Séance 4 : Problèmes aux limites

Fait par l'assistant au tableau : 1.d), 2.c)
A faire pendant la séance : 1.a)c)f), 2.b), 3.

Exercice 1 Déterminer les solutions des problèmes aux limites suivants.

a) $\begin{cases} y'' + y = -3\sin 2x \\ y(0) = 1 \\ y'(\pi) = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 0 \\ y(0) = e \\ y(1) = e \end{cases}$

c) $\begin{cases} y''' + 4y' = 0 \\ y(0) + y'(\pi) = 1 \\ y'(0) + y''(0) = 0 \\ y''(0) + y''(\pi) = 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2y'' - 2xy' + 2y = 2 \\ y(1) = 2 \\ y(2) = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x^2y'' - 2xy' + 2y = 2 \\ y'(1) = 2 \\ y'(2) = 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} y'' + y = -2\cos 3x \\ y(0) = y(\pi) \\ y'(0) = y'(\pi) \end{cases}$

Exercice 2 Déterminer les valeurs propres et les fonctions propres des problèmes aux limites ci-dessous.

a) $\begin{cases} -y'' - 2y' - y = \lambda y \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y^{(4)} = \lambda y \\ y'(0) = y'''(0) = 0 \\ y'(1) = y'''(1) = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y'' = \lambda y \\ y(0) = y(2\pi) \\ y'(0) = y'(2\pi) \end{cases}$

Exercice 3 Les problèmes aux limites ci-dessous sont-ils bien posés ?

a) $\begin{cases} 4y'' + y = e^{x^2} \\ y(\pi) + 2y'(0) = 0 \\ y(0) - 2y'(0) = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4y'' + y = e^{x^2} \\ y(\pi) - 2y'(0) = 0 \\ y(0) + 2y'(0) = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2y'' - xy' = \ln(x^2+1) \\ 2y(1) - y'(1) = 2 \\ 2y(3) - 3y'(3) = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2y'' - xy' = \ln(x^2+1) \\ y(1) + y'(1) = -1 \\ y(3) + y'(3) = 1 \end{cases}$