Séance 1 : Séries de Fourier (première partie)

Exercice 1
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $L \in \mathbb{R}_0$

a) Prouver que si $f(x)$ est une fonction paire alors :

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{L} f(x)\,dx$$

b) Prouver que si $f(x)$ est une fonction impaire alors :

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 0$$

Exercice 2
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction π-périodique telle que

$$f(x) = x^3 \quad \text{pour tout } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

a) Calculer les coefficients de Fourier de f pour le système classique/trigonométrique.

b) Quel lien faites-vous entre la parité de f et les coefficients de cette série de Fourier ?

c) En partant de la série de Fourier obtenu à la question 2.a), retrouver l'expression de la série de Fourier complexe de f. Pour rappel :

$$\cos(\alpha x) = \frac{e^{i\alpha x} + e^{-i\alpha x}}{2} \qquad \sin(\alpha x) = \frac{e^{i\alpha x} - e^{-i\alpha x}}{2i}$$

Exercice 3
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique telle que

$$f(x) = |x| \quad \text{pour tout } x \in]-\pi, \pi].$$

a) Calculer les coefficients de Fourier de f pour le système classique/trigonométrique.

b) Quel lien faites-vous entre la parité de f et les coefficients de cette série de Fourier ?

c) En partant de la série de Fourier obtenue à la question 3.a), retrouver l'expression de la série de Fourier complexe de f.

Exercice 4
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique telle que

$$f(x) = e^x \quad \text{pour tout } x \in [-\pi, \pi[.$$

a) Calculer les coefficients de Fourier de f pour le système en exponentielles complexes.

b) En partant de la série de Fourier obtenue à la question 4.a), retrouver l'expression de la série de Fourier f pour le système classique/trigonométrique.

Exercice 5 On considère les systèmes orthogonaux complets de $L^2([0,L],\mathbb{R})$, avec $L \in \mathbb{R}_0$, suivant :

$$\Phi_p = \{\cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right); k \in \mathbb{N}\}\ ,\ \text{et}\ \Phi_i = \{\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right); k \in \mathbb{N}_0\}$$

1. Déterminer la période T_k des fonctions :
   (a) $\varphi_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right); k \in \mathbb{N}_0$
   (b) $\phi_k(x) = \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right); k \in \mathbb{N}_0$
2. Soit $f \in C^0([0,L],\mathbb{R})$ et de période $2L$. Donnez la forme générale des séries de Fourier d'une telle fonction f dans les systèmes orthogonaux complets Φ_p et Φ_i, ainsi qu'une expression permettant de calculer les coefficients de Fourier correspondant à partir de f et du système orthogonal considéré (on dénotera par a_k les coefficients pour le système Φ_p, et par b_k les coefficients pour le système Φ_i).
3. Que pensez-vous propositions suivantes ? Si elles sont vraies, démontrez, si elles sont fausses prouvez par un contre-exemple.
   (a) $\forall k \in \mathbb{N} : a_k = 0$ si f est impaire
   (b) $\forall k \in \mathbb{N}_0 : b_k = 0$ si f est paire