第二周习题参考解答 杨利军 Sept 22-26, 2025

第一次作业解答

习题一: 课本第7页习题1.2, 1(1)(3)(5):

判断下列各命题中, 哪些与命题 $\lim_{n\to+\infty} a_n = A$ 等价. 如果等价, 请证明; 如果不等价, 请举反例.

(1) 对无穷多个正数 ε, 存在正整数 N, 使得对任意 $n \geq N$, 成立 $|a_n - A| < \varepsilon$;

(3) 对任意 $\varepsilon \in (0,1)$, 存在正整数 N, 使得对任意 $n \geq N$, 成立 $|a_n - A| < \varepsilon$;

(5) 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得对任意 $n \geq N$, 成立 $|a_n - A| < \varepsilon^{\frac{2}{3}}$;

解 (1): 命题 (1) 与命题 $\lim_{n\to+\infty} a_n = A$ 不等价. 例子: 对于 $a_n = (-1)^n$, $A = 0$, 命题 (1) 成立, 即对无穷多个 $\varepsilon = 2, 3\cdots$, 存在 $N = 1$, 使得 $|a_n - A| = 1 < \varepsilon$, $\forall n \geq N$. 显然 $\lim_{n\to+\infty} a_n = A$ 不成立.

解 (3): 命题 (3) $\Longleftrightarrow$ 命题 $\lim_{n\to+\infty} a_n = A$.

为了清楚计, 我们将这两个命题更精确地表述如下:

命题 (3): 对 $\forall\varepsilon \in (0,1)$, 存在正整数 N, 使得对任意 $n \geq N$, 成立 $|a_n - A| < \varepsilon$;

命题 $\lim_{n\to+\infty} a_n = A$: 对 $\forall\varepsilon_1 > 0$, 存在正整数 N, 使得对任意 $n \geq N$, 成立 $|a_n - A| < \varepsilon_1$.

证 $\Leftarrow$: 当命题 $\lim_{n\to+\infty} a_n = A$ 成立时, 显然命题 (3) 成立.

证 $\Rightarrow$: 假设对 $\forall\varepsilon \in (0,1)$, 存在正整数 N, 使得对任意 $n \geq N$, 成立 $|a_n - A| < \varepsilon$.

对 $\forall\varepsilon_1 > 0$, 分两种情况讨论:

情形一: $\varepsilon_1 \in (0,1)$, 则由假设知, 存在正整数 N, 使得对任意 $n \geq N$, 成立 $|a_n - A| < \varepsilon$.

情形二: $\varepsilon_1 \geq 1$. 取 $\varepsilon = \frac{1}{2}$, 则由假设知, 存在正整数 N, 使得对任意 $n \geq N$, 成立 $|a_n - A| < \varepsilon = \frac{1}{2} < \varepsilon_1$.

这表明, 无论对情形一还是情形二, 命题 $\lim_{n\to+\infty} a_n = A$ 成立.

习题二: 课本第7页习题1.2, 题 2(有修改):

(i) 用 ε, N 语言表述命题 (*): 序列 $\{a_n\}$ 不收敛于 A.

(ii) 判断如下两个命题是否与命题 (*) 等价:

(1) 存在 $\varepsilon_0 > 0$, 且存在正整数 N, 使得当 $n > N$ 时, 成立 $|a_n - A| \geq \varepsilon_0$;

(2) 对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得当 $n \geq N$ 时, 成立 $|a_n - A| \geq \varepsilon$;

解 (i): 我们先用 ε, N 语言表述命题: 序列 $\{a_n\}$ 收敛于 A, 即 $\forall \varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得当对任意 $n \geq N$, $|a_n - A| < \varepsilon$. 由此不难得否命题, 即命题 (*) 的 ε, N 的表述: 存在 $\varepsilon_0 > 0$, 对任意正整数 k, 存在 $n_k \geq k$, 使得 $|a_{n_k} - A| \geq \varepsilon_0$.

解 (ii):

命题 (1) 不等价于命题 (*). 命题 (1) $\Rightarrow$ 命题 (*), 但命题 (*) $\not\Rightarrow$ 命题 (1). 例子: 取 $a_n = 1 + (-1)^n$, $A = 0$. 此时命题 (*) 成立. 但命题 (1) 不成立.

命题 (2) 不等价于命题 (*). 确切地说, 命题 (2) $\Rightarrow$ 命题 (*), 但命题 (*) $\not\Rightarrow$ 命题 (2). 例子: 取 $a_n = 1 + (-1)^n$, $A = 0$. 此时命题 (*) 成立, 但命题 (2) 不成立.

习题三: 课本第7页习题1.2, 题 3: 利用极限定义证明以下极限

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n^3-1}{n^3-n+1} = 2$;

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\cos n}{n} = 0$;

(5) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}} = 0$;

(7) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{a^n} = 0$, 其中 $a > 1$.

解 (1): 对 $n > 1$, 考虑

$$\left|\frac{2n^3-1}{n^3-n+1} - 2\right| = \left|\frac{2n^3-1-2(n^3-n+1)}{n^3-n+1}\right| = \left|\frac{2n-3}{n^3-n+1}\right|$$
$$< \frac{2n}{n^3-n} = \frac{2}{n^2-1}.$$

对任意 $\varepsilon > 0$, 令

$$\frac{2}{n^2-1} < \varepsilon \quad \text{即} \quad n^2 > \frac{2}{\varepsilon} + 1,$$

可取

$$N = \left[\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}+1}\right] + 1, \qquad (*)$$

这里 $[\cdot]$ 代表取整函数, 即 $[x]$ 的值定义为不大于 x 的最大整数. 例如 $[1.5] = 1$, $[-1.2] = -2$, $[3] = 3$. 易证函数 $[x]$ 有如下性质: 设 $x > 0$, 则

$$[x] \le x < [x] + 1, \quad \frac{1}{[x]} \ge \frac{1}{x} > \frac{1}{1 + [x]}.$$

于是对任意 $\varepsilon > 0$, 存在由式 (*) 定义的 N, 使得对任意 $n \ge N$,

$$\left| \frac{2n^3 - 1}{n^3 - n + 1} - 2 \right| < \frac{2}{n^2 - 1} \le \frac{2}{N^2 - 1} < \varepsilon.$$

根据极限定义, 此即 $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2n^3-1}{n^3-n+1} = 2$.

解 (3): 对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$, 可使得对任意 $n \ge N$,

$$\left| \frac{\cos n}{n} - 0 \right| \le \frac{1}{n} \le \frac{1}{N} = \frac{1}{[\frac{1}{\varepsilon}] + 1} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon.$$

这就证明了 $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\cos n}{n} = 0$.

解 (5): 由于

$$\left| \frac{1}{1 + \sqrt{n}} - 0 \right| = \frac{1}{1 + \sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}},$$

故对 $\forall \varepsilon > 0$, 令 $\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$, 解得 $n > \frac{1}{\varepsilon^2}$. 因此取 $N = [\frac{1}{\varepsilon^2}] + 1$, 则对任意 $n \ge N$,

$$\left| \frac{1}{1 + \sqrt{n}} - 0 \right| < \frac{1}{\sqrt{n}} \le \frac{1}{\sqrt{N}} = \frac{1}{\sqrt{[\frac{1}{\varepsilon^2}] + 1}} < \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}}} = \varepsilon.$$

依极限定义, 此即 $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}} = 0$.

解 (7): 由于 $a > 1$, 故可将 a 写作 $a = 1 + \delta$, $\delta > 0$. 于是

$$a^n = (1 + \delta)^n = 1 + n\delta + \frac{1}{2}n(n-1)\delta^2 + \cdots > \frac{1}{2}n(n-1)\delta^2.$$

因此

$$0 < \frac{n}{a^n} < \frac{n}{\frac{1}{2}n(n-1)\delta^2} = \frac{2}{(n-1)\delta^2}.$$

对任意 $\varepsilon > 0$, 令 $\frac{2}{(n-1)\delta^2} < \varepsilon$, 即 $n > \frac{2}{\delta^2 \varepsilon} + 1$, 故令 $N = [\frac{2}{\delta^2 \varepsilon} + 1] + 1$, 对任意 $n > N$

$$\left| \frac{n}{a^n} - 0 \right| = \frac{n}{a^n} < \frac{2}{(n-1)\delta^2} < \frac{2}{(N-1)\delta^2} = \frac{2}{[\frac{2}{\delta^2 \varepsilon} + 1]\delta^2} < \frac{2}{\frac{2}{\delta^2 \varepsilon}\delta^2} = \varepsilon.$$

这表明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{a^n}=0$.

习题四: 课本第7页习题1.2, 题 4:

设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=A$, 证明对任意正整数 k, $\lim\limits_{n\to+\infty}a_{n+k}=A$.

证明: 由假设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=A$ 知, $\forall\varepsilon>0$, 存在正整数 N, 使得对任意 $n\geq N$, 成立 $|a_n-A|<\varepsilon$. 于是对任意正整数 k, 也成立 $|a_{n+k}-A|<\varepsilon$, 因为 $n+k\geq N$. 这表明 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_{n+k}=A$. 证毕.

习题五: 课本第7页习题 1.2 题 5:

若序列 $\{a_n\}$ 的两个子列 $\{a_{2k}\}$ 和 $\{a_{2k-1}\}$ 均收敛, 且收敛于同一个极限 A, 证明序列 $\{a_n\}$ 有极限, 且极限为 A.

证明: 由假设 $\lim\limits_{k\to+\infty}a_{2k}=A$ 和 $\lim\limits_{k\to+\infty}a_{2k-1}=A$ 知, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在正整数 K, 使得对任意 $k\geq K$ 时

$$|a_{2k}-A|<\varepsilon \quad 且 \quad |a_{2k-1}-A|<\varepsilon.$$

定义 $N=2K$, 对任意正整数 $n\geq N$, 成立 $|a_n-A|<\varepsilon$. 因为当 n 为偶数时, 即 $n=2k$, 则 $k\geq K$, 故 $|a_{2k}-A|<\varepsilon$; 当 n 为奇数时, 即 $n=2k-1$, 则 $k\geq K$, 故 $|a_{2k-1}-A|<\varepsilon$. 这表明 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=A$. 证毕.

习题六: 课本第7-8页习题1.2, 题 7 (有修改):

(1) 如果 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=A$, 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n|=|A|$. 问反之是否成立? 即如果 $\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n|=|A|$, 那么是否必有 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=A$?

(2) 如果 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=A$, 证明

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=A. \tag{1}$$

证明 (1): 由假设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=A$ 知, 对任意 $\forall\varepsilon>0$, 存在正整数 N, 使得对任意正整数

$n \geq N$, $|a_n - A| < \varepsilon$. 此时

$$\Big||a_n| - |A|\Big| \leq |a_n - A| < \varepsilon.$$

这表明 $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = |A|$.

反之, 假设 $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = |A|$, 则

(i) 当 $A = 0$ 时, 则结论 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A$ 成立.

(ii) 当 $A \neq 0$ 时, 结论 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A$ 不必成立. 例如 $a_n = (-1)^n$, $A = 1$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = 1 = |A|$, 但极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ 不存在.

证 (2): 由假设 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A$ 知, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N_1, 使得 $|a_n - A| < \varepsilon$, $\forall n \geq N_1$. 于是对任意 $n > N_1$,

$$\left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - A\right| = \left|\frac{(a_1 - A) + (a_2 - A) + \cdots + (a_n - A)}{n}\right|$$

$$= \left|\frac{(a_1 - A) + (a_2 - A) + \cdots + (a_{N_1} - A)}{n} + \frac{(a_{N_1+1} - A) + \cdots + (a_n - A)}{n}\right|$$

$$\leq \left|\frac{(a_1 - A) + (a_2 - A) + \cdots + (a_{N_1} - A)}{n}\right| + \frac{|a_{N_1+1} - A| + \cdots + |a_n - A|}{n}$$

$$\leq \left|\frac{(a_1 - A) + (a_2 - A) + \cdots + (a_{N_1} - A)}{n}\right| + \varepsilon.$$

由于当 $n \to +\infty$ 时,

$$\frac{(a_1 - A) + (a_2 - A) + \cdots + (a_{N_1} - A)}{n} \to 0.$$

故存在 $N_2 > N_1$, 使得对任意 $n \geq N_2$, 成立

$$\left|\frac{(a_1 - A) + (a_2 - A) + \cdots + (a_{N_1} - A)}{n}\right| < \varepsilon.$$

因此对任意 $n \geq N_2$, 成立

$$\left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - A\right| < \left|\frac{(a_1 - A) + (a_2 - A) + \cdots + (a_{N_1} - A)}{n}\right| + \varepsilon < 2\varepsilon.$$

这就证明了结论 (1). 证毕.

习题七: 课本第13页习题1.3, 题 1:

判断如下命题是否正确. 若正确, 则说明理由; 若不正确, 请举反例.

(1) 给定两个数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$, 若数列 $\{2x_n-y_n\}$ 和 $\{3x_n+4y_n\}$ 均收敛, 则两个数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 均收敛;

(2) 若数列 $\{x_n\}$ 收敛, 且数列 $\{y_n\}$ 发散, 则数列 $\{x_n+y_n\}$ 和 $\{x_ny_n\}$ 均发散;

(3) 若两个数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 均发散, 则数列 $\{x_n+y_n\}$ 和 $\{x_ny_n\}$ 均发散;

(4) 若两个数列 $\{x_n\}$ 和 $\{x_ny_n\}$ 均收敛, 则数列 $\{y_n\}$ 收敛;

(5) 若 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=0$, 则对任何数列 $\{y_n\}$, 均有 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_ny_n=0$;

(6) 若 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_ny_n=0$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=0$ 或 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n=0$.

解: 命题 (1) 成立. 令

$$\begin{cases} a_n=2x_n-y_n, \\ b_n=3x_n+4y_n, \end{cases}$$

则

$$\begin{cases} x_n=\frac{1}{11}(4a_n+b_n), \\ y_n=\frac{1}{11}(2b_n-3a_n). \end{cases}$$

由假设数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 均收敛, 根据数列的四则运算定理知, 数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 也均收敛.

命题 (2) 不成立. 若数列 $\{x_n\}$ 收敛, 且数列 $\{y_n\}$ 发散, 则 (i) $\{x_ny_n\}$ 可能收敛, 也可能发散. 例一: 取 $x_n=0$, $y_n=(-1)^n$, 则 $\{x_n\}$ 收敛, $\{y_n\}$ 发散. 于是 $\{x_ny_n\}=\{0\}$ 收敛.
例二: 取 $x_n=1$, $y_n=(-1)^n$, 则 $\{x_n\}$ 收敛, $\{y_n\}$ 发散. 于是 $\{x_ny_n\}=\{(-1)^n\}$ 发散.
(ii) 数列 $\{x_n+y_n\}$ 必发散. 反证. 假设数列 $\{x_n+y_n\}$, 则 y_n 可以表示为两个收敛序列的序列的差, 即 $y_n=(x_n+y_n)-x_n$. 根据极限的四则运算定理知, 序列 $\{y_n\}$ 收敛. 矛盾.

命题 (3) 不成立. 若两个数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 均发散, 则数列 $\{x_n+y_n\}$ 和 $\{x_ny_n\}$ 可能收敛, 也可能发散.

例一: 若取 $x_n=(-1)^n$, $y_n=(-1)^{n+1}$, 则 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 均发散, 但 $\{x_n+y_n\}=\{0\}$ 和 $\{x_ny_n\}=\{-1\}$ 均收敛.

例二: 若取 $x_n = (-1)^n$, $y_n = n$, 则 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 均发散. 此时 $\{x_n + y_n\} = \{(-1)^n + n\}$ 和 $\{x_n y_n\} = \{(-1)^n n\}$ 均发散.

命题 (4) 不成立. 例: 取 $x_n = 0$, $y_n = (-1)^n$, 则两个数列 $\{x_n\}$ 和 $\{x_n y_n\} = \{0\}$ 均收敛, 但数列 $\{y_n\}$ 发散.

命题 (5) 不成立. 例: 取 $x_n = \frac{1}{n} \to 0$, $y_n = n$, 则序列 $\{x_n y_n\} = \{1\}$ 有极限 1. 若取 $y_n = n^2$, 则序列 $\{x_n y_n\} = \{n\}$ 无极限.

命题 (6) 不成立. 例: 取 $\{x_n\} = \{1, 0, 1, 0, \cdots\}$, $\{y_n\} = \{0, 1, 0, 1, 0, \cdots\}$, 则 $\{x_n y_n\} = \{0\}$ 有极限 0, 但 $x_n \not\to 0$, 且 $y_n \not\to 0$. 解答完毕.

习题八: 课本第13页习题1.3, 题 4: 求下列极限

$$(1) \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^3 - 2n^2 - n - 1}{3n^3 + n^2 + 2}; \quad (2) \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n + (-1)^n}{2^{n-2} + (-1)^{n-1}};$$

$$(3) \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}\cos n}{n+2}; \quad (4) \quad \lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2 - n + 1} - \sqrt{n^2 + n - 2}\right);$$

解 (1):

$$\frac{2n^3 - 2n^2 - n - 1}{3n^3 + n^2 + 2} = \frac{2 - \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}}{3 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^3}} \to \frac{2}{3}.$$

故

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^3 - 2n^2 - n - 1}{3n^3 + n^2 + 2} = \frac{2}{3}.$$

解 (2):

$$\frac{2^n + (-1)^n}{2^{n-2} + (-1)^{n-1}} = \frac{2^2 + \frac{(-1)^n}{2^{n-2}}}{1 + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-2}}} \to 4.$$

故

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n + (-1)^n}{2^{n-2} + (-1)^{n-1}} = 4.$$

解 (3):

$$\left|\frac{\sqrt{n}\cos n}{n+2}\right| \le \frac{\sqrt{n}}{n+2} < \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0,$$

故

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}\cos n}{n+2}=0.$$

解 (4):

$$\sqrt{n^2-n+1}-\sqrt{n^2+n-2}=\frac{n^2-n+1-(n^2+n-2)}{\sqrt{n^2-n+1}+\sqrt{n^2+n-2}}$$

$$=\frac{-2n+3}{\sqrt{n^2-n+1}+\sqrt{n^2+n-2}}=\frac{-2+\frac{3}{n}}{\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}-\frac{2}{n}}}\to\frac{-2}{1+1}=-1,$$

故

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2-n+1}-\sqrt{n^2+n-2}\right)=-1.$$

习题九: 课本第13页习题1.3, 题 5:

设 $a>1$, k 为正整数, 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^k}{a^n}=0$.

证明: 由习题三 (7) 的结论知 $k=1$ 时结论成立, 即 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{a^n}=0$. 以下我们利用这个结论, 证明对一般正整数 k 的结论. 记 $b=\sqrt[k]{a}$, 则 $a=b^k$. 由于 $a>1$, 故 $b>1$. 于是 $\frac{n}{b^n}\to 0$. 再根据极限的四则运算定理得

$$\frac{n^k}{a^n}=\left(\frac{n}{b^n}\right)^k=\frac{n}{b^n}\cdot\frac{n}{b^n}\cdots\frac{n}{b^n}\to 0.$$

证毕.

习题十: 课本第14页习题1.3, 题 8(有修改):

证明对任意正整数 $n\geq 2$,

$$\frac{1}{2n}<\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}},\tag{2}$$

并且利用上述不等式求极限

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}}.$$

证明: 我们先用归纳法证明不等式 (2). 当 $n=2$ 时, 不等式 (2) 即为

$$\frac{1}{4}<\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{8}<\frac{1}{\sqrt{5}}. \tag{3}$$

显然式 (3) 左边不等式成立. 由于 $\frac{9}{64}<\frac{1}{5}$, 故式 (3) 右边不等式成立. 假设不等式 (2) 对正整数 n 成立. 我们要证不等式 (2) 对情形 $n+1$ 也成立, 即

$$\frac{1}{2n+2}<\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2n+2}<\frac{1}{\sqrt{2n+3}}. \tag{4}$$

由于不等式 (2) 对正整数 n 成立 (归纳假设), 故

$$\frac{1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2n+2}<\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2n+2}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\cdot\frac{2n+1}{2n+2}=\frac{\sqrt{2n+1}}{2n+2}. \tag{5}$$

根据式 (5) 左边不等式, 立刻得到式 (4) 左边不等式. 由于 $(2n+1)(2n+3)<(2n+2)^2$, 故式 (5) 右边不等式, 立刻得到式 (4) 右边不等式. 根据归纳法原理知不等式 (2) 对任意正整数 $n\geq 2$ 均成立.

再根据不等式 (2) 知

$$\frac{1}{(2n)^{\frac{1}{n}}}<\sqrt[n]{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}}<\frac{1}{(2n+1)^{\frac{1}{2n}}}.$$

由于 $(2n)^{\frac{1}{n}}\to 1$, 且 $(2n+1)^{\frac{1}{2n}}\to 1$, 故根据两边夹法则得

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}}=1.$$

解答完毕.

习题十一: 课本第14页习题1.3, 题 9:

设 $a_n>0, \forall n\geq 1$, 且 $a_n\to A$. 证明 $\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\to A$, 并由这个结论求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n!}}$.

证明: 情形一: $A=0$. 假设 $a_n\to 0$, 要证 $\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\to A$. 根据几何算术平均不等式, 以及习题六(2)的结论知,

$$0<\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leq\frac{1}{n}\left(a_1+a_2+\cdots+a_n\right)\to 0$$

结论成立.

情形二: $A > 0$. 记 $b_n = \ln a_n$, $B_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$ 则 $b_n \to \ln A$, 且

$$\ln B_n = \frac{1}{n}(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \to \ln A.$$

因此 $B_n \to A$. 往下我们来求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}}$. 记 $a_k = \frac{1}{k}$, 则 $a_k \to 0$. 根据情形一时的结论知

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0.$$

解答完毕.

习题十二: 课本第14页习题1.3, 题 10: 设 $a_n > 0$ 且 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to a$.

(1) 证明 $\sqrt[n]{a_n} \to a$;

(2) 若 $a < 1$, 证明 $a_n \to 0$;

(3) 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

解: 记 $b_1 = a_1$, $b_2 = \frac{a_2}{a_1}$, $b_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}$, $\forall n \geq 2$, 则 $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \to a$.

证 (1): 由于 $b_n \to a$, 故根据习题十一的结论知 $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{b_1 b_2 \cdots b_n} \to a$.

解 (2): 当 $0 \leq a < 1$ 时, 可取 $\varepsilon > 0$ 充分小, 使得 $0 < a + \varepsilon < 1$. 根据假设 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to a$, 存在正整数 N, 使得对任意正整数 $n \geq N$, $0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < a + \varepsilon < 1$. 于是对 $n \geq N$

$$a_{n+1} < (a+\varepsilon)a_n < (a+\varepsilon)^2 a_{n-1} < \cdots < (a+\varepsilon)^{n-N+1} a_N.$$

于是 $a_{n+1} \to 0$, 从而 $a_n \to 0$.

证 (3): 令 $a_n = \frac{n^n}{n!}$, 则

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e.$$

再根据结论 (1) 得

$$\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \sqrt[n]{a_n} \to e.$$

解答完毕.

第二次作业解答

习题一. 课本第18页习题1.4题2:

假设 (i) 数列 $\{a_n\}$ 严格单调上升,

(ii) 数列 $\{b_n\}$ 严格单调下降,

(iii) $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n-a_n)=0$,

证明数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 均收敛, 且收敛于同一个极限.

证明: 根据假设 (i), (ii), (iii) 可知 $b_n-a_n>0$, $\forall n\geq 1$. 因为若存在正整数 n_0, 使得 $b_{n_0}-a_{n_0}\leq 0$, 则对任意正整数 $n>n_0$

$$b_n-a_n<b_{n_0}-a_{n_0}\leq 0.$$

此与假设 (iii) 矛盾. 因此 $b_n-a_n>0$, $\forall n\geq 1$. 由此可见单调上升数列 $\{a_n\}$ 有上界 b_1, 单调下降数列 $\{b_n\}$ 有下界 a_1. 根据单调有界原理可知, 数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 均收敛. 设 $a_n\to A$, $b_n\to B$. 由于 $b_n>a_n$ 可知 $B\geq A$. 于是

$$0\leq B-A=\lim_{n\to+\infty}b_n-\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}(b_n-a_n)=0.$$

故 $A=B$. 因此数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 均收敛, 且收敛域同一个极限. 证毕.

习题二. 课本第18页习题1.4题3: 求极限

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n.$$

解: 由于

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\left(\frac{n-1}{n}\right)^n=\frac{1}{(\frac{n}{n-1})^n}$$

$$=\frac{1}{(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}(1+\frac{1}{n-1})}\to\frac{1}{e\cdot 1}=\frac{1}{e},$$

故

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{e}.$$

解答完毕.

习题三. 课本第18页习题1.4题4:

利用单调有界定理, 证明极限 $\lim_{n\to+\infty}$ 存在, 其中 a_n 为如下三种情形:

$$(1)\quad a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^n};$$

$$(2)\quad a_n = \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right);$$

$$(3)\quad a_n = \left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n^2}\right).$$

证明: 显然上述三个情形定义的序列 $\{a_n\}$ 均为单调上升的, 故要证极限 $\lim_{n\to+\infty}$ 存在, 只需证序列 $\{a_n\}$ 有上界即可.

(1) 对任意 $n>2$

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^n} < 1 + \frac{1}{2\cdot 1} + \frac{1}{3\cdot 2} + \cdots + \frac{1}{n(n-1)}$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2.$$

故序列 $\{a_n\}$ 有上界.

(2) 根据均值不等式得

$$a_n = \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right) < \left\{\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2^2}+\cdots+1+\frac{1}{2^n}\right)\right\}^n$$

$$= \left\{1+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)\right\}^n = \left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n2^n}\right)^n$$

$$< \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

故序列 $\{a_n\}$ 有上界.

(3) 根据均值不等式得

$$a_n = \left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n^2}\right) < \left\{\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2^2}+1+\frac{1}{3^2}+\cdots+1+\frac{1}{n^2}\right)\right\}^n$$

$$< \left\{1+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2\cdot 1}+\frac{1}{3\cdot 2}+\cdots+\frac{1}{n(n-1)}\right)\right\}^n = \left\{1+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{n}\right)\right\}^n$$
$$< \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

故序列 $\{a_n\}$ 有上界.

习题四. 课本第18页习题1.4题5:

利用单调有界定理, 证明极限 $\lim_{n\to+\infty} a_n$ 存在, 并求出极限, 其中 a_n 由如下递推关系确定:

$$(1)\quad a_1=\sqrt{2},\quad a_{n+1}=\sqrt{2a_n};\quad (2)\quad a_1>0,\quad a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{4}{a_n}\right);$$
$$(3)\quad a_1>0,\quad a_{n+1}=\sin a_n;\quad (4)\quad a_1=1,\quad a_{n+1}=2-\frac{1}{1+a_n}.$$

证(1): 先证 a_n 单调上升.

$$a_2=\sqrt{2a_1}=\sqrt{2\cdot 2}=2>\sqrt{2}=a_1.$$

假设 $a_n>a_{n-1}$, 则

$$a_{n+1}=\sqrt{2a_n}>\sqrt{2a_{n-1}}=a_n.$$

由归纳法原理知 $a_{n+1}>a_n, \forall n\geq 1$. 再证 a_n 有上界. 由观察可猜测 $a_n<2, \forall n\geq 1$. $a_1=\sqrt{2}<2$. 假设 $a_n<2$, 则

$$a_{n+1}=\sqrt{2a_n}<\sqrt{2\cdot 2}=2.$$

由归纳法原理知 $a_{n+1}<2, \forall n\geq 1$. 由于序列 $\{a_n\}$ 单调上升有上界, 故序列 $\{a_n\}$ 收敛. 设 $a_n\to a$, 则根据关系式 $a_{n+1}=\sqrt{2a_n}$ 得 $a=\sqrt{2a}$. 故 $a^2=2a$, 即 $a=2$.

证(2): 先证 $a_n\geq 2, \forall n\geq 2$. 根据均值不等式得

$$a_2=\frac{1}{2}\left(a_1+\frac{4}{a_1}\right)\geq\sqrt{a_1\cdot\frac{4}{a_1}}=\sqrt{4}=2.$$

假设 $a_n\geq 2$, 则

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{4}{a_n}\right)\geq\sqrt{a_n\cdot\frac{4}{a_n}}=\sqrt{4}=2.$$

因此 $a_n \geq 2, \forall n \geq 2$. 再证 $a_{n+1} \leq a_n, \forall n \geq 2$.

$$a_2 - a_3 = a_2 - \frac{1}{2}\left(a_2 + \frac{4}{a_2}\right) = \frac{1}{2}\left(a_2 - \frac{4}{a_2}\right) \geq 0.$$

假设 $a_{n+1} \leq a_n$, 则

$$a_{n+1} - a_{n+2} = a_{n+1} - \frac{1}{2}\left(a_{n+1} + \frac{4}{a_{n+1}}\right) = \frac{1}{2}\left(a_{n+1} - \frac{4}{a_{n+1}}\right) \geq 0.$$

根据归纳法原理知 $a_{n+1} \leq a_n, \forall n \geq 2$. 因此序列 $\{a_n\}_{n\geq 2}$ 单调下降且有下界. 故序列 $\{a_n\}$ 收敛. 设 $a_n \to a$, 则在关系式

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{4}{a_n}\right)$$

中, 令 $n \to +\infty$ 得

$$a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{4}{a}\right).$$

解之得 $a = 2$.

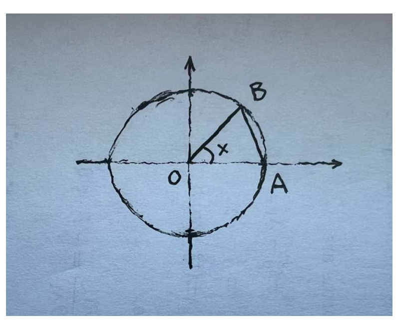
证(3): 由于 $|a_2| = |\sin a_1| \leq 1$, 故

(i) 当 $a_2 = 0$ 时, $a_n = 0, \forall n \geq 2$. 此时序列 $\{a_n\}$ 收敛, 且极限为零.

(ii) 设 $a_2 \neq 0$. 不妨设 $a_2 > 0$ (情形 $a_2 < 0$ 类似处理). 以下我们证明一个引理:

引理: 当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, 则 $0 < \sin x < x$.

证明: 如图在单位园里作圆心角 $\angle AOC = x$.



由图可知 $\triangle AOB$ 面积 $<$ 扇形 AOB 面积, 即 $\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x$. 亦即 $\sin x < x$. 引理证毕.

根据引理知, $a_3=\sin a_2<a_2$, $a_4=\sin a_3<a_3$, $\cdots$, $a_{n+1}=\sin a_n<a_n$, $\forall n\geq 2$. 由此可见序列 $\{a_n\}_{n\geq 2}$ 单调下降且有下界零. 因此由单调有界定理知序列 $\{a_n\}$ 收敛. 设 $a_n\to a$. 在关系式 $a_{n+1}=\sin a_n$ 中, 令 $n\to+\infty$ 得 $a=\sin a$. 由此得极限 $a=0$.

证(4): 先证序列 $\{a_n\}$ 单调上升. 由假设 $a_1=1$, 故

$$a_2=2-\frac{1}{1+a_1}=2-\frac{1}{1+1}=\frac{3}{2}>1=a_1.$$

假设 $a_n>a_{n-1}$, 则

$$\frac{1}{1+a_n}<\frac{1}{1+a_{n-1}}.$$

于是

$$a_{n+1}=2-\frac{1}{1+a_n}>2-\frac{1}{1+a_{n-1}}=a_n.$$

由归纳法原理知 $\{a_n\}$ 单调上升. 根据关系式 $a_{n+1}=2-\frac{1}{1+a_n}$ 知 $a_n<2$, $\forall n\geq 1$. 因此由单调有界定理知序列 $\{a_n\}$ 收敛. 设 $a_n\to a$. 在关系式

$$a_{n+1}=2-\frac{1}{1+a_n}$$

中, 令 $n\to+\infty$ 得 $a=2-\frac{1}{1+a}$, 即 $a^2-a-1=0$. 解之得 $a=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})$. 显然 $a>0$. 故 $a=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$. 解答完毕.

习题五. 课本第18页习题1.4题12: 求下列极限

$$(1)\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln n}\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right);\quad (2)\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right);$$

$$(3)\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}\right);\quad (4)\quad \lim_{n\to+\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}.$$

解: 考虑用 Stolz 定理来求这四个极限.

(1) 记 $a_n=1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}$, $b_n=\ln n$,

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\frac{\frac{1}{2n+1}}{\ln(n+1)-\ln n}=\frac{\frac{1}{2n+1}}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

$$= \frac{n}{2n+1} \cdot \frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{2}.$$

根据 Stolz 定理知

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln n}\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right) = \frac{1}{2}.$$

(2) 记 $a_n = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}$, $b_n = \sqrt{n}$, 考虑

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \to 2.$$

根据 Stolz 定理知

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 2.$$

(3) 记 $a_n = 1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}$, $b_n = n\sqrt{n}$. 考虑

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \frac{\sqrt{n+1}}{(n+1)\sqrt{n+1}-n\sqrt{n}}$$

$$= \frac{\sqrt{n+1}\left[(n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}\right]}{(n+1)^3-n^3} = \frac{(n+1)^2+n\sqrt{n(n+1)}}{3n^2+3n+1} \to \frac{2}{3}.$$

根据 Stolz 定理知

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}\right) = \frac{2}{3}.$$

(4) 记 $c_n = (n!)^{\frac{1}{n^2}}$, 则

$$\ln c_n = \frac{1}{n^2}\left(\ln 1+\ln 2+\cdots+\ln n\right).$$

令 $a_n = \ln 1+\ln 2+\cdots+\ln n$, $b_n = n^2$. 由于

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2-n^2} = \frac{\ln(n+1)}{2n+1} \to 0,$$

故 Stolz 定理知 $\ln c_n \to 0$. 因此

$$\lim_{n\to+\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty} e^{c_n} = e^0 = 1.$$

解答完毕.

习题六. 课本第19页习题1.4题13: 设 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$. 求极限

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n}{n^2}.$$

解: 尝试利用 Stolz 定理求上述极限. 记 $a_n = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n$, $b_n = n^2$, 则

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{(n+1)a_{n+1}}{(n+1)^2 - n^2} = \frac{(n+1)a_{n+1}}{2n+1} = \frac{n+1}{2n+1} \cdot a_{n+1} \to \frac{1}{2}a.$$

习题七. 课本第19页习题1.4题14: 设 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$. 证明极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ 存在.

证明: 先考虑序列 $\{a_n\}$ 的单调性. 为此先计算前几项

$$\begin{aligned} &a_1 = 1, \\ &a_2 = 1 + \tfrac{1}{1} = 2, \\ &a_3 = 1 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2}, \\ &a_4 = 1 + \tfrac{1}{\frac{3}{2}} = \tfrac{5}{3}. \end{aligned}$$

可见 $a_1 < a_3 < a_4 < a_2$. 由此可猜测对任意正整数 n

$$a_1 < a_3 < a_5 < \cdots < a_{2n-1} < a_{2n} < a_{2n-2} < \cdots < a_6 < a_4 < a_2. \tag{6}$$

假设不等式 (6) 对正整数 n 成立, 则

$$a_{2n+1} = 1 + \frac{1}{a_{2n}} > 1 + \frac{1}{a_{2n-2}} = a_{2n-1}, \quad a_{2n} = 1 + \frac{1}{a_{2n-1}} > 1 + \frac{1}{a_{2n-3}} = a_{2n-2}.$$

这表明不等式 (6) 对正整数 $n+1$ 成立. 根据归纳法原理知, 不等式 (6) 对任意正整数 n 均成立. 由不等式 (6) 可知

(i) 子列 $\{a_{2n-1}\}$ 单调上升有上界, 从而收敛. 设 $a_{2n-1} \to A$;

(ii) 子列 $\{a_{2n}\}$ 单调下降有下界, 从而收敛. 设 $a_{2n} \to B$.

在以下两个关系式

$$a_{2n+1} = 1 + \frac{1}{a_{2n}}, \quad a_{2n} = 1 + \frac{1}{a_{2n-1}}$$

中, 令 $n \to +\infty$ 得

$$A = 1 + \frac{1}{B}, \quad B = 1 + \frac{1}{A}.$$

解之得 $A=B=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$, 即极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ 存在, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$. 解答完毕.

习题八. 课本第19页习题1.4题16: 令

$$b_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

证明 (1) 序列 $\{b_n\}$ 严格单调下降; (2) $\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$, $\forall n\geq 1$.

证(1): 为证 $\{b_n\}$ 严格单调下降, 我们只需证明 $\{\frac{1}{b_n}\}$ 严格单调上升. 根据均值不等式得

$$\frac{1}{b_n}=\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\cdot 1$$

$$<\left(\frac{1}{n+2}\left[(n+1)\frac{n}{n+1}+1\right]\right)^{n+2}=\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2}=\frac{1}{b_{n+1}}.$$

证(2): 根据结论 (1) 知 $\{b_n\}$ 单调下降有下界, 故序列 $\{b_n\}$ 收敛. 由于 $b_n\downarrow e$ 严格, $a_n=(1+\frac{1}{n})^n\uparrow e$ 严格, 故

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

于上式取对数得

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<1<(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

由此得对任意正整数 $n\geq 1$

$$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}.$$

命题得证.

习题九. 课本第19页习题1.4题17:

证明极限

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$$

存在. (注: 这个极限常称作 Euler 常数, 常记作 γ. 常数 γ 的重要性仅次于圆周率 π 和自然对数底 e. 但人们对 γ 的了解很少. 例如至今尚不知 γ 是否为无理数)

证明: 记

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n,$$

则

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

根据习题八的结论 (2) 知 $a_{n+1} - a_n < 0$. 故 $\{a_n\}$ 严格单调下降. 以下我们证 $\{a_n\}$ 有下界. 由习题八的结论 (2) 我们有 $\ln(1+\frac{1}{k}) < \frac{1}{k}$. 对这个不等式关于 $k = 1, 2, \cdots, n$ 求和得

$$\ln\frac{2}{1} + \ln\frac{3}{2} + \cdots + \ln\frac{n+1}{n} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n},$$

即

$$\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

由此得

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 0$$

这就证明了 $\{a_n\}$ 严格单调下降, 且有下界零. 因此极限

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right)$$

存在. 证毕.

<u>补充习题</u>: 证明分数不等式: 对任意 n 个分数 $\frac{x_k}{y_k}$ (约定分母 $y_k > 0$), $k = 1, 2, \cdots, n$, 则

$$\min\left\{\frac{x_1}{y_1}, \cdots, \frac{x_n}{y_n}\right\} \le \frac{x_1 + \cdots + x_n}{y_1 + \cdots + y_n} \le \max\left\{\frac{x_1}{y_1}, \cdots, \frac{x_n}{y_n}\right\}. \tag{7}$$

证明: 用归纳法证. 当 $n = 1$ 时, 结论显然成立. 当 $n = 2$ 时, 要证

$$\min\left\{\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}\right\} \le \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} \le \max\left\{\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}\right\}. \tag{8}$$

不妨设

$$\frac{x_1}{y_1} \le \frac{x_2}{y_2}, \tag{9}$$

则

$$\min\left\{\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}\right\} = \frac{x_1}{y_1}, \quad \max\left\{\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}\right\} = \frac{x_2}{y_2}.$$

易见 (9) 成立, 当且仅当

$$x_1 y_2 \le x_2 y_1. \tag{10}$$

要证 (8), 即要证

$$\frac{x_1}{y_1} \le \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} \le \frac{x_2}{y_2}. \tag{11}$$

简单计算表明 (11) 成立, 当且仅当 (10) 成立. 因此命题当 $n = 2$ 时成立. 假设命题对正整数 $n \ge 2$ 成立, 即不等式 (7) 成立. 我们考虑 $n + 1$ 个分数 $\frac{x_k}{y_k}$ (约定分母 $y_k > 0$), $k = 1, 2, \cdots, n, n + 1$. 利用归纳假设 (7), 以及命题对 $n = 2$ 时的结论, 我们得

$$\min\left\{\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \cdots, \frac{x_n}{y_n}, \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}\right\} = \min\left\{\min\left\{\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \cdots, \frac{x_n}{y_n}\right\}, \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}\right\}$$

$$\le \min\left\{\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}, \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}\right\} \le \frac{x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1}}{y_1 + \cdots + y_n + y_{n+1}}.$$

同理

$$\max\left\{\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \cdots, \frac{x_n}{y_n}, \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}\right\} = \max\left\{\max\left\{\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \cdots, \frac{x_n}{y_n}\right\}, \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}\right\}$$

$$\ge \max\left\{\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}, \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}\right\} \ge \frac{x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1}}{y_1 + \cdots + y_n + y_{n+1}}.$$

这就证明了命题对 $n + 1$ 时成立. 证毕.