Séance 1 : Séries de Fourier (première partie)

Rappel théorique. Les informations suivantes se trouvent dans le chapitre 14 du cours.

Similairement au développement de Taylor qui approxime le comportement d'une fonction localement autour d'un point par une série polynomiale (souvent bien plus simple à étudier que la fonction de départ), le développement de Fourier d'une fonction approxime cette fonction mais cette fois de façon globale sur un intervalle (ou sur $\mathbb{R}$ entier pour une fonction périodique).

L'espace L^2 : Nous allons travailler dans l'espace $L^2([a,b],\mathbb{K})$ des fonctions de carré intégrable, c'est-à-dire les fonctions $f :]a,b[\to \mathbb{K}$ définies et intégrables sur $]a,b[$ telles que $\displaystyle\int_a^b |f|^2 < +\infty$.

Cet ensemble muni des lois usuelles forme un espace vectoriel sur lequel on définit un produit scalaire :

$$\langle\, f \,,\, g \,\rangle := \int_a^b f \,.\, g^\star \qquad \text{où } g^\star \text{ est le complexe conjugué de } g \text{ si on travaille dans } \mathbb{C}\,.$$

Ce produit scalaire induit une norme

$$\|f\|_2 := \sqrt{\langle\, f \,,\, f \,\rangle} = \left(\int_a^b |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \,.$$

Remarque : Pour que ceci définisse correctement un produit scalaire hermitien et une norme sur l'espace L^2, il faut travailler avec des classes d'équivalence de fonctions dans L^2 :

$$f \text{ et } g \text{ et sont } L^2\text{-équivalentes (noté } f \overset{L_2}{=} g \text{)} \iff \|f-g\|_2 = 0\,,$$

c'est-à-dire si $f = g$ presque partout.

Développement en série de Fourier : Le développement en série de Fourier d'une fonction $f \in L^2([a,b],\mathbb{K})$ est un développement dans une "base infinie" de L^2 appelée *système* (qui peut être orthogonal et/ou normé comme une base classique) souvent noté $\Phi = \{\phi_k \,|\, k \in \mathbb{N}\}$:

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, \phi_k \,.$$

Les coefficients c_k, appelés coefficients de Fourier de f, peuvent être calculés comme suit :

$$c_k = \frac{\langle\, f \,,\, \phi_k \,\rangle}{\langle\, \phi_k \,,\, \phi_k \,\rangle} = \frac{1}{\|\phi_k\|_2^2} \int_a^b f \,.\, \phi_k^\star \quad .$$

On choisira un système adapté en fonction du contexte.

Remarque : Si la situation ne rend pas évidente la fonction dont on prend les coefficients de Fourier, on la précise en écrivant $c_k(f)$ pour les coefficients de Fourier de la fonction f.

Système classique/trigonométrique : On développe la plupart du temps dans un système de sinus et/ou de cosinus. Le système le plus fréquent pour développer une fonction $f \in L^2([0,T],\mathbb{R})$ (ou son prolongement périodique sur $\mathbb{R}$) est $\Phi = \left\{\frac{1}{2}, \cos\frac{2k\pi x}{T}, \sin\frac{2k\pi x}{T} \;\middle|\; k \in \mathbb{N}_0\right\}$. On a dans ce cas

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\frac{2k\pi x}{T} + b_k \sin\frac{2k\pi x}{T}\right)$$

où les coefficients de Fourier a_0, a_k, b_k ($k \in \mathbb{N}_0$) valent, en utilisant le formule donnée plus haut,

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\,dx && \left(\Rightarrow \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx \;\text{ est la moyenne de } f\right)\\
a_k &= \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\,\cos\frac{2k\pi x}{T}\,dx\\
b_k &= \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\,\sin\frac{2k\pi x}{T}\,dx
\end{aligned}$$

Remarque 1 : Si f est prolongée périodiquement, on peut intégrer sur une période au choix, par exemple sur $[-T/2, T/2]$ (puisque ceci ne modifie pas la valeur de l'intégrale). Des formules équivalentes se trouvent également dans le cours pour un domaine symétrique $[-L, L]$ où $L = T/2$.

Remarque 2 : Si f est impaire (sur un domaine symétrique), alors f est orthogonale à toute fonction paire donc en particulier à la constante $1/2$ aux cosinus. Les coefficients a_k pour $k \in \mathbb{N}$ sont donc nuls et le développement de f contient uniquement des sinus.
De même, si f est paire, son développement contient uniquement la constante et des cosinus.

Convergence de la série de Fourier : Voici deux théorèmes qui donnent des hypothèses suffisantes pour obtenir la convergence simple et uniforme de la série de Fourier dans le système usuel. Ces deux théorèmes, énoncés pour un domaine $[-\pi,\pi]$, sont facilement adaptable à un domaine $[a,b]$ avec le système $\Phi = \left\{\frac{1}{2}, \cos\left(\frac{2\pi}{b-a}kx\right), \sin\left(\frac{2\pi}{b-a}kx\right) \middle| k \in \mathbb{N}_0\right\}$.

1. **C.S. :** (Théorème de Dirichlet)

$$f \in C^1_{\text{morc.}}([-\pi,\pi],\mathbb{R}) \implies \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\right) \overset{\text{C.S.}}{=} \tilde{f}(x)\ ,$$

c'est-à-dire que la série de Fourier de f converge simplement vers la régularisée $\tilde{f}$ de f, où

$$\tilde{f}(x) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2} \quad \text{si } x \in]a,b[\quad \text{et au bord } \; \tilde{f}(a) = \tilde{f}(b) = \frac{f(a^+) + f(b^-)}{2}\ .$$

2. **C.U. :**

$$\left.\begin{array}{r} f \in C^0([-\pi,\pi],\mathbb{R}) \\ f \in C^1_{\text{morc.}}([-\pi,\pi],\mathbb{R}) \\ f(-\pi) = f(\pi) \end{array}\right\} \implies \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\right) \overset{\text{C.U.}}{=} f(x)\ .$$

Théorème de Parseval : Si $\sum_{k=0}^{\infty} c_k\phi_k \overset{L^2}{=} f$, alors $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 \,.\, \|\phi_k\|_2^2 \;=\; \|f\|_2^2$,

où $\overset{L^2}{=}$ signifie que la série converge en moyenne quadratique : $\sum_{k=0}^{\infty} f_k \overset{L^2}{=} f \Leftrightarrow \left\| \sum_{k=0}^{n} f_k \; - f\right\|_2 \xrightarrow{n\to\infty} 0.$