

Séance 4 : Problèmes aux limites

Rappel théorique. Les informations suivantes se trouvent dans le chapitre 16 du cours.

Problèmes aux limites : définition et nombre de solutions

Un problème aux limites linéaire d'ordre n sur l'intervalle $[a, b]$ est un problème de la forme

$$\begin{cases} Ly = f \\ cl_1(y) = c_1 \\ \vdots \\ cl_n(y) = c_n \end{cases}$$

où L est un opérateur différentiel linéaire régulier d'ordre n et $\forall i = 1, \dots, n$, $cl_i(y) = c_i$ est une condition linéaire qui porte sur les valeurs de $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ en a et b , c'est-à-dire aux bords (ou "limites") de l'intervalle $[a, b]$:

$$cl_i(y) := \alpha_{i0} y(a) + \dots + \alpha_{i(n-1)} y^{(n-1)}(a) + \beta_{i0} y(b) + \dots + \beta_{i(n-1)} y^{(n-1)}(b)$$

Contrairement à un problème de Cauchy, dont les conditions sont des conditions initiales, c'est-à-dire évaluées en un unique x_0 appelé instant initial, un problème aux limites, même régulier, ne possède pas toujours une unique solution. Il peut ne pas avoir de solution, en avoir une unique ou en avoir une infinité.

Définition : Un problème aux limites est dit *bien posé* s'il possède une unique solution.

Théorème de l'alternative : Un problème aux limites non-homogène est bien poséssi le problème homogène associé

$$\begin{cases} Ly = 0 \\ cl_1(y) = 0 \\ \vdots \\ cl_n(y) = 0 \end{cases}$$

ne possède que la solution triviale.

Valeurs propres et fonctions propres

Pour un problème aux limites homogène contenant dans son EDL un paramètre λ (généralement considéré complexe), on définit les deux notions suivantes.

Définition : λ est une *valeur propre* du problèmessi le problème admet pour cette valeur de λ une solution non triviale.

Définition : y est une *fonction propre* du problème associée à la valeur propre λ ssi y est une solution non triviale du problème pour cette valeur λ .