习题课材料（三）

注：本次习题课包含内容：矩阵综合、线性相关性等

注：带 ♡ 号的习题有一定的难度、比较耗时, 请量力为之.

本节考虑的矩阵均为实矩阵.

习题 1. 求下列矩阵方程的解：

1. $X\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

习题 2. 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，且 $A^2 - AB = I_3$，求矩阵 B.

习题 3.

1. 设 A 与任意 n 阶方阵均可交换 $\Leftrightarrow A$ 为 n 阶纯量阵.

2. 设分块对角阵 $A = \mathrm{diag}\left(a_1 I_{n_1}, a_2 I_{n_2}, \cdots, a_s I_{n_s}\right)$, 其中 $a_i \neq a_j (\forall 1 \le i \neq j \le s)$, $\sum\limits_{i=1}^{s} n_i = n$. 证明: 与 A 乘法可交换的矩阵必为分块对角矩阵 $B = \mathrm{diag}(B_1, B_2, \cdots, B_s)$, 其中 $B_i \in M_{n_i} (1 \le i \le s)$.

习题 4. 证明：

1. 设 n 维向量 $\boldsymbol{x}$ 的每个分量都是 1，则 n 阶方阵 A 的各行元素之和为 1 当且仅当 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$.

2. 若 n 阶方阵 A,B 的各行元素之和均为 1, 则 AB 的各行元素之和也均为 1.

3. 若 n 阶方阵 A,B 的各列元素之和均为 1, 则 AB 的各列元素之和也均为 1.

习题 5 (♡). 设 A 是 n 阶方阵，且 $A^3 = 2I$. 又 $B = A^2 - 2A + I$，证明：B 是可逆矩阵；请求出 B^{-1}.

习题 6. 求下列向量组的极大线性无关部分组：

$$\begin{bmatrix}2\\3\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\6\\2\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\2\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\4\\3\\2\end{bmatrix}.$$

习题 7. 设列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，

1. 当 $n=3$ 时，证明：$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 线性无关.
2. 当 $n=4$ 时，证明：$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$ 线性相关.
3. 证明：当 n 是偶数时，$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_n+\alpha_1$ 线性相关；当 n 是奇数时，$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_n+\alpha_1$ 线性无关
4. 向量组 $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\cdots,\alpha_n-\alpha_1$ 线性相关还是线性无关？请给出你的判断并给出证明.

习题 8. 设列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，$\alpha_{n+1}=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n$，其中 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 全都非零. 证明：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\alpha_{n+1}$ 中任意 n 个向量均线性无关.

习题 9 (♡). 设 $m\geq n, B\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. 证明:$B$ 的列向量线性无关,当且仅当存在矩阵 $A\in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ 使得 $AB=I_n$.

习题 10 (♡). 给定分块矩阵 $X=\begin{bmatrix}A & B\\0 & D\end{bmatrix}$，其中 A,D 都是方阵. 若 X 和 X^T 可交换，证明：$C=0$.

习题 11 (♡♡).

1. 设分块矩阵 $X=\begin{bmatrix}A & B\\C & D\end{bmatrix}$ 中，$A\in M_{m\times m}(\mathbb{R})$ 是可逆矩阵，$D\in M_{m\times m}(\mathbb{R})$. 证明：$X$ 可逆当且仅当 $D-CA^{-1}B$ 可逆. 在这个条件下，求 X^{-1}.
2. 设 $A\in M_{m\times n},B\in M_{n\times m}$，证明：$\det(I_m-AB)=\det(I_n-BA)$.
3. 设 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^n$，证明：$I_n-\alpha\beta^{\mathrm{T}}$ 可逆，当且仅当 $\beta^T\alpha\neq 1$.
4. 计算行列式

$$\begin{bmatrix}1+a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n\\ a_2b_1 & 1+a_2b_2 & \cdots & a_2b_n\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & 1+a_nb_n\end{bmatrix};\qquad \begin{vmatrix}1+a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n\\ a_2+b_1 & 1+a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & 1+a_n+b_n\end{vmatrix}$$