得到的分割. 由加密分割的性质可知

$$U_{P'} \leq U_P \leq U_{P'} + m\omega\|P\| \quad \text{且} \quad U_{P'} \leq U_{P_0}.$$

于是

$$\begin{aligned} 0 \leq U_P - \int_a^b f(x)dx &\leq U_{P'} + m\omega\|P\| - \int_a^b f(x)dx \\ &\leq U_{P_0} - \int_a^b f(x)dx + m\omega\|P\| < \varepsilon + m\omega\|P\| < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

最后一个不等式成立, 只要分割 $\|P\| < \frac{\varepsilon}{1+m\omega}$ 即可, 其中 ω 表示 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的振幅, 即 $\omega = M - m$, $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in [a, b]$. 证毕.

Darboux 可积性定理

Theorem

定理: 设 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的有界函数, 则下述条件等价

- (i) f 在 $[a, b]$ 上可积;
- (ii) 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在分割 P , 使得 $U_P - L_P < \varepsilon$;
- (iii) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

以下证 (i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i).

(i) \Rightarrow (ii): 设 f 在 $[a, b]$ 上可积. 记 $J = \int_a^b f(x)dx$. 根据可积定义知对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i - J \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall P: \|P\| < \delta, \quad \forall \xi = \{\xi_i\}.$$
$$\Rightarrow -\frac{\varepsilon}{3} + J < \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i < J + \frac{\varepsilon}{3}$$

证明, 续一

$$\Rightarrow -\frac{\varepsilon}{3} + J < \sum_{i=1}^n \sup_{\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]} \{f(\xi_i)\} \Delta x_i \leq J + \frac{\varepsilon}{3},$$

此即 $-\frac{\varepsilon}{3} + J < \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i \leq J + \frac{\varepsilon}{3}$. 亦即 $|U_P - J| \leq \varepsilon/3$. 同理我们有 $|L_P - J| \leq \varepsilon/3$. 于是

$$0 \leq U_P - L_P = U_P - J - (L_P - J) \leq |U_P - J| + |L_P - J| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

即条件(ii)成立.

(ii) \Rightarrow (iii): 假设条件(ii)成立, 即对任意 $\varepsilon > 0$, 存在分割 P , 使得 $U_P - L_P < \varepsilon$, 则根据定义得

$$0 \leq \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f(x) dx \leq U_P - L_P < \varepsilon.$$

由 $\varepsilon > 0$ 的任意性知 $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$, 即条件(iii) 成立.

证明, 续二

(iii) \Rightarrow (i): 假设条件 (iii) 成立, 即 $\int_a^b f(x)dx = \bar{\int}_a^b f(x)dx$, 要证 f 可积. 记 Darboux 上积分与 Darboux 下积分的共同值为 J . 对任意分割 P , 以及任意样点集 $\xi = \{\xi_i\}$, 显然成立

$$L_P \leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \leq U_P. \quad (*)$$

由 Darboux 引理知当 $\|P\| \rightarrow 0$ 时, $U_P \rightarrow \bar{\int}_a^b f(x)dx = J$, 且 $L_P \rightarrow \int_a^b f(x)dx = J$. 于不等式 (*) 中关于 $\|P\| \rightarrow 0$ 取极限, 并根据极限的两边夹法则即得

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = J.$$

即条件 (i) 成立. 定理得证. □

Dirichlet 函数不可积

例: Dirichlet 函数 $D(x)$ 在任何闭区间 $[a, b]$ 上不可积, 其中

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数,} \\ 0, & x \text{ 为无理数.} \end{cases}$$

证明: 对 $[a, b]$ 的任意分割 $P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$,

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \{D(x)\} = 1, \quad m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \{D(x)\} = 0,$$

其中 $i = 1, 2, \dots, n$. 于是 $U_P = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \Delta x_i = b - a$, $L_P = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i = 0$. 因此

$$\int_a^b D(x) dx = \inf \{U_P\} = b - a, \quad \int_a^b D(x) dx = \sup \{L_P\} = 0.$$

故 $\int_a^b D(x) dx \neq \int_a^b D(x) dx$. 根据 Darboux 可积性定理知 Dirichlet 函数 $D(x)$ 在任意有界闭区间 $[a, b]$ 上不可积. 证毕.

习题一. 课本第123页习题4.3题1: 求下列函数的渐近线

(1) $y = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}};$

(2) $y = \sqrt{x^2 + 1} - x - 1;$

(3) 设函数 $y = f(x)$ 由参数方程 $x = \frac{3t}{1+t^3}, y = \frac{3t^2}{1+t^3}$ 确定.

习题二: 课本第123页习题4.3题2: 作出下列函数的图形.

(1) $y = x^3 + 6x^2 - 15x - 20;$

(2) $y = \frac{3x}{1+x^2};$

(3) $y = \ln \frac{1+x}{1-x};$

(4) $y = x + \arctan x.$

习题三: 课本第124页第4章总复习题1: 设函数 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 内可导, 证明 (1) 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$; (2) 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, 则存在序列 $x_n \rightarrow +\infty$, 使得 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f'(x_n) = 0$.

注: (2) 的证明提示: 考虑 $\frac{f(2n)-f(n)}{n}$.

习题四: 课本第124页第4章总复习题2: 设

(i) $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上二阶连续可微;

(ii) $f''(x) \geq a > 0$;

(iii) $f(0) = 0$;

(iv) $f'(0) < 0$,

问 $f(x)$ 在开区间 $(0, +\infty)$ 上有多少个零点.