线性代数习题解答：四个基本子空间

2025 年 12 月 22 日

题目描述

练习 2.4.9 把国际象棋的棋盘以及棋子的初始位置分别抽象成如下矩阵 B 和 C：

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} r & n & b & q & k & b & n & r \\ p & p & p & p & p & p & p & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p & p & p & p & p & p & p & p \\ r & n & b & q & k & b & n & r \end{bmatrix}.$$

分别求其列空间 $\mathcal{C}(A)$、行空间 $R(A)$、零空间 $\mathcal{N}(A)$ 和左零空间 $\mathcal{N}(A^T)$ 的一组基，其中 r, n, b, q, k, p 是两两不等的非零实数。

解答

1. 矩阵 B 的四个子空间

分析： 观察矩阵 B，可以发现其行向量具有极强的规律性：

- 第 1, 3, 5, 7 行完全相同，记为 $\mathbf{u} = [1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0]$。
- 第 2, 4, 6, 8 行完全相同，记为 $\mathbf{v} = [0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1]$。

显然 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 线性无关。同理，其列向量也只有两种模式。因此，$\text{rank}(B) = 2$。

(1) 列空间 $\mathcal{C}(B)$ 的基

由于矩阵的第 1 列和第 2 列线性无关，且其余列均为这两列的重复，故列空间的一组基为：

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(2) 行空间 $R(B)$ 的基

取矩阵中两个线性无关的行向量（转置后）作为基：

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

注意：由于 B 是对称矩阵（$B = B^T$），其列空间与行空间在数值上是相同的。

(3) 零空间 $\mathcal{N}(B)$ 的基

解方程 $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$。由于 $\operatorname{rank}(B) = 2$，零空间的维数为 $8 - 2 = 6$。方程组等价于：

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_5 + x_7 = 0 \\ x_2 + x_4 + x_6 + x_8 = 0 \end{cases}$$

选取 $x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$ 为自由变量，得到一组基如下：

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(4) 左零空间 $\mathcal{N}(B^T)$ 的基

由于 B 是对称矩阵，$B^T = B$，因此左零空间与零空间相同。基即为上面 $\mathcal{N}(B)$ 的基。

2. 矩阵 C 的四个子空间

分析： 观察矩阵 C：

- 只有第 1, 2, 7, 8 行非零。
- 第 1 行与第 8 行相同；第 2 行与第 7 行相同。
- 中间 3-6 行为全零行。

由于题目已知参数两两不等且非零，第 1 行和第 2 行线性无关。因此 $\mathrm{rank}(C) = 2$。

(1) 行空间 $R(C)$ 的基

直接选取两个非零且不相关的行向量（转置后）作为基：

$$\left\{ \begin{pmatrix} r \\ n \\ b \\ q \\ k \\ b \\ n \\ r \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(2) 列空间 $\mathcal{C}(C)$ 的基

矩阵 C 的非零元决定了列向量模式。第 1 列与第 2 列线性无关（因 $r \neq n$）。故列空间的一组基为：

$$\left\{ \begin{pmatrix} r \\ p \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ p \\ r \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n \\ p \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ p \\ n \end{pmatrix} \right\}$$

(3) 左零空间 $\mathcal{N}(C^T)$ 的基

维数为 $8 - 2 = 6$。

- 零行对应单位向量：$\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5, \mathbf{e}_6$。
- 重复行对应差向量：$\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_8, \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_7$。

这一组共 6 个向量显然线性无关，即为一组基。

(4) 零空间 $\mathcal{N}(C)$ 的基

寻找 $\mathbf{x}$ 使得 $C\mathbf{x} = \mathbf{0}$。零空间维数为 6。我们选取 $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ 为主列，其余为自由列。

第一组：利用列的对称性（3 个向量）

- $\mathbf{c}_1 = \mathbf{c}_8 \implies \mathbf{x}_1 = [1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1]^T$
- $\mathbf{c}_2 = \mathbf{c}_7 \implies \mathbf{x}_2 = [0, 1, 0, 0, 0, 0, -1, 0]^T$
- $\mathbf{c}_3 = \mathbf{c}_6 \implies \mathbf{x}_3 = [0, 0, 1, 0, 0, -1, 0, 0]^T$

第二组：将中间的非主元列表示为 $\mathbf{c}_1$ 和 $\mathbf{c}_2$ 的线性组合（3 个向量）对于第 j 列 $\mathbf{c}_j$（其中 $j = 3, 4, 5$），设 $\mathbf{c}_j = \alpha \mathbf{c}_1 + \beta \mathbf{c}_2$。解得 $\alpha = \frac{\mathrm{val}_j - n}{r-n}, \beta = \frac{r - \mathrm{val}_j}{r-n}$。构造基向量 $\mathbf{x} = [-\alpha, -\beta, \dots, 1, \dots]^T$。针对 $j = 3(b), 4(q), 5(k)$，得到：

$$\mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} -\dfrac{b-n}{r-n}, & -\dfrac{r-b}{r-n}, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \end{bmatrix}^T$$
$$\mathbf{x}_5 = \begin{bmatrix} -\dfrac{q-n}{r-n}, & -\dfrac{r-q}{r-n}, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0 \end{bmatrix}^T$$
$$\mathbf{x}_6 = \begin{bmatrix} -\dfrac{k-n}{r-n}, & -\dfrac{r-k}{r-n}, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0 \end{bmatrix}^T$$

综上，$\mathcal{N}(C)$ 的一组基由 $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_6$ 组成。（注：$\mathbf{x}_3$ 和 $\mathbf{x}_4$ 虽然都涉及第三列，但引入了不同的自由变量位置，整体线性无关）。

题目描述

第一部分： 证明 $r(A) \geq r(BA)$，且当 B 列满秩时等号成立；证明 $r(A) \geq r(AB)$，且当 B 行满秩时等号成立。

第二部分： 进一步由此证明：当 B 列满秩时，$\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(BA)$；当 B 行满秩时，$\mathcal{C}(A) = \mathcal{C}(AB)$。

解答与证明

1. 证明秩的不等式及等号成立条件

(1) 证明 $r(A) \geq r(BA)$ 及 B 列满秩时的情形

证明. **1. 证明不等式 $r(A) \geq r(BA)$：**

根据矩阵乘法的定义，矩阵 BA 的每一行都是矩阵 A 的行的线性组合。即 $R(BA) \subseteq R(A)$。由于矩阵的秩等于其行空间的维数，故有：

$$r(BA) = \dim(R(BA)) \leq \dim(R(A)) = r(A)$$

2. 证明当 B 列满秩时，等号成立：

若矩阵 B 是列满秩的，则存在左逆矩阵 B_L^{-1}，使得 $B_L^{-1}B = I$。此时，我们可以将 A 写为 $A = B_L^{-1}(BA)$。根据刚才证明的性质（$r(XY) \leq r(Y)$），有：

$$r(A) = r(B_L^{-1}(BA)) \leq r(BA)$$

结合此前已证的 $r(BA) \leq r(A)$，得 $r(A) = r(BA)$。 □

(2) 证明 $r(A) \geq r(AB)$ 及 B 行满秩时的情形

证明. **1. 证明不等式 $r(A) \geq r(AB)$：**

矩阵 AB 的每一列都是矩阵 A 的列的线性组合，即 $\mathcal{C}(AB) \subseteq \mathcal{C}(A)$。故 $r(AB) = \dim(\mathcal{C}(AB)) \leq \dim(\mathcal{C}(A)) = r(A)$。

2. 证明当 B 行满秩时，等号成立：

若 B 行满秩，存在右逆 B_R^{-1} 使得 $BB_R^{-1} = I$。则 $A = (AB)B_R^{-1}$。同理有 $r(A) \leq r(AB)$。结合前式得证。 □

2. 证明子空间关系

(1) 证明：当 B 列满秩时，$\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(BA)$

证明. **1. 证明 $\mathcal{N}(A) \subseteq \mathcal{N}(BA)$：** 任取 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{N}(A)$，则 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$。两边左乘 B，得 $B(A\boldsymbol{x}) = \mathbf{0} \implies (BA)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$。所以 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{N}(BA)$。

2. 证明 $\mathcal{N}(BA) \subseteq \mathcal{N}(A)$： 任取 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{N}(BA)$，则 $B(A\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$。令 $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$，则 $B\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$。因为 B **列满秩**，其零空间仅包含零向量，故 $\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$，即 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$。所以 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{N}(A)$。

综上，$\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(BA)$。 □

(2) 证明：当 B 行满秩时，$\mathcal{C}(A) = \mathcal{C}(AB)$

证明. **1. 证明 $\mathcal{C}(AB) \subseteq \mathcal{C}(A)$：** 显然，$AB$ 的列是 A 的列的线性组合。

2. 证明 $\mathcal{C}(A) \subseteq \mathcal{C}(AB)$： 已知 B **行满秩**，存在右逆 B_R^{-1}。对于任意 $\boldsymbol{y} \in \mathcal{C}(A)$，存在 $\boldsymbol{x}$ 使得 $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$。利用右逆：$\boldsymbol{y} = A(BB_R^{-1})\boldsymbol{x} = (AB)(B_R^{-1}\boldsymbol{x})$。这表明 $\boldsymbol{y}$ 也是 AB 列向量的线性组合，即 $\boldsymbol{y} \in \mathcal{C}(AB)$。

综上，$\mathcal{C}(A) = \mathcal{C}(AB)$。 □