《微积分A1》第十四讲

教师 杨利军

清华大学数学科学系

2025年11月05日

函数单调性的进一步讨论

回忆如下函数单调性定理.

Theorem

定理: 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导. 若对任意 $x \in (a,b)$, $f'(x) \geq 0 (\leq 0)$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增(减).

以下是上述定理的推广.

Theorem

定理: 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调增(严格单调减) $\iff f'(x) \geq 0$ $(f'(x) \leq 0)$, 且在 $[a,b]$ 的任何子区间上 $f'(x)$ 不恒为零.

注: 设函数在一开区间上可导, 在其中一点处导数为正的, 并不能推出函数在这个点的邻域内单调上升. 例如

$$f(x)=\begin{cases} x+2x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0. \end{cases}$$

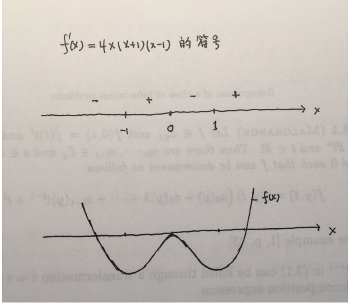
易证函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上处处可导, 且

$$f'(x)=\begin{cases} 1+4x\sin\frac{1}{x}-2\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0. \end{cases}$$

注意 $f'(0)=1$, 但在原点的每个邻域内, 导数 $f'(x)$ 的符号不定, 故函数在原点的每个邻域内不单调.

例一: 讨论函数 $f(x) = x^4 - 2x^2$ 的单调区间.

解: 先求驻点. 令 $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 0$. 解之得三个驻点 $x = 0$, $x = \pm 1$. 由此可确定 $f'(x)$ 的符号, 以及函数的增减区间, 如图所示.



例二: 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导, $f(0)=0$, 且导数 $f'(x)$ 严格单调增. 证明 $\frac{f(x)}{x}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上也严格单调增.

证明: 一方面

$$\left[\frac{f(x)}{x}\right]' = \frac{1}{x}\left[f'(x) - \frac{f(x)}{x}\right].$$

另一方面

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(\xi),$$

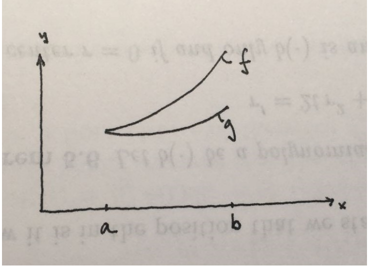
其中 $\xi \in (0,x)$. 由假设 $f'(x)$ 严格单调增, 故 $f'(\xi) < f'(x)$. 因此 $[\frac{f(x)}{x}]' > 0$, $\forall x \in (0,+\infty)$. 这就证明了 $\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 也严格单调增. 证毕.

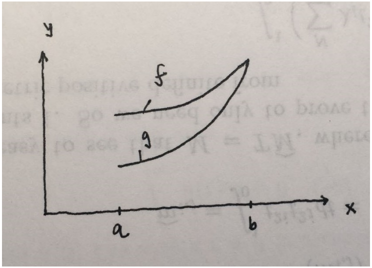
<u>例三</u>: 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导. 证明

i) 若 $f(a)=g(a)$ 且 $f'(x)>g'(x)$, 则 $f(x)>g(x)$, $\forall x\in(a,b]$;

ii) 若 $f(b)=g(b)$ 且 $f'(x)<g'(x)$, 则 $f(x)>g(x)$, $\forall x\in[a,b)$.

(起点时间相同, 速度快者一路领先; 到达终点时间相同, 速度慢者一路领先)





例三，续

证明：令 $F(x) = f(x) - g(x)$，则 $F'(x) = f'(x) - g'(x)$.

(i) 当 $f(a) = g(a)$ 且 $f'(x) > g'(x)$ 时，$F(a) = 0$，$F'(x) > 0$，$\forall x \in (a, b)$. 故 $F(x)$ 严格单调增. 因此 $F(x) > F(a) = 0$，此即 $f(x) > g(x)$，$\forall x \in (a, b]$.

(ii) 当 $f(b) = g(b)$ 且 $f'(x) < g'(x)$ 时，$F(b) = 0$，$F'(x) < 0$，$\forall x \in (a, b)$. 故 $F(x)$ 严格单调减. 因此 $F(x) > F(b) = 0$，此即 $f(x) > g(x)$，$\forall x \in [a, b)$.

证毕.

例一：证明 $e^x > x + 1$, $\forall x \in (-\infty, +\infty)$, $x \neq 0$.

证：记 $F(x) = e^x - x - 1$, 则 $F'(x) = e^x - 1$. 于是

(i) 在区间 $(0, +\infty)$ 上，$F'(x) > 0$. 从而 $F(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上严格单调增. 故 $F(x) > F(0) = 0$, 即 $e^x > x + 1$, $\forall x > 0$.

(ii) 在区间 $(-\infty, 0)$ 上，$F'(x) < 0$. 从而 $F(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上严格单调减. 故 $F(x) > F(0) = 0$, 即 $e^x > x + 1$, $\forall x < 0$. 命题得证.

例二：证明不等式 $\sin x < x$, $\forall x > 0$.

证：记 $F(x) = x - \sin x$, 则 $F(0) = 0$, $F'(x) = 1 - \cos x \geq 0$. 显然 $F'(x)$ 在任何区间上不恒为零. 根据定理可知函数 $F(x)$ 在整个实轴上严格单调增. 于是 $F(x) > F(0) = 0$, 即 $\sin x < x$, $\forall x > 0$. 命题得证.

例三：证明 $\frac{2}{\pi} < \frac{\sin x}{x} < 1, \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

证：定义函数

$$F(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

显然 $F(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上连续，在开区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上可导，且对 $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$,

$$F'(x) = \frac{1}{x^2}(x\cos x - \sin x) = \frac{\cos x}{x^2}(x - \tan x).$$

回忆在证明 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 时，证明了不等式 $x < \tan x, \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$，故 $F'(x) < 0, \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$. 这表明 $F(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上严格单调下降. 因此 $F(\frac{\pi}{2}) < F(x) < F(0)$，此即

$$\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad 亦即 \quad \frac{2}{\pi} < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

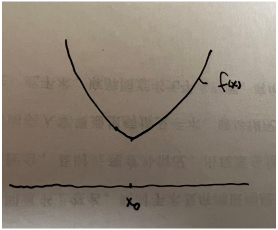
证毕.

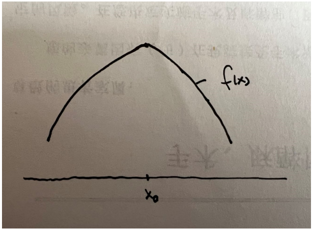
极值问题的进一步讨论

定理: 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续，在 $(a,b)\backslash\{x_0\}$ 上可导，

(i) 若 $f'(x)<0,\ \forall x\in(x_0-\delta,x_0)$，且 $f'(x)>0,\ \forall x\in(x_0,x_0+\delta)$，则 x_0 是 $f(x)$ 的严格极小值点.

(ii) 若 $f'(x)>0,\ \forall x\in(x_0-\delta,x_0)$，且 $f'(x)<0,\ \forall x\in(x_0,x_0+\delta)$，则 x_0 是 $f(x)$ 的严格极大值点.





定理证明

证: 只证结论(i). 结论(ii)的证明类似.

1) 由条件 $f'(x) < 0, \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 知 $f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 严格单调减, 故 $f(x) > f(x_0), \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$.

2) 完全类似, 由条件 $f'(x) > 0, \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 知 $f(x)$ 在 $(x_0, x_0 + \delta)$ 严格单调增, 故 $f(x) > f(x_0), \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$.

综上 $f(x) > f(x_0), \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), x \neq x_0$. 这就证明了 x_0 是 $f(x)$ 的严格极小值点. 证毕.

Example

例一: 考虑函数 $f(x)=|x|$. 显然 $f(x)$ 在开区间 $(-\infty,0)$, 以及 $(0,+\infty)$ 上可导, 且 $f'(x)=-1<0,\ \forall x<0,\ f'(x)=1>0,\ \forall x>0$. 根据定理知 $x=0$ 是函数的极小点. 实际上还最小值点. 如图所示.

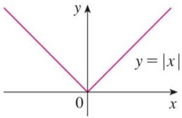


FIGURE 12
If $f(x)=|x|$, then $f(0)=0$ is a minimum value, but $f'(0)$ does not exist.

例二

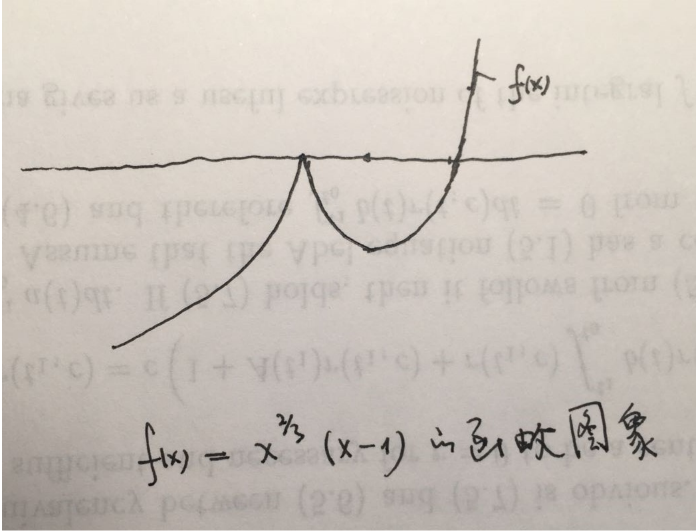
例二: 求函数 $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x-1)$ 的极值.

解: 对 $x \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x}}(5x-2).$$

于是函数有唯一驻点 $x = \frac{2}{5}$, 且当 $0 < x < \frac{2}{5}$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x > \frac{2}{5}$ 时, $f'(x) > 0$. 因此驻点 $x = \frac{2}{5}$ 为极小点. 相应的极小值为 $f(\frac{2}{5}) = -\frac{3}{5}(\frac{2}{5})^{2/3}$. 此外 $f(x)$ 有唯一一个不可微点 $x = 0$. 当 $x \in (0, \frac{2}{5})$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x < 0$ 时, $f'(x) > 0$. 故 $x = 0$ 是函数的极大值点. 相应的极大值为 $f(0) = 0$. 解答完毕.

函数 $y = x^{\frac{2}{3}}(x-1)$ 的函数图像



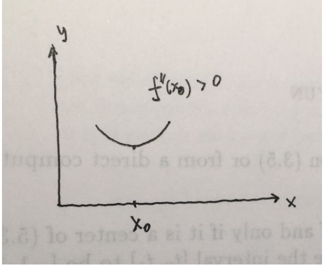
二阶导数与极值

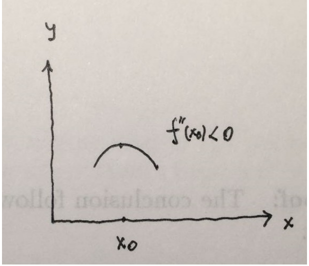
Theorem

<u>定理</u>: 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上可导, x_0 是 f 的驻点, 即 $f'(x_0)=0$. 假设 $f''(x_0)$ 存在, 则

(i) 当 $f''(x_0)>0$ 时, x_0 为严格极小点;

(ii) 当 $f''(x_0)<0$ 时, x_0 为严格极大点.





定理证明

证: 只证情形(i). 情形(ii)的证明类似. 根据假设 $f''(x_0) > 0$ 可知

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} > 0,$$

由极限的保号性质知存在 $\delta > 0$, 使得

$$\frac{f'(x)}{x - x_0} > 0, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \backslash \{x_0\}.$$

故

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0), \quad f'(x) < 0;$$

$$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta), \quad f'(x) > 0.$$

再次根据上述定理可知 x_0 是严格极小点. 结论 (i) 得证. □

注: 当 $f''(x_0) = 0$ 时, 我们需要更高阶导数判断驻点 x_0 是否为极值点.

Theorem

定理: 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续, 若 $x_0 \in (a,b)$, 使得 $f^{(n+1)}(x_0)$ 存在, 且 $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$, $f^{(k)}(x_0) = 0$, $k = 1, 2 \cdots, n$,

(i) 若 $n+1$ 是偶数, 则 x_0 是极值点, 并且当 $f^{(n+1)}(x_0) > 0$ 时, x_0 是极小点, 当 $f^{(n+1)}(x_0) < 0$ 时, x_0 是极大点;

(ii) 若 $n+1$ 是奇数, 则 x_0 非极值点.

定理证明

<u>证</u>: 考虑 $f(x)$ 在 x_0 处带 Peano 余项的 $n+1$ 阶 Taylor 展式

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} + o(x-x_0)^{n+1}.$$

将上述展式写作

$$f(x) - f(x_0) = \left(\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} + \frac{o(x-x_0)^{n+1}}{(x-x_0)^{n+1}}\right)(x-x_0)^{n+1}.$$

注意括弧 $(\ldots)$ 在 x_0 的充分小的邻域里保持定号，而因子 $(x-x_0)^{n+1}$ 当 $n+1$ 为偶数时保持定号，故此时 x_0 为极值点. 而因子 $(x-x_0)^{n+1}$ 当 $n+1$ 为奇数时，在 x_0 的两侧变号，故此时 x_0 非极值点. 命题得证. 证毕. □

利用高阶导数判断极值，例子

Example

例一：对于 $f(x) = x^3$，$x = 0$ 是驻点，且 $f'(0) = 0$，$f''(0) = 0$，$f'''(0) = 6 \neq 0$. 根据定理可知 $x = 0$ 不是极值点.

Example

例二：对于 $g(x) = x^4$，$x = 0$ 是驻点，且 $g^{(k)}(0) = 0$，$k = 1, 2, 3$，$g^{(4)}(0) = 24 > 0$. 根据定理可知 $x = 0$ 是极小值点.

求最大值和最小值步骤

考虑如何求闭区间上连续函数的最值点以及最值. 假设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 除去由有限个点外处处可导, 则可用按如下步骤求出 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的最值.

一. 求 f 的驻点. 即求解 $f'(x)=0$ 得驻点 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$,

二. 求 $f(x)$ 的不可导点 $\mu_1,\cdots,\mu_n$,

则函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的最大值 M 和最小值 m 分别为

$$M=\max\left\{f(a),f(b),f(\lambda_1),\cdots,f(\lambda_m),f(\mu_1),\cdots,f(\mu_n)\right\},$$
$$m=\min\left\{f(a),f(b),f(\lambda_1),\cdots,f(\lambda_m),f(\mu_1),\cdots,f(\mu_n)\right\}.$$

例一: 求函数 $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$ 在 $[-1, 3]$ 的最大最小值.

解: 先求驻点. 令 $f'(x) = 0$, 即

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x = 4x(x-1)(x-2) = 0.$$

由此求得三个驻点 $x = 0, 1, 2$. 显然函数无不可微点. 因此最值在集合

$$\left\{f(-1), f(3), f(0), f(1), f(2)\right\} = \left\{9, 9, 0, 1, 0\right\}$$

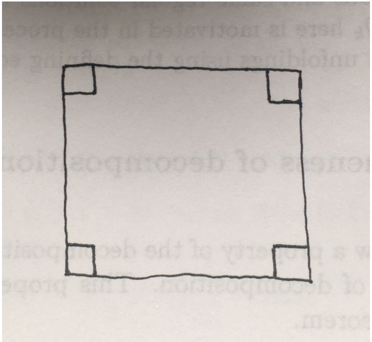
中产生. 于是所求的最大值 $M = 9$, 最小值 $m = 0$. 解答完毕.

例二: 证明函数 $f(x) = xe^{-2x^2}$ 在整个实轴上可取得最大值和最小值, 并求出函数的最大值和最小值.

证: 显然 $f(x)$ 是奇函数, $f(0) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, 且 $f(1) = e^{-2} > 0$, 故 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上必可取得最大值. 由于 $f(x)$ 是奇函数, 故 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上必可取得最小值. 因此 $f(x)$ 在整个实轴上必可取得最大值和最小值. 往下求之. 令 $f'(x) = e^{-2x^2} + xe^{-2x^2}(-4x) = e^{-2x^2}(1 - 4x^2) = 0$, 得驻点 $x = \frac{\pm 1}{2}$. 故所求最大值为 $f(1/2) = \frac{1}{2\sqrt{e}}$, 最小值为 $f(-1/2) = -\frac{1}{2\sqrt{e}}$. 解答完毕.

例三

<u>例三</u>: 给定边长为 $a > 0$ 的正方形. 从正方形的四个角截去大小相同的小正方形, 做成一个无盖的长方体. 如图所示. 问小正方形的边长为何值时, 所得长方体的体积最大?



解：设小正方形的边长为 x. 依题意可知 $x \in [0, \frac{a}{2}]$. 于是所得长方体的体积为 $v(x) = x(a-2x)^2$. 为求 $v(x)$ 的最大值，先求其驻点. 令 $v'(x) = 0$，即

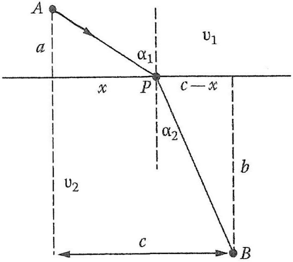
$$v'(x) = (a-2x)^2 + 2x(a-2x)(-2) = (a-2x)(a-6x).$$

由此得驻点 $x = \frac{a}{2}$ 和 $x = \frac{a}{6}$. 于是所求最大值必在如下数集中

$$\left\{v(0), v(a/2), v(a/2), v(a/6)\right\} = \left\{0, 0, 0, \frac{2a^3}{27}\right\}.$$

这表明，当小正方形的边长取为 $\frac{a}{6}$ 时，所得体积 $v(x)$ 为最大. 其最大体积为 $\frac{2a^3}{27}$. 解答完毕.

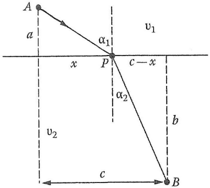
Snell's law of reflection (Snell 光的折射定理): 假设光线在两种不同的介质里传播, 其传播速度分别为 $\mathbf{v}_1$ 和 $\mathbf{v}_2$, 入射角度(即光线与垂直方向的夹角) 分别为 α_1 和 α_2, 如图所示,



则 $\dfrac{\sin\alpha_1}{\mathbf{v}_1} = \dfrac{\sin\alpha_2}{\mathbf{v}_2}$.

Snell 定理的证明

证：假设点 A 位于上层介质，点 B 位于下层介质，光线从点 A 出发，沿直线传播到点 P，然后再沿直线传播到点 B．如图．



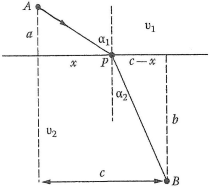
于是光线由点 A 到 B 的传播时间为

$$T = T(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}{v_2}.$$

由费马最少时间原理(公理)，光的真实路径使得 $T'(x) = 0$，即

Snell 定理的证明，续一

$$T'(x) = \frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{c-x}{v_2\sqrt{b^2+(c-x)^2}} = 0.$$



由图可知 $\sin\alpha_1 = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$, $\sin\alpha_2 = \frac{c-x}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}$. 于是我们得到 Snell 光的折射定理

$$\frac{\sin\alpha_1}{v_1} = \frac{\sin\alpha_2}{v_2}.$$

Snell 定理的证明，续二

对 $T'(x)$ 再次求导，并经化简即得

$$T''(x) = \frac{a^2}{v_1(a^2+x^2)^{3/2}} + \frac{b^2}{v_2\left[b^2+(c-x)^2\right]^{3/2}} > 0.$$

故 $T'(x)$ 在 $(0,c)$ 上严格单调上升. 由 $T'(x) = \frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{c-x}{v_2\sqrt{b^2+(c-x)^2}}$ 知

$$T'(0) = -\frac{c}{v_2\sqrt{b^2+c^2}} < 0, \quad T'(c) = \frac{c}{v_1\sqrt{a^2+c^2}} > 0$$

故方程 $T'(x)=0$ 有唯一解 $x_0 \in (0,c)$，即函数 $T(x)$ 有唯一驻点 x_0. 由于在驻点 x_0 的左侧，$T'(x)<0$，即 $T(x)$ 严格单调下降，而在驻点 x_0 的右侧，$T'(x)>0$，即 $T(x)$ 严格单调上升，故驻点 x_0 是区间 $[0,c]$ 上的最小值点.

Definition

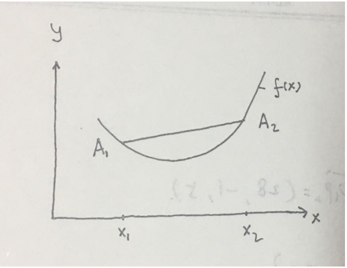
定义: 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上定义. 若对曲线 $\Gamma: y = f(x)$ 上的任意两个点 $A_1 = (x_1, y_1)$, $A_2 = (x_2, y_2) \in \Gamma$, 曲线段 A_1A_2 位于直线段 $\overline{A_1A_2}$ 的下方(上方), 即

$$f(x) \leq (\geq) f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1), \quad \forall x \in (x_1, x_2)$$

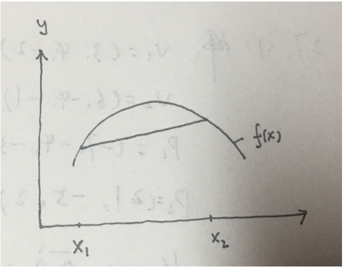
则称函数 $f(x)$ 下凸(上凸). 如果上述不等式严格成立, 则称函数 $f(x)$ 严格下凸(严格上凸).

注: 下凸 (convex downward) 也称为上凹 (concave upward), 上凸 (convex upward) 也称为下凹 concave downward.

凸性图示



下凸 **convex downward**



上凸 **convex upward**

等价定义

Definition

定义: 设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上定义, 若对 $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 \neq x_2$, 对 $\forall \lambda \in (0,1)$,

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq (\geq) \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2),$$

则称 $f(x)$ 于区间 (a,b) 下凸(上凸). 若不等式严格成立, 则称 $f(x)$ 为严格下凸的(严格上凸的).

注: 显然 $f(x)$ 下凸(上凸), 当且仅当 $-f(x)$ 上凸(下凸). 例如抛物线 $y=x^2$ 下凸, 而抛物线 $y=-x^2$ 上凸.

证明: 只证明下凸情形. 要证两个定义等价, 即要证明, 对于 $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 < x_2$,

$$f(x) \le f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1),\ \forall x \in (x_1, x_2),\ (*)$$

$$\Longleftrightarrow\ f\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\big) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2),\ (**)$$

其中 $\forall \lambda \in (0,1)$.

$\Rightarrow$: 设 (*) 成立. 对 $\forall \lambda \in (0,1)$, 记 $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, 则

$$\lambda = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1},\quad 1 - \lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

于是根据不等式 (*) 得

$$f\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\big) \le f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1),$$

$$= f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\,[f(x_2) - f(x_1)]$$

$$= f(x_1) + (1-\lambda)\,[f(x_2) - f(x_1)]$$

$$= \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2).$$

即不等式 (**) 成立.

$\Leftarrow$: 假设式 (**) 成立，即 $f\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\big) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$, $\forall \lambda \in (0,1)$. 对任意 $x \in (x_1, x_2)$，则 x 可表为

$$x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \quad \lambda = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \quad 1 - \lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

等价性证明，续二

于是

$$f(x) = f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

$$= \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) = f(x_1) - \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

$$= f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1),$$

即不等式 (*) 成立. 等价性得证. □

Theorem

定理: 函数 $f(x)$ 在 (a,b) 下凸 $\Longleftrightarrow$ $f(x)$ 满足 Jensen 不等式, 即对于

$$\forall n \geq 2,\ \forall x_1,\cdots,x_n \in (a,b),\ \lambda_1+\cdots+\lambda_n=1,\ \lambda_i>0,$$

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i). \quad (*)$$

注一: 显然关于上凸的平行结论同样成立, 即函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上凸, 当且仅当不等式 (*) 中不等号改为 $\geq$ 成立.

注二: 满足不等式 (*) 的函数 $f(x)$ 称为具有次线性性.

注三: 对于 $\lambda_1+\cdots+\lambda_n=1$, $\lambda_i>0$, 组合 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i$ 称为点 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的一个凸组合.

证明: $\Leftarrow$: 当 $n=2$ 时, Jensen 不等式如下

$$f(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)\le \lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2),$$

其中 $\lambda_1+\lambda_2=1$, $\lambda_1,\lambda_2>0$. 由下凸的等价定义知 $f(x)$ 下凸.

$\Rightarrow$: 设 $f(x)$ 下凸, 要证 Jensen 不等式成立. 当 $n=2$ 时, Jensen 不等式就是下凸的等价定义, 结论成立. 设当 $n=k$ 时, Jensen 不等式成立. 考虑 $n=k+1$ 情形. 对于任意 $k+1$ 个点 $x_1,\cdots,x_k,x_{k+1}\in(a,b)$, 任意 $k+1$ 个正实数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k,\lambda_{k+1}>0$, 且 $\sum_{i=1}^{k+1}\lambda_i=1$, 由于 $\sum_{i=1}^{k+1}\lambda_i x_i$ 可以如下表示

$$\sum_{i=1}^{k+1}\lambda_i x_i=\lambda_{k+1}x_{k+1}+(1-\lambda_{k+1})\frac{\sum_{i=1}^{k}\lambda_i x_i}{1-\lambda_{k+1}}.$$

因此

$$f\left(\sum_{i=1}^{k+1}\lambda_i x_i\right)=f\left(\lambda_{k+1}x_{k+1}+(1-\lambda_{k+1})\frac{\sum_{i=1}^{k}\lambda_i x_i}{1-\lambda_{k+1}}\right)$$

证明，续

$$\leq \lambda_{k+1} f(x_{k+1}) + (1-\lambda_{k+1}) f\left(\frac{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i}{1-\lambda_{k+1}}\right)$$

$$= \lambda_{k+1} f(x_{k+1}) + (1-\lambda_{k+1}) f\left(\sum_{i=1}^{k} \mu_i x_i\right),$$

其中 $\mu_i = \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{k+1}} > 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$. 注意

$$\sum_{i=1}^{k} \mu_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{k+1}} = \frac{1-\lambda_{k+1}}{1-\lambda_{k+1}} = 1.$$

由于结论对 $n = k$ 成立，故 $f(\sum_{i=1}^{k} \mu_i x_i) \leq \sum_{i=1}^{k} \mu_i f(x_i)$. 因此

$$f\left(\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i\right) \leq \lambda_{k+1} f(x_{k+1}) + (1-\lambda_{k+1}) f\left(\sum_{i=1}^{k} \mu_i x_i\right)$$

$$\leq \lambda_{k+1} f(x_{k+1}) + (1-\lambda_{k+1}) \sum_{i=1}^{k} \mu_i f(x_i) \leq \lambda_{k+1} f(x_{k+1}) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(x_i)$$

$= \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i f(x_i)$，即结论对 $n = k+1$ 时成立. 定理得证. $\square$

凸性的充要条件

Theorem

定理: 函数 $f(x)$ 在 (a,b) 下凸

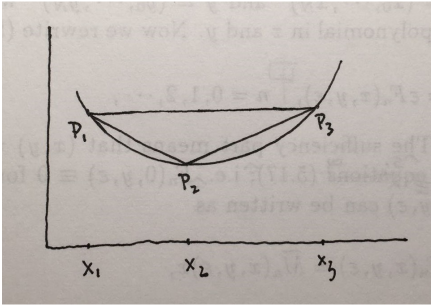
$\Longleftrightarrow$ 对任意 $x_1, x_2, x_3 \in (a,b)$, $x_1 < x_2 < x_3$,

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}, \qquad (*)$$

$\Longleftrightarrow$ 对任意 $x_1, x_2, x_3 \in (a,b)$, $x_1 < x_2 < x_3$,

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}. \qquad (**)$$

注: 条件(*)和(**)可以粗略地表述为, 割线斜率单调上升.



对于曲线上的任意三个点 P_1, P_2, P_3.

条件 (*) 的几何意义: $\overline{P_1P_2}$ 的斜率 $\leq$ $\overline{P_2P_3}$ 的斜率;

(**) 的几何意义: $\overline{P_1P_2}$ 的斜率 $\leq$ $\overline{P_1P_3}$ 的斜率 $\leq$ $\overline{P_2P_3}$ 的斜率.

先证条件 (*) $\Leftrightarrow$ (**). $\Leftarrow$ 显然成立. $\Rightarrow$: 回忆分数不等式: 若 $\frac{a}{b} \le \frac{c}{d}$, 其中 $b, d > 0$, 则 $\frac{a}{b} \le \frac{a+c}{b+d} \le \frac{c}{d}$. 因此当条件 (*) 成立时, 即

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2},$$

$$\text{于是} \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le \frac{f(x_2) - f(x_1) + f(x_3) - f(x_2)}{x_2 - x_1 + x_3 - x_2} \le \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

$$\text{即} \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \le \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

故条件 (**) 成立.

再证 $f(x)$ 下凸 $\Leftrightarrow$ 条件 (*). 条件 (*) 成立, 即

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

$$\Leftrightarrow \quad (x_3 - x_2)[f(x_2) - f(x_1)] \le (x_2 - x_1)[f(x_3) - f(x_2)]$$

证明，续

$$\Leftrightarrow \quad (x_3 - x_2)f(x_2) - (x_3 - x_2)f(x_1) \le (x_2 - x_1)f(x_3) - (x_2 - x_1)f(x_2)$$

$$\Leftrightarrow \quad (x_3 - x_2)f(x_2) + (x_2 - x_1)f(x_2) \le (x_2 - x_1)f(x_3) + (x_3 - x_2)f(x_1)$$

$$\Leftrightarrow \quad (x_3 - x_1)f(x_2) \le (x_3 - x_2)f(x_1) + (x_2 - x_1)f(x_3)$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x_2) \le \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}f(x_3).$$

注意 $x_2 \in (x_1, x_3)$ 是任意的．记 x_2 为 x，记

$$\lambda = \frac{x_3 - x}{x_3 - x_1}, \quad 1 - \lambda = 1 - \frac{x_3 - x}{x_3 - x_1} = \frac{x - x_1}{x_3 - x_1},$$

则有 $f(x) \le \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_3)$，$\forall x \in (x_1, x_3)$．这正是 $f(x)$ 在 (a, b) 下凸的等价定义．证毕． $\square$

习题一：课本第114页习题4.4题4(1)(3)(5)(7)(9)：求下列函数的单调区间，以及它们的极值.

(1) $y = \arctan x,\ x \in \mathbb{R};$

(3) $y = x^n e^{-x},\ x \geq 0$，n 为正整数；

(5) $y = \frac{2x^3+3x^2-x-4}{x^2-1},\ x \in \mathbb{R},\ x \neq \pm 1;$

(7) $y = \sin^3 x + \cos^3 x,\ x \in \mathbb{R};$

(9) $y = (x-1)x^{\frac{2}{3}},\ x \in \mathbb{R}.$

习题二：课本第114-115页习题4.4题5(1)(3)(5)(7)：证明下列不等式

(1) $e^{-x^2} \leq \frac{1}{1+x^2},\ \forall x > 0;$

(3) $\sin x + \cos x \geq 1 + x - x^2,\ \forall x \geq 0;$

(5) $\ln(1+x) > \frac{\arctan x}{1+x},\ \forall x > 0;$

(7) $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x,\ \forall x > 0;$

习题三：课本第115页习题4.4题6：求下列函数在其定义区间上的最值.

(1) $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1,\ x \in [-1, 2]$;

(2) $y = |x^2 - 3x + 2|,\ x \in [-10, 10]$;

(3) $y = \sqrt{x}\ln x,\ x > 0$.

习题四：课本第115页习题4.4题7：

(1) 证明对任意 $c \in \mathbb{R}$，方程 $x^3 - 3x + c = 0$ 在区间 $[0, 1]$ 上至多有一个实根；

(2) 考虑方程 $x^n + px + q = 0$，其中 p, q 为任意两个实数．证明当 n 为偶数时，方程最多有两个实根；当 n 为奇数时，方程最多有三个实根.

习题五：课本第115页习题4.4题8：证明 n 次勒让德 (Legendre) 多项式

$$P_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2 - 1)^n\right]$$

在区间 $(-1, 1)$ 内恰有 n 个不同的实零点.

作业，续二

习题六：课本第115页习题4.4题9：求内接于椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，边平行于坐标轴的矩形，其面积最大.