Séance 2 : Séries de Fourier (seconde partie)

Exercice 1 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique telle que

$$f(x) = x^2 \quad \text{pour tout } x \in [-\pi, \pi[.$$

a) Donner le développement en série de Fourier de f dans le système trigonométrique/classique.

b) Étudier la convergence simple de cette série de Fourier.

c) En évaluant la série de Fourier en des points appropriés, évaluez les deux séries suivantes :

i)
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$$

ii)
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

d) Étudier la convergence en moyenne quadratique de cette série de Fourier et évaluer la série suivante :
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$$

e) Étudier la convergence uniforme de cette série de Fourier.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique telle que

$$f(x) = e^x \quad \text{pour tout } x \in [0, 2\pi[.$$

a) Donner le développement en série de Fourier de f dans le système trigonométrique/classique.

b) Étudier la convergence simple de cette série de Fourier.

c) En évaluant la série de Fourier en des points appropriés, évaluez les deux séries suivantes :

i)
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1+k^2}$$

ii)
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2}$$

d) Étudier la convergence uniforme de cette série de Fourier

Exercice 3 On considère une fonction f définie sur un intervalle $[a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}_0$ et $a < b$. Démontrer que si la somme de la série de fourier $S(x)$ de f converge uniformément vers $f(x)$, alors $S(x)$ converge aussi en moyenne quadratique vers f.