题目：设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的秩为 r，证明其中任意选取 m 个向量构成向量组的秩 $\geq r+m-s$。

证明. 记原向量组为 $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}$，已知其秩 $r(A) = r$。

设从中任意选取的 m 个向量构成的向量组为 B。设剩余的 $s-m$ 个向量构成的向量组为 C。

显然，原向量组 A 是由 B 和 C 组合而成的。根据向量组秩的性质（即 $r(B \cup C) \leq r(B) + r(C)$），我们有：

$$r(A) \leq r(B) + r(C) \tag{1}$$

即：

$$r \leq r(B) + r(C) \tag{2}$$

对于向量组 C，它包含 $s-m$ 个向量。由于向量组的秩不可能大于向量组中向量的个数，因此有：

$$r(C) \leq s-m \tag{3}$$

由不等式 (2) 移项可得：

$$r(B) \geq r - r(C)$$

将不等式 (3) 代入上式（注意不等号方向变化），可得：

$$r(B) \geq r - (s-m)$$

整理得：

$$r(B) \geq r+m-s$$

□

命题：任意矩阵 A 经初等行变换化成的简化行阶梯形矩阵（Reduced Row Echelon Form, RREF）是唯一的。

证明. 设矩阵 A 为 $m \times n$ 矩阵，记其列向量为 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$。假设 A 可以通过初等行变换化为两个不同的简化行阶梯形矩阵 R 和 R'。我们将证明 $R = R'$。

1. 初等行变换保持列向量的线性关系不变

设 R 的列向量为 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$，$R'$ 的列向量为 $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$。

由于 $A \xrightarrow{\text{row ops}} R$ 且 $A \xrightarrow{\text{row ops}} R'$，根据初等行变换的性质，齐次线性方程组 $Ax = 0$ 与 $Rx = 0$ 及 $R'x = 0$ 同解。这意味着向量组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 的线性相关性与 $\beta_1, \ldots, \beta_n$ 以及 $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ 完全一致。即对于任意系数 k_i：

$$\sum_{i=1}^{n} k_i \alpha_i = 0 \iff \sum_{i=1}^{n} k_i \beta_i = 0 \iff \sum_{i=1}^{n} k_i \gamma_i = 0$$

2. 主元列（Pivot Columns）的位置是唯一的

考虑按列下标 $j = 1, 2, \ldots, n$ 的顺序选取“优先极大线性无关组”。对于矩阵 A，若 α_j 不能被前面的列向量 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}\}$ 线性表出，则称其为优先线性无关列。

由于列向量间的线性关系在行变换下保持不变：

$$\beta_j \text{ 是 } R \text{ 的主元列} \iff \alpha_j \text{ 线性独立于}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}\} \iff \gamma_j \text{ 是 } R' \text{ 的主元列}$$

因此，R 和 R' 的主元列所在的下标集合完全相同，记为 $J = \{j_1, j_2, \ldots, j_r\}$，其中 $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$。

3. 主元列的具体形式是唯一的

根据简化行阶梯形矩阵的定义，主元所在列必须是标准单位向量 $e_1, e_2, \ldots, e_r$（其中 e_k 是第 k 个分量为 1，其余为 0 的向量）。因此，对于所有 $k \in \{1, \ldots, r\}$，有：

$$\beta_{j_k} = e_k = \gamma_{j_k}$$

这说明 R 和 R' 在所有主元列上是完全相同的。

4. 非主元列的形式也是唯一的

对于任意非主元列（设下标为 $l \notin J$），它必然可以被其左边的"优先极大线性无关组"（即主元列）线性表出。设 l 处在第 k 个主元和第 $k+1$ 个主元之间（即 $j_k < l < j_{k+1}$），则该列仅依赖于前 k 个主元列。

由于列向量间的线性依赖关系（即线性组合的系数）在行变换下不变，设 $\alpha_l = \sum_{i=1}^{k} c_i \alpha_{j_i}$，则在 R 和 R' 中必须满足同样的系数关系：

$$\beta_l = \sum_{i=1}^{k} c_i \beta_{j_i} = \sum_{i=1}^{k} c_i e_i$$

$$\gamma_l = \sum_{i=1}^{k} c_i \gamma_{j_i} = \sum_{i=1}^{k} c_i e_i$$

显然 $\beta_l = \gamma_l$。这说明 R 和 R' 在非主元列上也是完全相同的。

结论

综上所述，对于任意 $j = 1, \ldots, n$，都有 $\beta_j = \gamma_j$。即 $R = R'$。故任意矩阵 A 的简化行阶梯形矩阵是唯一的。 $\square$