习题材料（七）答案

注 1：本次习题课包含内容：对角化、二次型、奇异值分解、线性空间等

注 2：带 ♡ 号的习题有一定的难度、比较耗时, 请量力为之.

注 3：本节考虑的矩阵均为实矩阵.

习题 1. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\a&b&c\\d&e&f\end{bmatrix}$，且 $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$ 是 A 的特征向量，求 a,b,c,d,e,f.

答案　根据题意，设 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是分属三个特征向量的特征值，那么

- 由 $\begin{bmatrix}1&1&1\\a&b&c\\d&e&f\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\lambda_1\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ 得：$\begin{bmatrix}3\\a+b+c\\d+e+f\end{bmatrix}=\lambda_1\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$，所以 $\lambda_1=3,a+b+c=d+e+f=3$.
- 由 $\begin{bmatrix}1&1&1\\a&b&c\\d&e&f\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}=\lambda_2\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$ 得：$\begin{bmatrix}0\\a-c\\d-f\end{bmatrix}=\lambda_2\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$，所以 $\lambda_2=0,a-c=d-f=0$.
- 由 $\begin{bmatrix}1&1&1\\a&b&c\\d&e&f\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}=\lambda_3\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$ 得：$\begin{bmatrix}0\\a-b\\d-e\end{bmatrix}=\lambda_3\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$，所以 $\lambda_3=0,a-b=d-e=0$.

由此可以解得 $a=b=c=d=e=f=1$.

习题 2. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&x&1\\x&1&y\\1&y&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}0&&\\&1&\\&&2\end{bmatrix}$. 当 x 和 y 满足什么条件时，A 与 B 相似？

答案　相似的必要条件是有相同的特征值，那么 A 与 B 相似，则 A 的特征值也是 $0,1,2$. 另一方面，如果 A 的特征值是 $0,1,2$，由于 A 有三个不同的特征值，所以它一定可以相似对角化，因此一定相似于 B. 所以本题转化为求 x,y 满足的条件，使得其特征值为 $0,1,2$.

A 的特征多项式为 $f(\lambda)=\det(\lambda I_3-A)$，则 $f(0)=f(1)=f(2)=0$.

- $f(0)=0$ 推出 $x^2+y^2-2xy=0$.
- $f(1)=0$ 推出 $2xy=0$.
- $f(2)=0$ 推出 $x^2+y^2+2xy=0$.

解得 $x=y=0$.

习题 3 (♡). 设 $B_1,B_2,\cdots,B_k$ 分别是 $n_1,n_2,\cdots,n_k$ 阶方阵，$B=\begin{bmatrix}B_1&&&\\&B_2&&\\&&\ddots&\\&&&B_k\end{bmatrix}$ 是分块对角矩阵. 证明：B 可对角化当且仅当 $B_1,B_2,\cdots,B_k$ 均可对角化.

答案 首先我们说明,问题可以约化到 $k=2$ 的情形. 假设 $k=2$ 的情形已知,令 $B_2'=\begin{bmatrix}B_2 & & \\ & \ddots & \\ & & B_k\end{bmatrix}$,则 $B=\begin{bmatrix}B_1 & \\ & B_2'\end{bmatrix}$,那么根据假设,$B$ 可对角化当且仅当 B_1 和 B_2' 都可对角化. 再对 B_2' 用相同的论证,依次类推即可.

以下我们证明 $k=2$ 的情形,即:假设 B_1,B_2 分别是 m,n 阶方阵,则 $B=\begin{bmatrix}B_1 & \\ & B_2\end{bmatrix}$ 可对角化,当且仅当 B_1,B_2 都可以对角化.

"$\Leftarrow$":假设 B_1,B_2 都可以对角化,那么存在可逆矩阵 P_1,P_2 以及对角矩阵 D_1,D_2 使得

$$B_1=P_1D_1P_1^{-1},\quad B_2=P_2D_2P_2^{-1}$$

令 $P=\begin{bmatrix}P_1 & \\ & P_2\end{bmatrix},D=\begin{bmatrix}D_1 & \\ & D_2\end{bmatrix}$,则

$$B=PDP^{-1}$$

即 B 可以相似对角化.

"$\Rightarrow$":假设 B 可以相似对角化,那么存在可逆矩阵 P 和对角矩阵 D,使得 $BP=PD$. 设

$$P=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \cdots & \alpha_m & \alpha_{m+1} & \cdots & \alpha_{m+n}\\ \beta_1 & \cdots & \beta_m & \beta_{m+1} & \cdots & \beta_{m+n}\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{m+n}\end{bmatrix}$$

则由 $BP=PD$ 知:

$$\begin{bmatrix}B_1\alpha_1 & \cdots & B_1\alpha_m & B_1\alpha_{m+1} & \cdots & B_1\alpha_{m+n}\\ B_2\beta_1 & \cdots & B_2\beta_m & B_2\beta_{m+1} & \cdots & B_2\beta_{m+n}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1\alpha_1 & \cdots & \lambda_m\alpha_m & \lambda_{m+1}\alpha_{m+1} & \cdots & \lambda_{m+n}\alpha_{m+n}\\ \lambda_1\beta_1 & \cdots & \lambda_m\beta_m & \lambda_{m+1}\beta_{m+1} & \cdots & \lambda_{m+n}\beta_{m+n}\end{bmatrix}$$

这说明:$\alpha_1,\cdots,\alpha_{m+n}$ 都是 B_1 的特征向量. 因为 P 可逆,所以它的行向量线性无关,特别的,它的前 m 行线性无关,因此 $\begin{bmatrix}\alpha_1 & \cdots & \alpha_{m+n}\end{bmatrix}$ 的行秩为 m,从而其列秩也是 m,于是可以从 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{m+n}$ 中找到 m 个线性无关的向量. 总而言之,我们给 B_1 找出了 m 个线性无关的特征向量,所以 B_1 可以相似对角化. 同理,可以从 $\beta_1,\cdots,\beta_{m+n}$ 中找出 n 个线性无关的向量,它们都是 B_2 的特征向量,从而 B_2 也可以相似对角化.

习题 4 ($\heartsuit$). 设 A,B 都是可对角化的 n 阶方阵,证明:$AB=BA$ 当且仅当它们有 n 个公共的线性无关的特征向量.

答案 "$\Leftarrow$":设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是 A,B 的 n 个公共的线性无关的特征向量,那么存在对角矩阵 C,D,使得

$$A=PCP^{-1},\quad B=PDP^{-1}$$

其中,$P=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \cdots & \alpha_n\end{bmatrix}$. 由于对角矩阵交换,即 $CD=DC$,所以 $AB=PCDP^{-1}=PDCP^{-1}=BA$.

"$\Rightarrow$":设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ 是 A 的所有的互不相等的特征值,其重数分别为 $n_1,\cdots,n_r$,那么存在可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1I_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_rI_{n_r}\end{bmatrix}$. 由 $AB=BA$ 知

$$(P^{-1}AP)(P^{-1}BP)=(P^{-1}BP)(P^{-1}AP).$$

因为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ 互不相等,将 $P^{-1}BP$ 分块,利用该等式知 $P^{-1}BP$ 实际上是分块对角矩阵 $\begin{bmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_r \end{bmatrix}$,其中 B_i 是 n_i 阶方阵. 又因为 B 可对角化，那么 $P^{-1}BP$ 也可对角化，根据上一题，可得每一个 B_i 都可以对角化,所以存在 n_i 阶可逆矩阵 Q_i 和 n_i 阶对角矩阵,使得 $Q_i^{-1}B_iQ_i = D_i$. 令 $Q = \begin{bmatrix} Q_1 & & \\ & \ddots & \\ & & Q_r \end{bmatrix}$,于是

$$(PQ)^{-1}B(PQ) = \begin{bmatrix} Q_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & Q_r^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 & & \\ & \ddots & \\ & & Q_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 & & \\ & \ddots & \\ & & D_r \end{bmatrix}$$

且

$$(PQ)^{-1}A(PQ) = \begin{bmatrix} Q_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & Q_r^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r I_{n_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 & & \\ & \ddots & \\ & & Q_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r I_{n_r} \end{bmatrix}$$

这说明可逆矩阵 PQ 的列向量是 A, B 的 n 个公共的线性无关的特征向量.

习题 5. 判断正误，正确则简述其理由，错误请举出反例.

1. 对称矩阵可以相似对角化。
2. 设 A 为实对称方阵，则 A 分别相抵、相似、相合于同一个对角阵.
3. 只有特殊的二次型才可以通过配方法化成标准形.
4. 设实二次型经过初等变换法化成标准形，则标准形中的系数就是原二次型的矩阵的特征值.
5. 可逆线性替换不改变二次型的秩.
6. 可逆线性替换可能改变实二次型的正惯性指数和负惯性指数.
7. 两个实对称矩阵相似当且仅当它们相合.
8. 实对称矩阵 A 负定当且仅当 A 的顺序主子式都小于零.
9. 设 A 为 n 阶可逆矩阵，则 A 可以相似对角化当且仅当 A^{-1} 可以相似对角化.
10. 若 $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$，则 P 的列向量都是 A 的特征向量.
11. 若 n 阶方阵 A 与 B 有共同的特征值及都有 n 个线性无关的特征向量，则

    A. A 和 B 相似　　B. $A = B$

    C. $|\lambda I_n - A| = |\lambda I_n - B|$　　D. $|A - B| = 0$.

12. 设 A, B 为 n 阶实对称矩阵，则 A, B 相似当且仅当 A, B 有相同的特征多项式.

答案

1. 实对称矩阵一定可以相似对角化，复对称矩阵未必，反例如 $\begin{bmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & -1 \end{bmatrix}$
2. 这是正确的，因为实对称矩阵一定可以正交相似对角化，即存在正交矩阵 Q 和对角矩阵 D 使得 $A = QDQ^{-1} = QDQ^{\mathrm{T}}$，因此 A 和 D 同时相抵、相似、相合.
3. 错误，任何二次型都可以通过配方法化成标准形.
4. 错误. 标准形中的系数构成的对角矩阵和二次行的矩阵相合，但未必相似.
5. 正确.
6. 错误，正、负惯性指数在相合之下不变.
7. 错误，反例如：$\begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 2 & \\ & 2 \end{bmatrix}$ 相合，但是不相似. 实对称矩阵相似则一定相合.
8. 错误，反例如：$A = \begin{bmatrix} -1 & \\ & -1 \end{bmatrix}$，它是负定的，但是它的二阶顺序主子式. 即行列式，大于零.
9. 正确. 如果 $A = PDP^{-1}$，其中 P 可逆，D 对角，则 $A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$，其中 D^{-1} 也是对角矩阵，因此 A^{-1} 可以相似对角化. 反之亦然.
10. 正确，因为由 $AP = P\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ 可知，$A\boldsymbol{v}_i = \lambda_i \boldsymbol{v}_i$，其中 $\boldsymbol{v}_i$ 是 P 的第 i 个列向量.
11. A. 正确，因为此时 A 和 B 相似于同一个对角矩阵.

    B. 错误，反例如：$A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, A\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$，但是 $A\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，但是 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

    C. 正确，因为 A, B 相似，所以有相同的特征多项式.

    D. 错误，反例同上：$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$，此时 $|A - B| = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = -1$.
12. 正确，因为实对称矩阵都可以正交相似对角化，如果 A, B 有相同的特征多项式意味着 A, B 有相同的特征值（包括每一个特征值的重数也相等）. 因此 A, B 都相似于同一个对角矩阵，从而 A, B 相似. 反之，如果 A, B 相似，显然它们有相同的特征多项式.

习题 6. *1.* 求实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_3$ 的规范型，其正惯性指数为多少？写出线性替换矩阵.

2. 设三元二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + ax_3^2 - x_2x_3$ 的秩为 2，

(a) 求参数 a

(b) 求正交矩阵 Q，作正交替换 $\boldsymbol{x} = Q\boldsymbol{y}$，化二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 为标准形.

答案

1. 由配方法得 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_3)^2+2x_2^2-2x_3^2$，令

$$\begin{cases} y_1=x_1-x_3 \\ y_2=\sqrt{2}x_2 \\ y_3=\sqrt{2}x_3 \end{cases} \quad \text{或者} \quad \begin{cases} x_1=y_1+\frac{1}{\sqrt{2}}y_3 \\ x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}y_2 \\ x_3=\frac{1}{\sqrt{2}}y_3 \end{cases},$$

即得 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范型：

$$f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2+y_2^2-y_3^2$$

因此替换矩阵为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ 正惯性指数为 1，负惯性指数为 2.

2. 把二次型对应的矩阵写出来：

$$f(x_1,x_2,x_3)=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

由于二次型秩为 2，则 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & a \end{bmatrix}$ 的秩为 2，从而 $\det(A)=0$，解得 $a=\frac{1}{2}$. 验证可知 $a=\frac{1}{2}$ 时，$\operatorname{rank}(A)=2$.

作正交替换 $\boldsymbol{x}=Q\boldsymbol{y}$，化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 为标准形，意即求正交矩阵 Q 使得 $Q^{\mathrm{T}}AQ$ 是对角矩阵，那么就需要找 A 的三个两正交的特征向量. 直接观察其实就可以知道 A 的特征值是 $0,1$（其中 1 是二重特征值）. 我们还是按照规定步骤求解：

$$f_A(\lambda)=\det(\lambda I_3-A)=(\lambda-1)((\lambda-1/2)^2-(1/2)^2)=\lambda(\lambda-1)^2,$$

解 $f_A(\lambda)=0$ 即可. $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ 是属于特征值 1 的两个线性无关的特征向量，$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 是属于特征值 0 的一个特征向量，直接验证这三个特征向量是两两正交的，因此直接将它们单位化即可，所以

$$Q=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

即有

$$Q^{\mathrm{T}}AQ=\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

习题 7. 指出 $x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3-4x_2x_3=1$ 表示的二次曲面.

答案 使用配方法：

$$\begin{aligned} x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3-4x_2x_3 &= x_1^2+4x_1(x_2+x_3)+4(x_2+x_3)^2-3x_2^2-3x_3^2-12x_2x_3 \\ &= (x_1+2(x_2+x_3))^2-3(x_2+2x_3)^2+9x_3^3 \end{aligned}$$

所以二次型的正惯性指数是 2，负惯性指数是 1，那么如果作正交替换，该方程形如

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 - \lambda_3 y_3^2 = 1,$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 均大于 0，所以该曲面是单叶双曲面.

习题 8. *设 A 为 n 阶正定矩阵，B 是 $n \times m$ 实矩阵.*

1. 若 A 正定，证明：$B^{\mathrm{T}}AB$ 的秩等于 B 的秩.

2. 证明：$B^{\mathrm{T}}AB$ 正定的充分必要条件时 $\operatorname{rank}(B) = m$.

答案

1. 根据维数公式，$\operatorname{rank}(B^{\mathrm{T}}AB) = m - \dim N(B^{\mathrm{T}}AB), \operatorname{rank}(B) = m - \dim(N(B))$，因此只需要证明 $N(B^{\mathrm{T}}AB) = N(B)$.

   对任意 $\boldsymbol{x} \in N(B)$，都有 $(B^{\mathrm{T}}AB)(\boldsymbol{x}) = (B^{\mathrm{T}}A)(B\boldsymbol{x}) = 0$，所以 $\boldsymbol{x} \in N(B^{\mathrm{T}}AB)$. 这就证明了 $N(B) \subseteq N(B^{\mathrm{T}}AB)$.

   对任意 $\boldsymbol{x} \in N(B^{\mathrm{T}}AB)$，则 $B^{\mathrm{T}}AB\boldsymbol{x} = 0$，于是

   $$(B\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}A(B\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}AB\boldsymbol{x} = 0.$$

   A 正定，所以 $B\boldsymbol{x} = 0$，也就是说 $\boldsymbol{x} \in N(B)$，这就证明了 $N(B^{\mathrm{T}}AB) \subseteq N(B)$.

   两者结合，即得 $N(B) = N(B^{\mathrm{T}}AB)$.

2. 如果 $\operatorname{rank}(B) = m$，那么对任意 $\boldsymbol{x} \neq 0$，都有 $B\boldsymbol{x} \neq 0$. 因为 A 正定，所以 $(B\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}A(B\boldsymbol{x}) > 0$. 也就是说，对任意 $\boldsymbol{x} \neq 0$ 都有

   $$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}}AB)\boldsymbol{x} = (B\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}A(B\boldsymbol{x}) > 0$$

   所以 $B^{\mathrm{T}}AB$ 正定.

   如果 $\operatorname{rank}(B) < m$，那么存在 $\boldsymbol{x}_0 \neq 0$ 使得 $B\boldsymbol{x}_0 = 0$，此时 $\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}}AB)\boldsymbol{x}_0 = 0$，故 $B^{\mathrm{T}}AB$ 不正定.

习题 9 (♡). *设 A 是 n 阶非零实对称矩阵，其特征值是 $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$.*

1. 证明：对任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$，均有

$$\lambda_1 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x} \leq \lambda_n \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}.$$

2. 证明：存在一个正常数 c，使得对任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$，都有 $|\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}| \leq c\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$，且存在非零向量 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ 使得 $|\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}_0| = c\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_0$.

3. 证明：$\lambda_1 \leq a_{11} \leq \lambda_n$.

答案 由于实对称矩阵一定可以正交相似对角化，那么存在正交矩阵 Q 使得

$$A = Q^{-1}\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} Q = Q^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} Q$$

1. 对任意 $\boldsymbol{x}$，令 $\boldsymbol{y} = Q\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$，那么 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ 且

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} Q\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \boldsymbol{y} = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

因此

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x} = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \geq \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_1 y_n^2 = \lambda_1 \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{y} = \lambda_1 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$

并且同时

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x} = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \leq \lambda_n y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 = \lambda_n \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{y} = \lambda_n \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$

2. 若 $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$，那么 A 是零矩阵，因此 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 不全为零. 令 $c = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_n|\}$，根据上一小题，就证明了不等式

$$|\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}| \leq c\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$

如果 $c = |\lambda_1|$，则取 $\boldsymbol{x}_0$ 是属于特征值 λ_1 的特征向量，如果 $c = |\lambda_n|$，则取 $\boldsymbol{x}_0$ 是属于特征值 λ_1 的特征向量，此时就有 $|\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}_0| = c\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_0$.

3. 取 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x} = a_{11}$，根据第 1 小题即得

$$\lambda_1 \leq a_{11} \leq \lambda_n.$$

习题 10. 求矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 的奇异值分解.

答案 令 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，那么 $AA^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$,

$$\det(\lambda I_2 - AA^{\mathrm{T}}) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 \\ 1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$$

所以 AA^{T} 的特征值为 $3, 1$，那么 A 的奇异值就是 $\sigma_1 = \sqrt{3}, \sigma_2 = 1$.

- AA^{T} 的属于特征值 $\lambda_1 = 3$ 的单位特征向量是 $\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$
- AA^{T} 的属于特征值 $\lambda_1 = 1$ 的单位特征向量是 $\boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

$A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$，将其单位化得：

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

再求与 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ 正交的单位向量（或者求 A 的零空间的单位正交基）：$\boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$ 最后，令

$$U = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

则有 $A = U \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} V^{\mathrm{T}}$

习题 11 ($\heartsuit$)**.** 对 $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}), \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$，定义：

- $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}A)}$，其中 $\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}A)$ 为半正定矩阵 $A^{\mathrm{T}}A$ 的最大特征值.
- $\|A\|_F = \sqrt{\operatorname{trace}(A^{\mathrm{T}}A)}$.
- $\|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}$

设 $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}), B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$ 以及 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$，证明：

1. $\|A\|_2 \le \|A\|_F$

2. $\|A\boldsymbol{x}\|_2 \le \|A\|_2 \|\boldsymbol{x}\|_2$

3. $\|AB\|_F \le \|A\|_2 \|B\|_F$.

答案 设 $A = U\Sigma V^{\mathrm{T}}$ 是 A 的奇异值分解，其中：U, V 是正交矩阵，Σ 是准对角矩阵，其非零元 $\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \cdots \ge \sigma_r > 0$ 是 A 的奇异值.

1. 根据上面的记号

$$A^{\mathrm{T}}A = V(\Sigma^{\mathrm{T}}\Sigma)V^{\mathrm{T}}$$

$\Sigma^{\mathrm{T}}\Sigma$ 是对角矩阵，对角线上的非零元为 $\sigma_1^2 \ge \sigma_2^2 \ge \cdots \ge \sigma_r^2 > 0$，因此

$$\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}A) = \lambda_{\max}(V(\Sigma^{\mathrm{T}}\Sigma)V^{\mathrm{T}}) = \sigma_1^2.$$

而

$$\begin{aligned} \operatorname{trace}(A^{\mathrm{T}}A) &= \operatorname{trace}(V(\Sigma^{\mathrm{T}}\Sigma)V^{\mathrm{T}}) \\ &= \operatorname{trace}((\Sigma^{\mathrm{T}}\Sigma)V^{\mathrm{T}}V) \\ &= \operatorname{trace}(\Sigma^{\mathrm{T}}\Sigma) \\ &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_r^2 \\ &\ge \lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}A) \end{aligned}$$

2. 根据上面的记号，

$$\|A\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{(A\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}} = \sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}V\Sigma^{\mathrm{T}}\Sigma V^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}$$

令 $\boldsymbol{y}=V^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix}$，因为 V 是正交矩阵，那么 $\|\boldsymbol{y}\|_2=\|\boldsymbol{x}\|_2=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2$，且

$$\begin{aligned}\|A\boldsymbol{x}\|_2&=\sqrt{\sigma_1^2y_1^2+\sigma_2^2y_2^2+\cdots\sigma_r^2y_r^2}\\&\le\sqrt{\sigma_1^2y_1^2+\sigma_1^2y_2^2+\cdots\sigma_1^2y_r^2+\sigma_1^2y_{r+1}^2+\cdots+\sigma_1y_n^2}\\&=\sigma_1\|\boldsymbol{y}\|_2=\|A\|_2\|\boldsymbol{x}\|_2\end{aligned}$$

3. 根据上面的记号，

$$\|AB\|_F=\sqrt{\mathrm{trace}(B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}AB)}=\sqrt{\mathrm{trace}(B^{\mathrm{T}}V\Sigma^{\mathrm{T}}U^{\mathrm{T}}U\Sigma V^{\mathrm{T}}B)}=\sqrt{\mathrm{trace}(\Sigma^T\Sigma(V^{\mathrm{T}}BB^{\mathrm{T}}V))}$$

注意到 $\Sigma^{\mathrm{T}}\Sigma=\mathrm{diag}(\sigma_1^2,\cdots,\sigma_r^2,0,\cdots,0)$，那么对任意半正定矩阵 $X=\begin{bmatrix}x_{ij}\end{bmatrix}$，因为 $x_{ii}=\mathrm{e}_i^{\mathrm{T}}X\mathrm{e}_i\ge 0$，

$$\mathrm{trace}(\Sigma^{\mathrm{T}}\Sigma X)=\sigma_1^2x_{11}+\cdots+\sigma_r^2x_{rr}\le\sigma_1^2(x_{11}+\cdots+x_{rr}+\cdots+x_{nn})=\sigma_1^2\mathrm{trace}(X)$$

所以

$$\|AB\|_F\le\sqrt{\sigma_1^2\mathrm{trace}(V^{\mathrm{T}}BB^{\mathrm{T}}V)}=\sigma_1\sqrt{\mathrm{trace}(BB^{\mathrm{T}}VV^{\mathrm{T}})}=\|A\|_2\|B\|_F.$$

习题 12. 判断正误，正确则简要说明其理由，错误则给出反例.

1. 所有满足 $A^2=A$ 的二阶实方阵的全体是 $M_2(\mathbb{R})$ 的子空间.
2. $\mathbb{R}^3$ 中所有与向量 $\begin{bmatrix}1&1&1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ 平行的向量的全体，构成 $\mathbb{R}^3$ 的一个线性子空间.
3. 全体复数构成的集合 $\mathbb{C}$ 是实数域上的 2 维线性空间，$1,\mathrm{i}$ 是 $\mathbb{C}$ 的一组基，$1,\mathrm{i}$ 到 $\mathrm{i},1$ 的过度矩阵是 $\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$

答案

1. 错误，该集合数乘不封闭，例如单位阵 I 满足 $I^2=I$，但是单位阵 2 倍 $2I$ 不满足.
2. 正确，该集合即 $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ 张成的子空间.
3. 正确.

习题 13. 设 A 是 n 阶方阵，$\mathrm{Com}(A)$ 是与 A 乘法可交换的全体 n 阶方阵集合.

1. 证明 $\mathrm{Com}(A)$ 是 M_n 的一个线性子空间.
2. 当 $A=I$ 时，求 $C(A)$ 及它的维数和基.
3. 当 $A=\mathrm{diag}(1,2,\cdots,n)$ 时，求 $\mathrm{Com}(A)$ 及它的维数和基.
4. 当 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&2\end{bmatrix}$ 时，求 $\mathrm{Com}(A)$ 及它的维数和基.

答案

1. 只需要证明该集合对线性组合封闭. 设 $X,Y\in\mathrm{Com}(A), x,y\in\mathbb{R}$，则 $XA+AX, YA=AY$，那么

$$(xX+yY)A=xXA+yYA=A(xX)+A(yY)=A(xX+yY),$$

因此 $xX+yY\in\mathrm{Com}(A)$.

2. $A=I$ 时，任意 n 阶方阵都和 A 乘法可交换，所以 $\mathrm{Com}(A)=M_n$，可以取 $\{E_{ij}:1\le i,j\le n\}$ 作为一组基，其中 E_{ij} 是第 (i,j) 位置为 1，其它位置为零的矩阵. $\mathrm{Com}(A)$ 的维数为 n^2.

3. 当 $A=\mathrm{diag}(1,2,\cdots,n)$ 时，它是对角元两两不等的对角矩阵，只有对角矩阵和它乘法可交换，因此 $\mathrm{Com}(A)$ 是全体对角矩阵，可以取 $\{E_{ii}:1\le i\le n\}$ 作为一组基，其中 E_{ii} 是第 (i,i) 位置为 1，其它位置为零的矩阵. $\mathrm{Com}(A)$ 的维数为 n.

4. 设 $B=\begin{bmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_3\\z_1&z_2&z_3\end{bmatrix}\in\mathrm{Com}(A)$，那么由 $AB=BA$ 得

$$\begin{bmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_3\\y_1+2z_1&y_2+2z_2&y_3+2z_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1&x_2+x_3&2x_3\\y_1&y_2+y_3&2y_3\\z_1&z_2+z_3&2z_3\end{bmatrix}$$

比较每一个分量，得到关于这 9 个分量的线性方程组

$$\begin{cases}x_1=x_1\\x_2=x_2+x_3\\x_3=2x_3\\y_1=y_1\\y_2=y_2+y_3\\y_3=2y_3\\y_1+2z_1=z_1\\y_2+2z_2=z_2+z_3\\y_3+2z_3=2z_3\end{cases}$$

去掉平凡的方程，可得

$$x_3=0,\quad y_3=0,\quad y_1+z_1=0,\quad y_2+z_2=z_3$$

因此该方程组系数矩阵的秩是 4，解空间的维数是 5，因此 $\dim\mathrm{Com}(A)=5$.

要求它的一组基，我们也只需要逐个地令其中一个自由变元为 1、其它自由变元为 0，求出 x,y,z，再写出每一个解对应的矩阵即可.

本题比较简单，我们可以直接求：

$$\begin{aligned}B&=\begin{bmatrix}x_1&x_2&0\\y_1&y_2&0\\-y_1&z_2&y_2+z_2\end{bmatrix}\\&=x_1E_{11}+x_2E_{12}+y_1(E_{21}-E_{31})+y_2(E_{22}+E_{33})+z_2(E_{32}+E_{33})\end{aligned}$$

那么 $E_{11},E_{12},(E_{21}-E_{31}),(E_{22}+E_{33}),(E_{32}+E_{33})$ 是 $\mathrm{Com}(A)$ 的一组基.