

习题课材料 (二)

注：本次习题课包含内容：矩阵运算、逆矩阵、分块矩阵等

注：带 \heartsuit 号的习题有一定的难度、比较耗时，请量力为之。

本节考虑的矩阵均为实矩阵。

习题 1. 下列命题是否正确？

1. 若 A, B 都是 n 阶方阵，则 $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.
2. 若矩阵 A, B, C 满足 $A \neq 0, AB = AC$ ，则 $B = C$.
3. 若矩阵 A 满足 $A^2 = I$ ，则 $A = \pm I$.
4. 若 n 阶方阵 A 的行列式 $|A| = 0$ ，则 $A = 0$.
5. 若可逆矩阵 A 经过初等行变换可以化为方阵 B ，则 $A^{-1} = B^{-1}$.
6. 若 n 阶方阵 A, B, C 满足 $ABC = I$ ，则

$$BCA = I, \quad A^{-1}C^{-1}B^{-1} = I, \quad C^T B^T A^T = I.$$

7. 若 A 为 n 阶方阵， k 为任意常数，则 $|kA| = k|A|$.
8. 若 A 可逆，且 $|A + AB| = 0$ ，则 $|B + I| = 0$.
9. 若矩阵 A 满足 $A^2 = A$, $|A - I| \neq 0$ ，则 $A = 0$.
10. 对方阵进行初等行变换，不改变方阵的行列式。

解 1. $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$ ，一般来说，不等于 $A^2 + 2AB + B^2$ ，除非 $AB = BA$.

2. 不成立，反例如 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$
3. 不成立，反例如 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

4. 不成立, 反例如 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
5. 不成立, 反例如 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 把 A 的第一行加到第二行, 得 $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, 但 $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, 两者不相等.
6. 三个等号都成立, 由条件知 $(BC)^{-1} = A$, 所以 $(BC)A = I$, 即第一个等式成立. 对第一个等式取逆知第二个等式成立. 直接对条件取转置可知第三个等式成立.
7. 不成立, $|kA| = k^n |A|$.
8. 成立. $|A + AB| = |A||I + B|$, A 可逆则 $|A| \neq 0$, 所以 $|I + B| = 0$.
9. 成立. $|A - I| \neq 0$ 则 $A - I$ 可逆, 由 $A^2 = A$ 可知 $(A - I)A = 0$, 左乘 $(A - I)$ 的逆矩阵得 $A = 0$.
10. 不成立. 倍加不改变行列式, 对换将导致行列式乘以 -1 , 倍乘将导致行列式乘以相同的倍数.

□

习题 2. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵. 证明: $I_m - AB$ 可逆当且仅当 $I_n - BA$ 可逆.

证明. 要证明的命题也等价于 “ $I_m - AB$ 不可逆当且仅当 $I_n - BA$ 不可逆.”

假设 $I_m - AB$ 不可逆, 则存在非零向量 \mathbf{u} 使得 $(I_m - AB)\mathbf{u} = 0$, 于是 $\mathbf{u} = AB\mathbf{u}$, 特别的, $B\mathbf{u} \neq 0$. 注意到

$$(I_n - BA)(B\mathbf{u}) = B\mathbf{u} - BAB\mathbf{u} = B(I_m - AB)\mathbf{u} = 0,$$

这说明 $B\mathbf{u}$ 是 $(I_n - BA)\mathbf{x} = 0$ 的非零非零解, 因此 $I_n - BA$ 不可逆.

同理可证, $I_n - BA$ 不可逆时, $I_m - AB$ 也不可逆. □

习题 3. 已知 n 阶方阵 A 满足方程: $A^2 + 3A - 4I = 0$, 其中 I 是单位矩阵.

1. 求 $(A + 3I)^{-1}$;
2. 求 $(A + 5I)^{-1}$;
3. 问当 m 满足什么条件时, $(A + mI)$ 必可逆.

解 1. 根据题设, $A(A + 3I) = 4I$, 因此 $(A + 3I)^{-1} = \frac{1}{4}A$.

2. 令 $B = A + 5I$, 则 $A = B - 5I$, 根据题设有: $(B - 5I)^2 + 3(B - 5I) - 4I = 0$, 即: $B^2 - 7B + 6I = 0$, 因此

$$\left(-\frac{1}{6}(B - 7I)\right)B = I,$$

所以 $(A + 5I)^{-1} = B^{-1} = -\frac{1}{6}(B - 7I) = -\frac{1}{6}(A - 2I)$.

3. 若 $A + mI$ 不可逆, 则存在非零向量 x 使得 $(A + mI)x = 0$, 即 $Ax = -mx$, 那么

$$0 = (A^2 + 3A - 4I)x = A(Ax) + 3Ax - 4x = A(-mx) + 3(-mx) - 4x = -m(Ax) - 3mx - 4x = (m^2 - 3m - 4)x,$$

因此 $m^2 - 3m - 4 = 0$, 即 $m = 4$ 或 -1 . 所以 $m \neq 4, -1$ 时, $A + mI$ 可逆.

□

习题 4. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, 求与 A 可交换的矩阵.

解 首先, 和 A 可交换的矩阵都是 2 阶方阵. 设 $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$,

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-z & y-w \\ x+z & y+w \end{bmatrix} \\ BA &= \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y & -x+y \\ z+w & -z+w \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$AB = BA$ 等价于

$$x-z = x+y \quad y-w = -x+y \quad x+z = z+w \quad y+w = -z+w,$$

因此 $x = w, y = -z$, 即和 A 可交换的矩阵的全体为

$$\left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

□

解 我们也可以机灵点, 注意到, 对每一个 a , 矩阵 B 和 A 可交换当且仅当矩阵 B 和 $A - aI$ 可交换.

因此我们可以用 $A - I = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 代替 A 来重复上面的计算. 这样做好处是产生了很多 0, 计算过程中的项数少很多, 一定程度上能减少错误. □

习题 5. 设 $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$, k 是正整数, 求 A^k .

解 当 $k=1,2$ 时, 直接计算即可, 具体过程略. 以下假设 $k \geq 3$. 令 $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 那么:

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B^3 = 0.$$

另一方面注意到 $A = \lambda I + B$, 因为数量矩阵和任意矩阵都可交换, 因此根据二项式展开:

$$A^k = (\lambda I)^k + k(\lambda I)^{k-1}B + C_k^2(\lambda I)^{k-2}B^2 + C_k^3(\lambda I)^{k-3}B^3 + \dots$$

以上的求和式只有前三项有贡献, 之后的项因为 $B^r = 0(r \geq 3)$, 全部等于 0, 因此

$$A^k = \begin{bmatrix} \lambda^k & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^k & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^k \end{bmatrix} + \lambda^{k-1} \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda^{k-2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & C_k^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & C_k^2\lambda^{k-2} \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda^k \end{bmatrix}$$

□

习题 6 (♡). 证明, 如果 n 阶方阵 A 对任意 n 维列向量 \mathbf{x} , 都存在依赖于 \mathbf{x} 的常数 $c(\mathbf{x})$, 满足 $A\mathbf{x} = c(\mathbf{x})\mathbf{x}$, 则存在常数 c , 使得 $A = cI_n$.

证明. 本题的言下之意是: 题设中的 $c(\mathbf{x})$ 是依赖于 \mathbf{x} 的, 而最后要证明的是它们是常数, 不依赖于 \mathbf{x} , 即对任意 \mathbf{x} 均有 $c(\mathbf{x}) = c$.

令 \mathbf{e}_i 是第 i 个单位向量: 即第 i 个分量为 1、其余分量为 0, $c = c(\mathbf{e}_1)$. 对任意 $i \neq 1$, 根据题意, 存在 $c(\mathbf{e}_i)$ 和 $c(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_i)$ 使得

$$A\mathbf{e}_i = c(\mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i, \quad A(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_i) = c(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_i)(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_i)$$

简便起见, 记 $a = c(\mathbf{e}_i), b = c(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_i)$, 那么 $A\mathbf{e}_i = a\mathbf{e}_i$, 并且

$$b(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_i) = A(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_i) = A\mathbf{e}_1 + A\mathbf{e}_i = c\mathbf{e}_1 + a\mathbf{e}_i.$$

比较上式等号两边向量的第 1 个分量和第 i 个分量, 即得: $c = b = a$, 也就是说, 为任意 i , 都有

$$A\mathbf{e}_i = c\mathbf{e}_i.$$

对任意 $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$, 那么 $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n$, 因此

$$A\mathbf{x} = A(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n) = x_1A\mathbf{e}_1 + x_2A\mathbf{e}_2 + \dots + x_nA\mathbf{e}_n = x_1c\mathbf{e}_1 + x_2c\mathbf{e}_2 + \dots + x_nc\mathbf{e}_n = c\mathbf{x}.$$

□

习题 7 (♡). 1. $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, 如果对任意的 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, 都有 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 证明: $A = O$.

2. 如果对任意的 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, 线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 和 $C\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 都有相同的解集, 证明 $A = C$.

证明. 1. 要证明 $A = O$, 只需要证明 A 的每一列都等于 0. 对 $i = 1, 2, \dots, n$, $A\mathbf{e}_i$ 是 A 的第 i 个列向量. 根据题意, $A\mathbf{e}_i$ 都等于 0, 证毕.

2. 要证明 $A = C$, 只需要证明: 对 $i = 1, 2, \dots, n$, A 的第 i 列和 C 的第 i 列都相同. 设 α_i 是 A 的第 i 列, 那么 $A\mathbf{e}_i = \alpha_i$.

根据题意, $A\mathbf{x} = \alpha_i$ 和 $C\mathbf{x} = \alpha_i$ 有相同的解集, 由于 $\mathbf{x} = \mathbf{e}_i$ 是 $A\mathbf{x} = \alpha_i$ 的解, 那么它也是 $C\mathbf{x} = \alpha_i$ 的解, 所以 $C\mathbf{e}_i = \alpha_i$, 这说明 C 的第 i 列也是 α_i . 证毕.

□

习题 8. 已知列向量 $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, 行向量 $\beta = [2 \ 0 \ 1]$.

1. 试计算 $A = \alpha\beta$ 以及 $B = \beta\alpha$;

2. 求 A^2, A^3 , 从中你能归纳出什么结论? 能否求出 A^{2025} ?

解 1. $A = \alpha\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \beta\alpha = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 = 4.$

2. $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 4A, \text{ 而}$

$$A^3 = A^2A = 4AA = 4A^2 = 4^2A.$$

一般地：

$$A^{2025} = (\alpha\beta)(\alpha\beta)(\alpha\beta)\cdots(\alpha\beta) = \alpha(\beta\alpha)(\beta\alpha)\cdots(\beta\alpha)\beta = 4^{2024}\alpha\beta = 4^{2024}A.$$

□

习题 9 (矩阵的迹). 方阵 A 的对角线元素的和称为它的迹, 记作 $\text{trace}(A)$. 验证下列性质.

1. 对任意同阶方阵 A, B , $\text{trace}(A + B) = \text{trace}(A) + \text{trace}(B)$.
2. 对任意方阵 A 与实数 k , $\text{trace}(kA) = k\text{trace}(A)$.
3. 对 m 阶单位阵 I_m , $\text{trace}(I_m) = m$.
4. 对任意方阵 A , $\text{trace}(A) = \text{trace}(A^T)$.
5. 设 $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$, 则 $\text{trace}(A^T B) = \sum_{i=1}^4 a_i b_i$. 如果 A, B 是 m 阶方阵呢?
6. 设 A 是实对称矩阵, 如果 $\text{trace}(A^2) = 0$, 则 $A = O$.
7. 设 v, w 是 m 维向量, 则 $\text{trace}(v^T w) = \text{trace}(w v^T)$.
8. 设 A, B 分别是 $m \times n, n \times m$ 矩阵, 则 $\text{trace}(AB) = \text{trace}(BA)$.
9. 设 A, B 是任意 m 阶方阵, 则 $AB - BA \neq I_m$.

解 设 $A = [a_{ij}]_{1 \leq i, j \leq m}$, 其对角线元素即 $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{mm}$. 根据定义,

$$\text{trace}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{mm}.$$

1. 设 $A = [a_{ij}]_{1 \leq i, j \leq m}$, $B = [b_{ij}]_{1 \leq i, j \leq m}$, 那么 $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{1 \leq i, j \leq m}$, 所以

$$\begin{aligned} \text{trace}(A + B) &= (a_{11} + b_{11}) + (a_{22} + b_{22}) + \cdots + (a_{mm} + b_{mm}) \\ &= (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{mm}) + (b_{11} + b_{22} + \cdots + b_{mm}) \\ &= \text{trace}(A) + \text{trace}(B). \end{aligned}$$

2. $kA = [ka_{ij}]_{1 \leq i, j \leq m}$, 对角线元素为 $ka_{11}, ka_{22}, \dots, ka_{mm}$, 因此

$$\text{trace}(kA) = (ka_{11}) + (ka_{22}) + \cdots + (ka_{mm}) = k(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{mm}) = k\text{trace}(A).$$

3. 对 m 阶单位阵, 其对角线元素均为 1, 所以 $\text{trace}(I_m)$ 是 m 个 1 相加之和, 即 $\text{trace}(I_m) = m$.

4. 对任意方阵 $A = [a_{ij}]_{1 \leq i,j \leq m}$, $A^T = [a_{ji}]_{1 \leq i,j \leq m}$, A^T 对角线元素依然是 $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{mm}$, 所以

$$\text{trace}(A) = \text{trace}(A^T).$$

5.

$$A^T B = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 + a_3 b_3 & a_1 b_2 + a_3 b_4 \\ a_2 b_1 + a_4 b_3 & a_2 b_2 + a_4 b_4 \end{bmatrix}$$

所以 $\text{trace}(A^T B) = (a_1 b_1 + a_3 b_3) + (a_2 b_2 + a_4 b_4) = \sum_{i=1}^4 a_i b_i$. 如果 $A = [a_{ij}]_{1 \leq i,j \leq m}$, $B = [b_{ij}]_{1 \leq i,j \leq m}$, 那么 $A^T B$ 的第 i 个对角线元素为 $\sum_{k=1}^n (A^T)_{ik} (B)_{ki}$, 而 $(A^T)_{ik} = a_{ki}$, 所以

$$(\text{trace})(A^T B) = \sum_{i=1}^k \sum_{k=1}^n a_{ki} b_{ki}.$$

6. A 是实对称矩阵则 $A^T = A$, 所以

$$0 = \text{trace}(A^2) = \text{trace}(A^T A) = \sum_{i=1}^k \sum_{k=1}^n a_{ki} a_{ki}.$$

因此所有的 a_{ki} ($1 \leq i, k \leq m$) 都等于 0, 即 $A = 0$.

7. 设 $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$, $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$, 那么 $v^T w = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_m y_m$, 而 wv^T 是 m 阶方阵

$$\begin{bmatrix} y_1 x_1 & y_1 x_2 & \cdots & y_1 x_m \\ y_2 x_1 & y_2 x_2 & \cdots & y_2 x_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_m x_1 & y_m x_2 & \cdots & y_m x_m \end{bmatrix}$$

所以 $\text{trace}(wv^T) = y_1 x_1 + y_2 x_2 + \dots + y_m x_m$.

8. 设 $A = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$, $B = [b_{kl}]_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq l \leq m}}$, 则 AB 是 m 阶方阵, BA 是 n 阶方阵.

$$\begin{aligned} \text{trace}(AB) &= \sum_{i=1}^m (AB)_{ii} \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji} \\ \text{trace}(BA) &= \sum_{j=1}^n (BA)_{jj} \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m b_{ji} a_{ij} \end{aligned}$$

因此 $\text{trace}(AB) = \text{trace}(BA)$.

9. 假设存在 m 阶方阵 A, B 使得 $AB - BA = I_m$, 那么

$$m = \text{trace}(I_m) = \text{trace}(AB - BA) = \text{trace}(AB) - \text{trace}(BA) = 0,$$

矛盾! 因此不存在 m 阶方阵 A, B 使得 $AB - BA = I_m$, 即: 对任意 m 阶方阵 A, B 都有 $AB - BA \neq I_m$.

□

习题 10 (♡). 1. 设 A 为 n 阶方阵, 求证: $A + A^T, AA^T, A^TA$ 都是对称矩阵, 而 $A - A^T$ 是反对称矩阵.

2. 求证: 任意方阵 A 都可唯一地表为 $A = B + C$, 其中 B 是对称矩阵, C 是反对称矩阵.
3. 求证: n 阶方阵 A 是反对称矩阵当且仅当对任意的 n 维列向量 x , 都有 $x^T A x = 0$.
4. 求证: 设 A, B 是 n 阶对称矩阵, 则 $A = B$ 当且仅当对任意 n 维列向量 x , 都有 $x^T A x = x^T B x$.
5. 给定 n 阶实反对称矩阵 A , 求证 $I_n - A$ 可逆.

证明. 1. $(A + A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A$, 所以 $A + A^T$ 是对称矩阵.

$$(AA^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T, \text{ 所以 } AA^T \text{ 是对称矩阵.}$$

$$(A^TA)^T = A^T(A^T)^T = A^TA, \text{ 所以 } A^TA \text{ 是对称矩阵.}$$

$$(A - A^T)^T = A^T - (A^T)^T = A^T - A, \text{ 所以 } A - A^T \text{ 是反对称矩阵.}$$

2. 令 $B = \frac{A + A^T}{2}, C = \frac{A - A^T}{2}$, 那么 B 是对称矩阵, C 是反对称矩阵, 且 $A = B + C$. 这样我们就证明了存在性, 即“可以表示”.

接下来证明“唯一性”: 设还有另一个分解: $A = B' + C'$, 其中 B' 是对称矩阵, C' 是反对称矩阵. 那么 $B + C = B' + C'$, 即 $B - B' = C' - C$; 取转置得

$$B - B' = B^T - B'^T = (B - B')^T = (C' - C)^T = C'^T - C^T = -(C' - C) = -(B - B'),$$

所以 $B - B' = 0$, 进而 $C - C' = 0$, 即得 $B = B', C = C'$. 这就证完了唯一性.

3. 如果 A 是反对称矩阵, 对任意 n 维列向量 x , 因为 $x^T A x$ 是一个数或者说 1×1 矩阵, 所以

$$x^T A x = (x^T A x)^T = x^T A^T (x^T)^T = -x^T A x.$$

反之, 如果对任意的 n 维列向量 x , 都有 $x^T A x = 0$, 取 $x = e_i - e_j$ ($1 \leq i, j \leq n$), 则由 $(e_i - e_j)^T A (e_i - e_j) = 0$ 得

$$e_i^T A e_i - e_i^T A e_j - e_j^T A e_i + e_j^T A e_j = 0,$$

从而

$$\mathbf{e}_i^T A \mathbf{e}_j = -\mathbf{e}_j^T A \mathbf{e}_i,$$

$\mathbf{e}_i^T A \mathbf{e}_j$ 是 A 的第 i 行第 j 列元素, $\mathbf{e}_j^T A \mathbf{e}_i$ 是 A 的第 j 行第 i 列元素, 由上式可知 A 是反对称矩阵.

4. 显然, 当 $A = B$ 时, 对任意 n 维列向量 \mathbf{x} , 都有 $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \mathbf{x}^T B \mathbf{x}$.

反之, 假设对任意 n 维列向量 \mathbf{x} , 都有 $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \mathbf{x}^T B \mathbf{x}$. 取 $\mathbf{x} = \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j$ ($1 \leq i, j \leq n$), 则由 $(\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j)^T A (\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j) = (\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j)^T B (\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j)$, 展开得

$$\mathbf{e}_i^T A \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_i^T A \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j^T A \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j^T A \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i^T B \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_i^T B \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j^T B \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j^T B \mathbf{e}_j$$

注意到: $\mathbf{e}_i^T A \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i^T B \mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}_j^T A \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_j^T B \mathbf{e}_j$, 且 $\mathbf{e}_i^T A \mathbf{e}_j = (\mathbf{e}_i^T A \mathbf{e}_j)^T = \mathbf{e}_j^T A^T \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i^T A \mathbf{e}_j$ (同理 $\mathbf{e}_i^T B \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_j^T B \mathbf{e}_i$), 化简得:

$$\mathbf{e}_i^T A \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i^T B \mathbf{e}_j$$

即 A 和 B 的每一个分量都相等, 因此 $A = B$.

5. 假设 $(I_n - A)\mathbf{x} = 0$, 那么 $\mathbf{x} = A\mathbf{x}$; 由于 A 是反对称矩阵, $A^T = -A$, 所以

$$\mathbf{x}^T \mathbf{x} = (A\mathbf{x})^T \mathbf{x} = \mathbf{x}^T A^T \mathbf{x} = -\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = -\mathbf{x}^T \mathbf{x},$$

因此 $\|\mathbf{x}\| = \mathbf{x}^T \mathbf{x} = 0$, 即 $\mathbf{x} = 0$. 也就是说, 方程组 $(I_n - A)\mathbf{x} = 0$ 只有零解, 因此 $I_n - A$ 可逆.

□

习题 11 (♡). 1. 设 A 为 n 阶方阵, 若对任意 $1 \leq i \leq n$, 都有

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|,$$

则称 A 是对角占优矩阵. 证明: 对角占优矩阵都是可逆矩阵.

2. 令 $X_\varepsilon = \begin{bmatrix} A & \varepsilon B_1 \\ B_2 & C \end{bmatrix}$, 其中 $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, C 为 n 阶对角占优方阵, B_1 为任意给定的 $3 \times n$ 矩阵, B_2 为任意给定的 $n \times 3$ 矩阵. 证明:

(a) A 可逆.

(b) 存在常数 $\delta > 0$ (依赖于 C, B_1, B_2), 使得对任意满足条件 $|\varepsilon| \leq \delta$ 的 ε , X_ε 均可逆.

解 1. 令 A 是对角占优矩阵. 假设 A 不可逆, 则存在非零向量 x 使得 $Ax = 0$. 设 $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ 且 $x_k = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Ax 的第 k 个分量为: $a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n$, 所以

$$a_{kk}x_k = -\sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq k}} a_{kj}x_j.$$

取绝对值, 有

$$|a_{kk}x_k| = |x_k||a_{kk}| > |x_k|\sum_{j \neq k} |a_{kj}| = \sum_{j \neq k} |a_{kj}||x_k| \geq \sum_{j \neq k} |a_{kj}||x_j| \geq \left| \sum_{j \neq k} a_{kj}x_j \right| = |-a_{kk}x_k|,$$

矛盾. 因此反正假设不成立, 也就是说 A 可逆.

2. (a) 对 A 作初等行变换:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

最后的矩阵是对角元均非零的上三角矩阵, 所以是可逆矩阵, 因此 A 也是可逆矩阵.

(b) 对 X_ϵ 作分块初等行变换:

$$\begin{bmatrix} A & \epsilon B_1 \\ B_2 & C \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} A & \epsilon B_1 \\ 0 & C - \epsilon B_2 A^{-1} B_1 \end{bmatrix}$$

所以 X_ϵ 可逆当且仅当 $C - \epsilon B_2 A^{-1} B_1$ 可逆. 那么只需要证明: “存在常数 $\delta > 0$ (依赖于 C, B_1, B_2), 使得对任意满足条件 $|\epsilon| \leq \delta$ 的 ϵ , $C - \epsilon B_2 A^{-1} B_1$ 均可逆.”

由于 C 是对角占优矩阵, 根据“对角占优矩阵”可逆这个性质, 只需要证明: “存在常数 $\delta > 0$ (依赖于 C, B_1, B_2), 使得对任意满足条件 $|\epsilon| \leq \delta$ 的 ϵ , $C - \epsilon B_2 A^{-1} B_1$ 均是 对角占优矩阵.”

设 $B_2 A^{-1} B_1 = \begin{bmatrix} t_{ij} \end{bmatrix}_{1 \leq i, j \leq n}$, $C - \epsilon B_2 A^{-1} B_1$ 对角占优当且仅当对任意 $1 \leq i \leq n$, 都有

$$|c_{ii} - \epsilon t_{ii}| > \sum_{j \neq i} |c_{ij} - \epsilon t_{ij}|.$$

要保证这一点，只需要对任意 $1 \leq i \leq n$, 都有不等式

$$|c_{ii}| - |\varepsilon t_{ii}| > \sum_{j \neq i} |c_{ij}| + |\varepsilon t_{ij}| \quad (*)$$

因为如果这个不等式成立，那么

$$|c_{ii} - \varepsilon t_{ii}| \geq |c_{ii}| - |\varepsilon t_{ii}| > \sum_{j \neq i} |c_{ij}| + |\varepsilon t_{ij}| \geq \sum_{j \neq i} |c_{ij} - \varepsilon t_{ij}|.$$

于是，我们取

$$\delta = \min \left\{ \frac{|c_{ii}| - \sum_{j \neq i} |c_{ij}|}{|t_{ii}| + \sum_{j \neq i} |t_{ij}|} : 1 \leq i \leq n \right\}$$

即可保证不等式 (*) 成立. 由于 A 是常数矩阵，因此 t_{ij} 仅依赖于 B_1, B_2 ，从而 δ 依赖于 C, B_1, B_2 .

□