

## 习题课材料（二）

注：本次习题课包含内容：矩阵运算、逆矩阵、分块矩阵等

注：带 ♡ 号的习题有一定的难度、比较耗时，请量力为之。

本节考虑的矩阵均为实矩阵。

习题 1. 下列命题是否正确？

1. 若  $A, B$  都是  $n$  阶方阵，则  $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ .

2. 若矩阵  $A, B, C$  满足  $A \neq 0, AB = AC$ ，则  $B = C$ .

3. 若矩阵  $A$  满足  $A^2 = I$ ，则  $A = \pm I$ .

4. 若  $n$  阶方阵  $A$  的行列式  $|A| = 0$ ，则  $A = 0$ .

5. 若可逆矩阵  $A$  经过初等行变换可以化为方阵  $B$ ，则  $A^{-1} = B^{-1}$ .

6. 若  $n$  阶方阵  $A, B, C$  满足  $ABC = I$ ，则

$$BCA = I, \quad A^{-1}C^{-1}B^{-1} = I, \quad C^T B^T A^T = I.$$

7. 若  $A$  为  $n$  阶方阵， $k$  为任意常数，则  $|kA| = k|A|$ .

8. 若  $A$  可逆，且  $|A+AB| = 0$ ，则  $|B+I| = 0$ .

9. 若矩阵  $A$  满足  $A^2 = A$ ， $|A-I| \neq 0$ ，则  $A = 0$ .

10. 对方阵进行初等行变换，不改变方阵的行列式。

习题 2. 设  $A$  是  $m \times n$  矩阵， $B$  是  $n \times m$  矩阵. 证明： $I_m - AB$  可逆当且仅当  $I_n - BA$  可逆.

习题 3. 已知  $n$  阶方阵  $A$  满足方程： $A^2 + 3A - 4I = 0$ ，其中  $I$  是单位矩阵.

1. 求  $(A+3I)^{-1}$ ;

2. 求  $(A+5I)^{-1}$ ;

3. 问当  $m$  满足什么条件时,  $(A + ml)$  必可逆.

习题 4. 设  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ , 求与  $A$  可交换的矩阵.

习题 5. 设  $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$ ,  $k$  是正整数, 求  $A^k$ .

习题 6 (♡). 证明, 如果  $n$  阶方阵  $A$  对任意  $n$  维列向量  $x$ , 都存在依赖于  $x$  的常数  $c(x)$ , 满足  $Ax = c(x)x$ , 则存在常数  $c$ , 使得  $A = cI_n$ .

习题 7 (♡). 1.  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ , 如果对任意的  $x \in \mathbb{R}^n$ , 都有  $Ax = 0$ , 证明:  $A = O$ .

2. 如果对任意的  $b \in \mathbb{R}^m$ , 线性方程组  $Ax = b$  和  $Cx = b$  都有相同的解集, 证明  $A = C$ .

习题 8. 已知列向量  $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ , 行向量  $\beta = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

1. 试计算  $A = \alpha\beta$  以及  $B = \beta\alpha$ ;

2. 求  $A^2, A^3$ , 从中你能归纳出什么结论? 能否求出  $A^{2025}$ ?

习题 9 (矩阵的迹). 方阵  $A$  的对角线元素的和称为它的迹, 记作  $\text{trace}(A)$ . 验证下列性质.

1. 对任意同阶方阵  $A, B$ ,  $\text{trace}(A + B) = \text{trace}(A) + \text{trace}(B)$ .

2. 对任意方阵  $A$  与实数  $k$ ,  $\text{trace}(kA) = k\text{trace}(A)$ .

3. 对  $m$  阶单位阵  $I_m$ ,  $\text{trace}(I_m) = m$ .

4. 对任意方阵  $A$ ,  $\text{trace}(A) = \text{trace}(A^T)$ .

5. 设  $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$ , 则  $\text{trace}(A^T B) = \sum_{i=1}^4 a_i b_i$ . 如果  $A, B$  是  $m$  阶方阵呢?

6. 设  $A$  是实对称矩阵, 如果  $\text{trace}(A^2) = 0$ , 则  $A = O$ .

7. 设  $v, w$  是  $m$  维向量, 则  $\text{trace}(v^T w) = \text{trace}(w v^T)$ .

8. 设  $A, B$  分别是  $m \times n, n \times m$  矩阵, 则  $\text{trace}(AB) = \text{trace}(BA)$ .

9. 设  $A, B$  是任意  $m$  阶方阵, 则  $AB - BA \neq I_m$ .

习题 10 (♡). 1. 设  $A$  为  $n$  阶方阵, 求证:  $A+A^T, AA^T, A^TA$  都是对称矩阵, 而  $A-A^T$  是反对称矩阵.

2. 求证: 任意方阵  $A$  都可唯一地表为  $A=B+C$ , 其中  $B$  是对称矩阵,  $C$  是反对称矩阵.

3. 求证:  $n$  阶方阵  $A$  是反对称矩阵当且仅当对任意的  $n$  维列向量  $x$ , 都有  $x^T A x = 0$ .

4. 求证: 设  $A, B$  是  $n$  阶对称矩阵, 则  $A=B$  当且仅当对任意  $n$  维列向量  $x$ , 都有  $x^T A x = x^T B x$ .

5. 给定  $n$  阶实反对称矩阵  $A$ , 求证  $I_n - A$  可逆.

习题 11 (♡). 1. 设  $A$  为  $n$  阶方阵, 若对任意  $1 \leq i \leq n$ , 都有

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|,$$

则称  $A$  是对角占优矩阵. 证明: 对角占优矩阵都是可逆矩阵.

2. 令  $X_\varepsilon = \begin{bmatrix} A & \varepsilon B_1 \\ B_2 & C \end{bmatrix}$ , 其中  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ,  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ ,  $C$  为  $n$  阶对角占优方阵,  $B_1$  为任意给定的  $3 \times n$  矩阵,  $B_2$  为任意给定的  $n \times 3$  矩阵. 证明:

(a)  $A$  可逆.

(b) 存在常数  $\delta > 0$  (依赖于  $C, B_1, B_2$ ), 使得对任意满足条件  $|\varepsilon| \leq \delta$  的  $\varepsilon$ ,  $X_\varepsilon$  均可逆.