

习题课材料（五）

注 1: 本次习题课包含内容: 点线面、正交基、正交矩阵

注 2: 带 ♡ 号的习题有一定的难度、比较耗时, 请量力为之.

注 3: 本节考虑的矩阵均为实矩阵.

习题 1. 设 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^3$ 且不共线, 证明:

$$\alpha + \beta + \gamma = \mathbf{0}, \text{ 当且仅当 } \alpha \times \beta = \beta \times \gamma = \gamma \times \alpha.$$

习题 2. 设有两条直线:

$$L_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{n}, \quad L_2: \begin{cases} x = -2 - 4t \\ y = 2 + mt \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

1. 求 m, n 使得 $L_1 \parallel L_2$;
2. 当 $m = n = 1$ 时, 求 L_1, L_2 公垂线 L 的方程 (L 与 L_1, L_2 垂直且相交);
3. 当 $m = n = 1$ 时, 求 L_1, L_2 之间的最短距离;
4. 求 m, n 使 $L_1 \perp L_2$, 并问 m, n 是否唯一?
5. 求 m, n 使 L_1 与 L_2 共面, 并问 m, n 是否唯一?
6. 当 $m = -4, n = -1$ 时, 求 L_1 与 L_2 的夹角.

习题 3. 已知平面 $\pi: x - 2y - 2z + 4 = 0$, 直线 $L: \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{n}$

1. 求 n , 使 $L \perp \pi$;
2. 求 n , 使 $L \parallel \pi$;
3. 当 $n = -2$ 时, 求 L 与 π 之间的交点, 并求 L 在 π 上的投影线方程;
4. 当 $n = -2$ 时, 求直线 L_1 , 使 L_1 与 L 关于平面 π 对称;
5. 求原点关于平面 π 的对称点的坐标.

习题 4. 证明下列两条直线:

$$L_1: \frac{x-7}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{-2}, \quad L_2: x = 1 + 2t, y = -2 - 3t, z = 5 + 4t$$

共面, 并求它们所在平面的方程.

习题 5. 1. 求点 $M(2, -1, -1)$ 到平面 $\pi: 16x - 12y + 15z - 4 = 0$ 的距离;

2. 求平行平面 $\pi_1: 6x - 18y - 9z - 28 = 0, \pi_2: 4x - 12y - 6z - 7 = 0$ 的距离;

3. 求异面直线 $L_1: \begin{cases} 3x - 2y + z = 0 \\ x - 3y + 5 = 0 \end{cases}$, $L_2: \begin{cases} x - 3z + 2 = 0 \\ x + y + z + 1 = 0 \end{cases}$ 之间的距离.

习题 6. 平面 π 通过 $2x + y - 4 = 0$ 与 $y + 2z = 0$ 的交线, 并且垂直于平面 $3x + 2y + 3z - 6 = 0$, 求其方程.

习题 7. 设 π 是 \mathbb{R}^3 中由方程 $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ 所决定的平面. 求 $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}^T$ 在 π 上的正交投影向量.

习题 8. 如果 β 与 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 都正交, 证明: β 与 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的任一线性组合也正交.

习题 9. 求齐次线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 0 \end{cases}$$

解空间的一组标准正交基.

习题 10 (\heartsuit). 设 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 是线性映射, 证明: 存在向量 \mathbf{b} , 使得对任意 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 都有 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \cdot \mathbf{x}$.