



ÉCOLE
POLYTECHNIQUE
DE BRUXELLES

Analyse II

Chapitre 14

Séries de Fourier

Auteur du syllabus : **Anne DELANDTSHEER**

Titulaires du cours : **Thomas LESSINNES & Jérémie ROLAND**

IRCI 2
MATH-H-2000

Année académique 2023 - 2024



Réforme des syllabi

A partir de 1994, la secrétaire Carinne HANON a commencé à taper en \LaTeX texte et formules de l'ensemble des syllabi d'Analyse. Elle a progressivement poursuivi le travail et a tapé les textes et formules des modifications que j'apportais régulièrement aux syllabi. Mais un nouveau format et une utilisation plus fine de \LaTeX étaient devenus nécessaires. J'en ai profité pour restructurer en profondeur les chapitres 1, 2, 3, 4, 7, 8, 10, 14 et 15.

La typographie actuelle de ces notes doit beaucoup à l'excellente utilisation du langage \LaTeX par un groupe de quatre étudiants à l'issue de leur seconde année à l'École polytechnique de Bruxelles durant l'été 2015, puis par de nouvelles équipes d'étudiants Bacheliers en Polytechnique durant les étés 2016, 2017, 2018 2019 et 2020.

Je remercie ici Nicolas ENGLEBERT, Elisabeth et François GRUWÉ, Raphaël HANNAERT, Gilles DECROLY, Christophe LANNON, Lucie CUVELLIEZ, Nathan FARBER, Jean KIMUS, Louis NEWMAN, Raphaël LINSEN, Serge DESIDE, Gulliver VAN ESSCHE, Sami ABDUL SATER, Butrint AVDIJAJ, Younes BOUHJAR, Benoît DUBUS et Lucas PRIEËLS pour leur efficacité, leur sens de la collaboration, leur enthousiasme et l'intelligence de leur travail.

Nicolas a coordonné le travail, a revu le format des syllabi et a tapé une part importante des sections que j'ai réécrites; Lucie, Nathan, Jean, Louis, Raphaël LINSEN, Serge et Gulliver ont prolongé son travail; Elisabeth, François, Louis et Gulliver ont réalisé de splendides figures en TikZ; Raphaël LINSEN et Serge, non contents de refaire "au propre" certains dessins manuscrits, ont complété l'offre par des animations. Raphaël HANNAERT, Gilles et Christophe ont traduit en Beamer certaines des anciennes présentations Powerpoint (certaines parties des chapitres 2, 3, 4, 6, 11, 12, 15, 17 et 22). Comme on n'écrit pas la même chose suivant les outils disponibles, cela m'a fourni une bonne base pour les retravailler, les compléter et en faire de nouvelles portant sur d'autres sections ou chapitres.

Enfin, en 2020, Sami, Butrint, Younes, Benoît et Lucas ont poursuivi le travail ...

Vu la brièveté des délais, des coquilles peuvent s'être glissées dans les nouvelles éditions des syllabi ..., si vous en trouvez, n'hésitez pas à m'en faire part, au cours ou par courriel à ANNE.DELANDTSHEER@ULB.BE

Le travail n'est pas fini, le cours a débuté une nouvelle vie, il est fait pour vous et évolue encore.

Il reste que le principal artisan de votre réussite, c'est vous! Cette branche n'est pas facile. Venez au cours, travaillez-le crayon à la main, cherchez à comprendre les liens entre les différentes affirmations, référez-vous mentalement au sens des formules, non à leur numéro, et testez-vous face à une page blanche. A vous de jouer!

Anne DELANDTSHEER

Table des matières

14 Séries de Fourier	1
14.1 Introduction	1
14.1.1 Son musical et ses harmoniques	1
14.1.2 Analyse harmonique des fonctions périodiques	3
14.1.3 Origine historique des séries de Fourier : la théorie de la chaleur	8
14.1.4 Approximations de fonctions	10
14.2 Produit scalaire et norme L^2	11
14.2.1 Dans un espace vectoriel muni d'un produit scalaire (espace préhilbertien).	11
14.2.2 "La" classe L^2	11
14.2.3 Systèmes libres, orthogonaux, orthonormés	14
14.3 Coefficients de Fourier, projections et meilleure approximation	17
14.3.1 Coefficients de Fourier	17
14.3.2 Projections orthogonales	17
14.3.3 Meilleure approximation en moyenne quadratique	18
14.4 Bessel, Parseval, complétude et convergence L^2	21
14.4.1 Théorème de Pythagore	21
14.4.2 Inégalité de Bessel	22
14.4.3 Convergence L^2 , égalité de Parseval et systèmes complets	22
14.4.4 Les trois types usuels de convergence d'une série de Fourier	25
14.5 Coefficients des séries de Fourier classiques	27
14.5.1 Série sinus et cosinus pour $f \in L^2([-L, L], \mathbb{R})$	27
14.5.2 Série sinus pour $f \in L^2([0, L], \mathbb{R})$	27
14.5.3 Série cosinus pour $f \in L^2([0, L], \mathbb{R})$	27
14.5.4 Série de Fourier complexe de $f \in L^2\left(\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right], \mathbb{R}\right)$	27
14.5.5 Série de Fourier complexe de $f \in L^2\left(\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right], \mathbb{C}\right)$	28
14.5.6 Développement de f sur $[a, b]$	31
14.5.7 Développement d'une fonction de période $2L$ sur \mathbb{R}	31
14.5.8 Développement de f sur $[0, L]$	31
14.6 Fonctions régularisées.	34
14.6.1 Fonction régularisée	34
14.6.2 Limite à droite de dérivée et dérivée à droite	35
14.6.3 Dérivées Généralisées	36
14.6.4 Ecriture simplifiée	37
14.7 Convergence simple des séries classiques	38
14.7.1 Théorème de Dirichlet	38
14.7.2 Le phénomène de Gibbs	46
14.8 Théorèmes de convergence uniforme	48
14.8.1 Généralisation du théorème d'intégration par parties	48

14.8.2	Coefficients de Fourier de la dérivée	48
14.8.3	Convergence uniforme des séries classiques	50
14.8.4	C.U. des séries relatives à un système complet	51
14.8.5	Coefficients d'une série en les φ_j qui converge uniformément vers f . . .	52
14.9	Dérivation, intégration, produit et convolution	53
14.9.1	Dérivée d'une série de Fourier	53
14.9.2	Intégration d'une série de Fourier	53
14.9.3	Produit de séries de Fourier	55
14.9.4	Produit de convolution	56
14.10	Equation de la chaleur (1D)	63
14.10.1	Le problème	63
14.10.2	La méthode	63
14.10.3	Rêvons	64
14.10.4	Une solution pour (EDP) et (CL)	65
14.10.5	Une solution au problème avec C.I.	67
14.10.6	Unicité de la solution du problème	67
14.11	Résolution d'une EDL périodique	70
14.11.1	EDL forcée périodiquement	70
A	Typographie des syllabi	76

Bibliographie pour les séries de Fourier

Les trois premiers ouvrages sont les livres de référence principaux pour ce cours, les suivants n'ont été utilisés qu'anecdotiquement dans ce chapitre.

1. Strauss W.A. : Partial differential equations, an introduction, John Wiley and sons, 2008.
2. Simmons G.F. : Differential equations with applications and historical notes, CRC Press, Chapman and Hall, 2017.
3. Boyce and Di Prima : Elementary differential equations and boundary value problems, John Wiley and sons, 1986.
4. Bolton W. : *Fourier Series*, Mathematics for Engineers, Longman Scientific and Technical, Harlow, Ed. 1995 (chapitre 14).
5. Hubbard B.B. : *Ondes et ondelettes, la saga d'un outil mathématique*, Pour la Science, Belin, Paris, 1995. (Vulgarisation) (chapitre 14).
6. Hubert F. et Hubbard J. : *Calcul scientifique, de la théorie à la pratique*, tome 1, Vuibert 2006.
7. Körner T.W. : *Fourier Analysis*, Cambridge Univ. Press, 1988 (chapitre 14).
8. Spiegel M.R., *Analyse de Fourier*, série Schaum (chapitre 14).
9. Stewart I. : *The problems of mathematics*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1987 (une traduction française "Les Mathématiques" a été publiée dans la collection Pour la Science, éd. Belin (avec quelques coquilles).

[Fourier visualised](#)

[Fourier series, everything is rotation](#)

Vidéos conseillées : [3blue1brown](#) : [Pure Fourier series animation montage](#)

[But what is a Fourier transform? a visual approach](#)

[But what is a Fourier series? From heat flow to circle drawings.](#)

Chapitre 14

Séries de Fourier

14.1 Introduction

14.1.1 Son musical et ses harmoniques

Considérons le **son** pur produit par un diapason, c'est-à-dire, dans le cas de la dimension 1, la variation sinusoïdale de pression de l'air donnée par

$$y = C + A \sin \frac{2\pi}{\lambda}(x - vt), \quad (14.1)$$

où C est la *pression moyenne*,
 λ est la *longueur d'onde*,
 A est l'*amplitude de la vibration*,
 et v est la *vitesse de propagation de l'onde* (c'est-à-dire ici du son).

En un point x fixé, on obtient une *vibration harmonique* pure d' **amplitude** A et de **période** $T = \frac{\lambda}{v}$ (ou encore de **fréquence angulaire** $\omega = 2\pi/T$), c'est-à-dire

$$y = C + A \sin(\omega t + \phi) = C + a \cos \omega t + b \sin \omega t, \quad (14.2)$$

où $a = A \sin \phi$ et $b = A \cos \phi$.

Si ce son fondamental est combiné à plusieurs de ses **harmoniques**, c'est-à-dire à des sons purs de longueur d'onde $\frac{\lambda}{n}$ ($n \in \mathbb{N}_0$), ou de fréquence multiple entier de la fréquence fondamentale ω , on obtient une combinaison linéaire

$$f(t) := a_0 + \sum_{n=1}^k (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t). \quad (14.3)$$

La fonction $t \mapsto f(t)$ est une fonction **périodique** de **période** $T (= \frac{2\pi}{\omega})$, c'est-à-dire que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t+T) = f(t)$.

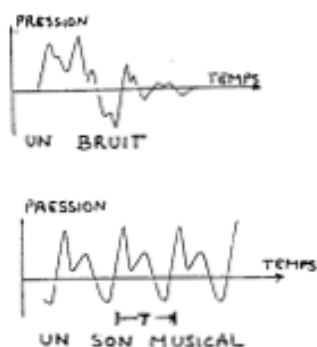
Ceci a amené les musicologues à distinguer un son musical d'un **bruit** en définissant un **son musical** comme étant périodique, c'est-à-dire représenté par une onde définie par une fonction périodique non constante, admettant une période fondamentale, c'est-à-dire une plus petite période. La **hauteur** du son est l'inverse de sa **période fondamentale**.

Le **timbre** d'une note dépend de l'allure de f , c'est-à-dire des coefficients a_n et b_n .

■ Exemple 14.1

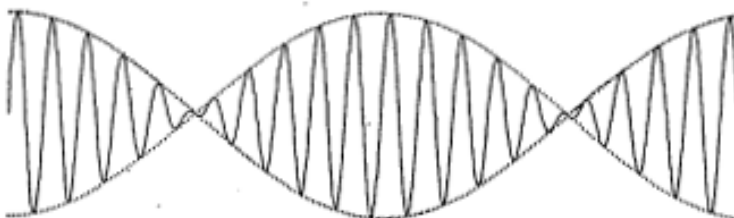
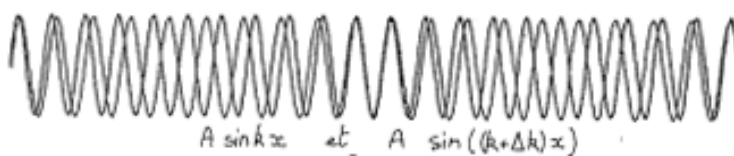
Le **la** de référence a pour fréquence 440 Hz (sa période est donc $T = 1/440$ sec.). La même note à l'octave au-dessus est de période $2T$. ■

◇ ⚠ Il existe des fonctions périodiques n'ayant pas de période fondamentale, comme par exemple la fonction de Dirichlet (valant 1 sur \mathbb{Q} et 0 ailleurs), pour laquelle tout rationnel est une période! Ce genre de pathologie ne nous concerne pas ici.



UN SON FONDAMENTAL et ses PREMIERES HARMONIQUES

Rappel:
Phénomène de battements



$$A(\sin kx + \sin (k+\Delta k)x) = 2A \sin\left(k + \frac{\Delta k}{2}\right)x \cdot \cos \frac{\Delta k}{2}$$

car : $\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$

FIGURE 14.1

14.1.2 Analyse harmonique des fonctions périodiques

Etant donné un son musical, peut-on toujours le décomposer en un son pur fondamental et un nombre fini d'harmoniques? Limitons-nous aux vibrations périodiques (il fut une époque où la périodicité était une condition nécessaire à "la musicalité"). Autrement dit, étant donnée une fonction périodique f de période T , peut-on toujours exprimer f comme une combinaison linéaire de fonctions sinusoïdales de fréquence angulaire $n\omega = n2\pi/T$ où n est un naturel? La réponse est généralement non, mais devient affirmative si on s'autorise à combiner une infinité d'harmoniques, c'est-à-dire si on considère une série

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t), \quad (14.4)$$

dite **série de Fourier**. La décomposition de f en ses harmoniques, c'est-à-dire finalement le calcul des coefficients a_n et b_n , est parfois appelée **analyse harmonique**.

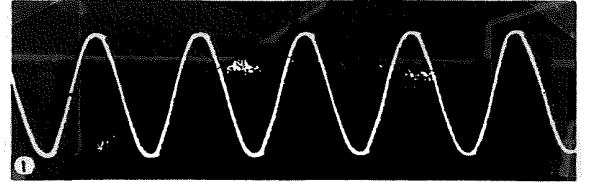
Attention : ce terme désigne d'autre part une branche de mathématiques pures qui est l'étude des fonctions harmoniques, c'est-à-dire des solutions de l'équation $\Delta f = 0$.

Cette analyse a été faite (approximativement) pour la plupart des instruments de musique et est appliquée dans les **synthétiseurs** qui superposent les harmoniques principales (c'est-à-dire correspondant aux plus grandes valeurs absolues des coefficients de Fourier), la superposition des autres harmoniques étant pratiquement inaudible (et de toute manière l'oreille humaine ne peut entendre les sons qu'entre 20 et 20.000 Hz approximativement!).

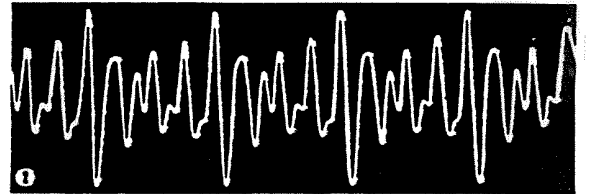
Cette analyse est également faite "biologiquement" par l'oreille interne, qui contient des tas de petites fibres de différentes longueurs, qui vibrent chacune en résonance avec les composantes du son de fréquences multiples de leur fréquence propre (processus de "décomposition" en série de Fourier). Le cerveau, recevant toutes ces informations, reconstitue alors le son ("recomposition" ou sommation de la série de Fourier).

Les figures ci-dessous, extraites de la revue Scientific American (juillet 1948) représentent les sons suivants

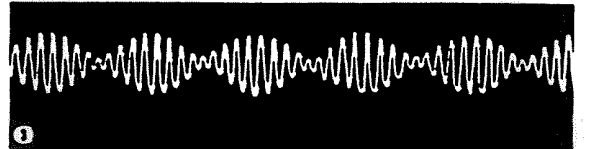
1. le son pur émis par **un diapason**,



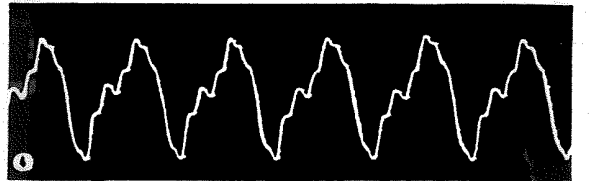
2. la résultante du son émis par **quatre diapasons**,



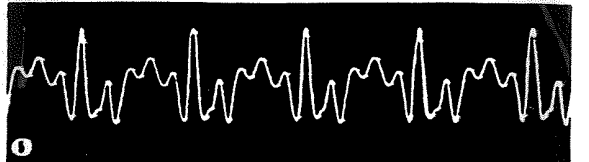
3. les battements résultant de la vibration de **deux diapasons**, accordés sur des fréquences très voisines,
(v.p 7)



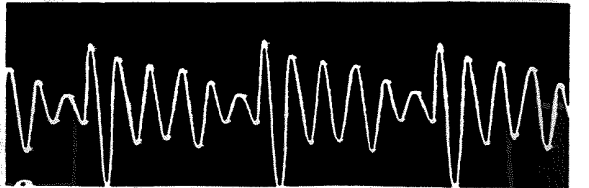
4. le son émis par un **violon**,



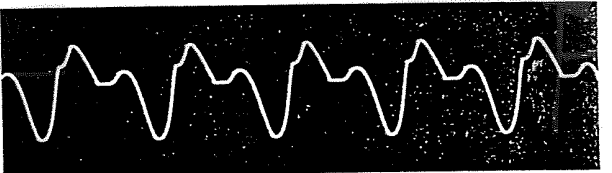
5. le son d'un **hautbois**,



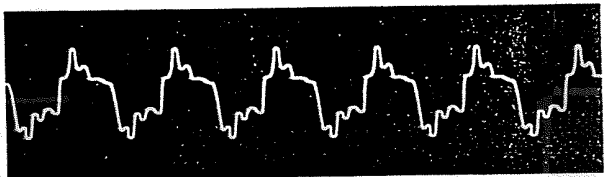
6. le son d'un **cor**,



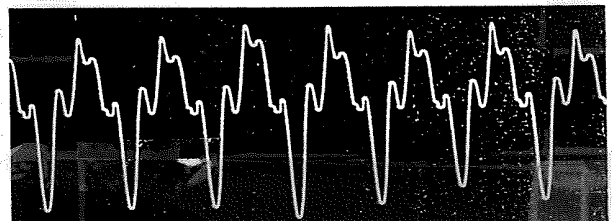
7. le son d'une **flûte**,



8. le son d'une **clarinette**,



9. le son d'un **saxophone**.



Lemme 14.1 Rappel : somme de sinus et cosinus de même fréquence

Toute combinaison linéaire non nulle de sinus et cosinus de même fréquence ω peut s'écrire au choix sous la forme

$$A \cos(\omega t + \phi) \quad \text{ou} \quad A \sin(\omega t + \phi) \quad (14.5)$$

où $\phi, \varphi \in [0, 2\pi[$, $A \in \mathbb{R}_0^+$ et réciproquement, toute sinusoïde ou "cosinusoïde" de ce type est une combinaison linéaire de $\cos \omega t$ et $\sin \omega t$.

En effet, écrivons

$$a \cos \omega t + b \sin \omega t \stackrel{(1)}{=} A \sin(\omega t + \varphi) \stackrel{(2)}{=} A(\sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi) \quad (14.6)$$

(2) est la règle d'addition des arcs pour la fonction sinus.

L'égalité (1) est donc vraie ssi

$$\begin{cases} a = A \sin \varphi \\ b = A \cos \varphi. \end{cases} \quad (14.7)$$

Ceci définit univoquement (a, b) en fonction de (A, φ) . En élevant les 4 membres au carré et en sommant, on trouve A^2 , et comme $A \in \mathbb{R}_0^+$, on en conclut que $A = \sqrt{a^2 + b^2}$. Comme $\left(\frac{a}{A}, \frac{b}{A}\right)$ est de norme 1, il y a donc un et un seul $\varphi \in [0, 2\pi[$ tel que ce $\left(\frac{a}{A}, \frac{b}{A}\right) = (\sin \varphi, \cos \varphi)$, ce qui définit univoquement l'angle φ dans $[0, 2\pi[$.

L'écriture explicite de ce φ est plus lourde

$$\varphi = \begin{cases} \arctan \frac{a}{b} & \text{si } b > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } b = 0 \text{ et } a > 0 \\ \arctan \frac{a}{b} + \pi & \text{si } b < 0 \\ \frac{3\pi}{2} & \text{si } b = 0 \text{ et } a < 0 \end{cases} \quad (14.8)$$

Un raisonnement analogue nous donne

$$\phi = \begin{cases} \arctan \frac{-b}{a} & \text{si } a > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } a = 0 \text{ et } b < 0 \\ \arctan \left(-\frac{b}{a}\right) + \pi & \text{si } a < 0 \\ \frac{3\pi}{2} & \text{si } a = 0 \text{ et } b > 0 \end{cases} \quad (14.9)$$

Que se passe-t-il si on somme deux fonctions sinusoïdales de fréquences différentes ? La formule de Simpson donne une réponse immédiate. Rappelons qu'on peut s'en sortir autrement.

■ Exemple 14.2

$$\sin(\omega + \Delta)t + \sin \omega t = 2 \cos \frac{\Delta}{2}t \cdot \sin \frac{2\omega + \Delta}{2}t \quad (14.10)$$

Démonstration.

$$\operatorname{Im} e^{i(\omega+\Delta)t} + \operatorname{Im} e^{i\omega t} = \operatorname{Im} (e^{i(\omega+\Delta)t} + e^{i\omega t}).$$

$$e^{i(\omega+\Delta)t} + e^{i\omega t} = e^{i(\omega+\frac{\Delta}{2})t} \left(e^{i\frac{\Delta}{2}t} + e^{-i\frac{\Delta}{2}t} \right) = e^{i(\omega+\frac{\Delta}{2})t} \left(\cos \frac{\Delta}{2}t + \cos \left(-\frac{\Delta}{2}t \right) \right)$$

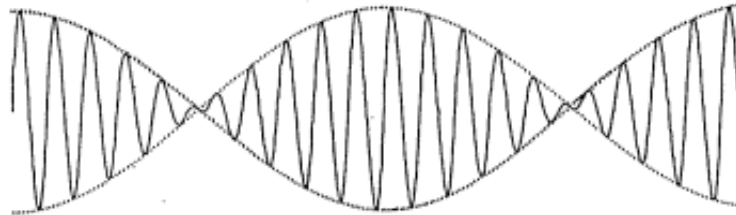
$$= 2 \cos \frac{\Delta}{2}t \left(\cos \left(\omega + \frac{\Delta}{2} \right) t + i \sin \left(\omega + \frac{\Delta}{2} \right) t \right). \quad \blacksquare$$

Donc la superposition de deux ondes $\sin(\omega + \Delta)t$ et $\sin \omega t$ donne une onde sinusoïdale $\sin \left(\omega + \frac{\Delta}{2} \right) t$ (dont la fréquence est la moyenne de celles des deux ondes initiales) modulée par une onde sinusoïdale de “basse” fréquence $2 \cos \frac{\Delta}{2}t$ (basse si $0 \leq \Delta < \omega$). \blacksquare

Si Δ est très petit par rapport à ω (ce qu’on avait pas encore supposé jusqu’ici), alors, on a un **phénomène de battements**



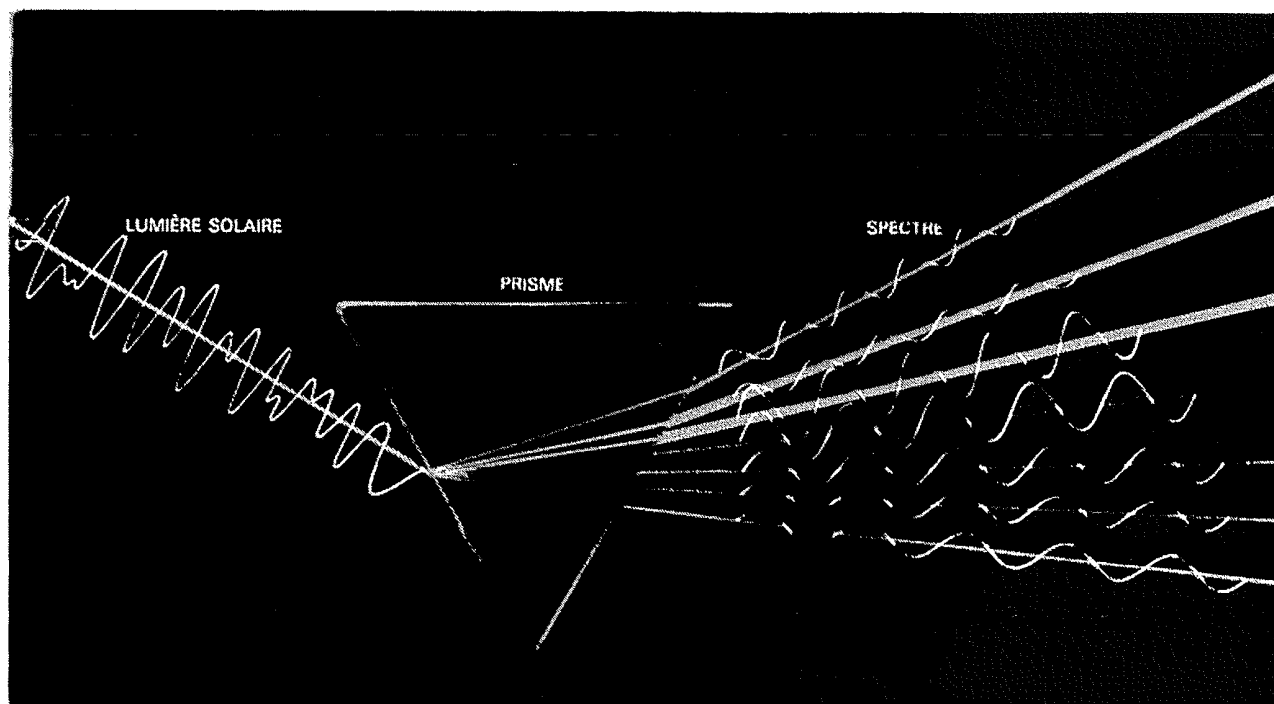
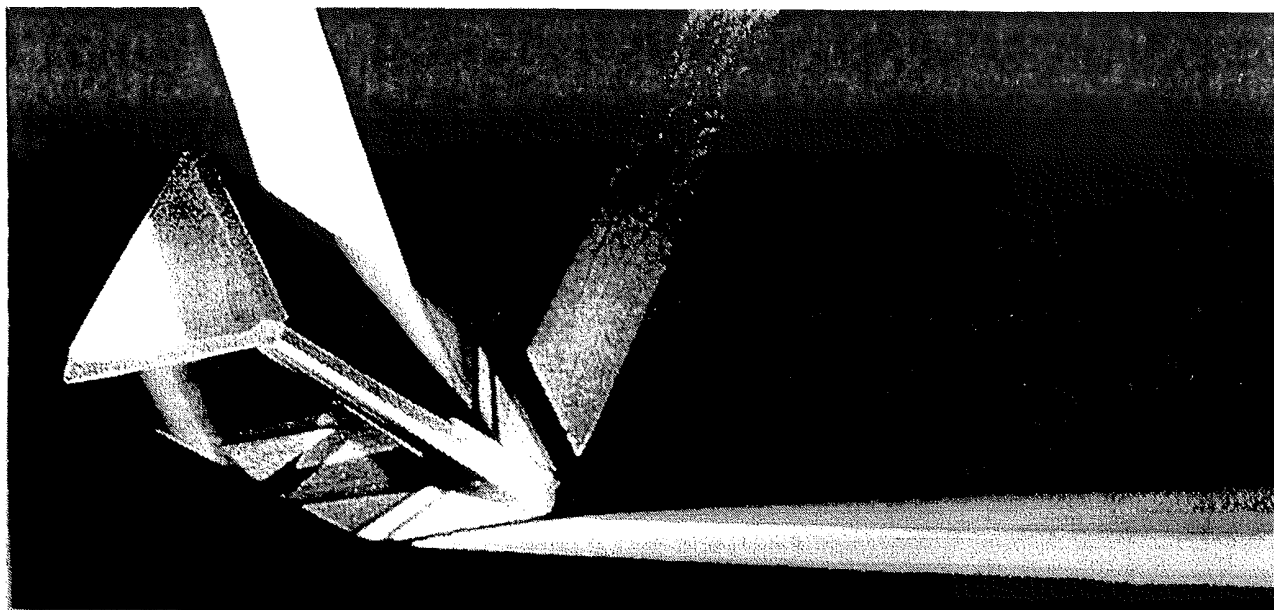
$$A \sin \omega \text{ et } A \sin(\omega + \Delta)t \quad (14.11)$$



$$A(\sin \omega t + \sin(\omega + \Delta)t) = 2A \sin \left(\omega + \frac{\Delta}{2} \right) t \cos \frac{\Delta}{2}t \quad (14.12)$$

14.1.6 Généralisation aux autres phénomènes périodiques

Ceci ne s'applique pas seulement aux ondes sonores mais à tous les types d'ondes, notamment électromagnétiques. Les séries de Fourier s'utilisent notamment dans l'analyse de circuits électriques, lorsque le courant ou le voltage sont des ondes périodiques non sinusoïdales : des ondes carrées, des sinusoïdes à moitié redressées, ou d'autres ondes non sinusoïdales. De telles ondes peuvent résulter de l'application d'une onde sinusoïdale à un composant ayant une caractéristique non linéaire, comme des diodes, des transistors et des bobines dont le noyau est en fer. Insistons sur le fait que même des fonctions qui ne sont pas dérivables (ni même continues !) peuvent être développées en série de Fourier.



1. UN FAISCEAU DE LUMIÈRE SOLAIRE est dispersé par un prisme en un spectre de composantes à différentes longueurs d'onde (en haut), tout comme une fonction est décomposée en ses composantes de Fourier. Sur le schéma du bas, l'intensité de la lumière qui pénètre dans le prisme varie en fonction du temps. La lumière qui sort du prisme a été séparée dans l'espace en couleurs pures. Ce

spectre révèle l'amplitude des composantes, de la lumière entrant dans le prisme, à chaque longueur d'onde. Ainsi une intensité lumineuse en fonction du temps a été transformée en une série d'amplitudes en fonction de la longueur d'onde : la transformation de Fourier associe, à un signal temporel, un ensemble de couples amplitude-phase, chaque couple étant associé à une longueur d'onde.

14.1.3 Origine historique des séries de Fourier : la théorie de la chaleur

Au début du 19^e siècle, le traitement des métaux se développe dans l'industrie et pose le problème de l'étude de la conduction de la chaleur dans une tige métallique. L'intérêt de ce type de problème est encore renforcé par les scientifiques qui cherchent à savoir si l'on peut déduire la température au sein du globe terrestre, à partir de la température en surface.

Bref, l'étude de l'EDP de la chaleur et de sa variante stationnaire, respectivement

$$a^2 \Delta u = \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{et} \quad \Delta u = 0,$$

a mené naturellement Daniel Bernoulli aux séries de Fourier. L'étude de telles séries sera développée par Fourier dans son ouvrage *Théorie de la propagation de la chaleur dans les solides*, mémoire qui foisonne d'idées nouvelles, particulièrement fécondes, plus ou moins bien justifiées (initialement, plutôt moins que plus).

Nous résoudrons complètement un tel problème à la section 14.10 et nous ferons un large usage de la méthode sous-jacente, dite méthode de séparation des variables lorsque nous rencontrerons des EDP avec conditions au bord (chapitres 23, 24, 25 et 17).

Issue de motivations très pratiques, l'étude des séries de Fourier est à l'origine de **la plupart des avancées mathématiques importantes du 19^e siècle**, y compris l'élucidation et l'introduction de notions aussi essentielles que celles de *fonction* (Fourier), *d'intégrale* (Riemann), de *convergence uniforme* (Weierstrass) et d'*ensemble* (Dirichlet et Cantor). Mais ces retombées ne sont pas limitées aux mathématiques, puisque leurs applications au développement d'**outils pour les sciences physiques sont tout aussi importantes**.

A l'occasion du 250^{ème} anniversaire de la naissance de Fourier, ses travaux ont été célébrés et leur apport aux **mathématiques des 20^e et 21^e siècles** remis en lumière.

Néanmoins, du point de vue purement pratique de l'étude de la chaleur, il y avait à redire. Retenons du texte qui suit *l'importance du scepticisme vis-à-vis des modèles mathématiques*, notamment vis-à-vis de la *linéarisation des phénomènes* (par commodité ou conviction plutôt qu'à bon escient).

Néanmoins, du point de vue purement pratique, il y a à redire. Retenons du texte qui suit l'importance du scepticisme vis-à-vis des modèles mathématiques, notamment vis-à-vis de la linéarisation des phénomènes (par commodité ou conviction plutôt qu'à bon escient).

Le fiasco Fourier

Les idées mathématiques sont donc souvent suggérées par des problèmes physiques, mais je trouve frappant que les meilleures idées soient à ce point précieuses qu'elles tendent à dépasser et à occulter les sujets physiques qui leur ont donné naissance. Un exemple classique à l'appui de cette thèse est la théorie des séries de Fourier. Tout a commencé avec les travaux de Joseph Fourier sur l'écoulement de la chaleur. Ayant représenté les phénomènes par une équation, dite équation de la chaleur, il s'efforça ensuite de la résoudre. Au cours de ce travail il s'aperçut que tout serait merveilleux s'il réussissait à représenter n'importe quelle fonction par une série de sinus et cosinus. Il mit au point une longue démonstration, établit une formule donnant les coefficients de la série, et s'en servit dans son ouvrage *Théorie analytique de la chaleur* pour résoudre une grande variété de problèmes d'échanges thermiques. L'importance prise de nos jours par les séries de Fourier est *considérable* ; l'importance de l'équation de la chaleur et des échanges thermiques ne le sont pas moins, mais...

Si l'on en croit un expert comme Clifford Truesdell, l'effet des travaux de Fourier sur la théorie de la chaleur a été désastreux. Parce qu'il existait une méthode simple pour intégrer l'équation de la chaleur de Fourier, chacun s'empressa d'utiliser cette méthode sans jamais remettre en question la validité du modèle, et sans se demander si la chaleur se comportait bien comme Fourier l'avait dit. En fait elle ne le faisait pas. L'équation de la chaleur de Fourier est une équation aux dérivées partielles linéaires (c'est d'ailleurs pourquoi l'analyse de Fourier s'applique si bien). Il n'y a pas longtemps, un ingénieur éminent disait : « La Nature ne peut pas être assez cruelle pour se servir d'équations non linéaires ». C'était prendre ses désirs pour des réalités, car on sait aujourd'hui que tous les phénomènes physiques intéressants sont régis par des équations non linéaires, et la propagation de la chaleur en fait partie. Truesdell va jusqu'à dire que le succès mathématique de la méthode de Fourier a fait reculer la thermodynamique de plusieurs décennies, car les gens se sont contentés de faire des calculs au lieu de faire des mesures. Qu'est-ce qui explique alors l'importance des séries de Fourier ? Le fait qu'elles s'appliquent à de nombreux types d'équations aux dérivées partielles linéaires, autres que l'équation de la chaleur, et que ces équations abondent dans la physique, en optique et en électronique notamment. On peut noter à ce propos que l'électronique n'existait pas au temps de Fourier, (ne serait-ce que parce qu'on n'avait pas encore découvert l'électron). L'équation de la chaleur s'est aussi révélée d'une grande importance dans les mathématiques abstraites des variétés. Mais elle n'a que peu de rapports, autres qu'heuristiques, avec l'écoulement de la chaleur. Je dois ajouter enfin que les raisons données par Fourier de son développement des fonctions en série de sinus et de cosinus étaient complètement absurdes. Les démonstrations sont approximatives, confuses et *fausses*. Le style de démonstration de Fourier ne peut conduire qu'à de mauvaises mathématiques. Les réponses ne sont pas toujours *exactes*, et les arguments « physiques » de Fourier ne sont que des prétextes pour justifier ce qu'il *pensait* être exact, et qui s'est révélé souvent faux. Tout ce domaine est beaucoup plus subtil que Fourier ne l'imaginait, et il a fallu près d'un siècle de travail pour s'en faire une idée correcte. L'une des conséquences de son travail fut l'œuvre de Cantor sur la théorie des ensembles, et nombre des applications actuelles de l'analyse de Fourier seraient impossibles si l'on n'avait pas d'abord acquis une compréhension correcte de ce qui se passe, mathématiquement parlant.

Je n'irai pas jusqu'à dire que toutes les relations entre les mathématiques et la réalité sont de ce type, mais il est étonnant de constater que très souvent le début des relations suit ce schéma. Si, comme certains le disent, les seules mathématiques intéressantes sont celles qui sont explicitement orientées vers les problèmes du « monde réel », quelle raison aurait-on de poursuivre les recherches quand personne ne s'intéresse plus au problème de départ ? Si la fin passe avant les moyens, pourquoi attribuer une valeur aux moyens et se désintéresser de la fin ? Or les points d'application d'une même idée mathématique peuvent se déplacer avec le temps : les fibrés jouent actuellement un rôle très important dans la théorie du champ quantique, et ils ont été introduits dans le travail d'Elie Cartan sur la géométrie différentielle au début du siècle. La première application physique importante de la géométrie différentielle fut la relativité générale publiée par Einstein en 1916. Cartan était certainement intéressé par les applications, mais sa motivation était purement mathématique. De plus, elle ne pouvait concerner le champ quantique qui n'est apparu qu'après 1960. La théorie quantique elle-même avait à peine démarré en 1916.

Comment expliquer qu'une œuvre mathématique accomplie, soit en vue d'une application physique particulière, soit tout simplement pour elle-même, puisse jouer plus tard un rôle essentiel dans une théorie physique qui n'existait même pas au moment où le travail mathématique a pris naissance ? Il me semble que c'est l'intérêt de la théorie *pour les mathématiques elles-mêmes*, et non pas ses origines physiques éventuelles, qui joue le rôle essentiel. Une idée valable accroît le pouvoir des mathématiques, et ce pouvoir accru permet de résoudre des problèmes nouveaux. Est-il besoin d'une autre explication ? Un concept puissant reste potentiellement applicable, quelles que soient ses origines, par le simple fait qu'il est puissant : il n'est pas nécessaire d'avoir une application en vue pour le développer. Un mathématicien ordinaire travaillant sur une idée médiocre sera condamné à la stérilité, non parce qu'il n'a pas pensé à une application possible, mais simplement parce que c'est un mathématicien ordinaire imbu d'un idée médiocre. Pour un mathématicien appliqué ordinaire qui travaille sur une application médiocre, la même remarque s'applique.

Extrait de : Stewart I. : *The problems of mathematics*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1987
(une traduction française "Les Mathématiques" a été publiée dans la collection Pour la Science, éd. Belin).

14.1.4 Approximations de fonctions

Approche locale d'une fonction par une série de Taylor.

La plupart des fonctions, même si elles sont de classe C^∞ ou si elles sont analytiques, ne sont pas *élémentaires* (c'est-à-dire ne peuvent pas être exprimées à partir des fonctions polynomiales, trigonométriques et exponentielles en n'utilisant qu'un nombre fini de fois les opérations d'addition, de multiplication, de passage à l'inverse ou à la réciproque, et de composition). Aussi, effectuer des calculs sur ces fonctions est souvent difficile, voire impossible.

Heureusement, nous avons vu comment approcher une fonction suffisamment dérivable au voisinage d'un point x_0 par un **polynôme** : on peut obtenir une approximation par un polynôme de degré $\leq k$ telle que l'erreur (en valeur absolue) soit un $o(|x - x_0|^k)$ et soit majorée par exemple par $\frac{|x - x_0|^{k+1}}{(k+1)!} M_{k+1}$, où M_{k+1} est un majorant de $|f^{(k+1)}(x)|$ sur le segment joignant x à x_0 . Ceci est valable dès que f est de classe C^{k+1} . Ce genre d'approximation est souvent largement suffisant en pratique. De plus, si f est de classe C^∞ , alors on peut écrire sa **série** de Taylor autour de x_0 , mais cette série ne converge pas nécessairement, et, même si elle converge uniformément, elle ne converge pas nécessairement vers f (à moins qu'on sache que f est analytique)! Tout au plus peut-on dire, lorsque cette série converge, que sa **somme** est une fonction qui a le même développement de Taylor que f autour de x_0 .

Néanmoins, les séries de Taylor (ou séries de puissances de rayon de convergence $\neq 0$) s'avèrent utiles, puisqu'elles permettent des intégrations et dérivations terme à terme. Historiquement, elles permirent, sinon des démonstrations rigoureuses, du moins la découverte de nombreux résultats cruciaux dans le développement des mathématiques.

Approche globale d'une fonction par une série de Fourier

La série de Taylor d'une fonction f ne reflète que le comportement local de f au voisinage du seul point x_0 (par l'intermédiaire des $f^{(k)}(x_0)$). Lorsqu'on travaille sur un domaine déterminé (par exemple un intervalle I), on cherche une forme de développement de f qui traduise plutôt le **comportement global de f sur I tout entier**. C'est le cas du développement de Fourier.

La situation s'avère alors bien meilleure :

non seulement toute fonction f de classe C^1 définie sur l'intervalle $] - \pi, +\pi[$ possède un et un seul développement en série de Fourier, mais cette série converge en moyenne quadratique sur $] - \pi, +\pi[$ et converge uniformément sur $[-\pi + \epsilon, +\pi - \epsilon]$ aussi petit que soit $\epsilon > 0$, et sa somme est nécessairement égale à f sur $] - \pi, +\pi[$. Mieux encore : l'hypothèse $f \in C^1$ peut être notablement allégée (à petit prix), jusqu'à englober des fonctions discontinues!

Choisir son système de base

Plutôt que de développer f relativement au système $\{(x - x_0)^k | k \in \mathbb{N}\}$ des puissances entières et positives de $x - x_0$, Fourier¹ a développé f relativement au système

$$\left\{1, \cos \frac{2k\pi x}{L}, \sin \frac{2k\pi x}{L} ; k \in \mathbb{N}_0\right\}.$$

Ce système s'est imposé à lui naturellement : il cherchait les solutions de l'EDP de la chaleur le long d'une barre de longueur L satisfaisant des conditions "aux limites" (les extrémités de la barre), et les solutions les plus simples sont ces fonctions-là. Nous y reviendrons (voir 14.10 et chapitres 23, 24, 25 et 17). Nous verrons que pour d'autres conditions aux limites et d'autres EDP, les fonctions apparaissant naturellement sont différentes (fonctions de Bessel pour une

1. La méthode de séparation des variables avait déjà été introduite par Bernoulli et utilisée par Lagrange, mais Fourier fut le premier à calculer les coefficients (de Fourier) d'une fonction quelconque

corde suspendue oscillant, fonctions sinusoidale et de Bessel pour une membrane vibrante circulaire, polynômes de Hermite pour l'oscillateur harmonique quantique ...)

14.2 Produit scalaire et norme L^2

14.2.1 Dans un espace vectoriel muni d'un produit scalaire (espace préhilbertien).

Tout comme l'ensemble $\{x^n; n \in \mathbb{N}\}$, l'ensemble $\mathcal{F} = \{1, \cos nx, \sin nx; n \in \mathbb{N}_0\}$ forme une *partie libre* de l'espace vectoriel réel des fonctions analytiques sur I , où I est un quelconque intervalle au sens large. Néanmoins, cette partie libre est surtout utile si I est de longueur 2π , car 2π est une période pour chacune des fonctions de cette partie libre (Voir aussi la section 14.10 et les chapitres 16 et 24.). Suivant le contexte, d'autres parties libres peuvent s'avérer plus appropriées, c'est pourquoi nous généraliserons immédiatement notre propos à des systèmes plus généraux de fonctions.

D'autre part, développer une fonction f en série de Fourier consiste à calculer les "composantes de f " suivant les vecteurs de cette espèce de base généralisée \mathcal{F} . Si V est un espace vectoriel de dimension finie n et admettant $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ pour base, nous savons que ce genre de calcul est grandement facilité si \mathcal{E} est orthonormé, car alors on a, pour tout vecteur \vec{f} de V ,

$$\vec{f} = \sum_{k=1}^n c_k \vec{e}_k \quad \text{où} \quad c_k = \langle \vec{f}, \vec{e}_k \rangle \quad . \quad (14.13)$$

Il est en particulier utile de disposer d'un produit scalaire dans l'espace vectoriel V des fonctions considérées.

14.2.2 "La" classe L^2

Définition 14.1

- Une fonction réelle ou complexe f définie et intégrable sur $]a, b[$ et telle que $\int_a^b |f|^2 < +\infty$ est dite **de carré sommable** ou **de carré intégrable** sur $]a, b[$.
- $L^2([a, b], \mathbb{K})$ est la classe des fonctions à valeurs dans \mathbb{K} de carré intégrable sur $]a, b[$, munie du **produit scalaire (ou hermitien)** standard dans $L^2([a, b], \mathbb{K})$, à savoir

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f \cdot g^* \quad (14.14)$$

où g^* désigne la fonction complexe conjuguée de g .

- La **norme standard dans l'espace fonctionnel** $L^2[a, b]$ (aussi dite **norme L^2** ou **norme en moyenne quadratique** est définie par

$$\|f\|_2 := \sqrt{\langle f, f \rangle} = \left(\int_a^b |f|^2 \right)^{1/2} \quad (14.15)$$

◇ Notons qu'en toute généralité, l'intégrabilité de f est indépendante de celle de f^2 .

$$(i) \int_a^b f \text{ converge} \not\Rightarrow \int_a^b f^2 \text{ converge}.$$

En effet, la fonction $x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est intégrable (au sens des intégrales de Riemann généralisées), alors que son carré ne l'est pas.

$$(ii) \int_a^b f \text{ existe} \not\Rightarrow \int_a^b f^2 \text{ converge}.$$

En effet, la fonction $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ -1 & \text{si } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ n'est pas intégrable, mais son carré l'est.

En fait, elle est intégrable au sens de Lebesgue et son intégrale de Lebesgue vaut -1.

La dénomination "de carré sommable" ("square integrable") vient du fait que sous des hypothèses précisées ci-dessous l'intégrabilité de f^2 entraîne l'intégrabilité de f sur $[a, b]$.

Ceci est vrai si on utilise la notion d' "**intégrale au sens de Lebesgue**" (que nous ne définirons pas ici, mais qui est plus performante du point de vue théorique que celle de Riemann). L'intégrabilité de f^2 entraîne alors celle de f (qui est équivalente à celle de $|f|$).

Ceci est également vrai si nous nous restreignons aux fonctions localement intégrables sauf en un nombre fini de pôles. Par **localement intégrable sauf en un nombre fini de pôles**, nous entendons que $[a, b]$ admet une subdivision $(a = x_0 | \dots | x_n = b)$ telle que f est bornée et intégrable sur tout compact inclus dans les $]x_{i-1}, x_i[$. Dans ce cas, l'intégrabilité de f (resp. de $|f|$) sur $[a, b]$ est synonyme de la convergence de chacune des intégrales $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f$ (resp. $\int_{x_{i-1}}^{x_i} |f|$).

Démonstration.

Comme nous savons que

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f \text{ C.A.} \Rightarrow \int_{x_{i-1}}^{x_i} f \text{ converge}, \quad (14.16)$$

nous en déduisons que

$$\int_a^b |f| \text{ existe} \Rightarrow \int_a^b f \text{ existe}. \quad (14.17)$$

D'autre part, de l'implication

$$1 \leq (f(x))^2 \Rightarrow |f(x)| \leq (f(x))^2, \quad (14.18)$$

nous déduisons

$$\int_{x_{i-1}^+}^{\frac{x_{i-1}+x_i}{2}} f^2 < +\infty \Rightarrow \int_{x_{i-1}^+}^{\frac{x_{i-1}+x_i}{2}} |f| < +\infty. \quad (14.19)$$

Ceci fournit la preuve que si f est localement intégrable sur $[a, b]$ sauf au voisinage d'un nombre fini de pôles, alors l'intégrabilité de f^2 entraîne l'intégrabilité de f sur $[a, b]$. ■

Il convient bien entendu de vérifier que $L^2([a, b], \mathbb{C})$ est bien un espace vectoriel complexe et que le produit est un produit scalaire hermitien qui est bien défini sur $L^2([a, b], \mathbb{C})$.

Nous verrons que ... c'est presque vrai!

Pour ce faire, nous utiliserons l'inégalité

$$|f(x)| \cdot |g(x)| \leq \frac{1}{2}(|f(x)|^2 + |g(x)|^2), \quad (14.20)$$

vraie $\forall x \in [a, b]$, et conséquence immédiate de l'inégalité $(|f(x)| - |g(x)|)^2 \geq 0$.

Dès lors, si f et g sont de carré sommable, alors

(i) $f + g$ l'est aussi, car

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x) + g(x)|^2 dx &\leq \int_a^b (|f(x)|^2 + |g(x)|^2 + 2|f(x)||g(x)|) dx \\ &\leq 2 \int_a^b (|f(x)|^2 + |g(x)|^2) dx < \infty, \end{aligned}$$

(ii) $\langle f, g \rangle$ est bien défini, c'est-à-dire que $\int_a^b fg^*$ existe, ce qui résulte de

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x)g^*(x)| dx &= \int_a^b |f(x)||g(x)| dx \\ &\leq \frac{1}{2} \int_a^b (|f(x)|^2 + |g(x)|^2) dx < \infty. \end{aligned}$$

Les vérifications suivantes sont pure routine :

$\forall f, g, h \in L^2([a, b], \mathbb{C}), \forall \lambda \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \langle f, g + h \rangle &= \langle f, g \rangle + \langle f, h \rangle, \\ \langle \lambda f, g \rangle &= \lambda \langle f, g \rangle, \\ \langle f, g \rangle &= \langle g, f \rangle^*, \\ \langle f, f \rangle &\geq 0. \end{aligned}$$

La condition $\langle f, f \rangle = 0 \Rightarrow f = 0$ est bien satisfaite si on se restreint à la classe des fonctions continues sur $[a, b]$ (pourquoi?). Dans $C^0([a, b], \mathbb{K})$, on a bien un produit scalaire (ou hermitien) au sens strict.

⚠ Par contre, la condition $\langle f, f \rangle = 0 \Rightarrow f = 0$ n'est **pas** satisfaite dans $L^2([a, b], \mathbb{K})$.

Heureusement, tout n'est pas perdu, car

$$\langle f, f \rangle = \int_a^b |f|^2 = 0 \Rightarrow f = 0 \text{ presque partout,} \quad (14.21)$$

c'est-à-dire que l'ensemble des points où f est non nulle est de mesure nulle.

Ce produit n'est donc pas *stricto sensu* un produit scalaire hermitien dans $L^2([a, b], \mathbb{K})$, mais nous dirons que c'en est un au sens large.

Comme nous tenons à pouvoir traiter aussi des fonctions discontinues, nous regroupons les fonctions de $L^2([a, b], \mathbb{C})$ en classes d'équivalence en définissant :

Définition 14.2

f et g sont L^2 -équivalentes ($f \stackrel{L^2}{=} g$) :ssi $\|f - g\|_2 = 0$ (ssi $f = g$ "presque partout"). ■

Si on travaille sur l'espace de ces classes d'équivalence (c'est-à-dire qu'en pratique on identifie les fonctions qui ne diffèrent que sur un ensemble de mesure nulle), alors le produit ci-dessus devient un produit scalaire hermitien. On a donc notamment

$$\begin{aligned} \langle f + g, f + g \rangle &= \langle f, f \rangle + \langle g, g \rangle + \langle f, g \rangle + \langle f, g \rangle^* \\ &= \langle f, f \rangle + \langle g, g \rangle + 2\operatorname{Re} \langle f, g \rangle, \end{aligned}$$

ainsi que l'**inégalité de Cauchy-Schwarz**

$$|\langle f, g \rangle|^2 \leq \langle f, f \rangle \cdot \langle g, g \rangle. \quad (14.22)$$

Il est évident que, si on se restreint à la classe $L^2([a, b], \mathbb{R})$ des fonctions réelles de carré sommable sur $[a, b]$, on obtient un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire (moyennant l'identification des fonctions ne différant que sur un ensemble de mesure nulle).

Généralisation du produit scalaire

Pour certaines applications, nous aurons à considérer le produit scalaire **relativement** à une fonction "**poids**" p , continue et positive sur $[a, b]$:

Définition 14.3 Le produit scalaire **relativement** à une fonction "**poids**" p est défini par

$$\forall f, g \in L_p^2([a, b], \mathbb{K}) : \quad \langle f, g \rangle_p := \int_a^b p f g^*,$$

où $L_p^2([a, b], \mathbb{K})$ est la classe des fonctions f telles que $\|f\|_p := \sqrt{\int_a^b p |f|^2} < +\infty$ ■

Proposition 14.2 $L_p^2([a, b], \mathbb{K})$ est un **espace pré-hilbertien**, c'est-à-dire

- $L_p^2([a, b], \mathbb{K})$ est un espace vectoriel sur \mathbb{K} ,
- $(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle_p$ est un produit scalaire (ou hilbertien) au sens large sur $L_p^2([a, b], \mathbb{K})$,
- $f \mapsto \|f\| := \sqrt{\int_a^b p |f|^2}$ est une norme au sens large sur $L_p^2([a, b], \mathbb{K})$.

D'où vient la fonction poids p ? Généralement, elle apparaît naturellement lors de la résolution d'EDP avec conditions au bord (voir chapitres 16 et 23 à 25).

■ **Exemple 14.3** Exemples de fonction poids utilisées en Analyse numérique et Physique .

- ▷ Pour les polynômes de Chebyshev sur $] -1, 1[$: $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
- ▷ Pour les polynômes de Laguerre sur $]0, +\infty[$: $p(x) = e^{-x}$,
- ▷ Pour les polynômes de Hermite sur $] -\infty, +\infty[$: $p(x) = e^{-x^2}$.

Comme la généralisation des résultats à $p \neq 1$ est facile, nous nous restreindrons la plupart du temps au cas $p = 1$ (pour alléger l'écriture).

14.2.3 Systèmes libres, orthogonaux, orthonormés

Définition 14.4

Soit $\Phi = \{\varphi_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ un ensemble dénombrable (dit **système**) de fonctions de $L^2([a, b], \mathbb{C})$.

Φ est un système **libre** si toute partie finie de Φ est libre (pour l'indépendance linéaire),

Φ est un système **orthogonal** si $\langle \varphi_j, \varphi_k \rangle = 0 \quad \forall j \neq k$,

Φ est un système **orthonormé** si $\langle \varphi_j, \varphi_k \rangle = \delta_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ 1 & \text{si } j = k \end{cases}$ (delta de Kronecker). ■

Tout système orthogonal Φ fournit le système orthonormé $\{\varphi_j / \|\varphi_j\|_2 ; j \in \mathbb{N}\}$.

■ **Exemple 14.4**

Commençons par les trois systèmes trigonométriques classiques.

- (i) Le système $\Phi = \{1, \cos(kx), \sin(kx) ; k \in \mathbb{N}_0\}$ est orthogonal sur $[-\pi, \pi]$.

On calcule facilement $\|\cos(kx)\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(kx) dx$ et $\|\sin(kx)\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(kx) dx$ en

utilisant les relations

$$\cos^2(\theta) = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \text{ et } \sin^2(\theta) = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$$

et en utilisant les symétries de $\cos(2kx)$ sur $[-\pi, \pi]$.

... on peut en conclure que **sur** $[-\pi, \pi]$: $\|\cos(kx)\|_2^2 = \|\sin(kx)\|_2^2 = \frac{2\pi}{\pi} = \pi$.

Le système orthonormé correspondant est $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(kx)}{\sqrt{\pi}} ; k \in \mathbb{N}_0 \right\}$.

Noter que ce système est également orthonormé sur tout intervalle $[a, a + 2\pi]$.

Si l'on doit travailler sur un intervalle I quelconque — disons de longueur 2ℓ — on considère le système

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\ell}}, \frac{1}{\sqrt{\ell}} \cos\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right), \frac{1}{\sqrt{\ell}} \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) ; k \in \mathbb{N}_0 \right\} \quad (14.23)$$

sur $I = [-\ell, \ell]$ ou $[a, a + 2\ell]$.

Les fonctions du système étant toutes périodiques de période 2ℓ sur \mathbb{R} , il est clair que si un développement (relativement à Φ) convient à une fonction f sur $[-\ell, \ell]$, alors le même développement convient à la fonction f "**prolongement périodique de f** ", définie sur \mathbb{R} par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]-\ell, \ell] : f(x) := f_{\text{pro}}(x + 2n\ell). \quad (14.24)$$

- (ii) Le système $\Phi = \{\sin kx ; k \in \mathbb{N}_0\}$ est orthogonal sur $[0, \pi]$ et le système orthonormé correspondant est $\left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kx ; k \in \mathbb{N}_0 \right\}$.

A nouveau, remarquons que si un développement (relativement à Φ) convient pour une fonction f définie sur $[0, \pi]$, alors il convient encore pour la fonction f_{imp} "**prolongement impair périodique de f** " de demi-période π , définie sur \mathbb{R} par $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, \pi] :$

$$\begin{aligned} f_{\text{imp}}(x + 2n\pi) &:= f(x) \\ f_{\text{imp}}(-x + 2n\pi) &:= -f(x). \end{aligned} \quad (14.25)$$

On généralise ceci aux fonctions définies sur $[0, L]$ en remplaçant π par L dans les formules ci-dessus.

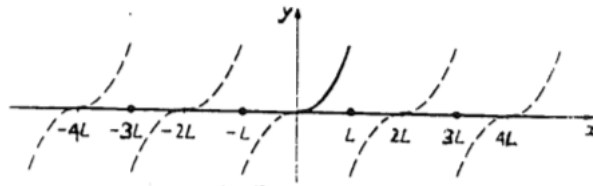


FIGURE 14.2

- (iii) De même, le système $\Phi = \{\cos kx ; k \in \mathbb{N}\}$ est orthogonal sur $[0, \pi]$. Dans les applications, on le préférera au système précédent si on a affaire à une fonction paire périodique de demi-période π . La fonction f_{pair} "**prolongement pair périodique de f** " est alors définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, \pi] :$

$$\begin{aligned} f_{\text{pair}}(x + 2n\pi) &:= f(x) \\ f_{\text{pair}}(-x + 2n\pi) &:= f(x). \end{aligned} \quad (14.26)$$

Ceci se généralise aux fonctions définies sur $[0, L]$ en remplaçant partout π par L .

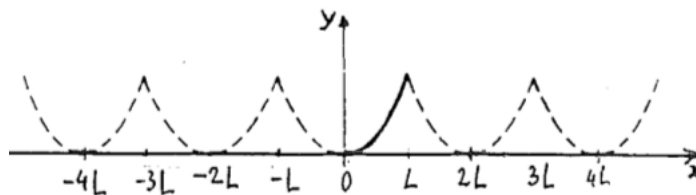


FIGURE 14.3

- (iv) Le système $\{x^n ; n \in \mathbb{N}\}$ est libre (ces fonctions sont indépendantes) mais non orthogonal. Si l'on travaille sur l'intervalle $[-1, 1]$ avec le produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 fg$, on peut obtenir, par la méthode d'**orthogonalisation de Gram-Schmidt**, le système orthogonal :

$$\begin{aligned} \Phi &= \left\{ 1, x, \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x), \dots \right\} \\ &= \{P_k ; k \in \mathbb{N}\}, \end{aligned}$$

où P_k est un polynôme de degré k , appelé le $k^{\text{ème}}$ **polynôme de Legendre** (de norme $\frac{1}{\sqrt{k + \frac{1}{2}}}$). Nous reviendrons sur les propriétés de ces polynômes au chapitre 17.

Nous verrons plus tard qu'en fait la véritable motivation pour considérer le système Φ est liée à la résolution d'une famille d'EDL, dites de Legendre, elles-mêmes associées à une EDP avec conditions au bord.

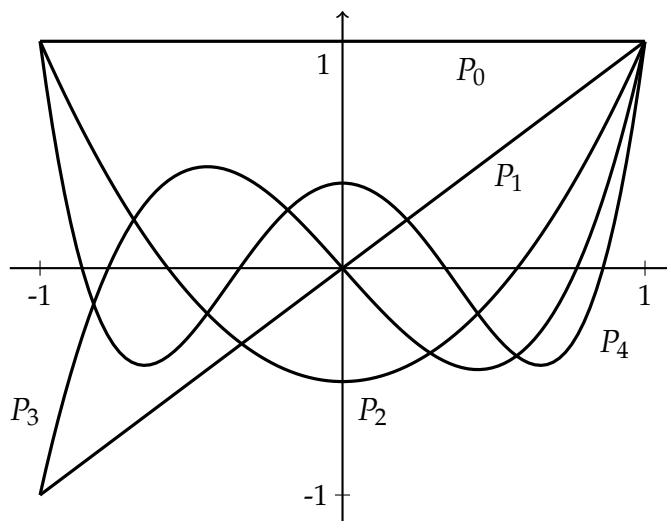


FIGURE 14.4

Le polynôme de Legendre $P_k(x)$ de degré k est solution de l'EDL **de Legendre**

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + k(k + 1)y = 0 \quad (14.27)$$

(voir section 17.11).

■

14.3 Coefficients de Fourier, projections et meilleure approximation

14.3.1 Coefficients de Fourier

On travaille ici dans l'espace vectoriel $L^2([a, b], \mathbb{K})$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , avec le produit scalaire espace pré-hilbertien

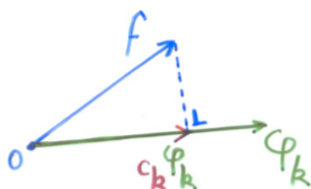
$$\langle f, g \rangle_p = \int_a^b f g^* p,$$

où p est un poids éventuel.

▷ Soit $\Phi = (\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ un système orthogonal de fonctions dans $L^2([a, b], \mathbb{K})$.

Définition 14.5 $\text{proj}_{\varphi_k}(f) :=$ la projection orthogonale de f sur $\text{vect}\{\varphi_k\}$ (ou sur φ_k). ■

Soit $\text{proj}_{\varphi_k}(f) =: c_k \varphi_k$



$$\begin{aligned} f - c_k \varphi_k &\perp \varphi_k \\ \Leftrightarrow \langle f - c_k \varphi_k, \varphi_k \rangle &= 0 \\ \Leftrightarrow \langle f, \varphi_k \rangle - c_k \langle \varphi_k, \varphi_k \rangle &= 0 \\ \Leftrightarrow c_k &= \frac{\langle f, \varphi_k \rangle}{\langle \varphi_k, \varphi_k \rangle} \end{aligned}$$

Proposition 14.3 $\text{proj}_{\varphi_k}(f) = c_k \varphi_k$, où c_k est le coefficient de Fourier de f relativement à φ_k ,

$$\text{proj}_{\varphi_k}(f) = \frac{\langle f, \varphi_k \rangle}{\langle \varphi_k, \varphi_k \rangle} \varphi_k \quad \square$$

On verra que c_k est aussi le coefficient de φ_k dans $\text{proj}_{\text{vect}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}}(f)$ et dans le développement de Fourier de f .

14.3.2 Projections orthogonales

Proposition 14.4

Si $V_n := \text{vect}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$, alors $\text{proj}_{V_n}(f) = \text{proj}_{\varphi_1}(f) + \dots + \text{proj}_{\varphi_n}(f)$

Démonstration.

Par hypothèse, $\Phi_n := \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ est une base orthogonale de V_n et $\text{proj}_{V_n}(f) \in V_n$.

Donc $\text{proj}_{V_n}(f) = \sum_{\ell=1}^n a_\ell \varphi_\ell$, où (par déf. de $\text{proj}_{V_n}(f)$) les a_ℓ sont tels que :

$$\begin{aligned}
& (f - \sum_{\ell=1}^n a_\ell \varphi_\ell) \perp \varphi_k \quad \forall k = 1, \dots, n \\
& \Leftrightarrow \langle f - \sum_{\ell=1}^n a_\ell \varphi_\ell, \varphi_k \rangle = 0 \quad \forall k = 1, \dots, n \\
& \Leftrightarrow \langle f, \varphi_k \rangle - a_k \langle \varphi_k, \varphi_k \rangle = 0 \quad \forall k = 1, \dots, n \\
& \Leftrightarrow a_k = \frac{\langle f, \varphi_k \rangle}{\langle \varphi_k, \varphi_k \rangle} =: c_k \quad \forall k = 1, \dots, n,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire que $\forall k = 1, \dots, n$,

le coefficient a_k dans $\text{proj}_{V_n}(f)$ est le coefficient de Fourier de f relativement à φ_k . ■

Définition 14.6

La **série de Fourier** de f relativement à $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ est $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k = \sum_{k=1}^{\infty} \text{proj}_{\varphi_k}(f)$. ■

14.3.3 Meilleure approximation en moyenne quadratique

Soient $\Phi = \{\varphi_k; k \in \mathbb{N}\}$ un système orthonormé et $\Phi|_{\leq n} := \{\varphi_k; k = 0, 1, \dots, n\}$.

Définition 14.7 $\sum_{k=0}^n a_k \varphi_k$ réalise la **meilleure approximation en moyenne quadratique de f** dans $\text{vect}\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ (ou relativement à $\Phi|_{\leq n}$) : ssi les coefficients a_k sont les scalaires qui minimisent l'erreur en moyenne quadratique

$$\left\| f - \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k \right\|_2. \quad (14.28)$$

Proposition 14.5 Ce sont les premiers coefficients de Fourier de f relativement à Φ .

Les coefficients a_k réalisant la meilleure approximation en moyenne quadratique (L^2) de f relativement à $\Phi|_{\leq n}$ sont les $n+1$ premiers coefficients de Fourier de f relativement à Φ .

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\left\| f - \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k \right\|_2^2 &= \left\langle f - \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k, f - \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k \right\rangle \\
&= \langle f, f \rangle - \sum_{k=0}^n a_k^* \langle f, \varphi_k \rangle - \sum_{k=0}^n a_k \langle \varphi_k, f \rangle + \sum_{j,k} a_k a_j^* \langle \varphi_k, \varphi_j \rangle \\
&= \langle f, f \rangle - \sum_{k=0}^n (a_k^* c_k + a_k c_k^* - a_k a_k^*) \\
&= \underbrace{\langle f, f \rangle}_{\text{donné}} + \sum_{k=0}^n \underbrace{(c_k - a_k)(c_k^* - a_k^*)}_{\geq 0} - \underbrace{\sum_{k=0}^n c_k c_k^*}_{\text{donné}}.
\end{aligned}$$

Donc $\left\| f - \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k \right\|_2^2$ est minimum $\Leftrightarrow \forall k = 0, \dots, n : c_k = a_k$.

Corollaire 14.6

Posons $a_k(n) :=$ le coefficient de φ_k dans la meilleure approximation L^2 relativement à $\Phi|_{\leq n}$ et $a_k(m) :=$ le coefficient de φ_k dans la meilleure approximation L^2 relativement à $\Phi|_{\leq m}$.

$$n < m \Rightarrow a_k(n) = a_k(m) \quad \forall k \leq n.$$

R La situation est analogue pour les développements de Taylor de f au voisinage d'un point x_0 :

$$T_{f,x_0,m}(x) = T_{f,x_0,n}(x) + \sum_{k=n+1}^m \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad \text{si } n < m. \quad (14.29)$$

\triangle : le développement de Taylor d'ordre n autour de x_0 n'est généralement **pas** le polynôme de degré $\leq n$ réalisant la meilleure approximation pour la norme supréum sur $[x_0 - R, x_0 + R]$.

La proposition précédente peut aussi s'énoncer :

Proposition 14.7 Soit $V_n := \text{vect} \{ \varphi_0, \dots, \varphi_n \}$.

Le vecteur de V_n le plus proche de f est la projection orthogonale de f sur V_n

$$\text{proj}_{V_n} f = \sum_k c_k \varphi_k$$

où c_k est le coefficient de Fourier de f relativement à φ_k .

Définition 14.8

Etant donné un système orthogonal $\Phi \subseteq L^2([a, b], \mathbb{C})$,

- ▷ les **coefficients de Fourier** de $f \in L^2([a, b], \mathbb{C})$ relativement à $\Phi = \{ \varphi_k \}_{k \geq 0}$ sont les nombres $c_k := \frac{\langle f, \varphi_k \rangle}{\langle \varphi_k, \varphi_k \rangle}$,
- ▷ la **série de Fourier** de f (relativement à Φ) est alors $\sum_{j=0}^{\infty} c_j \varphi_j$,
- ▷ on écrit $f \sim \sum_{j=0}^{\infty} c_j \varphi_j$ et on dit que f **engendre** la série $\sum_{j=0}^{\infty} c_j \varphi_j$.

On note parfois $\sum_{j=0}^{\infty} c_j(f) \varphi_j$ pour expliciter le fait que la fonction génératrice est f , et donc les c_j dépendent de f .

Rappel d'algèbre linéaire

Soit V un espace vectoriel avec une base $(\vec{e}_k)_{k \in K}$ orthonormée, finie ou non.

Soit $V_n := \{e_1, \dots, e_n\}$ et $\vec{v} \in V$.

- Si $\dim V = n$, alors

$$\vec{v} = \sum_{k=1}^n c_k \vec{e}_k \xleftrightarrow{\text{Identification}} (c_1, \dots, c_n)$$

$$\|\vec{v}\|^2 = \sum_{k=1}^n |c_k|^2 = \|(c_1, \dots, c_n)\|^2$$

de plus :

si $\vec{v} \perp \vec{e}_k \quad \forall k$ alors $\vec{v} = \vec{0}$.

- Si $\dim V > n$, alors

$$\vec{v} = \text{proj}_{V_n}(\vec{v}) + (\vec{v} - \text{proj}_{V_n}(\vec{v}))$$

d'où, par Pythagore :

$$\|\vec{v}\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^n c_k \vec{e}_k \right\|^2 + \left\| \vec{v} - \sum_{k=1}^n c_k \vec{e}_k \right\|^2$$

$$\text{i.e. } \left\| \vec{v} - \sum_{k=1}^n c_k \vec{e}_k \right\|^2 = \|\vec{v}\|^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2$$

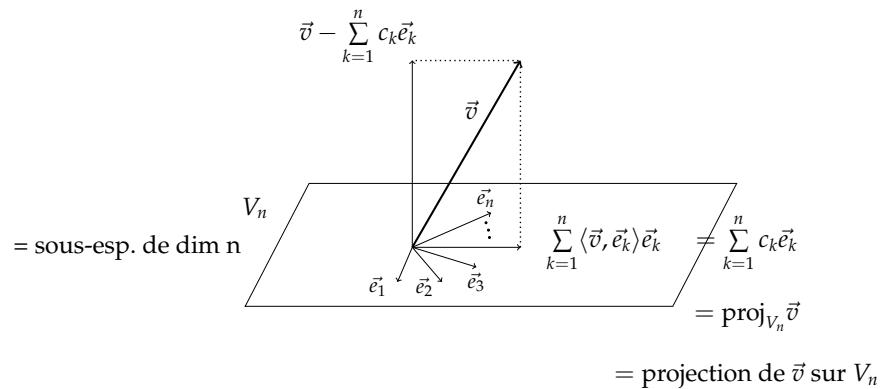


FIGURE 14.5

14.4 Bessel, Parseval, complétude et convergence L^2

14.4.1 Théorème de Pythagore

Soient : f une fonction dans $L^2 := L^2([a, b], \mathbb{K})$
 $\Phi = (\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$ un système orthogonal dans L^2 ,
 c_k les coefficients de Fourier de f relativement à Φ .

Travaillons dans le sous-espace vect $\{f, E_n\}$,
où E_n est le sous-espace vectoriel de L^2
engendré par la partie libre orthogonale
 $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$.

Alors $\sum_{k=0}^n c_k \varphi_k$ est la projection orthogonale de f
sur le sous-espace E_n

et $f - \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k$ est orthogonal à cette projection.

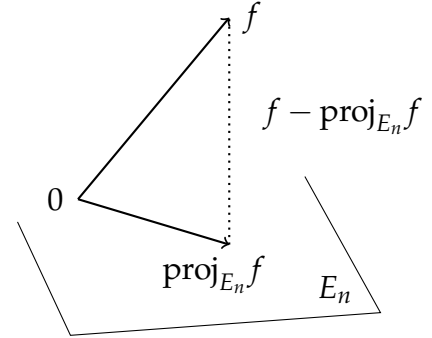


FIGURE 14.6

Lemme 14.8 Théorème de Pythagore dans vect $\{f, \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n\} = \text{vect } \{f, E_n\}$

$$\|\text{proj}_{E_n} f\|^2 + \|f - \text{proj}_{E_n} f\|^2 = \|f\|^2 \quad (14.30)$$

$$\left\| \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k \right\|^2 + \left\| f - \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k \right\|^2 = \|f\|^2 \quad (14.31)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \left(\left\| f - \sum_{j=0}^n c_j \varphi_j \right\|_2 \right)^2 &= \|f\|_2^2 - \left\langle f, \sum_{j=0}^n c_j \varphi_j \right\rangle - \left\langle \sum_{j=0}^n c_j \varphi_j, f \right\rangle + \sum_{(j,k)} \langle c_j \varphi_j, c_k \varphi_k \rangle \\ &= \|f\|_2^2 - \sum_{j=0}^n c_j^* \langle f, \varphi_j \rangle - \sum_{j=0}^n c_j \langle \varphi_j, f \rangle + \sum_{(j,k)} c_j c_k^* \langle \varphi_j, \varphi_k \rangle \\ &= \|f\|_2^2 - \sum_{j=0}^n c_j^* c_j \|\varphi_j\|_2^2 - \sum_{j=0}^n c_j c_j^* \|\varphi_j\|_2^2 + \sum_{j=0}^n c_j c_j^* \|\varphi_j\|_2^2 \\ &= \|f\|_2^2 - \sum_{j=0}^n |c_j|^2 \|\varphi_j\|_2^2. \end{aligned}$$

■

L'identité de Pythagore se note encore

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^n |c_k|^2 \|\varphi_k\|^2 + R_n^2, \text{ où } R_n := \left\| f - \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k \right\|_2.$$

R_n est la norme L^2 du reste du développement de Fourier tronqué à $k \leq n$,

R_n est aussi la distance (au sens L^2) de f au sous-espace V_n .

En particulier, on voit que $R_n \geq 0$ et R_n est une fonction (une suite) décroissante de n .

L'observation $R_n \geq 0$ nous donnera l'inégalité de Pythagore et, à la limite, celle de Bessel.

Les cas où $R_n \rightarrow 0$ pour $n \rightarrow \infty$ donneront à la limite l'égalité de Parseval.

Corollaire 14.9 Inégalité de Pythagore

$$\|\text{proj}_{E_n} f\|^2 \leq \|f\|^2 \quad (14.32)$$

$$\left\| \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k \right\|^2 = \sum_{k=0}^n |c_k|^2 \|\varphi_k\|^2 \leq \|f\|^2 \quad (14.33)$$

14.4.2 Inégalité de Bessel**Corollaire 14.10** — Inégalité de Bessel (= limite de l'inégalité de Pythagore).

$$\sum_{j=0}^{\infty} |c_j|^2 \|\varphi_j\|_2^2 \leq \|f\|_2^2$$

Démonstration.

Il suffit de passer à la limite dans l'inégalité de Pythagore en observant que le passage à la limite préserve les inégalités (non strictes). ■

Corollaire 14.11 Si le système Φ est orthonormé, alors $\sum_{j=0}^{\infty} |c_j|^2$ converge et $c_j \rightarrow 0$.

La démonstration est immédiate.

Notons que ceci est vrai dès que $\|\varphi_j\|_2 = c^{\text{te}}$ (et plus généralement dès que l'ensemble des normes L^2 des φ_j possède un minorant strictement positif : $\exists \epsilon > 0 : \forall j : \|\varphi_j\|_2^2 > \epsilon$).

14.4.3 Convergence L^2 , égalité de Parseval et systèmes complets**Définition 14.9** — Convergence en moyenne quadratique vers f .

$$\sum_{j=0}^{\infty} c_j \varphi_j \stackrel{L^2}{=} f : \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{j=0}^n c_j \varphi_j \right\|_2 = 0.$$

càd : la distance L^2 entre f et son développement de Fourier tronqué à $k \leq n$ tend vers 0. ■

Proposition 14.12 — Equivalence de Parseval.

$$\sum_{j=0}^{\infty} c_j \varphi_j \stackrel{L^2}{=} f \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} |c_j|^2 \|\varphi_j\|_2^2}_{\text{Égalité de Parseval pour } f} = \|f\|_2^2. \quad (14.34)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \text{Par hypothèse, } \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left\| f - \sum_{j=0}^n c_j \varphi_j \right\|_2^2}_{=0} &= 0. \\ &= \|f\|_2^2 - \sum_{j=0}^n |c_j|^2 \|\varphi_j\|_2^2 \end{aligned}$$

△ Comme $\langle f, \varphi_j \rangle =: c_j \|\varphi_j\|_2^2$, on a

$$\sum_{j=0}^n |c_j|^2 \|\varphi_j\|_2^2 = \sum_{j=0}^n \frac{|\langle f, \varphi_j \rangle|^2}{\|\varphi_j\|_2^2} \quad (14.35)$$

Définition 14.10

Le système Φ est dit **complet dans** $L^2([a, b], \mathbb{R})$:ssi $\forall f \in L^2([a, b], \mathbb{R}) : f \stackrel{L^2}{=} \sum_{j=0}^{\infty} c_j \varphi_j$.

Théorème 14.13 — Théorème de Parseval.

Si $\sum_{j=0}^{\infty} c_j \varphi_j$ est la série de Fourier de $f \in L^2([a, b], \mathbb{R})$ relativement à un système orthogonal $\Phi = \{\varphi_0, \varphi_1, \dots\}$ complet dans $L^2([a, b], \mathbb{R})$, alors

$$\sum_{j=0}^{\infty} |c_j|^2 \|\varphi_j\|_2^2 = \|f\|_2^2$$

On a vu que la thèse de ce théorème est équivalente à la convergence en moyenne quadratique de $\sum_{j=0}^{\infty} c_j \varphi_j$ vers f : $\sum_{j=0}^{\infty} c_j \varphi_j \stackrel{L^2}{=} f$.

Proposition 14.14 Si le système orthogonal $\Phi = \{\varphi_0, \varphi_1, \dots\}$ est complet dans $L^2([a, b], \mathbb{R})$ et que $f \in L^2([a, b], \mathbb{R})$, alors

1. $\forall j \in \mathbb{N} : f \perp \varphi_j \Rightarrow \|f\|_2 = 0$.
2. $f \in C_{\text{morc}}^0([a, b], \mathbb{R})$ et $\forall j \in \mathbb{N} : f \perp \varphi_j \Rightarrow f = 0$ sur $[a, b] \setminus F$, où $|F| < \infty$.
3. $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$ et $\forall j \in \mathbb{N} : f \perp \varphi_j \Rightarrow f = 0$ sur $[a, b]$.

Démonstration. Utiliser le Théorème de Parseval.

Corollaire 14.15

Dans un système Φ complet dans $L^2[a, b]([a, b], \mathbb{R})$:

$$c_j(f) = c_j(g) \quad \forall j \quad \Rightarrow \quad f = g \text{ presque partout } \left(\text{i.e. } \int_a^b |f - g|^2 = 0 \right). \quad (14.36)$$

Autrement dit, les coefficients de Fourier déterminent *presque* univoquement, c'est-à-dire à un ensemble de mesure nulle près, leur fonction génératrice.

■ Exemple 14.5

On verra au chapitre 16 que les trois systèmes trigonométriques classiques sont complets :

▷ $\{1, \sin(kx), \cos(kx); k \in \mathbb{N}_0\}$ est complet dans $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$,

▷ $\{\sin(kx); k \in \mathbb{N}_0\}$ est complet dans $L^2([0, \pi], \mathbb{R})$,

▷ $\{\cos(kx); k \in \mathbb{N}\}$ est complet dans $L^2([0, \pi], \mathbb{R})$.



AU CONTRAIRE :

$\Phi = \{\cos(kx); k \in \mathbb{N}\}$ n'est **pas complet** dans $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ (ni dans $L^2([a, a + 2\pi], \mathbb{R})$).

En effet : $\sin x \perp \cos kx \quad \forall k \in \mathbb{N}$, alors que $\|\sin x\|_2 = \sqrt{\pi}$.

■

Proposition 14.16 — Identification des coefficients des séries de Fourier.

Soit $\Phi = \{\varphi_0, \varphi_1, \dots\}$ un système orthogonal complet dans $L^2([a, b], \mathbb{R})$.

1. Si la série de Fourier $\sum_{j=0}^{\infty} c_j \varphi_j$ converge en moyenne quadratique vers la fonction nulle, alors $\forall j \in \mathbb{N} : c_j = 0$.
2. Si les deux séries de Fourier $\sum_{j=0}^{\infty} c_j \varphi_j$ et $\sum_{j=0}^{\infty} c'_j \varphi_j$ convergent en moyenne quadratique vers une même fonction $f \in L^2([a, b], \mathbb{R})$, alors $\forall j \in \mathbb{N} : c_j = c'_j$.

Autrement dit, si deux séries de Fourier relativement au même système orthogonal complet sont équivalentes pour la convergence en moyenne quadratique, alors leurs coefficients sont égaux.

Corollaire 14.17 — Identification des coefficients des séries trigonométriques orthogonales.

Comme le système trigonométrique $\Phi = \{\frac{1}{2}, \sin(kx), \cos(kx); k \in \mathbb{N}_0\}$ est orthogonal dans $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kt) = \frac{a'_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a'_k \cos(kt) + \sum_{k=1}^{\infty} b'_k \sin(kt)$$

$$\Rightarrow \forall k : a_k = a'_k \wedge b_k = b'_k.$$

14.4.4 Les trois types usuels de convergence d'une série de Fourier

Rappelons que la série $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ converge vers S au sens (*) ssi la suite de ses sommes partielles

$$s_n = \sum_{k=0}^n f_k \text{ converge vers } S \text{ au sens (*)}.$$

Définition 14.11

Convergence simple (ponctuelle ou point par point)

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k \stackrel{C.S.}{=} f \Leftrightarrow \forall x \in [a, b] : \left| \sum_{k=0}^n f_k(x) - f(x) \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (14.37)$$

Convergence uniforme (au sens L^{∞} , c'est-à-dire selon $\|\cdot\|_{\infty}$)

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k \stackrel{C.U.}{=} f \Leftrightarrow \sup_{x \in [a, b]} \left| \sum_{k=0}^n f_k(x) - f(x) \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Convergence en moyenne quadratique (au sens L^2 , c'est-à-dire selon $\|\cdot\|_2$)

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k \stackrel{L^2}{=} f \Leftrightarrow \int_a^b \left| \sum_{k=0}^n f_k(x) - f(x) \right|^2 dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Notons que cette intégrale est bien $(b-a)$ fois la moyenne sur $[a, b]$ des carrés des distances de $s_n(x)$ à $S(x)$.

Illustration des distances L^{∞} et L^2 dans le cas particulier où $S = \text{cte}$.

$\|s_n - S\|_{\infty} = \text{plus grande hauteur}$

$\|s_n - S\|_2 = (\text{aire de la région hachurée})^{1/2}$

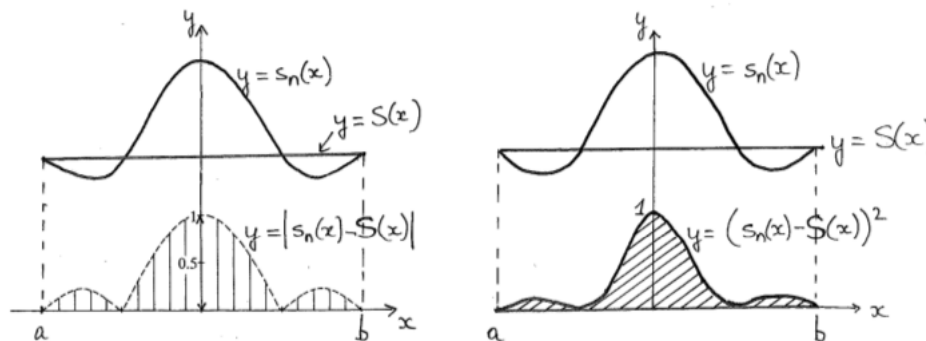


FIGURE 14.7

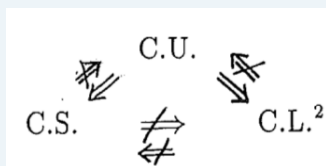
Proposition 14.18 — Liens entre ces différents types de convergence.

FIGURE 14.8

Démonstration.

Les deux implications annoncées sont évidentes (pourquoi?).

Fournissons à présent des contre-exemples aux implications barrées.

Travaillons sur $]0, 1[$.■ **Exemple 14.6**

$$s_n(x) = x^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{C.S.}$$

$$\sup_x |s_n(x)| = 1 \not\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{non C.U.}$$

$$\int_0^1 x^{2n} dx = \frac{1}{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{C.L.}^2.$$

$$\textcircled{R} \quad s_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k \quad \text{où } f_0(x) = 1, \quad f_k(x) = (x-1)x^{k-1}.$$

■ **Exemple 14.7**

$$s_n(x) = \frac{n}{1+n^2x^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{C.S.}$$

$$\sup_x |s_n(x)| = n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \quad \text{non C.U.}$$

$$\int_0^1 \frac{n^2}{(1+n^2x^2)^2} dx = n \int_0^n \frac{dy}{(1+y^2)^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \quad \text{non C.L.}^2.$$

$$\text{Notons que } s_n(x) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{1+k^2x^2} - \frac{k-1}{1+(k-1)^2x^2} \right).$$

■ **Exemple 14.8**

$$s_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq \frac{1}{2} \\ n & \text{si } x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$s_n\left(\frac{1}{2}\right) = n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \quad \text{non C.S.}$$

$$\sup_x |s_n(x)| = n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \quad \text{non C.U.}$$

$$\int_0^1 (s_n(x))^2 dx = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{C.L.}^2.$$

14.5 Coefficients des séries de Fourier classiques

14.5.1 Série sinus et cosinus pour $f \in L^2([-L, L], \mathbb{R})$

On utilise le système orthogonal Φ sur $[-L, +L] : \Phi = \left\{ \frac{1}{2}, \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right), \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) ; k \in \mathbb{N}_0 \right\}$.

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega_0 x) + b_k \sin(k\omega_0 x))$$

$$\text{où } a_k := \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos\left(\frac{k\pi}{L}t\right) dt, \quad b_k := \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin\left(\frac{k\pi}{L}t\right) dt \quad \text{et } \omega_0 = \frac{\pi}{L}.$$

Remarquons que $\frac{a_0}{2}$ est la valeur moyenne de f sur $[-L, L]$.

Pour chaque fréquence $\omega_k = k\omega_0$, on retiendra le couple de coefficients (a_k, b_k) .

14.5.2 Série sinus pour $f \in L^2([0, L], \mathbb{R})$

Système orthogonal $\Psi = \left\{ \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) ; k \in \mathbb{N}_0 \right\}$ sur $[0, L]$.

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right), \quad \text{où } b_k := \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \sin\left(\frac{k\pi}{L}t\right) dt.$$

14.5.3 Série cosinus pour $f \in L^2([0, L], \mathbb{R})$

Système orthogonal $\Psi = \left\{ \frac{1}{2}, \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) ; k \in \mathbb{N}_0 \right\}$ sur $[0, L]$.

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right), \quad \text{où } a_k := \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos\left(\frac{k\pi}{L}t\right) dt.$$

14.5.4 Série de Fourier complexe de $f \in L^2\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right], \mathbb{R})$

Rappel : $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$, $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$.

Notons $\omega_0 := 2\pi/T$.

$$\begin{aligned} & \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega_0 t) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{e^{ik\omega_0 t} + e^{-ik\omega_0 t}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{e^{ik\omega_0 t} - e^{-ik\omega_0 t}}{2i} \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k - ib_k}{2} e^{ik\omega_0 t} + \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-ik\omega_0 t} \right) \\ &=: c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k e^{ik\omega_0 t} + c_{-k} e^{-ik\omega_0 t}) =: \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega_0 t} \end{aligned} \tag{14.38}$$

$$\text{où } c_0 := \frac{a_0}{2} \text{ et } c_{\mp k} = \frac{a_k \pm ib_k}{2} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

A partir des définitions de a_k et de b_k , on vérifie aisément que

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-ik\omega_0 t} dt, \quad (14.39)$$

où $\omega_0 = 2\pi/T$.

Ceci est en accord avec la définition générale de la série de Fourier de $f \in L^2([-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}], \mathbb{C})$ relativement au système $\Psi = \{e^{ikx}; k \in \mathbb{Z}\}$.

14.5.5 Série de Fourier complexe de $f \in L^2([-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}], \mathbb{C})$

Notons que $\text{vect}_{\mathbb{C}}\{\cos x, \sin x\} = \text{vect}_{\mathbb{C}}\{e^{ix}, e^{-ix}\}$ dans $C^\infty([-\pi, \pi], \mathbb{C})$. En ce sens, les systèmes $\{1, \cos(kx), \sin(kx); k \in \mathbb{N}_0\}$ et $\{1, e^{ikx}, e^{-ikx}; k \in \mathbb{N}_0\}$ sont "équivalents" sur $[-\pi, \pi]$.

Le système $\Psi = \{e^{ikx}; k \in \mathbb{Z}\}$ est orthogonal dans $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$: $\langle e^{ikx}, e^{ilx} \rangle = 2\pi\delta_{kl}$.

Plus généralement, pour des fonctions réelles à valeurs réelles ou complexes

Définition 14.12

La série de Fourier complexe de f est

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\omega_0 t} := c_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (c_k e^{ik\omega_0 t} + c_{-k} e^{-ik\omega_0 t}) \quad (14.40)$$

où $c_k := \frac{1}{T} \langle f(t), e^{ik\omega_0 t} \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-ik\omega_0 t} dt$ et $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$.

Si f est à valeurs réelles, alors

$$c_{\mp k} = \frac{a_k \pm ib_k}{2}, \text{ d'où } c_{-k} = c_k^*. \quad (14.41)$$

$$|c_k| = |c_{-k}| = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}/2 \quad (14.42)$$

La série de Fourier complexe peut s'écrire directement sous la forme

$$A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \phi_k) \quad (14.43)$$

où pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, $A_k/2 = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}/2 = |c_k| = |c_{-k}|$ et

$$\phi_k = \tan^{-1} \left(\frac{-b_k}{a_k} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{\text{Im } c_k}{\text{Re } c_k} \right). \quad (14.44)$$

L'amplitude A_k et la phase ϕ_k de la $k^{\text{ième}}$ harmonique se déduisent donc très facilement du coefficient complexe c_k .

La même série peut encore s'écrire

$$A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\omega_0 t + \varphi_k) \quad (14.45)$$

avec les mêmes A_k , tandis que φ_k est l'angle tel que $\cos \varphi_k = \frac{b_k}{A_k}$ et $\sin \varphi_k = \frac{a_k}{A_k}$.

■ **Exemple 14.9**

L'étude du développement en série de Fourier complexe d'un **train d'impulsions** (par exemple un courant pulsé) est particulièrement intéressante, notamment en vue du passage de la notion de série de Fourier (d'un tel *train d'impulsions*) à celle de transformée de Fourier (d'une impulsion *unique* "à la Dirac"). ■

Notons

T := la périodicité du train d'impulsions,

τ := la longueur des impulsions,

V := l'amplitude des impulsions.

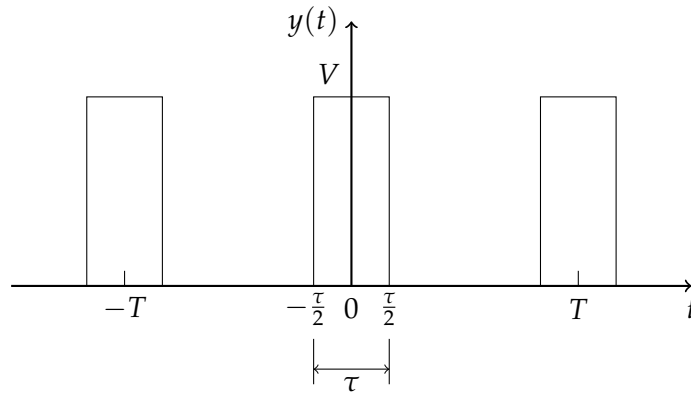


FIGURE 14.9

La fréquence fondamentale est $\omega_0 := 2\pi/T$ et les coefficients se calculent

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V e^{-in\omega_0 t} dt \quad (14.46)$$

$$= \frac{V}{T} \left[\frac{e^{-in\omega_0 t}}{-in\omega_0} \right]_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{-V}{i2n\pi} (e^{-in\pi\tau/T} - e^{in\pi\tau/T}) \quad (14.47)$$

$$= \frac{V}{n\pi} \sin \frac{n\pi\tau}{T} \quad (14.48)$$

Ceci peut s'écrire

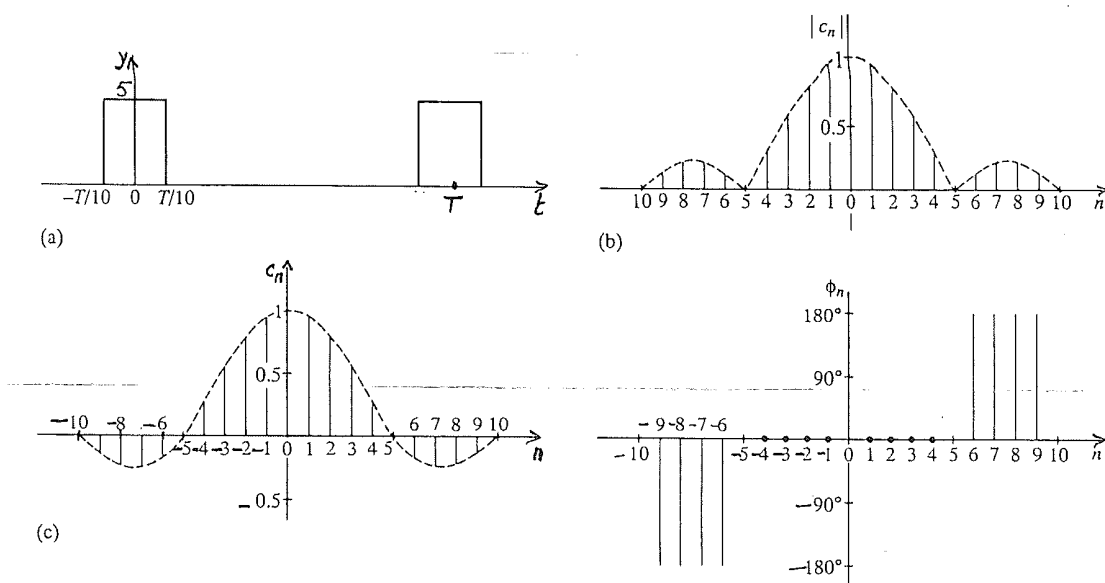
$$c_n = \frac{V\tau}{T} \frac{\sin \frac{n\pi\tau}{T}}{\frac{n\pi\tau}{T}} =: \frac{V\tau}{T} \operatorname{sinc} \frac{n\pi\tau}{T} \quad (14.49)$$

et la $n^{\text{ième}}$ harmonique ($n > 0$) est

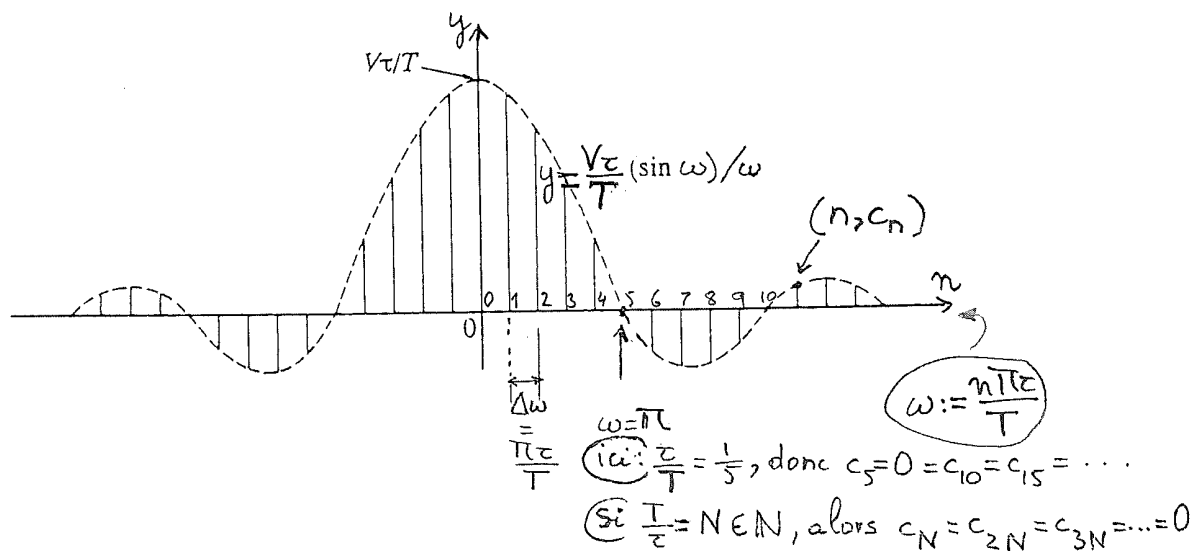
$$A_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n) = 2|c_n| \cos(n\omega_0 t + \phi_n) \quad \text{où} \quad \omega_0 = 2\pi/T. \quad (14.50)$$

Voici un train d'impulsions où $V = 5 = T/\tau$ et $|c_n|$, puis c_n et ϕ_n en fonction de n .

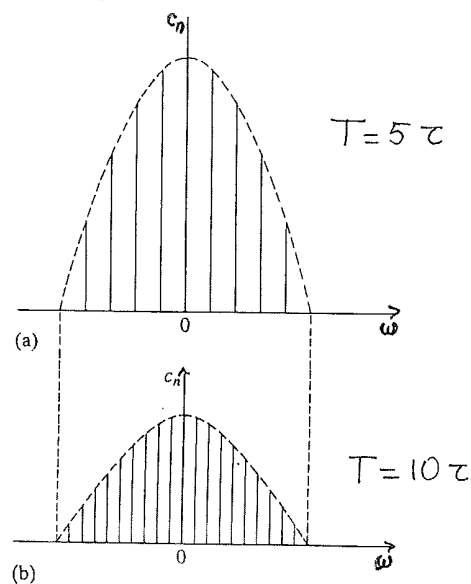
Voici un train d'impulsions où $V = 5 = T/\tau$ et $|c_n|$, puis c_n et ϕ_n en fonction de n .



Plus généralement, on obtient, pour V, T, τ quelconques :



Remarquons que pour $V = 1$ et τ constant, le fait d'augmenter la période T a pour effet de diminuer c_n ainsi que la différence de fréquence $\Delta\omega = 2\pi/T (= \omega_0)$ entre les harmoniques.



14.5.6 Développement de f sur $[a, b]$

Si $f \in L^2([a, b], \mathbb{R})$ et $(a + b)/2 \neq 0$, on peut se ramener à un domaine du type $[-L, L]$ en considérant la fonction traduite

$$\left[\frac{a-b}{2}, \frac{b-a}{2} \right] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f\left(x + \frac{a+b}{2}\right) \quad (14.51)$$

14.5.7 Développement d'une fonction de période $2L$ sur \mathbb{R}

On peut toujours développer la restriction de $f|_{[-L, L]}$ à la période $[-L, L]$. Comme toutes les fonctions du système en sinus et cosinus sur $[-L, L]$ sont périodiques de période $2L$, la série de Fourier associée à $f|_{[-L, L]}$ le sera aussi. Elle convient donc tout autant pour f .

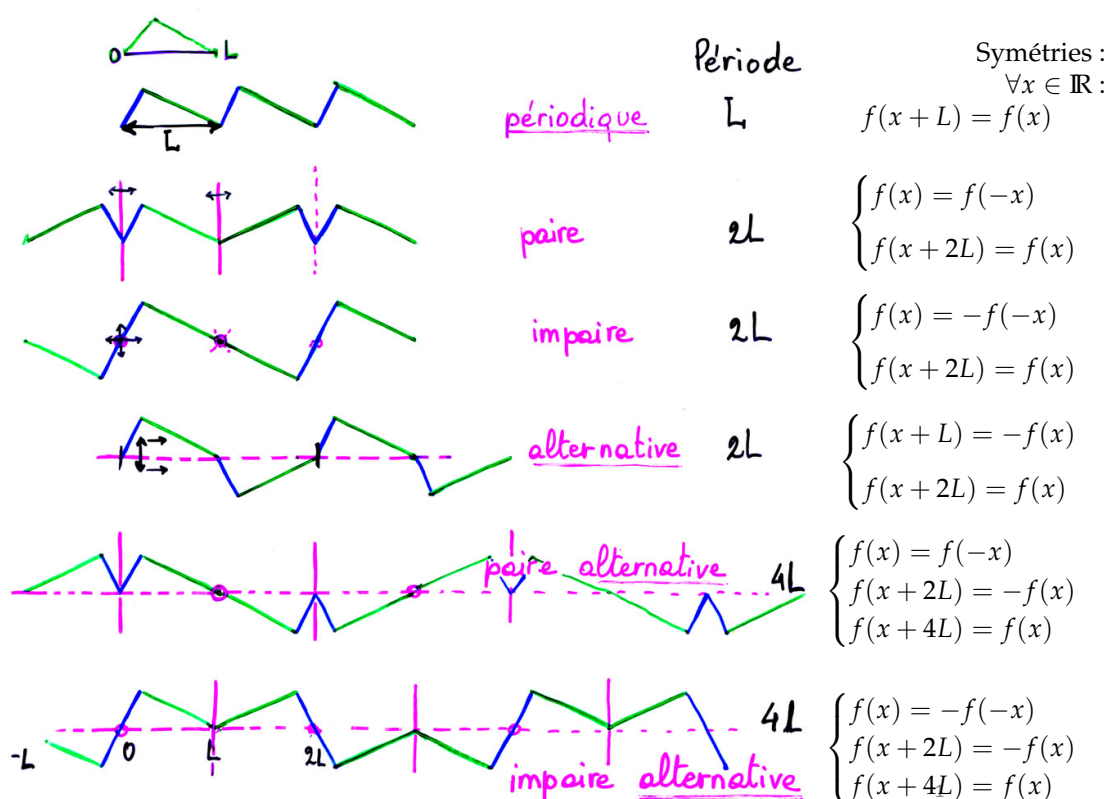
Si de plus f est impaire, alors f est orthogonale à toute fonction paire sur $[-L, L]$ (pourquoi?), donc tous les coefficients a_k sont nuls et un développement en série sinus suffit.

Si f est à la fois paire et de période $2L$, la situation est analogue : une série en cosinus suffit.

14.5.8 Développement de f sur $[0, L]$.

Au vu de ce qui précède, on peut au choix développer f en série sinus et cosinus (respectivement sinus seulement, cosinus seulement). La somme de la série sera alors de période L (respectivement impaire de période $2L$, paire de période $2L$).

Prolongements périodiques et autres symétries de fonctions



Notons que la valeur moyenne de toute fonction alternative est nulle.

Les six cas précédents sont représentatifs de toutes les symétries possibles de fonctions périodiques admettant une plus petite période T .

Les groupes de symétries des graphes de telles fonctions sont décrits ci-dessous, où les translations sont dans la direction de l'axe ox et où la symétrie glissée de pas L est la composée de la symétrie bilatérale d'axe ox et de la translation de pas L .

- (1) **simplement périodique** : la translation de pas L et toutes ses puissances : toutes les translations de pas kL ($k \in \mathbb{Z}$),
- (2) **paire périodique** : toutes les symétries bilatérales d'axe $y = kL$ ($k \in \mathbb{Z}$) et donc les translations de pas $2kL$,
- (3) **impaire périodique** : toutes les symétries centrales de centre $(kL, 0)$ ($k \in \mathbb{Z}$) et donc les translations de pas $2kL$,
- (4) **alternative** : la symétrie glissée de pas L et toutes ses puissances : les symétries glissées de pas $(2k + 1)L$ et les translations de pas $2kL$.
- (5) **impaire alternative** : les symétries bilatérales d'axe $y = 2kL$ ($k \in \mathbb{Z}$) et les symétries centrales de centre $((2k + 1)L, 0)$ ($k \in \mathbb{Z}$) et donc aussi les translations de pas $4kL$,
- (6) **paire alternative** : les symétries centrales de centre $(2kL, 0)$ ($k \in \mathbb{Z}$) et les symétries bilatérales d'axe $y = (2k + 1)L$ ($k \in \mathbb{Z}$), et donc aussi les translations de pas $4kL$.

Notons que les cas (5) et (6) sont équivalents à une translation de pas L près.

Notons encore que

- les fonctions $\cos x$ et $\sin x$ sont périodiques de période (fondamentale) 2π et alternatives de pas (fondamental) π .
- les fonctions $\cos \alpha x$ et $\sin \alpha x$ ($\alpha > 0$) sont périodiques de période (fondamentale) $\frac{2\pi}{\alpha}$ et alternatives de pas (fondamental) $\frac{\pi}{\alpha}$.
- Pour k entier, les fonctions $\cos\left(\frac{2\pi}{T}kx\right)$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{T}kx\right)$ sont périodiques de période (fondamentale) $\frac{T}{k}$ et alternatives de pas (fondamental) $\frac{T}{2k}$.

En particulier, elles sont $\begin{cases} \text{périodiques de période } \frac{T}{2} \text{ ssi } k \text{ est pair} \\ \text{alternatives de pas } \frac{T}{2} \text{ ssi } k \text{ est impair.} \end{cases}$

- Les fonctions alternatives sont de moyenne nulle sur une période (comme les fonctions impaires).
- Le produit d'une fonction de période $\frac{T}{2}$ et d'une fonction alternative de pas $\frac{T}{2}$ est une fonction alternative de pas $\frac{T}{2}$, donc de moyenne nulle sur une période.
- Le produit de deux fonctions alternatives de pas $\frac{T}{2}$ est périodique de période $\frac{T}{2}$.

Il en résulte que

Proposition 14.19

Les a_{2k} et b_{2k} des fonctions alternatives sont tous nuls.

Classification des groupes de symétries de frises (ou cristaux unidimensionnels).

Le cristallographe russe Fedorov à la fin du 19ème siècle a prouvé qu'il y avait exactement 7 types de frises, évoquées ci-dessous.

La structure abstraite des 7 groupes de frises :

	Générateurs t 1 translation	Structure C_∞	<i>périodique</i>
	g (réflexion de glissement)	C_∞	<i>alternative</i>
	2 réflexions a et b ou réflexion et translation ($t = ba$)	D_∞	<i>paire</i>
	2 demi-tours (a et b) ou demi-tour et translation ($t = ba$)	D_∞	<i>impaire</i>
	1 réflexion (a) et 1 demi-tour (b) ($g = ab; t = (ab)^2$)	D_∞	<i>paire ou impaire alternative</i>
	1 réflexion (a) et 1 translation (t) ou réflexion et réflexion de glissement ($g = ab$)	$C_\infty \times C_2$	non applicable aux fcts !
	3 réflexions a, b et c D'autres parties de générateurs peuvent être incluses $g = acb$, etc.	$D_\infty \times C_2$	non applicable aux fcts !

On trouve ainsi 5 types de symétries possibles pour les **graphes de fonctions**, et non 6 : la raison en est que le graphe d'une fonction paire (resp. impaire) alternative est, à une translation près, le graphe d'une fonction impaire (resp. paire) alternative.

14.6 Fonctions régularisées.

14.6.1 Fonction régularisée

RAPPEL

$$f(x+) := \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h), \quad (14.52)$$

$$f(x-) := \lim_{h \rightarrow 0} f(x-h). \quad (14.53)$$

S'il existe une subdivision $(a = x_0 | x_1 | \dots | x_n = b)$ de $[a, b]$ telle que



FIGURE 14.10

- f est continue sur $]x_{i-1}, x_i[\quad \forall i = 1, \dots, n,$
- $f(x_i+)$ existe dans $\mathbb{R} \quad \forall i = 0, \dots, n-1$
- $f(x_i-)$ existe dans $\mathbb{R} \quad \forall i = 1, \dots, n,$

alors f est dite **continue par morceaux** sur $[a, b]$. On note $C_{\text{morc}}^0[a, b]$ la classe des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$.

Définition 14.13

Si $x \in]a, b[$: x est un **point régulier** de f si $f(x) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}$.

Si $x = a$ ou b : x est un **point régulier** de f si $f(x) = \frac{f(a^+) + f(b^-)}{2}$. ■

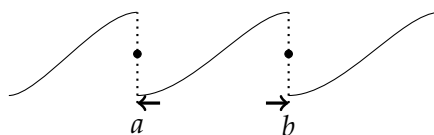


FIGURE 14.11

R Tout point de continuité est régulier s'il est intérieur à $[a, b]$, mais **pas nécessairement** s'il est l'une des extrémités a ou b .

Définition 14.14

Si $f \in C_{\text{morc}}^0[a, b]$, alors f peut être **régularisée**. La **régularisée** \tilde{f} de f est :

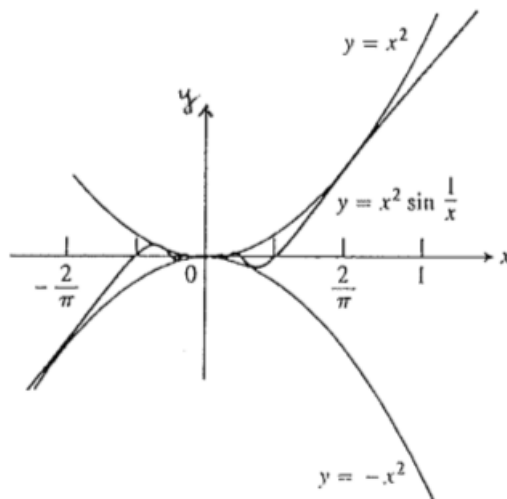
$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2} & \text{si } x \in]a, b[, \\ \frac{f(a^+) + f(b^-)}{2} & \text{si } x = a \text{ ou } b, \end{cases}$$

14.6.2 Limite à droite de dérivée et dérivée à droite

RAPPEL. Les discontinuités d'une fonction dérivée sont de seconde espèce.

■ Exemple 14.10

Si $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$, alors $f'(0) = 0$, mais $f'(0^-)$ et $f'(0^+)$ n'existent pas !

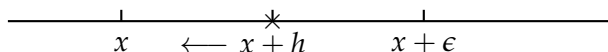


■

Corollaire 14.20

Si $f \in C^0([x, x + \epsilon])$ et est dérivable dans $]x, x + \epsilon[$:

$f'(x+)$ existe dans $\mathbb{R} \Rightarrow$ dérivée à droite en x existe dans \mathbb{R} et est égale à $f'(x+)$.



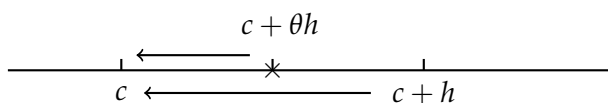
Démonstration.

Par le théorème des accroissements finis ,

$$f(c+h) - f(c) = h f'(c + \theta h) \text{ où } \theta \in]0, 1[. \quad (14.54)$$

Par hypothèse : $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} f'(c+h) \stackrel{\exists}{=} f'(c+0)$.

Donc $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \stackrel{\exists}{=} f'(c+0)$.



■

14.6.3 Dérivées Généralisées

Soit $\begin{cases} f \in C_{\text{morc}}^0[a, b] \\ x \in]a, b[, \end{cases}$

La **dérivée à droite généralisée** de f en x est

$$DDGf|_x := \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x^+)}{h} \quad (\text{si elle existe.})$$

La **dérivée à gauche généralisée** de f en x

$$DGGf|_x := \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x-h) - f(x^-)}{h} \quad (\text{si elle existe.})$$

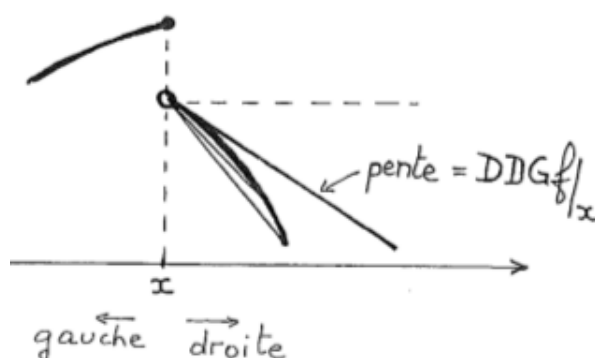


FIGURE 14.12

△ Si $x = a$ ou b , considérer le prolongement périodique de f .

R Aux points de continuité, rien de neuf!
 $f(x)$ n'intervient plus dans le calcul de la dérivée généralisée $DGf|_x$ de f en x !

Proposition 14.21

Soit $f \in C_{\text{morc}}^0[a, b]$. Si f est dérivable sur $[a, b]$ sauf en c_1, \dots, c_n (en nombre fini) et que $\forall c_i : f'(c_i^+)$ et $f'(c_i^-)$ existent dans \mathbb{R} , alors f possède une DGG et une DGD partout sur $[a, b]$.

Notation. $DG[a, b] :=$ classe des fonctions $C_{\text{morc}}^0[a, b]$ admettant une DGG en tout $x \in]a, b[$ et une DDG en tout $x \in [a, b]$.

Grossièrement : $f \text{ et } f' \in C_{\text{morc}}^0[a, b] \Rightarrow_{\neq} f \in DG[a, b]$.

Démonstration.

Si c_i est un point de continuité, utiliser la Proposition 14.6.2. Sinon, définir

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{sur }]c_i, c_i + \epsilon] \\ f(c_i^+) & \text{si } x = c_i, \end{cases} \quad (14.55)$$

et appliquer la Proposition 14.6.2. à F pour $x \xrightarrow{>} c_i$

De même pour $f'(c_i^-) \dots$

R Si f est à valeurs complexes, travailler séparément avec $\text{Re } f$ et $\text{Im } f$.

■

14.6.4 Ecriture simplifiée

Dans les sections suivantes, de nombreux théorèmes seront valables sous l'hypothèse générale $f \in DG([a, b], \mathbb{R})$. En pratique, nous nous contenterons d'écrire l'hypothèse f et $f' \in C_{\text{morc}}^0([a, b], \mathbb{R})$, ce qui est légèrement plus fort. Mais en fait, nous ne nous priverons pas de prétendre que f et $f' \in C_{\text{morc}}^0([a, b], \mathbb{R})$, **même si f et f' ne sont pas définies en un nombre fini de points de $[a, b]$** : il suffit d'exiger qu'un prolongement de f et f' soit de classe $C_{\text{morc}}^0([a, b], \mathbb{R})$. Comme la manière de prolonger ces fonctions sur $[a, b]$ n'a aucune importance, autant ne pas se donner cette peine !

Définition 14.15 — convention.

Nous écrirons $f \in C_{\text{morc}}^1([a, b], \mathbb{R})$: ss'il existe une subdivision finie $(a = x_0 | x_1 | \dots | x_n = b)$ de $[a, b]$ telle que

- $\forall i = 1, \dots, n : f \in C^1(]x_{i-1}, x_i[, \mathbb{R}),$
- $\forall i = 0, \dots, n-1 : f(x_i^+) \text{ et } f'(x_i^+) \text{ existent dans } \mathbb{R} \text{ et}$
- $\forall i = 1, \dots, n : f(x_i^-) \text{ et } f'(x_i^-) \text{ existent dans } \mathbb{R}.$

Au sens large : On ne demande pas que f soit définie en les x_i , ni que f soit dérivable en les x_i , mais les limites à gauche et à droite doivent exister en tout point.

14.7 Convergence simple des séries classiques

14.7.1 Théorème de Dirichlet

Théorème 14.22 — Dirichlet.

Si $f \in C_{\text{morc}}^1([-\pi, \pi], \mathbb{R})$, alors

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) \cos(kx) + b_k(f) \sin(kx)) \stackrel{\text{C.S.}}{=} \tilde{f}(x) \quad (14.56)$$

c'est-à-dire que la série de Fourier de f converge vers la régularisée de f sur $[-\pi, \pi]$.

Et sur \mathbb{R} :

la série de Fourier de f converge vers le prolongement périodique de la régularisée de f .

Corollaire 14.23

1. Si de plus $f_{\text{pro}} \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, alors $\sum_{k=1}^{\infty} \text{Fourier class.}(f) \stackrel{\text{C.S.}}{=} f_{\text{pro}}$.
2. Si de plus $f_{\text{pro}} \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, alors $\sum_{k=1}^{\infty} \text{Fourier class.}(f) \stackrel{\text{C.S.}}{=} f_{\text{pro}}$.

Démonstration du cas particulier où $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et est de période 2π .

Nous avons à prouver que l'erreur de troncature de la série de Fourier tend vers 0 :

$$s_n(x) - f(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) - f(x) \stackrel{(n \rightarrow \infty)}{\rightarrow} 0. \quad (14.57)$$

Nous ferons ceci en quatre pas. Ensuite, une généralisation du 3ème pas nous fournira une démonstration du théorème général.

1^{er} pas : somme partielle de Fourier et noyau de Dirichlet.

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^n (\cos(ky) \cos(kx) + \sin(ky) \sin(kx)) \right] f(y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^n (\cos(k(x-y))) \right] f(y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(\underbrace{x-y}_{=: \theta}) \cdot f(y) dy, \\ &\text{où } K_n(\theta) := 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(k\theta) = K_n(-\theta), \end{aligned} \quad (14.58)$$

la fonction K_n étant classiquement appelée le **noyau de Dirichlet**.

2^e pas Propriétés du noyau K_n

(i) K_n est périodique de période 2π ,

(ii) $\int_{-\pi}^{\pi} K_n(\theta) d\theta = 2\pi$,

$$(iii) \quad K_n(\theta) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\theta\right)} =: \frac{\varphi_n(\theta)}{\sin\left(\frac{1}{2}\theta\right)}.$$

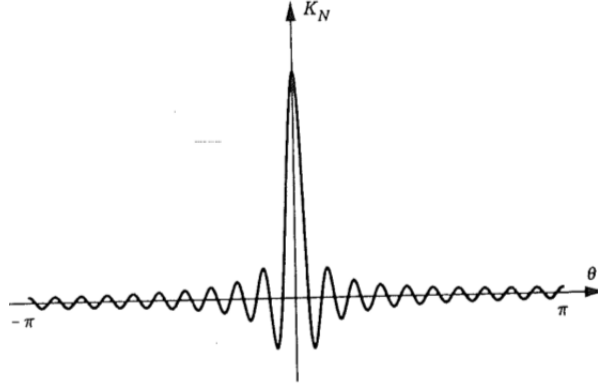


FIGURE 14.13

En effet, (i) est immédiat et (ii) se vérifie en intégrant terme à terme la somme finie qui définit K_n :

$$\int_{-\pi}^{\pi} K_n(\theta) d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(k\theta)\right) d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} 1 d\theta \text{ (pourquoi?)}. \quad (14.59)$$

Pour prouver (iii), l'usage de la formule d'Euler permet de se ramener à une somme géométrique facile à calculer :

$$\begin{aligned} K_n(\theta) &= 1 + \sum_{k=1}^n (e^{ik\theta} + e^{-ik\theta}) \\ &= e^{-in\theta} + \dots + 1 + \dots + e^{in\theta} \quad \text{somme géométrique} \\ &= \frac{e^{-in\theta} - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \cdot \frac{-e^{-i\frac{1}{2}\theta}}{-e^{-i\frac{1}{2}\theta}} \\ &= \frac{-e^{-i(n+\frac{1}{2})\theta} + e^{i(n+\frac{1}{2})\theta}}{e^{i\frac{1}{2}\theta} - e^{-i\frac{1}{2}\theta}} \\ &= \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\left(\frac{1}{2}\theta\right)} = \begin{cases} 0 & \text{ssi } \left(n + \frac{1}{2}\right)\theta = k\pi \\ \pm 1 & \text{ssi } \left(n + \frac{1}{2}\right)\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi. \end{cases} \end{aligned}$$

Le graphe de $\theta \mapsto 1/\sin(\theta/2)$ ressemble (près de 0) à une branche d'hyperbole, quant au numérateur, il oscille avec une période qui tend vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Intuition

Au vu de l'allure de K_n , on peut deviner que lorsque n est suffisamment grand et que θ n'est pas trop proche de 0, les oscillations positives et négatives de K_n sont négligeables de sorte que seules les valeurs de K_n pour y proche de x interviennent dans le calcul de l'intégrale de K_n sur une période (intégrale qui vaut 2π). De même, si f ne varie pas trop vite, les valeurs de f pour y loin de x étant multipliées par un facteur minuscule sont négligeables dans le calcul de

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x-y)f(y)dy, \quad (14.60)$$

Donc la norme de g est bornée, puisque son carré est l'intégrale de $-\pi$ à π d'une fonction continue sur $[-\pi, \pi]$. \square

◇ Généralisation du 3e pas.

On suppose seulement f et $f' \in C_{\text{morc}}^0[-\pi, \pi]$. Ceci nous empêche de définir la même fonction auxiliaire g sur $[-\pi, \pi]$ comme ci-dessus. Nous définissons en fait deux fonctions

$$g_{\pm}(\theta) := \frac{f(x+\theta) - f(x^{\pm})}{\sin\left(\frac{1}{2}\theta\right)}. \quad (14.66)$$

L'erreur s'écrit alors :

$$\begin{aligned} s_n(x) - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} K_n(\theta) [f(x+\theta) - f(x^+)] d\theta \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 K_n(\theta) [f(x+\theta) - f(x^-)] d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} g_+(\theta) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 g_-(\theta) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \langle g_+, \varphi_n \rangle_{[0, \pi]} + \frac{1}{2\pi} \langle g_-, \varphi_n \rangle_{[-\pi, 0]}. \end{aligned} \quad (14.67)$$

Comme $\{\varphi_n\}$ est un système orthogonal sur $[0, \pi]$, (respectivement sur $[-\pi, 0]$), l'inégalité de Bessel donne respectivement

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\langle g_+, \varphi_n \rangle|^2}{\|\varphi_n\|^2} \leq \|g_+\|_{[0, \pi]}^2, \quad (14.68)$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\langle g_-, \varphi_n \rangle|^2}{\|\varphi_n\|^2} \leq \|g_-\|_{[-\pi, 0]}^2. \quad (14.69)$$

On conclut comme précédemment. \square

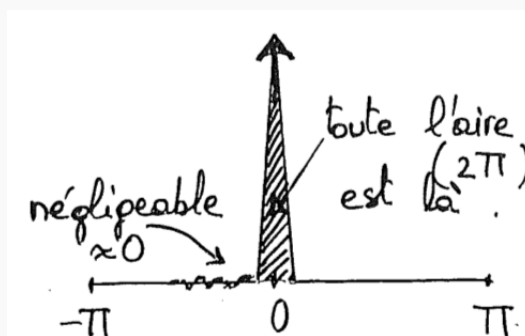


FIGURE 14.15

Intuition

Pour n suffisamment grand :

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(y-x) f(y) dy$$

facteur ≈ 0
sauf si $y \approx x$, où il est immense
 \Downarrow
seul compte f au voisinage de x
et si $f \approx$ constante $\approx f(x)$

(14.70)

alors

$$s_n(x) \approx f(x) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n = f(x).$$
(14.71)

Par contre, si f a un saut de discontinuité en x

$$s_n(x) \approx \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2} \quad \text{apport symétrique venant de gauche et de droite}$$
(14.72)

mais : s_n est très différent à gauche et à droite de x (cf. Gibbs)!

■

■ **Exemple 14.11 — L'onde triangulaire.**

La fonction $f : [-l, l] \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow |x|$ est continue et f' est continue par morceaux. le prolongement périodique f_{pro} est également continu.

Voilà donc une fonction égale à sa régularisée et dont la dérivée est de classe C_{morc}^0

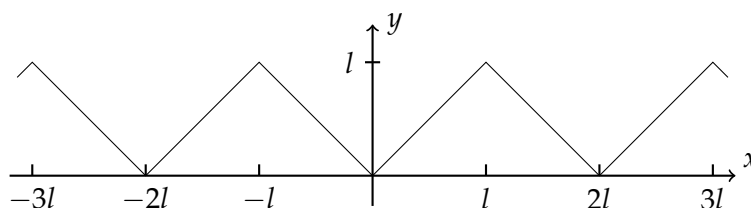


FIGURE 14.16

La série de Fourier de f_{pro} converge donc vers $f_{pro} : f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2} \left(\cos \frac{\pi x}{l} + \frac{1}{3^2} \cos \frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{5^2} \cos \frac{5\pi x}{l} + \dots \right) \\ &= \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\cos(m\pi x/l)}{m^2} \\ &= \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)\pi x/l)}{(2n-1)^2} \end{aligned}$$
(14.73)

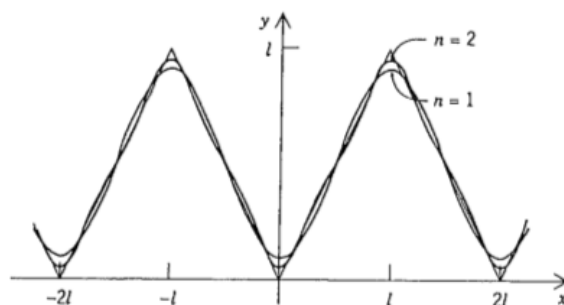


FIGURE 14.17 – Onde triangulaire et les premières sommes partielles S_1 et S_2 de sa série de Fourier

On observe que la convergence est rapide, parce que les coefficients de Fourier satisfont

$$b_k = 0, \quad a_{2k} = 0 \text{ pour tout } k \geq 1 \quad (14.74)$$

et les coefficients a_{2k+1} décroissent comme $1/(2k+1)^2$.

Remarquons également que les séries $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ et $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ convergent absolument.

De plus, on déduit du théorème de convergence la formule remarquable

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}. \quad (14.75)$$

■

■ **Exemple 14.12 — L'onde en dents de scie.**

La fonction $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x}{2}$ est de classe C^∞ .

Pourtant, sa série de Fourier S ne converge pas vers f . En effet, le prolongement périodique f_{pro} de f diffère de sa régularisée en tous les points multiples impairs de π .

On vérifie facilement que

$$S(x) = \frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \cdots \quad (14.76)$$

Voici les sommes partielles S_2, S_3 et S_4 :

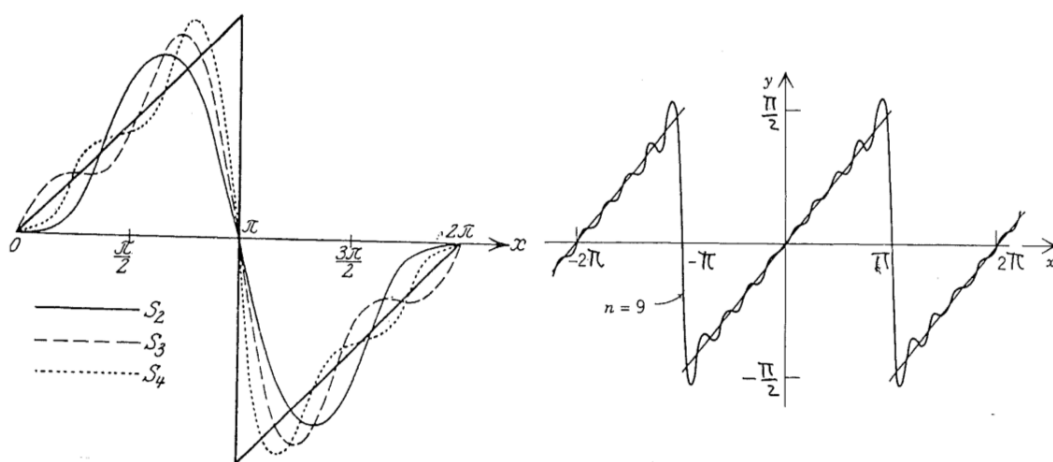


FIGURE 14.18

Notons dans ce cas que

$$a_k = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |b_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad (14.77)$$

qui diverge notoirement. Par contre, l'égalité de Parseval nous indique que

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 \quad \|\psi_k\|_2^2 = \pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \|f\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^2 dx = \frac{\pi^3}{6}, \quad (14.78)$$

où $\psi_k(x) := \sin kx$.

D'où on déduit le fameux résultat : $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Notons encore que la série de Fourier de la fonction \tilde{f}_{pro} converge simplement, mais non uniformément, vers \tilde{f}_{pro} . ■

■ **Exemple 14.13 — L'onde carrée.** Considérons la fonction

$$f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \pi & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (14.79)$$

et son prolongement périodique régulier \tilde{f}_{pro} .

On a donc

$$\tilde{f}_{pro}(x) = \frac{\pi}{2} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} = \frac{\pi}{2} + 2 \left(\sin x + \frac{3 \sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right). \quad (14.80)$$

La somme partielle jusqu'à $k = 8$ est représentée ci-dessous : le phénomène de Gibbs est bien visible (voir 14.7.6)

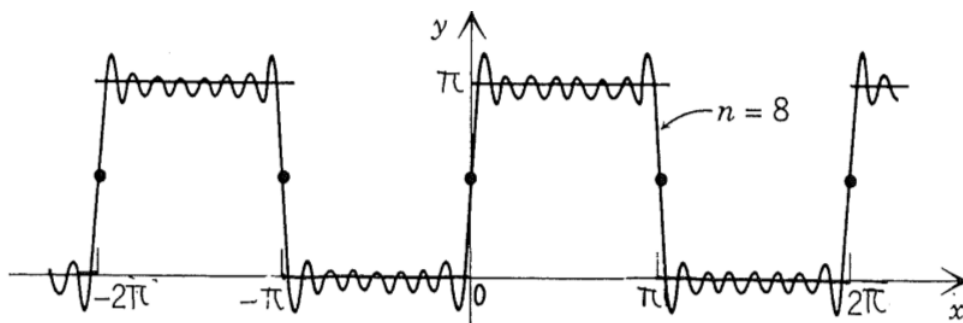


FIGURE 14.19

■ **Exemple 14.14 — Dernier exemple.** Soit

$$f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \pi/2 & \text{si } x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{si } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}. \quad (14.81)$$

Soit f_{imp} le prolongement impair puis périodique de f .

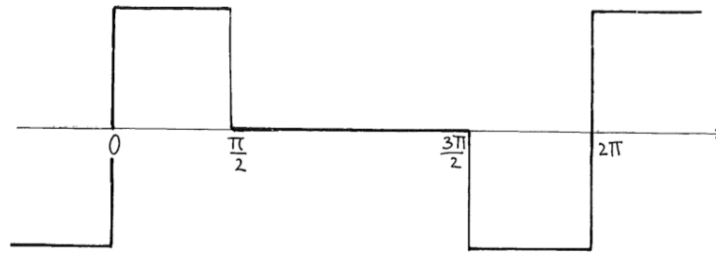


FIGURE 14.20

Sa série de Fourier est

$$S(x) = \sin x + 2 \cdot \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + 0 + \frac{\sin 5x}{5} + 2 \cdot \frac{\sin 6x}{6} + \frac{\sin 7x}{7} + 0 + \frac{\sin 9x}{9} + \dots \quad (14.82)$$

En voici les sommes partielles S_3 , S_5 et S_6 :

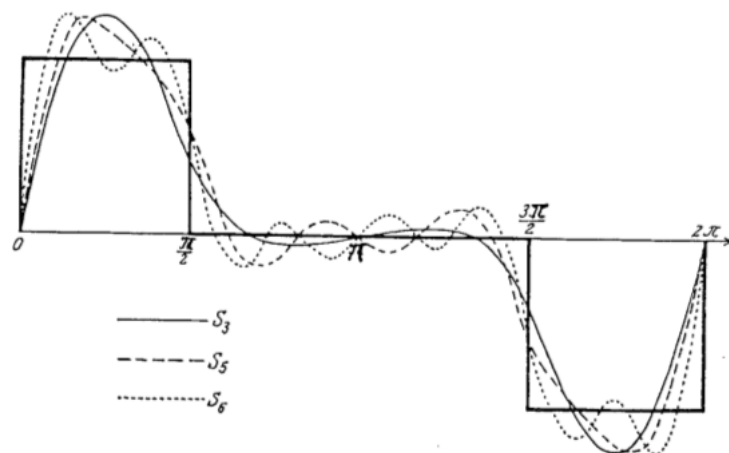


FIGURE 14.21

■

14.7.2 Le phénomène de Gibbs

Ce phénomène apparaît lorsqu'on observe la convergence d'une série de Fourier dans tout voisinage V d'un point de discontinuité. Non seulement la convergence n'y est pas uniforme, mais les sommes partielles dépassent les valeurs attendues à droite et à gauche et ces dépassements ne semblent pas vouloir s'estomper lorsque n croît.

Soit d un **point** de discontinuité et soit $\delta := |f(d+) - f(d-)|$ le **saut** de discontinuité.

Non seulement

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in V} |S_n(x) - f(x)| \neq 0, \quad (14.83)$$

mais

$$\exists x_n \rightarrow x_0 \text{ tel que } \lim_{n \rightarrow +\infty} |S_n(x_n) - f(x_n)| \approx \frac{9}{100} \delta. \quad (14.84)$$

C'est le **phénomène de Gibbs**.

Ce phénomène peut se voir sur l'exemple suivant.

$$\text{Soit } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } 0 < x < \pi \\ -\frac{1}{2} & \text{si } -\pi < x < 0. \end{cases}$$

La série de Fourier de f est $\sum_{k \text{ impair}} \frac{2}{k\pi} \sin(kx)$.

Ses sommes partielles peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{4\pi} \left(\int_0^\pi - \int_{-\pi}^0 \right) K_n(x-y) dy \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(\int_0^\pi - \int_{-\pi}^0 \right) \frac{\sin((n + \frac{1}{2})(x-y))}{\sin(\frac{1}{2}(x-y))} dy \end{aligned} \quad (14.85)$$

et le graphe de S_{16} sur $[-\pi, \pi]$ est représenté ci-dessous.

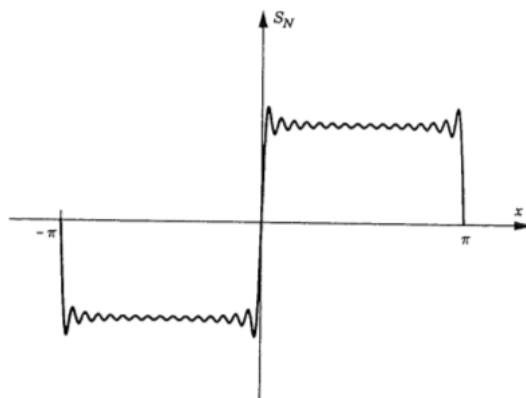


FIGURE 14.22

◇ En posant $m := n + \frac{1}{2}$
et

$$\theta := \begin{cases} m(x-y) & \text{si } y > 0. : \text{ (cas de la 1}^{\text{ère}} \text{ intégrale)} \\ m(y-x) & \text{si } y < 0, \text{ (cas de la 2}^{\text{ème}} \text{ intégrale)} \end{cases} \quad (14.86)$$

on obtient successivement

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{m(x-\pi)}^{mx} - \int_{-m(x+\pi)}^{-mx} \right) \frac{\sin \theta}{2m \sin \frac{\theta}{2m}} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-mx}^{mx} - \int_{-m\pi-mx}^{-m\pi+mx} \right) \frac{\sin \theta}{2m \sin \frac{\theta}{2m}} d\theta. \end{aligned} \quad (14.87)$$

Comme l'intégrande est une fonction paire, on peut remplacer θ par $-\theta$ dans la dernière intégrale, ce qui donne

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-mx}^{mx} - \int_{m\pi-mx}^{m\pi+mx} \right) \frac{\sin \theta}{2m \sin \frac{\theta}{2m}} d\theta. \quad (14.88)$$

Le point de discontinuité de f est $x = 0$, et ce qui nous intéresse ici, c'est le comportement de $S_n(x)$ au voisinage de $x = 0$ lorsque $x \neq 0$ et que n (et donc m) est grand. Vu le dénominateur $\sin(\theta/2m)$, c'est la première intégrale qui prédomine. Pour chercher pour quelle valeur de x cette intégrale est maximale, on calcule sa dérivée, qui s'annule ssi $\sin(mx) = 0$. La solution $x = \pi/m$ fournit bien un maximant de cette intégrale. En ce point, la somme partielle est

$$S_n\left(\frac{\pi}{m}\right) = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} - \int_{m\pi-\pi}^{m\pi+\pi} \right) \frac{\sin \theta}{2m \sin \frac{\theta}{2m}} d\theta. \quad (14.89)$$

Supposons $m > 2$. Dans la deuxième intégrale, $\theta/2m$ est borné par

$$\frac{\pi}{4} < \left(1 - \frac{1}{m}\right) \frac{\pi}{2} \leq \frac{\theta}{2m} \leq \left(1 + \frac{1}{m}\right) \frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{4}, \quad (14.90)$$

Donc $\sin \frac{\theta}{2m} > 1/\sqrt{2}$, de sorte que cette deuxième intégrale est inférieure à

$$\frac{1}{2\pi} \int_{m\pi-\pi}^{m\pi+\pi} 1 \cdot \left(\frac{2m}{\sqrt{2}}\right)^{-1} d\theta = \frac{1}{\sqrt{2}m} \quad (14.91)$$

qui tend vers 0 pour $m \rightarrow \infty$.

D'autre part, on sait que $-\pi \leq \theta \leq \pi$ dans la première intégrale, de sorte que

$$2m \sin \frac{\theta}{2m} \xrightarrow{\text{C.U.}} \theta \text{ pour } m \rightarrow \infty \quad (\text{C.U. sur } [-\pi, \pi]). \quad (14.92)$$

Donc

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_n\left(\frac{\pi}{m}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin \theta}{\theta} d\theta \approx 0.59 \quad (14.93)$$

Comme le saut de discontinuité de f en $x = 0$ est 1 et que $f(0+) = 0.5$, on retrouve bien le dépassement de 9 pourcents du saut de discontinuité.

14.8 Théorèmes de convergence uniforme

14.8.1 Généralisation du théorème d'intégration par parties

Lemme 14.24

Si f, g et $f', g' \in C_{\text{morc}}^0([a, b], \mathbb{R})$, alors $\int_a^b f'g + \int_a^b fg' = [fg]_{a^+}^{b^-} + \sum_{c_i} [fg]_{c_i^+}^{c_i^-}$,
où les c_i sont les points de discontinuité de f et de g dans $]a, b[$.

En particulier :

Proposition 14.25

Si, de plus, fg est continue sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f'g + \int_a^b fg' = [fg]_a^b$.

Noter que le dernier crochet est nul dès que $f(a) = f(b)$ et $g(a) = g(b)$, ce qui donne $\int_a^b f'g + \int_a^b fg' = 0$.

Démonstration.

Par hypothèse, il existe une subdivision $(a = x_0 | x_1 | \dots | x_n = b)$ telle que, pour tout i , f et g sont de classe C^1 sur $]x_{i-1}, x_i[$. Soient $x_{i-1} < \alpha < \beta < x_i$.

La formule classique d'intégration par parties est déjà démontrée. En passant à la limite pour $\alpha \rightarrow x_{i-1}$ et $\beta \rightarrow x_i$, et en utilisant la continuité de l'intégrale indéfinie de toute fonction intégrable, on obtient

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f'g + \int_{x_{i-1}}^{x_i} fg' = f(x_i^-)g(x_i^-) - f(x_{i-1}^+)g(x_{i-1}^+). \quad (14.94)$$

Il ne reste plus qu'à sommer sur i , en tenant compte du fait que $x_0 = a$ et $x_n = b$, et le théorème est démontré. ■

14.8.2 Coefficients de Fourier de la dérivée

Connaissant les coefficients de Fourier de f , peut-on en déduire directement les coefficients de Fourier de sa dérivée? La série dérivée (terme à terme) d'une série de Fourier convergeant vers f est-elle encore une *série de Fourier*? Converge-t-elle? Si oui, sa *somme* est-elle f' ? Les problèmes de convergence (simple et uniforme) sont postposés à des sections ultérieures.

Théorème 14.26

Si $f \in C^1([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ et si $f(-\pi) = f(\pi)$, alors la série dérivée de la série de Fourier de f est la série de Fourier de la dérivée de f .

Autrement dit :

$$f'(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} (kb_k(f) \cos(kx) - ka_k(f) \sin(kx)) \quad (14.95)$$

L'hypothèse $f \in C^1([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ peut être très légèrement allégée en $f_{\text{pro}} \in C^\circ$ et $f' \in C_{\text{morc}}^0([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ (en généralisant la formule d'intégration par parties, voir 14.8.1).

L'énoncé peut être adapté au cas où $f(\pi) \neq f(-\pi)$ (voir ci-dessous) et plus généralement au cas où $f \in C_{\text{morc}}^\circ$ (exercice).

Démonstration.

Il faut prouver que

$$a_0(f') = 0$$

$$a_k(f') = k b_k(f)$$

$$b_k(f') = -k a_k(f).$$

Par exemple,

Nous allons montrer plus généralement que

$$a_0(f') = d/\pi \text{ où } d := f(\pi) - f(-\pi)$$

$$a_k(f') = (-1)^k d/\pi + k b_k(f)$$

$$b_k(f') = -k a_k(f)$$

$$a_k(f') = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \cos kt \, dt \quad (14.96)$$

se ramène, par une intégration par parties, à

$$a_k(f') = \frac{1}{\pi} [f(t) \cos(kt)]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k f(t) \sin kt \, dt = k b_k(f) + \frac{(-1)^k}{\pi} \underbrace{[f(\pi) - f(-\pi)]}_{=d \text{ saut de disc'té de } f_{pro}} \quad (14.97)$$

Le calcul ci-dessus a montré que l'**hypothèse** $f(-\pi) = f(\pi)$ (ou plus généralement $f_{pro} \in C^0$) est **essentielle** pour pouvoir affirmer que la série de Fourier de f' est la dérivée de celle de f ,

en voici un exemple : $\forall x \in]-\pi, \pi[: \frac{x}{2} = \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + 0 \cos x + 0 \cos 2x + 0 \cos 3x + \dots,$$

■

La dérivation dans le monde des fonctions devient donc, dans le monde des coefficients de Fourier, une interversion des a_k et des b_k , associée à une multiplication par $\pm k$. Mais cette traduction s'avère nettement plus esthétique dans le monde des développements de Fourier en termes d'exponentielles complexes :

la dérivation de f se ramène à une multiplication de ses coefficients par ik .

En effet,

$$\begin{aligned} c_k(f') &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[f(x) e^{-ikx} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{ik}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{(-1)^k}{2\pi} (f(\pi^-) - f(-\pi^+)) + ik c_k(f) \\ &= ik c_k(f). \end{aligned} \quad (14.98)$$

◇ Noter que si on omet l'hypothèse $f(\pi) = f(-\pi)$, le saut de discontinuité de f_{pro} intervient dans **tous** les coefficients de la dérivée.

On a un résultat assez semblable pour le développement de Fourier d'une primitive ... à part que l'intégration terme à terme d'une série de Fourier ne donne pas une série de Fourier ..., mais la série de Fourier de la "fonction x " est bien connue.

14.8.3 Convergence uniforme des séries classiques

Théorème 14.27 — C.U. de la série de Fourier de f .

$$\left. \begin{array}{l} f \in C^0([-\pi, \pi]) \\ f' \in C_{\text{morc}}^0([-\pi, \pi]) \\ f(\pi) = f(-\pi) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx) \stackrel{\text{C.U.}}{=} f(x). \quad (14.99)$$

Ce théorème s'étend directement aux fonctions définies sur $[a, b]$, développées relativement au système

$$\left\{ \frac{1}{2}, \cos\left(\frac{2\pi}{b-a}kx\right), \sin\left(\frac{2\pi}{b-a}kx\right); k \in \mathbb{N}_0 \right\}. \quad (14.100)$$

Nous en décomposerons la démonstration en trois étapes, prouvant successivement que les hypothèses impliquent la *convergence absolue de la série des coefficients* de Fourier, puis que cette convergence implique à son tour la *convergence de la série de Fourier elle-même*. Enfin, le théorème précédent (de convergence simple) assure que la *somme de cette série* est bien f , égale, par hypothèse, à sa régularisée.

Lemme 14.28 — C.A. de la série des coefficients de Fourier de f .

$$\left. \begin{array}{l} f \in C^0([-\pi, \pi]) \\ f' \in C_{\text{morc}}^0([-\pi, \pi]) \\ f(\pi) = f(-\pi) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k(f)| < +\infty \\ \sum_{k=1}^{\infty} |b_k(f)| < +\infty \end{array} \right.$$

Démonstration.

Pour prouver la deuxième ligne il suffit de prouver que $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k(f)|$ (ou son carré) est borné. Or

$$|b_k(f)| = \frac{|a_k(f')|}{k}. \quad (14.101)$$

D'autre part, on sait déjà, grâce à l'inégalité de Bessel, que $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f'))^2$ est bornée, puisque $f' \in L^2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$.

L'astuce est alors d'utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left(\sum_{k=1}^n |b_k(f)| \right)^2 = \left(\sum_{k=1}^n |a_k(f')| \frac{1}{k} \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n (a_k(f'))^2 \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right). \quad (14.102)$$

On conclut alors que le premier membre est majoré par un réel indépendant de n , car chacun des facteurs du second membre l'est.

La preuve de $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k(f)| < +\infty$ est similaire. ■

Lemme 14.29 — C.U. d'une série trigonométrique.

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < +\infty \\ \sum_{k=1}^{\infty} |b_k| < +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \text{ C.U.} \quad (14.103)$$

Démonstration.

Il suffit d'appliquer le critère de Weierstrass, puisque

$$|a_k \cos(kx)| \leq |a_k| \quad (14.104)$$

et

$$|b_k \sin(kx)| \leq |b_k|. \quad (14.105)$$

□

Démonstration du théorème de C.U. de la série de Fourier de f .

Notons $S(x)$ la somme de la série trigonométrique ci-dessus. Nous verrons en 14.8.5 que la convergence uniforme garantit que les coefficients a_k et b_k sont les coefficients de Fourier de la fonction S .

Sous les hypothèses du théorème, nous en déduisons que

$$a_k(f) = a_k(S), \quad (14.106)$$

$$b_k(f) = b_k(S). \quad (14.107)$$

Le théorème de convergence simple nous assure alors que S est la régularisée de f , qui est f elle-même par hypothèse. ■

14.8.4 C.U. des séries relatives à un système complet

Nous ne ferons ici qu'évoquer une condition suffisante de convergence uniforme, sans même préciser tout à fait les hypothèses. L'idée est que si le système Φ est complet relativement à la classe $C^2([a, b], \mathbb{R})$, alors il suffit que $f \in C^2([a, b], \mathbb{R})$ satisfasse à d'éventuelles conditions aux limites (en a et b) pour que la série de f relativement à Φ converge uniformément vers f sur $[a, b]$. La nécessité d'introduire des conditions aux limites apparaît d'ailleurs déjà avec les séries de Fourier classiques : on exige que $f(a) = f(b)$, sous peine de s'exposer à un phénomène de Gibbs.

Les conditions aux limites (C.L.) en question ainsi que le système Φ des fonctions φ_k dépendent du problème considéré (voir problème de Sturm-Liouville pour les EDL (chapitres 16 et 17) et problèmes avec conditions au bord pour les E.D.P., chapitres 23, 24 et 25). Nous ne détaillerons pas plus ici.

En bref :

$$\left. \begin{array}{l} \Phi \text{ est complet} \\ f \in C^2 \\ f \text{ satisfait aux C.L. ad hoc} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) \varphi_k(x) \stackrel{\text{C.U.}}{=} f(x). \quad (14.108)$$

14.8.5 Coefficients d'une série en les φ_j qui converge uniformément vers f

Ces coefficients sont les coefficients de Fourier de f .

Proposition 14.30

- (i) Si $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ est orthonormé et si $\sum_{j=0}^{\infty} b_j \varphi_j \stackrel{\text{C.U.}}{=} f$, alors $b_k = \langle f, \varphi_k \rangle = \int_a^b f \cdot \varphi_k^*$.
- (ii) $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ est orthogonal et si $\sum_{j=0}^{\infty} b_j \varphi_j \stackrel{\text{C.U.}}{=} f$, alors $b_k = \frac{\langle f, \varphi_k \rangle}{\langle \varphi_k, \varphi_k \rangle}$

(i) est un cas particulier de (ii).

Démonstration de (ii).

Par hypothèse $f \stackrel{\text{C.U.}}{=} \sum_{j=0}^{\infty} b_j \varphi_j$. Calculons le produit scalaire de f avec φ_k .

$$\begin{aligned}
 \langle f, \varphi_k \rangle &= \int_0^L \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j \varphi_j \right) \varphi_k^* \\
 &= \int_0^L \sum_{j=0}^{\infty} b_j \varphi_j \varphi_k^* \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} b_j \int_0^L \varphi_j \varphi_k^* \quad \text{car } \sum_{j=0}^{\infty} b_j \varphi_j \varphi_k^* \text{ C.U. sur } [0, L] \text{ (pourquoi ?)} \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} b_j \delta_{jk} \int_0^L |\varphi_k|^2 \quad \text{car } \varphi_j \perp \varphi_k \text{ si } j \neq k \\
 &= b_k \langle \varphi_k, \varphi_k \rangle.
 \end{aligned} \tag{14.109}$$

Donc $b_k = \frac{\langle f, \varphi_k \rangle}{\langle \varphi_k, \varphi_k \rangle}$. ■

14.9 Dérivation, intégration, produit et convolution

Nous avons vu en 14.4.9 que si f et $f' \in C^0([-\pi, \pi])$ et si $f(-\pi) = f(\pi)$, alors la série dérivée terme à terme de la série de Fourier de f est précisément la série de Fourier de f' . Mais converge-t-elle? Si oui, sa somme est-elle f' ? Le théorème 14.9.1 donne une réponse.

14.9.1 Dérivée d'une série de Fourier

Théorème 14.31

Si f, f' et $f'' \in C_{\text{morc}}^0([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ et si f_{pro} est continue, alors la série dérivée de la série de Fourier de f converge simplement vers la régularisée \tilde{f}' de f' .

En particulier, en tout point x où le prolongement périodique f'_{pro} de f' est continu, on a

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (k b_k(f) \cos kx - k a_k(f) \sin kx). \quad (14.110)$$

◇ **N.B.** L'hypothèse $f'' \in C_{\text{morc}}^0$ peut être allégée en $f' \in DG$.

Si on suppose de plus que f_{pro} et f'_{pro} (les prolongements périodiques de f et f') sont continus, alors on est assuré de la convergence uniforme des séries de Fourier de f et f' , et le théorème résulte directement des résultats du chapitre 12.

Démonstration.

L'hypothèse f' et $f'' \in C_{\text{morc}}^0[-\pi, \pi]$ garantit la convergence simple de la série de Fourier de f' vers la régularisée \tilde{f}' de f' . Il n'y a donc plus qu'à utiliser 14.4.10. ■

14.9.2 Intégration d'une série de Fourier

Peut-on intégrer terme à terme une série de Fourier d'une fonction f pour obtenir une série de Fourier convergeant vers une primitive de f ?

Oui, si on se restreint à un intervalle $[a, b]$, que f est de classe $C_{\text{morc}}^0([a, b], \mathbb{R})$, et que f a une moyenne nulle sur $[a, b]$.

Soit $f \in C_{\text{morc}}^0([-\pi, \pi])$. Pour alléger l'écriture posons

$$a_k := a_k(f) \text{ et } b_k := b_k(f). \quad (14.111)$$

La valeur moyenne de f sur $[-\pi, \pi]$ est donc $\frac{a_0}{2}$. Si on intègre terme à terme le développement de Fourier de f , ce premier terme $a_0/2$ donne naissance au seul terme non trigonométrique de la nouvelle série. C'est pourquoi nous préférons nous intéresser à la "fonction nivelée"

$$g(x) := f(x) - \frac{a_0}{2}. \quad (14.112)$$

Définissons

$$G(x) := \int_{-\pi}^x g(t) dt. \quad (14.113)$$

Comme G est une intégrale d'une fonction g bornée et intégrable (puisque de classe $C_{\text{morc}}^0([-\pi, \pi], \mathbb{R})$), G est continue sur $[-\pi, \pi]$.

Comme G s'annule en $-\pi$ et en π , son prolongement périodique G_{pro} est donc lui aussi continu. Ceci implique que $G(x)$ est la somme de sa série de Fourier.

Reste à calculer ses coefficients.

Lemme 14.32

Les coefficients de Fourier de la primitive nivelée de la fonction nivelée g , c'est-à-dire la fonction $G(x) - \frac{a_0(G)}{2}$, s'obtiennent en intégrant terme à terme la série de Fourier de la fonction nivelée g .

Autrement dit :

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 : \begin{cases} a_k(G) = -\frac{1}{k}b_k(g) = -\frac{1}{k}b_k(f) \\ b_k(G) = \frac{1}{k}a_k(g) = \frac{1}{k}a_k(f). \end{cases} \quad (14.114)$$

Démonstration.

Les égalités de droite sont immédiates. Celles de gauche s'établissent grâce à une intégration par parties. Par exemple, si $k \geq 1$:

$$\begin{aligned} a_k(G) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(t) \cos kt \, dt \\ &= \left[\frac{1}{k\pi} G(t) \sin(kt) \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{k\pi} G'(t) \sin(kt) \, dt \\ &= 0 - \frac{1}{k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(t) - \frac{a_0}{2} \right) \sin(kt) \, dt \\ &= -\frac{1}{k} b_k(f). \end{aligned} \quad (14.115)$$

Pour calculer $a_0(G)$, il suffit de se rappeler que

$$G(x) \stackrel{\text{c.s.}}{=} \frac{a_0(G)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{b_k}{k} \cos(kx) + \frac{a_k}{k} \sin(kx) \right) \quad (14.116)$$

et que $G(-\pi) = 0$, d'où

$$0 = \frac{a_0(G)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{b_k}{k} (-1)^k \right). \quad (14.117)$$

Conclusion :

$$G(x) \stackrel{\text{c.s.}}{=} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k b_k}{k} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{b_k}{k} \cos(kx) + \frac{a_k}{k} \sin(kx) \right) \quad (14.118)$$

Toute primitive de f est, à une constante additive près, égale à

$$F(x) = \frac{a_0}{2} x + G(x), \quad (14.119)$$

d'où

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{b_k}{k} \cos(kx) + \frac{a_k + (-1)^k a_0}{k} \sin(kx) \right). \quad (14.120)$$

$$\begin{aligned}
 f(x) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \\
 \int_{-\pi}^x \left(f(t) - \frac{a_0}{2} \right) dt &\stackrel{?}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\pi}^x (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) dt \\
 \text{pour éviter } \int_{-\pi}^x \frac{a_0}{2} dt &= \frac{a_0}{2} (x + \pi) \\
 &\quad \text{n'est pas 1 terme "trigono"} \\
 \frac{a_0}{2} x &= a_0 \left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right)
 \end{aligned}$$

FIGURE 14.23

■

14.9.3 Produit de séries de Fourier

Si nous avons à résoudre un problème en termes de séries de Fourier et qu'apparaît un produit de fonctions, quelle est la série de Fourier de ce produit? Peut-on déduire les coefficients de Fourier du produit $f.g$ de ceux de f et de g ?

C'est assez simple dans le cas d'un développement relativement à système orthogonal $(e^{ik\omega x})_{k=0,\pm 1,\pm 2,\dots}$ si on travaille dans $L^2([-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}], \mathbb{R})$ ou avec des fonctions de période T .

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k e^{ik\omega x} \quad \text{càd } f_k := c_k(f) \quad (14.121)$$

$$g(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_k e^{ik\omega x} \quad \text{càd } g_k := c_k(g). \quad (14.122)$$

$$\left(\sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} f_{\ell} e^{i\ell\omega x} \right) \cdot \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_k e^{ik\omega x} \right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} f_{\ell} g_{k-\ell} \right) e^{ik\omega x}. \quad (14.123)$$

Les coefficients de Fourier du produit $f.g$ sont effectivement

$$\forall k \in \mathbb{Z} : \quad c_k(f.g) = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} (f_{\ell} \cdot g_{k-\ell}) \quad (14.124)$$

où on convient de sommer successivement sur $\ell = 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$

Ainsi la suite $\left(\sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} f_{\ell} g_{k-\ell} \right)_{k=0,1,-1,2,-2,3,-3,\dots}$ des coefficients de Fourier de $f.g$ apparaît comme un étrange produit des deux suites de coefficients $(f_k)_{k=0,1,-1,2,-2,\dots}$ et $(g_k)_{k=0,1,-1,2,-2,\dots}$ de f et g respectivement pas si étrange si on pense au produit de Cauchy séries des coefficients de Fourier).

Nous en verrons un analogue continu (le produit de **convolution** de deux fonctions f et g).

Cette suite est une sorte de "convolution discrète" des suites $(f_k)_{k=0,1,-1,2,-2,\dots}$ et $(g_k)_{k=0,1,-1,2,-2,\dots}$

14.9.4 Produit de convolution

Définition 14.16

La **convolution** (ou **convolée**) de deux fonctions **périodiques** f et g de période T est la fonction

$$f * g : x \mapsto (f * g)|_x := \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(y) g(x - y) dy. \quad (14.125)$$

Le produit de convolution $*$ est commutatif, et la convolée est également périodique de période T .

On peut déduire les coefficients de Fourier de $f * g$ de ceux de f et g . La formule est particulièrement simple dans la notation exponentielle complexe, où les $c_k(f)$ désignent les coefficients de Fourier de f (pour $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

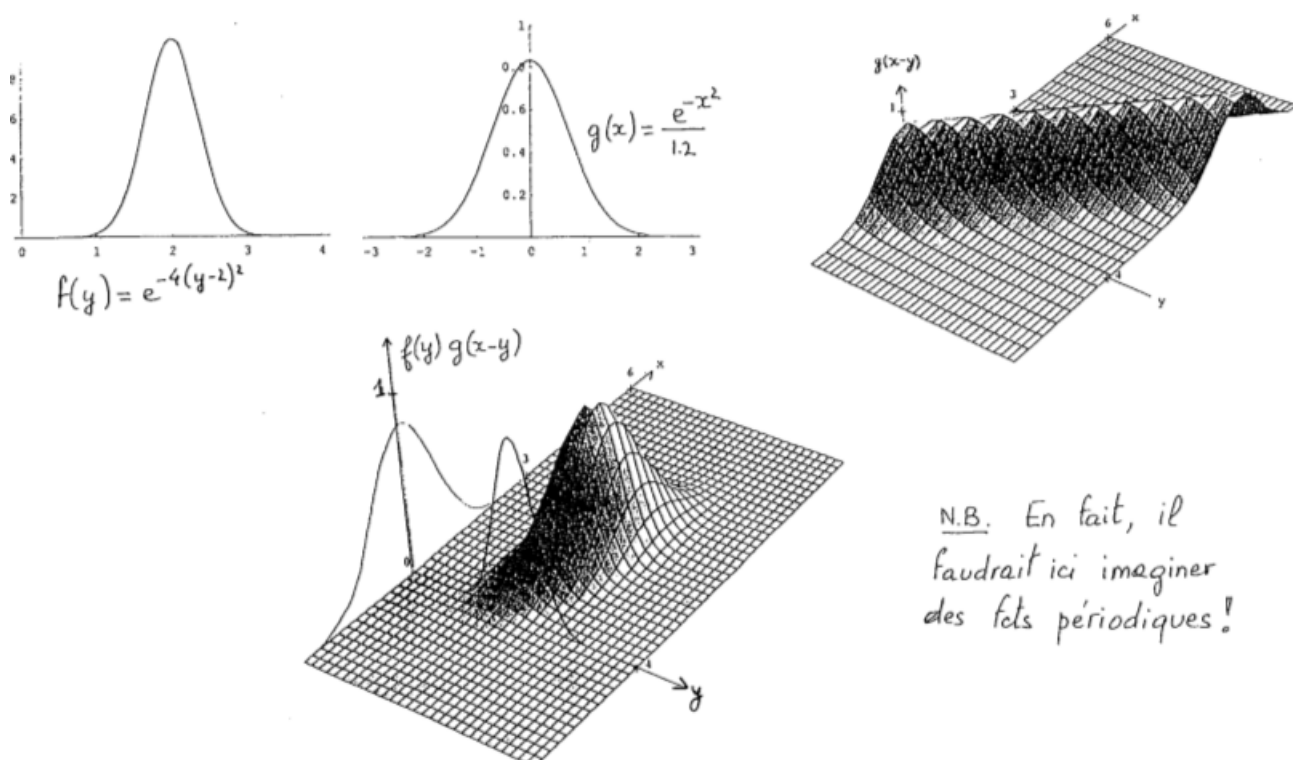


FIGURE 14.24

N.B. En fait, il faudrait ici imaginer des fcts périodiques !

Théorème 14.33

Si f et g sont deux fonctions intégrables, bornées et périodiques de période T , alors $\forall k \in \mathbb{Z}$:

$$c_k(f * g) = c_k(f) \cdot c_k(g) \quad (14.126)$$

$$c_k(f \cdot g) = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} (f_{\ell} \cdot g_{k-\ell}) \quad (14.127)$$

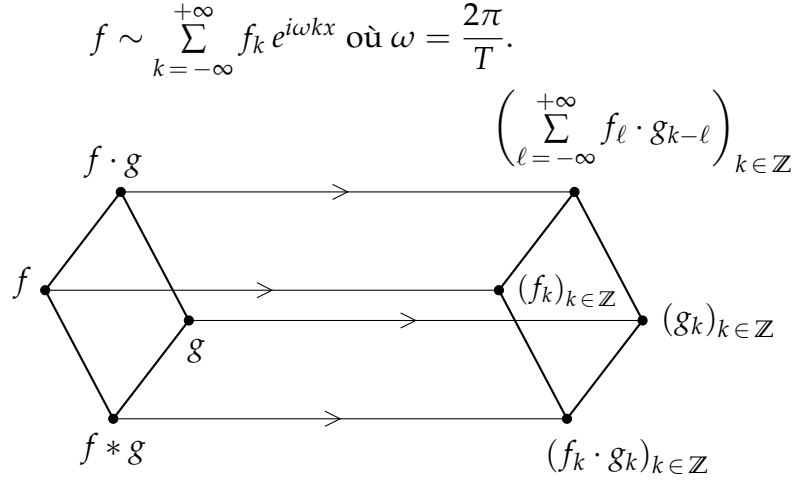


FIGURE 14.25

Démonstration. : calcul de $c_k(f * g)$

$$\begin{aligned}
 c_k(f * g) &:= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (f * g)|_x e^{-ik\omega x} dx \\
 &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f|_y g|_{x-y} dy \right) e^{-ik\omega x} dx \\
 &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f|_y e^{-ik\omega y} g|_{x-y} e^{-ik\omega(x-y)} dy \right) dx \\
 &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f|_y e^{-ik\omega y} \left(\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g|_{x-y} e^{-ik\omega(x-y)} dx \right) dy \\
 &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f|_y e^{-ik\omega y} \cdot \left(\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}-y}^{\frac{T}{2}-y} g|_u e^{-ik\omega u} du \right) dy \\
 &\quad \quad \quad u:=x-y \\
 &\stackrel{\uparrow}{=} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f|_y e^{-ik\omega y} c_k(g) dy \\
 \text{car } c_k(g) &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(u) e^{-ik\omega u} du = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}-y}^{\frac{T}{2}-y} g(u) e^{-ik\omega u} du \\
 &\quad \quad \quad \text{de période } T \\
 &= c_k(f) \cdot c_k(g)
 \end{aligned} \tag{14.128}$$

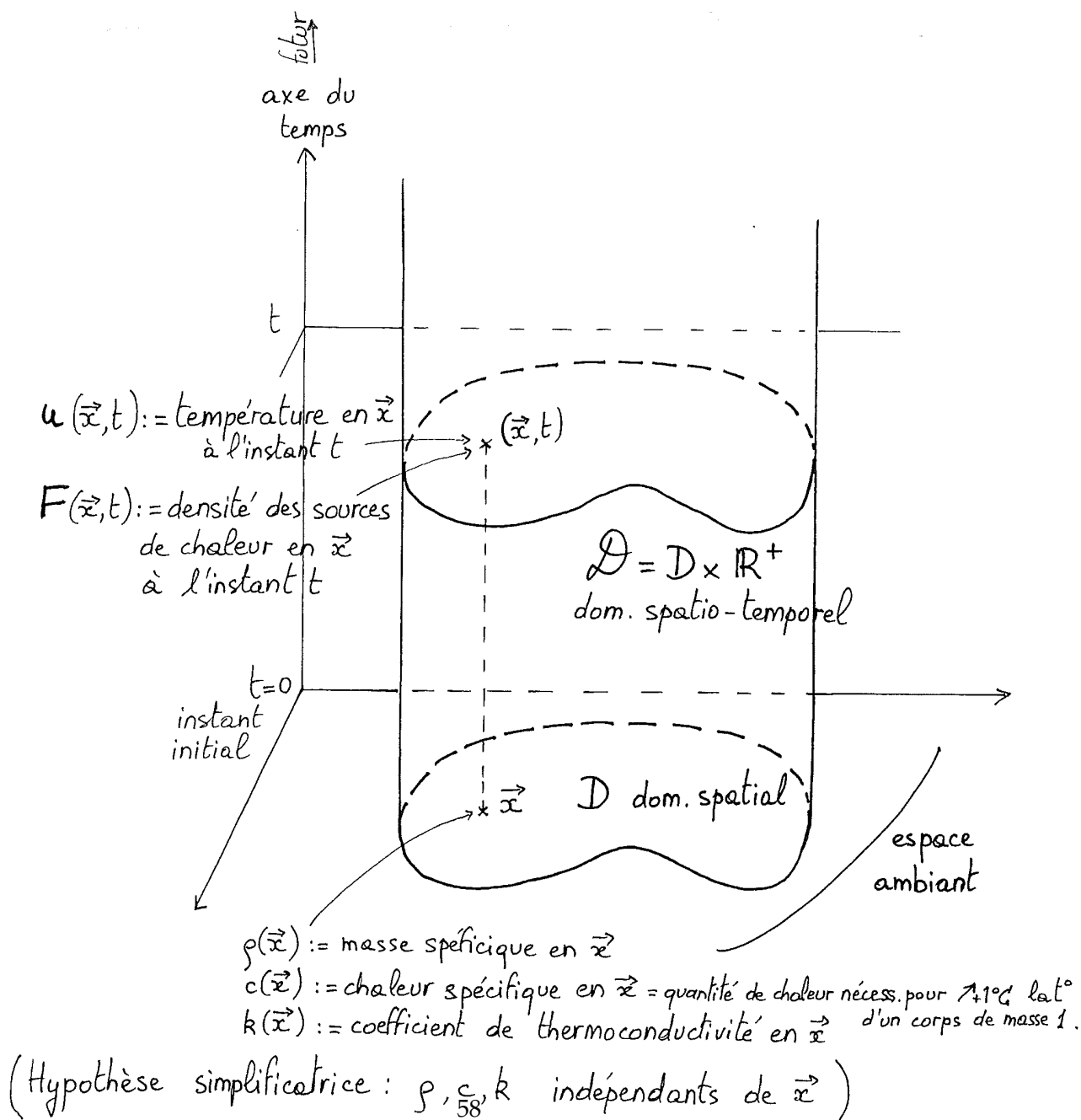
R Nous avons vu que la **somme partielle** s_n de la série de Fourier de f (de période 2π) est la convolée de f avec le **noyau de Dirichlet** K_n . Nous retrouverons des situations analogues plus tard (14.12, chapitres 16, 24 et 25).

R On définit aussi le produit de convolution de fonctions non périodiques. Pour de telles fonctions, on ne peut pas utiliser les séries de Fourier classiques, et on recourt généralement à leurs transformées de Fourier. La convolution de f et g est alors donnée par

$$(f * g)|_t := \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau.$$

Motivation du cours Analyse II par les problèmes posés par l'étude de la conduction de la chaleur

Les quelques pages qui suivent présentent une des méthodes fondamentales de résolution des EDP (la séparation des variables) appliquée à un problème simple. Nous reviendrons bien sûr à l'équation de la chaleur (chapitre 24) et à d'autres EDP (chapitres 22 à 25), mais le but principal de cette introduction est de motiver l'étude de chacun des chapitres de ce cours et de montrer qu'ils sont intimement liés.



Quantité de chaleur = $\iiint_D c \rho u$

(cf. chap. 13)

- Variation quantité de chaleur / unité de temps = $\frac{d}{dt} \iiint_D c \rho u = \iiint_D c \rho \frac{\partial u}{\partial t}$

- Quantité de chaleur traversant ∂D / unité tps = $\oint_{\partial D} k \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma$

= $\oint_{\partial D} k \langle \vec{\nabla} u, \vec{e}_n \rangle d\sigma = \iiint_D \langle \vec{\nabla}, k \vec{\nabla} u \rangle$

- Quantité de chaleur dégagée par sources / unité tps = $\iiint_D F$

Loi de Fourier : $\iiint_D c \rho \frac{\partial u}{\partial t} = \iiint_D (\langle \vec{\nabla}, k \vec{\nabla} u \rangle + F)$

Version ponctuelle:

$$\rho c \frac{\partial u}{\partial t} = \langle \vec{\nabla}, k \vec{\nabla} u \rangle + F$$

▷ Si milieu homogène : $\rho, c, k = \text{cst}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f \quad \text{où} \quad \begin{cases} a^2 := k / c\rho \\ f := F / c\rho \end{cases}$$

▷ en l'absence de sources :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u$$

Version 1D : $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

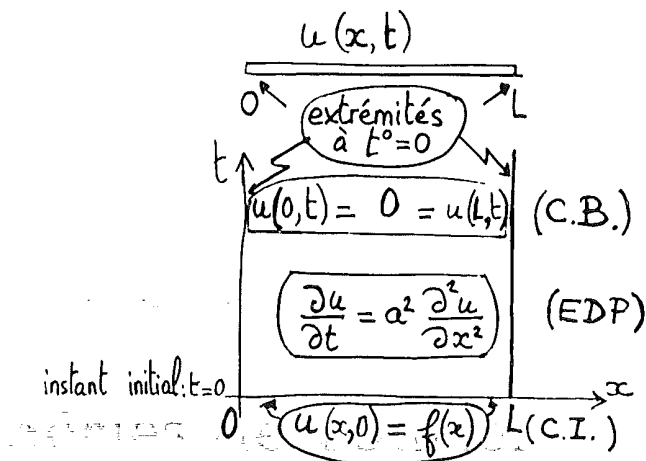
EDP 2^d ordre parabolique

voir (Chap. EDP

(et ex-chap. 24) .

Conduction de la chaleur d's une tige (1D).

0.3



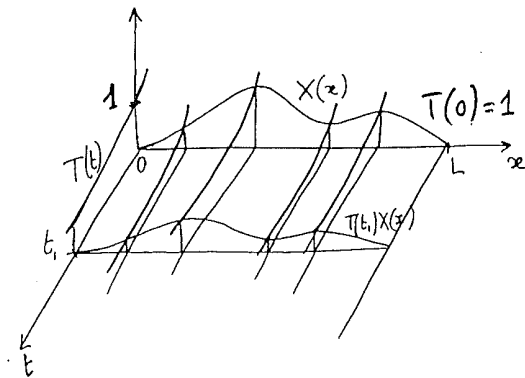
Problème: connaissant u aux extrémités
ou au départ
la loi...



Trop compliqué!

Espoir: la sol. u est à variables séparées:

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$$



$$(EDP) \Rightarrow T'(t) \cdot X(x) = a^2 T(t) \cdot X''(x)$$

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

$$T' + a^2 \lambda T = 0$$

EDL 1^{er} ordre

$$X'' + \lambda X = 0$$

EDL 2^d ordre

$$(CB) \begin{cases} X(0) \cdot T(t) \stackrel{\forall t}{=} 0 \\ X(L) \cdot T(t) \stackrel{\forall t}{=} 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (CL) \begin{cases} X(0) = 0 \\ X(L) = 0 \end{cases}$$

pour λ (fixé)

= pb aux limites (Chap.16 (16.1))

$$(CI) X(x) \cdot T(0) = f(x)$$

on oublie (provisoirement) la CI.

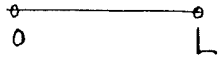
? λ : \exists sol. $\neq 0$

= pb aux valeurs propres (Chap.16 (16.4))

$\Delta \quad X'' + \lambda X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X(x) = \begin{cases} \lambda > 0: c_1 \cos(\sqrt{\lambda} x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda} x) \\ \lambda = 0: c_1 x + c_2 \\ \lambda < 0: c_1 e^{\sqrt{-\lambda} x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda} x} \end{cases}$

$$\Delta \quad \begin{cases} X(0) = 0 \\ X(L) = 0 \end{cases}$$

C.L.



$$X(x) = c \sin(\sqrt{\lambda} x)$$

$$\text{ou } \sqrt{\lambda} = \frac{k\pi}{L} \quad (k \in \mathbb{N})$$

Val. propre := $\lambda \rightsquigarrow \exists$ sol. X_λ non triviale pour ce λ
 $\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{=:\text{ft propre}}$

$$\Delta \left[\frac{\lambda}{\hbar} := k^2 \frac{\pi^2}{L^2} \right]$$

$$X_k(x) := \sin\left(k \frac{\pi}{L} x\right)$$

EDL 1^{ordre} en $T(t) \rightsquigarrow \boxed{T_k' + \frac{Q^2 R^2 \pi^2}{L^2} T_k = 0}$


↓

$$T_k(t) = c e^{-\left(\frac{ak\pi}{L}\right)^2 t}$$

solutions
"à variables séparées"

$$u_k(x,t) := e^{-\left(\frac{ak\pi}{L}\right)^2 t} \cdot \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$$

C.I.

$\triangleright \boxed{u(x,0) = f(x)} \neq \sum c_k u_k(x,0) = \sum c_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$
 en général


• EDP Linéaire homogène $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$
 \Downarrow
toute combi. de sol. est une sol.

• CB Linéaires homogènes $u(0,t) = 0$
 $u(L,t) = 0$
 \Downarrow
toute combi. de sol. satisf. CB est sol. satisf. CB

$\Rightarrow \sum_{k=1}^n c_k u_k$ est sol. satisf. CB

$$\sum_{k=1}^n c_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \neq f(x) \quad \triangle ?$$

sauf coup de bol!

AUDACE!
Daniel Bernoulli:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k$$

où $c_k \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) = f(x)$

• conv.? Chap. 11
 • dérivable $\begin{cases} \dot{} \propto t \\ 2x \propto x \end{cases}$?
 • sol.?
 (i.e. peut-on dériver terme à terme?)
conv. & C.U. de Séries de fcts
(Chap. 12)

$\exists ?$ séries de Fourier conv.?
Chap. 14

cette démarche s'appelle
 méthode de la
 séparation des variables

N.B. La résolution d'un probl. d'EDP (dernier chap. du cours) fait intervenir tous les chapitres précédents (11, 12, 13, 14, 15 & 16)!

14.10 Equation de la chaleur (1D)

14.10.1 Le problème

Evolution de la température le long d'une barre de longueur L .

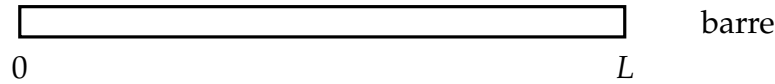


FIGURE 14.26

$u(x, t)$ = température au point $x \in [0, L]$, au temps $t \geq 0$.

$$(EDP) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad a = \text{constante (dépend du matériau)}$$

$$(C.L.) \quad u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad \forall t \geq 0 \quad \text{extrémités maintenues à température nulle}$$

$$(C.I.) \quad u(x, 0) = f(x) \text{ où } f(0) = f(L) = 0 \quad \text{température donnée à l'instant initial,}$$

Daniel Bernoulli imagina la **méthode de séparation des variables** pour résoudre ce problème et introduisit ainsi les séries de Fourier.

14.10.2 La méthode

Cette EDP étant linéaire et homogène, toute combinaison linéaire de solutions est encore une solution. La première étape consiste à rechercher les **solutions à variables séparées**, c'est-à-dire du type

$$u(x, t) = X(x).T(t). \quad (14.129)$$

L'EDP devient $T'(t).X(x) = a^2 T(t).X''(x)$,

c'est-à-dire

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X}. \quad (14.130)$$

Donc

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda (c^{te}), \quad (14.131)$$

$$\text{c'est-à-dire } \begin{cases} (EDX) : X'' + \lambda X = 0 \\ (EDT) : T' + a^2 \lambda T = 0. \end{cases}$$

$$(EDX) : X'' + \lambda X = 0 \iff \begin{cases} \alpha \cos \sqrt{\lambda} x + \beta \sin \sqrt{\lambda} x & \text{si } \lambda > 0 \\ \alpha x + \beta & \text{si } \lambda = 0 \\ \alpha \exp(\sqrt{-\lambda} x) + \beta \exp(-\sqrt{-\lambda} x) & \text{si } \lambda < 0 \end{cases} \quad (14.132)$$

$$\text{où } \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad (14.133)$$

$$(CB) : X(0).T(t) = X(L).T(t) = 0 \quad \forall t \geq 0, \quad (14.134)$$

d'où les conditions aux limites pour l'EDX :

$$X(0) = X(L) = 0 \quad (C.L.X.) \quad (14.135)$$

$$(EDX) \& (CLX) \implies X(x) = \alpha \sin \sqrt{\lambda} x \text{ où } \sqrt{\lambda} = \frac{k\pi}{L} \left(\text{c'est-à-dire } \lambda = \frac{k^2 \pi^2}{L^2} \right). \quad (14.136)$$

Pour $\lambda = \frac{k^2\pi^2}{L^2}$ (fixé), posons $X_k(x) := \sin \frac{k\pi}{L}x$.

L'(EDT) devient $T'_k + \frac{a^2k^2\pi^2}{L^2}T_k = 0$, d'où

$$T_k(t) = \exp \left(- \left(\frac{ak\pi}{L} \right)^2 t \right), \text{ à un facteur scalaire près.} \quad (14.137)$$

Donc pour ce $\lambda = \frac{k^2\pi^2}{L^2}$ fixé, les solutions à variables séparées sont

$$u_k(x, t) = X_k(x).T_k(t) = \exp \left(- \left(\frac{ak\pi}{L} \right)^2 t \right) \cdot \sin \left(\frac{k\pi}{L}x \right) \quad (14.138)$$

et tous ses multiples scalaires.

De plus, la (C.L.) est satisfaite par $u_k(x, t)$. Ce n'est pas le cas pour la (C.I.), car $u_k(x, 0) = \sin \frac{k\pi}{L}x$, or la donnée initiale est $u(x, 0) = f(x)$ ($\neq \sin \frac{k\pi}{L}x$, en général).

Comme $\forall k : a_k F_k(x, t)$ est solution de l'(E.D.P.) et (C.L.), qui sont linéaires homogènes, toute combinaison linéaire $\sum_{k=1}^n a_k u_k(x, t)$ est solution de l'(EDP) et (C.L.) $\forall n$ fini.

Mais $\sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k(x, t)$... est une **série** ... pas nécessairement convergente !

14.10.3 Rêvons ...

Si cette série converge vers une fonction $u(x, t)$ et qu'on peut calculer les dérivées d'ordre ≤ 2 de u en dérivant la série terme à terme ...

... alors $\sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k(x, t)$ est aussi solution de l'(E.D.P.) et (C.L.).

... et si $u(x, 0) \underset{\text{continuité de } u}{=} \lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k(x, 0)$,

alors la C.I. devient $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin \frac{k\pi x}{L}$

... qui sera satisfaite si la série de Fourier en sinus de f converge simplement vers f .

Etant donné le problème

$$(E.D.P.) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2};$$

$$(C.L.) \quad u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad \forall t \geq 0;$$

$$(C.I.) \quad u(x, 0) = f(x) \quad \forall x \in [0, L],$$

où f est supposée bornée, intégrable sur $[0, L]$ et s'annulant aux extrémités 0 et L , on définit la **série "solution formelle"**

$$\Sigma := \sum_{k=1}^{\infty} b_k \exp \left(- \left(\frac{ak\pi}{L} \right)^2 t \right) \sin \frac{k\pi}{L}x \quad (14.139)$$

où les b_k sont les coefficients de la série en sinus de f .

Le plus dur reste à faire : établir une condition suffisante pour que cette série "solution formelle" converge vers une **véritable solution**.

14.10.4 Une solution pour (EDP) et (CL)

Théorème 14.34

Si $f \in L^2[0, L]$, **alors** $\forall t > 0$: la série \sum converge vers $u(x, t)$, ce qui définit une fonction réelle en $(x, t) : u, u \in C^\infty([0, L] \times]0, \infty[)$, u est solution de (E.D.P.) et (C.L.) sur $[0, L] \times]0, \infty[$.
(2) Si de plus $f \in C^0$, $f' \in C^0_{mor}$, et $f(0) = f(L) = 0$, **alors** $u \in C^0([0, L] \times [0, \infty[)$ et u satisfait à (C.I.)

Démonstration de (1).

Nous allons d'abord montrer que la série "solution formelle" converge uniformément sur $[0, L] \times [t_0, +\infty[$ et ce $\forall t_0 > 0$. Ensuite nous prouverons qu'il en est de même pour **toutes** ses séries "dérivées terme à terme". Enfin, nous conclurons en utilisant les résultats du chapitre 12. Prouvons donc d'abord que :

$$u(x, t) := \sum_{k=1}^{\infty} b_k \exp\left(-\left(\frac{ak\pi}{L}\right)^2 t\right) \sin \frac{k\pi}{L} x \quad \text{C.U. sur } [0, L] \times [t_0, \infty[. \quad (14.140)$$

$$\begin{aligned} (i) |b_k| &\leq \frac{2}{L} \int_0^L |f(x)| \left| \sin \frac{k\pi}{L} x \right| dx \\ &\leq \frac{2}{L} \cdot L \cdot \sup_{[0, L]} |f| \cdot 1 =: B \in \mathbb{R} \quad (\text{car } f \text{ est bornée par hypothèse}) \end{aligned}$$

$$(ii) \exp\left(-\left(\frac{ak\pi}{L}\right)^2 t\right) \underset{(t \geq t_0)}{\leq} \exp\left(-\left(\frac{ak\pi}{L}\right)^2 t_0\right) =: \exp(-Ak^2),$$

$$(i.e. A = \frac{a^2 \pi^2}{L^2} t_0 > 0)$$

$$(iii) \left| \sin \frac{k\pi}{L} x \right| \leq 1$$

Pour conclure, il suffit donc d'appliquer le critère de Weierstrass, en remarquant que la série numérique $\sum_{k=1}^{\infty} B e^{-Ak^2}$ converge. ■

■ Exemple 14.15

- La série dérivée $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} -\frac{a^2 \pi^2}{L^2} k^2 b_k \exp\left(-\left(\frac{ak\pi}{L}\right)^2 t\right) \sin \frac{k\pi}{L} x \quad \text{C.U. sur } [0, L] \times [t_0, \infty[\cdots \text{vers } \frac{\partial u}{\partial t}(x, t), \quad (14.141)$$

car $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-Ak^2}$ converge (même raisonnement que précédemment).

- De même les séries dérivées $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \dots$ et $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \dots$ C.U. sur $[0, L] \times [t_0, \infty[$

... nécessairement vers $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

... donc $u(x, t)$ est bien définie et est solution de l'EDP.

- De même pour tout opérateur de dérivation $\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial t^m}$, il existe un polynôme $P(k)$ tel que le terme général de la série dérivée $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial t^m} \dots$ puisse être majoré en valeur absolue par $P(k)e^{-Ak^2}$. La convergence de toute série du type $\sum_{k=1}^{\infty} P(k)e^{-Ak^2}$ et le critère de Weierstrass montrent que la série dérivée en question converge uniformément sur $[0, L] \times [t_0, +\infty[$.

Les résultats du chapitre 12 montrent que la somme de cette série n'est autre que $\frac{\partial^{n+m} u}{\partial x^n \partial t^m}$. Ceci prouve que $u \in C^\infty([0, L] \times]0, +\infty[)$. ■



- Même si f (la fonction "C.I.") est discontinue, on obtient une solution u de l'EDP qui est de classe C^∞ à tout instant $t > 0$, aussi proche soit-il de 0!!! "régularisation instantanée!!!"
- La solution u satisfait à l'E.D.P. $\forall t > 0$, mais pas en $t = 0$. En effet, même si $f \in C^1$, rien ne garantit l'existence de f'' , c'est-à-dire de $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, 0)$.
- $u(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$ (exercice). Rappelons (C.B.) : $u(0, t) = 0 = u(L, t)$. C'est crucial!

14.10.5 Une solution au problème avec C.I.

Nous allons à présent prouver la seconde partie du théorème de convergence, c'est-à-dire

Proposition 14.35

$$\left. \begin{array}{l} f \in C^0([0, L], \mathbb{R}) \\ f' \in C_{\text{morc}}^0([0, L], \mathbb{R}) \\ f(0) = f(L) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u(x, 0) = f(x) \\ u \in C^0([0, L] \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}). \end{array} \right.$$

Démonstration de (2).

- La définition de u est telle que $u(x, 0)$ est la série de Fourier en sinus de f sur $[0, L]$. Or les hypothèses que nous faisons ici sur f sont telles que cette série de Fourier de f converge simplement vers f sur $[0, L]$. La première partie de la thèse est donc établie.
- Mais ceci n'est pas suffisant pour pouvoir dire que u est bien solution de notre problème. En effet, il convient au minimum que

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ >}} u(x, t) = u(x, 0). \quad (14.142)$$

Mieux encore, nous allons prouver la continuité de u sur le domaine fermé $[0, L] \times \mathbb{R}^+$, les seuls points délicats sont bien sûr ceux où $t = 0$. En fait, il nous suffit de prouver que la série \sum converge uniformément sur $[0, L] \times \mathbb{R}^+$. Grâce aux hypothèses faites ici sur f , la série de ses coefficients de Fourier converge absolument. Or

$$\forall x \in [0, L], \forall t \geq 0 : \left| b_k e^{-\left(\frac{ak\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \right| \leq |b_k|, \quad (14.143)$$

et nous venons de voir que

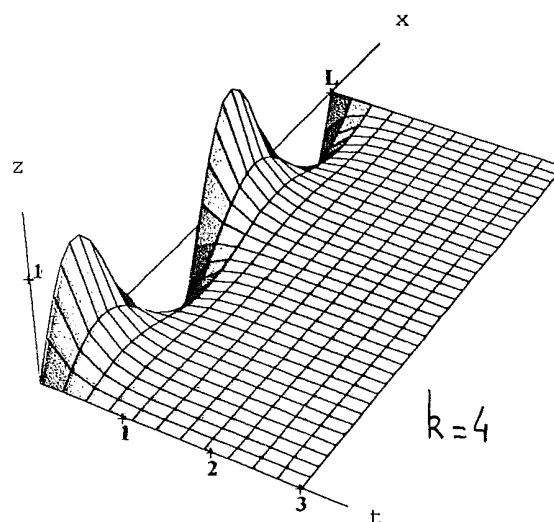
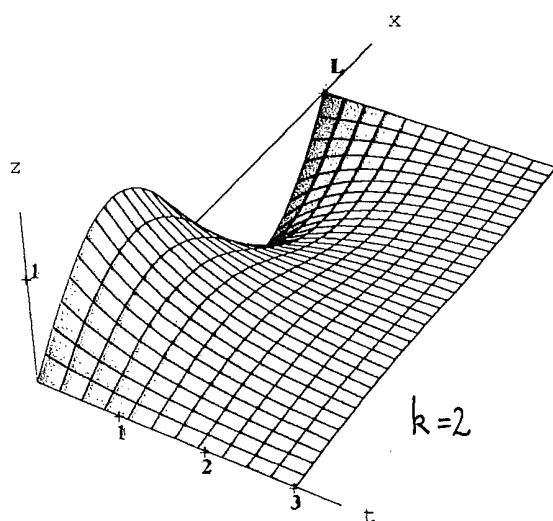
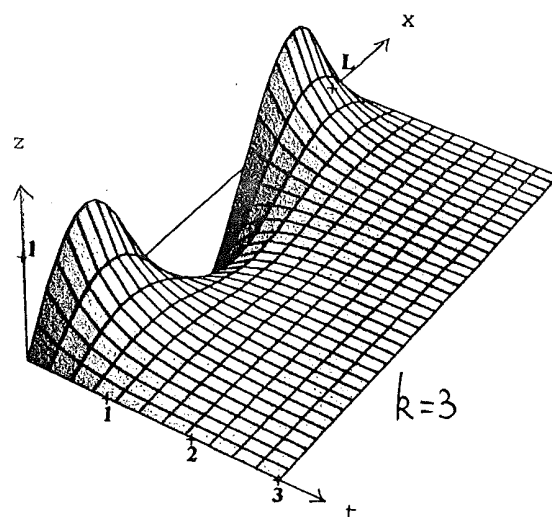
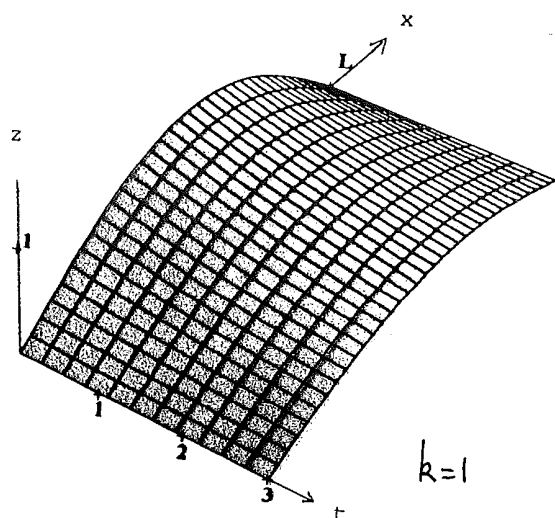
$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| < +\infty. \quad (14.144)$$

Grâce au critère de Weierstrass nous concluons à la convergence absolue et uniforme de la série qui définit u sur $[0, L] \times \mathbb{R}^+$, puis à la continuité de u . ■

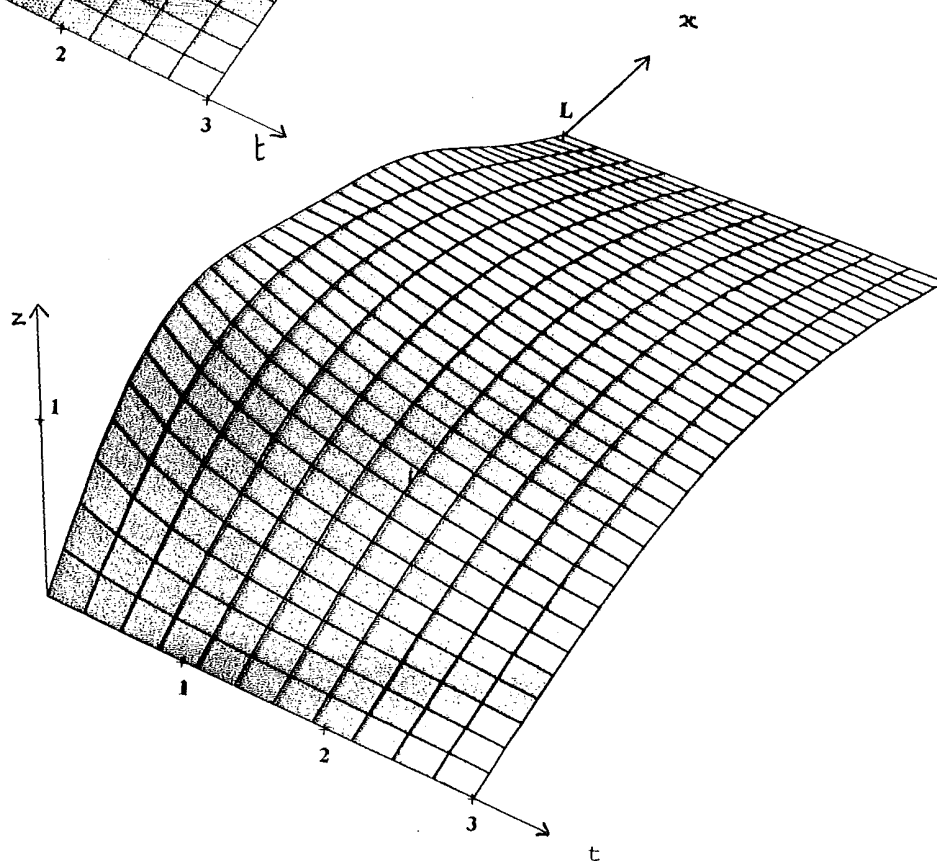
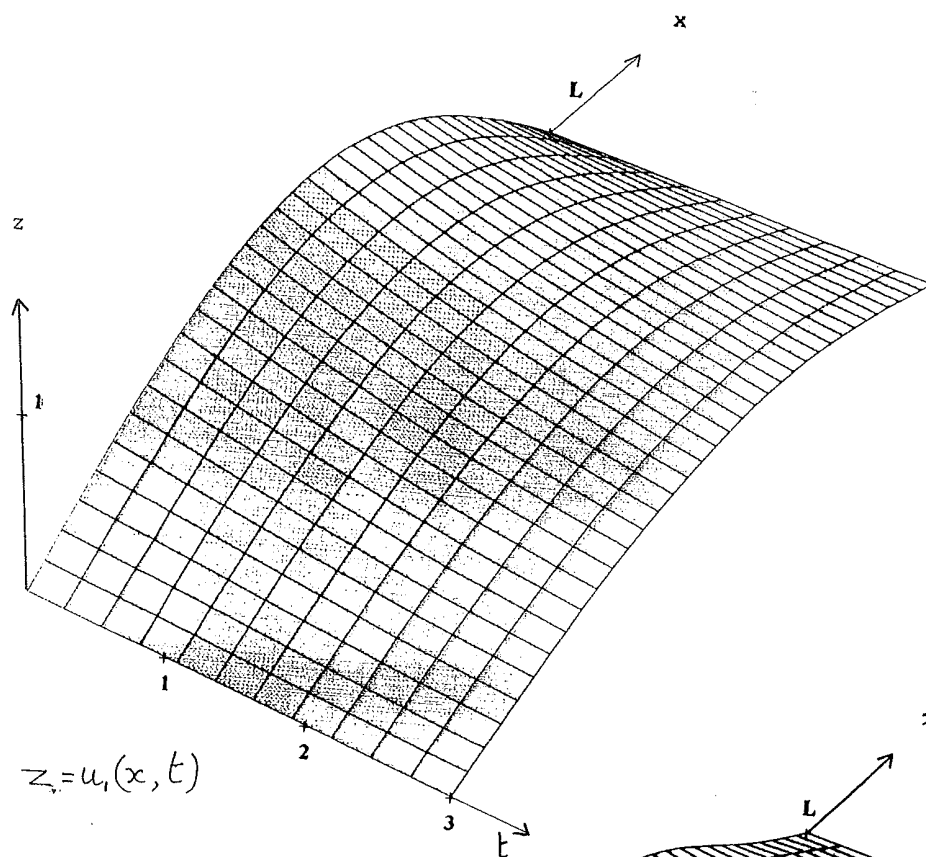
14.10.6 Unicité de la solution du problème

Celle-ci sera prouvée au chapitre 24, comme corollaire du *principe du maximum*

14.10.7 Illustrations



$$z = u_k(x, t) = \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) e^{-\left(\frac{ak\pi}{L}\right)^2 t} \text{ pour } k = 1, 2, 3, 4.$$



$$z = u_1(x, t) + \frac{1}{4}u_2(x, t) + \frac{1}{9}u_3(x, t) + \frac{1}{16}u_4(x, t).$$

14.11 Résolution d'une EDL périodique

14.11.1 EDL forcée périodiquement

Soit un système oscillant constitué d'une masse m et d'un ressort de constante de rappel k . Supposons qu'il n'y ait pas d'amortissement et qu'une force extérieure f lui soit appliquée dont voici le graphe :

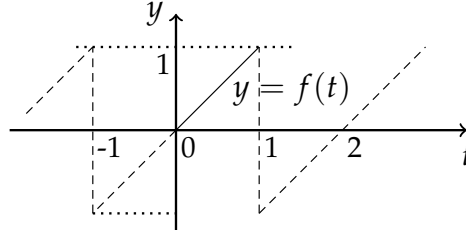


FIGURE 14.27

Notons que f est impaire, de période 2 : $f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin(n\pi t)$ où $f_n = \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2}{n\pi}$.

L'EDL qui modélise ce système est

$$my'' + ky = f, \quad (14.145)$$

la variable étant le temps t .

Recherchons une solution périodique de même période 2 et écrivons sa série de Fourier.

$$y(t) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(n\pi t) + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin(n\pi t). \quad (14.146)$$

En supposant qu'on puisse dériver deux fois cette série terme à terme, l'EDL devient

$$k \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-m n^2 \pi^2 + k) \alpha_n \cos(n\pi t) + \sum_{n=1}^{\infty} (-m n^2 \pi^2 + k) \beta_n \sin(n\pi t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin(n\pi t). \quad (14.147)$$

En identifiant les coefficients des séries nous voyons immédiatement que

$$\alpha_n = 0 \quad \forall n \quad (14.148)$$

et

$$(-m n^2 \pi^2 + k) \beta_n = f_n \quad \forall n \geq 1. \quad (14.149)$$

Le fait que tous les α_n soient nuls traduit le fait que y sera impaire, comme f , le second membre de l'EDL.

- Si $\forall n \in \mathbb{N}_0 : n^2 \pi^2 \neq k/m$, (c'est-à-dire si $\sqrt{k/m}/\pi \in \mathbb{N}_0$), alors chacune des équations algébriques ci-dessus a une et une seule solution et

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_n}{k - m\pi^2 n^2} \sin(n\pi t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2}{n\pi(n^2 \pi^2 m - k)} \sin(n\pi t) \quad (14.150)$$

est une série solution formelle. On vérifie dans ce cas-ci que la série et celles qui en dérivent par une ou deux dérivations terme à terme convergent uniformément. On en déduit qu'on peut bien dériver terme à terme et que la somme de cette série est bien solution de l'EDL.

- Si $\sqrt{\frac{k}{m}}/\pi \in \mathbb{N}_0$ et que $f_n \neq 0$, c'est-à-dire si le développement de Fourier de la force extérieure contient un terme de **même fréquence** qu'une oscillation libre (non forcée, c'est solution de l'EDLH associée), il y a résonance. Dans ce cas, il n'existe **pas de solution périodique**.

R

- La méthode utilisée ici rappelle la méthode des coefficients indéterminés que nous aurions utilisée pour chercher une solution particulière de l'EDLH lorsque le second membre est un polynôme trigonométrique du type :

$$\sum_{n=1}^d f_n \sin(n\pi t). \quad (14.151)$$

Nous aurions alors pu résoudre chacune des d EDLH

$$my'' + ky = f_n \sin(n\pi t) \quad (14.152)$$

, puis additionner la SGEH et les solutions

$$\frac{f_n}{k - m\pi^2 n^2} \sin(n\pi t) \quad (14.153)$$

ainsi obtenues On remarque bien entendu que si $\tilde{n}\pi = \sqrt{k/m}$ et que $f_{\tilde{n}} \neq 0$, alors on obtient une solution particulière proportionnelle à

$$t \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right), \quad (14.154)$$

c'est-à-dire qu'on a un phénomène de résonance .

- Par contre, on remarque que la recherche d'une série de Fourier solution de l'EDL ne mène qu'à **une** solution, en omettant la partie "SGEH". Ceci est dû au fait que cette méthode **ne fournit que** des solutions périodiques de période 2, en fait **la** solution de période 2. Ceci revient à résoudre non un problème de Cauchy, mais un *problème aux limites* (voir chapitre 16) :

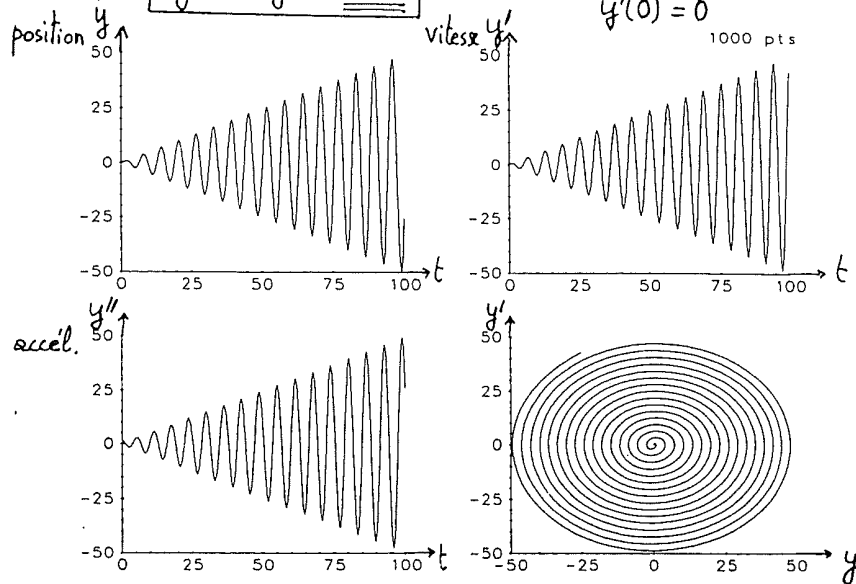
$$\begin{cases} my'' + ky = f \\ y(0) = y(2) \\ y'(0) = y'(2) \end{cases}. \quad (14.155)$$

Exemple de résonance pure

période de SGEH = 2π = période de l'entrée

$$y'' + y = \cos t$$

C.I.: $y(0) = 0$
 $y'(0) = 0$

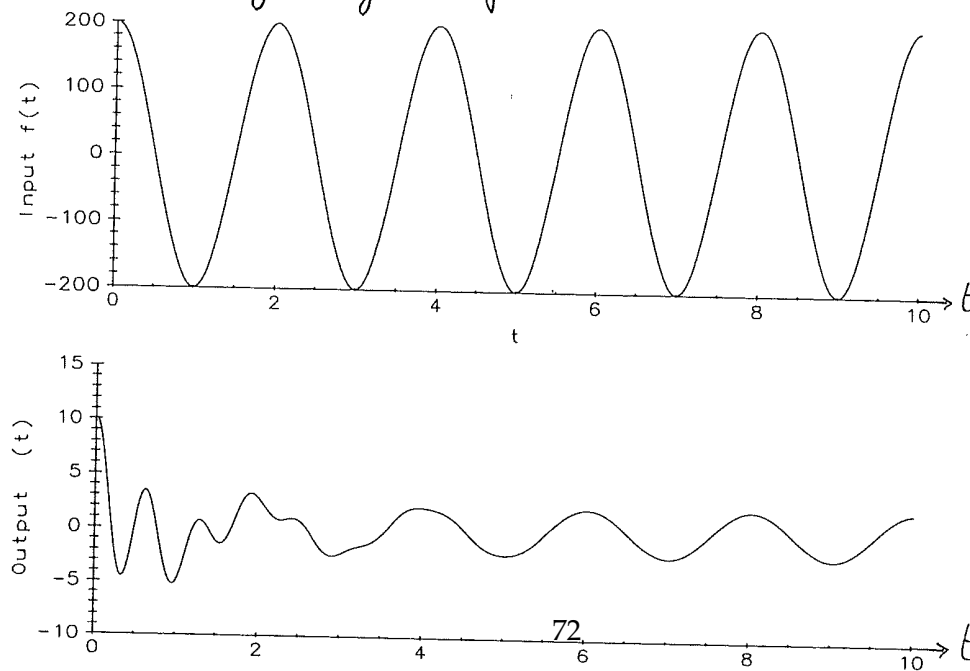


RESONANCE !

AMPLITUDE $\rightarrow +\infty$

Exemple sans résonance.

$$y'' + 2y' + 101y = 200 \cos(\pi t)$$



sol. transitoire du syst. non forcé + sol. partic. syst. forcé

Espaces à produit scalaire

Notations. Pour $z \in \mathbb{C}$, z^* est le conjugué de z et $|z|$ le module de z .

1. Un **produit scalaire hermitien** sur un espace vectoriel E sur $\mathbb{K} (= \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ est une fonction qui associe à tout couple (f, g) de vecteurs de E un scalaire noté $\langle f, g \rangle$ telle que $\forall f, g, h \in E, \forall a \in \mathbb{K}$ on a

- a) 1) $\langle f, g + h \rangle = \langle f, g \rangle + \langle f, h \rangle$ 2) $\langle \lambda f, g \rangle = \lambda \langle f, g \rangle$
- b) $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle^*$ (en particulier $\langle f, f \rangle$ est réel)
- c) $\langle f, f \rangle \geq 0$ si $f \neq 0$.

On a alors l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ :

$$\forall f, g \in E : |\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \cdot \|g\|$$

Pour toute fonction w continue et positive sur $[a, b]$,

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b w f g^*$$

- définit un produit scalaire hermitien sur l'espace vectoriel $C^0([a, b], \mathbb{K})$
 - définit presque un produit scalaire hermitien sur l'espace vectoriel $L^2([a, b], \mathbb{K})$ (où "presque" rappelle que la condition c n'est satisfaite que si on identifie les fonctions qui ne diffèrent que sur un ensemble de mesure nulle).
2. a) La suite $(e_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ est un **système orthonormé** ssi

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$$

- b) Pour $f \in E$, le scalaire $c_k := \langle f, e_k \rangle$ est le **k^{ième} coefficient de FOURIER** de f pour le système orthonormé (e_k) et le vecteur

$$\text{proj}_{E_n} f := \sum_{k=1}^n c_k e_k = \sum_{k=1}^n \langle f, e_k \rangle e_k$$

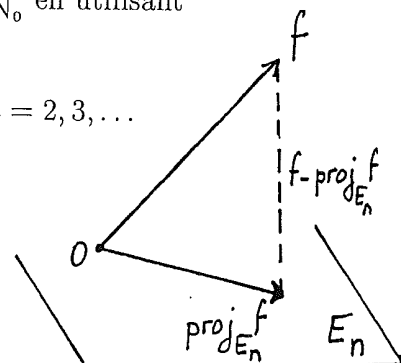
est la **projection (orthogonale)** de f sur le sous-espace E_n de base (e_1, e_2, \dots, e_n)

- c) A partir d'une suite de vecteurs $(f_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ dont toute partie finie est libre, on construit un système orthonormé $(e_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ en utilisant l'algorithme de GRAM-SCHMIDT :

$$e_1 = f_1 / \|f_1\|$$

$$\tilde{e}_n = f_n - \text{proj}_{E_{n-1}} f_n, \quad e_n = \tilde{e}_n / \|\tilde{e}_n\|, \quad n = 2, 3, \dots$$

73



suite en 3^e de couverture

Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire (hermitien). Soit E_n le sous-espace vectoriel de E engendré par la partie libre orthogonale (e_1, e_2, \dots, e_n) .

Théorème de Pythagore

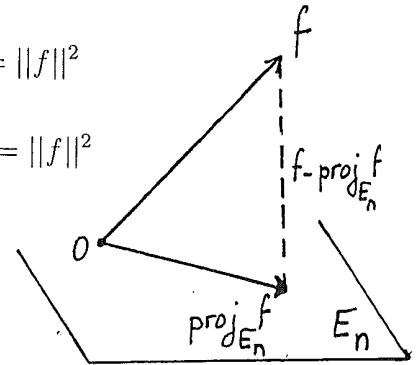
$$\|\text{proj}_{E_n} f\|^2 + \|f - \text{proj}_{E_n} f\|^2 = \|f\|^2$$

$$\left\| \sum_{k=1}^n c_k e_k \right\|^2 + \left\| f - \left(\sum_{k=1}^n c_k e_k \right) \right\|^2 = \|f\|^2$$

Inégalité de Pythagore

$$\|\text{proj}_{E_n} f\|^2 \leq \|f\|^2$$

$$\left\| \sum_{k=1}^n c_k e_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^n |c_k|^2 \|e_k\|^2 \leq \|f\|^2$$



- Si de plus la partie libre (e_1, \dots, e_n) est **maximale** dans E , alors c'est une base orthogonale de E , $\dim E = n$ et $\text{proj}_{E_n} f = f$, d'où l'égalité

$$\sum_{k=1}^n |c_k|^2 \|e_k\|^2 = \|f\|^2$$

- Si $(e_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ est un système orthogonal, alors on a l'Inégalité de Bessel :

$$\forall f \in E : \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \|e_k\|^2 \leq \|f\|^2$$

- Le système orthogonal $(e_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ est complet dans E : ssi

$$\forall f \in E : \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k \stackrel{L^2}{=} f$$

d'où l'égalité de Parseval

$$\forall f \in E : \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \|e_k\|^2 = \|f\|^2$$

N.B. Si les e_k sont tous **normés**, les relations de Bessel et Parseval deviennent respectivement

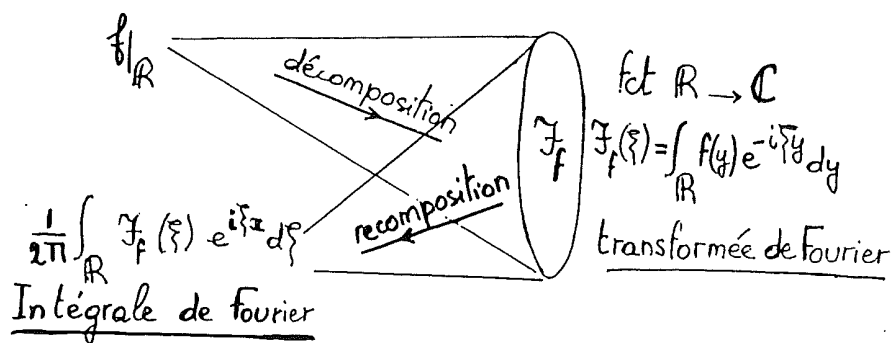
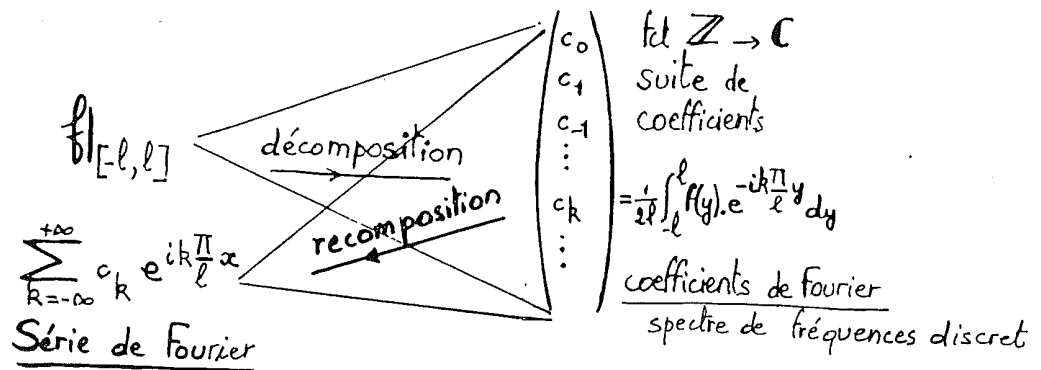
$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|f\|^2 \text{ et } \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \|f\|^2$$

(Dans les espaces vectoriels munis d'un produit scalaire hermitien et complétés (en sorte que toute suite de Cauchy converge), un système orthogonal est complet ssi il est maximal, c'est-à-dire que seul le vecteur nul est orthogonal à tous les éléments du système).

Chapitre 14 : Séries de Fourier

0. **Interlude** : un seul problème suffit à motiver tout le cours

1. Introduction
2. Systèmes orthogonaux de fonctions, classe L^2
3. Définition des séries de Fourier relativement à un système orthogonal
4. Coefficients des séries de Fourier classiques
5. Bessel, Parseval, complétude et CL^2
6. Fonction régularisée.
7. Convergence simple des séries trigonométriques
8. Convergence uniforme
9. Dérivation, intégration
10. EDP de la chaleur (1D)
11. EDL à 2nd membre périodique



N.B. Transformée de Fourier "symétrisée": $\tilde{f}_f(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-i\xi y} dy$

Annexe A

Typographie des syllabi

En raison de la faible différence entre un *théorème*, une *proposition*, un *corollaire* et un *lemme*, la numérotation de ceux-ci est liée. Voici leurs délimiteurs respectifs :

Théorème A.1 — Titre.

Mon théorème.

Proposition A.2 — Titre.

Ma proposition.

Corollaire A.3 — Titre.

Mon corollaire.

Lemme A.4 — Titre.

Mon lemme.

La *définition* et les *exemples* ont eux une numérotation indépendante :

Définition A.1 — Titre.

Ma définition. ■

■ Exemple A.1 Mon exemple. ■

Reste le *diamant* qui n'a pas de numérotation particulière (un supplément de mathématiques/d'histoire qui n'est pas matière d'examen).

◇ Titre

Mon diamant.