Séance 3 : Séries de Fourier généralisées

Exercice 1 Soient E un espace préhilbertien réel, $(\vec{e}_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ un système orthonormé de vecteurs de E et V_n le sous-espace vectoriel de E de dimension finie n engendré par $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$.

a) Démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$:

$$\left\|\operatorname{proj}_{V_n}(\vec{x})\right\| \leq \|\vec{x}\|$$

Aide : Utiliser le théorème de Pythagore dans E (que vous pouvez aussi démontrer) :

$$\forall \vec{v}, \vec{w} \in E : \vec{v} \perp \vec{w} \Rightarrow \|\vec{v} + \vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2$$

b) Montrer que la projection orthogonale de $\vec{x} \in E$ sur V_n peut s'écrire

$$\operatorname{proj}_{V_n}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} c_i \vec{e}_i \quad \text{où} \quad c_i = \frac{\langle \vec{e}_i, \vec{x}\rangle}{\|\vec{e}_i\|^2}$$

c) Démontrer l'inégalité de Bessel :

$$\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 \|\vec{e}_i\|^2 \leq \|\vec{x}\|^2 \quad \forall \vec{x} \in E$$

d) Démontrer le théorème de Parseval : $(\vec{e}_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ est complet si et seulement si

$$\|\vec{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 \|\vec{e}_i\|^2 \quad \forall \vec{x} \in E$$

Exercice 2 On considère le cas où $E = L^2([0, 2\pi], \mathbb{R})$, muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$,

a) Montrer que le système trigonométrique $\left\{\frac{1}{2}, \cos kx, \sin kx; k \in \mathbb{N}_0\right\}$ est orthogonal pour ce produit scalaire.

b) Pour $V = \left\{\frac{1}{2}, \cos kx, \sin kx; k = 1, \ldots, n\right\}$, exprimer $\operatorname{proj}_V(f)$, pour une fonction quelconque $f \in L^2([0, 2\pi], \mathbb{R})$ à partir des fonctions du système, en utilisant les résultats de l'exercice 1, et interpréter.

Exercice 3 On considère maintenant le cas où $E = L^2([-1, 1], \mathbb{R})$, muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx,$$

et le système considéré est le système de polynômes $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ avec $s_k(x) = x^k$. Notons que ce système n'est *pas* orthogonal, mais on peut néanmoins définir l'espace vectoriel V_n engendré par $\{s_0, s_1 \ldots s_n\}$. On a alors $V_n = \mathcal{P}_n$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré n.

a) Calculer $\langle s_i, s_j\rangle$.

b) En déduire une base orthonormée $e = (e_0, e_1, e_2, e_3)$ de $\mathcal{P}_3$ en appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt à la base $s = (s_0, s_1, s_2, s_3)$ et vérifier que $e_n(x) = \sqrt{n + \frac{1}{2}} P_n(x)$ où les $P_n(x)$ sont les polynômes de Legendre définis ci-dessous :

$$P_0(x) := 1,\ P_1(x) := x,\ P_2(x) := \frac{1}{2}(3x^2 - 1),\ P_3(x) := \frac{1}{2}(5x^3 - 3x).$$

c) Déterminer les coefficients $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ tels que le polynôme $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ approche la fonction $f : [-1, 1] \to \mathbb{R} : x \mapsto |x|$ en minimisant l'erreur en moyenne quadratique

$$\|f - P\|^2 = \int_{-1}^{1} \left||x| - (a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0)\right|^2 dx.$$

Indication : Utiliser les polynômes de Legendre normalisés.

Exercice 4 Finalement, on considère le cas où $E = L^2_p([-1, 1], \mathbb{R})$ avec le poids $p :]-1, 1[\to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, c'est-à-dire la classe des fonctions de carré sommable pour la norme induite par le produit scalaire

$$\langle f, g\rangle_p = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1 - x^2}} dx,$$

On considère à nouveau le système de polynômes $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ avec $s_k(x) = x^k$.

a) Calculer $\langle s_i, s_j\rangle_p$.
Indication : Utiliser le changement de variable $x = \cos\theta$, qui sera également utile pour les sous-questions suivantes. Pour gagner du temps, vous pouvez directement utiliser l'intégrale définie suivante :

$$\int_0^{\pi} \cos^k x \ dx = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2^k}\dbinom{k}{\frac{k}{2}} & \text{si } k \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

b) En déduire une base orthonormée $\epsilon = (\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ de $\mathcal{P}_3$ en appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt à la base $s = (s_0, s_1, s_2, s_3)$ et vérifier que $\epsilon_n(x) = T_n(x)/\|T_n\|_p$ où les $T_n(x)$ sont les polynômes de Tchebychev définis par :

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)) \quad \forall x \in [-1, 1]$$

Remarque : On montrera plus tard que les T_n sont bien des polynômes, même si ce n'est pas évident au vu de leur définition.

c) Déterminer les coefficients $b_0, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ tels que le polynôme $Q(x) = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$ approche la fonction $f : [-1, 1] \to \mathbb{R} : x \mapsto |x|$ en minimisant l'erreur en moyenne quadratique pour le poids p :

$$\|f - Q\|_p^2 = \int_{-1}^{1} \frac{\left||x| - (b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0)\right|^2}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$$

d) (Optionnel) Exprimer explicitement $T_n(x)$ sous la forme d'un polynôme.
Indication : Utiliser le fait que $T_n(\cos\theta) = \Re(e^{in\theta})$, où $\Re(z)$ est la partie réelle de $z \in \mathbb{C}$.