

# Modélisation et Estimation par Filtre de Kalman

## Données disponibles

Dans le cadre de ce projet, les données accessibles sont les suivantes :

- **Position GPS :**
  - $\theta$  : longitude ( coordonnée est-ouest)
  - $\lambda$  : latitude ( coordonnée nord-sud)
- **Données de l'IMU (Inertial Measurement Unit) :**
  - **Accéléromètre** : Mesures d'accélération linéaire
    - $a_x$  : accélération selon l'axe  $x$
    - $a_y$  : accélération selon l'axe  $y$
    - $a_z$  : accélération selon l'axe  $z$
  - **Gyroscope** : Mesures de vitesse angulaire
    - $\dot{\omega}_x$  : vitesse angulaire autour de l'axe  $x$  (roulis)
    - $\dot{\omega}_y$  : vitesse angulaire autour de l'axe  $y$  (tangage)
    - $\dot{\omega}_z$  : vitesse angulaire autour de l'axe  $z$  (lacet)
  - **Magnétomètre** : Mesures du champ magnétique terrestre
    - $m_x$  : composante selon l'axe  $x$
    - $m_y$  : composante selon l'axe  $y$
    - $m_z$  : composante selon l'axe  $z$

## Remarques

- Les données GPS ( $\theta, \lambda$ ) donnent la position absolue, mais avec une précision limitée (erreur de quelques mètres).
- Les données de l'IMU fournissent des mesures inertielles précises à court terme, mais sujettes à une dérive temporelle (erreur qui s'accumule). De plus, l'accélération s'exprime dans le repère de l'IMU lui-même et non dans un repère terrestre.
- Le magnétomètre permet de s'orienter par rapport au nord magnétique, mais peut être perturbé par des interférences locales.

## Premier modèle basique

En raison de la nature instable de certains de nos composants, nous serions tentés de créer des modèles de filtre de Kalman compliqués afin de pouvoir corriger les différentes erreurs qui s'accumulent. Mais pour débuter, nous souhaitons faire un modèle simple, linéaire, qui ne nécessite pas l'utilisation d'un filtre de Kalman étendu.

## Rappel filtre de Kalman

En statistique et en théorie du contrôle, le filtre de Kalman est un estimateur récursif à réponse impulsionnelle infinie permettant d'estimer les états d'un système dynamique à partir de mesures bruitées ou incomplètes [?].

Le filtre de Kalman en contexte discret est un estimateur récursif : l'état courant est estimé à partir de l'estimation de l'état précédent et des mesures actuelles. Le filtre de Kalman suppose que le processus discret réel  $\mathbf{x}_k$  (où  $k$  dénote l'indice de temps), suit la loi d'évolution linéaire suivante :

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{F}_k \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{G}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k$$

où :

- $\mathbf{F}_k$  : matrice de transition entre l'état  $k - 1$  et l'état  $k$
- $\mathbf{u}_k$  : commande d'entrée
- $\mathbf{G}_k$  : matrice de contrôle reliant  $\mathbf{u}_k$  et  $\mathbf{x}_k$
- $\mathbf{w}_k$  : bruit d'évolution, gaussien centré de covariance  $\mathbf{Q}_k$

L'observation  $\mathbf{z}_k$  à l'instant  $k$  est donnée par :

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k$$

avec :

- $\mathbf{H}_k$  : matrice d'observation à l'instant  $k$
- $\mathbf{v}_k$  : bruit de mesure

## Prétraitement des données

Maintenant que nous savons quels éléments nous devons définir ainsi que les données que nous avons à notre disposition, nous pouvons modéliser le système. Cependant, un problème apparaît : nos acquisitions sont en coordonnées sphériques. Cela complique les traitements, qui risquent de ne pas être linéaires. Il est donc préférable de les transformer en coordonnées cartésiennes pour pouvoir appliquer un modèle linéaire, notamment pour l'intégration dans un filtre de Kalman classique.

Pour convertir les coordonnées sphériques en coordonnées cartésiennes, on utilise :

$$x = R_t \cos(\lambda) \cos(\theta)$$

$$y = R_t \cos(\lambda) \sin(\theta)$$

$$z = R_t \sin(\lambda)$$

avec :

- $R_t$  : rayon terrestre
- $\lambda$  : latitude en radians
- $\theta$  : longitude en radians

Comme dit plus haut, les accélérations sont exprimées dans le repère local de l'accéléromètre. Pour que notre filtre fonctionne correctement, il faut les exprimer dans le repère terrestre. On applique donc une matrice de rotation à nos vecteurs d'accélération.

Les angles d'orientation sont obtenus par intégration des vitesses angulaires :

$$\omega_{x,k+1} = \omega_{x,k} + \dot{\omega}_{x,k} \Delta t \quad (1)$$

$$\omega_{y,k+1} = \omega_{y,k} + \dot{\omega}_{y,k} \Delta t \quad (2)$$

$$\omega_{z,k+1} = \omega_{z,k} + \dot{\omega}_{z,k} \Delta t \quad (3)$$

Conditions initiales :

$\omega_{x,0}, \omega_{y,0}, \omega_{z,0}$  calculés à  $t = 0$  avec les données du magnétomètre

On en déduit la matrice de rotation  $R_k$  à appliquer à nos vecteurs d'accélération à l'instant  $k$  :

$$R_k = R_{\omega_{x,k}} R_{\omega_{y,k}} R_{\omega_{z,k}}$$

Ainsi, on obtient l'accélération dans le repère terrestre :

$$\tilde{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_x \\ \tilde{a}_y \\ \tilde{a}_z \end{pmatrix} = R_k \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

## Modélisation du problème

Toutes nos données sont désormais transformées pour être utilisables.

On définit le vecteur d'état  $\mathbf{x}_k$  :

$$\mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

À partir des équations classiques du mouvement, on a :

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + v_{x,k} dt + \frac{1}{2} \tilde{a}_{x,k} dt^2 \\ y_{k+1} = y_k + v_{y,k} dt + \frac{1}{2} \tilde{a}_{y,k} dt^2 \\ z_{k+1} = z_k + v_{z,k} dt + \frac{1}{2} \tilde{a}_{z,k} dt^2 \\ v_{x,k+1} = v_{x,k} + \tilde{a}_{x,k} dt \\ v_{y,k+1} = v_{y,k} + \tilde{a}_{y,k} dt \\ v_{z,k+1} = v_{z,k} + \tilde{a}_{z,k} dt \end{cases}$$

Ce système est mis sous forme matricielle :

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{G}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k$$

avec :

$$\mathbf{F}_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & dt & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & dt & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & dt \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{G}_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} dt^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} dt^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} dt^2 \\ dt & 0 & 0 \\ 0 & dt & 0 \\ 0 & 0 & dt \end{pmatrix}$$

et  $\mathbf{u}_k = \tilde{\mathbf{a}}_k$

Enfin, comme on souhaite observer uniquement la position, la matrice d'observation  $\mathbf{H}_k$  est :

$$\mathbf{H}_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

# Analyse des résultats

Après implémentation et exécution du filtre de Kalman sur les données disponibles, nous pouvons analyser les résultats obtenus afin d'évaluer la performance et la pertinence de notre modèle basique.

## Validation de l'estimation de la position

Le filtre de Kalman permet d'obtenir une estimation optimisée de la position en combinant la mesure GPS, précise à long terme mais bruitée, avec les mesures inertielles issues de l'IMU, précises à court terme mais sujettes à dérive.

- **Précision spatiale** : La comparaison des positions estimées avec les mesures GPS brutes montre généralement une réduction du bruit aléatoire, traduisant un meilleur lissage des trajectoires.
- **Réactivité** : Grâce à l'intégration des accélérations corrigées, le filtre peut suivre les variations rapides de mouvement même en l'absence temporaire de signaux GPS (ex. dans des tunnels ou zones d'interférences).
- **Erreur d'estimation** : L'erreur quadratique moyenne (RMSE) entre la position estimée et les données GPS de référence peut être calculée pour quantifier l'amélioration obtenue par rapport aux mesures brutes.

## Limites du modèle basique

Malgré ces améliorations, certaines limitations inhérentes au modèle simplifié apparaissent :

- **Approximation linéaire** : Le modèle linéaire ne prend pas en compte les non-linéarités dues à la dynamique réelle du véhicule ou des capteurs, ce qui peut dégrader les performances en cas de mouvements complexes.
- **Modélisation des bruits** : Les matrices de covariance  $\mathbf{Q}_k$  (processus) et  $\mathbf{R}_k$  (mesure) doivent être choisies avec soin. Un mauvais calibrage peut engendrer une mauvaise estimation, oscillante ou trop lente à réagir.
- **Dérive gyroscopique et erreurs d'orientation** : L'intégration des vitesses angulaires pour calculer la matrice de rotation  $R_k$  accumule les erreurs au fil du temps, impactant la qualité de la transformation des accélérations et donc l'estimation des vitesses et positions.
- **Perturbations du magnétomètre** : Les interférences magnétiques locales peuvent fausser l'orientation initiale et rendre instable la transformation vers le repère terrestre.

## Perspectives d'amélioration

Pour pallier ces limites, plusieurs axes d'amélioration peuvent être envisagés :

- Utilisation d'un **filtre de Kalman étendu (EKF)** ou **filtre de Kalman unscented (UKF)** afin de mieux gérer les non-linéarités dans la dynamique et l'observation.
- Intégration d'un modèle plus complet de la dynamique du système, par exemple en incluant les angles d'orientation comme variables d'état, pour mieux estimer la matrice de rotation.

- Calibration plus fine des matrices de bruit et étude des modèles statistiques des erreurs spécifiques aux capteurs.
- Fusion avec d'autres capteurs, comme un baromètre pour la hauteur, ou des systèmes de correction GPS différentiel pour réduire les erreurs absolues.

## Conclusion

Ce premier modèle linéaire simple de filtre de Kalman permet d'établir une base robuste pour la fusion des données GPS et IMU. Il montre une amélioration sensible de la qualité d'estimation de la position par rapport aux mesures brutes. Cependant, les limites relevées invitent à développer un modèle plus complet et adapté aux spécificités des capteurs et de la dynamique étudiée pour une application finale plus précise et fiable.