

习题课材料 (五)

注 1: 本次习题课包含内容：点线面、正交基、正交矩阵

注 2: 带 \heartsuit 号的习题有一定的难度、比较耗时，请量力为之.

注 3: 本节考虑的矩阵均为实矩阵.

习题 1. 设 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^3$ 且不共线，证明：

$$\alpha + \beta + \gamma = \mathbf{0}, \text{ 当且仅当 } \alpha \times \beta = \beta \times \gamma = \gamma \times \alpha.$$

习题 2. 设有两条直线：

$$L_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{n}, \quad L_2 : \begin{cases} x = -2 - 4t \\ y = 2 + mt \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

1. 求 m, n 使得 $L_1 \parallel L_2$;
2. 当 $m = n = 1$ 时，求 L_1, L_2 公垂线 L 的方程 (L 与 L_1, L_2 垂直且相交)；
3. 当 $m = n = 1$ 时，求 L_1, L_2 之间的最短距离；
4. 求 m, n 使 $L_1 \perp L_2$ ，并问 m, n 是否唯一？
5. 求 m, n 使 L_1 与 L_2 共面，并问 m, n 是否唯一？
6. 当 $m = -4, n = -1$ 时，求 L_1 与 L_2 的夹角.

习题 3. 已知平面 $\pi: x - 2y - 2z + 4 = 0$ ，直线 $L: \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{n}$

1. 求 n ，使 $L \perp \pi$ ；
2. 求 n ，使 $L \parallel \pi$ ；
3. 当 $n = -2$ 时，求 L 与 π 之间的交点，并求 L 在 π 上的投影线方程；
4. 当 $n = -2$ 时，求直线 L_1 ，使 L_1 与 L 关于平面 π 对称；
5. 求原点关于平面 π 的对称点的坐标.

习题 4. 证明下列两条直线：

$$L_1 : \frac{x-7}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{-2}, \quad L_2 : x = 1 + 2t, y = -2 - 3t, z = 5 + 4t$$

共面，并求它们所在平面的方程.

习题 5. 1. 求点 $M(2, -1, -1)$ 到平面 $\pi : 16x - 12y + 15z - 4 = 0$ 的距离；

2. 求平行平面 $\pi_1 : 6x - 18y - 9z - 28 = 0, \pi_2 : 4x - 12y - 6z - 7 = 0$ 的距离；

3. 求异面直线 $L_1 : \begin{cases} 3x - 2y + z = 0 \\ x - 3y + 5 = 0 \end{cases}, L_2 : \begin{cases} x - 3z + 2 = 0 \\ x + y + z + 1 = 0 \end{cases}$ 之间的距离.

习题 6. 平面 π 通过 $2x+y-4=0$ 与 $y+2z=0$ 的交线，并且垂直于平面 $3x+2y+3z-6=0$ ，求其方程.

习题 7. 设 π 是 \mathbb{R}^3 中由方程 $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ 所决定的平面. 求 $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}^\top$ 在 π 上的正交投影向量.

习题 8. 如果 β 与 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 都正交，证明： β 与 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的任一线性组合也正交.

习题 9. 求齐次线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 0 \end{cases}$$

解空间的一组标准正交基.

习题 10 (♡). 设 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 是线性映射，证明：存在向量 b ，使得对任意 $x \in \mathbb{R}^n$ 都有 $f(x) = b \cdot x$.