Linear Algebra 2025 Fall

Sample Solution

TA: Zhuohan Cai *Week 1-2*

《线性代数入门》Exercise 1.3.1

Exercise 1.3.1 把下列矩阵化为行简化阶梯形，并回答问题。

1. **Solution:**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 10 & 10 & 10 & 10 & 10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 10 & 10 & 10 & 10 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

化简后为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，第一列是主列。

2. **Solution:**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

化简后为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$，第二列是主列。

3. **Solution:**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 10 & 10 & 10 & 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 9 & 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 8 & 9 & 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 8 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{8} & -\frac{7}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{8} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}$$

化简后为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{8} & -\frac{7}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{8} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}$，第三列是主列。

4. **Solution:**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 10 \\ 10 & 10 & 10 & 10 & 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -\frac{7}{9} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{10}{9} \end{bmatrix}$$

化简后为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -\frac{7}{9} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{10}{9} \end{bmatrix}$，第四列是主列。

5. **Solution:**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 10 & 10 & 10 & 10 & 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

化简后为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，第五列是主列。

《线性代数与几何》Exercise 2.1-2.2

Exercise 2.1 用消元法解线性方程组。

1. **Solution:**

$$\left[\begin{array}{cccc} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 7 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & -7 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 8 \\ 0 & 13 & 7 & 12 \\ 0 & 3 & 5 & -4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 15 & 3 & 24 \\ 0 & 39 & 21 & 36 \\ 0 & 3 & 5 & -4 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & -22 & 44 \\ 0 & 0 & -44 & 88 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

解得：

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = -2.$$

2. **Solution:**

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

解得：

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 2.$$

3. **Solution:**

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -1 & 2 & -4 \\ 1 & -3 & 4 & -5 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right]$$

根据第三行可知该方程组无解。

4. **Solution:**

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 6 & -3 & 7 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

解得：

$$x_1 = -2, \quad x_2 = \tfrac{1}{2}x_3 + \tfrac{1}{2}.$$

Exercise 2.2 当 a,b 为何值时，线性方程组有解，并求出解。

Solution:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & 4 & 3 & -2 & a \\ 5 & 4 & 3 & 4 & 9 & b \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -4 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & 4 & 3 & -2 & a \\ 0 & -7 & -14 & -7 & 28 & 2b-5a \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 4 & 2-a \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -4 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & 4 & 3 & -2 & a \\ 0 & -7 & -14 & -7 & 28 & 2b-5a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14-2b-2a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5a-2b-21 \end{array}\right]$$

由第三和第四行可知，线性方程有解当且仅当满足：

$$\begin{cases} 14-2b-2a=0 \\ 5a-2b-21=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=2 \end{cases}$$

由此可以进一步解得：

$$\begin{cases} x_1 = -2 + x_3 - 5x_5 \\ x_2 = 3 - 2x_3 - x_4 + 4x_5 \end{cases}$$