



Physique générale II

Partie II

Oscillations & ondes

Pascal Kockaert

Auteur : **Marc Haelterman**

Revu par **Pascal Kockaert**

IRCI 1 & IRAR 2

PHYS-H-1002

Année académique 2025–2026

[git] : main @ 7876236 • 1.9.9-68-g7876236 (2026-01-21) • Pascal.Kockaert@ulb.be

Remerciements

JE TIENS À REMERCIER PROFONDÉMENT MARC qui a accepté de partager et de mettre à disposition les supports de cours qu'il a construits au fil du temps.

Pendant vingt ans, Marc a construit un cours de physique pour ingénieurs en accord avec les principes de la physique contemporaine les plus avancés.

La physique ne s'est pas construite en un jour et il est tentant de s'arrêter aux principes fondateurs d'une théorie. Chaque théorie est plongée dans un ensemble et utilisée par les branches voisines de la physique, mécanique, chimie. Petit à petit des incohérences dans les représentations intuitives que l'on se fait de la physique sont découvertes et des corrections doivent y être apportées.

Il est important, comme l'a excellement fait Marc, de montrer l'évolution de la pensée scientifique et de fournir une vision simple des effets principaux de la physique sans induire d'intuition contraire aux avancées les plus récentes de la connaissance scientifique.

C'est avec enthousiasme et humilité que je vais essayer de poursuivre ce long travail.

Je voudrais également remercier les nombreux assistants qui ont enrichi ce cours au fil du temps et dont les contributions individuelles sont difficiles à tracer. Sous la coordination de Marc Haelterman et Yves Louis, ils ont sans cesse amélioré les supports des exercices et laboratoires. Il s'agit notamment de : Adrien De-wandre, Maïté Swaelens, François Gonze, Laurent Olislager, Guillaume Tillema, Jonathan Verlant-Chenet, Jennifer Watchi, Robin de Gernier, Thomas Bury, Matthieu Arnem, Bertrand de Prelle de la Nieppe, Virginie Lecocq, Robert Vanden Heyden, Olivier Decroly, Elisabeth Gruwé, Antoine Platteau, Edem Akakpo, Quentin Leponce, Julien Dechanxhe.

Pascal Kockaert
Été 2025

Les 500 illustrations réutilisées dans ce cours sont identifiées par l'indication « ©MH ».

Physique générale II

Partie II

Oscillations & ondes

Pascal Kockaert

Auteur : **Marc Haelterman**

Revu par **Pascal Kockaert**

IRCI 1 & IRAR 2
PHYS-H-1002

Année académique 2025–2026

6

Leçon

Oscillateur harmonique & oscillateur amorti

■ Pré-requis pour cette leçon ■

- *dérivée*;
- *accélération*;
- *force*;
- *loi de Newton*;
- *nombre complexe*;
- *circulation*;
- *EDO linéaire*.

COMME SON TITRE L'INDIQUE, ce chapitre est consacré à l'étude des phénomènes oscillatoires et des ondes. Pour les phénomènes oscillatoires, que nous aborderons en premier lieu, nous nous limiterons essentiellement à l'étude des oscillations harmoniques qui représentent le type d'oscillation à la fois le plus simple et le plus communément rencontré en physique. En guise d'introduction, observons les images de la figure 6.1. Ces images illustrent l'omniprésence des phénomènes oscillatoires dans notre monde.

Dans le présent contexte, nous appellerons « phénomène oscillatoire » un phénomène physique qui conduit spontanément à un mouvement périodique ou, plus généralement, à une évolution périodique d'un système, c'est-à-dire, une évolution caractérisée par un retour régulier aux mêmes états d'un système. Si on considère le monde naturel, un grand nombre de mouvements périodiques viennent naturellement à l'esprit, par exemple, le mouvement de rotation des planètes autour des étoiles, les mouvements des électrons autour des noyaux, ou plus simplement la rotation d'un objet sur lui-même dans l'espace telle que la rotation des planètes sur leur axe. Plus proche de nous on trouve le pendule qui consiste en un simple objet massique fixé en un seul point dans un champ gravitationnel. Si l'objet peut tourner sans frottement autour de ce point fixe, il effectuera des oscillations périodiques incessantes. Le drapeau flottant dans le vent représente aussi un exemple com-

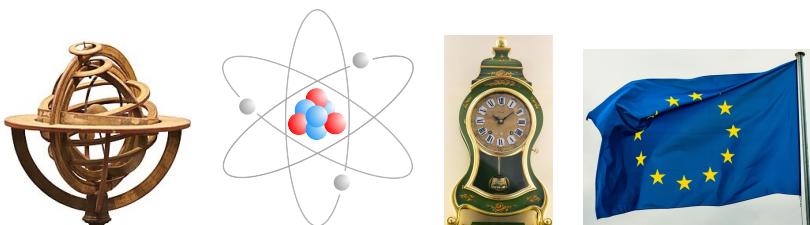
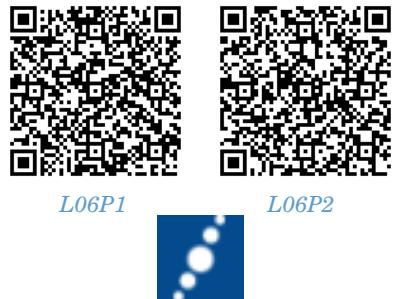


FIGURE 6.1 : De gauche à droite : (a) Sphère armillaire illustrant le mouvement périodique des planètes ; (b) Structure atomique simplifiée ; (c) Horloge à pendule ; (d) Drapeau dans le vent.



FIGURE 6.2 : De gauche à droite : (a) Récepteur radiophonique; (b) Balancier dans un parc d'attraction; (c) Moteur à piston; (d) Système électronique.

mun de phénomène oscillatoire. Dans ce cas, on a affaire à un mécanisme complexe d'instabilité de l'écoulement fluide de part et d'autre du tissu souple que constitue le drapeau. Ce type d'instabilité se retrouve dans de nombreux systèmes physiques.

Parmi les phénomènes oscillatoires les plus importants, on trouve les ondes, illustrées en première place sur la figure 6.2 par la radio dont le principe repose sur la notion d'onde électromagnétique. Cet exemple relève du domaine de l'ingénieur dans lequel on trouve une multitude de systèmes basés sur des comportements oscillants, comme le suggèrent ci-dessous les images du moteur à piston et de l'ordinateur (dans lequel une horloge électronique pulse à très haute fréquence et donne la cadence à toutes les opérations). L'ingénieur est donc souvent amené à devoir décrire, comprendre et caractériser les phénomènes oscillatoires. Le but du présent chapitre est de vous fournir les bases de la théorie des phénomènes oscillatoires et des ondes qui vous seront nécessaires dans la poursuite de vos études et dans votre vie d'ingénieur.

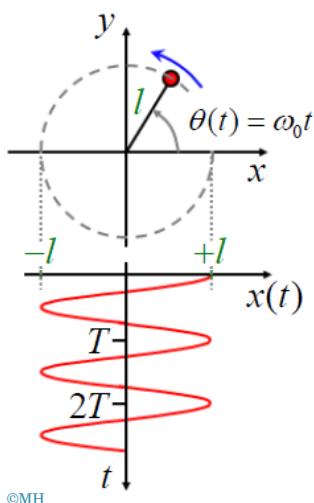
6.1 L'oscillateur harmonique

FIGURE 6.3 : Illustration de la notion de période. Deux événements arrivant aux temps t_1 et t_2 correspondent à un déphasage $\Delta\theta = \omega_0(t_2 - t_1)$. Lorsque $t_2 - t_1$ correspond à une période $T = t_2 - t_1$, l'objet revient en t_2 dans la position qu'il occupait en t_1 , après avoir fait un tour complet $\Delta\theta = 2\pi$.

Pour aborder le concept d'oscillateur harmonique, il est intéressant d'analyser au préalable le mouvement d'un objet en rotation à vitesse constante autour d'un point fixe.

6.1.1 Le mouvement de rotation

Par souci de simplicité, nous considérons dans un premier temps le mouvement d'un simple pendule en rotation libre autour de son axe. On suppose qu'il n'y a ni force gravitationnelle, ni de force de frottement, de sorte que sa *vitesse de rotation* soit effectivement constante. Comme le schéma de la figure 6.3 l'indique, la position du pendule est à tout instant repérée par l'angle θ que fait la tige avec l'axe x d'un repère cartésien (x, y) situé dans le plan du mouvement. Cette figure illustre également la notion de *période* : comme la *vitesse de rotation* est constante, l'angle θ est une simple fonction linéaire du temps, soit $\theta = \omega_0 t$, où le coefficient ω_0 s'appelle la *pulsation* ou *fréquence angulaire* du mouvement. Quand le temps s'écoule de $t = 0$ à $t = \frac{2\pi}{\omega_0}$, l'angle θ augmente de 2π , c'est-à-dire qu'il fait un tour complet et que l'objet revient dans la position qu'il avait au temps $t = 0$. Pour tout temps multiple de $\frac{2\pi}{\omega_0}$, l'objet revient à la même position. Ce temps caractéristique de retour à la position



©MH

initiale est appelé la *période* du mouvement et il est noté

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (6.1)$$

nom	symbole	unités
pulsation (fréquence angulaire)	ω_0	rad/s
période	T	s

Les coordonnées (x, y) , représentant respectivement la position horizontale et verticale de la masse du pendule tournant sont données par

$$x = l \cos(\theta) = l \cos(\omega_0 t), \quad (6.2)$$

$$y = l \sin(\theta) = l \sin(\omega_0 t). \quad (6.3)$$

La fonction $x(t)$ est représentée en rouge sur le schéma de la figure 6.4. L'évolution de cette coordonnée reproduit ce qu'on appelle le mouvement harmonique.

6.1.2 Mouvement harmonique

Il est possible d'imprimer à un objet le mouvement harmonique de la coordonnée x de l'extrémité du pendule en rotation. Le dispositif qui permet cela est représenté à la figure 6.4. Il s'agit de l'*« attelage écossais »*. C'est une simple roue qui tourne à vitesse constante autour de son centre. Elle est munie d'un ergot qui entraîne une pièce mécanique munie d'une glissière verticale permettant de ne lui transmettre que le mouvement de la coordonnée horizontale de l'ergot, soit

$$x = l \cos(\omega_0 t). \quad (6.4)$$

Cette pièce métallique coulisse elle-même dans une glissière horizontale et effectue donc un mouvement harmonique de translation horizontale. La vitesse du mouvement harmonique est donnée par la dérivée temporelle de la position x , ce qui donne

$$\dot{x}(t) = -l\omega_0 \sin(\omega_0 t), \quad (6.5)$$

où la dérivée temporelle est indiquée par un point sur la fonction qui est dérivée.

De même, l'accélération du mouvement harmonique est donnée par la dérivée de la vitesse soit

$$\ddot{x}(t) = -l\omega_0^2 \cos(\omega_0 t). \quad (6.6)$$

On constate ainsi que l'accélération du mouvement harmonique est en tout temps proportionnelle à la position $x(t)$. En effet, combinant (6.6) et (6.4), on peut écrire l'accélération

$$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 x(t). \quad (6.7)$$

Cette relation entre la position et l'accélération est propre au mouvement harmonique. Elle est illustrée sur le schéma de la figure 6.4.

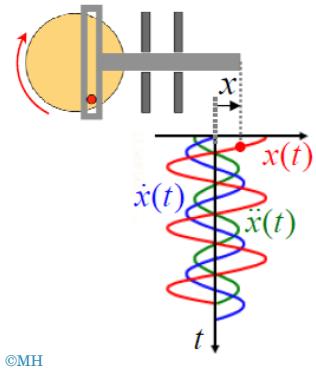


FIGURE 6.4 : Évolution temporelle de la coordonnée horizontale de la masse du pendule tournant, x , de sa vitesse, \dot{x} et de son accélération, \ddot{x} .

6.1.3 Mouvement harmonique naturel : l'oscillateur harmonique

En raison de la relation de proportionnalité entre la position et l'accélération qui le caractérisent, le mouvement harmonique peut être obtenu de façon beaucoup plus naturelle qu'avec l'attelage écossais représenté à la figure 6.5. Pour voir cela, analysons la force f exercée à tout instant sur la pièce mobile de l'attelage. Cette force est donnée par la seconde loi de Newton,

$$\vec{f} = m \vec{a} = m \ddot{x}. \quad (6.8)$$

Si nous remplaçons dans cette formule l'accélération par son expression en fonction de la position x de la pièce mobile, soit $\ddot{x} = -\omega_0^2 x$, nous voyons que la force est simplement proportionnelle à la position x de la pièce mobile, soit

$$\vec{f} = f \vec{1}_x, \quad (6.9)$$

$$\vec{a} = \ddot{x} \vec{1}_x, \quad (6.10)$$

$$f = m \ddot{x} = -m \omega_0^2 x = -\kappa x, \quad (6.11)$$

où nous avons introduit

$$\kappa = m \omega_0^2, \quad (6.12)$$

pour simplifier l'écriture de l'équation.

Force de rappel élastique La force \vec{f} est donc une force proportionnelle à la distance qui sépare la masse de sa position centrale $x_0 = 0$. Son signe négatif indique qu'il s'agit d'une *force attractive*, c'est-à-dire que le vecteur force \vec{f} est dirigé dans le sens opposé au déplacement ($\vec{f} \cdot \vec{x} < 0$, voir figure 6.6). Comme la force rappelle la masse à sa position centrale, on parle également de *force de rappel*. En outre, la force étant proportionnelle au déplacement, on parle de *force de rappel élastique* : ce terme provient du fait que cette force exercée par la roue de l'attelage écossais sur la pièce mobile peut être obtenue naturellement par la déformation élastique d'un objet.

Cette notion de force de déformation élastique est illustrée avec le dispositif représenté à la figure 6.7. Il s'agit d'un ressort au bout duquel est fixée une masse m . L'expérience et la théorie de la physique de l'état solide montrent que la force exercée par un ressort lorsqu'on modifie sa longueur (en élongation ou en compression) est une *force de rappel élastique* $f = -\kappa x$ où κ est la *constante de rappel* et où x représente la position de l'extrémité du ressort par rapport à sa position de repos. Ceci n'est vrai que si l'autre extrémité du ressort est fixée (voir figure 6.7).

Hypothèse et limitation Notez que cette loi de *force de rappel élastique* $f = -\kappa x$ n'est valable, dans la pratique, que si la variation de longueur appliquée au ressort est beaucoup plus petite que la longueur du ressort lui-même.

FIGURE 6.5 : Attelage écossais : un ergot entraîne une pièce mécanique munie d'une glissière verticale permettant de ne lui transmettre que le mouvement de la coordonnée horizontale de l'ergot, soit $x = l \cos(\omega_0 t)$. Cette pièce métallique coulisse elle-même dans une glissière horizontale et effectue donc un mouvement harmonique de translation horizontale.

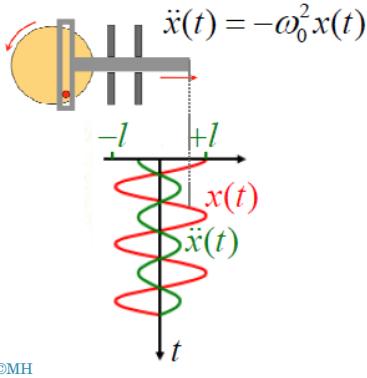


FIGURE 6.6 : La position de repos de la masse est en $x = 0$. Le vecteur force \vec{f} est dirigé vers les x négatifs quand x est positif et est dirigé vers les x positifs quand x est négatif.

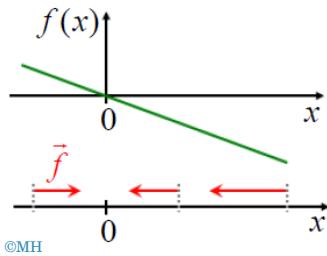
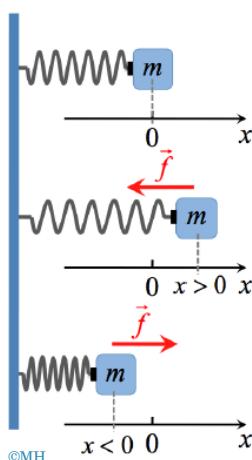


FIGURE 6.7 : Ressort au bout duquel est fixée une masse m . L'autre extrémité du ressort est fixe. La force de rappel élastique est notée \vec{f} .



Étude du mouvement Le mouvement de la masse m fixée à l'extrémité du ressort peut s'étudier à partir de la seconde loi de Newton $f = m\ddot{x} = -\kappa x$ (notez que ceci ne peut se faire que si on néglige la masse du ressort lui-même car celui-ci est aussi en mouvement et son inertie devrait donc en toute rigueur être prise en compte). On voit que l'accélération \ddot{x} est égale à $-\kappa x/m$ ce qui, en utilisant comme en (6.12), $\omega_0^2 = \kappa/m$, conduit à la relation

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x. \quad (6.13)$$

Cette relation (6.13) nous montre, comme on l'espérait, que la loi du mouvement de la masse m est identique à celle d'un attelage écossais qui tournerait avec une vitesse angulaire ω_0 . Ce résultat était effectivement anticipé puisque le ressort a permis de reproduire à tout instant la même force et donc aussi la même accélération, vitesse et position que celle de l'attelage écossais.

On voit à la figure 6.8 l'évolution de la position de la masse m fixée à l'extrémité du ressort. Celle-ci est la même que celle de l'attelage écossais, c'est-à-dire,

$$x = x_0 \cos(\omega_0 t), \quad (6.14)$$

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x_0 \cos(\omega_0 t). \quad (6.15)$$

Comme le montre l'expression (6.15), on peut vérifier que ce mouvement périodique harmonique est solution de l'équation du mouvement de Newton. En effet, au départ de (6.15), on trouve

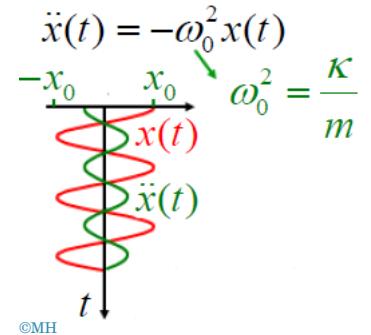
$$\ddot{x} = -x_0 \omega_0^2 \cos(\omega_0 t) = -\omega_0^2 x = -\kappa x/m. \quad (6.16)$$

Conclusion On voit que le mouvement harmonique est un mouvement naturel obtenu à partir de la déformation d'objets élastiques tels que des ressorts. Remarquez que le mouvement se fait avec une pulsation unique ω_0 fixée par les paramètres physiques du système, en l'occurrence, la constante de rappel κ du ressort et la masse m , soit

$$\omega_0 = \sqrt{\kappa/m}. \quad (6.17)$$

La période du mouvement harmonique est donc totalement indépendante des conditions initiales du mouvement; quelle que soit la valeur de l'amplitude initiale de l'élargissement du ressort x_0 ^a, la pulsation du mouvement est la même et vaut ω_0 . Pour cette raison ω_0 s'appelle la *pulsation propre* du système oscillant.

FIGURE 6.8 : La masse m est fixée à l'extrémité d'un ressort et sa position est notée x .



a Tant que l'hypothèse de la force de rappel linéaire est valable.

Équation de l'oscillateur harmonique

Comme nous le verrons par la suite, l'équation du mouvement de Newton correspondant à une *force de rappel élastique* se rencontre dans un grand nombre de situations physiques dépassant largement le cadre de la mécanique considéré ci-dessus. C'est pourquoi on considère cette équation comme une équation « générique » à caractère transdisciplinaire. Un système qui répond à cette équation est un système oscillant et puisque son évolution est donnée

par une fonction harmonique du temps, on l'appelle *oscillateur harmonique*. De même, l'équation du mouvement correspondante (6.18) s'appelle l'équation de l'oscillateur harmonique,

$$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 x(t). \quad (6.18)$$

Solution générale La solution générale de cette équation peut s'écrire :

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (6.19)$$

où A est l'amplitude du mouvement, ω_0 sa pulsation et φ sa *phase* à l'origine (en $t = 0$). Lorsque $t \neq 0$, la phase contient un terme lié au temps et un *déphasage* φ , qui correspond à la phase à l'origine. La phase à l'origine est donc aussi le *déphasage* par rapport à un signal qui serait maximum en $t = 0$. Le terme « déphasage » provient du fait que l'argument du cosinus s'appelle la *phase* du mouvement harmonique. La pulsation ω_0 correspond à une *période* $T = 2\pi/\omega_0$ et un *déphasage* φ correspond à un décalage temporel de $\delta t = \varphi/\omega_0$ par rapport à la solution à déphasage nul. Ceci se comprend si on réécrit la solution en y mettant ω_0 en évidence, soit

$$x = A \cos[\omega_0(t + \varphi/\omega_0)]. \quad (6.20)$$

Petit poisson rouge... peut-on passer la barre rouge ?

Oui, à condition de répondre à ma question !

Observez le graphique de la figure 6.9 et l'expression de l'équation (6.20). Si le déphasage φ augmente, dans quelle direction se déplace la courbe de la figure ? Doit-on associer un décalage vers la droite à un déphasage positif ou négatif ?

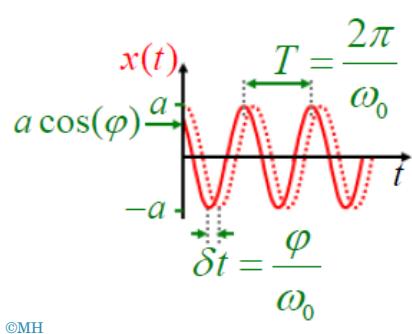


FIGURE 6.9 : Illustration du déphasage entre deux ondes. La grandeur δt correspond à une avance de phase. Voir équations (6.19) et (6.20) et tableau 6.1.

©MH

TABLE 6.1 : Grandeurs liées à une onde harmonique $x = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$. Voir équations (6.19) et (6.20) et figure 6.9.

nom	symbole	unités
amplitude	A	[x]
phase	$\Phi(t) = \omega_0 t + \varphi$	rad
phase initiale	$\varphi = \Phi(0)$	rad
déphasage	$\varphi = \Phi(t) - \omega_0 t$	rad
décalage temporel	$\delta t = \varphi/\omega_0$	s

Cette expression de la solution générale de l'équation de l'oscillateur harmonique est illustrée sur le graphique de la figure 6.9. Les différentes grandeurs y apparaissant sont reprises dans le tableau 6.1, où on désigne par [...] l'opérateur qui extrait les unités, de sorte que [x] représente les unités de la grandeur x . C'est une manière de montrer que les unités de A et x sont les mêmes : $[A] = [x]$.

Conditions initiales L'amplitude et le déphasage constituent les deux constantes d'intégration de l'équation du mouvement. En effet, comme il s'agit d'une équation du deuxième degré, il y a bien deux constantes d'intégration, qui sont déterminées par des contraintes du problème. Il s'agit bien souvent des conditions initiales, c'est-à-dire des grandeurs physiques à l'instant $t = 0$. Par exemple, si on se donne la position initiale x_0 et la vitesse initiale v_0 , on peut les

comparer aux valeurs calculées en utilisant 6.19, ce qui donne

$$\begin{aligned} x(0) &= A \cos(\varphi) \\ &= x_0, \end{aligned} \tag{6.21}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}(0) &= -\omega_0 A \sin(\varphi) \\ &= v_0. \end{aligned} \tag{6.22}$$

■ Exemple

En supposant que $A > 0$, donnez les expressions de A et φ correspondant aux conditions initiales $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = v_0$.

Au départ des équations (6.21) et (6.22), on va faire disparaître le déphasage φ en prenant la somme du \sin^2 et du \cos^2 et on élimine l'amplitude A en calculant la tangente de φ . Cela donne

$$A^2 = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}, \tag{6.23}$$

$$\tan \varphi = -\frac{v_0}{\omega_0 x_0}. \tag{6.24}$$

On en déduit les expressions pour A et φ . Une discussion sera nécessaire pour déterminer si $\varphi = -\arctan[v_0/(\omega_0 x_0)]$ ou s'il faut prendre $\varphi = \pi - \arctan[v_0/(\omega_0 x_0)]$. Ce choix dépendra du signe de v_0/x_0 .

Le cas particulier pour lequel $x_0 = a > 0$ et $v_0 = 0$ est illustré par la courbe en pointillés de la figure 6.9. On a dans ce cas

$$A = a, \tag{6.25}$$

$$\varphi = 0. \tag{6.26}$$

On note que la solution $\varphi = \pi$ satisferait également le système d'équations, mais cette solution ne correspondrait pas à $x_0 = a > 0$.

6.1.4 Potentiel harmonique

Il est intéressant d'analyser le mouvement de l'*oscillateur harmonique* en termes d'*énergie cinétique* et d'*énergie potentielle*.

Travail et énergie potentielle Pour trouver l'énergie potentielle de l'oscillateur, calculons le *travail* qu'il est nécessaire de fournir pour déplacer l'extrémité libre du ressort d'une distance x à partir de la position de repos $x = 0$. Pour déplacer l'extrémité, il faut y appliquer une force f_a opposée à la force de rappel

$$f_a = -f = \kappa x. \tag{6.27}$$

Le travail nécessaire est donné par l'intégrale de circulation de cette force appliquée de la position de repos $x_0 = 0$ à la position actuelle x ,

$$E_p(x) = \int_0^x f_a(x') dx' = \int_0^x \kappa x' dx' = \kappa \frac{x^2}{2}. \quad (6.28)$$

Énergie potentielle et force L'énergie $\kappa x^2/2$ est emmagasinée dans le ressort sous forme de contraintes au sein du matériau qui le constitue. À tout moment l'énergie emmagasinée peut être libérée en annulant la force appliquée. Dans ce cas, la masse m fixée à l'extrémité du ressort prend progressivement de la vitesse et gagne donc de l'énergie cinétique. La réserve d'énergie emmagasinée dans le ressort a donc la nature d'une énergie potentielle pour la masse m (cette énergie est analogue à l'énergie potentielle gravitationnelle que la masse aurait dans un champ gravitationnel).

Comme indiqué par l'équation (6.28) et illustré à la figure 6.11, l'énergie potentielle de l'oscillateur harmonique est une fonction parabolique de la position x .

Puisque la fonction *énergie potentielle* $E_p(x)$ est l'opposé de la primitive de la fonction *force* $f(x)$, la fonction $f(x)$ est aussi l'opposé de la dérivée de la fonction $E_p(x)$,

$$f(x) = -\frac{dE_p(x)}{dx} = -\kappa x. \quad (6.29)$$

Énergie potentielle et mouvement La fonction *énergie potentielle* $E_p = \kappa x^2/2$ s'appelle le « *potentiel* » de l'oscillateur harmonique. On dit également plus simplement le « *potentiel harmonique* ». Il est représenté graphiquement à la figure 6.11 à l'aide de la courbe rouge. Grâce à ce graphique on peut appréhender très simplement le mouvement de l'oscillateur harmonique à partir du principe de conservation de l'énergie. Supposons que l'on éloigne la masse m de sa position de repos jusqu'à une position $x = x_0$ et qu'une fois arrivé en ce point on lâche la masse au temps $t = 0$ avec une vitesse nulle. Au point x_0 l'énergie potentielle $E_p = \kappa x_0^2/2$ représente l'énergie totale de la masse vu que celle-ci n'a pas d'*énergie cinétique* (sa vitesse étant nulle). En vertu du principe de conservation de l'énergie, le système masse–ressort conserve cette énergie totale en tout temps. Puisqu'on a une force de rappel, la masse accélère vers les x négatifs à partir du temps $t = 0$. Elle acquiert donc une énergie cinétique E_c dont la valeur sera donnée en tout point x par la différence entre l'énergie totale et l'énergie potentielle, soit

$$E_c(x) = E_{tot} - E_p(x) \quad (6.30)$$

On voit ainsi, en particulier, que la vitesse est maximale en $x = 0$, c'est-à-dire, à la position de repos de l'oscillateur (on l'appelle position de repos parce que la force y est nulle et non pas parce que la masse y est immobile). Après passage par l'origine, la masse voit

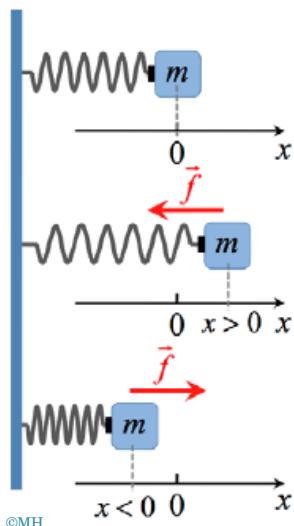


FIGURE 6.10 : Ressort au bout duquel est fixée une masse m . L'autre extrémité du ressort est fixe. La force de rappel élastique est notée \vec{f} . Copie de la figure 6.7

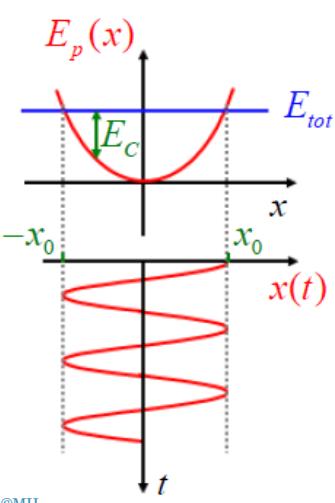


FIGURE 6.11 : Illustration de l'énergie potentielle E_p parabolique associée à la force élastique d'un oscillateur harmonique. L'énergie totale E_{tot} du système est conservée, la différence étant convertie en énergie cinétique E_c .

son potentiel augmenter, ce qui signifie que son énergie cinétique diminue. L'énergie cinétique et la vitesse diminuent ainsi jusqu'à s'annuler au point où l'énergie potentielle est égale à l'énergie totale. À cet instant la masse est dans une situation symétrique de la situation de départ et elle est donc prête à repartir dans l'autre sens. Le mouvement se répète ainsi à l'infini pour former l'oscillation harmonique. Cette vision des choses nous montre que le mouvement harmonique est caractérisé par un échange progressif et périodique entre les deux formes d'énergie de la masse m : son énergie potentielle et son énergie cinétique. On voit ainsi qu'avec cette approche énergétique du mouvement, une simple inspection du potentiel dans lequel la masse est plongée permet de comprendre son mouvement. Ici en l'occurrence, le mouvement périodique est dû à l'échange incessant entre énergies potentielle et cinétique inhérent à la courbure partout positive du potentiel. Une animation montrant cet échange est disponible via le lien de la figure 6.12.

6.1.5 Universalité de l'oscillateur harmonique

Comme mentionné plus haut, l'oscillateur harmonique est omniprésent en physique. Pour traduire cette idée, on dit qu'il est *universel*. Nous allons considérer quelques exemples de systèmes physiques constituant des oscillateurs harmoniques afin d'illustrer cette universalité.

Force de rappel et champ gravitationnel

Commençons par considérer le cas de la combinaison d'une force de rappel élastique et du champ de force gravitationnel. Une telle combinaison est, par exemple, obtenue en suspendant une masse m à l'extrémité inférieure d'un élastique, l'autre extrémité de l'élastique étant attachée à un point fixe, comme indiqué sur le schéma de la figure 6.13. Pour repérer la position de la masse, on prend un repère unidimensionnel constitué de l'axe x dirigé vers le bas. Le zéro de ce repère est choisi comme étant l'extrémité inférieure de l'élastique en l'absence de la masse. Quand on charge progressive-ment la masse sur l'élastique, celui-ci se détend jusqu'à une position de repos x_0 donnée par l'équilibre entre la force de rappel et la force gravitationnelle, soit $mg - \kappa x = 0$. À partir cette expression de l'équilibre, on trouve que la position de repos est

$$x_0 = mg/\kappa. \quad (6.31)$$

Hypothèses Comme pour le ressort vu plus haut, on néglige la masse de l'élastique qui, en toute rigueur, contribue à l'inertie du système en mouvement ainsi qu'à l'élargissement de l'élastique lui-même.

Équation du mouvement Le mouvement de la masse est régi par la deuxième loi de Newton avec la force $mg - \kappa x$,

$$m\ddot{x} = mg - \kappa x. \quad (6.32)$$

FIGURE 6.12 : Animation montrant la conversion d'énergie potentielle en énergie cinétique dans un skate parc.



FIGURE 6.13 : Système constitué d'un élastique auquel est suspendue une masse m . En l'absence de masse, l'extrémité de l'élastique correspond à la position verticale $x = 0$. Lorsqu'une masse m est suspendue, la force gravitationnelle $m\bar{g}$ tend l'élastique jusqu'à ce que la force de rappel de l'élastique, $-\kappa x\vec{l}_x$, la compense.

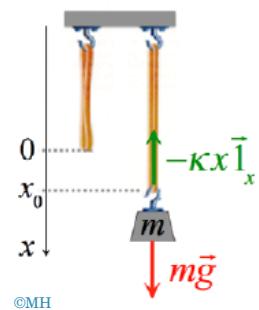
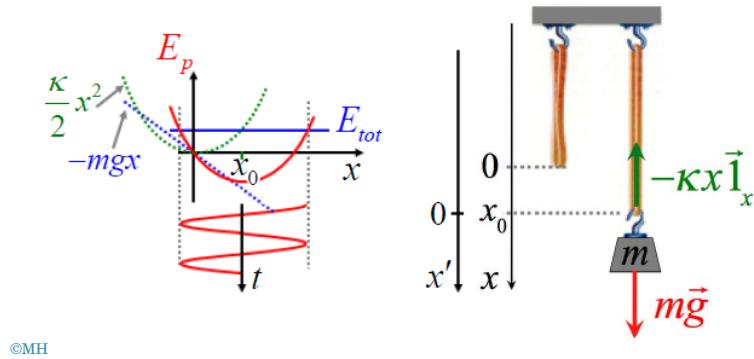


FIGURE 6.14 : Énergie potentielle E_p en fonction de la position x (trait rouge continu) et identification de ses deux composantes (en pointillés), l'une linéaire ($-mgx$ en bleu) et l'autre quadratique ($\kappa x^2/2$ en vert).



En divisant cette relation par la masse, on trouve l'équation différentielle du mouvement (6.33). On constate qu'il s'agit de l'équation de l'oscillateur harmonique à une constante g près,

$$\ddot{x} = \frac{f}{m} = -\frac{\kappa}{m}x + g. \quad (6.33)$$

En introduisant la pulsation propre de l'oscillateur harmonique $\omega_0 = \sqrt{\kappa/m}$, l'équation du mouvement devient

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x + g \quad \left(\omega_0^2 = \frac{\kappa}{m} \right). \quad (6.34)$$

Identification de l'oscillateur harmonique Nous allons montrer que cette équation est équivalente à celle de l'oscillateur harmonique et que le mouvement qui en résulte est en conséquence harmonique. Pour voir cela, considérons le potentiel associé à la force exercée sur la masse. Ce potentiel est l'opposé de la primitive de la force $f(x) = mg - \kappa x$. Il vaut donc

$$E_p(x) = - \int_0^x f(x') dx' = -mgx + \frac{\kappa}{2}x^2. \quad (6.35)$$

Cette fonction est représentée à la figure 6.14, en pointillés. On y distingue la contribution du terme linéaire $-mgx$ et celle du terme quadratique $\kappa x^2/2$. La somme de ces termes est une parabole dont le minimum est décalé vers les x positifs et vers le bas. Elle est représentée par la ligne rouge continue.

Le minimum de cette parabole correspond, à la position de repos x_0 de la masse, la pente nulle du potentiel correspondant à une force nulle,

$$f(x_0) = - \frac{dE_p}{dx} \Big|_{x_0} = 0. \quad (6.36)$$

Mouvement de la masse On peut anticiper le mouvement de la masse en appliquant le principe de conservation de l'énergie : la ligne bleue horizontale sur le graphe ci-dessus montre l'énergie totale. L'intersection de cette ligne avec la courbe du potentiel correspond à une situation de vitesse nulle (cf. énergie cinétique nulle). Cette situation correspond à une certaine élongation de l'élastique au-delà ou en-deçà de sa position de repos. En lâchant

la masse à partir de cette élongation, on obtient un transfert progressif de l'énergie potentielle vers l'énergie cinétique exactement comme dans l'oscillateur harmonique. On peut donc s'attendre à avoir un mouvement harmonique autour de la position de repos.

Changement de variables Pour vérifier cette assertion, considérons le mouvement dans un nouveau repère x' dont l'origine $x' = 0$ est le point de repos de la masse (voir figure 6.14). Ceci revient à faire le changement de variable

$$x' = x - x_0 \quad (6.37)$$

dans l'équation du mouvement (6.33) pour le repère x , qui s'écrivait $\ddot{x} = -\omega_0^2 x + g$.

Dans ce changement de variable, la dérivée seconde par rapport au temps ne change pas puisque la dérivée d'une constante (ici x_0) est nulle. Il suffit donc de remplacer \ddot{x} par \ddot{x}' et x par $x' + x_0$, ce qui donne

$$\ddot{x}' = -\omega_0^2 x' - \omega_0^2 x_0 + g. \quad (6.38)$$

Pour simplifier cette équation, on se souvient que $x_0 = mg/\kappa$ et que $\omega_0 = \sqrt{\kappa/m}$, ce qui conduit à

$$\ddot{x}' = -\omega_0^2 x'. \quad (6.39)$$

Cette équation du mouvement écrite dans le repère x' n'est rien d'autre que celle de l'*Oscillateur harmonique (OH)*, ce qui permet de conclure que la masse suspendue à un élastique dans le champ gravitationnel est un exemple d'*OH*.

Les molécules

Les molécules constituent également des exemples d'*OH*. Pour comprendre cela il faut considérer la structure des molécules. Le schéma de gauche de la figure 6.15 montre une molécule de dihydrogène. Elle est constituée de deux atomes d'hydrogène qui mettent en commun leurs électrons. S'ils étaient seuls les deux protons se repousseraient en vertu de la loi de Coulomb. Considérons dans ce cas le mouvement d'un proton (celui de droite) en supposant que l'autre est fixé dans l'espace (ceci est une vue de l'esprit). Ce mouvement est régi par le potentiel coulombien répulsif représenté par la ligne bleue sur le graphique de droite de la figure 6.15.

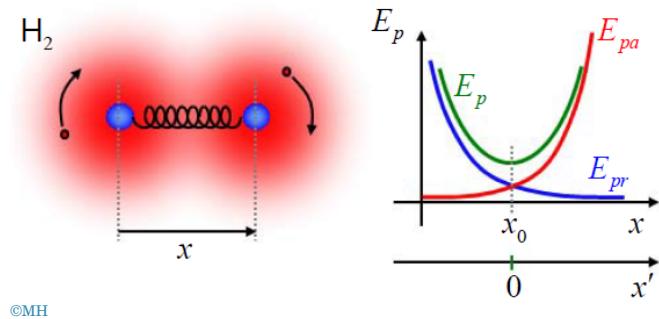


L06P3



Modélisation par un potentiel Pour des raisons qui relèvent de la *physique quantique* et qui dépassent le cadre de ce cours, les électrons qui gravitent autour des deux protons créent une sorte de potentiel attractif qui vient se rajouter au potentiel coulombien répulsif (ce potentiel attractif est représenté en rouge sur le graphique). La somme des deux potentiels est un potentiel $E_p(x)$ en forme de U présentant un minimum à une certaine distance x_0 . Ce minimum de potentiel correspond à la position de repos des protons, en d'autres termes, x_0 détermine la taille de la molécule.

FIGURE 6.15 : Représentation schématique d'une molécule, vue comme un assemblage de deux atomes reliés par une force élastique, schématisée par un ressort.



Ceci est une vue fortement simplifiée de la notion de liaison chimique mais elle a l'avantage d'être simple et de constituer une première approche de la formation des molécules.

Réponse moléculaire à une perturbation Lorsque les molécules subissent des chocs entre elles (agitation thermique), la distance x entre protons est modifiée et ne vaut donc plus x_0 . Lorsque x s'écarte de x_0 , on dit que le système s'écarte de son point d'équilibre. Pour toute valeur de x qui diffère de x_0 , le schéma de droite de la figure 6.15, le potentiel $E_p(x)$ prend une pente non nulle correspondant à une force de rappel dirigée vers x_0 et un mouvement d'oscillation comparable à celui de l'*OH* commence.

Cette condition est une des limites de validité de notre modèle.

Approximation parabolique du potentiel Pour voir que la molécule constitue un véritable *OH*, considérons le potentiel en U $E_p(x)$ et développons-le en série de Taylor autour du point de repos. Dans ce développement, le terme $(x - x_0)$ représente l'élargissement de la molécule. Si on suppose que l'élargissement est très petit par rapport à la taille de la molécule^a, on peut négliger les puissances de $(x - x_0)$ supérieures à 2 dans ce développement, ce qui donne

$$E_p(x) = E_p(x_0) + \frac{1}{2} E''_p(x_0)(x - x_0)^2 + \dots \quad (6.40)$$

On peut faire le même changement de variable que dans le problème précédent, c'est-à-dire,

$$x' = x - x_0, \quad (6.41)$$

ce qui signifie que l'on décrit maintenant le mouvement du proton de droite à partir de sa position d'équilibre $x' = 0$. Comme précédemment, on obtient le potentiel parabolique caractéristique de l'*OH*,

$$E_p(x') = E_p(0) + \frac{1}{2} E''_p(0) x'^2 + \dots \quad (6.42)$$

La force de rappel qui lie les protons entre eux est donnée par l'opposé de la dérivée du potentiel $E_p(x)$. En négligeant les termes supérieurs à l'ordre 2, on retrouve une *force de rappel élastique*

$$f(x') = -\frac{dE_p}{dx'} = -\frac{2}{2} E''_p(0) x' = -\kappa x', \quad (6.43)$$

où l'on définit $\kappa = E_p''(0)$ pour retrouver la forme canonique de l'équation de l'*OH*, ce qui permet de conclure qu'en première analyse, une molécule diatomique constitue un *OH* et est donc sujette à des oscillations.

Limitations du modèle En pratique, la molécule ne possède pas d'atome fixe et il conviendrait donc d'étudier ce problème en considérant que les deux atomes bougent de façon symétrique par rapport au centre de la molécule. On peut montrer dans ce cas que l'oscillation est toujours harmonique et que la pulsation propre de la molécule est multipliée par un facteur $\sqrt{2}$, par rapport à notre analyse.

Le pendule

Le pendule, représenté par une balançoire sur la figure 6.16 et étudié dans la limite des petits mouvements, constitue un autre exemple d'*OH*.

Pour le comprendre analysons la figure 6.17. La force que subit la masse m du pendule fixée au bout de son fil (ou de sa tige, dans le cas d'un pendule rigide d'horloge par exemple). Cette force résulte de la somme de la force gravitationnelle $m\vec{g}$ et de la force de tension du fil.

Bilan des forces Le fil ou la tige étant libres de tourner autour d'un point fixe, seule une force de tension dans l'axe du fil, ou de la tige, s'oppose à la force gravitationnelle. Cette force de tension du fil équilibre exactement la composante de la force gravitationnelle qui est parallèle au fil. L'autre composante de la force gravitationnelle n'étant pas compensée, elle met en mouvement la masse m . Cette composante de la force est parallèle à la trajectoire de la masse et c'est elle qui est responsable du mouvement oscillant du pendule. C'est donc cette composante de force parallèle au mouvement libre du pendule qu'il faut considérer pour obtenir l'équation du mouvement à partir de la loi de Newton. On voit sur le schéma de droite de la figure 6.17 que la composante de la force gravitationnelle parallèle à la trajectoire est donnée par

$$f = -mg \sin \theta, \quad (6.44)$$

où θ est l'angle que fait le pendule avec la verticale. Notons que le mot « vertical » est souvent utilisé pour décrire les schémas. Ici, la direction verticale est directement liée à la notion de gravitation. On aurait donc pu écrire également : « l'angle que fait le pendule avec la direction de la force appliquée à la masse m ».

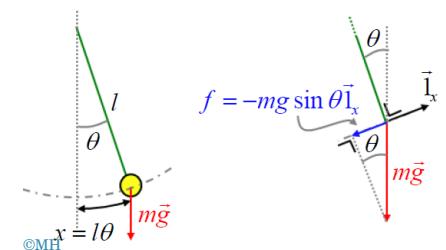
Si on considère seulement les petits angles, on peut approcher le sinus par son argument (ce qui revient à approcher le sinus par son développement de Mc Laurin dont on néglige les termes de puissance supérieure à 1), soit

$$\sin \theta \approx \theta \quad (\theta \ll 1), \quad (6.45)$$

FIGURE 6.16 : Exemple de pendule : la balançoire.



FIGURE 6.17 : Schéma des grandeurs liés au pendule : l , la longueur ; θ , l'angle entre le fil et la verticale ; f la force dans la direction libre du mouvement ;



ce qui permet d'écrire

$$f = -mg\theta \quad (\theta \ll 1). \quad (6.46)$$

Force de rappel élastique Pour repérer la position de la masse du pendule, on choisit la distance le long de la trajectoire à partir de la position de repos $\theta = 0$ (voir schéma de gauche de la figure 6.17). Si on appelle x cette distance on peut écrire $x = l\theta$ où l est la longueur du pendule. En remplaçant θ par x/l dans l'expression de la force, on obtient

$$f = -\frac{mg}{l}x, \quad (6.47)$$

ce qui constitue une force de rappel élastique caractéristique de l'*OH*. L'équation du mouvement qui en résulte sera donc de la forme $f = m\ddot{x} = -\kappa x$. On en conclut que, dans la limite des petits angles, le pendule constitue un *OH*. L'équation (6.47) est l'équation canonique de l'*OH*, avec

$$\kappa = \frac{mg}{l}, \quad (6.48)$$

ce qui permet de déduire que la pulsation propre du pendule est

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{m}} = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (6.49)$$

La pulsation du pendule est indépendante de sa masse et, dans la limite de validité de notre approche ($\theta \ll 1$), elle est aussi indépendante de l'amplitude du mouvement.

■ Petit poisson rouge... peut-on passer la barre rouge ?

Oui, à condition de répondre à ma question !

Mohamed est deux fois plus lourd que son petit frère Soufiane. Lorsqu'ils utilisent une balançoire à chaîne de longueur fixe, que peut-on dire de la période de leur mouvement? Que peut-on dire de l'amplitude de leur mouvement?



L06P4



Le circuit LC

Il est important de réaliser que l'*OH* existe également dans des domaines qui ne relèvent pas de la mécanique. Par exemple, un simple circuit électrique composé d'un condensateur et d'un inducteur constitue un *OH*. Ce circuit est représenté sur le schéma de la figure 6.18.

Modélisation du circuit Pour obtenir l'équation du circuit, il faut se baser sur les lois de comportement des éléments qui le constituent. Si, pour le courant qui circule dans le circuit, on choisit comme sens conventionnel le sens horlogique, la charge Q de

la plaque de gauche du condensateur augmente avec un courant I positif et sa croissance est donnée par le courant lui-même,

$$I = \frac{dQ}{dt}. \quad (6.50)$$

Aux bornes du condensateur la différence de potentiel (dans le sens opposé à celui du courant, selon la convention) est

$$V_C = \frac{Q}{C}, \quad (6.51)$$

alors qu'aux bornes de l'inducteur elle vaut

$$V_L = L \frac{dI}{dt}. \quad (6.52)$$

En exprimant le fait que la somme des différences de potentiel sur un tour complet du circuit est nulle, $V_L + V_C = 0$, on trouve

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{Q}{LC}. \quad (6.53)$$

Puisque la charge Q donne le courant quand elle est dérivée, il suffit de dériver l'équation (6.53) par rapport au temps pour obtenir une équation ne contenant comme variables que le courant et le temps,

$$\frac{d^2I}{dt^2} = -\frac{1}{LC} \frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{LC} I. \quad (6.54)$$

Identification de l'oscillateur harmonique L'équation (6.54) a la structure habituelle de l'équation de l'*OH*, avec $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$. Le circuit LC constitue donc un *OH* pour la variable I , donc le courant. La *pulsation propre* de ce circuit est

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (6.55)$$

Évolution du courant et de la tension On sait dès lors que le courant du circuit *LC* subit une évolution harmonique d'amplitude arbitraire, notée ici I_0 . Il s'agit de la valeur maximale que prend le courant. Comme précédemment, cette valeur est déterminée par les conditions initiales de fonctionnement du circuit. Avec cette notation, la variation de courant est

$$I(t) = I_0 \cos(\omega_0 t), \quad (6.56)$$

ce qui, en vertu de la loi courant-tension de l'inducteur $V = LdI/dt$, donne la tension suivante aux bornes du condensateur et de l'inducteur

$$V_L(t) = -V_C(t) = -\omega_0 L I_0 \sin(\omega_0 t). \quad (6.57)$$

Sur le schéma de la figure 6.19, on voit ainsi que le courant (en bleu) et la tension (en rouge) évoluent en quadrature exactement comme la position et la vitesse de l'oscillateur harmonique mécanique.

FIGURE 6.18 : Circuit électrique constitué d'un condensateur de capacité C en parallèle avec un inducteur d'inductance L .

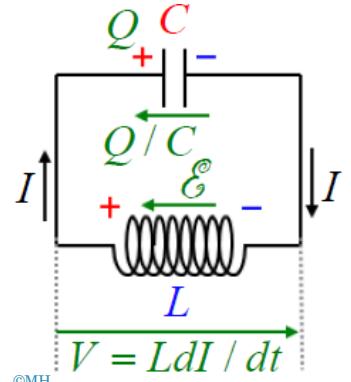
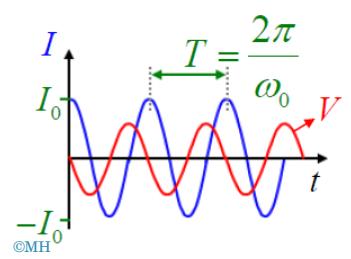


FIGURE 6.19 : Évolution du courant (courbe bleue) et de la tension (courbe rouge) aux bornes du condensateur et de l'inducteur du circuit représenté à la figure 6.18.



Interprétation en termes d'énergie Pour s'expliquer l'origine de l'oscillation harmonique dans le circuit LC , il est éclairant de pousser un peu plus loin l'analogie avec l' OH mécanique. Pour ce faire, il est naturel d'associer au courant la vitesse de la masse de l' OH mécanique puisque le courant représente un flux de particules chargées possédant une certaine vitesse. De plus, nous avons vu au chapitre d'électromagnétisme que le courant dans l'inducteur présente une énergie qui a la forme mathématique de l'énergie cinétique, il s'agit de l'énergie magnétique

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2. \quad (6.58)$$

Il faut noter que cette formule indique que l'énergie magnétique oscille avec une pulsation égale à $2\omega_0$, puisqu'elle est proportionnelle à $I^2 = I_0^2 \cos^2(\omega_0 t) \propto 1 + \cos(2\omega_0 t)$.

En plus de cette énergie magnétique, il y a dans le circuit l'énergie électrique du condensateur,

$$W_e = \frac{1}{2}CV^2. \quad (6.59)$$

Comme l'énergie totale est conservée dans le circuit, dans la mesure où l'équation (6.54) ignore la dissipation par *effet Joule*, puisqu'il n'y aucune résistivité dans le circuit modélisé, l'énergie totale du circuit ne peut être qu'une constante,

$$W_t = W_m + W_e = C^{te}. \quad (6.60)$$

Ceci peut être vérifié mathématiquement à l'aide des expressions du courant et de la tension trouvées ci-dessus. Il suffit pour y arriver de se rappeler que la pulsation propre des oscillations du circuit LC est donnée par $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, ce qui conduit à

$$2(W_m + W_e) = LI^2 + CV^2 = LI_0^2 \cos^2(\omega_0 t) + CL^2 \omega_0^2 I_0^2 \sin^2(\omega_0 t) = LI_0^2, \quad (6.61)$$

qui montre qu'effectivement l'énergie totale du circuit est une constante donnée par l'énergie magnétique maximale $\frac{1}{2}LI_0^2$, qui correspond également à l'énergie électrique maximale.

Dans l'analogie à la mécanique, on peut donc dire que l'énergie magnétique représente l'énergie cinétique de l' OH et que l'énergie électrique représente l'énergie potentielle de l' OH . L'oscillation dans le circuit LC est donc due à une conversion périodique de l'énergie magnétique en énergie électrique.

■ Petit poisson rouge... peut-on passer la barre rouge ?

Oui, à condition de répondre à ma question !

En étudiant la manière dont la conservation de l'énergie apparaît dans (6.61), donnez une explication du déphasage qui apparaît à la figure 6.19.



6.2 L'oscillateur linéaire amorti

Jusqu'à présent, nous avons considéré des systèmes oscillants qui ne présentent pas d'amortissement, c'est-à-dire, des systèmes qui ne présentent pas de mécanisme de dissipation d'énergie. Les termes « *dissipation d'énergie* » signifient que la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle de l'oscillateur n'est pas conservée en raison d'un transfert de ces énergies vers une troisième forme d'énergie qui n'entre pas dans le mécanisme d'oscillation. Or, en pratique tous les dispositifs que nous avons vus ci-dessus présentent des pertes d'énergie. Par exemple, le pendule mécanique présente toujours un peu de frottement au niveau de son axe ainsi que des frottements avec le milieu dans lequel la masse se déplace. De même, le circuit *LC* possède toujours un minimum de résistivité responsable de dissipation d'énergie par *effet Joule*.

Même les molécules diatomiques émettent en vibrant des ondes électromagnétiques qui consomment l'énergie de la vibration, etc. Tous ces mécanismes de dissipation d'énergie provoquent une diminution de l'énergie de l'oscillation et l'oscillateur tend naturellement vers son état de repos. C'est le phénomène d'amortissement. Il est essentiel, dans la pratique, de pouvoir tenir compte de la dissipation dans la description des phénomènes oscillatoires.

Les mécanismes de dissipation d'énergie sont divers et leur description mathématique peut être parfois très ardue. Puisque nous allons surtout nous attacher aux aspects qualitatifs de l'amortissement, nous allons considérer un seul modèle de dissipation énergétique. Il s'agit d'un modèle à la fois simple et représentatif d'un grand nombre de situations physiques. Ceci nous permettra de limiter les développements mathématiques au strict nécessaire.

6.2.1 Équation de l'oscillateur linéaire amorti

Le modèle mathématique d'amortissement que nous considérons est utilisé par exemple pour décrire l'oscillateur mécanique lorsque sa masse se déplace dans un milieu visqueux tel que l'air ou l'eau. L'expérience montre que la viscosité du milieu provoque une force proportionnelle à la vitesse de déplacement de la masse et dirigée dans le sens opposé à cette vitesse, soit $\vec{f}_f = -\lambda \vec{v}$. C'est la force de frottement visqueux. Ce mécanisme de dissipation d'énergie est représenté sur la droite de la figure 6.20 avec l'exemple de l'oscillateur mécanique dont la masse subit un frottement sur son support (en réalité dans ce cas le modèle du *frottement visqueux* n'est valable que si la surface du support est enduite d'un fluide visqueux, si ce n'est pas le cas, on a affaire à une force de *frottement sec* dont le module est indépendant de la vitesse). Dans cette situation, l'énergie de l'oscillation est transformée en énergie thermique.

Force totale À titre d'exemple, le modèle mathématique du *frottement visqueux* s'applique très bien à la description des amortis-



L06P5



FIGURE 6.20 : Système masse-ressort en présence d'amortissement visqueux. La masse m est attachée à un ressort de constante de rappel κ . Le frottement visqueux correspond à une force \vec{f}_f proportionnelle à la vitesse \vec{v} et au coefficient λ .

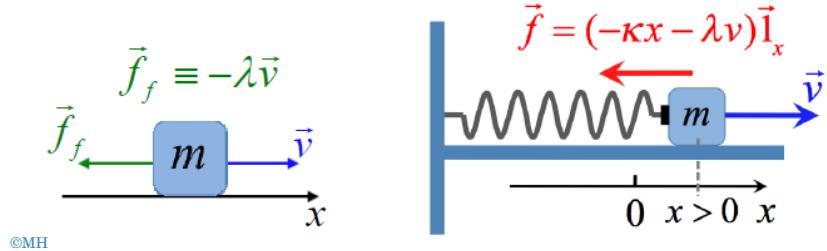
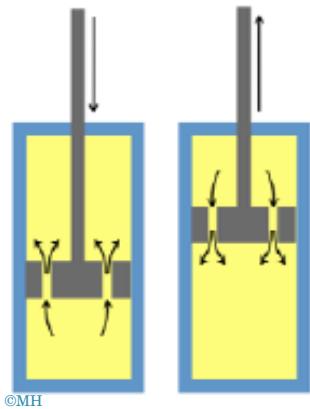


FIGURE 6.21 : Schéma de principe d'un amortisseur. Le passage du liquide au travers du piston troué provoque une force résistive proportionnelle à la vitesse de déplacement du piston.



seurs de voiture dont le schéma de principe est représenté à la figure 6.21. La force de frottement est créée par le passage du liquide (représenté en jaune) au travers du piston troué.

En introduisant la forme mathématique de la vitesse

$$\vec{v} = \dot{x} \vec{l}_x, \quad (6.62)$$

la force de frottement visqueux s'écrit

$$\vec{f}_f = -\lambda \dot{x} \vec{l}_x. \quad (6.63)$$

En ajoutant cette force à la force de rappel du ressort

$$\vec{f}_r = -\kappa x \vec{l}_x, \quad (6.64)$$

on obtient la force totale exercée sur la masse de l'oscillateur. Sa composante en x vaut

$$f = -\kappa x - \lambda \dot{x}. \quad (6.65)$$

Équation du mouvement L'équation du mouvement de l'oscillateur est obtenue en introduisant cette expression de la force dans la seconde loi de Newton,

$$\ddot{x} = \frac{f}{m} = -\frac{\kappa}{m} x - \frac{\lambda}{m} \dot{x}. \quad (6.66)$$

En introduisant la pulsation propre de l'oscillateur

$$\omega_0 = \sqrt{\kappa/m}, \quad (6.67)$$

et le coefficient d'amortissement

$$\alpha = \frac{\lambda}{2m}, \quad (6.68)$$

on obtient ce que l'on appelle la forme *canonique* de l'équation de l'oscillateur linéaire amorti (*OLA*),

$$\ddot{x} + 2\alpha \dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (6.69)$$

Cette équation est, au même titre que l'équation de l'*OH*, une équation *générique* qui s'applique à une multitude de situations physiques.

6.2.2 Solution générale

La solution générale de cette équation n'est pas simple à établir et requiert des développements relevant du cours d'analyse. Nous verrons dans la section suivante un outil mathématique appelé *phaseur* qui permet de résoudre cette équation relativement facilement mais elle conduit néanmoins à la notion de fréquence d'oscillation complexe qui sera traitée en séance d'exercices. Nous nous contenterons de donner, ci-dessous, la solution sans la démontrer.

Hypothèse de l'amortissement faible Nous ne nous limitons plus au cas d'un « *amortissement faible* ». L'amortissement est dit « faible » quand le coefficient d'amortissement α est plus petit que la pulsation propre de l'oscillateur ω_0 ,

$$\alpha < \omega_0. \quad (6.70)$$

■ Petit poisson rouge... peut-on passer la barre rouge ?

Oui, à condition de répondre à ma question !

Expliquez pourquoi on doit comparer α à ω_0 pour considérer que l'amortissement est faible. Pourquoi ne peut-on simplement pas dire que α est petit?

Solution générale sous faible amortissement Dans cette situation, la solution générale de l'équation de l'OLA est une fonction harmonique multipliée par une exponentielle décroissante de coefficient α ,

$$x(t) = A \cos(\omega_a t + \varphi) e^{-\alpha t} \quad \text{où} \quad \omega_a^2 = \omega_0^2 - \alpha^2. \quad (6.71)$$

Remarquez que la pulsation ω_a du mouvement de l'OLA n'est pas égale à la pulsation propre de l'oscillateur ω_0 . Elle est donnée par la relation

$$\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \leq \omega_0, \quad (6.72)$$

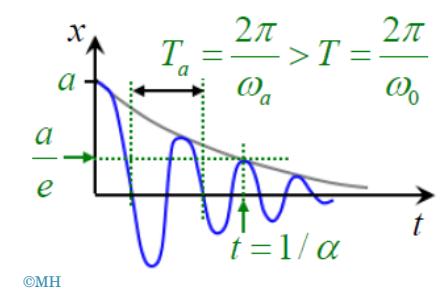
qui montre qu'elle est toujours plus faible que ω_0 .

Le mouvement de l'OLA est représenté sur le graphique de la figure 6.22. On définit la pseudo-période T_a du mouvement comme étant deux fois le temps qui sépare deux zéros consécutifs de la position $x(t)$. Ce temps est fixé par la pulsation ω_a au travers de la relation

$$T_a = 2\pi/\omega_a > T_0, \quad (6.73)$$

qui est toujours supérieur à la période de l'*OH* que l'on obtiendrait si on annulait le frottement visqueux.

FIGURE 6.22 : Évolution d'une oscillation amortie d'amplitude initiale $x = a$ au cours du temps t . La période de l'oscillation amortie est notée T_a .



©MH

6.2.3 Exemple d'oscillateur linéaire amorti : le circuit RLC

Comme nous l'avons mentionné précédemment, la plupart des oscillateurs harmoniques sont en réalité des oscillateurs linéaires amortis en raison de la présence de mécanismes de dissipation d'énergie. Le circuit *RLC* représenté à la figure 6.23 constitue un exemple idéal d'oscillateur linéaire amorti car il a l'avantage de présenter un terme d'amortissement correspondant rigoureusement à une force de frottement visqueux. Comme son nom l'indique, ce circuit est composé d'une résistance R , d'un inducteur L et d'un condensateur C .

Équations du circuit Pour établir l'équation du circuit, il suffit d'exprimer le fait que la somme des différences de potentiel aux bornes des 3 éléments est nulle,

$$V_C + V_L + V_R = 0. \quad (6.74)$$

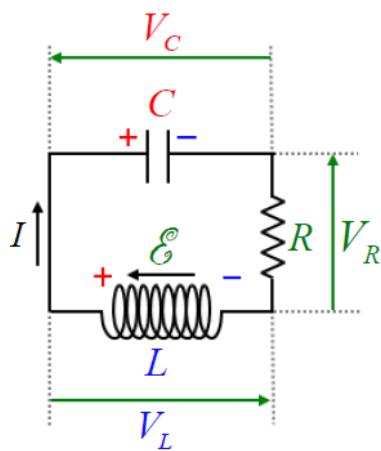
Les différences de potentiel aux bornes des trois éléments dans le sens contraire du courant (qui est le sens conventionnel pour la définition de la différence de potentiel dans un circuit) sont notées V_C , V_R et V_L et valent

$$\begin{cases} V_C &= \frac{Q}{C}, \\ V_L &= L \frac{dI}{dt}, \\ V_R &= RI, \end{cases} \quad (6.75)$$

ce qui conduit finalement à

$$\frac{Q}{C} + L \frac{dI}{dt} + RI = 0. \quad (6.76)$$

FIGURE 6.23 : Circuit *RLC* correspondant à un *OLA*. Il est caractérisé par sa géométrie et sa résistance R , son inductance L et sa capacité C .



©MH

Comme précédemment, pour éliminer la charge et ainsi obtenir l'équation du circuit pour le courant, nous dérivons cette relation par rapport au temps et utilisons $I = dQ/dt$,

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{I}{LC} = 0. \quad (6.77)$$

On retrouve la forme *canonique* de l'*OLA* en introduisant

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (6.78)$$

$$\alpha = \frac{R}{2L}. \quad (6.79)$$

Évolution du courant dans le circuit La solution de l'équation de l'*OLA* vue plus haut peut être utilisée ici pour caractériser l'évolution du courant dans le circuit sur base des conditions initiales. En toute généralité on peut écrire

$$I(t) = I_0 \cos(\omega_a t + \varphi) e^{-\alpha t} \quad \text{où} \quad \omega_a^2 = \omega_0^2 - \alpha^2. \quad (6.80)$$



FIGURE 6.25 : Dispositifs reposant sur le principe de l'oscillateur linéaire amorti forcé (OLAF)

L'amplitude I_0 et le déphasage φ sont déterminés par les conditions initiales, soit, par la valeur du courant et de sa dérivée $\frac{dI}{dt}$ au temps $t = 0$ mais nous ne nous attarderons pas sur ces détails ici.

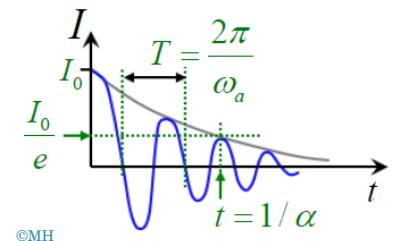
La figure 6.24 montre que les oscillations de courant ont une amplitude décroissante lorsque la résistance R est non nulle [voir (6.79)]. Dans la limite de résistance nulle, l'amortissement n'existe plus, ce qui est physiquement compréhensible puisque la source d'amortissement est la dissipation Joule dans la résistance (les énergies électrique et magnétique du condensateur et de l'inducteur, respectivement, sont progressivement dissipées sous forme de chaleur au sein de la résistance lorsque celle-ci est présente).

6.3 Oscillations forcées

Les oscillateurs présentent, pour la plupart, un processus d'amortissement ce qui implique en pratique qu'il faut une source d'énergie extérieure pour maintenir leur oscillation. Ceci est illustré à la figure 6.25 à l'aide de plusieurs exemples. Le ballon qui rebondit sur le sol peut être vu comme un oscillateur. En raison des frottements dans l'air et sur le sol, la hauteur des rebonds diminuent avec le temps. Pour maintenir l'oscillation, il faut exercer une force périodique régulière de fréquence identique à celle de l'oscillation naturelle du ballon. C'est ce que réalise le joueur de basketball. Il en est de même pour le pendule de l'horloge mécanique qui, en raison des frottements de son axe et des frottements dans l'air, verrait l'amplitude de son mouvement diminuer s'il n'était pas entraîné de façon périodique par une force extérieure (assurée par un ressort mis en tension de façon régulière). La radio fonctionne grâce à un circuit oscillant de type *RLC* qui est maintenu en oscillation par l'onde électromagnétique émise par le poste émetteur. Là aussi, il faut que la fréquence de l'onde soit égale à la fréquence naturelle du circuit (c'est sur ce principe qu'est basée la sélection de canal radio). La balançoire constitue un exemple bien connu et largement expérimenté d'oscillateur amorti et forcé. Dans ce cas, c'est le mouvement du corps qui provoque la force périodique qui permet d'en-tretenir l'oscillation.

Tous ces dispositifs constituent ce que l'on appelle des oscillateurs linéaires amortis et forcés. Pour étudier la physique de l'*OLAF*, nous allons considérer un problème d'oscillateur mécanique de type masse-ressort sur lequel s'applique une force extérieure harmo-

FIGURE 6.24 : Évolution du courant dans un *OLA*. La pulsation ω_a diffère de la pulsation propre et l'amplitude subit une décroissance exponentielle caractérisée par le paramètre α .



L06P6



nique $F \cos(\omega t)$ (ce modèle de force est loin de s'appliquer au problème du ballon de basket ou du pendule de l'horloge mais il est, en revanche, relativement rigoureux pour les exemples de la radio et de la balançoire).

En tenant compte de la force de rappel du ressort, de la force de frottement visqueux et de la force extérieure harmonique, la force totale subie par la masse de l'oscillateur mécanique s'écrit

$$f = -\kappa x - \lambda \dot{x} + F \cos(\omega t). \quad (6.81)$$

L'équation du mouvement est donnée par la seconde loi de Newton qui conduit à une équation différentielle du deuxième ordre non homogène

$$\ddot{x} = \frac{f}{m}, \quad (6.82)$$

$$\ddot{x} + \frac{\lambda}{m} \dot{x} + \frac{\kappa}{m} x = \frac{F}{m} \cos(\omega t). \quad (6.83)$$

L'équation (6.83) est l'équation canonique de l'*OLAF*. De prime abord, elle peut apparaître relativement complexe et le calcul de sa solution générale peut demander de longs développements. Nous ne nous y intéresserons pas ici. Nous considérerons seulement les solutions de type périodique représentant un mouvement harmonique (c'est-à-dire, de pulsation et d'amplitude constantes). C'est la force extérieure qui impose sa pulsation ω au système. On doit donc rechercher des solutions harmoniques de pulsation ω de la forme générale donnée par

$$x = x_0 \cos(\omega t + \varphi). \quad (6.84)$$

Pour calculer l'amplitude x_0 et le déphasage φ , il faut substituer cette forme de la solution dans l'équation du mouvement. On effectue les dérivées et on essaye ensuite de calculer les valeurs de x_0 et φ qui satisfont l'équation trigonométrique résultante. On se rend vite compte en appliquant cette substitution que le calcul est d'une grande lourdeur ceci, en particulier, en raison du caractère non homogène de l'équation et du grand nombre de paramètres qui y apparaissent. On voit effectivement que x_0 et φ seront tous deux fonctions des paramètres apparaissant dans les trois termes du membre de droite de l'équation, soit

$$\begin{cases} x_0 &= x_0(\omega, F, \kappa, m, \lambda), \\ \varphi &= \varphi(\omega, F, \kappa, m, \lambda). \end{cases} \quad (6.85)$$

■ Petit poisson rouge... peut-on passer la barre rouge ?

Oui, à condition de répondre à ma question !

Essayez de trouver la forme explicite des fonctions x_0 et φ ci-dessus pour vous convaincre vous-mêmes de la complexité des calculs.



Pour éviter cette lourdeur calculatoire, nous allons ici utiliser un outil mathématique d'une très grande importance dans l'étude des systèmes oscillants et plus généralement des systèmes à comportement périodique. Il s'agit du concept de phaseur construit sur le formalisme des nombres complexes.

6.4 Les phaseurs

Nous allons ici aborder l'étude d'un outil mathématique extrêmement précieux pour la description théorique des phénomènes oscillatoires. Il s'agit des *phaseurs*.

6.4.1 Représentation complexe du mouvement harmonique

L'astuce qui se cache derrière le concept de phaseur réside dans l'utilisation d'une nouvelle représentation mathématique du mouvement harmonique. Pour introduire cette représentation, utilisons l'approche de la section 6.1 dans laquelle le mouvement harmonique était vu comme le mouvement de la coordonnée horizontale de la masse d'un pendule en rotation à vitesse angulaire constante : on se rappelle grâce au schéma de gauche de la figure 6.26 que ce mouvement harmonique était donné par l'expression mathématique $x(t) = l \cos(\omega t)$. La représentation mathématique dont il est question ici s'inspire de cette vision du mouvement harmonique, mais plutôt que de considérer la rotation d'un objet dans l'espace (la masse du pendule tournant), elle se base sur la notion de rotation dans le plan complexe (plan de Gauss). Le plan complexe se prête particulièrement bien à la description de la rotation car on sait que l'argument θ d'un nombre complexe $\xi = x_0 e^{i\theta}$ représente l'angle que ce nombre définit avec l'axe réel, tel que représenté sur le schéma de droite de la figure 6.26.

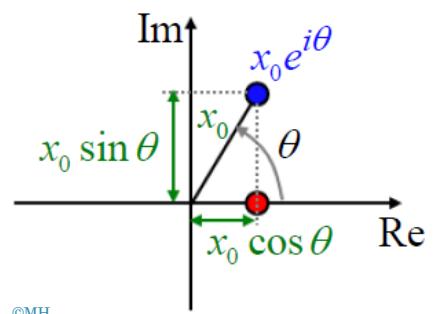
Le schéma de la figure 6.27 montre le nombre complexe $x_0 e^{i\theta}$ et ses projections sur les axes réel et imaginaire. La projection sur l'axe réel vaut $x_0 \cos \theta$ et la projection sur l'axe imaginaire vaut $i x_0 \sin \theta$. Dès lors, si θ augmente linéairement avec le temps, soit $\theta = \omega_0 t$, alors la projection sur l'axe réel reproduit le mouvement harmonique $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$ comme on le voit sur la figure 6.26.

Puisque $\theta = \omega_0 t$ représente la phase de la variation harmonique, on l'appellera par la suite la *phase* du nombre complexe tournant, plutôt que l'*argument*, avec

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos \theta + i \sin \theta \\ x(t) &= \operatorname{Re}[\xi(t)] = x_0 \cos(\omega_0 t) \end{aligned}$$

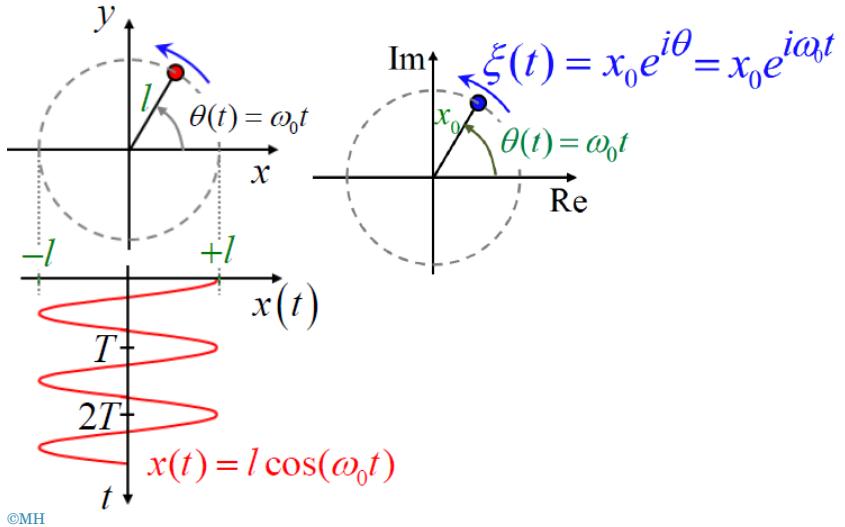
C'est sur cette représentation du mouvement harmonique en termes de la partie réelle d'un nombre complexe tournant qu'est ba-

FIGURE 6.27 : Illustration de la relation $x_0 e^{i\theta} = x_0 \cos \theta + i x_0 \sin \theta$.



©MH

FIGURE 6.26 : Mouvement oscillant résultant de la variation linéaire proportionnelle au temps de l'argument d'une exponentielle imaginaire.



sée la notion de *phaseur*. On pourrait se demander à ce stade pourquoi on complique les choses en introduisant une représentation complexe du mouvement mais nous verrons par la suite que cette représentation est extrêmement pratique pour la description des phénomènes périodiques en physique et plus généralement dans le domaine des sciences et techniques. Nous découvrirons cet aspect pratique plus loin.

6.4.2 Déphasages et phaseurs

La représentation complexe permet d'exprimer la solution générale de l'équation de l'*OH* avec un déphasage quelconque (déphasage par rapport à la phase $\omega_0 t$ considérée ci-dessus, voir la section 6.1.3). Il suffit pour comprendre cela de considérer la partie réelle non plus d'un nombre réel multiplié par $\exp(i\omega_0 t)$, mais d'un nombre complexe \underline{X} multiplié par $\exp(i\omega_0 t)$ (la notation particulière de ce nombre complexe avec la barre inférieure sera justifiée plus bas). Soit

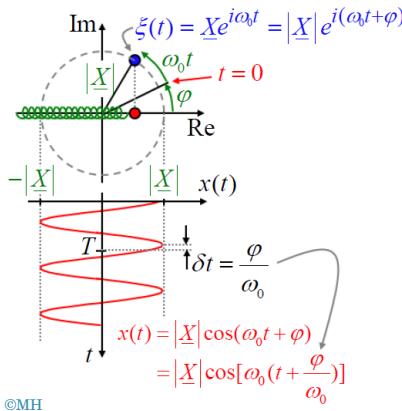
$$x = \operatorname{Re} [\underline{X} e^{i\omega_0 t}] \quad \text{où } \underline{X} \in \mathbb{C}. \quad (6.86)$$

Cette partie réelle est facile à expliciter si on introduit le module $|\underline{X}|$ et l'argument φ du nombre complexe \underline{X} . Nous obtenons une évolution harmonique d'amplitude $|\underline{X}|$ et de déphasage φ , ce qui est bien la solution générale de l'équation de l'*OH*,

$$x = \operatorname{Re} [|\underline{X}| e^{i\varphi} e^{i\omega_0 t}] \Rightarrow x(t) = |\underline{X}| \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (6.87)$$

Le schéma de la figure 6.28 donne la représentation graphique de l'évolution du nombre complexe tournant considéré ici, soit $\xi(t) = \underline{X} \exp(i\omega_0 t)$. Au temps $t = 0$, ce nombre a un argument égal à φ , ce qui signifie que l'oscillation $x(t)$ commence en $t = 0$ à la valeur de $|\underline{X}| \cos(\varphi)$. De même, la dérivée temporelle de $x(t)$ nous indique que la vitesse initiale est non nulle en $t = 0$, elle vaut $\dot{x}(0) = -\omega_0 |\underline{X}| \sin(\varphi)$. L'argument φ du nombre complexe \underline{X} représente donc bien le déphasage de l'oscillation par rapport à la phase $\omega_0 t$.

FIGURE 6.28 : Le décalage temporel correspondant au déphasage φ est $\delta t = \varphi/\omega_0$ comme indiqué ci-dessous.



Convention de notation Ce qui est important à retenir de cette discussion, c'est que le nombre complexe \underline{X} contient les caractéristiques du mouvement harmonique général dans la mesure où le module de \underline{X} représente l'amplitude du mouvement alors que son argument φ représente le déphasage du mouvement. Le mouvement harmonique général est donc entièrement caractérisé par le nombre complexe \underline{X} et la pulsation ω_0 . Dans la suite, nous utiliserons les nombres complexes pour décrire les mouvements harmoniques. Quand un nombre complexe caractérise un mouvement harmonique, on l'appelle *phaseur* et pour mettre en évidence sa signification physique et ainsi le différencier d'un simple nombre complexe, on le notera toujours comme ici, à l'aide d'une lettre majuscule assortie d'une barre inférieure.

Le phaseur \underline{X} , représentant un mouvement harmonique tout à fait général $x(t)$ est schématisé à la figure 6.29. Son module donne l'amplitude de l'oscillation et son argument en donne le déphasage. Nous verrons plus loin que cette représentation du mouvement harmonique par un nombre complexe est très utile en pratique.

6.4.3 Équations des phaseurs

Nous allons voir ici que la notion de phaseur permet de simplifier fortement les développements mathématiques liés à la résolution des équations différentielles.

Exemple de l'oscillateur harmonique

Pour commencer progressivement, considérons l'équation de l'oscillateur harmonique. Cette équation est simple et on en connaît déjà la solution générale mais on va faire ici comme s'il s'agissait d'un problème nouveau dont on ne connaît pas la solution. Notre but est alors de calculer cette solution sur base de la notion de phaseur. Notez que si on utilise la notion de phaseur c'est que l'on suppose implicitement que la solution de l'équation est harmonique. Le but que nous nous fixons ici est donc simplement de trouver le mouvement harmonique qui satisfait l'équation de l'*OH*,

$$\ddot{x} = -\frac{\kappa}{m}x. \quad (6.88)$$

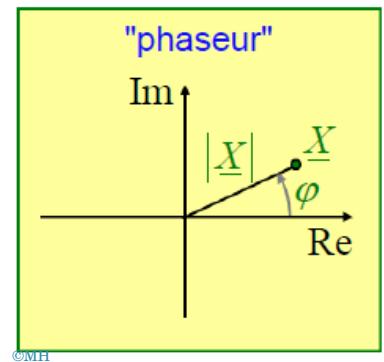
Solution harmonique test

Si nous recherchons une solution harmonique $x(t)$ nous pouvons l'écrire à l'aide du phaseur \underline{X} et de la fréquence ω , c'est-à-dire,

$$x = \operatorname{Re} [\underline{X} e^{i\omega t}] \quad \underline{X} \in \mathbb{C}. \quad (6.89)$$

On l'appelle solution « test » car nous ne connaissons ni le phaseur \underline{X} , ni la fréquence ω et notre but est de les calculer pour pouvoir caractériser complètement le mouvement périodique produit par l'équation de l'*OH*.

FIGURE 6.29 : Illustration du concept de phaseur.



Calcul des dérivées

Pour trouver le phaseur \underline{X} et la fréquence ω , il nous suffit de substituer l'expression de x donnée ci-dessus dans l'équation différentielle de l' OH . L'opération de dérivée temporelle est simple à effectuer puisque celle-ci peut être entrée dans la partie réelle (la dérivée de la partie réelle d'une fonction complexe étant égale à la partie réelle de sa dérivée). On voit donc que la dérivée première de $x(t)$ est égale à $\dot{x}(t) = \text{Re}[i\omega\underline{X}\exp(i\omega t)]$. Notez que ceci revient à dire que la dérivée $\dot{x}(t)$ a pour phaseur $i\omega\underline{X}$,

$$\dot{x} = \frac{d}{dt} \text{Re} [\underline{X} e^{i\omega t}] = \text{Re} \left[\underline{X} \frac{d}{dt} (e^{i\omega t}) \right] = \text{Re} [i\omega \underline{X} e^{i\omega t}]. \quad (6.90)$$

La dérivée seconde qui apparaît dans l'équation de l' OH est obtenue en calculant la dérivée de \dot{x} et on trouve

$$\ddot{x} = \text{Re} [-\omega^2 \underline{X} e^{i\omega t}]. \quad (6.91)$$

On voit donc que le phaseur de l'accélération \ddot{x} de l'oscillateur est $-\omega^2 \underline{X}$. Ceci permet de vous faire remarquer que l'opération de dérivée temporelle sur $x(t)$ est équivalente à l'opération de multiplication par $i\omega$ sur le phaseur correspondant \underline{X} [la dérivée seconde qui est l'opération de dérivée appliquée deux fois est bien équivalente à deux fois la multiplication par $i\omega$, soit $(i\omega)^2 = -\omega^2$].

Équation du mouvement pour les phaseurs

Si on substitue x et \dot{x} dans l'équation de l' OH $\ddot{x} = -\frac{\kappa}{m}x$ par leurs expressions en termes de phaseur, on trouve la relation

$$\text{Re} [-\omega^2 \underline{X} e^{i\omega t}] = \text{Re} \left[-\frac{\kappa}{m} \underline{X} e^{i\omega t} \right]. \quad (6.92)$$

En regroupant les parties réelles à gauche, on trouve

$$\rightarrow \text{Re} \left[-\omega^2 \underline{X} e^{i\omega t} + \frac{\kappa}{m} \underline{X} e^{i\omega t} \right] = 0. \quad (6.93)$$

N'oublions pas que cette relation est équivalente à l'équation différentielle de l' OH (plus exactement, c'est l'équivalent de l'équation de l' OH restreinte aux solutions harmoniques de fréquence ω). En mettant l'exponentielle en évidence, on obtient la relation suivante où l'on voit apparaître le nombre complexe $\underline{Y} = -\omega^2 \underline{X} + \frac{\kappa}{m} \underline{X}$,

$$\begin{aligned} \text{Re} \left[\underbrace{\left(-\omega^2 \underline{X} + \frac{\kappa}{m} \underline{X} \right)}_{\underline{Y}} e^{i\omega t} \right] &= 0 \\ \rightarrow \underline{Y} &= 0. \end{aligned}$$

Phaseur au départ de sa partie réelle

Le nombre complexe \underline{Y} peut être vu comme un phaseur. Il est représenté schématiquement sur la figure 6.30 ainsi que le nombre

complexe tournant $\underline{Y} \exp(i\omega t)$. La relation ci-dessus, qui est l'équivalent de l'équation de l'*OH* pour le phaseur \underline{X} , nous indique que la partie réelle de ce nombre complexe tournant est nulle pour toute valeur de t . Il est clair que ceci n'est possible que si \underline{Y} lui-même est nul. La partie réelle de $\underline{Y} \exp(i\omega t)$ n'est effectivement nulle que si le module de \underline{Y} est nul (le schéma ne correspond donc pas à une solution acceptable).

Si dans la relation $\underline{Y} = 0$, on remplace \underline{Y} par sa valeur en fonction de \underline{X} , on obtient la relation algébrique

$$-\omega^2 \underline{X} + \frac{\kappa}{m} \underline{X} = 0 \Rightarrow \omega^2 \underline{X} = \frac{\kappa}{m} \underline{X}. \quad (6.94)$$

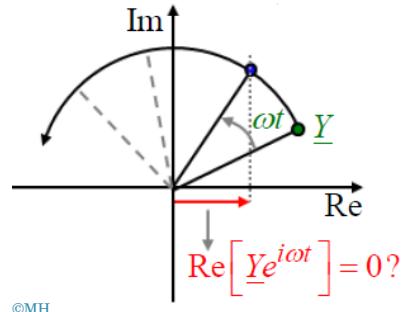
Il est important ici de réaliser que cette dernière relation provient directement de l'équation différentielle de l'*OH* et elle peut être donc vue comme l'équation de l'*OH* pour le phaseur \underline{X} . On trouve

■ Petit poisson rouge... peut-on passer la barre rouge ?

Oui, à condition de répondre à ma question !

Pouvez-vous expliquer pourquoi on peut retrouver l'expression complète du phaseur quand on connaît uniquement sa partie réelle ? Est-ce lié à une propriété des nombres complexes ou à une propriété des solutions harmoniques ?

FIGURE 6.30 : Représentation schématique du phaseur \underline{Y} .



©MH

Remarque Il est intéressant de comparer cette équation algébrique avec l'équation différentielle de l'*OH*, soit $\ddot{x} = -\frac{\kappa}{m}x$, car on voit alors que pour passer de l'équation différentielle à l'équation algébrique du phaseur, il suffit de remplacer x par son phaseur \underline{X} et la dérivée temporelle par la multiplication par $i\omega$,

$$\left[x \rightarrow \underline{X}, \frac{d}{dt} \rightarrow i\omega \right]. \quad (6.95)$$

Solution de l'équation pour le phaseur L'équation algébrique du phaseur de l'*OH* $\omega^2 \underline{X} = \frac{\kappa}{m} \underline{X}$ est facile à résoudre. En effet, on voit immédiatement que la pulsation ω est égale à la pulsation propre de l'oscillateur, soit $\omega = \omega_0 = \sqrt{\kappa/m}$.

De même, puisque \underline{X} peut être simplifié à gauche et à droite, on voit que ce nombre complexe n'est pas fixé par l'équation ; il s'agit d'un nombre indéterminé. En d'autres termes, l'amplitude $|\underline{X}|$ et le déphasage φ du mouvement sont indéterminés. On a donc

$$\begin{cases} \omega^2 = \frac{\kappa}{m} = \omega_0^2, \\ \underline{X} = |\underline{X}| e^{i\varphi}. \end{cases} \quad (6.96)$$

Ceci correspond bien à la solution générale de l'*OH* vue plus haut, $x(t) = |\underline{X}| \cos(\omega_0 t + \varphi)$ où l'amplitude $|\underline{X}|$ et le déphasage φ

sont les constantes d'intégration déterminées uniquement par les conditions initiales du mouvement.

La chose essentielle à retenir de ce développement est que l'introduction des phaseurs permet de transformer une équation différentielle en $x(t)$ en une simple équation algébrique pour le phaseur associé X .

6.5 Le coin des assistant·es

Mouvement harmonique

Oscillateur harmonique (OH)

Le mouvement de l'OH est caractérisé par une équation du mouvement du type

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x(t) = 0,$$

donc par une force $f = m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x(t)$ proportionnelle à la distance $x(t)$ d'une masse à sa position de repos (où $\omega_0 = 2\pi f$, f étant la fréquence des oscillations). Ce qui correspond à une force de rappel élastique

$$f = -\kappa x \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{m}}.$$

Oscillateur linéaire amorti

Le mouvement de l'OLA est caractérisé par une équation du mouvement du type

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\alpha\dot{x} = 0,$$

donc par une force $f = m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x - 2m\alpha\dot{x}$ où l'on voit apparaître une force de viscosité f_v : proportionnelle à la vitesse et opposée au mouvement,

$$f_v = -\lambda\dot{x} \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{\lambda}{2m}.$$

Oscillateur linéaire amorti forcé

Le mouvement de l'OLAF est caractérisé par une équation du mouvement du type

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\alpha\dot{x} = a \cos(\omega t),$$

donc par une force $f = m\ddot{x} = -\kappa x - \lambda\dot{x} + A \cos(\omega t)$ où l'on voit apparaître une force extérieure $F = mA \cos(\omega t)$ qui permet d'entretenir le mouvement malgré l'amortissement.

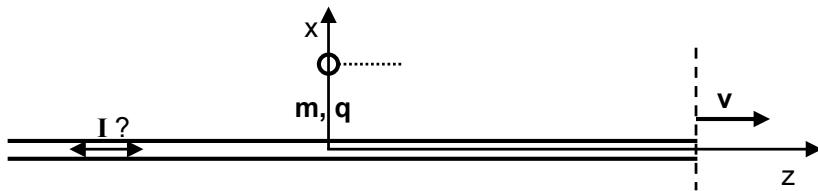
6.6 Questions théoriques

1. Démontrez l'expression de la pulsation d'oscillation naturelle ω_0 d'une masse m soumise à une force de rappel élastique, de constante κ .
2. Donnez l'équation de l'oscillateur harmonique et sa solution générale.
3. Donnez la relation qui lie la pulsation ω à la période T d'un mouvement harmonique.
4. Établissez la relation qui lie le « décalage temporel » δt du mouvement harmonique et le « déphasage » ϕ de ce mouvement.
5. Établissez l'expression de l'énergie potentielle (mécanique) harmonique correspondant à une force de rappel élastique, de constante κ .
6. Grâce au développement de Mac Laurin tronqué au deuxième ordre, établissez le lien entre la courbure du potentiel mécanique d'un oscillateur (dérivée seconde $E''_P(x = 0)$) et la constante de rappel effective κ de cet oscillateur décrit dans l'approximation des petits mouvements.
7. Établissez l'expression de la pulsation ω_0 d'un pendule de longueur L et de masse m telle que calculée dans l'approximation des petits angles.

6.7 Exercices

Exercice 6.1

Le schéma de la figure E.6.1 montre un fil conducteur véhiculant un courant continu I de 12 A. Ce fil est mis en mouvement rectiligne uniforme à la vitesse v de 4 m/s, dans la direction de son axe (z). Une particule de masse $m = 20 \text{ mg}$ portant une charge électrique positive q de 0,25 C est libre de se mouvoir le long de l'axe x situé à la verticale du fil (x est la distance de la particule au fil, on supposera que la particule est ponctuelle et que le fil est infiniment mince et long). On suppose que les sources sont attachées au fil conducteur, de sorte que \vec{J} est invariant dans le repère du fil.



- Déterminez le sens du courant I qu'il faut adopter (par rapport à l'orientation de l'axe z) pour que la particule soit repoussée par le fil. I dirigé vers les z positifs.
- Calculez la distance $x = x_0$ à laquelle la particule trouve sa position d'équilibre (on considérera que l'accélération de la gravitation terrestre g vaut 10 m/s^2). $x_0 \approx 1,2 \text{ cm}$
- Calculez la fréquence f des oscillations que la particule effectue autour de sa position d'équilibre suite à une modification momentanée et légère de sa distance au fil x . $f \approx 4,6 \text{ Hz}$

Exercice 6.2

Les schémas de la figure E.6.2 montrent en perspective et en coupe un aimant cylindrique à section circulaire muni d'un entrefer dans lequel est disposé une masse ponctuelle m de 3 g portant une charge électrique q de 1,5 mC. La masse est libre de se mouvoir sans frottement le long d'une tige verticale (en pointillés sur le schéma) passant par le centre de l'entrefer où règne un champ magnétique uniforme \vec{B} de 2,3 T. L'aimant tourne à la vitesse angulaire ω de 170π radians par seconde autour d'un axe horizontal passant par le centre de sa base circulaire. La position de la charge est repérée par la distance x qui la sépare du centre de l'entrefer.

- Calculez la distance x_0 (par rapport au centre de l'entrefer) à laquelle la charge adoptera sa position d'équilibre sous l'effet des forces gravitationnelle F_G et électromagnétique F_{EM} . $x_0 = 1,6 \text{ cm}$
- Calculez la fréquence f du mouvement oscillatoire que la masse effectue lorsqu'elle est relâchée brusquement après avoir

FIGURE E.6.1 :

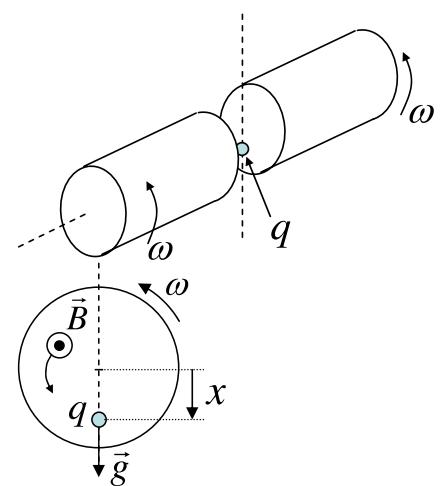


FIGURE E.6.2

été éloignée de sa position d'équilibre (on négligera tout effet de radiation de la charge). $f = 3,9 \text{ Hz}$

Exercice 6.3

Considérons une masse m plongée dans le potentiel $E_p(x) = -\cos(kx)$. En considérant la limite des petits mouvements, donnez la fréquence d'oscillation f de cette masse autour de l'origine $x = 0$.

Exercice 6.4

Démontrez que, à petite amplitude, le mouvement d'un pendule est harmonique.

Exercice 6.5

Une masse ponctuelle m se trouve plongée dans le potentiel $E_p(x) = a(e^{bx} + e^{-bx})$ où x est la position de la masse (mouvement à une dimension). Dans l'approximation des petits mouvements, calculez la fréquence d'oscillation de la masse dans ce potentiel autour de l'origine $x = 0$.

Exercice 6.6

Le schéma de la figure E.6.3 montre un cylindre muni d'un piston de masse m libre de se mouvoir sans frottement. Le cylindre contient initialement de l'air à la pression atmosphérique environnante P_a . Si le piston est déplacé de sa position d'équilibre et ensuite relâché brusquement, il se met à vibrer. Sachant que le cylindre a une hauteur h_0 lorsque le piston est en équilibre avec l'atmosphère environnante, calculez la pulsation ω_0 des vibrations du piston.

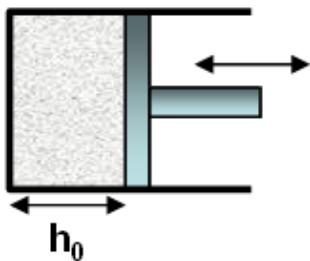


FIGURE E.6.3 :

Exercice 6.7

Le schéma de la figure E.6.4 montre un bathyscaphe de forme cylindrique flottant à la surface de l'eau en position verticale d'équilibre. Son diamètre est $D = 15 \text{ cm}$, son hauteur est $H = 60 \text{ cm}$ et sa masse est $m = 9 \text{ kg}$.

En négligeant les frottements de l'eau et sachant que la masse volumique de l'eau est $\rho = 1 \text{ g cm}^{-3}$, calculez la fréquence f des oscillations apparaissant sur la hauteur émergée z du bathyscaphe lorsque ce dernier est légèrement éloigné de sa position de repos ($z = z_0$) et ensuite relâché. (Réponse : $f = 0.7 \text{ Hz}$)

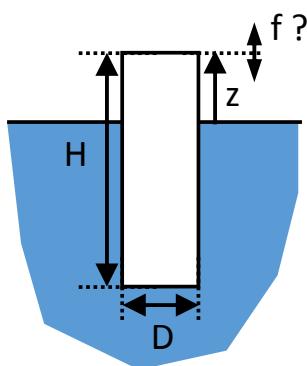


FIGURE E.6.4 :

Récapitulatif des notions vues dans cette leçon

Indispensable	Nécessaire	Intéressant
<ul style="list-style-type: none"> — Pulsion propre — Forme canonique de l'oscillateur harmonique — Forme canonique de l'oscillateur linéaire amorti — Notion d'amplitude — Notion de phase — Notion d'amortissement — Notion de phaseur 	<ul style="list-style-type: none"> — Lien entre énergie potentielle et mouvement — Mouvement d'une masse accrochée à un ressort — Notion de déphasage — Bilan des forces d'un pendule 	<ul style="list-style-type: none"> — Notion d'anharmonicité — Représentation d'une molécule — Énergie magnétique et électrique dans un circuit oscillant

Oscillateur linéaire amorti forcé

■ Pré-requis pour cette leçon ■

- *nombre complexe*;
- *OLAF oscillateur harmonique*;
- *OLA oscillateur linéaire amorti*;
- *phaseur*;
- *équation différentielle*
- *ordinaire (EDO) linéaire à coefficients constants*;
- *résistance*;
- *réactance*;
- *inductance*;
- *condensateur*;
- *inducteur*.

GRÂCE À LA NOTION DE PHASEUR, nous sommes maintenant à même de traiter le problème de l'*OLAF*.

7.1 L'Oscillateur linéaire amorti forcé

On a vu plus haut à la section 6.3 que la force totale exercée sur la masse de cet oscillateur est donnée par la somme de la force de rappel élastique, de la force de frottement visqueux et de la force extérieure (que l'on suppose harmonique pour simplifier les développements),

$$f = -\kappa x - \lambda \dot{x} + F \cos(\omega t). \quad (7.1)$$

L'équation du mouvement de l'*OLAF* est donnée par la seconde loi de Newton

$$\ddot{x} = \frac{f}{m} \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{\kappa}{m}x - \frac{\lambda}{m}\dot{x} + \frac{F}{m} \cos(\omega t). \quad (7.2)$$

En mettant tous les termes dans le membre de gauche et en introduisant les paramètres de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\kappa/m}$, d'amortissement $\alpha = \frac{\lambda}{2m}$, et de force extérieure $a = F/m$, on obtient l'équation sous sa forme canonique. Il est essentiel d'avoir à l'esprit que la pulsation ω de la force extérieure n'est pas nécessairement égale à la pulsation propre ω_0 de l'oscillateur. La force extérieure impose sa pulsation à l'oscillateur et celle-ci n'a aucune raison d'être choisie égale à la pulsation propre de l'oscillateur,

$$\ddot{x} + \frac{\lambda}{m}\dot{x} + \frac{\kappa}{m}x - \frac{F}{m} \cos(\omega t) = 0, \quad (7.3)$$

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2x - a \cos(\omega t) = 0. \quad (7.4)$$



L07P1

L07P2



7.1.1 Solution harmonique, équation du phaseur

Nous allons maintenant nous servir de la représentation complexe pour calculer les solutions harmoniques de l'équation de l'*OLAF*. Pour cela, nous introduisons le phaseur de x avec la fréquence angulaire ω de la force extérieure,

$$x = \operatorname{Re} [\underline{X} e^{i\omega t}]. \quad (7.5)$$

Ce choix de fréquence s'impose pour un système linéaire. Si une autre fréquence est choisie, on obtiendra comme seule réponse une onde d'amplitude nulle.

Dans la représentation complexe, la dérivée par rapport au temps de la position x devient la dérivée de la partie réelle de $\underline{X} \exp(i\omega t)$, soit $\operatorname{Re}[i\omega \underline{X} \exp(i\omega t)]$. En faisant de même pour la dérivée seconde et en écrivant le terme de force extérieure $a \cos(\omega t)$ comme étant la partie réelle de $a \exp(i\omega t)$, on peut facilement transformer l'équation du mouvement de l'*OLAF* en termes de phaseur. Les différents termes sont

$$\dot{x} = \operatorname{Re} [i\omega \underline{X} e^{i\omega t}], \quad (7.6)$$

$$\ddot{x} = \operatorname{Re} [-\omega^2 \underline{X} e^{i\omega t}], \quad (7.7)$$

$$a \cos(\omega t) = \operatorname{Re} [ae^{i\omega t}]. \quad (7.8)$$

Après substitution de ces expressions dans l'équation du mouvement (7.4) et après avoir exprimé que la somme des parties réelles est égale à la partie réelle de la somme, on obtient l'égalité

$$\operatorname{Re} [-\omega^2 \underline{X} e^{i\omega t} + 2\alpha i\omega \underline{X} e^{i\omega t} + \omega_0^2 \underline{X} e^{i\omega t} - ae^{i\omega t}] = 0. \quad (7.9)$$

Pour obtenir l'équation du phaseur du problème, il suffit de mettre $\exp(i\omega t)$ en évidence et de considérer que comme l'égalité doit être valable pour toute valeur de t , il est nécessaire que l'expression entre crochets s'annule (voir section 6.4.3), ce qui fournit l'équation du phaseur de l'*OLAF*,

$$\omega^2 \underline{X} + 2\alpha i\omega \underline{X} + \omega_0^2 \underline{X} - a = 0. \quad (7.10)$$

Remarque Notez que cette équation algébrique pouvait être obtenue directement à partir de l'équation différentielle

$$\ddot{x} + 2\alpha \dot{x} + \omega_0^2 x - a \cos(\omega t) = 0 \quad (7.11)$$

en remplaçant simplement x par le phaseur \underline{X} et la dérivée temporelle par $i\omega$, selon

$$\left[x \rightarrow \underline{X}, \frac{d}{dt} \rightarrow i\omega \right], \quad (7.12)$$

et, bien entendu, en remplaçant aussi le terme de forçage $a \cos(\omega t)$ par son phaseur a .

7.1.2 Résonance

Grâce à la notion de phaseur nous avons transformé l'équation différentielle du mouvement en une équation algébrique dont la solution est extrêmement simple à calculer. Cette équation est réécrite ci-dessous. Elle va nous permettre d'étudier l'*OLAF* et, en particulier, de décrire le phénomène de résonance qui y est associé,

$$-\omega^2 \underline{X} + 2\alpha i\omega \underline{X} + \omega_0^2 \underline{X} - a = 0. \quad (7.13)$$

Solution générale La solution de l'équation du phaseur \underline{X} est

$$\underline{X} = \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\alpha i\omega}, \quad x(t) = \text{Re} [\underline{X} e^{i\omega t}]. \quad (7.14)$$

Elle est représentée à la figure 7.1.

Comme on l'a mentionné plus haut, le phaseur \underline{X} caractérise entièrement le mouvement harmonique $x(t)$ au travers de la relation $x(t) = \text{Re}[\underline{X} \exp(i\omega t)]$. En particulier, son module donne l'amplitude du mouvement. Ainsi, sur base de l'expression de \underline{X} ci-dessus, on peut facilement voir que l'amplitude du mouvement dépend de la pulsation ω de la force extérieure.

Excitation dans la limite statique Analysons tout d'abord ce qui se produit lorsque la pulsation de la force extérieure s'annule, soit $\omega = 0$. Cette situation particulière correspond à une force extérieure constante conduisant à une déformation statique du ressort ($v = 0$). Dans ce cas, le ressort de l'oscillateur est étendu jusqu'à une position d'équilibre correspondant à l'égalité entre cette force extérieure F et la force de rappel $f_r = -\kappa x$ (voir le schéma de la figure 7.2). La valeur de x correspondante est donc donnée par l'équilibre entre ces forces, soit $F - \kappa x = 0$, ce qui donne $x = F/\kappa$. Si la théorie du phaseur que nous avons développée ci-dessus est exacte, cette coordonnée de la position de repos doit correspondre au module du phaseur \underline{X} lorsque $\omega = 0$ (autrement dit, c'est l'amplitude du mouvement à fréquence nulle). Ceci est très facile à vérifier sur l'expression de \underline{X} ci-dessus. Il suffit, en effet, d'y remplacer le dénominateur a par sa valeur F/m et ω_0 par $\sqrt{\kappa/m}$, ce qui donne $\underline{X} = \underline{X}_S = F/\kappa$ (où l'indice S a été introduit pour désigner la solution « statique » ou « stationnaire » du problème), comme illustré à la figure 7.1 sur le graphe donnant le module du phaseur $|\underline{X}|$ en fonction de la pulsation ω . On voit qu'en $\omega = 0$, le module du phaseur à fréquence nulle \underline{X}_S vaut F/κ (notez que c'est un cas particulier pour lequel le phaseur est réel et est donc égal à son module).

Excitation proche de la fréquence propre Voyons maintenant ce qui se produit quand ω tend vers la pulsation propre de l'oscillateur ω_0 ,

$$\underline{X} = \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\alpha i\omega}. \quad (7.15)$$

FIGURE 7.1 : Variation du module du phaseur en fonction de la fréquence ω de l'excitation externe.

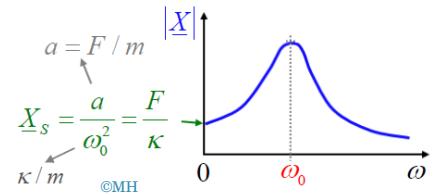
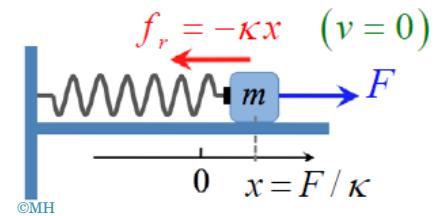
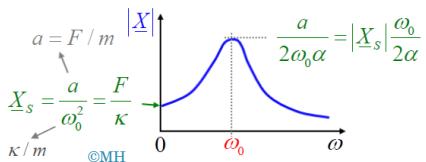


FIGURE 7.2 : Analyse du forçage dans la limite statique $\omega = 2\pi v = 0$.



Quand $\omega = \omega_0$ le dénominateur dans l'expression de \underline{X} a une partie réelle nulle et on trouve $\underline{X} = -i \frac{a}{2\alpha\omega_0}$. Le module du phasor donne l'amplitude du mouvement, celle-ci vaut donc $|\underline{X}| = \frac{a}{2\alpha\omega_0}$. En multipliant cette expression en haut et en bas par ω_0 , on y retrouve l'expression de l'amplitude stationnaire $|\underline{X}_s| = a/\omega_0^2 = F/\kappa$, ce qui nous permet d'écrire $|\underline{X}| = |\underline{X}_s| \frac{\omega_0}{2\alpha}$. Dans le cas d'un amortissement faible, c'est-à-dire quand $\alpha \ll \omega_0$, on voit que l'amplitude à la pulsation propre ω_0 est beaucoup plus grande que l'amplitude à pulsation nulle (cas stationnaire). On peut en conclure qu'en passant de la pulsation nulle à la pulsation propre de l'oscillateur, le mouvement subit une amplification. Pour voir ce qui se passe au-delà de la pulsation propre, il suffit de faire tendre ω vers l'infini. On voit alors tout de suite que l'amplitude du mouvement diminue et tend vers zéro. Ce phénomène d'amplification de l'amplitude du mouvement de l'oscillateur autour de sa fréquence propre s'appelle le phénomène de « *résonance* », il est illustré sur le graphe de la figure 7.3.

FIGURE 7.3 : Variation de l'amplitude du mouvement à proximité de la résonance.



Amortissement faible

Pour étudier plus en détail le phénomène de résonance, nous allons introduire une approximation dans les calculs. Cette approximation est basée sur l'hypothèse de faible amortissement, c'est-à-dire qu'elle se base sur l'inégalité

$$\alpha \ll \omega_0. \quad (7.16)$$

Dans cette situation nous verrons que la résonance est très étroite, ce qui nous permet de la décrire uniquement pour des valeurs de pulsation très proches de la pulsation propre de l'oscillateur. Pour simplifier les notations, nous allons décrire la résonance en termes de l'écart $\delta\omega$ entre la pulsation ω et la pulsation propre ω_0 , soit $\delta\omega = \omega - \omega_0$. Nous ferons donc le changement de variable

$$\omega = \omega_0 + \delta\omega, \quad \delta\omega \ll \omega_0, \quad (7.17)$$

dans l'expression du phasor \underline{X} de sorte que, en faisant varier $\delta\omega$ autour de zéro, on décrive toute la résonance. Si celle-ci est étroite on peut se contenter de petites valeurs de $\delta\omega$; nous allons donc considérer dans la suite l'inégalité $\delta\omega \ll \omega_0$ de façon à appliquer une approximation du premier ordre en $\delta\omega/\omega_0$, ce qui veut dire qu'on négligera les puissances de $\delta\omega/\omega_0$ supérieures à l'unité.

Développement proche de la fréquence de résonance On peut donc étudier la résonance en analysant les valeurs de l'amplitude du mouvement $|\underline{X}|$ en fonction de $\delta\omega$ en appliquant l'approximation du premier ordre en $\delta\omega/\omega_0$ et en α/ω_0 en vertu de l'hypothèse d'amortissement faible $\alpha \ll \omega_0$.

Puisque le carré de la pulsation intervient dans l'expression du phasor de l'*OLAF*, nous commençons ci-dessous par calculer ω^2 en fonction de $\delta\omega$. Comme $\delta\omega \ll \omega_0$, on peut négliger le terme du

deuxième degré en $\delta\omega$ et ne conserver que le terme du premier degré. Sur cette base, le développement simple qui suit montre que le dénominateur du phasor \underline{X} vaut $-2\omega_0\delta\omega + 2i\alpha\omega = -2\omega_0\delta\omega + 2i\alpha(\omega_0 + \delta\omega)$,

$$\underline{X} = \frac{a}{\underbrace{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\alpha i\omega}_{\omega_0^2 - \omega^2 = -2\omega_0\delta\omega}} \quad \begin{aligned} \omega^2 &= \omega_0^2 + 2\omega_0\delta\omega + \cancel{\delta\omega^2} \\ \omega_0^2 - \omega^2 &= -2\omega_0\delta\omega. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Dans le dénominateur du phasor on peut également négliger le produit $\alpha\delta\omega$ qui est très petit puisqu'à la fois α et $\delta\omega$ sont petits devant ω_0 (le produit $\alpha\delta\omega$ est en fait du même ordre de grandeur que $\delta\omega^2$ que l'on a négligé ci-dessus),

$$\begin{aligned} \omega_0^2 - \omega^2 + 2\alpha i\omega &= -2\omega_0\delta\omega + 2\alpha i\omega_0 + \cancel{2\alpha i\delta\omega} \\ &= -2\omega_0(\delta\omega - i\alpha). \end{aligned} \quad (7.19)$$

Solution proche de la résonance Le phasor de l'*OLAF* est donc donné en première approximation par l'expression remarquablement simple,

$$\underline{X} = -\frac{a}{2\omega_0} \frac{1}{\delta\omega - i\alpha}. \quad (7.20)$$

Les trois expressions qui suivent résument la démarche suivie. La solution harmonique de l'équation du mouvement de l'*OLAF* a été calculée de façon algébrique grâce à l'introduction du concept de phasor. Le phasor résultant a été exprimé dans une approximation basée sur l'hypothèse de l'amortissement faible. La valeur de l'amplitude réelle du mouvement $x(t)$ peut être retrouvée à partir de la définition du phasor $x(t) = \text{Re}[\underline{X}e^{i\omega t}]$,

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{\kappa}{m}x - \frac{\lambda}{m}\dot{x} + \frac{F}{m}\cos(\omega t), \\ \underline{X} &= -\frac{a}{2\omega_0} \frac{1}{\delta\omega - i\alpha}, \quad x(t) = \text{Re}[\underline{X}e^{i\omega t}]. \end{aligned}$$

Analyse de la solution Le mouvement harmonique réel de l'*OLAF* est entièrement caractérisé par son phasor : l'amplitude du mouvement est donnée par le module du phasor et son déphasage est donné par l'argument du phasor, comme l'indique l'expression de $x(t)$,

$$\underline{X} = |\underline{X}| e^{i\varphi}, \quad x(t) = |\underline{X}| \cos(\omega t + \varphi). \quad (7.21)$$

Le module et l'argument du phasor sont ici très simples à calculer, ils sont donnés à l'équation (7.22). L'interprétation physique de l'argument φ est simple, il représente le déphasage (ou le décalage temporel) entre la force extérieure $F \cos(\omega t)$ et le mouvement qu'elle engendre $x(t) = |\underline{X}| \cos(\omega t + \varphi)$,

$$|\underline{X}| = \frac{a}{2\omega_0} \frac{1}{\sqrt{\delta\omega^2 + \alpha^2}}, \quad \varphi = \arctan\left(\frac{\alpha}{\delta\omega}\right). \quad (7.22)$$

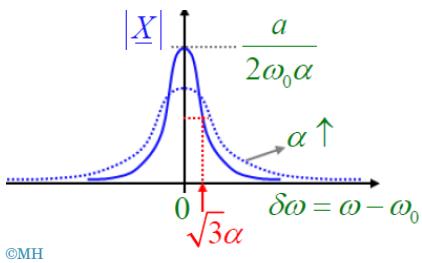
L'expression du déphasage φ montre que celui-ci vaut $\pi/2$ lorsque l'on est à la résonance $\delta\omega = 0$, c'est-à-dire, quand il y a égalité entre la pulsation de la force extérieure ω et la pulsation propre ω_0 de l'oscillateur. Le mouvement de l'*OLAF* est alors décrit par la fonction sinus, soit $x(t) = |\underline{X}| \cos(\omega t + \pi/2) = -|\underline{X}| \sin(\omega t)$. On dit dans cette situation qu'il y a une « *quadrature de phase* » entre la position de l'oscillateur $x(t)$ et la force extérieure $F \cos(\omega t)$.

Le module du phaseur est représenté sur le graphique de la figure 7.4, en fonction de l'écart par rapport à la résonance $\delta\omega$. On peut facilement vérifier dans l'expression mathématique du phaseur que l'amplitude à la résonance $\delta\omega = 0$ vaut

$$|\underline{X}|_{\max} = \frac{a}{2\omega_0\alpha}, \quad (7.23)$$

ce qui est identique à l'expression exacte calculée plus haut avant l'introduction de l'approximation.

FIGURE 7.4 : Module du phaseur en fonction de l'écart $\delta\omega$ par rapport à la résonance, tel que donné en (7.22).



©MH

Largeur de résonance

Il est intéressant de voir comment la largeur de la résonance varie avec le coefficient d'amortissement α . Pour cela, calculons la valeur de $\delta\omega$ à laquelle l'amplitude du mouvement harmonique vaut la moitié de l'amplitude maximale de la résonance dont l'expression est $|\underline{X}|_{\max} = \frac{a}{2\omega_0\alpha}$.

Si on appelle $\delta\omega^*$ cette valeur particulière de $\delta\omega$ on a, par définition,

$$|\underline{X}(\delta\omega^*)| \equiv \frac{|\underline{X}|_{\max}}{2}. \quad (7.24)$$

En substituant, l'expression approchée du phaseur dans cette dernière relation, on obtient

$$\frac{a}{2\omega_0} \frac{1}{\sqrt{\delta\omega^{*2} + \alpha^2}} = \frac{a}{4\omega_0\alpha}. \quad (7.25)$$

On voit que pour avoir égalité, il faut que la racine de $\delta\omega^{*2} + \alpha^2$ soit égale à 2α , ce qui conduit immédiatement à l'expression de $\delta\omega^*$ en fonction du coefficient d'amortissement,

$$\delta\omega^* = \sqrt{3}\alpha. \quad (7.26)$$

Ce résultat montre que la largeur de la résonance est simplement proportionnelle au coefficient d'amortissement α . Plus l'amortissement est faible, plus la résonance est étroite (cette dépendance en l'amortissement est illustrée avec la ligne bleue pointillée sur le graphe de la figure 7.4). Il est intéressant de noter que ce résultat valide l'approximation du premier ordre en $\delta\omega$ utilisée pour l'étude de la résonance à amortissement faible.

Remarque Lorsque la résonance s'affine en raison d'une diminution de l'amortissement, l'amplitude maximale d'oscillation augmente [cette augmentation est inversement proportionnelle à l'amortissement car $|\underline{X}|_{\max} = \frac{a}{2\omega_0\alpha}$]. Ce résultat montre que l'amortissement joue un rôle déterminant dans le phénomène de résonance.

En particulier, quand l'amortissement tend vers zéro, l'amplitude d'oscillation devient illimitée et ceci indépendamment de l'amplitude de la force extérieure appliquée. Ce cas de résonance aiguë peut en pratique conduire à des catastrophes.

Application pratique

Le phénomène de résonance en pratique

Le phénomène de résonance (schématisé à la figure 7.5 par le graphe de l'amplitude en fonction de l'écart à la résonance) est un phénomène très commun. Par exemple, c'est ce phénomène que l'on exploite pour faire de la balançoire (cf. figure 7.6). La théorie que nous venons de voir à ce sujet nous apprend que pour atteindre de grandes amplitudes de mouvement, la force extérieure appliquée à la balançoire doit avoir une pulsation proche de la pulsation propre de la balançoire. Si ce n'est pas le cas, on reste dans les *ailes* de la résonance (zones latérales éloignées du maximum) et l'amplitude reste petite. Cet effet de dépendance en la pulsation de la force extérieure est d'autant plus critique que l'amortissement est faible puisque l'amplitude de la résonance augmente lorsque l'amortissement diminue (la largeur de résonance dans ce cas diminue).

Exemple du ballon de basketball L'exemple du ballon de basket, à la figure 7.7, illustre la généralité des résultats obtenus pour l'*OLAF* idéal. Le ballon qui rebondit peut être vu comme un oscillateur (non harmonique). Le mouvement du ballon est entretenu par la main qui imprime sur le ballon la force extérieure périodique. Si la main ne bougeait pas avec la pulsation propre du système, le ballon ne pourrait pas maintenir de grandes amplitudes de mouvement.

Exemple de la balançoire La situation de la balançoire est la même. Les jeunes enfants qui n'ont pas la coordination suffisante pour imprimer à la balançoire une force périodique à sa pulsation propre, n'arrivent pas à atteindre une amplitude de mouvement satisfaisante. Notez que dans le cas de la balançoire, les termes *force extérieure* ne sont pas vraiment adéquats vu que cette force est provoquée par le déplacement du poids du corps qui fait partie du pendule.

Exemple du bol chantant Comme nous l'avons vu, le phénomène de résonance est associé à une amplification des effets de la force extérieure sur le système. En effet, nous avons vu plus haut que, à amplitudes de force égales, le rapport entre l'amplitude du mouvement à la pulsation propre et l'amplitude du déplacement en régime statique (à pulsation nulle) est égal à $\frac{\omega_0}{2\alpha}$ (voir schéma en bas de la section 7.3). Pour des amortissements faibles, ce rapport peut

FIGURE 7.5 : Distribution des amplitudes au voisinage d'une résonance. La largeur du pic est proportionnelle au facteur α , et sa hauteur inversement proportionnelle.

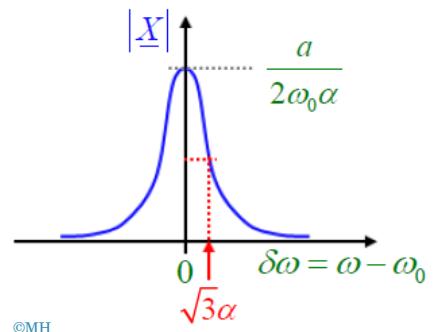


FIGURE 7.6 : Exemple d'*OLAF* : la balançoire.



FIGURE 7.7 : Exemple d'*OLAF* : le ballon de basket.



FIGURE 7.8 : Exemple d'*OLAF* : le bol chantant.



devenir énorme. Dans ce cas, une toute petite force extérieure suffit à créer de très grandes amplitudes de mouvement. C'est comme cela, par exemple, que l'on arrive à générer des sons en frottant simplement le bord d'un bol avec une mailloche , comme l'illustre la photo de la figure 7.8. Si les micro-rebonds de la mailloche sur le bord du bol ont une pulsation très proche de la pulsation propre de vibration du bol (le bol peut en effet être vu comme un corps élastique possédant une certaine masse à l'image du ressort et de la masse d'un oscillateur harmonique, il possède donc une pulsation de vibration propre), la paroi du bol se met à vibrer à grande amplitude et génère ainsi des ondes acoustiques facilement audibles.

Exemple des réalisations architecturales L'oscillation naturelle des bâtiments sujets à des coups de vent est un exemple de phénomène de résonance à basse fréquence. Le bâtiment peut être vu comme un objet élastique possédant une certaine masse et il est donc comparable à un oscillateur harmonique. Si le vent souffle en rafale à une fréquence comparable à la fréquence propre du bâtiment, l'amplitude de mouvement du bâtiment peut atteindre des valeurs dangereuses (jusqu'à plusieurs mètres). Ce problème est bien réel pour les bâtiments de très grande hauteur. Pour éviter des grandes amplitudes d'oscillations, certains grands bâtiments sont munis d'un système de contrôle de la résonance. Ce système consiste en une masse de béton posée sur des rails dans le haut du bâtiment et dont le mouvement est contrôlé par des vérins hydrauliques. L'idée est de bouger la masse de béton de façon à ce que la force d'inertie résultante provoque une poussée opposée à la force du vent.

Remarque Notez que pour que ce phénomène ait lieu, il n'est en pratique pas nécessaire que le vent souffle en rafale à la période de résonance du bâtiment ou du pont, car ce sont les mouvements de la structure elle-même qui provoquent les fluctuations du vent dans les zones proches de celle-ci. Et comme les mouvements se font naturellement à la fréquence de résonance, le vent à proximité de la structure présente également des variations à cette fréquence. Il s'agit donc en réalité d'une résonance auto-générée dont l'étude rigoureuse dépasse le cadre de ce cours.



L07P4



■ Exemple

7.1.3 Le circuit RLC

Le circuit RLC alimenté par une source de tension alternative est un exemple idéal d'*OLAF* car tous les termes de l'équation canonique de l'*OLAF* correspondent très fidèlement à la physique en

jeu dans ce circuit. En particulier, le terme de force extérieure harmonique est fourni par la source de tension alternative qui a en général une variation très proche de la variation harmonique idéale considérée dans la théorie ci-dessus. De même, le terme d'amortissement de type frottement visqueux est fourni très rigoureusement par la résistance du circuit.

Équation du circuit

Pour obtenir l'équation du circuit, on procède comme d'habitude en exprimant les différences de potentiel aux bornes de chaque élément,

$$V_C = \frac{Q}{C}, \quad (7.27)$$

$$V_R = RI, \quad (7.28)$$

$$V_L = L \frac{dI}{dt}, \quad (7.29)$$

$$V = V_m \sin(\omega t). \quad (7.30)$$

Comme il y a une source de tension V , il faut exprimer que cette tension équilibre exactement la somme des tensions des tous les éléments du circuit, soit

$$V = V_C + V_R + V_L. \quad (7.31)$$

Remarquez que l'on prend une fonction sinus pour la variation de tension de la source et non une fonction cosinus (ce choix est fait pour la commodité du calcul et n'a aucune incidence sur le résultat auquel on aboutira). On obtient

$$V_m \sin(\omega t) = \frac{Q}{C} + RI + L \frac{dI}{dt}. \quad (7.32)$$

Pour éliminer la charge Q et la remplacer par le courant I , on dérive cette relation par rapport au temps,

$$V_m \omega \cos(\omega t) = \frac{I}{C} + R \frac{dI}{dt} + L \frac{d^2I}{dt^2}. \quad (7.33)$$

On divise ensuite par L à gauche et à droite et on introduit les paramètres usuels de l'équation de l'*OLAF*,

$$V_m \frac{\omega}{L} \cos(\omega t) = \frac{1}{LC} I + \frac{R}{L} \dot{I} + \ddot{I} \quad (7.34)$$

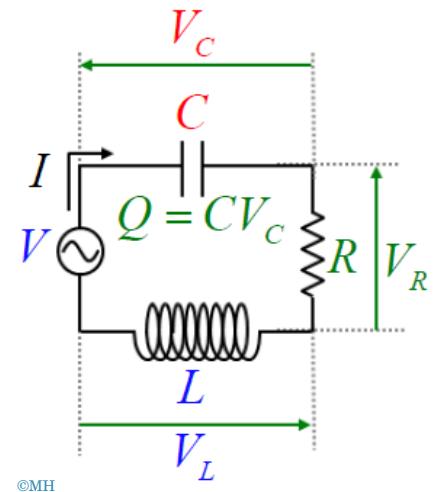
$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad \alpha = \frac{R}{2L}, \quad a = V_m \frac{\omega}{L}. \quad (7.35)$$

On arrive ainsi à la forme canonique de l'équation de l'*OLAF* (6.83),

$$\ddot{I} + 2\alpha \dot{I} + \omega_0^2 I = a \cos(\omega t) \quad (\text{OLAF}), \quad (7.36)$$

et on conclut que le circuit RLC alimenté par une tension alternative est un *OLAF*. Il s'agit donc d'un dispositif soumis au phénomène de résonance. Pour étudier la résonance du circuit, nous

FIGURE 7.9 : Circuit RLC, constituant un *OLAF*.



©MH

n'allons pas nous baser sur cette équation mais nous allons plutôt formuler directement l'équation du circuit en termes de phasateurs. Ceci nous conduira à la notion d'impédance qui est centrale en théorie de l'électricité.

7.1.4 Phaseurs et impédances

L'introduction des *phaseurs* de courant et de tension permet une analyse extrêmement simple du circuit basée sur l'expression des lois courant-tension de chaque élément du circuit en termes de phaseur. Nous allons commencer ici par traiter en détail la loi courant-tension du condensateur. Comme $I = \frac{dQ}{dt}$ et que $Q = CV_C$, on trouve directement la loi courant-tension

$$I = C \frac{dV_C}{dt}. \quad (7.37)$$

Si on exprime le courant et la tension en fonction de leur phaseur, on obtient

$$I = \operatorname{Re} [\underline{I} e^{i\omega t}] = C \frac{d}{dt} \operatorname{Re} [\underline{V}_C e^{i\omega t}] = C \operatorname{Re} [i\omega \underline{V}_C e^{i\omega t}]. \quad (7.38)$$

En regroupant les termes dans le membre de gauche et en utilisant le fait que la somme des parties réelles est la partie réelle de la somme, on obtient

$$\operatorname{Re} [\underline{I} e^{i\omega t} - i\omega C \underline{V}_C e^{i\omega t}] = 0 \quad (7.39)$$

Comme cette relation doit être vérifiée pour tout temps t , on sait que le facteur multiplicatif de l'exponentielle dans les crochets doit être nul, ce qui nous mène à l'égalité $\underline{I} = i\omega C \underline{V}_C$ (voir la section 6.4.3). Cette expression mathématique constitue la loi courant-tension du condensateur exprimée en phaseurs. Il faut attirer votre attention sur le fait que cette équation algébrique aurait pu être obtenue directement en remplaçant la dérivée temporelle par $i\omega$ dans la loi courant-tension du condensateur exprimée en grandeurs réelles

$$I = C \frac{dV_C}{dt} : \frac{d}{dt} \rightarrow i\omega \Rightarrow \underline{I} = i\omega C \underline{V}_C. \quad (7.40)$$

Traitements des termes différentiels Pour faire l'analyse du circuit complet représenté à la figure 7.10 nous devons traduire les lois courant-tension de tous les éléments du circuit. Le cas du condensateur nous a montré qu'il suffisait de remplacer la dérivée temporelle par $i\omega$ pour passer de la loi réelle différentielle à la loi algébrique des phasateurs. Nous allons ici adopter cette procédure directement aux lois courant-tension des autres éléments du circuit. Pour la résistance, la loi d'Ohm en termes de phaseur garde la même structure que la loi réelle puisqu'elle ne comporte

pas de dérivée. Par contre, la loi de l'inducteur devient simplement $\underline{V}_L = i\omega L \underline{I}$.

$$\begin{cases} I = C \frac{dV_C}{dt} \\ V_R = RI \\ V_L = L \frac{dI}{dt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{I} = i\omega C \underline{V}_C \Rightarrow \underline{V}_C = \frac{1}{i\omega C} \underline{I} \\ \underline{V}_R = R \underline{I} \\ \underline{V}_L = i\omega L \underline{I} \end{cases} \quad (7.41)$$

La relation d'équilibre des tensions dans la maille du circuit conserve la même forme puisqu'aucune dérivée n'y intervient. On a

$$V = V_C + V_R + V_L \Rightarrow \underline{V} = \underline{V}_C + \underline{V}_R + \underline{V}_L. \quad (7.42)$$

Dans cette dernière relation, il suffit de substituer les phaseurs de tension par leur expression en termes du phaseur de courant telle que donnée par les trois lois courant-tension trouvées ci-dessus. Cela conduit à

$$\underline{V} = \frac{1}{i\omega C} \underline{I} + R \underline{I} + i\omega L \underline{I}. \quad (7.43)$$

Réactance, capacitance et inductance Pour simplifier les notations, on introduit les réactances du condensateur et de l'inducteur. Les lois courant-tension prennent alors une forme analogue à la loi d'Ohm mais avec une nuance de première importance : les coefficients de proportionnalité entre courants et tensions sont complexes (c'est d'ailleurs pourquoi on parle de réactance et non de résistance). On a

$$\begin{cases} X_C = \frac{1}{\omega C} \\ X_L = \omega L \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{V}_C = -iX_C \underline{I} \\ \underline{V}_L = iX_L \underline{I} \end{cases}. \quad (7.44)$$

Remarque Notez que le facteur imaginaire « i » apparaissant dans la loi de l'inducteur peut être écrit $\exp(i\pi/2)$, ce qui montre que le phaseur tension dans l'inducteur a une phase supérieure de $\pi/2$ à celle du courant. En effet, la tension de l'inducteur

$$\underline{V}_L(t) = \text{Re}[\underline{V}_L \exp(i\omega t)], \quad (7.45)$$

peut être écrite

$$\underline{V}_L(t) = \text{Re}[X_L \underline{I} \exp(i\omega t + i\pi/2)], \quad (7.46)$$

soit encore, en faisant apparaître l'amplitude I_m et la phase φ_I du courant, $\underline{V}_L(t) = \text{Re}[X_L I_m \exp(i\omega t + i\varphi_I + i\pi/2)]$. Le calcul de la partie réelle donne $\underline{V}_L(t) = X_L I_m \cos(\omega t + \varphi_I + \pi/2)$ alors que l'expression du courant est $\underline{I}(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_I)$.

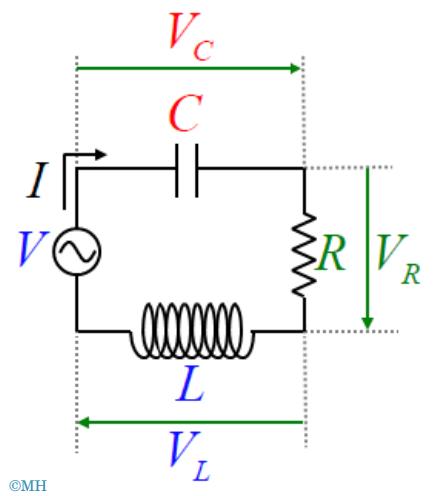
Revenons à la relation d'équilibre des tensions. Avec l'introduction des réactances, celle-ci prend la forme

$$\underline{V} = -iX_C \underline{I} + R \underline{I} + iX_L \underline{I}, \quad (7.47)$$

$$\underline{V} = \underbrace{[R + i(X_L - X_C)] \underline{I}}_{\text{impédance } Z}, \quad (7.48)$$

$$\underline{V} = Z \underline{I}. \quad (7.49)$$

FIGURE 7.10 : Circuit RLC, constituant un OLAF.



En mettant le courant en évidence, on voit apparaître une simple relation de proportionnalité entre la tension appliquée au circuit et le courant qui y circule. À nouveau, on retrouve la structure de la loi d'Ohm avec une « *résistance* » complexe. Tout se passe comme si le circuit RLC se comportait comme une résistance complexe. Pour ne pas confondre cette résistance complexe avec une résistance réelle, on l'appelle « *impédance* » et on la note Z (notez que le terme réactance n'est utilisé que pour désigner la partie imaginaire de l'impédance des éléments d'un circuit, il s'agit de ne pas les confondre). La loi courant-tension du circuit RLC se résume donc à $\underline{V} = Z\underline{I}$.

Impédance, phasor et déphasage L'impédance est un nombre complexe mais il est important de réaliser qu'elle ne constitue pas un *phasor*; la raison de ceci est qu'il n'y a pas de mouvement harmonique associé à ce nombre. Plus précisément, cela signifie qu'il n'y a pas de grandeur physique réelle oscillante associée à Z .

L'impédance est représentée à la figure 7.11 dans le plan complexe aussi appelé plan de Gauss. Sa partie réelle est la résistance R et sa partie imaginaire est donnée par la différence des réactances ($X_L - X_C$). L'argument de Z est, en toute généralité, différent de zéro puisqu'il dépend de la différence des réactances qui elles-mêmes dépendent différemment de la pulsation ω , on trouve

$$\arg(Z) = \arctan\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right). \quad (7.50)$$

L'argument de Z représente le déphasage qui existe entre la tension et le courant dans le circuit RLC, en effet, $V(t) = \text{Re}[ZI \exp(i\omega t)] = \text{Re}[|Z|I_m \exp(i\omega t + i\varphi_I + i\arg(Z))]$. Plus précisément, $\arg(Z)$ représente l'avance de phase de la tension sur le courant (si $\arg(Z)$ est négatif l'avance de phase devient un retard de phase). Le décalage temporel correspondant est $\delta t = \arg(Z)/\omega$.

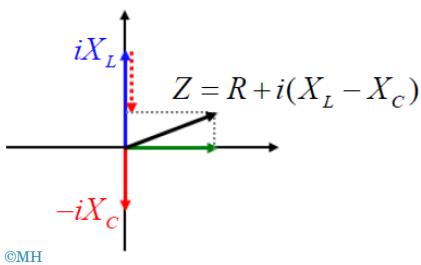
Condition de résonance par l'algèbre des phasors

Pour vous convaincre de l'utilité de l'outil mathématique que constitue la notion de phasor, je voudrais ici montrer que le phénomène de résonance du circuit RLC peut s'étudier à partir des deux relations algébriques suivantes,

$$\underline{V} \equiv Z\underline{I} \quad \text{et} \quad Z = R + i(X_L - X_C). \quad (7.51)$$

La tension représente le terme de force extérieure de l'*OLAF* que constitue le circuit. En fonction de la fréquence de la tension, l'amplitude d'oscillation du courant prend des valeurs plus ou moins grandes et sa valeur maximale est bien entendu obtenue à la résonance. Or, l'amplitude d'oscillation du courant est donnée par la relation $I_m = |I| = |\underline{V}|/|Z|$ qui montre qu'elle est maximale lorsque le module de l'impédance est minimal. On peut donc facilement calculer la pulsation de résonance en recherchant la valeur de ω pour

FIGURE 7.11 : Impédance Z représentée dans le plan complexe. Sa partie réelle est la résistance R et sa partie imaginaire est donnée par la différence des réactances ($X_L - X_C$).



laquelle le module de l'impédance est minimum,

$$I_m = |I| = \frac{|V|}{|Z|}, \quad (7.52)$$

$$\text{Résonance : } I_m = I_{\max} \text{ si } |Z| = |Z|_{\min}. \quad (7.53)$$

Puisque la partie réelle de l'impédance est indépendante de la pulsation [$\text{Re}(Z) = R$], il est clair que la valeur minimale du module de l'impédance est obtenue lorsque sa partie imaginaire est nulle. On voit cela très facilement sur la figure 7.11 : le module de l'impédance apparaît comme l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont l'un des côtés est la résistance indépendante de la fréquence. Par contre, l'autre côté du triangle a une longueur qui dépend de la pulsation ω . La pulsation pour laquelle la longueur de ce côté s'annule correspond à la valeur la plus petite du module de l'impédance puisque l'hypoténuse prend alors la longueur du côté indépendant de la fréquence, soit R . D'après l'expression de l'impédance $Z = R + i(X_L - X_C)$, cette valeur minimale du module de l'impédance est obtenue lorsque les réactances de l'inducteur et du condensateur sont égales,

$$X_L = X_C. \quad (7.54)$$

Sachant que $X_L = \omega L$ et que $X_C = \frac{1}{\omega C}$, nous obtenons la condition de résonance sous la forme suivante,

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{LC} = \omega_0^2. \quad (7.55)$$

Comme on pouvait s'y attendre, ce résultat montre que la pulsation de résonance n'est rien d'autre que la pulsation propre $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ de l'*OLAF* que constitue le circuit RLC [voir section 7.1.3 à l'équation (7.34) où nous avons défini $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ pour retrouver la forme canonique de l'équation de l'*OLAF*].

L'essentiel à retenir de ces développements est que l'utilisation des phaseurs rend la description mathématique du circuit RLC extrêmement simple grâce à la transformation de l'équation différentielle du circuit en une équation algébrique. Il en est de même pour tous les circuits alimentés par une source de tension alternative. C'est pour cela que le concept d'impédance est central en théorie des circuits. Vous serez souvent amenés à l'utiliser dans la suite de vos études et de votre carrière.

Étude de la résonance

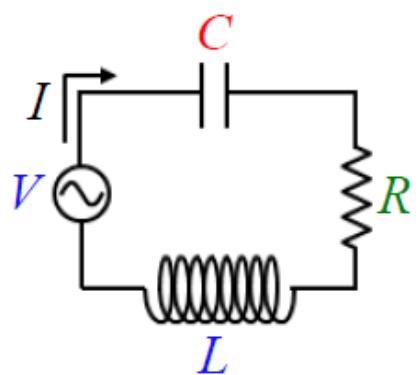
Le résultat auquel nous avons abouti est résumé à l'aide du schéma de la figure 7.12 et des quelques expressions

$$\begin{aligned} \underline{V} &= [R + i(X_L - X_C)]\underline{I}, \\ \begin{cases} X_L = \omega L, \\ X_C = \frac{1}{\omega C}, \end{cases} \quad \omega_0^2 &= \frac{1}{LC}. \end{aligned}$$



L07P5

FIGURE 7.12 : Circuit RLC alimenté par une source V de pulsation ω .



©MH

Approximation de la résonance étroite (pertes faibles) Pour décrire la résonance en détail, nous allons considérer la limite de l'amortissement faible, ce qui signifie que la résistance sera supposée très faible devant l'inductance multipliée par la fréquence de résonance, en vertu de (7.35). Si l'amortissement est faible, on sait que la résonance est étroite (voir le développement sur l'*OLAF* de la section 7.1.2). On peut donc se contenter de décrire la résonance dans un petit intervalle de fréquence autour de la fréquence de résonance. Pour cela, on introduit « *l'écart à la résonance* » $\delta\omega = \omega - \omega_0$ que l'on considérera comme une petite grandeur par rapport à ω_0 ,

$$\begin{cases} \text{amortissement faible : } R \ll L\omega_0 = L/\sqrt{LC} = \sqrt{L/C}, \\ \text{proximité de la résonance : } \delta\omega \ll \omega_0. \end{cases} \quad (7.56)$$

■ Petit poisson rouge... peut-on passer la barre rouge ?

Oui, à condition de répondre à ma question !

Pouvez-vous expliquer pourquoi la résistance est directement proportionnelle à l'amortissement? Comment l'énergie électrique quitte-t-elle le système?

Calcul des impédances près de la résonance La réactance de l'inducteur $X_L = \omega L$, exprimée en fonction de l'écart à la résonance $\delta\omega$ s'écrit

$$X_L = (\omega_0 + \delta\omega)L. \quad (7.57)$$

La réactance du condensateur est approchée en considérant l'inégalité $\delta\omega/\omega_0 \ll 1$,

$$X_C = \frac{1}{C} \frac{1}{\omega_0 + \delta\omega} = \frac{1}{\omega_0 C} \frac{1}{1 + \delta\omega/\omega_0} \approx \frac{1}{\omega_0 C} \left(1 - \frac{\delta\omega}{\omega_0}\right). \quad (7.58)$$

Dans cette approximation, la partie imaginaire de l'impédance $Z = R + i(X_L - X_C)$ prend une forme particulièrement simple quand on tient compte du fait que la pulsation de résonance vaut $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, c'est-à-dire que $\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$ et $\frac{1}{\omega_0^2 C} = L$,

$$(X_L - X_C) = \omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} + \delta\omega \left(L + \overbrace{\frac{1}{\omega_0^2 C}}^L \right) = 2\delta\omega L. \quad (7.59)$$

L'impédance dans la limite de faible amortissement vaut donc

$$Z = R + i2L\delta\omega. \quad (7.60)$$

Le courant est obtenu en divisant la tension par l'impédance. Dans l'expression résultante, on met R en évidence au dénominateur et on introduit le paramètre de largeur de résonance,

$$\Omega = \frac{R}{2L}, \quad (7.61)$$

qui a la même définition que le paramètre α en (7.35). Notez que Ω est la valeur de $\delta\omega$ qui correspond à une diminution du courant d'un facteur $\sqrt{2}$,

$$\underline{I} = \frac{\underline{V}}{R + i2L\delta\omega} = \frac{1}{R} \frac{\underline{V}}{1 + i\delta\omega/\Omega}. \quad (7.62)$$

L'amplitude des variations de courant est donnée par le module de \underline{I} qui vaut

$$|\underline{I}| = \frac{1}{R} \frac{V_m}{\sqrt{1 + \delta\omega^2/\Omega^2}}. \quad (7.63)$$

Ceci nous permet de représenter graphiquement la résonance. À la figure 7.13, on voit, en particulier, que la valeur du courant à la résonance est donnée par la loi d'Ohm $|\underline{I}| = V_m/R$. À la résonance tout se passe donc comme s'il n'y avait ni condensateur, ni inducteur dans le circuit. Si la résistance augmente l'amortissement augmente et cette valeur maximale du courant diminue en même temps que la résonance s'élargit (voir la section 7.1.2).

Filtre passe-bande

Une application naturelle de la résonance du circuit RLC est le filtrage de signaux électriques. Le principe du filtrage est représenté schématiquement à la figure 7.14. La tension à filtrer contenant plusieurs harmoniques de fréquences différentes est appliquée au circuit RLC. La tension de sortie du filtre est prise aux bornes de la résistance car c'est seulement cette tension qui est proportionnelle au courant du circuit et c'est donc la seule qui présentera le phénomène de résonance tel qu'on l'a décrit. Les composantes de fréquences voisines de la fréquence de résonance du circuit subissent la résonance et les autres sont fortement atténuées. C'est ce principe qui est utilisé pour sélectionner un canal radio sur un récepteur radiofréquence. Le circuit RLC du poste récepteur possède une réactance réglable (par exemple la capacité) pour pouvoir ajuster la fréquence de résonance du circuit sur la fréquence du canal à réceptionner. La présence des autres canaux dans le signal d'entrée ne perturbe pas le signal réceptionné puisqu'ils sont fortement atténués.

FIGURE 7.13 : Largeur de résonance. Le paramètre Ω correspond à $\delta\omega = \omega - \omega_0$ tel que $I(\delta\omega)/I(0) = \sqrt{2}$, voir (7.63).

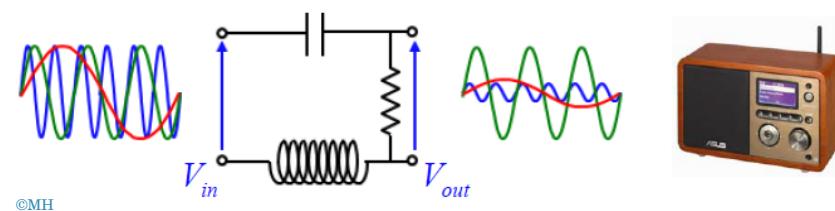
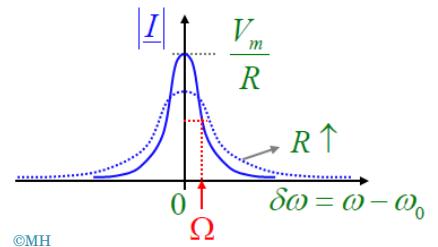


FIGURE 7.14 : Illustration du filtrage en fréquence des ondes radios en exploitant la résonance d'un circuit RLC pour sélectionner une seule station à écouter.

7.2 Le coin des assistant·es

Phaseurs

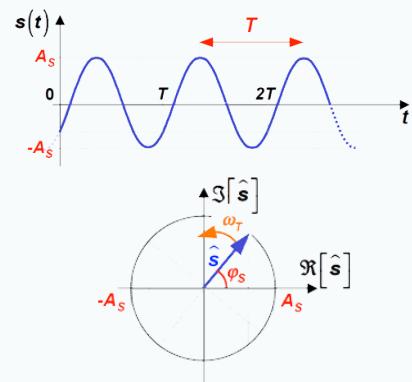
La plupart des situations physiques conduisant à des comportements oscillants sont modélisés par des équations différentielles linéaires à coefficients constants dont la résolution peut être fastidieuse. Pour simplifier la résolution de ces équations, on a recours à un outil mathématique appelé phaseur.

Un **phaseur** est un nombre complexe représentant une grandeur harmonique de la façon suivante. Son module est l'amplitude de la grandeur et son argument en est la phase. Une grandeur harmonique s'écrit typiquement comme suit : $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi_x)$. Comme nous savons que $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$, on peut dire que le cosinus est la partie réelle de l'exponentielle. Ainsi, on peut écrire le signal comme ceci : $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi_x) = \operatorname{Re}[X_m e^{i(\omega t + \varphi_x)}] = \operatorname{Re}[X_m e^{i\varphi_x} e^{i\omega t}]$. Le troisième facteur est le seul qui dépend du temps, tandis que les deux premiers sont constants. On ne va retenir que ces deux-là dans la définition du phaseur

$$\underline{X} = X_m e^{i\varphi_x} \quad \text{et} \quad x(t) = \operatorname{Re}[\underline{X} e^{i\omega t}] = \operatorname{Re}[\underline{X} e^{i\omega t}].$$

Remarquez que la notion de temps a totalement disparu dans cette nouvelle représentation de la grandeur $x(t)$. Par la même occasion, on a également supprimé la notion de fréquence du signal (qui se trouvait cachée dans ω), ce qui veut dire que, dans un calcul, tous les phaseurs sont supposés représenter des signaux à la même fréquence. Par exemple, la somme de phaseurs de grandeurs à des fréquences différentes n'est pas interprétable comme un phaseur. L'intérêt des phaseurs est de transformer des équations différentielles (potentiellement difficile à résoudre) en simple équations algébriques. Pour transformer ces équations, il suffit de remplacer $x(t)$ par son phaseur \underline{X} et d'appliquer les relations de correspondances :

$$\dot{x}(t) \rightarrow i\omega \underline{X}, \quad \ddot{x}(t) \rightarrow -\omega^2 \underline{X}. \quad (7.64)$$



7.3 Questions théoriques

1. Établissez l'équation du circuit LC en termes du courant I qui le parcourt et déduisez-en la pulsation naturelle de ce circuit (à l'aide d'un schéma expliquez votre démarche).
2. Donnez la définition du phaseur d'une grandeur physique $x(t)$ qui suit une évolution harmonique. Identifiez clairement le phaseur dans votre expression mathématique.
3. Montrez que le module et l'argument du phaseur correspondent respectivement à l'amplitude et au déphasage du mouvement harmonique qu'il caractérise. Montrez ensuite le lien entre l'argument ϕ du phaseur et le « décalage temporel » δt du mouvement harmonique.
4. Établissez l'équation de l'oscillateur harmonique en termes de phaseurs et déduisez-en la solution générale de l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique.
5. Écrivez l'équation différentielle de l'oscillateur linéaire amorti et forcé de masse m , de constante de rappel κ , de coefficient de frottement visqueux λ et dont le forçage se fait avec une amplitude F . Écrivez, de même, l'équation du phaseur correspondante.
6. Écrivez l'équation des phaseurs du circuit RLC et déduisez-en l'impédance du circuit.

7.4 Exercices

Exercice 7.1

Le schéma de la figure E.7.1 montre un ressort idéal (sans masse) dont une extrémité est munie d'une masse m . L'autre extrémité subit un mouvement harmonique $x_S(t) = a \cos(\omega t)$.

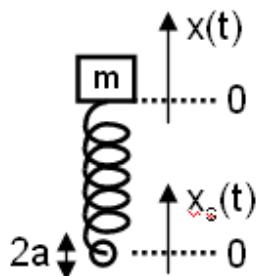


FIGURE E.7.1 :

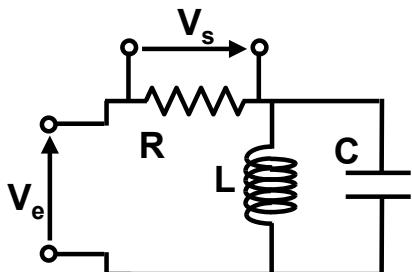


FIGURE E.7.2 :

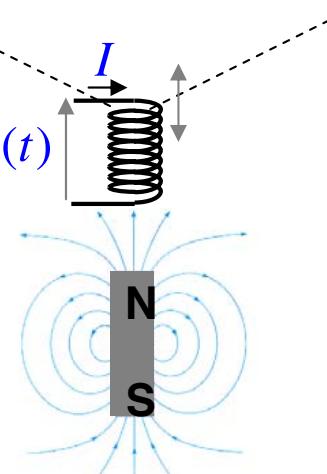


FIGURE E.7.3 :

- Établissez l'équation du mouvement de la masse m et calculez-en la solution harmonique générale $x(t)$.
- Vérifiez que l'introduction d'une force de frottement visqueux permet de limiter l'amplitude des oscillations.

Exercice 7.2

Le circuit représenté à la figure E.7.2 constitue un filtre pour le signal électrique V_e . Les questions qui suivent vous permettront d'analyser ce filtre, d'en comprendre la fonction et de le dimensionner.

- Donnez l'expression analytique de l'impédance d'entrée Z du filtre (c'est-à-dire, l'impédance "vue" par le signal d'entrée V_e) et faites l'étude de cette impédance en tant que fonction de la pulsation ω du signal d'entrée (brève étude des fonctions $\text{Re}[Z(\omega)]$, $\text{Im}[Z(\omega)]$ et $|Z(\omega)|$). Déduez-en l'action du filtre sachant que la tension V_s aux bornes de la résistance R en constitue le signal de sortie. coupure de la fréquence $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ et atténuation des fréquences voisines, circuit "transparent" pour les fréquences plus lointaines.
- Le filtre est variable au travers du réglage de la capacité C du condensateur et de la résistance R tandis que l'inducteur a une inductance fixée à la valeur $L = 1\text{mH}$. Calculez les valeurs à donner à C et R pour que le filtre coupe la fréquence f_0 de 400 Hz tout en limitant l'atténuation de la fréquence toute proche $f'_0 = 390\text{Hz}$ à un facteur 1/2. $C \approx 0,158\text{mF}$ et $R \approx 28.65\Omega$

Exercice 7.3

Le schéma de la figure E.7.3 représente le principe de fonctionnement d'un haut-parleur. La membrane acoustique du haut-parleur (représentée en coupe par les lignes pointillées) est solidaire d'un solénoïde fabriqué à l'aide d'un fil de cuivre de diamètre $\phi = 0,1\text{mm}$ et de résistivité négligeable. $I_1 = \frac{V_1}{2\pi f_1 L}$ $I_2 = \frac{V_2}{2\pi f_1 L}$ où $V_1 = V_2$ $r = \frac{f_2}{f_1} = 2$

Le solénoïde de 300 spires circulaires juxtaposées de diamètre $D = 1\text{cm}$ est placé à proximité d'un aimant permanent. Le signal d'entrée $V(t)$ du haut-parleur provient d'un amplificateur électroacoustique et est constitué de deux fréquences $f_1 = 440\text{Hz}$ et $f_2 = 880\text{Hz}$ d'amplitudes égales $V_1 = V_2 = 0,25\text{V}$. En négligeant l'influence de l'aimant sur le courant I du solénoïde, calculez ce courant et déduisez-en le rapport de filtrage $r = P_1/P_2$ caractérisant le

rapport des pressions des deux ondes sonores de fréquences f_1 et f_2 générées par le haut-parleur. On supposera la pression acoustique proportionnelle à l'amplitude d'oscillation de la membrane (dans l'approximation des petits mouvements).

Exercice 7.4

Le circuit schématisé à la figure E.7.4 constitue un déphaseur de tension. Comme son nom l'indique, il permet de déphaser la tension de sortie $V_c(t)$ de la tension d'entrée $V_e(t) = V_m \sin(2\pi f t)$, où $V_m = 220\text{V}$ et $f = 50\text{Hz}$.

- Calculez le phaseur \underline{V}_e associé à la tension d'entrée $V_e(t)$.
- Sachant que la résistance R vaut 900Ω , calculez la capacité C qu'il faut donner au condensateur pour que $V_c(t)$ soit déphasée de $\pi/4$ par rapport à $V_e(t)$. Indiquez si ce déphasage correspond à un retard ou une avance du signal temporel $V_c(t)$ par rapport à $V_e(t)$. $C = 3,5\mu\text{F}$, retard de $\delta t = \frac{\pi}{4\omega}$
- Faites la représentation graphique des phaseurs \underline{V}_R et \underline{V}_C et vérifiez qu'ils ont des parties réelles opposées. $\text{Re}[\underline{V}_R] = -\text{Re}[\underline{V}_c] = \frac{V_m}{2}$

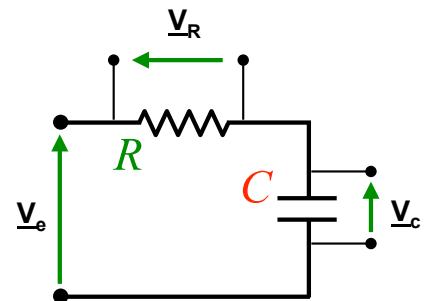


FIGURE E.7.4

Exercice 7.5

Le schéma de la figure E.7.5 montre un circuit contenant une résistance R de $1,3\text{k}\Omega$ et un condensateur de capacité $C = 3,2\mu\text{F}$ reliés en série à une source de tension alternative $V(t) = V_m \cos(\omega t)$ de 220V efficace.

- Calculez la fréquence f qu'il faut donner à la tension alternative pour que le courant subisse la variation temporelle suivante : $I(t) = I_m \cos(\omega t + \pi/4)$.
- Calculez l'amplitude I_m des oscillations de courant dans la situation envisagée en (a).
- Montrez que, en toute généralité, la puissance moyenne fournie par la source $P_m = \langle P(t) \rangle$ est donnée par la relation $P_m = I_{\text{eff}} V_{\text{eff}} \cos \phi$, où ϕ est le déphasage du courant par rapport à la tension de la source (coup de pouce : utilisez la relation $2 \cos(a) \cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b)$).

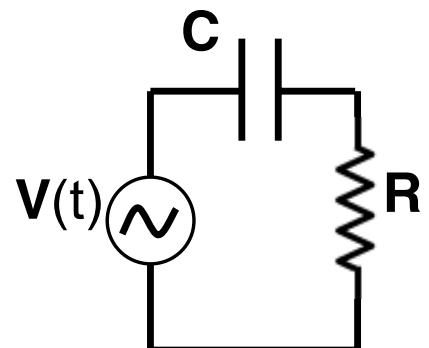


FIGURE E.7.5

Exercice 7.6

Soit le circuit électrique représenté sur le schéma à la figure E.7.6.

- Établissez l'expression analytique de l'impédance Z de ce circuit.
- Donnez également, en fonction de la pulsation ω du système, le délai Δt qui sépare les maxima des courants I_R et I_L qui passent dans la résistance et dans l'inducteur, respectivement (convention : Δt positif si les maxima de I_R sont en avance sur ceux de I_L).

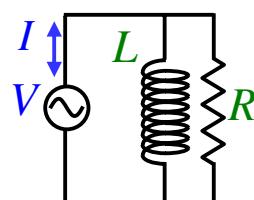


FIGURE E.7.6

- c) Calculez l'expression analytique du déphasage ϕ qui s'établit dans le circuit entre les oscillations du courant total I et de la tension V .

Exercice 7.7

Considérons un circuit LC idéal de capacité $C = 1 \mu\text{F}$ et d'inductance $L = 1 \text{ H}$ muni d'un interrupteur. Le condensateur est initialement chargé avec une charge électrique $Q_0 = 1 \mu\text{C}$ avant que l'interrupteur ne soit fermé. Calculez le courant maximum I_m établi dans le circuit après fermeture de l'interrupteur. Écrivez les phaseurs \underline{V} et \underline{I} correspondant à la tension et au courant dans le circuit.

Exercice 7.8

Le schéma de la figure E.7.7 montre une ampoule électrique reliée, par l'intermédiaire d'un interrupteur, à un condensateur diélectrique plan portant la charge $Q_0 = 1 \text{ mC}$. Le condensateur est fait de deux plaques de surface $S = 1 \text{ m}^2$ séparées d'une distance $e = 1 \text{ cm}$ et que l'ampoule est fabriquée à l'aide d'un filament de tungstène de résistivité $\rho_e = 5.5 \times 10^{-8} \Omega \text{ m}$ et de diamètre $d = 50 \text{ mm}$. Le filament est torsadé en forme d'hélice de pas $p = 0.2 \text{ mm}$, de diamètre $D = 1 \text{ mm}$ et de longueur $L = 3 \text{ cm}$, la longueur totale du filament est $L_{\text{tot}} = 10 \text{ cm}$. À l'aide du formalisme des phaseurs, calculez le courant $I(t)$ en tout temps après la fermeture de l'interrupteur.

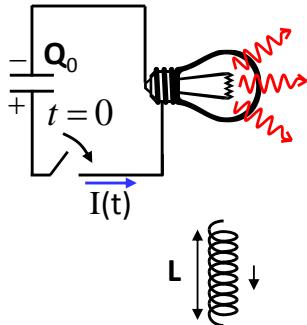


FIGURE E.7.7 :

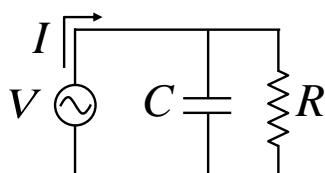


FIGURE E.7.8 :

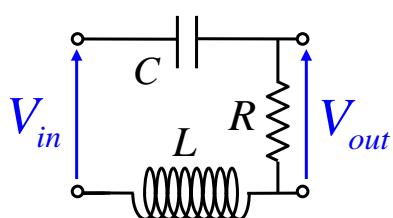


FIGURE E.7.9 :

Exercice 7.9

Le circuit représenté à la figure E.7.8 est alimenté par une tension alternative à la fréquence $f = 1 \text{ kHz}$. Sachant que la résistance est $R = 50 \Omega$ et que la capacité est $C = 1 \mu\text{F}$, calculez l'impédance du condensateur, de la résistance et du circuit global vu de la source.

Exercice 7.10

Afin de réaliser le filtre représenté sur le schéma de la figure E.7.9, on dispose d'un inducteur d'inductance $L = 10 \text{ mH}$, d'une résistance variable R , et d'un condensateur de capacité variable C .

- Sur base de l'analyse du circuit en termes de phaseurs, donnez la forme analytique de l'impédance complexe d'entrée du filtre à la pulsation ω , soit $Z(\omega)$ (l'impédance vue de la source V_{in} à la pulsation ω).
- Calculez la valeur de la capacité C qu'il faut adopter pour que la fréquence acoustique $f_0 = 500 \text{ Hz}$ soit la fréquence la moins atténuée par le filtre.
- Calculez la valeur de la résistance R qu'il faut adopter dans ces conditions pour que la fréquence double $f = 2f_0$ soit atténuée d'un facteur 2 par le filtre, soit, $|V_{\text{out}}(2\omega_0)| = \frac{|V_{\text{in}}(2\omega_0)|}{2}$.

Exercice 7.11

À l'aide du formalisme des phaseurs, calculez la solution générale de l'équation de l'oscillateur linéaire amorti.

Exercice 7.12

Établissez la loi courant-tension en phaseur du condensateur et de l'inducteur.

Exercice 7.13

Considérons un pendule dont la masse $m = 25\text{ g}$ et dont la longueur est $\ell = 10\text{ cm}$. Sachant que, au temps $t = 0$, la masse passe à la verticale du point fixe du pendule avec une vitesse $v = 10\text{ cm s}^{-1}$, calculez le phaseur correspondant au mouvement du pendule. (Réponse : $\underline{X} = i \times 10^{-2}\text{ m}$)

Exercice 7.14

Le phaseur $\underline{X} = iA \cos(kz)$ correspond à l'onde $x(z, t) = A \cos(kz) \sin(\omega t)$. Vrai ou faux ? Justifiez.

Exercice 7.15

Calculez la solution harmonique de l'équation différentielle $\frac{d^3x}{dt^3} + a \frac{dx}{dt} + bx = A \sin(\omega t)$.

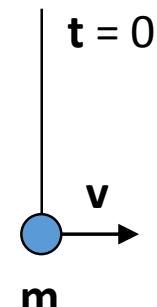
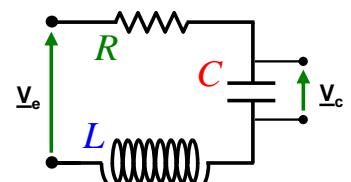
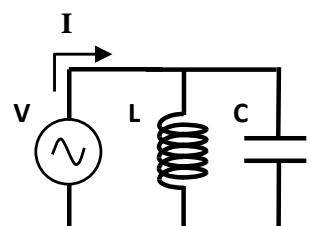
Exercice 7.16

Le circuit schématisé à la figure E.7.11 constitue un filtre dont la sortie est la tension $V_c(t)$ aux bornes du condensateur. Calculez l'expression analytique du phaseur \underline{V}_c de cette tension sachant que le phaseur de la tension d'entrée est $\underline{V}_e = V_m \in \mathbb{R}$.

Exercice 7.17

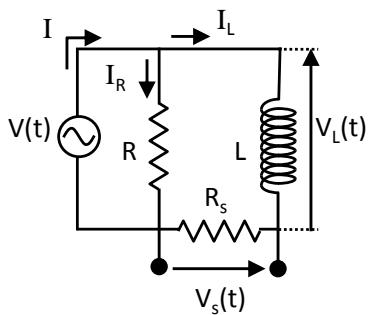
Le schéma de la figure E.7.12 représente un circuit électrique idéalisé constitué d'un inducteur d'inductance L et d'un condensateur de capacité C . Ce circuit est alimenté par une source de tension alternative $V(t) = V_m \sin(\omega t)$.

- Calculez l'expression analytique du phaseur \underline{V} de la tension $V(t)$ délivrée par la source.
- À l'aide du formalisme des phaseurs, démontrez qu'il existe une pulsation $\omega = \omega_0$ pour laquelle le courant $I(t)$ délivré par la source s'annule et donnez l'expression analytique de cette pulsation ω_0 .
- Calculez, pour toute pulsation ω , l'expression analytique de la puissance électrique $P(t)$ délivrée par la source pour tout temps t et calculez-en la valeur moyenne $\langle P(t) \rangle$.

**FIGURE E.7.10****FIGURE E.7.11****FIGURE E.7.12**

Exercice 7.18

Le schéma de la figure E.7.13 représente un filtre électrique (comportant deux résistances R et R_s et un inducteur d'inductance L) alimenté par une tension alternative $V(t) = V_m \sin(\omega t)$. Le signal de sortie du filtre est la tension $V_s(t)$ aux bornes de la résistance R_s .



- Calculez le phaseur \underline{V} de la tension d'entrée.
- Calculez l'expression analytique de l'impédance Z de ce circuit (impédance vue de la source).
- Calculez l'expression analytique de la fonction de transfert en amplitude du filtre, soit $T(\omega) = \left| \frac{V_s}{V} \right|$ et faites-en une représentation graphique qualitative.

FIGURE E.7.13 :

Récapitulatif des notions vues dans cette leçon

Indispensable	Nécessaire	Intéressant
<ul style="list-style-type: none">— notion de résonance;— lien entre amortissement et largeur de résonance;— impédance.	<ul style="list-style-type: none">— exemples de mouvements harmoniques (en première approche);— circuit <i>RLC</i> par les phaseurs;— analyse du circuit <i>RLC</i> près de la résonance.	<ul style="list-style-type: none">— filtrage passe-bande.

Ondes de corde & ondes et de compression



■ Pré-requis pour cette leçon ■

- *lois de Newton* ;
- *approche mésoscopique* ;
- *dérivée* ;
- *EDO* ;
- *dérivée partielle* ;
- *équation aux dérivées partielles (EDP)* ;
- *potentiel* ;
- *loi de Laplace* ;

NOUS ALLONS ABORDER ICI le thème des ondes. Une onde est un phénomène physique qui est associé à un mécanisme oscillatoire même si une onde en soi ne présente pas nécessairement une évolution périodique.

8.1 Ondes de corde

Pour montrer que les ondes apparaissent dans des systèmes oscillants, nous commencerons par l'étude du petit dispositif représenté à la figure 8.1. Il s'agit d'une corde tendue entre deux parois et au milieu de laquelle est attachée une masse m (représentée par la boule rouge). En raison de l'élasticité de la corde (tout objet solide présente une élasticité), nous aurons l'occasion d'approfondir cela plus loin), la masse peut être éloignée de sa position de repos qui est au niveau des points de fixation de la corde (on néglige le rôle de la pesanteur dans ce problème). Si on lâche brusquement la masse après l'avoir éloignée, celle-ci subit la force de rappel de la corde (élastique) et vibre à la manière d'un oscillateur harmonique. Nous allons voir que, dans l'hypothèse des petites amplitudes d'oscillation, ce dispositif est précisément un *OH*.

8.1.1 Modélisation des forces et du mouvement en un point d'une corde

L'équation du mouvement de la masse est obtenue en appliquant la seconde loi de Newton et en y incluant toutes les forces qu'elle subit. Ces forces proviennent de la tension de la corde. Si la corde est tendue avec une force de tension F_T entre les parois, alors cette force s'exerce des deux cotés de la masse dans l'axe de la corde, comme indiqué par les deux flèches rouges sur le schéma



L08P2 L08P3



FIGURE 8.1 : Corde tendue entre deux parois et supportant une masse m . L'élasticité de la corde permet un déplacement latéral de la masse.

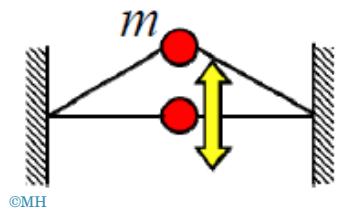
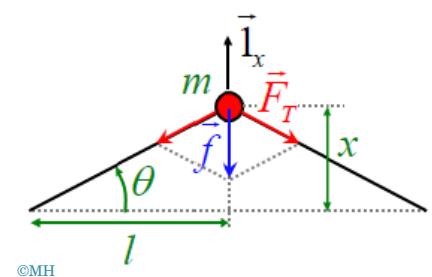


FIGURE 8.2 : Détail des forces agissant en un point de la corde. \vec{F}_T désigne les deux forces de tension, alignées sur la corde ; \vec{f} désigne la résultante de ces forces. L'angle $\theta \ll 1$ est déterminé par le déplacement x qui apparaît sur un segment de longueur $2l$.



de la figure 8.2. La masse subit donc la somme vectorielle de ces deux forces \vec{F}_T . Si le déplacement de la masse est vertical (ce que l'on suppose par hypothèse) les deux forces de tension sont symétriques par rapport à la verticale et leur somme donne une force \vec{f} verticale (parallèle à $\vec{1}_x$) et dirigée vers la position de repos de la masse. Il s'agit donc bien d'une force de rappel.

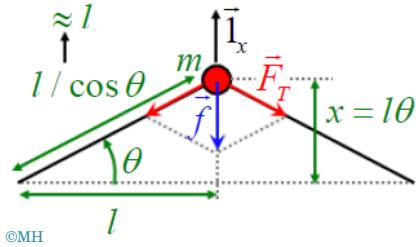
Approximation des petits angles

Pour décrire mathématiquement la force de rappel f , on fera l'hypothèse que le mouvement est de faible amplitude, ce qui se traduit par le fait que l'angle θ que fait la corde avec l'horizontale est très petit. Nous adoptons alors une approximation du premier ordre en θ dans toutes les expressions qui contiennent cet angle. Rappelons que l'approximation du premier ordre consiste à négliger les puissances de θ supérieures à l'unité dans les développements de Taylor des fonctions de θ . Pour les fonctions trigonométriques de base, ceci signifie que l'on peut remplacer le cosinus de θ par l'unité et le sinus de θ par θ lui-même,

$$\cos \theta = 1 - \frac{1}{2}\theta^2 \quad (\theta \ll 1), \quad (8.1)$$

$$\sin \theta = \theta - \frac{1}{6}\theta^3 \quad (\theta \ll 1). \quad (8.2)$$

FIGURE 8.3 : Détail des forces agissant en un point de la corde. Le schéma illustre le lien entre la distance l , l'angle $\theta \ll 1$ et les autres distances.



Le schéma de la figure 8.3 montre que la force \vec{f} résultant des forces de tension est donnée par $\vec{f} = -2\|\vec{F}_T\| \sin\theta \vec{1}_x$. La force de tension $F_T = \|\vec{F}_T\|$ est en toute généralité dépendante de l'angle θ puisque la longueur de la demi-corde de chaque côté vaut $l/\cos\theta$. Plus l'angle θ est grand, plus cette longueur est grande et plus la force de tension F_T est grande.

Dans l'approximation des petits angles on sait que $\cos\theta = 1$, ce qui revient à dire que l'allongement de la corde qui maintient la masse est négligeable. Il en résulte que la force de tension F_T est une constante. Avec l'approximation du sinus, soit $\sin\theta = \theta$, cela donne

$$\vec{f} = -2\|\vec{F}_T\| \sin\theta \vec{1}_x = -2F_T\theta \vec{1}_x. \quad (8.3)$$

cste

Force résultante La hauteur x de la masse au-dessus de sa position de repos (voir figure 8.3), vaut $x = l \tan\theta$. Mais comme $\tan\theta = \theta$ aux petits angles, on peut écrire $x = l\theta$, soit encore $\theta = x/l$, ce qui nous donne la force \vec{f} que subit la masse m en fonction de sa hauteur x : $\vec{f} = -2F_Tx/l \vec{1}_x$. Elle est écrite ci-dessous en termes de sa composante en x appelée ici f ,

$$\theta = \frac{x}{l} \Rightarrow f = -2\frac{F_T}{l}x. \quad (8.4)$$

C'est une *force de rappel élastique* de constante de rappel $\kappa = 2F_T/l$.

Équation du mouvement L'équation du mouvement est,

$$\ddot{x} = \frac{f}{m}, \quad (8.5)$$

caractéristique de l'*OH*. La pulsation propre est

$$\omega_0 = \sqrt{\kappa/m} = \sqrt{2F_T/(lm)}. \quad (8.6)$$

On constate en particulier que, plus la tension de la corde est élevée, plus la fréquence d'oscillation de la masse est grande.

Remarque Notez que lors de l'application de la loi de Newton ci-dessus nous avons négligé la masse de la corde qui supporte la masse m à l'image de ce que nous avions fait à la section 6.1.3 pour l'*OH* constitué d'un ressort muni d'une masse à son extrémité.

8.1.2 Modélisation des Cordes

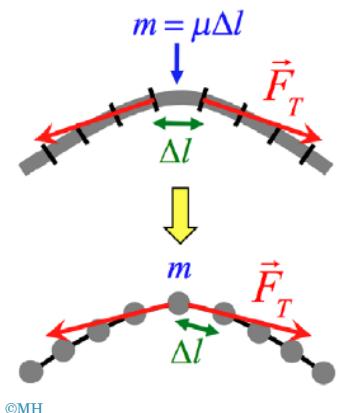
Considérons maintenant une corde possédant une certaine masse par unité de longueur μ . La masse par unité de longueur est bien entendu donnée en kilogrammes par mètre, elle est en général appelée la *masse linéique* de la corde. Comme précédemment, cette corde est tendue entre deux points fixes. Le but de la présente section est d'obtenir un modèle mathématique qui va nous permettre de connaître le mouvement naturel de cette corde. Par analogie avec le problème que nous venons de voir, nous pouvons deviner que cette corde vibrera de façon analogue à un *OH*. Ceci est vrai, mais nous allons voir également que le mouvement de la corde peut être beaucoup plus complexe qu'une simple vibration. En particulier, nous allons voir qu'une corde est sujette à la propagation d'ondes.

Discrétisation

Pour étudier le mouvement de la corde, nous allons avoir recours à une technique de modélisation très usuelle consistant à discréteriser la corde en considérant que sa masse est distribuée sur des petites masses ponctuelles reliées par des cordes (élastiques) sans masse. Cette décomposition de la corde est représentée schématiquement à la figure 8.4. Elle se fait en segmentant la corde en tronçons de longueur identique notée ici Δl . La masse de chaque tronçon $m = \mu\Delta l$ est alors artificiellement regroupée au milieu du tronçon pour former chacune des masses ponctuelles. La distance de séparation entre les masses ponctuelles est alors égale à la longueur Δl . Nous avons, de cette façon, remplacé la corde par une chaînette équivalente.

Le mouvement de la chaînette sera très similaire à celui de la corde puisque l'on a conservé les mêmes paramètres intervenant dans ce mouvement : la force de tension et la masse par unité de longueur. De plus, si la discrétisation de la corde se fait dans l'esprit de la décomposition infinitésimale avec un pas Δl arbitrairement petit (le nombre de masses $m = \mu\Delta l$ tendant vers l'infini), l'équation

FIGURE 8.4 : On schématisé un segment de corde qui est remplacé par une masse $m = \mu\Delta l$. La tension de la corde engendre deux forces appliquées aux deux extrémités de ce segment. La somme vectorielle de ces deux forces donne la force totale que subit le segment. Dans le modèle de corde discrétisée en chaînette, c'est la force totale que subit la masse remplaçant le segment. Nous allons calculer cette force dans l'hypothèse des petits angles afin de formuler l'équation du mouvement de la corde.



©MH

du mouvement que nous allons obtenir pourra être appliquée à une corde continue et pas seulement à une chaînette.

Calcul des forces

Le schéma de la figure 8.5 montre trois masses ponctuelles adjacentes (boules rouges) situées à un endroit quelconque de la chaînette qui modélise la corde (la chaînette elle-même comporte un grand nombre N de masses). Pour formuler l'équation du mouvement de la chaînette, nous allons étudier dans un premier temps le mouvement de la masse centrale. Pour faire une description générale du mouvement de la chaînette sur toute sa longueur, il faut considérer une situation sans symétrie particulière. Les angles θ et θ' que font les élastiques sans masse de gauche et de droite avec l'horizontale sont donc supposés quelconques et différents l'un de l'autre.

Le mouvement de la masse centrale sera donné par la seconde loi de Newton dans laquelle on considérera la force totale \vec{f} qui s'y exerce. Pour calculer simplement cette force, nous allons l'exprimer en termes de ses composantes selon les axes x et z . Comme le suggère le schéma, l'axe z est l'axe le long duquel se trouve la corde dans sa position de repos et l'axe x est l'axe perpendiculaire à l'axe z . C'est dans le plan (x, z) que les points de la corde se déplacent. D'après le schéma de la figure 8.5, on voit que dans ce repère cartésien la force de tension de gauche a pour expression $-F_T \sin \theta \vec{l}_x - F_T \cos \theta \vec{l}_z$ alors que la force de tension de droite est $-F_T \sin \theta' \vec{l}_x + F_T \cos \theta' \vec{l}_z$. La force \vec{f} étant donnée par la somme de ces deux forces, nous pouvons écrire ses composantes

$$f_x = -F_T \sin \theta - F_T \sin \theta', \quad (8.7)$$

$$f_z = -F_T \cos \theta + F_T \cos \theta'. \quad (8.8)$$

Avec l'approximation des petits angles ces expressions se transforment comme suit,

$$f_x = -F_T \theta - F_T \sin \theta', \quad (\sin \theta \approx \theta) \quad (8.9)$$

$$f_z = -F_T + F_T = 0, \quad (\cos \theta \approx 1). \quad (8.10)$$

On constate que dans l'approximation des petits angles la composante en z de la force \vec{f} est nulle, ce qui nous permet de considérer que le mouvement des masses se fait seulement parallèlement à l'axe x . Dans la suite, nous utiliserons donc l'expression

$$\vec{f} = -F_T(\theta + \theta')\vec{l}_x \quad (8.11)$$

pour la force totale exercée sur la masse centrale du système de trois masses défini ci-dessus.

Équation du mouvement de la corde

À ce stade, la corde continue a été modélisée comme représenté à la figure 8.6 par une chaînette de masses $m = \mu \Delta l$

FIGURE 8.5 : Modélisation d'une section de la chaînette comportant trois masses ponctuelles, en rouge. Les forces et angles sont similaires à ceux de la figure 8.3.

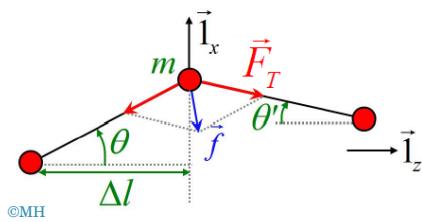
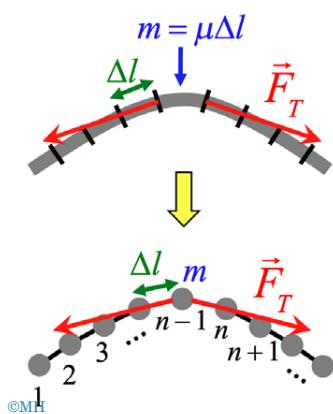
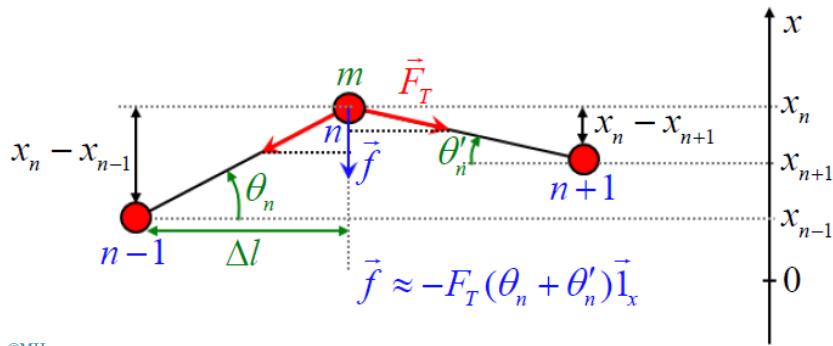


FIGURE 8.6 : Discrétisation de la corde en chaînette reliant des masses ponctuelles identifiées par l'indice n .





©MH

espacées de la distance Δl et reliées entre elles par une corde élastique sans masse. Nous attribuons un indice « n » à chaque masse correspondant à un segment donné de la corde de longueur Δl . L'équation du mouvement de la masse n est donnée par la loi de Newton, où f est la force calculée en 8.11.

La situation est reprise en détail sur le schéma de la figure 8.7. Les angles θ et θ' portent maintenant l'indice n désignant la masse n pour laquelle on calcule la force. Pour exprimer le mouvement de la corde en termes de la position verticale de chaque masse ponctuelle de la corde (ou chaque segment Δl de la corde continue), nous utilisons l'axe x qui repère la hauteur des masses. La masse n a une hauteur x_n sur l'axe x . Par convention, le zéro de l'axe des x correspond à la position de repos de la chaînette.

Équation du mouvement d'une masse Dans ces notations, l'équation du mouvement de la masse n est donnée par l'expression suivante $m\ddot{x}_n = -F_T(\theta_n + \theta'_n)$, ou, en faisant passer la masse m dans le membre de droite,

$$\ddot{x}_n = \frac{f}{m} \Rightarrow \ddot{x}_n = -\frac{F_T}{m}(\theta_n + \theta'_n). \quad (8.12)$$

Équation par rapport aux masses voisines Les angles θ_n et θ'_n peuvent facilement être exprimés en fonction des différences de hauteurs entre la masse centrale n et les deux masses adjacentes $n-1$ et $n+1$. Nous donnons ici ces expressions dans l'approximation du premier ordre du calcul,

$$\begin{cases} x_n - x_{n-1} = \Delta l \tan \theta_n = \Delta l \theta_n \\ x_n - x_{n+1} = \Delta l \tan \theta'_n = \Delta l \theta'_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_n = (x_n - x_{n-1})/\Delta l \\ \theta'_n = (x_n - x_{n+1})/\Delta l. \end{cases} \quad (8.13)$$

On peut ainsi remplacer la somme des angles $\theta_n + \theta'_n$ par une expression comportant seulement les hauteurs des 3 masses adjacentes,

$$\theta_n + \theta'_n = \frac{(2x_n - x_{n-1} - x_{n+1})}{\Delta l}. \quad (8.14)$$

L'équation du mouvement de la masse centrale « n » est donc

$$\ddot{x}_n = -\frac{F_T}{m\Delta l}(2x_n - x_{n-1} - x_{n+1}). \quad (8.15)$$

FIGURE 8.7 : Détail de la géométrie du mouvement des trois masses ponctuelles servant de base à la modélisation de la corde.

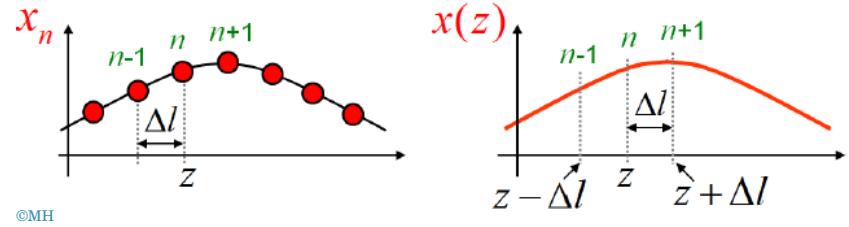


FIGURE 8.8 : Illustration de la correspondance entre la modélisation d'une corde vue comme un ensemble de masses ponctuelles discrètes (m) reliées entre elles ou vues comme un milieu continu, virtuellement découpé en tronçons de longueur Δl . La masse linéique μ est choisie pour que les masses de deux tronçons soient équivalentes.

Système d'oscillateurs harmoniques couplés Cette équation montre que l'accélération de la masse n est fonction, non seulement de sa position x_n , mais également des positions des deux masses adjacentes x_{n-1} et x_{n+1} . Pour décrire le mouvement de la chaînette dans sa globalité, il faut considérer les N équations semblables correspondant aux N masses constituant la chaînette. Pour résoudre l'équation en x_n afin de connaître le mouvement de la masse n il faut connaître au préalable le mouvement des masses $n - 1$ et $n + 1$. Mais pour connaître le mouvement de la masse $n - 1$, il faut connaître le mouvement de la masse $n - 2$ et n , etc. On dit que l'on a affaire à un système d'équations couplées.

Remarquez qu'en l'absence de x_{n-1} et x_{n+1} dans l'équation ci-dessus, celle-ci se réduit à l'équation de l'oscillateur harmonique. On peut donc interpréter ces équations comme étant un modèle d'oscillateurs harmoniques couplés. L'oscillateur harmonique x_n est « *couplé* » aux autres oscillateurs x_{n-1} et x_{n+1} . En conclusion, on peut considérer la chaînette (ou la corde) comme constituant un ensemble d'oscillateurs harmoniques couplés. Résoudre un tel système d'équations n'est bien entendu pas aisément et pour en simplifier l'analyse, nous devons de manière contre-intuitive le traiter comme un système continu, qui correspondrait à une infinité d'équations.

8.1.3 Modèle de la corde continue

Pour faire apparaître la définition des dérivées, nous allons multiplier par Δl en haut et en bas le second membre de l'équation du mouvement de la masse n obtenue ci-dessus. De la sorte on fait apparaître au dénominateur la masse linéique de la corde $\mu = m/\Delta l$,

$$\ddot{x}_n = \underbrace{F_T}_{\mu = \frac{m}{\Delta l}} \frac{\Delta l}{m} \frac{(x_{n-1} + x_{n+1} - 2x_n)}{\Delta l^2}, \quad (8.16)$$

$$= \frac{F_T}{\mu} \frac{(x_{n-1} + x_{n+1} - 2x_n)}{\Delta l^2}. \quad (8.17)$$

Notations Pour passer du modèle discret au modèle continu, les coordonnées des positions des masses $x_n(t)$ doivent être remplacées par la fonction $x(z, t)$ représentant la hauteur des points de la corde pour toute valeur de z . La correspondance entre ces deux représentations de la forme de la corde est donnée par la relation $x(z = n\Delta l, t) = x_n(t)$. Ceci est résumé à la figure 8.8.

La dérivée seconde \ddot{x}_n est à remplacer par la dérivée seconde temporelle de la fonction $x(z, t)$ et puisque c'est une fonction de deux

variables, c'est d'une dérivée partielle qu'il s'agit, soit $\ddot{x}_n \rightarrow \frac{\partial^2 x(z,t)}{\partial t^2}$. On voit de cette manière qu'en associant la position z à l'indice n selon la relation $x(z = n\Delta l, t) = x_n(t)$ on peut récrire l'équation du mouvement de la masse n se trouvant en $z = n\Delta l$ de la façon suivante,

$$\frac{\partial^2 x(z,t)}{\partial t^2} = \frac{F_T}{\mu} \frac{x(z - \Delta l, t) + x(z + \Delta l, t) - 2x(z, t)}{\Delta l^2}. \quad (8.18)$$

Dérivées discrétisées Nous allons maintenant transformer le deuxième facteur du membre de droite de façon à y faire apparaître la dérivée spatiale de la fonction $x(z,t)$. Ce facteur peut s'écrire comme suit,

$$\frac{1}{\Delta l} \left[\frac{x(z + \Delta l, t) - x(z, t)}{\Delta l} - \frac{x(z, t) - x(z - \Delta l, t)}{\Delta l} \right]. \quad (8.19)$$

À la limite pour Δl tendant vers zéro on reconnaît, dans le premier terme à l'intérieur des crochets, la dérivée de la fonction $x(z,t)$ par rapport à z , soit $\frac{\partial x(z,t)}{\partial z} = \frac{x(z+\Delta l,t) - x(z,t)}{\Delta l}$. De même, le deuxième terme n'est autre que la dérivée de la même fonction en la position $z - \Delta l$, soit $\frac{\partial x(z-\Delta l,t)}{\partial z} = \frac{x(z,t) - x(z-\Delta l,t)}{\Delta l}$. L'expression (8.19) peut donc se récrire

$$\frac{1}{\Delta l} \left[\frac{\partial x(z,t)}{\partial z} - \frac{\partial x(z-\Delta l,t)}{\partial z} \right]. \quad (8.20)$$

En notant $\partial_z x(z,t)$ la dérivée spatiale $\frac{\partial x(z,t)}{\partial z}$, cette dernière expression prend la forme $\frac{\partial_z x(z,t) - \partial_z x(z-\Delta l,t)}{\Delta l}$, qui n'est rien d'autre que la dérivée spatiale de la fonction $\partial_z x(z,t)$. Il s'agit plus précisément de la dérivée « à gauche » de la fonction $\partial_z x(z,t)$ (voir cours d'analyse). Avec Δl tendant vers zéro, l'expression (8.20) représente donc bien la dérivée seconde spatiale de la fonction $x(z,t)$ et nous pouvons écrire l'équation du mouvement de la corde sous forme d'une équation aux dérivées partielles,

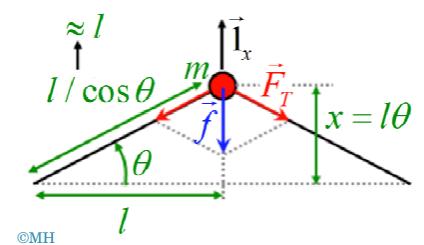
$$\boxed{\frac{\partial^2 x(z,t)}{\partial t^2} = \frac{F_T}{\mu} \frac{\partial^2 x(z,t)}{\partial z^2}}. \quad (8.21)$$

Cette équation est le modèle dynamique des cordes que l'on recherchait. Ses solutions nous donneront de précieuses informations sur le comportement des cordes.

Validité de l'approximation de la force de tension constante

La force de tension doit être considérée comme une constante dans l'équation du mouvement des cordes. Ceci n'est a priori pas évident, car si la corde se déforme entre deux points fixes sa longueur ne peut faire que varier et il en est donc de même pour sa tension. En conclusion, on devrait en toute rigueur s'attendre à avoir une variation de la tension de la corde. Nous avions déjà rencontré cette problématique dans la section 8.1 avec l'étude de la masse maintenue par un élastique. La situation physique dont il était question est schématisée à la figure 8.9, reproduction de la figure 8.2.

FIGURE 8.9 : Reproduction de la figure 8.2.



L'élongation de l'élastique due au mouvement de la masse était négligée dans le cadre de l'hypothèse des petits angles (la longueur $l/\cos\theta$ étant égale à l au premier ordre puisque $\cos\theta \approx 1$). Il en est de même pour le développement qui nous a menés à l'équation du mouvement des cordes : la longueur de chaque tronçons de corde Δl vaut $\Delta l/\cos\theta_n$ où $\cos\theta_n \approx 1$. Il en résulte que la force de tension F_T est bien une constante dans l'approximation des petits angles. Pour pouvoir interpréter physiquement l'équation du mouvement des cordes, il faut se rappeler que la dérivée seconde temporelle $\frac{\partial^2 x(z,t)}{\partial t^2}$ représente l'accélération du point de la corde se situant en z . Cette accélération provient de la seconde loi de Newton $a = f/m$ et il est donc naturel de s'attendre à trouver dans le second membre de l'équation des cordes la force que subit le point de la corde situé en z . Or nous trouvons dans ce second membre la dérivée seconde spatiale de la fonction $x(z,t)$ représentant la forme de la corde au temps t . Une analyse simple montre que la dérivée seconde en un point, c'est-à-dire la courbure de la corde en un point, est effectivement proportionnelle à la force que subit ce point. Pour le voir, considérons pour commencer le cas d'une courbure nulle en un point. Dans le modèle discret de la corde représenté sur le schéma de la figure 8.10 on observe que si la courbure est nulle (la corde est rectiligne) en z alors les deux forces de tension sur la masse n sont exactement opposées et il en résulte bien une force totale nulle. Cette situation correspond au cas où $x_{n+1} + x_{n-1} - 2x_n$ est nul.

FIGURE 8.10 : Force totale nulle résultant de la combinaison de tensions alignées et opposées.

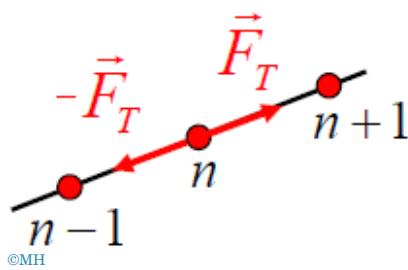
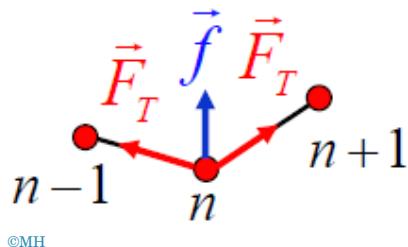


FIGURE 8.11 : Force totale \vec{f} résultant de la combinaison des efforts de tension dans une configuration non alignée.



De même, si la courbure est non nulle et, par exemple, positive en z cela signifie que la corde est incurvée vers le haut, comme indiqué sur le schéma de la figure 8.11. Le point z de la corde est donc entouré de points qui se trouvent globalement plus haut que lui, ce qui se traduit mathématiquement par la relation $x_{n+1} + x_{n-1} - 2x_n > 0$. Dans ces conditions la force exercée sur le point z de la corde ne peut être dirigée que vers le haut ce qui correspond bien à une accélération vers le haut, conformément à l'équation des cordes obtenue plus haut [dans laquelle on a bien une accélération $\frac{\partial^2 x(z,t)}{\partial t^2}$ positive si la courbure $\frac{\partial^2 x(z,t)}{\partial z^2}$ est positive]. Le raisonnement est bien entendu le même pour une courbure négative.

On peut également interpréter le coefficient de proportionnalité entre les deux dérivées F_T/μ . Il n'est en effet pas difficile de comprendre que l'accélération d'un point donné de la corde sera proportionnelle à la force de tension de la corde. De même, il est facile de comprendre sur base du phénomène d'inertie que plus la corde est lourde, plus son accélération sera faible, ce qui explique la présence de la masse linéique au dénominateur du second membre de l'équation des cordes.

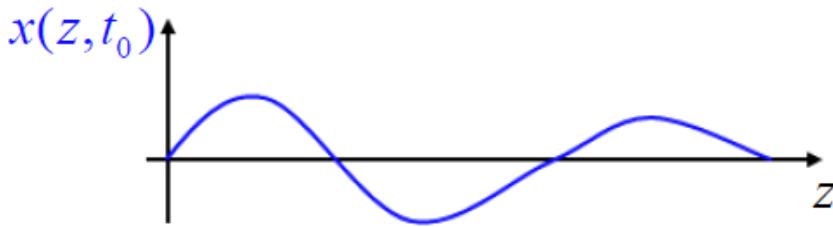
8.1.4 Solutions de l'équation des cordes

Comme on vient de le discuter, l'équation du mouvement des cordes exprime que l'accélération en tout point de la corde est don-



L08P4





©MH

FIGURE 8.12 : Corde soumise à une déformation latérale $x(z, t)$, tracée ici en fonction de z à un instant t fixé.

née par la courbure de la corde multipliée par le coefficient F_T/μ ,

$$\frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial t^2} = \frac{F_T}{\mu} \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2}. \quad (8.22)$$

Cette équation a pour solutions des fonctions $x(z, t)$ représentant la position de tous les points de la corde en tout temps t . L'illustration de la figure 8.12 montre une corde au temps $t = t_0$. La courbure de la corde en un point détermine l'accélération de la corde en ce point.

Vitesse de propagation

Pour analyser l'équation des cordes et en interpréter les solutions, commençons par voir quelles sont les unités du coefficient F_T/μ . L'unité de la force de tension est le newton et celle de la masse linéique est le kilogramme par mètre. Sachant qu'un newton est un kilogramme fois un mètre divisé par des secondes au carré, on voit facilement que les dimensions du coefficient F_T/μ sont des mètres carrés par seconde carrée. Autrement dit, le coefficient F_T/μ a les dimensions d'une vitesse au carré. Ceci était prévisible quand on voit que le premier membre de l'équation des cordes $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$ est une accélération en m/s^2 alors que la dérivée spatiale du deuxième membre $\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}$ est en m^{-1} ,

$$\left. \begin{aligned} [F_T] &= \text{N} \\ [\mu] &= \frac{\text{kg}}{\text{m}} \end{aligned} \right\} \left[\frac{F_T}{\mu} \right] = \frac{\cancel{\text{kg}} \text{m}}{\text{s}^2} \frac{\text{m}}{\cancel{\text{kg}}} = \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}. \quad (8.23)$$

On peut donc définir une vitesse v caractéristique de la corde à partir de la relation $v = \sqrt{F_T/\mu}$. Nous verrons plus bas ce que signifie physiquement cette vitesse.

Avec cette définition, nous pouvons écrire l'équation des cordes comme

$$v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2}}. \quad (8.24)$$

En mettant la vitesse caractéristique de la corde dans l'autre membre, l'équation des cordes prend la forme

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2}. \quad (8.25)$$

Invariance de l'équation par changement de variables

En faisant le changement de variable $t' = vt$, l'équation s'écrit

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t'^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}. \quad (8.26)$$

Comme les dérivées secondes sont représentatives des variations temporelles et spatiales de la fonction x , on peut interpréter cette dernière égalité comme exprimant le fait que les variations spatiales de x sont identiques à ses variations temporelles, ce qui physiquement revient à dire que la courbure de la corde fixe son accélération. Cette remarque nous guide dans notre recherche des solutions de l'équation des cordes : si les variations temporelles et spatiales sont identiques on peut facilement vérifier que toute fonction d'un seul argument combinant les deux variables z et $t' = vt$ est solution de l'équation des cordes. La solution est en effet de la forme

$$x(z, t) = f(z + vt). \quad (8.27)$$

Solution test

Pour vérifier si cette forme de $x(z, t)$ est effectivement solution de l'équation des cordes, il suffit de la substituer dans l'équation. Il faut alors calculer les dérivées secondes partielles de $f(z + vt)$. Pour cela on considère que $z + vt$ est une fonction $g(z, t) = z + vt$ et on applique la règle de changement de variable de la dérivée partielle (voir cours d'analyse),

$$\frac{\partial f[g(z, t)]}{\partial z} = \frac{\partial g(z, t)}{\partial z} f'[g(z, t)]. \quad (8.28)$$

Dans cette dernière relation, f' est la dérivée totale de la fonction d'argument unique f , soit $f'(u) = \frac{df(u)}{du}$. Dans le développement qui suit, on considérera également les solutions du type $f(z - vt)$. Pour cela on écrira les deux types de solution en une seule expression $f(z \pm vt)$ dans laquelle on pourra choisir le signe supérieur « + » ou le signe inférieur « - ». On verra que le résultat est indépendant de ce signe.

L'application de la règle de changement de variable à la dérivée partielle temporelle est immédiate : on voit que la dérivée seconde partielle de x est égale à la dérivée seconde totale de f multipliée par la vitesse caractéristique v au carré,

$$\frac{\partial f(z \pm vt)}{\partial t} = \pm v f'(z \pm vt), \quad (8.29)$$

$$\frac{\partial^2 f(z \pm vt)}{\partial t^2} = v^2 f''(z \pm vt). \quad (8.30)$$

Le calcul pour la dérivée seconde partielle par rapport à z est encore plus simple à calculer. On voit que celle-ci est égale à la dérivée seconde totale de f ,

$$\frac{\partial f(z \pm vt)}{\partial z} = f'(z \pm vt) \Rightarrow \frac{\partial^2 f(z \pm vt)}{\partial z^2} = f''(z \pm vt). \quad (8.31)$$

En combinant cela avec le résultat précédent, soit $\frac{\partial^2 f(z \pm vt)}{\partial t^2} = v^2 f''(z \pm vt)$, on vérifie bien que toute fonction $f(u)$ avec $u = z \pm vt$ est solution de l'équation des cordes,

$$\frac{\partial^2 f(z \pm vt)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f(z \pm vt)}{\partial z^2}. \quad (8.32)$$

Analyse de la solution Le résultat que nous venons d'obtenir peut paraître surprenant dans la mesure où il montre que toute fonction est solution de l'équation. Mais il faut avoir à l'esprit que, bien que la fonction $f(u)$ puisse effectivement être quelconque, le fait que les variables d'espace et de temps sont liées dans l'argument unique de cette fonction en fait une solution très spécifique. Nous verrons plus loin que ce type de fonction de deux variables décrit des ondes. De plus, il faut remarquer que même si $f(u)$ est en principe une fonction quelconque, elle doit néanmoins satisfaire les conditions aux limites auxquelles est soumise la corde (par exemple, si la corde est fixée à ses deux extrémités, f doit être nulle aux valeurs de z correspondant à ses extrémités. Nous verrons cette situation particulière plus loin en détail).

Superposition de solutions

Pour être complet il faut tenir compte du fait que l'équation des cordes est une équation « *linéaire* ». Le terme « *linéaire* » signifie que si $x_1(z, t)$ et $x_2(z, t)$ sont solutions de l'équation alors toute combinaison linéaire de ces solutions est également solution de l'équation.

Pour le vérifier, il suffit de déterminer si la combinaison linéaire $ax_1 + bx_2$ est bien elle-même solution de l'équation, soit

$$\frac{\partial^2(ax_1 + bx_2)}{\partial t^2} ?= v^2 \frac{\partial^2(ax_1 + bx_2)}{\partial z^2}. \quad (8.33)$$

Pour le montrer nous commençons par exprimer que x_1 et x_2 sont solutions de l'équation des cordes, ce qui revient à écrire

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 x_1}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 x_2}{\partial z^2}. \end{cases} \quad (8.34)$$

Si nous multiplions ces deux équations respectivement par les constantes a et b et que nous les additionnons membre à membre nous trouvons

$$a \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + b \frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} = av^2 \frac{\partial^2 x_1}{\partial z^2} + bv^2 \frac{\partial^2 x_2}{\partial z^2}. \quad (8.35)$$

En rentrant les constantes a et b à l'intérieur des dérivées seconde et en mettant ensuite l'opérateur de dérivée seconde en évidence dans les membres de gauche et de droite, nous voyons que la

combinaison linéaire $ax_1 + bx_2$ est bien solution de l'équation des cordes,

$$\frac{\partial^2(ax_1 + bx_2)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2(ax_1 + bx_2)}{\partial z^2}. \quad (8.36)$$

En conclusion, on peut dire que les systèmes physiques régis par l'équation des cordes (on verra qu'ils sont nombreux) obéissent au principe de superposition. Ceci a une signification physique profonde car dire que deux solutions distinctes peuvent être superposées signifie que ces solutions peuvent toutes deux se manifester physiquement exactement comme si l'autre n'était pas présente, la solution globale totale étant simplement constituée de la somme des deux solutions considérées isolément.

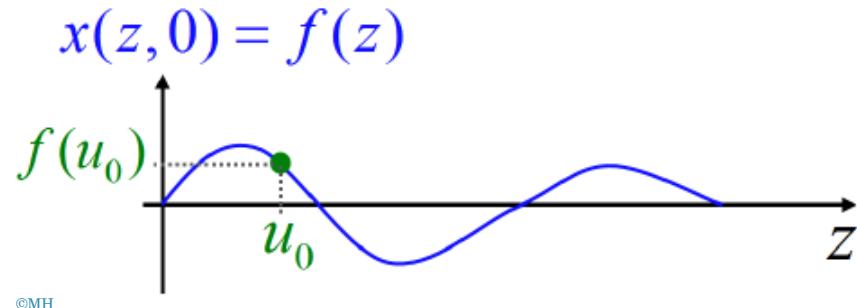
Par ailleurs, puisque toute fonction de la forme $f(z \pm vt)$ est solution de l'équation, indépendamment du signe choisi dans l'argument, on doit considérer en toute généralité que la solution de l'équation des cordes est de la forme $f(z - vt) + g(z + vt)$, où $f(u)$ et $g(u)$ sont des fonctions quelconques. C'est ce que l'on appellera par la suite la solution générale de l'équation d'onde des cordes. La section suivante est consacrée à la signification physique de ce type de solution.

8.1.5 Interprétation physique des solutions

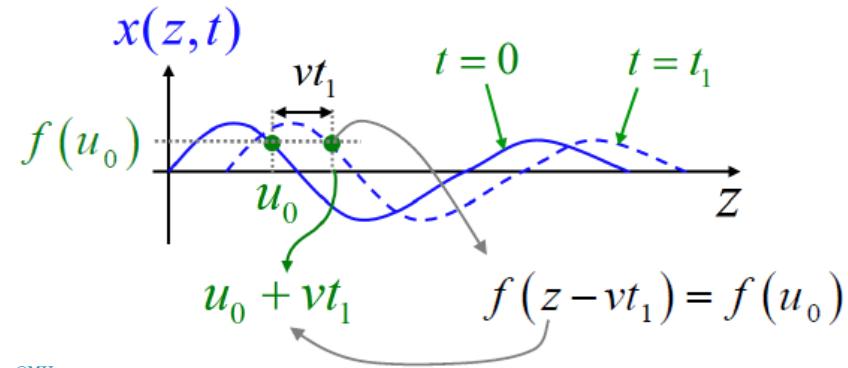
Nous allons découvrir dans cette section que les solutions de l'équation des cordes du type $x(z, t) = f(z \pm vt)$ représentent des ondes. Pour comprendre cela clairement, il s'agit d'avoir à l'esprit que f est une fonction d'un seul argument que nous appellerons ici u . Le tout est alors de se familiariser avec la décomposition de cet argument en les deux variables d'espace z et de temps t , soit $u = z \pm vt$.

Problème aux conditions initiales

Nous commencerons par analyser la solution de type $x(z, t) = f(z - vt)$. Puisqu'il s'agit d'une solution de l'équation des cordes, la fonction $f(z - vt)$ représente la forme que prend la corde en tout temps t . Comme f est une fonction quelconque, cette solution pourrait apparaître très abstraite et donc difficile à interpréter. Pour y voir plus clair, commençons donc par analyser cette solution au temps $t = 0$ pour lequel on voit que la solution se réduit à $x(z, 0) = f(z)$. Puisque $x(z, 0)$ représente la hauteur des points de la corde pour tout z au temps $t = 0$ on peut dire que $f(z)$ est la fonction qui représente la forme de la corde au temps $t = 0$. C'est ce que l'on appelle la *condition initiale* de la corde. Si on connaît la forme de la corde au temps $t = 0$ alors on connaît la fonction $f(z)$ et, en conséquence, on connaît également la solution de l'équation d'onde pour tout temps t puisque cette solution est donnée par la même fonction f mais avec l'argument $z - vt$. Le schéma de la figure 8.13 montre la *condition initiale* de la corde $x(z, 0) = f(z)$, c'est-à-dire, la forme de la corde au temps $t = 0$.



©MH



©MH

FIGURE 8.13 : Exemple de condition initiale pour la déformation d'une corde. Comme l'équation différentielle est à deux variables, cette condition initiale en $t = 0$ doit être spécifiée à toutes les positions z .

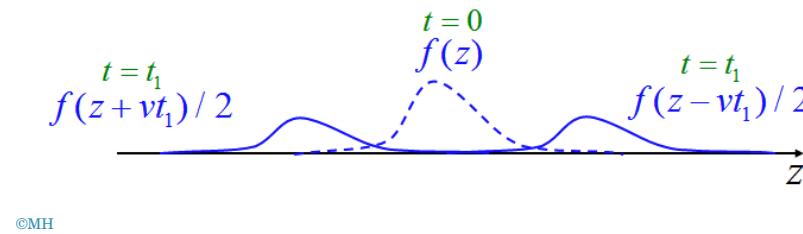
FIGURE 8.14 : Analyse de l'évolution d'une perturbation sur une corde, entre le temps $t = 0$ et le temps $t = t_1$.

Évolution de la solution Si après le temps $t = 0$ on laisse la corde évoluer seule, elle sera soumise à un comportement dynamique décrit par l'équation des cordes. Et comme la théorie nous dit que la solution de cette équation est donnée par $f(z - vt)$, il sera facile de trouver le mouvement de la corde pour tout temps. Par exemple, au temps $t = t_1 > 0$ la forme de la corde est décrite par la fonction $f(z - vt_1)$, c'est-à-dire que la forme de la corde est la forme initiale $f(z)$ translatée de la distance vt_1 vers les z positifs. Pour comprendre cette idée de translation, nous avons mis en évidence sur le schéma de la figure 8.14 une valeur quelconque u_0 de l'argument z . En cette valeur $z = u_0$ la hauteur x de la corde vaut $f(u_0)$. Voyons maintenant à quelle valeur de z se retrouve cette hauteur de corde $f(u_0)$ au temps $t = t_1 > 0$. Comme c'est l'argument d'une fonction qui fixe la valeur de la fonction elle-même, il suffit de considérer la valeur de l'argument au temps t_1 soit $z - vt_1$, et de l'égaliser à u_0 , ce qui donne $z - vt_1 = u_0$. On trouve de cette manière la valeur de z pour laquelle au temps t_1 la corde a une hauteur $x = f(u_0)$, soit $z = u_0 + vt_1$. On peut faire cela pour tout temps t et on comprend alors que le point de la corde de hauteur $x = f(u_0)$ se trouve en $z = u_0 + vt$. Ce point voyage donc à la vitesse v . Et comme l'ordonnée u_0 est totalement arbitraire, on peut généraliser ce résultat pour tout point de la corde. En conclusion, le modèle dynamique des cordes nous apprend que si on impose une forme à une corde à un moment donné (ici $t = 0$), la corde réagit de façon à ce que cette forme soit conservée et se déplace en translation à la vitesse v . Cette conclusion est synthétisée à la figure 8.14 avec les graphes de la fonction $x(z, t) = f(z - vt)$ au temps $t = 0$ (courbe continue) et au temps $t = t_1$ (courbe pointillée).

Interprétation de la solution C'est le sens physique de la solution $x(z, t) = f(z - vt)$ de l'équation des cordes. Avec cette interprétation, le fait que la solution de cette équation est une fonction quelconque n'apparaît plus étonnant, puisque cette fonction f est en fait simplement la forme donnée initialement à la corde avant de la libérer. On a effectivement toute liberté pour donner à la corde sa forme initiale (du moment que l'on respecte l'approximation des petits angles). Une fois la corde libérée, la forme de la corde se déplace à la vitesse v sans se déformer (simple mouvement de translation d'ensemble). Notez que la vitesse v est la vitesse donnée dans l'équation des cordes, soit $v = \sqrt{F_T/\mu}$; elle est donc imposée par les paramètres de la corde, plus précisément, par sa tension F_T et sa masse linéique μ . Cette forme quelconque se déplaçant en translation à vitesse constante s'appelle une *onde*. Mathématiquement on dira qu'une fonction du type $f(z - vt)$ représente une onde et on appelle *équation d'onde*, l'équation des cordes. On en conclut qu'une corde constitue un système physique qui « *supporte* » des ondes. Nous verrons par la suite que de nombreux systèmes physiques supportent des ondes.

Onde contra-propagative La description donnée ci-dessus de la solution de l'équation d'onde n'est en réalité pas complète. Nous avions effectivement noté à la section 8.1.4 que la solution générale de l'équation d'onde est de la forme $f(z - vt) + g(z + vt)$. Dans le problème considéré ci-dessus, il n'y aucune raison d'éliminer la solution $g(z + vt)$. Cette solution représente une onde qui se déplace vers les z négatifs sans se déformer. Pour le comprendre, il suffit considérer la hauteur g de la corde pour une valeur de z donnée au temps $t = 0$, soit $g(z)$, et de se demander ensuite comment faire varier z pour conserver cette hauteur g de la corde quand le temps s'écoule. Comme la valeur de g est fixée par son argument $z + vt$, il suffit de maintenir $z + vt$ constant quand le temps augmente, ce qui mathématiquement s'écrit $z + vt = \text{cste}$. Cette relation pouvant être écrite $z = \text{cste} - vt$, on voit que pour maintenir constante la hauteur g de la corde, il faut diminuer z selon la loi $z = \text{cste} - vt$. Ceci indique que nous avons affaire à une onde se propageant à vitesse $-v$, c'est-à-dire, se propageant vers les z négatifs. Pour distinguer les ondes de type $f(z - vt)$ des ondes de type $f(z + vt)$ on appellera les premières, « *ondes progressives* », et les secondes, « *ondes régressives* ».

Dans le problème, traité ci-dessus, de la corde dont on impose la forme au temps $t = 0$, il faut tenir compte de ces deux types d'ondes car, dans le cas où la déformation est statique (pas de mouvement au temps $t = 0$) il n'y a aucune raison de privilégier un sens de propagation plutôt que l'autre. Une corde déformée et ensuite libérée générera donc deux ondes, l'une progressive et l'autre régressive. Ces ondes transporteront la forme initiale donnée à la corde à la vitesse $v = \sqrt{F/\mu}$ dans les deux directions. Pour être précis, si la forme initiale ($t = 0$) de l'onde est $f(z)$, la corde générera deux ondes dont les expressions sont $f(z - vt)/2$ et $f(z + vt)/2$, le facteur



©MH

$1/2$ étant nécessaire pour qu'au temps $t = 0$ l'on retrouve bien la forme initiale $f(z)$ lors de la superposition des deux ondes (rappelons que l'équation d'onde est linéaire ce qui signifie que les solutions d'onde satisfont le principe de superposition). Le facteur $1/2$ associé à chaque onde peut également être justifié par le principe de conservation de l'énergie mais nous n'entrerons pas dans ce type de considération dans le présent chapitre. La situation discutée ici est schématisée à la figure 8.15 pour les temps $t = 0$ et $t = t_1$.

Discussion Bien que les cordes aient été modélisées par un ensemble d'oscillateurs harmoniques couplés, on constate que leur comportement dynamique est très éloigné de celui de l'oscillateur harmonique. En particulier, une perturbation appliquée à un point de la corde n'engendre pas d'oscillations en ce point (contrairement à l'oscillateur harmonique). C'est parce que la force que subit la masse n dépend des positions des masses adjacentes $n + 1$ et $n - 1$ que le mouvement n'est pas simplement harmonique (notez que si les masses $n + 1$ et $n - 1$ sont fixes alors on retrouve un mouvement harmonique pour la masse n , conformément au cas de la masse unique maintenue par un élastique entre deux points fixes vu à la section 8.1). Plutôt qu'un mouvement harmonique, c'est un phénomène de propagation de forme qui a lieu. En conclusion, la corde constitue une chaîne d'oscillateurs harmoniques couplés et le couplage entre oscillateurs est tel qu'une perturbation imposée à un des oscillateurs est automatiquement transmise de proche en proche à ses voisins plutôt que de se maintenir sous forme d'une oscillation locale.

Problème aux conditions aux limites

Une autre approche pour générer une onde sur une corde, est d'en agiter une extrémité, comme illustré sur le schéma de la figure 8.16. Dans ce cas, ce n'est pas la forme initiale de la corde qui détermine la forme de l'onde mais plutôt la manière dont la corde est agitée au cours du temps. Puisque le mouvement est imposé à une extrémité de la corde, on dit que l'on a affaire à un problème de *conditions aux limites*. L'expérience montre clairement que l'agitation de l'extrémité de la corde génère une forme qui se propage spontanément le long de la corde à une vitesse constante. Nous allons voir ici que cette observation est confirmée par le modèle théorique que nous avons développé plus haut.

Considérons que l'on agite la corde à son extrémité gauche de

FIGURE 8.15 : Illustration, à deux instants différents, $t = 0$ et $t = t_1$ d'une solution de l'équation des cordes constituée de deux solutions contra-propagatives, caractérisées par des signes différents dans l'expression $f(x \pm vt)$.

FIGURE 8.16 : Illustration d'une impulsion transverse appliquée à une corde sous tension, en l'agitant.

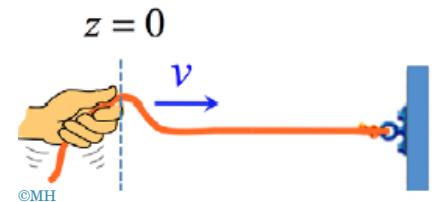
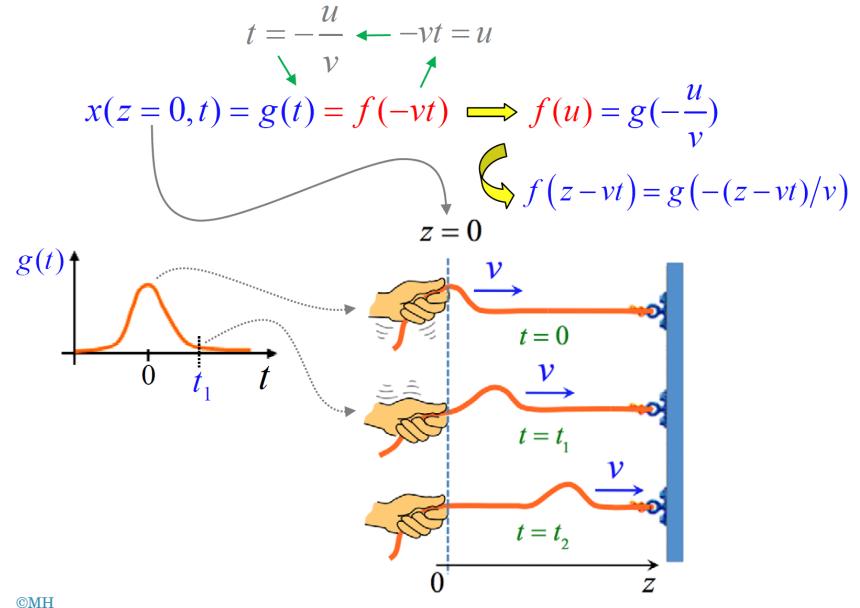


FIGURE 8.17 : Propagation d'une onde de corde. La perturbation induite par le mouvement du poignet est représentée par le profil $g(t)$, qui montre que la main monte, puis descend. Cette perturbation localisée en $z = 0$ se propage ensuite le long de la corde à une vitesse v .



sorte que l'onde générée se propage vers la droite, c'est-à-dire, vers les z positifs (si l'axe z est orienté vers la droite). La solution de l'équation d'onde à considérer est donc une onde progressive,

$$x(z, t) = f(z - vt). \quad (8.37)$$

Propagation de la solution Pour la simplicité du développement, nous choisissons de mettre l'origine $z = 0$ à l'extrémité de la corde mise en mouvement. Le mouvement de la main qui tient la corde provoque une variation de la hauteur x de la corde en $z = 0$ selon une certaine fonction que l'on supposera connue ; on note $g(t)$ cette fonction, de sorte que l'on puisse écrire $x(z = 0, t) = g(t)$. Notre objectif est ici de calculer l'onde $f(z - vt)$ générée sur la corde par le mouvement $g(t)$ de la main.

Ce calcul est extrêmement simple car l'expression du mouvement de l'extrémité de la corde, soit $x(z = 0, t) = g(t)$, fixe la fonction f recherchée. En effet, comme la solution recherchée est de la forme $x(z, t) = f(z - vt)$, on peut écrire $g(t) = x(z = 0, t) = f(-vt)$. En faisant le changement de variable $u = -vt$, soit encore $t = -u/v$, on peut écrire $f(u) = g(-u/v)$. Ceci montre que le mouvement d'agitation $g(t)$ impose la forme spatiale de la corde $f(z - vt)$ en tout temps. Pour avoir la fonction $f(z - vt)$ il suffit, en effet, de remplacer dans l'égalité $f(u) = g(-u/v)$ l'argument u par $z - vt$, ce qui donne $f(z - vt) = g(-(z - vt)/v)$. En conclusion, si on connaît la fonction d'agitation de la corde $g(t)$ on connaît la forme de l'onde que cette agitation génère sur la corde. Ce raisonnement est synthétisé à l'aide du schéma de la figure 8.17 et des formules qui s'y trouvent.

Dans cette illustration, le graphe de la fonction $g(t)$ correspond à une impulsion unique donnée à l'extrémité de la corde (la main monte et redescend immédiatement à sa position de départ).

Étapes de la propagation Voyons en détail les trois étapes représentées sur le schéma de la figure 8.17. Notez que, comme sug-

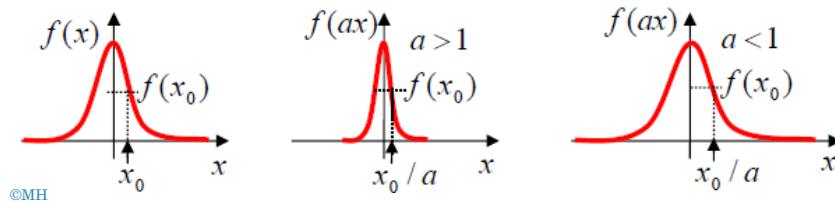


FIGURE 8.18 : Illustration de la compression (ou dilation) d'une fonction lorsque l'argument est multiplié par un nombre a supérieur ou inférieur à l'unité.

géré sur le graphe de la fonction $g(t)$, le temps $t = 0$ repère le maximum de la fonction $g(t)$, ce qui signifie qu'au temps $t = 0$ l'onde a déjà pris forme à proximité de l'origine. Mathématiquement il en est ainsi car en $t = 0$ on obtient pour la forme de la corde la fonction $f(z) = g(-z/v)$. Cette fonction n'a de sens physique que pour des valeurs positives de z (les valeurs négatives de z n'ont pas de sens ici puisqu'il n'y a plus de corde en $z < 0$). Au temps $t = 0$, l'onde se résume donc au « *flanc montant* » de l'impulsion $g(t)$. Cette partie de l'impulsion étant formée en des temps négatifs $t < 0$, la forme de l'onde au temps $t = 0$, soit $f(z) = g(-z/v)$ où $z > 0$, représente effectivement ce flanc montant (voir dessin de la figure 8.17),

$$x(z, 0) = f(z) = g\left(-\frac{z}{v}\right) \quad (z > 0). \quad (8.38)$$

En un temps t_1 ultérieur, la forme de la corde est donnée par $f(z - vt_1) = g(-(z - vt_1)/v)$, ce qui montre que la forme temporelle de l'agitation initiale $g(t)$ se retrouve inversée et translatée dans la forme spatiale de la corde,

$$x(z, t_1) = f(z - vt_1) = g\left(-\frac{z - vt_1}{v}\right). \quad (8.39)$$

Une photographie de la corde au temps t_1 donnerait une forme identique à la fonction temporelle imposée au départ $g(t)$ mais elle serait inversée et translatée de la distance vt_1 (voir le dessin ci-dessus). La situation est semblable au temps t_2 et ne demande donc pas de commentaires supplémentaires.

Lien entre tension et vitesse La présence de la vitesse au dénominateur de l'argument de la fonction $g(-(z - vt)/v)$ nous indique que plus la vitesse est grande, plus la forme de l'onde est dilatée le long de l'axe z . Autrement dit, plus une corde est tendue et légère (cf. $v = \sqrt{F_T/\mu}$), plus les ondes se propagent vite et ont tendance à s'étaler spatialement. La dilatation d'une fonction due à la multiplication de son argument par un nombre est illustrée à la figure 8.18, où l'on voit la fonction $f(x)$ ainsi que la fonction $f(ax)$ dans le cas où $a > 1$ et dans le cas contraire où $a < 1$. La largeur de la fonction y est repérée par l'abscisse x_0 pour la fonction $f(x)$ et l'abscisse x_0/a pour la fonction $f(ax)$. Ces abscisses donnent la hauteur $f(x_0)$ dans chaque cas. De façon évidente, la fonction est comprimée dans le cas où $a > 1$ et elle est dilatée le cas contraire où $a < 1$.

Caractère transverse de l'onde On dit qu'une onde de corde est « *transversale* » (ou « *transverse* ») parce que le déplacement des points matériels de la corde est perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde.

8.2 Ondes de compression



L08P5

FIGURE 8.19 : Cristal schématisé à l'échelle nanoscopique comme un emplacement périodique d'atomes, et photographie d'un cristal à l'échelle macroscopique.

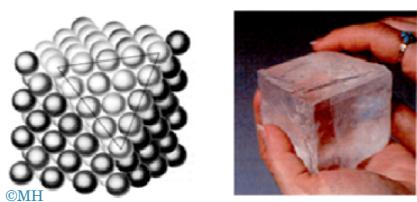


FIGURE 8.20 : Modélisation de la force de rappel agissant sur un atome n en raison de la présence des autres atomes, principalement ses voisins directs.

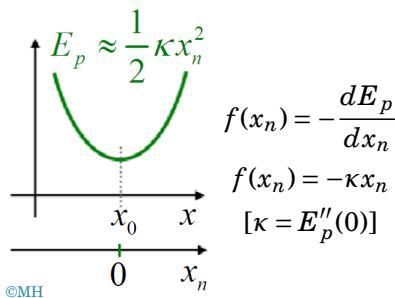
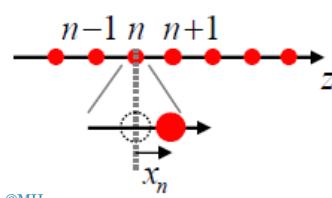


FIGURE 8.21 : Dans la suite, nous appellerons x_n le « déplacement » de l'atome n et pour ne pas confondre x_n avec la position de l'atome au sein du cristal, nous appellerons z la coordonnée de position des atomes au sein du cristal comme suggéré par le schéma où l'on voit la chaîne d'atomes le long de l'axe z avec un zoom sur l'atome n dont la distance x_n par rapport à sa position de repos est indiquée.



©MH

Cette section est consacrée aux ondes qui se propagent dans les milieux matériels en raison de la mobilité des atomes qui les composent. Nous nous limiterons à ce que l'on appelle les ondes de compression, c'est-à-dire que nous allons limiter notre description du mouvement des atomes à des mouvements longitudinaux ayant lieu dans le sens de la propagation de l'onde. Nous parlerons dans ce cas d'ondes « *longitudinales* », par opposition aux ondes « *transversales* ».

8.2.1 Ondes dans les milieux cristallins

Considérons pour commencer les ondes dans les solides cristallins. Dans les cristaux, les atomes sont rangés selon une structure périodique (cf. figure 8.19) qui dépend de leurs interactions mutuelles. Un atome donné du matériau prend une place bien précise parmi ses voisins en raison de ces interactions mutuelles. Le résultat des forces d'interaction sur un atome donné peut être représenté par un potentiel d'interaction.

Potentiel d'interaction

Le potentiel d'interaction possède, un minimum représentant la position de repos de l'atome dans le matériau (si ce minimum n'existe pas le matériau n'existerait pas sous forme solide). Ce potentiel est représenté schématiquement sur le graphe de la figure 8.20. Si l'atome est éloigné de sa position d'équilibre, il subit une force donnée par la dérivée du potentiel. Si on limite le développement du potentiel au deuxième ordre, la force apparaîtra comme une force de rappel élastique équivalente à celle d'un ressort. Nous avions vu à la section 6.1.5 concernant la modélisation des molécules que la constante de rappel des ressorts équivalents est simplement donnée par la dérivée seconde (ou la « *courbure* ») du potentiel d'interaction au point de repos. On peut donc voir l'atome d'un cristal comme étant un point massique lié à un ressort dont la constante de rappel est donnée par la courbure du potentiel dans lequel il est plongé.

Il est important de noter que sur le schéma de la figure 8.21 et dans les équations qui s'y rapportent, la coordonnée x_n représente la position de l'atome « n » par rapport à sa position de repos, c'est-à-dire, $x_n = x - x_0$ où x_0 est la position de repos de l'atome. Nous appellerons z la coordonnée de position des atomes au sein du cristal.

Modèle des masses liées

Nous allons donc voir un matériau cristallin comme constituant un ensemble de masses liées les unes aux autres par des ressorts, comme le suggère le schéma de la figure 8.22.

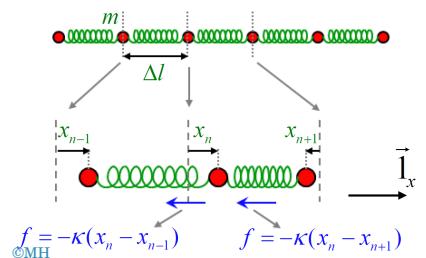
Pour la simplicité des développements, il s'agit d'une représentation volontairement limitée à une dimension. En réalité les atomes forment des réseaux tridimensionnels et la modélisation de leur mouvement est beaucoup plus complexe. Mais nous n'avons pas besoin du caractère tridimensionnel pour faire apparaître la notion d'onde dans les cristaux. En effet, si nous limitons notre développement théorique à des mouvements d'atomes ayant lieu dans le sens d'une rangée d'atomes, les interactions en jeu ne concernent que les atomes voisins d'une rangée et, à l'image du schéma de la figure 8.22, nous pouvons réduire la description à une seule dimension. En conclusion, nous limitons notre description aux « *ondes longitudinales* » dans les cristaux.

Équation du mouvement d'un atome

Pour calculer l'équation du mouvement d'un atome, il suffit de faire le bilan des forces qui s'y exercent. Ceci est particulièrement simple dans le cas de la chaîne d'atomes unidimensionnelle considérée ici puisque les forces exercées sur un atome particulier sont simplement données par la variation de longueur des 2 ressorts qui le lient à ses voisins. Pour l'atome n de la chaîne, on considère d'abord la force due à la variation de longueur du ressort de gauche. Celle-ci est donnée par le raisonnement suivant.

Le ressort de gauche est situé entre les atomes $n - 1$ et n de la chaîne. Au repos ces atomes ne subissent par définition aucune force ; dans notre modèle le ressort qui les relie est au repos, la longueur au repos du ressort étant simplement la distance entre atomes au repos. Cette distance entre atomes est ce que l'on appelle la « *constante de réseau* » : elle est notée Δl sur le schéma de la figure 8.23 où les lignes grises pointillées indiquent les positions de repos des atomes. Si les atomes se déplacent par rapport à leur position de repos, la longueur du ressort varie, ce qui va engendrer une force. Si x_{n-1} et x_n sont les déplacements des atomes par rapport à leur position de repos, la variation de longueur du ressort est $x_n - x_{n-1}$, la force de rappel correspondante est donc $-\kappa(x_n - x_{n-1})$. En effet, si l'atome n se déplace de la distance x_n alors que l'atome $n - 1$ reste fixe ($x_{n-1} = 0$) l'allongement du ressort est de x_n et le ressort exercera une force $-\kappa x_n$ sur l'atome n . On considère ici la composante de la force dans la direction \vec{I}_x qui est l'orientation des repères des déplacements x_n de chacun des atomes (orientation de la gauche vers la droite sur le schéma). Avec cette convention, le signe de x_n donne automatiquement le bon signe à la force de rappel : si le déplacement de l'atome n se fait vers la droite, soit $x_n > 0$, alors la force est dirigée vers la gauche, soit $-\kappa x_n < 0$, et vice-versa.

FIGURE 8.22 : Cristal unidimensionnel, vu comme un ensemble de masses liées entre elles par des ressorts.



Équation du mouvement impliquant les atomes voisins

Si on suppose maintenant que l'atome $n - 1$ se déplace également vers la droite. L'allongement du ressort s'en trouvera diminué ; il vaudra $x_n - x_{n-1}$ et la force de rappel sur l'atome n sera donc

$-\kappa(x_n - x_{n-1})$. Remarquez que cette expression prend en compte le sens de déplacement de l'atome $n - 1$ car si cet atome se déplace vers la gauche, soit $x_{n-1} < 0$, alors la force de rappel $-\kappa(x_n - x_{n-1})$ s'en trouve augmentée (en module), ce qui est le cas en pratique puisque l'allongement du ressort est augmenté par ce déplacement vers la gauche de l'atome $n - 1$.

Le raisonnement est le même pour obtenir la force de rappel du ressort de droite. En résumé on peut dire que le ressort de droite subit une compression de $x_n - x_{n+1}$ ce qui conduit à la force de rappel $-\kappa(x_n - x_{n+1})$. Notez que, pour la généralité de l'illustration, x_{n+1} a été choisi négatif sur le schéma de la figure 8.23 ; ce choix étant bien entendu totalement arbitraire dans la mesure où rien ne nous permet de connaître a priori le déplacement des atomes dans le cristal. C'est la résolution de l'équation d'onde du cristal que nous sommes en train de construire qui nous donnera la possibilité de connaître les déplacements des atomes et leur évolution à partir de conditions initiales ou de conditions aux limites (voir la section précédente sur les ondes de cordes).

En conclusion, la force totale qui s'exerce sur l'atome n est la somme des forces des deux ressorts, soit $f = -\kappa(x_n - x_{n-1}) - \kappa(x_n - x_{n+1}) = -\kappa(2x_n - x_{n-1} - x_{n+1})$.

L'équation du mouvement de l'atome n est donnée par la deuxième loi de Newton $a = f/m$ où a est l'accélération de l'atome n (soit \ddot{x}_n) et m est sa masse. On peut donc écrire

$$\ddot{x}_n = -\frac{\kappa}{m}(2x_n - x_{n-1} - x_{n+1}). \quad (8.40)$$

Discrétisation de la dérivée

En multipliant en haut et en bas par le carré de la constante de réseau Δl^2 , on voit apparaître la forme discrète de la dérivée seconde de la fonction « déplacement » des atomes $x(z)$ (voir l'établissement de l'équation d'onde de corde à la section 8.1.2),

$$\ddot{x}_n = \frac{\kappa \Delta l^2}{m} \frac{(x_{n-1} + x_{n+1} - 2x_n)}{\Delta l^2}, \quad (8.41)$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\kappa \Delta l^2}{m} \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}. \quad (8.42)$$

Le passage des dérivées aux dérivées partielles est naturel dans la mesure où la fonction déplacement x est devenue une fonction de deux variables, le temps t et la position z (voir section 8.1.2). Comme on l'a fait pour les cordes, cette fonction est obtenue, en remplaçant l'indice n par la coordonnée longitudinale z selon la règle de correspondance $x(z = n\Delta l) = x_n$. La coordonnée longitudinale z repère donc la position des atomes le long de la chaîne alors que la coordonnée x repère le déplacement des atomes relativement à leur position de repos, comme l'indique le schéma de la figure 8.24.

FIGURE 8.23 : Notation des déplacements x_n pour chacune des masses constituant la chaîne modélisant un cristal.

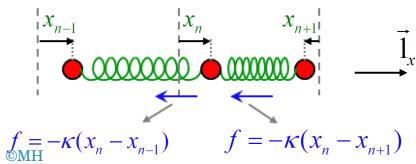
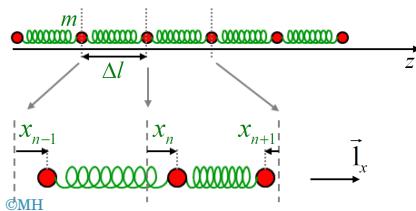


FIGURE 8.24 : La coordonnée z repère la position d'une masse dans la chaîne au repos, tandis que la coordonnée x_n repère le déplacement de la masse n . Il existe un lien univoque entre la position au repos d'une masse z et son numéro n . Dans le cas simplifié illustré ici, $z_n = n\Delta l$.



Remarque Il convient d'être très prudent dans les interprétations physiques des coordonnées car il s'agit de deux coordonnées de positions longitudinales. Pour les cordes la coordonnée x repère également le déplacement des masses relativement à leur position de repos mais cette position est plus facile à visualiser dans la mesure où elle correspond à un mouvement transverse des atomes. Pour les ondes de compression la fonction $x(z, t)$ donne, pour un temps t donné, le déplacement des atomes de la chaîne à une certaine position z au sein de cette chaîne. Plus précisément, la coordonnée z repère la position absolue des atomes au repos dans la chaîne et $x(z, t)$ repère leurs déplacements par rapport à ces positions de repos.

Équation d'onde

Un simple coup d'œil au modèle dynamique du cristal auquel on a abouti montre qu'il a exactement la même structure mathématique que celui des cordes (voir section 8.1),

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\kappa \Delta l^2}{m} \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}. \quad (8.43)$$

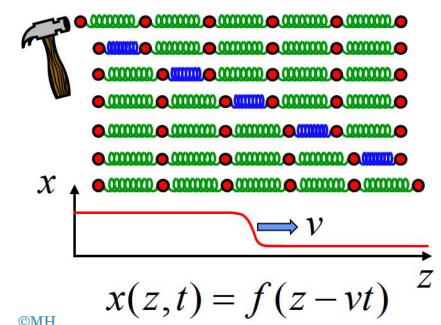
Comme il s'agit effectivement de la même équation d'onde que celle des cordes nous pouvons conclure que les milieux cristallins véhiculent des ondes. On constate facilement que le coefficient de la dérivée seconde spatiale, le facteur $\kappa \Delta l^2/m$, a les dimensions d'une vitesse au carré, ce qui nous permet d'introduire la vitesse caractéristique du milieu cristallin $v = \Delta l \sqrt{\kappa/m}$. Nous constatons ainsi qu'un cristal véhicule des ondes dont la vitesse est imposée par ses caractéristiques physiques, c'est-à-dire, la masse m des atomes, le pas Δl du réseau et la courbure κ du potentiel d'interaction des atomes,

$$\boxed{\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}} \quad \left(v = \sqrt{\frac{\kappa}{m}} \Delta l \right). \quad (8.44)$$

Interprétation physique des ondes de compression

Les ondes dont il s'agit ici sont appelées ondes de compression car le mouvement des atomes dans l'axe de la chaîne d'atomes correspond à des variations locales de la densité du matériau. Le matériau entre en compression dans certaines zones et se détend dans d'autres. Si on frappe un matériau cristallin à son extrémité comme suggéré à la figure 8.25, le premier atome se déplace vers son voisin et crée une compression locale. La forme générale de la solution de l'équation d'onde, soit $f(z - vt)$, nous indique que cette zone de compression se déplace ensuite dans le matériau à la vitesse v jusqu'à ce qu'elle atteigne l'autre extrémité. Ce comportement est relativement contre-intuitif dans la mesure où le système physique que l'on analyse ici constitue un ensemble d'oscillateurs harmoniques couplés pour lequel il serait légitime de s'attendre à un comportement oscillant. Mais plutôt que de rentrer en oscillations, le premier atome transmet son mouvement (son énergie cinétique) à son

FIGURE 8.25 : Illustration à considérer comme une bande dessinée, où chaque ligne représente un instant différent. On frappe initialement la masse de l'extrême gauche, ce qui provoque une compression qui se déplace de proche en proche vers la droite. Il en résulte un déplacement global vers la droite qui se propage à la vitesse v comme illustré sur le graphique.



voisin qui en fait de même de sorte que la perturbation initiale se propage de proche en proche sous forme d'une onde $f(z-vt)$. Cet aspect des choses a déjà été discuté à la section 8.1.5 pour les cordes qui constituent également des chaînes d'oscillateurs harmoniques couplés. Remarquez que, dans le cas du choc à l'extrémité de la chaîne atomique du cristal, l'onde a la forme d'une marche d'escalier (voir schéma ci-dessus). Les atomes se situant à gauche de la marche se sont déjà déplacés alors que les autres sont encore au repos. Ce n'est que quand l'onde aura traversé tout le cristal que ce dernier se sera déplacé entièrement sous l'effet du choc.

8.2.2 Ondes dans les milieux amorphes

Les ondes de compression se propagent également dans les milieux amorphes tels que les solides non cristallins, les liquides ou les gaz. Notre objectif est ici de dériver l'équation d'onde pour ces milieux. L'absence de structure cristalline régulière et périodique nous oblige à recourir à une procédure de discréétisation du milieu amorphe de façon analogue à ce que l'on a fait pour les cordes à la section 8.1.2. On considère dans un premier temps un milieu amorphe solide (l'application aux autres types de milieux amorphes peut s'en déduire).

Modèle mésoscopique considéré

Le schéma de la figure 8.26 montre une tige de matériau solide amorphe. Pour la modéliser, on la décompose en segments de longueur Δl et de masse Δm . On concentre ensuite les masses Δm sur des masses ponctuelles fictives reliées entre elles par des ressorts sans masse de longueur Δl représentant l'élasticité du matériau.

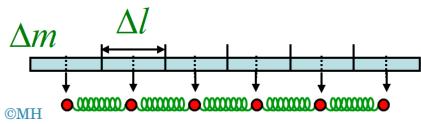
Cette manière de faire est en tout point analogue à ce qui a été fait pour les cordes à la section 8.1.2. Nous avons remplacé le matériau étudié par un système équivalent possédant les mêmes propriétés mécaniques, en l'occurrence, la masse par unité de longueur et l'élasticité (exactement comme la corde qui a été modélisée comme une chaînette de masses ponctuelles reliées par des élastiques sans masse).

Cette procédure de modélisation nous conduit à une chaîne d'oscillateurs couplés en tout point identique à celle d'un milieu cristallin. Il apparaît donc que le modèle mathématique représentant la dynamique interne d'une tige de matériau amorphe est le même que celui des milieux cristallins dont l'expression est reprise ci-dessous,

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \quad \left(v = \sqrt{\frac{\kappa}{m}} \Delta l \right). \quad (8.45)$$

On en conclut d'emblée que les milieux amorphes, comme les milieux cristallins, seront le siège de phénomènes de propagation d'onde. Il s'agit également ici d'ondes de compression dans la mesure où nous n'avons pas pris en compte la possibilité de mouvements transverses des masses m .

FIGURE 8.26 : Tige de matériau solide amorphe modélisée par une chaîne de segments de longueur Δl et de masse Δm .



Ondes transverses et ondes longitudinales

En pratique, des mouvements transverses peuvent exister dans les milieux amorphes, comme dans les cristaux mais nous n'en tiendrons pas compte ici pour des raisons de simplicité.

Module de compressibilité

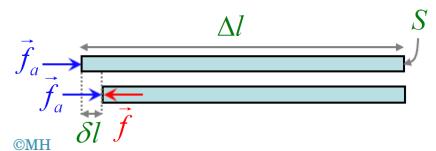
Dans l'équation d'onde (8.45), κ est la constante de rappel des ressorts de la chaîne d'oscillateurs harmoniques qui modélise le solide. Ces ressorts étant fictifs, la valeur de cette constante n'est pas connue, ce qui nous oblige à prolonger notre démarche de modélisation si l'on veut connaître la vitesse de propagation des ondes dans les milieux amorphes. Pour trouver la constante de rappel des ressorts imaginaires de notre modèle de la tige de matériau amorphe, on fait appel à la notion de module de compressibilité. Le module de compressibilité est le coefficient qui lie la pression appliquée sur un matériau à sa variation relative de longueur (ce coefficient est aussi appelé module de Young, en référence à Thomas Young (1773-1829), mais nous conserverons ici le nom de module de compressibilité pour des raisons évidentes de clarté d'interprétation physique). Ce dont nous avons besoin ici est l'élasticité des segments de longueur Δl de la tige. En subissant une pression, ce segment se comprimera d'une certaine longueur δl . La variation relative de longueur est alors, par définition, le rapport $\delta l/\Delta l$. Le lien entre la pression appliquée P_a et cette variation relative de longueur définit le module de compressibilité B , soit $P_a \equiv B\delta l/\Delta l$. Le schéma de la figure 8.27 illustre les grandeurs introduites. La pression résulte de la force \vec{f}_a appliquée au segment de longueur Δl . La pression P_a est simplement cette force divisée par la section S de la tige,

$$P_a = \frac{\vec{f}_a}{S}, \quad (8.46)$$

$$\equiv B \frac{\delta l}{\Delta l}. \quad (8.47)$$

Remarque Quelle que soit la longueur Δl , la variation relative de longueur $\delta l/\Delta l$ sera toujours la même pour une pression P_a donnée. C'est en cela que réside l'intérêt du module de compressibilité car c'est précisément pour cette raison qu'il ne dépend pas de la longueur Δl de la tige (contrairement à la constante de rappel d'un ressort qui elle dépend de la longueur du ressort). Comme Δl est arbitraire dans notre modèle, il était essentiel de recourir à cette description de l'élasticité d'un matériau. Les modules de compressibilité de la plupart des matériaux sont connus. Ils sont mesurés en mettant un matériau donné en compression et en mesurant sa variation relative de longueur. Les matériaux non solides sont enfermés dans des enceintes rigides de type chambre à piston pour effectuer ces mesures. Comme la force appliquée est équilibrée exactement par la force \vec{f} qu'exerce le matériau en réaction, on peut écrire $\vec{f} = -BS\delta l/\Delta l$. C'est cette force de réaction du matériau qui

FIGURE 8.27 : Calcul du module de compressibilité. Une force \vec{f}_a est appliquée sur le barreau qui subit une déformation δl de sa longueur initiale Δl . À l'équilibre, cela indique que le matériau réagit avec une force $\vec{f} = -\vec{f}_a$. La surface transverse du barreau est supposée uniforme et notée S .



constitue la force de rappel qui maintient en position les masses Δm de notre modèle,

$$P_a = \frac{f_a}{S} = B \frac{\delta l}{\Delta l} \Rightarrow f = -BS \frac{\delta l}{\Delta l}. \quad (8.48)$$

Ceci nous montre que la force exercée par le segment de longueur Δl (le ressort de notre modèle) est proportionnelle au déplacement δl de son extrémité. On retrouve donc la notion de force de rappel élastique $f = -\kappa x$ où le rôle de x est ici joué par δl . Ceci nous permet de trouver la valeur de la constante de rappel du segment de matériau amorphe de longueur Δl ,

$$\kappa = \frac{BS}{\Delta l}. \quad (8.49)$$

Ce résultat nous fournit l'expression de la vitesse de propagation des ondes dans un milieu amorphe à partir de la connaissance de son module de compressibilité (ou module de Young). En effet, dans l'expression du carré de la vitesse, il suffit d'extraire le produit $\kappa \Delta l$ et de le remplacer par le produit BS ,

$$\begin{aligned} \kappa \Delta l &= BS \\ v &= \sqrt{\frac{\kappa}{\Delta m}} \Delta l \Rightarrow v^2 = \frac{\kappa}{\Delta m} \Delta l^2 \xrightarrow{\downarrow} v^2 = \frac{BS \Delta l}{\Delta m}. \end{aligned} \quad (8.50)$$

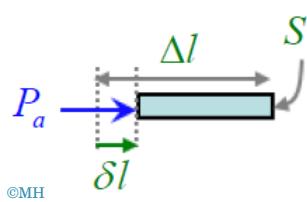
Or, dans le produit $S \Delta l$ on reconnaît le volume du segment de tige de longueur Δl , ce qui signifie que le rapport $\frac{\Delta m}{S \Delta l}$ qui apparaît dans l'expression du carré de la vitesse n'est rien d'autre que la masse volumique ρ du matériau. On peut donc écrire

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}. \quad (8.51)$$

Ce résultat nous montre que l'on peut connaître la vitesse de propagation des ondes dans un matériau amorphe à partir de la connaissance de son module de compressibilité B (module de Young) et de sa masse volumique ρ .

■ Application pratique

FIGURE 8.28 : Déformation δl d'un matériau de longueur initiale Δl , soumis à une pression P_a uniforme sur la surface S .



Vitesse du son dans l'air

Sur la base de ce résultat, nous sommes capables de déterminer la vitesse du son dans l'air. En effet, il nous suffit pour cela de connaître le module de compressibilité B de l'air. Comme le rappelle le schéma de la figure 8.28, le module de compressibilité relie la pression appliquée sur le segment Δl de la colonne d'air et la variation relative de longueur $\delta l/\Delta l$ qui en résulte. La colonne d'air

est ici supposée confinée dans un dispositif de type chambre à piston,

$$P_a \equiv B \frac{\delta l}{\Delta l} \quad B = ? \quad (8.52)$$

Nous pouvons donc facilement trouver B en calculant la variation de volume d'air de la colonne en fonction de la pression appliquée. Pour cela nous avons à disposition la loi de la transformation adiabatique de Laplace (les ondes sonores dans l'air présentent des variations beaucoup plus rapides que les échanges thermiques, c'est donc bien une transformation adiabatique qu'il convient d'utiliser et non une transformation isotherme),

$$PV^\gamma = P_0 V_0^\gamma. \quad (8.53)$$

Dans cette relation P est la pression atmosphérique à laquelle s'ajoute la pression « *acoustique* », responsable du déplacement des molécules d'air, c'est ce que l'on a appelé jusqu'à présent la pression appliquée P_a . Le volume V est quant à lui égal à $S(\Delta l - \delta l)$. On a donc

$$(P_0 + P_a)V^\gamma = P_0 V_0^\gamma \Rightarrow (P_0 + P_a)S^\gamma(\Delta l - \delta l)^\gamma = P_0 S^\gamma \Delta l^\gamma. \quad (8.54)$$

En mettant Δl en évidence et en tenant compte du fait que le rapport $\delta l/\Delta l$ est beaucoup plus petit que l'unité on trouve, dans une approximation du premier ordre, $P_a = \gamma P_0 \delta l / \Delta l$,

$$\rightarrow (P_0 + P_a) \cancel{\Delta l}^\gamma \left(1 - \frac{\delta l}{\Delta l}\right)^\gamma = P_0 \cancel{\Delta l}^\gamma \xrightarrow{(1-\varepsilon)^{-\gamma} \approx (1+\gamma\varepsilon)} (P_0 + P_a) = P_0 \left(1 + \gamma \frac{\delta l}{\Delta l}\right). \quad (8.55)$$

$$\rightarrow P_a = \frac{\gamma P_0 \delta l}{\Delta l} \Rightarrow B = \gamma P_0. \quad (8.56)$$

En reprenant la définition du module de compressibilité $P_a = B \delta l / \Delta l$ nous arrivons à son expression pour un gaz parfait $B = \gamma P_0$,

$$P_0 = 1 \times 10^5 \text{ Pa}, \rho = 1.3 \text{ kg/m}^3 \quad (8.57)$$

$$v = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho}} = 280 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \begin{matrix} \cancel{\text{m}} \\ \uparrow \\ \gamma = 1.4 \end{matrix} = 332 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (8.58)$$

C'est la vitesse à insérer dans l'équation d'onde

$$\boxed{\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}}. \quad (8.59)$$

Considérons donc la loi de Laplace de l'adiabatique appliquée au segment de la colonne d'air de longueur Δl .

En considérant une pression atmosphérique de $1 \times 10^5 \text{ Pa}$ et une température de 273.15 K , la masse volumique de l'air à considérer est de 1.3 kg/m^3 . Sachant de plus que le coefficient adiabatique γ de l'air est de 1.4 on trouve une vitesse du son dans l'air de 332 m/s .

■ Un peu d'histoire...

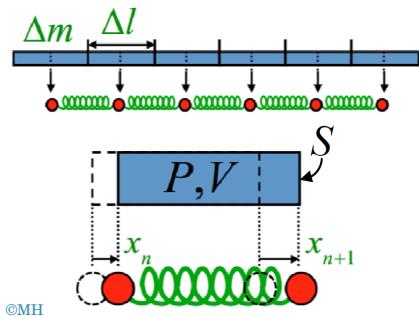
Ce calcul avait été fait par Newton vers 1680, avant que ne soit connue la loi de la transformation adiabatique de Laplace. Newton

a donc considéré la loi de Boyle et Mariotte de la transformation isotherme $PV = \text{cste}$. Il a ainsi fait tout le calcul comme si le coefficient adiabatique valait 1 et il a trouvé pour cette raison une vitesse plus faible de 280 m/s. Cet aspect historique est illustré à l'équation (8.58) par le nombre 280 barré et la mise en évidence de la valeur du coefficient adiabatique pour l'air.

Équation d'onde acoustique

L'équation d'onde de compression dérivée ci-dessus pour les milieux amorphes est exprimée en termes de la variable de position x . Cette variable représente la position des masses ponctuelles fictives apparaissant dans notre démarche de modélisation (voir section 8.2.2). Elle nous a été utile mais il faut reconnaître que cette variable n'est pas adaptée à la description de la propagation d'onde dans les milieux amorphes tels que les liquides où les gaz. Puisque les déplacements des molécules de liquide ou de gaz engendrent des variations de pression on préfère généralement décrire ces ondes en termes de pression (on parle d'ondes de pression « *acoustique* » quand la fréquence des ondes correspond à des sons audibles). La relation entre la pression et la fonction des déplacements moléculaires $x(z, t)$ est facile à établir. Il nous sera donc également facile d'obtenir l'équation d'onde en termes de pression acoustique.

FIGURE 8.29 : Modélisation d'une colonne de gaz (ici horizontale), assimilée à un ressort.



©MH

Ondes au sein d'un gaz Nous nous limiterons, ici, à des ondes se propageant dans un gaz. Établissons tout d'abord le lien entre la fonction $x(z, t)$ et la pression acoustique. Reprenons pour cela la démarche de modélisation du milieu amorphe illustrée sur le schéma de la figure 8.29. On se souvient que l'élasticité du milieu est obtenue à partir du module de compressibilité donnant la réponse du milieu à une variation de pression. Sur le schéma du bas de la même figure est représenté un segment de colonne de gaz. Au repos ce segment a une longueur Δl et un volume $V_0 = S\Delta l$, où S est la section de la colonne. Dans ce cas les masses fictives sont localisées en $x_n = 0$ et $x_{n+1} = 0$. Lorsqu'une onde se propage les masses se déplacent et la pression de l'air change en raison de la variation adiabatique de volume qui en résulte.

Pression acoustique On définit la *pression acoustique* P comme étant la variation de pression par rapport à la pression au repos P_0 . Elle est donc définie par l'égalité $P_{tot} = P_0 + P$, où P_{tot} est la pression totale. La loi de Laplace de l'adiabatique $P_{tot}V^\gamma = P_0V_0^\gamma$ nous permet de relier les positions x_n et x_{n+1} à la pression acoustique grâce au développement proposé ci-dessous.

Nous partons donc de

$$P_{tot}V^\gamma = P_0V_0^\gamma. \quad (8.60)$$

Pour évaluer V , on se réfère au schéma de la figure 8.29, où l'on voit que le volume V est donné par la relation $V = V_0 + (x_{n+1} - x_n)S$. En explicitant $P_{tot} = P_0 + P$, ceci conduit à l'expression

$$(P_0 + P)[V_0 + (x_{n+1} - x_n)S]^\gamma = P_0 V_0^\gamma. \quad (8.61)$$

En mettant alors P_0 et V_0 en évidence pour les éliminer dans les deux membres, on fait apparaître à l'intérieur des crochets le rapport S/V_0 que l'on peut remplacer par $1/\Delta l$ (car $V_0 = S\Delta l$),

$$\cancel{P_0 V_0} \left(1 + \frac{P}{P_0}\right) \left[1 + \frac{(x_{n+1} - x_n)}{\Delta l}\right]^\gamma = \cancel{P_0 V_0} 1. \quad (8.62)$$

De plus si on tient compte du fait que les déplacements x_n et x_{n+1} sont beaucoup plus petits que Δl on peut appliquer l'approximation du premier ordre du facteur entre crochets à la puissance γ . On applique cette approximation ci-dessous après avoir fait passer le facteur entre crochets dans le membre de droite [cf. $(1 + \varepsilon)^{-\gamma} = 1 - \gamma\varepsilon$],

$$\cancel{1 + \frac{P}{P_0}} = \cancel{1} - \gamma \frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta l}. \quad (8.63)$$

Dérivée discrète À la limite pour Δl tendant vers zéro, le rapport $\frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta l}$ devient la dérivée par rapport à z de la fonction $x(z, t)$ [$\frac{\partial x(z, t)}{\partial z} = \frac{x(z + \Delta l) - x(z)}{\Delta l} = \frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta l}$] et

$$\frac{P}{P_0} = -\gamma \frac{\partial x(z, t)}{\partial z}. \quad (8.64)$$

Finalement nous obtenons la relation recherchée entre la pression et la fonction des déplacements $x(z, t)$,

$$P = -\gamma P_0 \frac{\partial x(z, t)}{\partial z}. \quad (8.65)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}} \quad (8.66)$$

Si on tient compte de la commutativité de l'opération de dérivée partielle lorsque ces dérivées sont continues, on obtient

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} = v^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial x(z, t)}{\partial z}. \quad (8.67)$$

En multipliant à gauche et à droite par $-\gamma P_0$ on fait apparaître la pression acoustique $P = -\gamma P_0 \frac{\partial x}{\partial z}$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[-\gamma P_0 \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} \right] = v^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[-\gamma P_0 \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} \right], \quad (8.68)$$

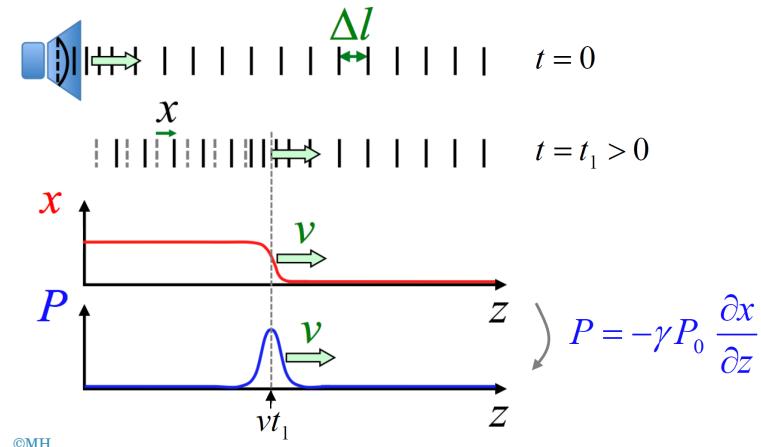
ce qui nous donne finalement l'équation d'onde en termes de la pression acoustique,

$$\frac{\partial^2 P(z, t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 P(z, t)}{\partial z^2}. \quad (8.69)$$

En conclusion, la pression acoustique répond bien à l'équation d'onde standard.

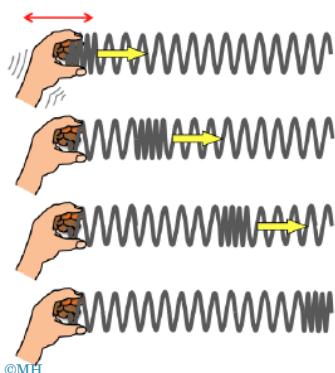
Pour obtenir l'équation d'onde en termes de la pression acoustique, il convient donc simplement de reprendre l'équation d'onde en termes des déplacements et de la dériver par rapport à z .

FIGURE 8.30 : Illustration d'une onde de pression acoustique, suite à compression unique unidirectionnelle au niveau de la membrane du haut-parleur. Cette onde se propage en z avec un déplacement uniforme sauf au voisinage de la perturbation qui se propage à vitesse v . L'onde pression P qui en résulte est localisée dans zone de transition de x .



Interprétation physique Il est intéressant d'interpréter physiquement le lien existant entre les déplacements des molécules représentés par la fonction $x(z, t)$ et la pression acoustique $P(z, t)$. À cette fin une onde acoustique correspondant à une zone de compression unique se propageant dans l'espace est représentée à la figure 8.30. Une telle onde pourrait par exemple être créée à l'aide de la membrane d'un haut-parleur qui ferait un déplacement simple (sans retour) dans une direction. Ce déplacement a lieu vers la droite sur le schéma. La compression résultant du déplacement de la membrane se propage de proche en proche, ce qui est illustré sur le schéma par les traits également espacés de la distance Δl sauf à l'endroit de la compression où ils sont plus proches l'un de l'autre (ces traits correspondent à l'image du gaz donnée par la procédure de modélisation vue à la section 8.2.2). Le profil $x(z, t)$ de l'onde de déplacement moléculaire a la forme d'une marche d'escalier séparant la zone dans laquelle les molécules se sont déjà déplacées de la zone dans laquelle elles n'ont pas encore bougé. Puisque le profil de l'onde de pression acoustique est donné par la dérivée première en z de cette fonction $x(z, t)$ multipliée par $-\gamma P_0$ on constate que cette onde est caractérisée par un pic localisé de pression. Ce pic correspond à la zone de compression (zone dans laquelle les traits sont proches l'un de l'autre). Il apparaît donc dans cet exemple que l'onde de pression est proportionnelle à la dérivée spatiale de l'onde de déplacement.

FIGURE 8.31 : Représentation d'une onde longitudinale.



Équation d'onde « standard »

L'équation d'onde que nous avons étudiée jusqu'à présent est d'application universelle. Elle décrit la plupart des phénomènes ondulatoires qui ont lieu dans la matière, qu'elle soit solide, liquide ou gazeuse. C'est pourquoi on l'appelle l'équation d'onde « *standard* »,

$$\boxed{\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}} \quad (8.70)$$

Comme nous venons de le voir, elle décrit des ondes de compression que l'on appelle également ondes « *longitudinales* » car les

déplacements de la matière associés au passage de l'onde se font dans la même direction que le déplacement de l'onde elle-même. L'exemple des cordes nous a montré que cette équation permet également de décrire des ondes « *transversales* » (ou « *transverses* ») correspondant à des déplacements de matière perpendiculaires à la direction de propagation de l'onde. Ces deux types d'ondes sont illustrés par l'exemple classique du ressort représentant ici toute matière élastique. L'onde longitudinale, sur la figure 8.31 correspond à la propagation d'une compression (les spires du ressort bougent dans la même direction que l'onde elle-même. L'onde transverse, à la figure 8.32, correspond à un déplacement vertical des spires du ressort alors que l'onde avance horizontalement.

L'équation d'onde standard n'est néanmoins pas la seule équation à être utilisée pour modéliser des phénomènes ondulatoires. Une grande variété d'équations d'onde a été développée dans une multitude de domaines de la physique. À titre d'exemple, voici, ci-dessous, une équation d'onde hydrodynamique décrivant la dynamique des vagues en eaux peu profondes. L'analyse de cette équation montre que la vitesse de déplacement de l'onde dépend de son amplitude. C'est ce qui permet de décrire mathématiquement le phénomène de déferlement des vagues dont profitent les surfeurs (cf. figures 8.34 et 8.33),

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{h}} \left(x \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{2}{3} \alpha \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{1}{3} \sigma \frac{\partial^3 x}{\partial z^3} \right). \quad (8.71)$$

Cette équation n'est bien entendu pas à retenir, elle est donnée ici seulement à titre indicatif pour illustrer la variété et la complexité des équations d'onde rencontrées en physique.

FIGURE 8.32 : Représentation d'une onde transverse.

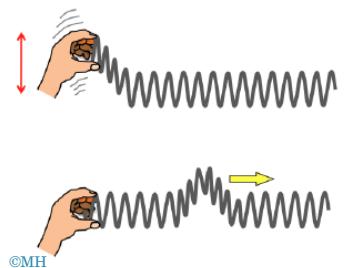
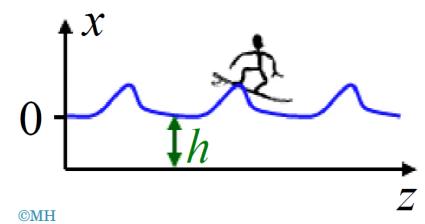


FIGURE 8.33 : Surfeur.



FIGURE 8.34 : Représentation schématique d'un surfeur abordant une vague dont la hauteur correspond à x et la direction de propagation à z . La profondeur de l'eau h détermine le déferlement des vagues.



8.3 Le coin des assistant·es

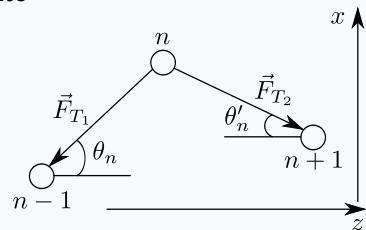
Ondes de cordes : discréétisation

Calcul des forces

On discrétise la corde en tronçons de longueur Δl et de masse m , les forces de tension exercées sur chacune de ces masses s'expriment alors de la manière suivante

$$\vec{f}_{n_{\text{corde}}} = \vec{F}_{T_1} + \vec{F}_{T_2},$$

avec
$$\begin{cases} \vec{F}_{T_1} &= -F_T \cos(\theta_n) \vec{1}_z - F_T \sin(\theta_n) \vec{1}_x, \\ \vec{F}_{T_2} &= +F_T \cos(\theta'_n) \vec{1}_z - F_T \sin(\theta'_n) \vec{1}_x, \end{cases}$$



$$\vec{f}_{n_{\text{corde}}} = -F_T[\cos(\theta_n) - \cos(\theta'_n)] \vec{1}_z - F_T[\sin(\theta_n) + \sin(\theta'_n)] \vec{1}_x.$$

Petits angles : $\cos(\theta) \approx 1$ et $\sin(\theta) \approx \theta \rightarrow \vec{f}_{n_{\text{corde}}} \approx -F_T(\theta_n + \theta'_n) \vec{1}_x$, $\tan(\theta_n) \approx \theta_n \rightarrow \vec{f}_{n_{\text{corde}}} \approx -F_T(\tan(\theta_n) + \tan(\theta'_n)) \vec{1}_x$, $\begin{cases} \tan \theta_n &= \frac{x_n - x_{n-1}}{\Delta l} \\ \tan \theta'_n &= \frac{x_n - x_{n+1}}{\Delta l} \end{cases}$

$$\vec{f}_{n_{\text{corde}}} \approx -F_T \frac{(x_n - x_{n-1}) + (x_n - x_{n+1})}{\Delta l} \vec{1}_x$$

Modèle discret de la corde : $\ddot{x}_n = \frac{F_T}{m \Delta l} (x_{n+1} + x_{n-1} - 2x_n)$.

Équation d'onde standard

L'équation d'onde standard se présente sous la forme

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}.$$

Cette équation nous dit que l'accélération d'une quantité x est proportionnelle à la variation moyenne des quantités voisines. Elle décrit aussi bien la propagation des ondes longitudinales (de compression) que des ondes transversales (telles que les ondes de corde).

Cette équation admet comme solutions des ondes se propageant dans la direction z (dans les deux sens), à la vitesse v . La solution générale de l'équation d'onde standard est de la forme,

$$x(z, t) = f(z - vt) + g(z + vt),$$

où f et g désignent des fonctions quelconques. Les ondes de la forme $f(z - vt)$ sont dites « progressives », tandis que celle de la forme $g(z + vt)$ sont dites « régressives ».

L'équation d'onde standard est linéaire, ce qui implique que toute combinaison linéaire de solutions est aussi une solution. Cette équation décrit une large variété de phénomènes ondu-latoires comme les ondes de cordes, les ondes acoustiques, les ondes électromagnétiques, les ondes gravitationnelles, etc.

Problème aux conditions aux limites

Il est possible de déterminer l'évolution d'une onde progressive (ou régressive) $x(z, t)$ à partir de la connaissance de la grandeur x au point $z = 0$ pour tout temps, soit $x(0, t) = h(t)$. Prenons pour exemple une onde progressive $f(z - vt)$. En $z = 0$, nous avons

$$f(-vt) = x(0, t) = h(t).$$

Posons $u = -vt$,

$$u = -vt, \quad f(u) = h(-u/v).$$

Posons ensuite $u = z - vt$,

$$f(z - vt) = h\left(-\frac{z - vt}{v}\right).$$

Ceci montre que $h(t)$ impose la forme de la solution en tout temps.

Équation d'onde de corde

L'équation d'onde pour une corde tendue est

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{F_T}{\mu} \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}, \quad v = \sqrt{\frac{T}{\mu}},$$

$x(z, t)$ est le déplacement transverse des points matériels de la corde, μ la masse linéique de la corde. La force de tension F_T est supposée constante le long de la corde (approximation des petits angles). La vitesse de propagation le long de l'axe z est donnée par v .

Équation d'onde de compression dans un milieu cristallin

Pour un réseau atomique 1D, l'équation d'onde s'écrit

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\kappa(\Delta l)^2}{m} \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}, \quad v = \Delta l \sqrt{\frac{\kappa}{m}},$$

où $x(z, t)$ est le déplacement longitudinal par rapport à la position d'équilibre, m la masse d'un atome, Δl la constante du réseau (distance entre deux atomes à leur position d'équilibre), et κ la courbure du potentiel d'interaction atomique (potentiel parabolique). La vitesse de propagation de l'onde selon l'axe z est donnée par v .

Équation d'onde de compression dans un milieu amorphe

Dans un milieu amorphe,

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{B}{\rho} \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}, \quad v = \sqrt{\frac{B}{\rho}},$$

où $x(z, t)$ est le déplacement, ρ la densité volumique, et B le module de compressibilité (ou module de Young), qui permettent de calculer v .

Les ondes, dans ce milieu, peuvent être transverses ou longitudinales.

Équation d'onde acoustique

La pression acoustique P est définie comme l'écart à la pression au repos P_0 . L'équation d'onde acoustique s'obtient à partir de celle pour les milieux amorphes. Il suffit de la dériver par rapport à z , puisque $P = -\gamma P_0 \frac{\partial x}{\partial z}$. On obtient l'équation d'onde acoustique :

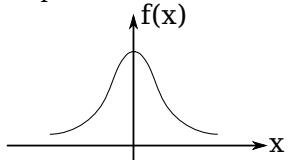
$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \frac{B}{\rho} \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}, \quad v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}.$$

Dans le cas de l'air, le module de compressibilité est donné par $B = \gamma P_0$, où γ est le coefficient adiabatique.

8.4 Questions théoriques

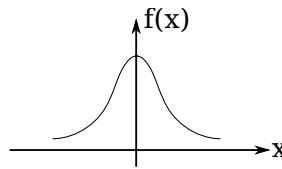
1. Écrivez l'équation d'onde standard pour une grandeur physique x dont les valeurs dépendantes du temps sont décrites le long de l'axe z et donnez la solution générale de cette équation.

2. Soit une fonction $f(x)$ représentée par le graphe ci-après.



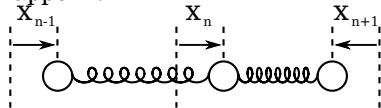
Représentez qualitativement dans les mêmes axes la fonction $f(x - vt_0)$ où la vitesse v et le temps t_0 ont des valeurs positives.

3. Soit une fonction $f(x)$ représentée par le graphe ci-après.



Représentez qualitativement dans les mêmes axes la fonction $f(x + vt_0)$ où la vitesse v et le temps t_0 ont des valeurs positives.

4. Le schéma ci-après montre les atomes d'un cristal (à une dimension) dont les interactions sont symbolisées par des ressorts de constante de rappel κ .



Donnez l'expression de la force totale exercée sur l'atome central « n » en fonction des positions des 3 atomes (mesurées par rapport à leur position de repos).

8.5 Exercices

Exercice 8.1

Un ressort possède une masse linéique $\mu = 2 \text{ g cm}^{-1}$ et présente une force de tension $F_0 = 0.02 \text{ N}$ pour 10% de l'élongation relative. Calculez la vitesse de propagation v des ondes de compression de ce ressort. (Réponse : $v = 1 \text{ ms}^{-1}$)

Exercice 8.2

Le schéma de la figure E.8.1 représente une chaîne de masses $m = 20 \text{ g}$ reliées entre elles par des cordes élastiques dont on peut négliger la masse. Chaque masse m est également reliée à une pa-

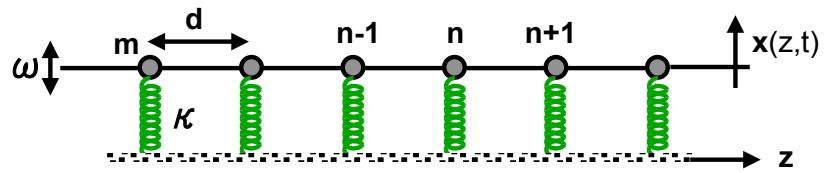


FIGURE E.8.1 :

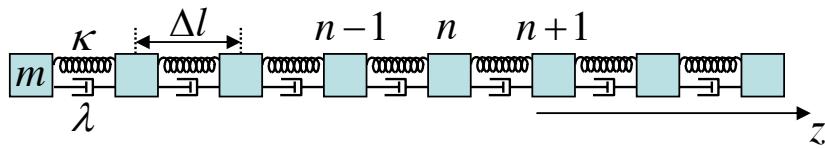
roi rigide par un ressort de rappel $\kappa = 5 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$. La distance entre masses est $d = 2 \text{ cm}$ et la force de tension F_T de la chaîne est de 100 N . La position de repos de la chaîne correspond à la position de repos des ressorts (on ne tient pas compte de la pesanteur).

- En vous inspirant des développements du cours, établissez l'équation qui régit le mouvement vertical $x_n(t)$ d'une masse donnée n en fonction de la hauteur des masses adjacentes $n + 1$ et $n - 1$.
- Si on assimile la chaîne à une corde continue, le résultat obtenu en (a) peut être utilisé pour dériver l'équation d'onde qui régit le mouvement $x(z,t)$ de la chaîne dans sa globalité. Établissez cette équation.
- À l'aide du formalisme des phaseurs, calculez la solution harmonique de cette équation. À cette fin, établissez la relation entre le nombre d'onde k et la pulsation ω (relation de dispersion). $x = a \cos\left(\sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{v^2}} z - \omega t\right)$

Exercice 8.3

Le schéma de la figure E.8.2 montre une chaîne d'oscillateurs harmoniques amortis de masse m , de constante de rappel κ ($f = -\kappa x$) et de coefficient de frottement visqueux λ ($f = -\lambda dx/dt$). La masse des couples ressort-amortisseur est négligeable devant les masses m . La distance entre les masses au repos est Δl .

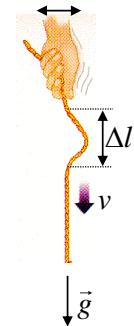
- Établissez l'équation qui régit le mouvement horizontal $x_n(t)$ d'une masse donnée n en fonction de la position des masses adjacentes $n - 1$ et $n + 1$.

**FIGURE E.8.2 :**

- b) En assimilant la chaîne à un système continu, établissez l'équation d'onde qui régit le mouvement $x(z, t)$ de la chaîne dans sa globalité.
- c) Calculez la relation de dispersion qui caractérise la propagation des ondes harmoniques le long de la chaîne.

Exercice 8.4

Le schéma de la figure E.8.3 montre une corde tendue sous l'effet de son propre poids dans le champ gravitationnel terrestre. Une onde est générée en imposant à l'extrémité supérieure de la corde un mouvement transversal d'aller-retour unique. La longueur Δl qu'occupe l'onde sur la corde augmente au fur et à mesure de sa progression. Vrai ou faux ? Justifiez.

**FIGURE E.8.3**

Récapitulatif des notions vues dans cette leçon

Indispensable	Nécessaire	Intéressant
<ul style="list-style-type: none"> — modélisation d'une corde par discréétisation — équation d'onde standard — solution générale de l'équation d'onde — sens physique de la solution de l'équation d'onde — distinction entre onde transverse et longitudinale 	<ul style="list-style-type: none"> — onde de corde — équations du mouvement d'une corde — onde acoustique — équation d'onde acoustique — onde de compression — onde de corde 	<ul style="list-style-type: none"> — vitesse du son dans l'air — onde et surf — validité de l'approximation de la force de tension constante

9

Leçon

Ondes électromagnétiques

■ Pré-requis pour cette leçon ■

- | | |
|--|---|
| <ul style="list-style-type: none"> — <i>gradient</i> — <i>divergence</i> — <i>rotationnel</i> — <i>électromagnétisme</i> — <i>théorème circulation-rotationnel de</i> | <ul style="list-style-type: none"> <i>Stokes</i> — <i>théorème flux-divergence d'Ostrogradski-Gauss</i> — <i>dérivée partielle</i> — <i>équation d'onde</i> |
|--|---|

GRÂCE À NOS CONNAISSANCES de l'électromagnétisme, nous allons montrer que le vide constitue un milieu capable de propager des ondes, dont l'existence a été prédicta théoriquement par Maxwell à la suite de son ajout d'un terme dynamique à la loi d'Amperé. Il s'agit de l'une des contributions scientifiques les plus remarquables du XIXe siècle. Pour établir l'équation d'onde électromagnétique, nous allons suivre un développement analogue à celui que Maxwell a réalisé il y a plus de 150 ans, avec des outils mathématiques bien différents de ceux que nous utilisons aujourd'hui.



L09P1



9.1 Équation d'onde électromagnétique

Maxwell s'est servi des quatre lois de base de l'électromagnétisme, qui portent maintenant son nom, et les a combinées. Ces équations sont,

$$\overline{\text{rot}} \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J}, \quad (9.1)$$

$$\epsilon_0 \text{div} \vec{E} = \rho, \quad (9.2)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0, \quad (9.3)$$

$$\overline{\text{rot}} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0. \quad (9.4)$$

Maxwell a considéré ces équations dans le vide, c'est-à-dire en l'absence absolue de charge et de courant. On peut donc considérer $\vec{J} \equiv 0$ et $\rho \equiv 0$ dans les équations qui précèdent. Remarquons que l'utilisation du symbole \equiv indique que l'égalité est valable pour toutes les valeurs possibles des arguments de \vec{J} et ρ , ce qui veut dire que les champs sont nuls partout et tout le temps^a.

^a Cette hypothèse est un peu excessive, mais nous allons la maintenir pour le moment.

Considérons la loi de Faraday (9.4) et la loi d'Ampère-Maxwell (9.1) en l'absence de courant, c'est-à-dire, avec $\vec{J} = 0$.

On pourrait penser que la seule solution est une solution pour laquelle $\vec{E} = \vec{0}$ et $\vec{B} = \vec{0}$. Nous allons voir que ce n'est pas nécessairement le cas, dans la mesure où le système possède des solutions qui se déplacent et qui peuvent donc amener de l'énergie depuis une zone éloignée de l'espace et depuis des temps bien antérieurs à celui de l'observation^a.

Pour parvenir à une équation fermée, n'incluant qu'une variable, on peut choisir d'éliminer soit \vec{B} , soit \vec{E} . Les deux approches sont possibles.

9.1.1 Combinaison des équations de Maxwell en conservant le champ électrique

Dans un premier temps, nous allons tenter d'éliminer \vec{B} . Pour cela nous allons faire apparaître $\overline{\text{rot}}\vec{B}$ en prenant le rotationnel de l'équation de Faraday (9.4),

$$0 = \overline{\text{rot}}\overline{\text{rot}}\vec{E} + \overline{\text{rot}}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \overline{\text{rot}}\overline{\text{rot}}\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\overline{\text{rot}}\vec{B}, \quad (9.5)$$

où l'on peut permute l'ordre des dérivées partielles mixtes portant sur le temps et l'espace en supposant ces dérivées continues.

On utilise alors la loi de Faraday (9.4) pour écrire

$$0 = \overline{\text{rot}}\overline{\text{rot}}\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right), \quad (9.6)$$

ou plus simplement

$$\overline{\text{rot}}\overline{\text{rot}}\vec{E} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (9.7)$$

Double rotationnel exprimé via le laplacien

Pour calculer le double rotationnel du champ électrique, on utilise la notation de l'opérateur vectoriel nabla,

$$\overline{\text{rot}}(\overline{\text{rot}}\vec{E}) = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E}, \quad (9.8)$$

et on utilise la *formule d'expulsion* du produit vectoriel,

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}. \quad (9.9)$$

Ce faisant, on voit que

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})\vec{E} = -\vec{\Delta}\vec{E}, \quad (9.10)$$

ou $\text{div } \vec{E} = 0$ est l'équation de Gauss en l'absence de charge (9.2) et où $\vec{\Delta}$ est le Laplacien vectoriel.

Équation d'onde pour le champ électrique

Il en résulte que

$$\bar{\Delta}\vec{E} - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \bar{0}, \quad (9.11)$$

ou de manière plus détaillée,

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \bar{0}. \quad (9.12)$$

9.1.2 Combinaison des équations de Maxwell en conservant le champ magnétique

La même procédure que ci-dessus appliquée au champ magnétique donne la même équation, ceci en vertu de la symétrie des rôles joués par les champs électrique et magnétique dans les équations de Maxwell. Il suffit pour le voir de commencer par prendre le rotationnel de la loi d'Ampère-Maxwell plutôt que de la loi de Faraday; en suivant alors la même procédure que ci-dessus, on arrive à l'équation du champ magnétique

$$\bar{\Delta}\vec{B} - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \bar{0}. \quad (9.13)$$

9.1.3 Analyse des équations obtenues

La ressemblance de ces deux équations avec l'équation d'onde standard et frappante dans la mesure où la seule différence avec cette dernière réside dans le fait que le premier membre est constitué d'une somme de trois dérivées secondees par rapport aux trois coordonnées d'espace plutôt que d'une seule dérivée seconde spatiale. Ceci nous permet de dire qu'elles constituent des équations d'onde. L'existence de ces deux équations montre en conséquence que le vide peut servir de support à la propagation d'ondes électromagnétiques. Cette découverte de Maxwell a constitué un progrès majeur dans la connaissance et la compréhension des phénomènes électromagnétiques.

Remarque

Notez que cette découverte théorique est la conséquence directe de l'ajout d'un terme dynamique à l'équation locale d'Ampère. En l'absence du terme $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ dans la loi d'Ampère-Maxwell, on n'arriverait effectivement pas à l'équation d'onde, ni pour le champ magnétique, ni pour le champ électrique.

9.2 Interprétation physique

Pour interpréter l'équation d'onde de Maxwell, nous allons dans un premier temps la considérer pour le champ magnétique. Ce choix

est fait car il conduit à une illustration simple de la propagation d'onde électromagnétique,

$$\frac{\partial^2 \bar{B}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{B}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{B}}{\partial z^2} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \bar{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (9.14)$$

Supposons que nous soyons en présence d'une paroi de courant générant un champ magnétique uniforme dans l'espace, comme représenté à la figure 9.1. Ce champ est donné en module par $B = \frac{1}{2}\mu_0 J_S$ où J_S est la densité de courant de surface de la paroi. Imaginons que la densité de courant passe brusquement d'une valeur J_{S1} à une valeur J_{S2} au temps $t = 0$. Suite à ce changement, le champ magnétique lui aussi change de module et passe de $B_1 = \frac{\mu_0}{2}J_{S1}$ à $B_2 = \frac{\mu_0}{2}J_{S2}$ mais on peut se poser la question de savoir comment ce changement va se faire. Va-t-il se faire en même temps dans tout l'espace ou le changement sera-t-il progressif?

9.2.1 Champ proche

Dans tous les cas, on peut s'attendre à ce que le champ magnétique en un point infiniment proche de la paroi (c'est-à-dire en $z = 0$) soit modifié en même temps que la densité de courant, soit $B(0, t) = \frac{\mu_0}{2}J_S(t)$. Cette variation est représentée schématiquement sur le graphe de la figure 9.2.

9.2.2 Champ distant

Servons-nous maintenant de l'équation d'onde du champ \bar{B} pour voir comment les choses se passent à une distance z quelconque de la paroi. Nous utilisons pour cela la solution de l'équation d'onde en considérant qu'il s'agit d'un problème aux *conditions aux limites*, comme nous l'avons vu à la section 8.1.5 pour les cordes. Connais-sant la variation du champ en $z = 0$,

$$B(0, t) = \frac{\mu_0}{2}J_S(t) \Rightarrow B(z, t) = ? \quad (9.15)$$

la solution de l'équation d'onde nous indiquera quelle est la variation du champ en toute valeur de z .

9.2.3 Simplification due aux symétries

On peut, avant toute chose, se servir de la symétrie du problème pour en simplifier la description mathématique. Si on considère que la densité de courant est modifiée de façon uniforme sur toute la paroi, c'est-à-dire que la fonction J_S ne présente pas de variations en x et en y , alors on pourra dire que le champ magnétique est uniforme en termes des variables x et y , ce que l'on peut exprimer mathématiquement en disant que ses dérivées en x et en y sont nulles,

$$\frac{\partial \bar{B}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{B}}{\partial y} = 0. \quad (9.16)$$

FIGURE 9.1 : Paroi de courant de densité \vec{J}_S , générant un champ magnétique uniforme \bar{B} dans l'espace de coordonnées (x, y, z) .

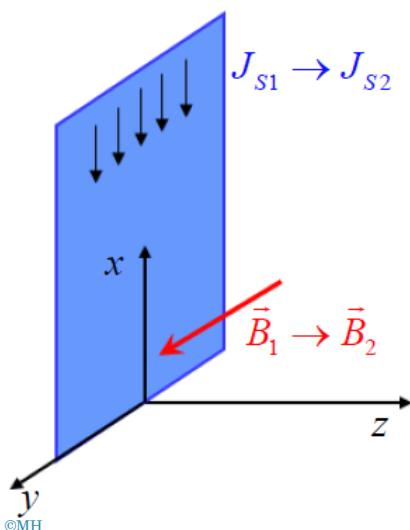
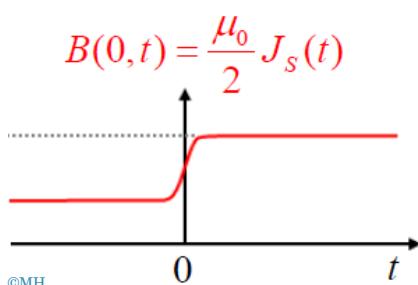


FIGURE 9.2 : Perturbation du champ magnétique $\bar{B}(0, t)$ induite à l'origine par la variation de la densité de courant \vec{J}_s , supposée uniforme sur toute la plaque.



©MH

Si les dérivées premières sont nulles en tout point, les dérivées secondes le sont également et, dès lors, l'équation d'onde du champ magnétique se simplifie fortement puisqu'il n'y reste plus que la dérivée seconde spatiale par rapport à z . Cette équation devient donc formellement identique à l'équation d'onde standard vue précédemment pour les ondes de corde et les ondes de compression.

9.2.4 Équation d'onde unidimensionnelle

En plaçant le terme de dérivée temporelle dans le premier membre, nous mettons cette équation sous sa forme habituelle

$$\frac{\partial^2 \bar{B}}{\partial z^2} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \bar{B}}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \bar{B}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \frac{\partial^2 \bar{B}}{\partial z^2}. \quad (9.17)$$

Puisque les variations du champ magnétique dans le vide obéissent à l'équation d'onde standard, on peut affirmer que la perturbation du champ magnétique créée en $z = 0$ se propage dans tout l'espace sous forme d'une onde. L'augmentation de champ magnétique provoquée par l'augmentation de courant dans la paroi s'établit donc progressivement dans tout l'espace au passage de l'onde. Notez qu'il s'agit ici d'une onde en forme de marche d'escalier comparable à l'onde de compression provoquée par un choc à l'extrémité d'un cristal (voir la section 8.2.1).

9.2.5 Vitesse de propagation

En se basant sur l'interprétation physique de l'équation d'onde standard établie dans les sections précédentes, on peut affirmer sans plus de développement, que le facteur $\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$ de la dérivée seconde spatiale de l'équation d'onde de champ magnétique représente le carré de la vitesse caractéristique de l'onde. Connaissant les valeurs de μ_0 et ϵ_0 , on calcule une vitesse de l'ordre de 3×10^8 m/s, c'est-à-dire, une vitesse de 300 000 kilomètres par seconde. Cette vitesse, notée c , est une constante universelle de la nature au même titre que la permittivité et la perméabilité du vide. Les différentes grandeurs sont reprises dans le tableau 9.1

grandeur	symbole	valeur	unités
permittivité	ϵ_0	$8.8 \cdot 10^{-12}$	$C^2 N^{-1} m^{-2}$
perméabilité	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$	$T m A^{-1}$
vitesse de la lumière	c	299 792 458	m/s.

TABLE 9.1 : Permittivité, perméabilité et célérité de la lumière dans le vide. La vitesse est fixée à la valeur de c dans le système international d'unités et le mètre est défini sur cette base et la référence de temps [10].

9.2.6 Évolution de la propagation

Sachant que la solution d'onde progressive de l'équation d'onde standard est une fonction d'un seul argument combinant la coordonnée spatiale et le temps, on peut affirmer que l'onde de champ magnétique sera de la forme

$$\bar{B} = \vec{f}(z - ct). \quad (9.18)$$

La seule différence avec les ondes vues précédemment est que la fonction d'onde est ici vectorielle. On dit que l'onde de champ magnétique est une onde « *vectorielle* ».

9.2.7 Approche scalaire

Dans la situation physique considérée ici, le champ magnétique est orienté dans la direction perpendiculaire à la densité de courant de surface \vec{J}_S et parallèle à la paroi (c'est la direction \vec{l}_y sur le schéma utilisé plus haut pour présenter la situation physique). Comme \vec{J}_S ne change pas d'orientation, il n'y a aucune raison pour que le champ magnétique change d'orientation. Le caractère vectoriel de l'onde ne conduit donc à aucune difficulté particulière. Nous pouvons, en particulier, continuer notre développement en ne considérant que le module du champ magnétique puisque l'on sait que son orientation est en \vec{l}_y .

9.2.8 Forme de l'onde propagative

Pour connaître la forme exacte de l'onde, il suffit de se rappeler que c'est la perturbation initiale qui fixe la forme de l'onde (nous avons vu cela en détail avec les ondes de corde à la section 8.1.5). La solution étant de la forme $B(z, t) = f(z - ct)$, on peut dire qu'en $z = 0$ la variation de champ magnétique est donnée par la fonction $B(0, t) = f(-ct)$. Or, on sait que $B(0, t)$ est fixé par la variation de densité de courant de surface, soit $B(0, t) = \frac{\mu_0}{2} J_S(t)$, on peut donc écrire $f(-ct) = \frac{\mu_0}{2} J_S(t)$. Cette dernière relation nous fournit la fonction f recherchée. Il suffit en effet d'appliquer le changement de variable $u = -ct$ pour l'obtenir

$$f(u) = \frac{\mu_0}{2} J_S(-u/c). \quad (9.19)$$

La forme de l'onde est donc donnée par l'expression

$$f(z - ct) = \frac{\mu_0}{2} J_S(-(z - ct)/c) = \frac{\mu_0}{2} J_S(t - z/c). \quad (9.20)$$

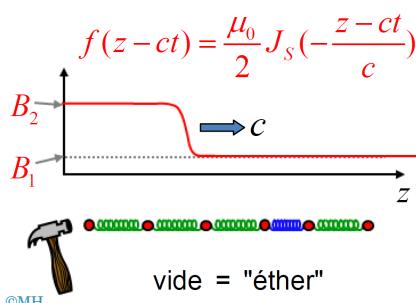
Elle est illustrée à la figure 9.3. On remarque que l'influence de chaque courant est retardée du temps de parcours à la vitesse c de la distance z entre la source et le point d'influence.

Tout se passe donc comme pour une onde traditionnelle. La perturbation initiale se propage de proche en proche, comme si elle était relayée par une chaîne d'oscillateurs à l'image de l'onde de compression représentée à la figure 9.3. Avec cette vision des choses une onde électromagnétique ne semble pas fondamentalement différente d'une onde de pression ou de corde.

■ Un peu d'histoire...

L'équation d'onde du champ magnétique et cet exemple de la paroi de courant à intensité variable nous montrent que le champ

FIGURE 9.3 : Propagation de la partie magnétique du champ électromagnétique suite à une impulsion de courant de paroi. Tout se passe comme pour la propagation dans un milieu élastique, ce qui suggère que le vide soit rempli d'un matériau appelé « éther » et donc l'existence n'est plus utile aujourd'hui pour expliquer la propagation des ondes électromagnétiques.



magnétique se comporte exactement comme la coordonnée de position des atomes dans un cristal, un milieu amorphe ou une corde. Tout se passe comme si le champ se propageait en raison de l'existence d'un milieu matériel possédant une certaine élasticité. Selon ce point de vue, le champ serait lié à une sorte de tension du milieu élastique à l'image de ce qui se produit dans la matière quand les positions relatives des atomes sont modifiées. C'est de cette façon que les scientifiques du XIX^e siècle ont interprété les ondes électromagnétiques. Pour eux, ces ondes existaient en raison de la présence dans le vide d'un milieu « *élastique* ». Ils^a admettaient ainsi que le vide n'existe pas à proprement parler. À la place du vide, ils imaginaient un milieu matériel très rigide ; la rigidité correspondant à une grande valeur du module de compressibilité permettant d'expliquer la grande vitesse de propagation des ondes. Et puisque ce milieu n'est pas directement « *perceptible* », qu'il n'est pas possible d'en « *ressentir* » la présence, ils l'imaginaient très peu dense, c'est pour cette raison qu'ils l'ont baptisé « *éther* ». Nous reverrons cet aspect historique lié à la découverte des ondes électromagnétiques au chapitre sur la relativité restreinte et nous verrons notamment que cette notion d'éther a mené les scientifiques sur une fausse route.

a ... et « *elles* », bien sûr. Même si l'*histoire* les a mises de côté, les femmes n'ont jamais été absentes de l'aventure scientifique...

9.3 Équation d'onde scalaire à une dimension

L'exemple de la paroi de courant nous a montré qu'une perturbation du champ magnétique en un endroit de l'espace se propage sous forme d'une onde. Il en est de même pour le champ électrique puisqu'il répond à la même équation d'onde. Pour des raisons de simplicité, nous nous limiterons dans la suite à une description des ondes électromagnétiques à une dimension spatiale. Comme pour les ondes de corde ou de compression, nous prendrons l'axe z comme étant l'axe de propagation, les champs étant supposés uniformes par rapport aux autres coordonnées x et y . En d'autres termes, nous considérerons les équations d'onde pour les champs électrique et magnétique,

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = 0, \quad (9.21)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial z^2} = 0. \quad (9.22)$$



L09P2



9.3.1 Équation unidimensionnelle en composantes

Les équations d'onde de champs électrique et magnétique sont des équations vectorielles. Pour décrire les ondes correspondantes de façon complète, il faut donc considérer les trois composantes de

champ. Prenons, par exemple, le champ

$$\vec{E} = E_x \vec{\mathbf{i}}_x + E_y \vec{\mathbf{i}}_y + E_z \vec{\mathbf{i}}_z. \quad (9.23)$$

Les dérivées seconde temporelle et spatiale appliquées à \vec{E} donnent

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \vec{\mathbf{i}}_x + \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \vec{\mathbf{i}}_y + \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \vec{\mathbf{i}}_z, \quad (9.24)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \vec{\mathbf{i}}_x + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \vec{\mathbf{i}}_y + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \vec{\mathbf{i}}_z. \quad (9.25)$$

Si on substitue ces expressions dans l'équation d'onde et que l'on multiplie scalairement par $\vec{\mathbf{i}}_x$ (ce produit scalaire donnera zéro pour les termes proportionnels à $\vec{\mathbf{i}}_y$ et $\vec{\mathbf{i}}_z$), on obtient une équation d'onde standard pour la composante E_x ,

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \vec{\mathbf{i}}_x = c^2 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} \vec{\mathbf{i}}_x, \quad (9.26)$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}, \quad (9.27)$$

9.3.2 Séparation des composantes

En multipliant par $\vec{\mathbf{i}}_y$ et $\vec{\mathbf{i}}_z$, on obtient deux autres équations d'onde standard pour les composantes en y et z , ce qui conduit de manière générale aux équations pour les composantes

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}, \quad (9.28)$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}, \quad (9.29)$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}. \quad (9.30)$$

On voit donc qu'une équation d'onde vectorielle renferme en réalité trois équations d'onde scalaires, associées chacune à une des composantes du champ. Ce sont ces équations d'onde que nous traiterons par la suite car nous nous limiterons à des problèmes dans lesquels l'orientation des champs est bien déterminée et fixe, ce qui nous donnera toujours la possibilité de choisir un des axes x ou y parallèle au champ. Dans ce cas, une seule composante de champ apparaîtra dans le problème et nous serons limités à résoudre l'équation d'onde standard

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} \quad (9.31)$$

où E représentera une des composantes du champ.

9.3.3 Limitations de l'approche scalaire

Nous traiterons donc le champ comme une grandeur scalaire. Pour nous souvenir que cette restriction à une composante de champ est appliquée, nous parlerons de l'équation d'onde « *scalaire* » du champ électrique. Nous verrons par la suite que le caractère vectoriel des équations de Maxwell impose aux champs des propriétés vectorielles précises et qu'il convient donc effectivement d'être prudent dans ce « *traitement scalaire* » des champs.

9.4 Ondes harmoniques

Nous allons ici étudier un type particulier de solution de l'équation d'onde scalaire du champ électrique. Rappelons-nous que dans cette équation le champ scalaire E doit être interprété comme étant une des composantes du champ électrique \vec{E} .

9.4.1 Hypothèses des ondes planes

Nous considérons, comme précédemment, l'absence de dérivées spatiales en x et y , ce qui signifie que nous ne considérons que des problèmes d'ondes homogènes en x et y . De telles ondes sont engendrées par des sources dont les variations de charges et de courant sont uniformes dans un plan $z = c^{\text{te}}$, à l'image de la paroi de courant considérée dans la section 9.2. Une onde dont le champ ne varie pas en x et en y s'appelle une onde « *plane* » car dans tout plan $z = c^{\text{te}}$ le champ est uniforme.

9.4.2 Excitation harmonique

Nous considérerons ici que les sources de champ électrique et magnétique présentent des variations harmoniques de charges et de courant. C'est une situation physique qui se rencontre très souvent en pratique. C'est, par exemple, ce qui se produit dans une antenne de télécommunication (représentée schématiquement à la figure 9.4). Dans une antenne le courant générateur de champs magnétique et électrique est oscillant à une fréquence bien déterminée (la fréquence du canal de transmission).

Des situations analogues sont également courantes à l'échelle microscopique. Par exemple, les mouvements des électrons autour des atomes, représentés à la figure 9.5 correspondent à des variations périodiques harmoniques de charges et de courants électriques. Or, si les sources de champ électrique et magnétique ont des variations harmoniques, on peut s'attendre à ce que les champs eux-mêmes présentent des variations harmoniques. Les ondes ainsi générées s'appellent des « *ondes harmoniques* ».

Pour obtenir l'expression mathématique d'une onde harmonique, il suffit de se rappeler que la solution générale d'onde progressive de l'équation d'onde est de la forme $f(z - ct)$. Remarquez que l'absence des coordonnées x et y indique que cette solution représente



L09P3



FIGURE 9.4 : Représentation schématique d'une antenne.

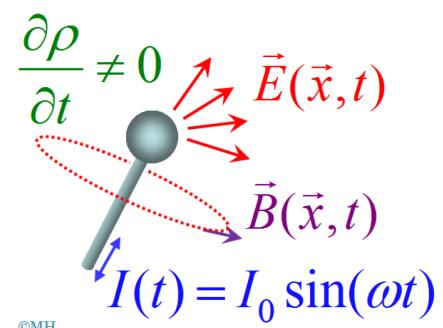
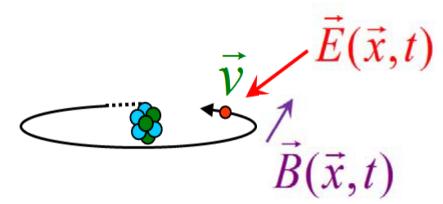


FIGURE 9.5 : Représentation imagée de la variation périodique des électrons autour du noyau des atomes.



Vous verrez ultérieurement que les ondes à planes forment une base et qu'à l'aide d'un opérateur intégral, nommé transformation de Fourier, il est possible d'identifier les composantes d'une fonction sur cette base. Même si une onde plane isolée n'est pas physique, la combinaison de telles ondes planes peut l'être. La portée de ce qui est fait ici est donc très large.

une onde « *plane* » (uniforme en x et y), en particulier, les sources de champs sont ici supposées d'extension infinie et uniformes dans un plan $z = C^{\text{te}}$. Ceci nous empêche de considérer de façon rigoureuse le problème de l'antenne (cf. Fig. 9.4) ou de l'atome illustrés à la figure 9.5. Pour le cas de l'antenne par exemple, il nous faudrait, pour être rigoureux, la considérer comme plane et d'extension infinie à l'image de la paroi de courant vue plus haut. C'est une situation assez abstraite^a mais elle a l'avantage de mener à des expressions mathématiques simples pour les ondes générées par l'antenne,

$$E(z, t) = f(z - ct). \quad (9.32)$$

Considérons que le champ en $z = 0$ varie de façon harmonique en raison de variations harmoniques des charges électriques dans l'antenne, soit $E(0, t) = A \cos(\omega t)$. En pratique, des variations harmoniques de charges se rencontrent à l'extrémité des antennes où les charges électriques sont accumulées et retirées de façon périodique en raison d'un courant à variation harmonique.

9.4.3 Propagation d'une onde harmonique

Comme nous l'avons vu à la section 9.2 pour le champ \vec{B} , cette perturbation initiale $E(0, t) = A \cos(\omega t)$ impose la forme de l'onde selon le raisonnement suivant : sachant que la solution générale de l'équation d'onde est de la forme $E(z, t) = f(z - ct)$, on peut écrire

$$E(0, t) = A \cos(\omega t) = f(-ct). \quad (9.33)$$

Avec le changement de variable $u = -ct$ on trouve la fonction f , soit

$$f(u) = A \cos(\omega u/c), \quad (9.34)$$

ce qui nous permet de donner l'écriture mathématique de l'onde de champ électrique

$$E(z, t) = f(z - ct) = A \cos[-\omega(z - ct)/c]. \quad (9.35)$$

En exploitant la parité de la fonction cosinus, soit $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$, on trouve finalement

$$E(z, t) = A \cos[\omega(z - ct)/c] = A \cos[\omega(t - z/c)]. \quad (9.36)$$

9.4.4 Nombre d'onde

Pour alléger l'écriture, nous introduisons une nouvelle grandeur appelée « *nombre d'onde* ». Par définition le nombre d'onde vaut

$$k = \frac{\omega}{c}, \quad (9.37)$$

ce qui transforme l'expression de l'onde en

$$E(z, t) = A \cos(kz - \omega t). \quad (9.38)$$

Cette variation spatio-temporelle du champ électrique représente ce que l'on appelle une « *onde harmonique* ».

9.4.5 Propriétés générales des ondes harmoniques

La forme mathématique de l'onde harmonique n'est pas spécifique de l'onde électromagnétique. Une onde harmonique de corde, par exemple, aura exactement la même forme mathématique mais k devra être ajusté à la vitesse caractéristique v de la corde, soit $k = \omega/v$.

Pour nous familiariser avec la notion d'onde harmonique, à la figure 9.6 nous en faisons une représentation graphique par rapport à la variable temporelle t ainsi que par rapport à la coordonnée spatiale z .

On peut représenter l'onde harmonique dans le temps en fixant la coordonnée z . Si on prend la coordonnée $z = 0$, on trouve simplement $E(0, t) = A \cos(\omega t)$. Cette variation harmonique temporelle est caractérisée par la pulsation ω et l'amplitude A . La pulsation détermine la période $T = 2\pi/\omega$.

On peut représenter l'onde harmonique dans l'espace en choisissant un temps donné, soit $t = t_0$. La fonction de z correspondante est donc $E(z, t_0) = A \cos(kz - \omega t_0)$. Elle est représentée sur le graphe de la figure 9.7. La période spatiale de cette onde est imposée par le nombre d'onde k . Lorsque z varie d'une valeur quelconque $z = z_1$ à une valeur $z = z_1 + 2\pi/k$, la phase du cosinus varie de 2π et le cosinus reprend donc la valeur qu'il avait en $z = z_1$. La longueur $\lambda = 2\pi/k$ représente donc la période spatiale de l'onde. On l'appelle la longueur d'onde.

9.4.6 Vitesse de l'onde harmonique

En mettant k en évidence dans l'argument du cosinus, on voit apparaître le facteur ω/k devant le temps t . D'après la définition de k , soit $k = \omega/c$, ce rapport vaut la vitesse de la lumière,

$$E(z, t_0) = A \cos(kz - \omega t_0) \quad (9.39)$$

$$E(z, t_0) = A \cos\left[k\left(z - \frac{\omega}{k}t_0\right)\right] \quad \text{où } \frac{\omega}{k} = c. \quad (9.40)$$

On peut donc écrire le champ au temps $t = t_0$, comme

$$E(z, t_0) = A \cos[k(z - ct_0)]. \quad (9.41)$$

Cette expression montre que le champ au temps $t = t_0$, soit $A \cos[k(z - ct_0)]$, est donné par la translation de la distance ct_0 du champ au temps $t = 0$, soit $A \cos(kz)$ [ceci apparaît si on considère que le champ $E(z, 0)$ est une fonction de z , soit $E(z, 0) = f(z)$, dans ce cas le champ $E(z, t_0)$ est la fonction $f(z - ct_0)$ qui est bien la fonction $f(z)$ translatée de la distance ct_0 vers les z positifs]. Ce résultat indique que l'onde est bien animée d'un mouvement de translation à la vitesse de la lumière c .

En remplaçant le nombre d'onde k par sa valeur ω/c dans la définition de la longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$, on constate le lien qui existe entre la longueur d'onde et la pulsation, soit $\lambda = 2\pi c/\omega$. De même, sachant que $\omega/2\pi$ est la fréquence f qui est elle-même l'inverse de

FIGURE 9.6 : Période d'une onde, donnée par $T = 2\pi/\omega$.

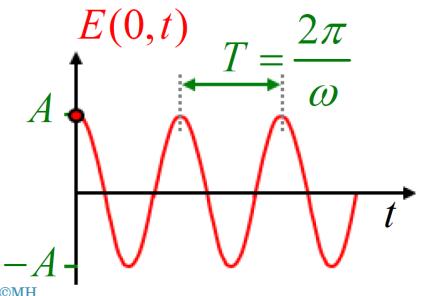
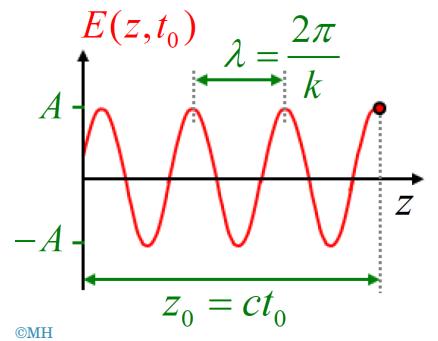


FIGURE 9.7 : Longueur d'onde d'une onde, donnée par $\lambda = 2\pi/k$.



la période T , on voit que la longueur d'onde est donnée par cT . Ce dernier résultat était attendu puisque le temps mis pour parcourir la distance d'une longueur d'onde λ à la vitesse c est par définition la période T de l'onde,

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega}c, \quad (9.42)$$

$$\lambda = \frac{c}{f} = cT, \quad (9.43)$$

$$T = \frac{\lambda}{c}. \quad (9.44)$$

9.5 Polarisation



L09P4



Nous allons maintenant voir que le vecteur champ électrique \vec{E} d'une onde plane ne peut pas avoir n'importe quelle direction. La direction du champ électrique est caractérisée par ce que l'on appelle la « *polarisation* » de l'onde. Pour tenir compte de la nature vectorielle du champ, il convient de se rappeler que l'équation d'onde scalaire ne donne qu'une composante du champ et qu'en réalité il y a, en toute généralité, trois composantes de champ. Nous avons néanmoins vu que ces trois composantes obéissent à la même équation d'onde. Une source harmonique d'onde plane génère donc a priori trois ondes planes harmoniques dans chacune des composantes. Les expressions de ces trois ondes sont données ci-dessous,

$$E_x = A_x \cos(kz - \omega t + \varphi_x), \quad (9.45)$$

$$E_y = A_y \cos(kz - \omega t + \varphi_y), \quad (9.46)$$

$$E_z = A_z \cos(kz - \omega t + \varphi_z), \quad (9.47)$$

où les ondes ont une même fréquence, mais des amplitudes et phase dépendant de la composante.

9.5.1 Polarisation rectiligne

Dans le cas particulier où les ondes sont toutes en phase, c'est-à-dire que

$$\varphi_z = \varphi_y = \varphi_x = \varphi, \quad (9.48)$$

on peut adopter une écriture vectorielle plus compacte de l'onde en introduisant le vecteur \vec{A} dont les composantes sont les amplitudes A_x, A_y et A_z . Le vecteur \vec{A} peut être vu comme une « *amplitude vectorielle* ». Avec cette notation on arrive à l'expression suivante du champ électrique

$$\vec{E}(z, t) = \vec{A} \cos(kz - \omega t + \varphi). \quad (9.49)$$

L'amplitude vectorielle \vec{A} détermine ce que l'on appelle la polarisation du champ. Pour voir que la polarisation d'une onde plane répond à certaines contraintes, nous allons considérer la loi de Gauss pour le champ électrique dans le vide, soit

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0. \quad (9.50)$$

Vu les expressions des composantes du champ harmonique données ci-dessus, le calcul de la divergence du champ $\text{div } \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$ est immédiat. Comme nous travaillons dans l'hypothèse d'un champ uniforme en x et y , les dérivées par rapport à x et y sont identiquement nulles,

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0. \quad (9.51)$$

Par contre, la dérivée en z donne

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = -kA_z \sin(kz - \omega t + \varphi) \quad (9.52)$$

Exprimons maintenant le fait que, d'après la loi de Gauss appliquée à un champ électrique dans le vide $\rho \equiv 0$, la divergence est nulle,

$$\text{div } \vec{E} = -kA_z \sin(kz - \omega t + \varphi) = 0. \quad (9.53)$$

Comme cette dernière relation doit être vraie pour toute valeur de z et de t , elle ne peut être satisfaite que si

$$A_z = 0. \quad (9.54)$$

9.5.2 Caractère transverse des ondes planes dans le vide

On voit donc que l'onde plane vectorielle de champ électrique ne peut pas avoir de composante en z . Autrement dit, le vecteur champ électrique de l'onde est perpendiculaire à sa direction de propagation (seules les composantes en x et y peuvent être non nulles). Pour cette raison, on dit que l'onde est « *transverse* ».

Une onde plane harmonique de champ électrique peut donc s'écrire mathématiquement comme

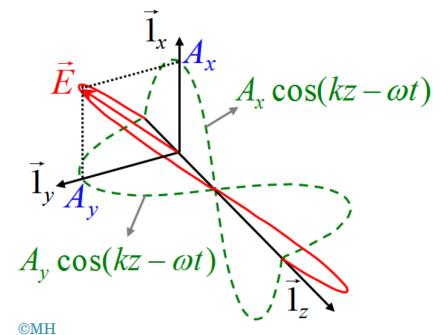
$$\vec{E}(z, t) = (A_x \vec{1}_x + A_y \vec{1}_y) \cos(kz - \omega t + \varphi). \quad (9.55)$$

Chacune des composantes E_x et E_y constitue une onde plane scalaire. Leur amplitude est représentée en ligne pointillée sur le schéma de la figure 9.8 dans les directions $\vec{1}_x$ et $\vec{1}_y$, respectivement. Pour tracer cette figure, la valeur $\varphi = 0$ a été choisie. La somme $A_x \vec{1}_x + A_y \vec{1}_y$ donne le champ électrique total représenté par la courbe rouge. La direction du champ électrique est donc dépendante des valeurs relatives de A_x et A_y .

9.5.3 Polarisation elliptique

La polarisation telle que considérée ci-dessus est ce que l'on appelle une « *polarisation rectiligne* » car elle correspond à une direction fixe du champ électrique. Si la direction est fixe c'est parce que nous avons considéré des ondes harmoniques « *en phase* » pour les deux composantes de champ non nulles ($\varphi_x = \varphi_y = \varphi$, soit $E_x = A_x \cos(kz - \omega t + \varphi)$ et $E_y = A_y \cos(kz - \omega t + \varphi)$). Nous aurions tout

FIGURE 9.8 : Évolution en projection du vecteur \vec{E} purement transverse résultant de la combinaison de ses composantes oscillant selon x et y lorsque $\varphi = 0$.



aussi bien pu considérer le cas d'un déphasage quelconque entre les deux composantes en écrivant, par exemple : $E_x = A_x \cos(kz - \omega t + \varphi_x)$ et $E_y = A_y \cos(kz - \omega t + \varphi_y)$, avec $\varphi_x \neq \varphi_y$.

Dans ce cas que la direction du champ électrique n'est plus constante, ce qui s'observe en considérant, par exemple l'onde à la position z_0 et aux temps t_x et t_y définis de sorte que

$$t_x = (kz_0 + \varphi_x)/\omega, \quad (9.56)$$

$$t_y = (kz_0 + \varphi_y)/\omega. \quad (9.57)$$

Dans l'hypothèse faite ci-dessus où les phases des deux ondes sont distinctes, il en est de même des instants t_x et t_y . On a

$$\vec{E}(t_x) = 0\hat{1}_x + E_y(t_x)\hat{1}_y \parallel \hat{1}_y, \quad (9.58)$$

$$\vec{E}(t_y) = E_x(t_y)\hat{1}_x + 0\hat{1}_y \parallel \hat{1}_x. \quad (9.59)$$

L'orientation du champ électrique évolue continument en tournant de sorte qu'en un point donné de l'espace, le vecteur champ électrique décrive au cours du temps une ellipse. On voit une telle ellipse dans le plan des composantes E_x et E_y représenté à la figure 9.9. C'est la raison pour laquelle on parle dans ce cas de « *polarisation elliptique* ». En l'absence de déphasage les composantes de champ sont simplement proportionnelles l'une à l'autre et cette ellipse devient un segment de droite correspondant à une polarisation rectiligne (cf. figure 9.10).

9.5.4 Polarisation circulaire

Lorsque les deux phases sont en quadrature, ce qui veut dire que le déphasage entre les deux ondes est

$$\varphi_y - \varphi_x = \pm \frac{\pi}{2} + N\pi, \quad (9.60)$$

et que les deux composantes ont même amplitude,

$$A_x = A_y, \quad (9.61)$$

l'extrémité du vecteur \vec{E} à une position z_0 donnée décrit un cercle au fil du temps. La polarisation est dite « *circulaire* ».

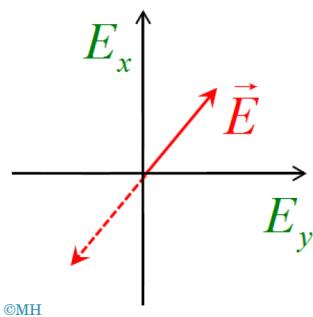
9.6 Onde plane d'orientation quelconque

Le graphe de la figure 9.11 montre la variation harmonique de la composante x du champ électrique d'une onde plane de polarisation linéaire quelconque.

9.6.1 Front d'onde

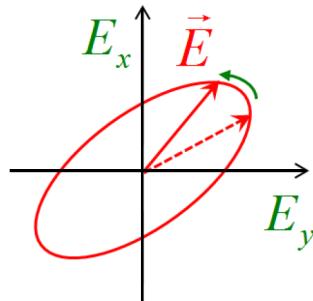
La répartition spatiale dans le plan (x, z) est illustrée sur la figure 9.11 sous forme d'un dégradé périodique dont la couleur la plus intense représente les maxima du champ. Les lieux des points

FIGURE 9.9 : État de polarisation rectiligne ou linéaire, par anglicisme. Les composantes du champ E_x et E_y évoluent en phase, ce qui résulte en une trajectoire inclinée et rectiligne.



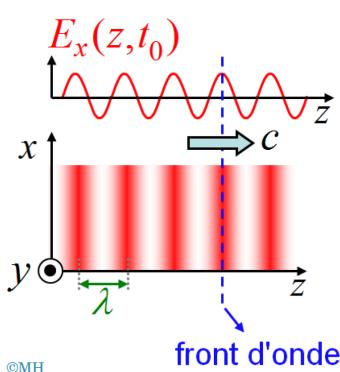
©MH

FIGURE 9.10 : État de polarisation elliptique. Les composantes du champ E_x et E_y sont déphasées l'une par rapport à l'autre, ce qui résulte en une trajectoire elliptique.



©MH

FIGURE 9.11 : Variation harmonique de la composante d'une onde plane scalaire.



©MH

pour lesquels le champ prend cette valeur maximale sont des plans perpendiculaires à l'axe z . On appelle ces plans des « *fronts d'onde* ». Plus généralement on appelle un front d'onde un lieu de points de l'espace pour lesquels la phase de l'onde a partout la même valeur à un instant donné. Ici la phase vaut $\varphi = kz - \omega t$, les fronts d'onde sont donc bien des plans d'équation $z = cste$. De même, si le temps s'écoule, pour garder la phase φ constante il faut que z varie selon la loi $z = \varphi/k + ct$ (où j'ai utilisé la relation $\omega/k = c$), ce qui montre de façon évidente que les fronts d'onde se déplacent à la vitesse de la lumière c .

9.6.2 Rotation du repère

Jusqu'à présent nous n'avons considéré que des ondes planes se propageant parallèlement à l'axe z . Pour décrire une onde plane de direction quelconque, il suffit d'effectuer un changement de repère par rotation. Pour simplifier les calculs, nous allons considérer une rotation autour de l'axe y mais la généralisation à tout axe de rotation est immédiate. Supposons une onde plane se propageant parallèlement à l'axe z' d'un repère cartésien x', y', z' . La forme mathématique de cette onde

$$\vec{E}(z', t) = \vec{A} \cos(kz' - \omega t) \quad \vec{A} \perp \vec{1}_{z'} \quad (9.62)$$

Supposons maintenant un repère (x, z) tourné d'un angle θ par rapport au repère (x', z') , comme le montre la figure 9.12 (nous n'avons pas besoin de considérer la coordonnée y dans ce problème car elle ne change pas, $y = y'$). La coordonnée z' en fonction des nouvelles coordonnées (x, z) s'exprime à partir des règles de changement de repères cartésiens par rotation.

$$z' = z \cos \theta + x \sin \theta. \quad (9.63)$$

Cette valeur de z' peut être expliquée géométriquement à partir d'une simple inspection du schéma de la figure 9.13. Sur ce schéma le vecteur \vec{x} représente la position à laquelle on s'intéresse au champ. C'est effectivement $\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}(x, y, z, t)$ que l'on cherche pour toute valeur de x, y et z .

En substituant $z' = z \cos \theta + x \sin \theta$ dans l'expression du champ électrique $\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{A} \cos(kz' - \omega t)$, on trouve

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{A} \cos(kx \sin \theta + kz \cos \theta - \omega t). \quad (9.64)$$

On peut interpréter les facteurs $k \sin \theta$ et $k \cos \theta$ comme étant, respectivement, les projections sur les axes x et z d'un vecteur qui a la direction de l'onde, c'est-à-dire un vecteur qui fait un angle θ avec l'axe z . Appelons \vec{k} ce vecteur de composantes $k_x = k \sin \theta$ et $k_z = k \cos \theta$. Avec ces notations on obtient

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{A} \cos(k_x x + k_z z - \omega t). \quad (9.65)$$

FIGURE 9.12 : Onde plane obtenue par rotation d'un angle θ .

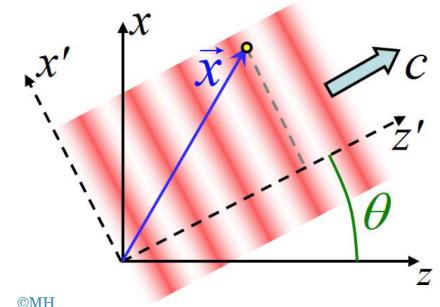
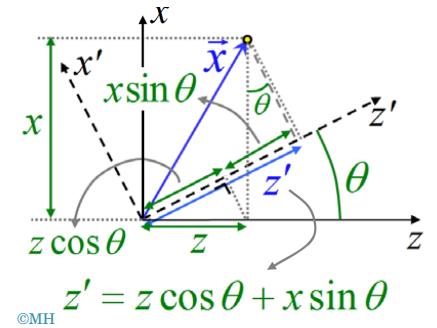


FIGURE 9.13 : Calcul de la coordonnée z' dans les axes tournés.



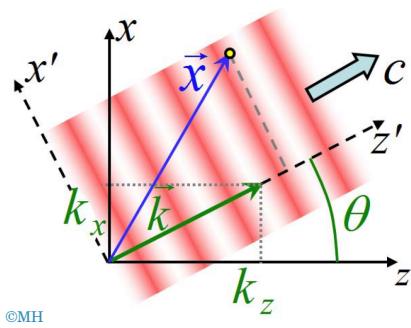
9.6.3 Vecteur d'onde

On peut exprimer la somme $k_x x + k_z z$ comme le produit scalaire $\vec{k} \cdot \vec{x}$ où \vec{x} est le vecteur position du point où on considère le champ $\vec{x} = x \vec{1}_x + y \vec{1}_y + z \vec{1}_z$. On peut donc écrire

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{A} \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t). \quad (9.66)$$

C'est l'expression mathématique compacte d'une onde plane se propageant dans la direction du vecteur \vec{k} . Remarquez que la norme de ce vecteur est le nombre d'onde $k = \omega/c$. Pour cette raison, le vecteur \vec{k} porte le nom de « *vecteur d'onde* ». Ce vecteur caractérise entièrement une onde plane de direction quelconque : il donne la direction de propagation de l'onde et, par sa norme, il donne la longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$, qui permet de calculer la pulsation de l'onde à partir de $\omega = 2\pi c/\lambda = ck$.

FIGURE 9.14 : Lien entre la phase et le produit scalaire par rapport à la direction du vecteur d'onde.



©MH

Vecteur d'onde et direction de propagation

Notez sur le schéma de la figure 9.14 que tous les vecteurs position \vec{x} se trouvant dans un même plan perpendiculaire à \vec{k} ont la même projection sur la direction de \vec{k} . Ceci signifie qu'ils ont tous le même produit scalaire $\vec{k} \cdot \vec{x}$. On voit ainsi que tous les points appartenant à un même plan perpendiculaire à \vec{k} ont la même phase $\varphi = \vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t$. Le champ électrique est donc *uniforme* dans tout plan perpendiculaire à \vec{k} . Ce raisonnement nous indique que c'est bien une onde plane de direction donnée par le vecteur \vec{k} que l'on décrit avec la notation compacte basée sur le produit scalaire : $\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{A} \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)$.

Vecteur d'onde et polarisation

Notez également que l'onde est transverse, c'est-à-dire que l'amplitude vectorielle \vec{A} est perpendiculaire à la direction de propagation. Dans le repère (x', z') cela se traduit par le fait que \vec{A} est perpendiculaire à l'axe z' . Mais comme le vecteur d'onde \vec{k} indique la direction de propagation de l'onde, on peut généraliser cette condition géométrique au repère quelconque (x, z) en disant que l'amplitude vectorielle \vec{A} doit être perpendiculaire à \vec{k} , ce qui mathématiquement peut s'exprimer simplement en disant que le produit scalaire de ces deux vecteurs doit être nul, soit $\vec{A} \cdot \vec{k} = 0$, ce qui se résume comme suit

$$\text{onde transverse : } \vec{A} \perp \vec{1}_{z'} \Rightarrow \vec{A} \perp \vec{k} \Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{k} = 0. \quad (9.67)$$

9.7 Équations de Maxwell pour les champs harmoniques

Nous avons vu précédemment que l'utilisation de *phaseurs* permet de résoudre des équations différentielles pour les champs harmoniques, via des calculs algébriques.



L09P5



De manière similaire, on peut transformer les équations différentielles de Maxwell en équations algébriques pour des ondes planes harmoniques. En combinant cette simplicité au fait que la *transformation de Fourier* permet de décomposer la plupart des fonctions en somme continue (intégrale) d'ondes planes, cette formulation des équations de Maxwell est très utile. Nous verrons qu'elle permet de retrouver rapidement les propriétés que nous avons établies.

9.7.1 Notations

Nous notons une onde plane \bar{X} de la manière suivante

$$\bar{X} = \bar{A} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi)} \quad (9.68)$$

$$= \bar{X}_\omega e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad (9.69)$$

$$\bar{X}_\omega = \bar{A} e^{i\varphi}, \quad (9.70)$$

où la notion de phaseur est généralisée à l'expression complexe \bar{X}_ω , qui représente l'amplitude du champ \bar{X} de pulsation ω . Le champ \bar{X} peut être un vecteur comme \vec{E} ou un pseudo-vecteur, comme \vec{B} . Nous associerons les indices (1, 2, 3) aux axes (x, y, z), ce qui permettra d'écrire

$$\vec{r} = \vec{x} = x \vec{1}_x + y \vec{1}_y + z \vec{1}_z = x_1 \vec{1}_1 + x_2 \vec{1}_2 + x_3 \vec{1}_3 = \sum_{n=1}^3 x_n \vec{1}_n, \quad (9.71)$$

la notation avec les chiffres permettant une écriture compacte.

9.7.2 Opérateurs différentiels appliqués à une onde plane

Les équations de Maxwell sont exprimées au moyen de trois opérateurs différentiels que nous allons calculer séparément.

Divergence

La divergence d'une onde plane se calcule rapidement comme suit

$$\operatorname{div} \bar{X} = \sum_{n=1}^3 \vec{1}_n \cdot \frac{\partial}{\partial x_n} \bar{X} \quad (9.72)$$

$$= \sum_{n=1}^3 \vec{1}_n \cdot \bar{X}_\omega \frac{\partial}{\partial x_n} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (9.73)$$

$$= e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^3 \vec{1}_n \cdot X_\omega \frac{\partial}{\partial x_n} e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} \quad (9.74)$$

$$= e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^3 \vec{1}_n \cdot X_\omega (ik_n) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (9.75)$$

$$= i\vec{k} \cdot \bar{X}, \quad (9.76)$$

qui peut se résumer comme suit

$$\operatorname{div} \bar{X} = \overrightarrow{\operatorname{grad}} \cdot \bar{X} = \nabla \cdot \bar{X} = i\vec{k} \cdot \bar{X}. \quad (9.77)$$

Rotationnel

Le calcul du rotationnel d'une onde plane se déroule de manière similaire

$$\overline{\text{rot}} \bar{X} = \sum_{n=1}^3 \vec{1}_n \times \frac{\partial}{\partial x_n} \bar{X} \quad (9.78)$$

$$= \sum_{n=1}^3 \vec{1}_n \times \bar{X}_\omega \frac{\partial}{\partial x_n} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (9.79)$$

$$= e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^3 \vec{1}_n \times \bar{X}_\omega \frac{\partial}{\partial x_n} e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} \quad (9.80)$$

$$= e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^3 (\vec{1}_n \times \bar{X}_\omega) (ik_n) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (9.81)$$

$$= e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^3 (i\vec{k} \times \bar{X}_\omega) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (9.82)$$

$$= i\vec{k} \times \bar{X}, \quad (9.83)$$

qui peut se résumer comme suit

$$\overline{\text{rot}} \bar{X} = \overrightarrow{\text{grad}} \times \bar{X} = \nabla \times \bar{X} = i\vec{k} \times \bar{X}. \quad (9.84)$$

Dérivée temporelle

Le calcul de la dérivée partielle par rapport au temps se fait comme pour les phasateurs. Notez que le facteur du produit ωt est $-i$ dans l'argument de l'exponentielle. Ce facteur pourrait être i sans rien changer aux résultats finaux des calculs qui doivent fournir des nombres réels indépendants de l'axe imaginaire dans le plan complexe. En parcourant les différentes disciplines de l'ingénieur, on retrouve les deux choix de convention. La dérivée temporelle est

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{X} = \frac{\partial}{\partial t} \bar{X}_\omega e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (9.85)$$

$$= -i\omega \bar{X}, \quad (9.86)$$

qui peut se résumer comme suit

$$\partial_t \bar{X} = -i\omega \bar{X}. \quad (9.87)$$

9.7.3 Équations de Maxwell pour des sources harmoniques

Nous nous intéressons au cas particulier où les sources sont harmoniques et données par

$$\vec{J} = \vec{J}_\omega e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad (9.88)$$

$$\rho = \rho_\omega e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}. \quad (9.89)$$

Relation de continuité

Utilisant les relations de la section 9.7, on transforme l'équation de continuité comme suit

$$\operatorname{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (9.90)$$

$$i\vec{k} \cdot \vec{J}_\omega - i\omega \rho_\omega = 0, \quad (9.91)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{J}_\omega - \omega \rho_\omega = 0, \quad (9.92)$$

$$\rho_\omega = \frac{\vec{k}}{\omega} \cdot \vec{J}_\omega. \quad (9.93)$$

Équations de Maxwell

En utilisant les mêmes substitutions, les équations de Maxwell prennent la forme

$$i\vec{k} \times \bar{B}_\omega + i\frac{\omega}{c^2} \vec{E}_\omega = \mu_0 \vec{J}_\omega, \quad (9.94)$$

$$i\vec{k} \cdot \vec{E}_\omega = \frac{\rho_\omega}{\epsilon_0}, \quad (9.95)$$

$$i\vec{k} \cdot \bar{B}_\omega = 0, \quad (9.96)$$

$$i\vec{k} \times \bar{E}_\omega - i\omega \bar{B}_\omega = 0. \quad (9.97)$$

Équation d'onde avec sources

Nous travaillons sur la base des ondes planes caractérisées par un vecteur d'onde \vec{k} et une pulsation ω . Il peut sembler étonnant que nous recherchions une équation d'onde. Calculons le double rotationnel de \vec{E} pour éliminer \bar{B} comme nous l'avions fait précédemment.

Équation d'Ampère-Maxwell

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \bar{B}_\omega) + \frac{\omega}{c^2} \vec{k} \times \vec{E}_\omega = -i\mu_0 \vec{k} \times \vec{J}_\omega. \quad (9.98)$$

En utilisant la *formule d'expulsion*,

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \bar{B}_\omega) = (\vec{k} \cdot \bar{B}_\omega) \vec{k} - k^2 \bar{B}_\omega = -k^2 \bar{B}_\omega, \quad (9.99)$$

où $\vec{k} \cdot \bar{B}_\omega = 0$ en vertu de l'équation de Gauss harmonique. Il en résulte que l'équation d'Ampère-Maxwell harmonique se réduit à

$$-k^2 \bar{B}_\omega + \frac{\omega}{c^2} \vec{k} \times \vec{E}_\omega = -i\mu_0 \vec{k} \times \vec{J}_\omega. \quad (9.100)$$

Remarquons que l'équation d'Ampère-Maxwell projetée sur la direction du vecteur d'onde \vec{k} nous donnerait l'équation de continuité sous la forme

$$\frac{\vec{k}}{\omega} \cdot \vec{J}_\omega = i\epsilon_0 \vec{k} \cdot \vec{E}_\omega = \rho_\omega. \quad (9.101)$$

Équation de Maxwell-Faraday En injectant l'expression (9.100) dans l'équation de Maxwell-Faraday, on obtient

$$\vec{k} \times \vec{E}_\omega = \omega \vec{B}_\omega = \frac{\omega^2}{(kc)^2} \vec{k} \times \vec{E}_\omega + i \frac{\mu_0 \omega}{k^2} \vec{k} \times \vec{J}_\omega, \quad (9.102)$$

qui se met sous la forme

$$\left(1 - \frac{\omega^2}{k^2 c^2}\right) (\vec{k} \times \vec{E}_\omega) = i \frac{\mu_0 \omega}{k^2} \vec{k} \times \vec{J}_\omega, \quad (9.103)$$

Équations pour le champ électrique Les équations de Maxwell harmoniques nous donnent donc les composantes de \vec{E}_ω en fonction des sources et du vecteur \vec{k} comme suit,

$$\vec{k} \cdot \vec{E}_\omega = -i \frac{\vec{k}}{\epsilon_0 \omega} \cdot \vec{J}_\omega = -i \frac{\rho_\omega}{\epsilon_0}, \quad (9.104)$$

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) (\vec{k} \times \vec{E}_\omega) = i \mu_0 \omega^2 \vec{k} \times \vec{J}_\omega. \quad (9.105)$$

La première de ces deux équations fournit la composante du champ alignée sur le vecteur d'onde \vec{k} . Cette composante est appelée *composante longitudinale* du champ. La seconde équation fournit la composante du champ orthogonale au même vecteur d'onde, appelée *composante transverse* du champ.

Équation pour le champ magnétique Le champ magnétique étant purement transverse, son évolution est donnée par l'équation (9.105) combinée à (9.101),

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) \vec{B} = i \mu_0 \vec{k} \times \vec{J}_\omega. \quad (9.106)$$

■ Petit poisson rouge... peut-on passer la barre rouge ?

Oui, à condition de répondre à ma question !

- Peut-on dire que les radiations électromagnétiques sont liées aux *composantes transverses* des champs, tandis que les variations de densité de charge sont liées à leurs *composantes longitudinales*?
- Expliquez pourquoi l'hypothèse d'absence de charge est équivalente à supposer que la densité de courant ne comporte pas de *composante longitudinale*.



9.7.4 Équation d'onde en l'absence de source

Dans le vide, on a $\vec{J}_\omega = \vec{0}$ et $\rho_\omega = 0$.

En l'absence de charge, on constate que la composante longitudinale du champ doit être nulle.

En l'absence de *composante transverse* de la densité de courant, en multipliant (9.105) par \vec{k} , au moyen du produit vectoriel, on obtient

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \vec{E}_\omega = \vec{0}. \quad (9.107)$$

Équation de compatibilité

L'équation (9.107) est une équation de compatibilité. Cette terminologie vient du fait que nous avons fait l'hypothèse que les solutions d'un problème de Maxwell harmonique sont des ondes planes. Cette hypothèse tient la route (est compatible) uniquement si

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (9.108)$$

Si ce n'est pas le cas, la seule solution pour satisfaire l'équation de compatibilité est de choisir $\vec{E} = \vec{0}$, ce qu'on appelle généralement la solution triviale, parce qu'avec un peu de pratique, il est évident que le système d'équations linéaires de Maxwell sans source admet la solution nulle pour tous les champs. Cette solution ne nous intéresse pas outre mesure.

Relation de dispersion

Si nous voulons que notre système soit compatible avec l'hypothèse des ondes planes, il faut donc imposer la relation de compatibilité $k = \omega/c$, où k est la norme du vecteur \vec{k} .

Dans le cas des ondes, cette équation de compatibilité porte le nom de *relation de dispersion*. Elle fournit le lien entre la partie spatiale de l'onde plane (dépendant de \vec{k}) et sa partie temporelle (dépendant de ω).

9.8 Lien entre le champ électrique et le champ magnétique d'une onde harmonique

Les équations de Maxwell harmoniques dans le vide nous indiquent directement que les vecteurs \vec{k} , \vec{E} et le *pseudo-vecteur* \vec{B} forment un trièdre orthogonal, avec la direction de l'onde \vec{k} orthogonale à la direction de polarisation du champ électrique \vec{E}_ω et la direction du champ magnétique.

9.8.1 Orientation du trièdre vecteur d'onde, champ électrique, champ magnétique

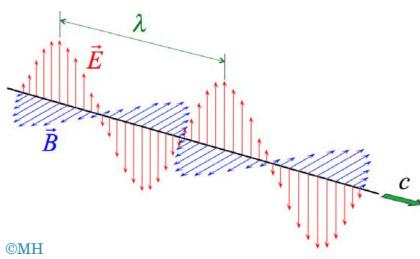
L'équation harmonique de Maxwell-Faraday nous indique que l'orientation du trièdre $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$ est celle définie pour le produit vec-

toriel. Comme nous avons choisi un *produit vectoriel* dextrogyre, ce trièdre est dès lors dextrogyre.

C'est la dépendance du sens de \vec{B} en la définition du produit vectoriel qui nous incite à l'écrire avec une barre plutôt qu'une flèche. En effet, la barre rappelle que les symétries s'appliquant aux vecteurs ne s'appliquent pas nécessairement aux pseudo-vecteurs.

L'image de l'onde électromagnétique à laquelle on aboutit est représentée à la figure 9.15. On y voit les vecteurs champs électriques et magnétiques oscillants ensemble (en phase) dans des directions perpendiculaires.

FIGURE 9.15 : Représentation du champ électromagnétique associé à une onde plane continue.



©MH

FIGURE 9.16 : Heinrich Hertz (1894).



■ Un peu d'histoire...

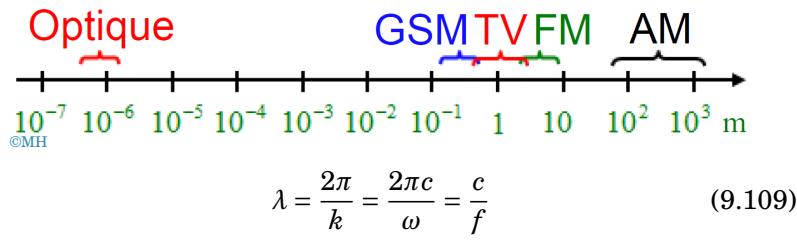
Comme déjà mentionné à plusieurs reprises, les ondes électromagnétiques ont été découvertes théoriquement par Maxwell sous forme d'une conjecture, vers 1860. Ce n'est que vers 1885 que leur existence a pu être vérifiée expérimentalement grâce au physicien allemand Heinrich Hertz (figure 9.16). S'il a fallu attendre un quart de siècle pour obtenir cette confirmation expérimentale, c'est parce qu'à la fois la génération et la détection des ondes électromagnétiques nécessitaient la maîtrise des circuits électriques oscillants (cf. circuit *RLC*). Maxwell n'a jamais su si les ondes électromagnétiques existaient effectivement car il est mort avant l'expérience de Hertz, à l'âge de 48 ans.

Dès leur découverte par Hertz, les ondes électromagnétiques ont été appliquées pour communiquer de l'information à longue distance. Le principe en est très simple : un émetteur consistant en un circuit oscillant muni d'une antenne génère une onde harmonique dont l'amplitude peut être modulée selon une fonction temporelle reproduisant le signal à transmettre (par exemple, un signal acoustique pour la radio). L'onde se propage alors dans l'espace et provoque des courants oscillants sur tout matériau conducteur et en particulier sur les antennes des postes récepteurs. Les postes récepteurs sont munis d'un circuit *RLC* qui entre en résonance avec la fréquence de l'onde si celle-ci correspond à sa fréquence propre. L'amplitude de l'oscillation résonante est proportionnelle à l'amplitude de l'onde. Dès lors, si l'amplitude de l'onde est modulée par le signal à transmettre, les variations de courant du circuit récepteur reproduisent ce signal. Ce dernier peut ainsi être reproduit facilement sous forme d'un signal électrique (on parle de signal électro-acoustique dans le cas de la radio) grâce à une opération de filtrage et une amplification.

■ Application pratique

Le schéma de la figure 9.17 montre l'échelle logarithmique des

FIGURE 9.17 – Échelle logarithmique des longueurs d'ondes du spectre électromagnétique utilisées pour les différents modes de télécommunications.



longueurs d'onde utilisées pour les diverses applications de télécommunication. Les ondes transmises en format de modulation d'amplitude (AM) vont typiquement de la centaine de mètres au kilomètre. En fréquence modulée (c'est la fréquence de l'onde qui est modulée pour traduire le signal à transmettre et non plus l'amplitude de l'onde), le domaine de longueur d'onde est autour de la dizaine de mètres. Les applications modernes de téléphonie mobile (GSM) utilisent des longueurs d'onde de l'ordre de la dizaine de centimètres. Finalement, on trouve les télécommunications optiques qui utilisent, comme leur nom l'indique, le domaine des longueurs d'onde proches du visible, c'est-à-dire, autour du micron. Le lien entre la longueur d'onde et la fréquence d'émission est rappelé afin de faciliter la conversion (par exemple, une longueur d'onde de 10 cm pour le téléphone correspond à une fréquence de 3 GHz).

9.9 Le coin des assistant·es

Ondes électromagnétiques dans le vide

À partir des équations de Maxwell dans le vide ($\rho = 0$ et $\vec{J} = \vec{0}$), il est possible de découpler mathématiquement le champ électrique du champ magnétique. Cela nous conduit à l'équation d'onde pour ces deux champs. Partant de

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0,$$

on obtient

$$\Delta \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad \Delta \vec{B} = \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2},$$

où $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = 299\,792\,458 \text{ m/s}$ est la vitesse de la lumière dans le vide. Même si les deux champs sont maintenant découplés, les équations d'onde décrivent la propagation d'une seule et même entité : l'onde électromagnétique. Cette onde est capable de se déplacer dans le vide (sans milieu matériel) à la vitesse de la lumière. Ces équations d'onde sont vectorielles. Les champs électrique et magnétique sont toujours perpendiculaires entre eux. Dans le vide, ils sont également perpendiculaires à la direction de propagation. L'onde électromagnétique est donc transverse dans le vide. À une position fixée, le lieu des points parcourus par le vecteur champ électrique (ou pseudo-vecteur champ magnétique) au cours du temps est appelé la polarisation de l'onde électromagnétique.

Onde plane

Une solution simple et très utile de l'équation d'onde est l'onde plane harmonique,

$$\vec{E} = \vec{A} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t), \quad \omega = 2\pi f,$$

où ω est la pulsation de l'onde et \vec{k} est son vecteur d'onde. Celui-ci indique la direction de propagation de l'onde plane et sa norme nous donne le nombre d'onde

$$|\vec{k}| = k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Une onde plane est une onde pour laquelle le lieu des points de phase constante (front d'onde) est un plan. Étant donné qu'un plan est d'extension infinie, ce genre d'onde devrait transporter une énergie infinie. Les ondes planes ne sont donc pas physiques. Cependant, en combinant différentes ondes planes, il est possible de décrire le comportement d'ondes bien réelles. Les différentes grandeurs caractéristiques de l'onde plane sont reliées par

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{c}{f} = c T,$$

où f est la fréquence et T est la période.

Formalisme des phasateurs et équations de Maxwell dans le vide

La description de phénomènes ondulatoires complexes peut se réaliser en considérant la combinaison de différentes ondes planes harmoniques. Cependant, l'utilisation de fonctions harmoniques peut vite complexifier la modélisation mathématique. En nous inspirant de ce qui a été fait pour l'étude des oscillations, nous utiliserons le formalisme des phasateurs afin de simplifier la description mathématique des ondes,

$$\vec{X} = \vec{A} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi) = \operatorname{Re} \vec{A} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi)} = \operatorname{Re} \vec{X}_\omega e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)},$$

où $\vec{X}_\omega = \vec{A} e^{i\varphi}$. À chaque phaseur \vec{X}_ω correspond une onde plane de pulsation ω , comme précisé par son indice. Nous en déduisons que les opérateurs différentiels peuvent se récrire en termes de simples produits,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{X} = i\vec{k} \cdot \vec{X}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{X} = i\vec{k} \times \vec{X}, \quad \partial_t \vec{X} = -i\omega \vec{X}. \quad (9.110)$$

appliquant ce formalisme aux équations de Maxwell dans le vide, nous obtenons,

$$\vec{k} \cdot \vec{E}_\omega = 0, \quad \vec{k} \cdot \vec{B}_\omega = 0, \quad \vec{k} \times \vec{E}_\omega - \omega \vec{B}_\omega = 0, \quad \vec{k} \times \vec{B}_\omega + \frac{\omega}{c^2} \vec{E}_\omega = 0. \quad (9.111)$$

Les deux premières équations montrent que les champs électrique et magnétique sont perpendiculaires à la direction de propagation ($\vec{k} \perp \vec{E}$ et $\vec{k} \perp \vec{B}$). Ces projections nulles proviennent directement du fait que nous n'avons pas de termes sources ($\rho_\omega = 0$ et $\vec{J}_\omega = \vec{0}$). Nous retombons bien sur la conclusion que l'onde électromagnétique est transverse dans le vide. Les deux dernières équations montrent que les champs électrique et magnétique sont toujours perpendiculaires entre eux. En combinant les équations de Maxwell, nous constatons qu'une solution, autre que la solution triviale — tous les champs sont nuls —, n'existe que lorsque l'égalité suivante est vérifiée,

$$|k|^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}.$$

Ce lien entre le nombre d'onde k — qui caractérise la partie spatiale de l'onde — et la pulsation ω — qui caractérise la partie temporelle de l'onde — est appelé la *relation de dispersion*.

9.10 Exercices

Exercice 9.1

Démontrez que le champ électrique de l'onde suivante doit être perpendiculaire à l'axe z : $\vec{E}(z, t) = \vec{A} \cos(kz - \omega t)$.

Exercice 9.2

Calculez l'expression du champ magnétique associé à l'onde de champ électrique suivante : $\vec{E}(z, t) = a \sin(kz) \sin(\omega t) \vec{I}_x$

Exercice 9.3

Le schéma de la figure E.9.1 montre une paroi de courant (d'extension supposée infinie) véhiculant une densité de courant de surface \vec{J}_s variable dans le temps selon l'expression : $\vec{J}_s(t) = J_{s0} e^{-t^2/t_0^2} \vec{I}_x$.

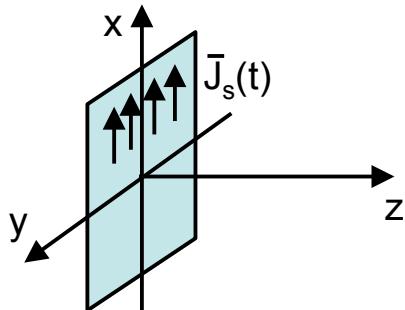


FIGURE E.9.1 :

- Donnez l'expression analytique de l'onde de champ magnétique $\vec{B}(z, t)$ émise par cette paroi ($z > 0$).
- Donnez l'expression analytique de la densité de courant de déplacement $\vec{J}_D(z, t)$ émise par cette paroi ($z > 0$).

Exercice 9.4

Démontrez qu'une onde plane électromagnétique se propageant dans le vide est caractérisée par un champ électrique perpendiculaire à sa direction de propagation.

Exercice 9.5

On reprend l'exercice 2.6, pour une onde harmonique, lorsque

$$f = f_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi)} = f_\omega e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad (\text{E.9.1})$$

$$\vec{a} = \vec{a}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi)} = \vec{a}_\omega e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}. \quad (\text{E.9.2})$$

On demande de calculer les opérateurs d'opérateurs ci-dessous :

- $\operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{grad}} f$
- $\overrightarrow{\operatorname{rot}} \overrightarrow{\operatorname{grad}} f$
- $\operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{a}$
- $\overrightarrow{\operatorname{rot}} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{a}$
- $\overrightarrow{\operatorname{grad}} \operatorname{div} \vec{a}$

Récapitulatif des notions vues dans cette leçon

Indispensable	Nécessaire	Intéressant
<ul style="list-style-type: none"> — Forme de l'équation d'onde au départ des équations de Maxwell. — Propagation d'une perturbation (sur une paroi) au sein de l'espace. — Vitesse de propagation d'une onde électromagnétique. — Solution monocomposante de l'équation d'onde scalaire. 	<ul style="list-style-type: none"> — Forme harmonique des équations de Maxwell. — Lien entre le champ magnétique et le champ électrique dans une onde. — Polarisation du champ. — Propagation transverse d'une onde électromagnétique dans le vide. — Notion de front d'onde, lien avec direction de propagation. — Gammes de longueurs d'onde électromagnétiques principales. 	<ul style="list-style-type: none"> — Notion de réponse retardée. — Notion de relation de dispersion. — Polarisation circulaire et elliptique. — Détection d'une onde électromagnétique (radio) — Énergie transmise par une onde (vecteur de Poynting) — Limite de validité des équations de circuits

Ondes stationnaires, battement & effet Doppler

10

Leçon

■ Pré-requis pour cette leçon ■

- | | |
|-------------------|----------------------|
| — onde | — résonance |
| — équation d'onde | — phaseur |
| — EDO linéaire | — formule de Simpson |

NOUS REPASSONS ici dans le cadre général de l'équation d'onde standard pour étudier le phénomène d'onde stationnaire, le battement et l'effet Doppler. Ces phénomènes sont universels mais pour les illustrer et les visualiser, nous devons néanmoins faire le choix d'un type d'onde.



L10P1

L10P2



10.1 Ondes stationnaires

Pour la facilité de visualisation auxquelles elles conduisent, nous travaillerons avec les ondes de corde. Dans ce cas l'équation d'onde standard sera écrite pour une fonction f représentant la hauteur des points d'une corde par rapport à l'axe marquant sa position de repos horizontale. Mais il est essentiel de retenir que ce que nous conclurons de cette étude théorique est universel et peut être appliqué à toute grandeur physique f répondant à l'équation d'onde standard. La fonction f pourrait, par exemple, être une composante de champ électrique, une composante de champ magnétique, une pression acoustique, les déplacements des atomes dans un cristal, etc.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0 \quad (10.1)$$

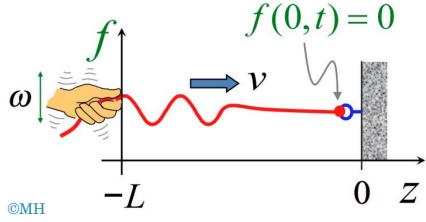
$$f = E, B, P, x, \dots \quad (10.2)$$

10.1.1 Problèmes aux conditions aux limites

Commençons par étudier le problème schématisé à la figure 10.1. On y voit une corde fixée à son extrémité droite et mise en mouvement harmonique à son extrémité gauche. Nous nous servirons de l'équation d'onde standard pour connaître le mouvement de la corde dans ces conditions.

Vous remarquerez sur le schéma de la figure 10.1 que l'origine des z est placée au point fixe de la corde. De la sorte, l'extrémité libre mise en mouvement se trouve en $z = -L$, où L est la longueur de la corde. Ce choix de l'origine des z est fait pour simplifier les calculs qui suivront. Le fait que la corde est fixe en $z = 0$ se traduit mathématiquement par la relation $f(0, t) = 0$ pour tout t .

FIGURE 10.1 : Corde mise en mouvement vertical à son extrémité gauche et fixée à son extrémité droite, séparée d'une distance verticale L .



©MH

Nécessité de superposer plusieurs ondes

Si l'extrémité libre est mise en mouvement harmonique, il est légitime de se dire que ce mouvement harmonique se propagera le long de la corde à la vitesse v . On serait donc tenté a priori de prendre comme solution la fonction d'onde harmonique progressive $f_1 = a \cos(kz - \omega t + \varphi)$ où $k = \omega/v$, v étant la vitesse des ondes de la corde, soit $v = \sqrt{F_T/\mu}$, soit

$$f_1(z, t) = a \cos(kz - \omega t + \varphi) \quad \text{où} \quad k = \frac{\omega}{v}. \quad (10.3)$$

Le problème avec cette solution est que la fonction ne s'annule pas en $z = 0$. On voit, en effet, dans la relation suivante que la contrainte $f(0, t) = 0 \forall t$ imposerait une valeur nulle de l'amplitude a , et l'onde n'existerait donc pas,

$$f_1(0, t) = a \cos(\omega t) = 0 \quad \forall t \Rightarrow a = 0. \quad (10.4)$$

Pour passer outre cette difficulté, nous utilisons le principe de superposition des solutions de l'équation d'onde. Autrement dit, nous considérons la solution générale de l'équation d'onde standard discutée à la section 8.1.4. Nous y avons vu, en effet, que les solutions générales de l'équation d'onde pouvaient être mises sous la forme d'une somme de fonction « f » d'un seul argument « u » avec $u = z - vt$ ou bien $u = z + vt$. Ces deux cas correspondent à des ondes se propageant en sens inverses, la première se déplace vers le z positifs et est dite « *progressive* », tandis que la seconde se déplace vers les z négatifs est dite « *régressive* ». Nous notons ces fonctions respectivement $g(z - vt)$ et $h(z + vt)$. Nous dirons dans la suite qu'elles sont « *contra-propagatives* », puisqu'elles se déplacent dans des directions opposées. Comme l'onde progressive, seule, ne suffit pas à satisfaire les conditions aux limites de la corde, la cohérence mathématique nous oblige à considérer que l'onde totale est donnée par la superposition de ces deux ondes contra-propagatives. Cette contrainte mathématique peut être interprétée physiquement : la présence de l'onde régressive s'explique par une réflexion de l'onde progressive sur le point fixe de la corde en $z = 0$. Nous avons donc pour la solution générale,

$$f(z, t) = g(z - vt) + h(z + vt). \quad (10.5)$$

Conditions aux limites

Puisque le mouvement de la corde à son extrémité gauche est harmonique, nous choisissons l'onde harmonique $a \cos(kz - \omega t + \varphi_-)$

pour l'onde progressive $g(z-vt)$ et l'onde harmonique $b \cos(kz+\omega t + \varphi_+)$ pour l'onde régressive $h(z+vt)$. La solution adaptée à notre problème s'écrit donc

$$f(z,t) = a \cos(kz - \omega t + \varphi_-) + b \cos(kz + \omega t + \varphi_+). \quad (10.6)$$

Les constantes a et b sont les amplitudes des deux ondes. *A priori*, rien n'indique qu'il faut considérer que ces amplitudes sont égales. Pour vérifier si notre choix de solution est physiquement acceptable il faut encore s'assurer qu'il satisfasse les conditions aux limites du problème. Commençons par la condition imposée à droite en $z = 0$ où le mouvement de la corde est empêché par sa fixation. Mathématiquement, cette condition s'écrit $f(0,t) = 0$. Elle doit être satisfaite par la solution proposée ci-dessus, soit

$$f(0,t) = a \cos(-\omega t + \varphi_-) + b \cos(\omega t + \varphi_+) = 0 \quad \forall t. \quad (10.7)$$

Pour satisfaire l'égalité (10.7) pour tout temps t , on pose $\Phi = \varphi_+ + \varphi_-$ et on développe

$$\cos(-\omega t + \varphi_-) = \cos(\omega t - \varphi_-) \quad (10.8)$$

$$= \cos(\omega t + \varphi_+ - \Phi) \quad (10.9)$$

$$= \cos(\omega t + \varphi_+) \cos \Phi + \sin(\omega t + \varphi_+) \sin \Phi.$$

L'égalité (10.7) devant être valable pour tout instant t , on trouve

$$a \cos \Phi + b = 0, \quad (10.10)$$

$$a \sin \Phi = 0. \quad (10.11)$$

On recherche une solution pour laquelle $a \neq 0$, ce qui impose

$$\Phi = 0 \text{ ou } \pi \mod 2\pi, \quad (10.12)$$

$$b = -a \text{ ou } a (\text{resp.}) \quad (10.13)$$

Ces deux solutions correspondent à la même configuration car changer le signe de b revient à déphasier le cosinus de π . Nous choisirons donc $\Phi = 0$, soit $\varphi = \varphi_+ = -\varphi_-$ et une amplitude de l'onde régressive $b = -a$.

Solution à un point fixe

La solution $f(z,t)$ satisfaisant la contrainte du point fixe en $z = 0$, s'écrit donc

$$f(z,t) = a \cos(kz - \omega t - \varphi) - a \cos(kz + \omega t + \varphi), \quad (10.14)$$

qui vaut bien 0 lorsque $z = 0$.

En utilisant la *formule de Simpson* pour la soustraction des sinus,

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2}, \quad (10.15)$$

l'onde prend la forme

$$f(z,t) = 2a \sin(kz) \sin(\omega t + \varphi). \quad (10.16)$$

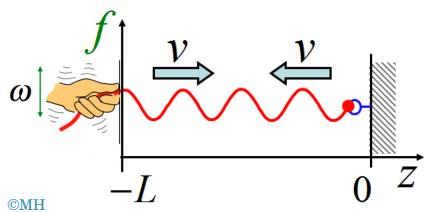
Avec la solution écrite sous cette forme, on vérifie facilement que la contrainte de point fixe en $z = 0$ est satisfaite.

10.1.2 Onde stationnaire

Il est remarquable que dans cette solution la coordonnée z et le temps t ne soient plus couplés dans l'argument unique d'une fonction. Comme z apparaît seul dans l'argument du sinus, on en déduit que la forme spatiale de l'onde est une fonction sinus stationnaire possédant notamment un zéro à l'origine et ceci pour tout temps t . Il ne s'agit donc plus d'une onde propagative. L'onde ne se déplace plus à la vitesse v . C'est pourquoi on l'appelle onde « *stationnaire* »,

$$f(z, t) = 2a \sin(kz) \sin(\omega t + \varphi). \quad (10.17)$$

FIGURE 10.2 : Onde stationnaire d'expression formée par la superposition de deux ondes contra-propagatives de vitesses \vec{v} et $-\vec{v}$.



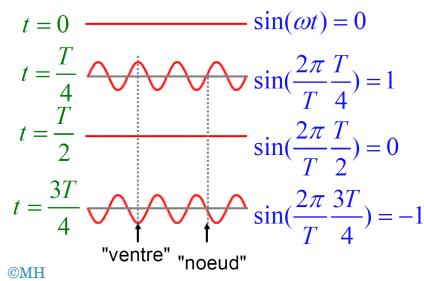
©MH

Le schéma de la figure 10.2 montre l'onde stationnaire créée par l'agitation harmonique à l'extrême gauche de la corde. Les flèches indiquent que cette onde est due à la superposition des deux ondes contra-propagatives. On constate que l'amplitude A de l'onde stationnaire vaut deux fois l'amplitude de ces deux ondes, soit $A = 2a$. Ce résultat signifie que les deux ondes contra-propagatives s'additionnent *en phase* en certaines positions z (additionné « *en phase* » signifie que les ondes s'additionnent avec la même phase de sorte que leur somme soit maximale). Ces positions de déplacement maximal de la corde sont données par les valeurs de z qui vérifient la relation $\sin(kz) = 1$.

Évolution temporelle

La solution d'onde stationnaire $f(z, t) = A \sin(kz) \sin(\omega t + \varphi)$ est représentée schématiquement à la figure 10.3 à différents temps t , pour $\varphi = 0$. Le déplacement maximal $A = 2a$ de la corde est obtenu aux extrêmes de la fonction $\sin(kz)$ en des temps pour lesquels la fonction $\sin(\omega t + \varphi)$ prend ses valeurs extrêmes ± 1 . Comme $\varphi = 0$, au temps $t = 0$, le déplacement des points de la corde est nul partout. Mais un quart de période plus tard, soit $t = T/4$ où $T = 2\pi/\omega$, le déplacement de la corde est à son maximum, il vaut alors $A \sin(\pi/2) = A$. La forme de la corde est alors donnée par la fonction $A \sin(kz)$. Au temps $t = T/2$, on retrouve à nouveau un déplacement nul en tout point, soit $A \sin(\pi) = 0$, et en $t = 3T/4$, le déplacement est à nouveau maximal, ce qui correspond à $A \sin(3\pi/2) = -A$. Dans cette situation la forme spatiale de la corde est donnée par $-A \sin(kz)$, ce qui indique qu'elle est en opposition de phase par rapport à ce qu'elle était en $t = 0$. Toutes ces situations sont représentées schématiquement à la figure 10.3.

FIGURE 10.3 : Onde stationnaire d'expression $f(z, t) = A \sin(kz) \sin(\omega t)$ représentée à différents instants sur un axe horizontal correspondant à l'axe z . Les nœuds sont les points dont l'amplitude est nulle en tout temps, tandis que les ventres sont les points auxquels la variation d'amplitude est maximale.



©MH

Nœuds et ventres

La fonction « *forme* » de la corde, $A \sin(kz)$, possède des zéros fixes en $z = m\pi/k$, où m est un entier. Ce sont les « *nœuds* » du mouvement de la corde, ces points ne bougent jamais. Entre les nœuds, on trouve les « *ventres* ». Ce sont les zones de déplacement maximal des points de la corde.

10.1.3 Amplification et résonance

Jusqu'à présent nous n'avons pas déterminé complètement la solution du problème aux conditions aux limites traité depuis le début de ce chapitre, puisque nous ne connaissons pas l'amplitude A de l'onde stationnaire. Pour la connaître il faut considérer la condition aux limites du côté gauche. Autrement dit, il faut exprimer qu'en $z = -L$ la corde est agitée de façon harmonique avec une amplitude donnée. Mathématiquement cela s'exprime par

$$f(-L, t) = A_S \sin(\omega t + \varphi). \quad (10.18)$$

Dans cette expression A_S est l'amplitude du mouvement de la main qui agite la corde. Autrement dit, c'est l'amplitude du mouvement « *source* » de l'onde. C'est pourquoi on l'appelle l'amplitude source (c'est la signification de l'indice S). Cette condition aux limites particulière (dépendante du temps) doit être en accord avec notre solution. C'est précisément cette condition qui va fixer l'amplitude A des oscillations de la corde.

Or en substituant la valeur $z = -L$ dans la solution d'onde stationnaire, nous obtenons l'expression du mouvement de l'extrémité gauche de la corde

$$f(-L, t) = -A \sin(kL) \sin(\omega t + \varphi). \quad (10.19)$$

La comparaison de cette expression avec le mouvement harmonique de la main, $f(-L, t) = A_S \sin(\omega t + \varphi)$, nous indique que l'amplitude A de l'onde stationnaire répond à la relation

$$A_S \sin(\omega t + \varphi) = -A \sin(kL) \sin(\omega t + \varphi). \quad (10.20)$$

Rapport des amplitudes Après simplification des sinus, on voit que l'amplitude A de l'onde stationnaire est liée à l'amplitude du mouvement source A_S par

$$A = -\frac{A_S}{\sin(kL)}. \quad (10.21)$$

Notez que le signe de l'amplitude n'a pas d'importance. Avec le terme « *amplitude* », on désigne effectivement l'amplitude du mouvement des points de la corde qui s'éloignent le plus de la position de repos de la corde. C'est, plus précisément, la distance maximale que ces points atteignent par rapport à l'axe de la corde. Une distance étant naturellement un nombre positif, on définit l'amplitude de l'onde de corde comme étant la valeur absolue du facteur de la fonction harmonique qui représente cette onde. On considérera donc dans la suite la relation (10.21) sans tenir compte du signe,

$$A = \frac{A_S}{\sin(kL)}. \quad (10.22)$$

Solution du problème aux limites de l'onde stationnaire

La relation (10.22) nous donne la solution complète du problème aux limites. L'onde stationnaire s'écrit donc

$$f(z, t) = \frac{A_S}{\sin(kL)} \sin(kz) \sin(\omega t + \varphi). \quad (10.23)$$

Dépendance fréquentielle de l'amplification Il est intéressant de rappeler que le nombre d'onde k est une fonction de la pulsation ω du mouvement imposé en $z = -L$, soit $k = \omega/v$. Le rapport entre l'amplitude de l'onde A et celle du mouvement source A_S varie donc en fonction de la pulsation au travers de la fonction $\sin(kL)$ qui apparaît au dénominateur dans l'expression (10.23). Si la pulsation est telle que $|\sin(kL)| < 1$, c'est-à-dire que le produit kL est différent d'un nombre impair de fois $\pi/2$, alors l'amplitude A de l'onde stationnaire est plus grande que l'amplitude A_S du mouvement source. On peut en conclure qu'il y a un phénomène d'amplification dans la mesure où l'amplitude du mouvement de certains points de la corde (les centres des ventres) est plus grande que l'amplitude du mouvement source selon :

$$A = \frac{A_S}{\sin(kL)} \Rightarrow \text{ si } kL \neq (2n+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow A > A_S. \quad (10.24)$$

Fréquence de résonance L'amplification est d'autant plus marquée que le produit kL se rapproche d'une valeur multiple de π car pour ces valeurs la fonction $\sin(kL)$ se rapproche de zéro.

$$kL = N\pi, \quad \frac{\omega}{v}L = N\pi, \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = N \frac{v}{2L}. \quad (10.25)$$

Pour une amplitude source donnée, l'amplitude de l'onde devient de plus en plus grande. Comme $\sin(kL)$ dépend de la pulsation ω , on constate que, pour certaines valeurs de la pulsation, l'amplitude d'oscillation de la corde prend des valeurs arbitrairement grandes. La situation est analogue à celle de l'oscillateur linéaire que l'on excite à des pulsations proches de sa pulsation de résonance. Si l'oscillateur n'était pas amorti (ce serait alors un *OH* forcé), son amplitude d'oscillation tendrait vers l'infini à la pulsation de résonance.

10.1.4 Oscillations propres

Si le produit kL devient égal à un multiple de π , c'est-à-dire $\sin(kL) = 0$, alors on arrive à une difficulté mathématique liée à la division par zéro dans l'expression de l'amplitude A dans (10.24). En effet, dans cette situation, l'amplitude de l'onde stationnaire devient infinie, ce qui n'est pas acceptable physiquement (ceci d'autant plus que le modèle des cordes que nous avons adopté n'est valable qu'aux petites amplitudes puisqu'il n'est valable qu'aux petits angles, voir section 8.1). Cette valeur infinie de l'amplitude provient du fait que le modèle de corde que nous avons adopté ne tient pas compte des frottements. Tout se passe comme si un oscillateur linéaire était excité à sa fréquence propre en l'absence d'amortissement. La théorie des phaseurs vue à la sous-section 7.1.2 (page II.37) indique effectivement que l'amplitude de l'oscillation d'un oscillateur linéaire non amorti ($\alpha = 0$) et forcé est infinie à la pulsation de résonance ($\omega = \omega_0$), ce qui est inatteignable en pratique. Dans le



L10P3



cas de la corde, nous pouvons néanmoins obtenir une solution physiquement acceptable pour les pulsations telles que $\sin(kL) = 0$. En effet, une amplitude A finie peut être obtenue si l'amplitude source s'annule, soit $A_S = 0$. Dans ce cas l'amplitude de l'onde stationnaire est en fait indéterminée au sens mathématique puisqu'elle vaut $A = 0/0$, ce qui signifie en pratique que l'amplitude est arbitraire. Ceci est résumé par :

$$\begin{aligned} \text{soit } \omega \text{ telle que } kL = n\pi &\Rightarrow \sin(kL) = 0 \\ \hookrightarrow \text{si } A_S = 0 &\Rightarrow A = \frac{0}{0}. \end{aligned}$$

Notons qu'une amplitude source qui s'annule correspond à une corde fixée en deux points : $z = 0$, comme précédemment et $z = -L$.

Vibrations propres d'une corde fixée à ses deux extrémités

On conclut de l'analyse qui vient d'être faite qu'une corde fixée à ses deux extrémités peut vibrer avec n'importe quelle amplitude aux fréquences de résonances. L'amplitude du mouvement dépend des conditions initiales mais pas des conditions aux limites. Cette situation est analogue à celle de l'*OH* dont l'amplitude d'oscillation est arbitraire et dépend donc seulement des conditions initiales; voir section 6.4.3, page II.25). Ceci nous conduit à la notion de *vibration propre* pour laquelle il y a mouvement harmonique de la corde en l'absence de mouvement source, à l'image de la corde d'une guitare qui vibre si elle est mise dans une condition initiale différente de sa position de repos (c'est le pincement de la corde qui crée cette condition initiale). Attention, il s'agit ici de ne pas confondre mouvement source et condition initiale : le mouvement source impose une condition aux limites (mouvement harmonique permanent de l'extrémité de la corde) alors que la condition initiale est la forme initiale imposée à la corde pour la mettre ici en mouvement de vibration propre (voir section 8.1.5). Le mouvement source est un mouvement entretenu qui permet de développer une solution établie (de régime) non nulle. La condition initiale ne permet pas d'atteindre une solution de régime non nulle dans la pratique, à cause de la dissipation d'énergie (par émission d'une onde acoustique, échauffement, etc.) Nos équations autorisent une solution non nulle parce que le modèle que nous utilisons ne possède pas de pertes.

Fréquences propres de vibration

Dans son mouvement de vibration propre la corde vibre à une pulsation déterminée seulement par les paramètres physiques et géométriques de la corde, à l'image de l'*OH*. Pour voir cela il suffit de reprendre la condition de vibration propre de la corde, soit $\sin(kL) = 0$, c'est-à-dire, $kL = n\pi$ où n est un entier. Cette relation indique que la vibration propre d'une corde peut être obtenue pour plusieurs valeurs du nombre d'onde. Ces valeurs constituent un

ensemble infini dénombrable de multiples de π/L , soit $k_n = n\pi/L$. Chaque valeur de n correspond à ce que l'on appelle un « *mode propre de vibration* »,

$$kL = n\pi \Rightarrow k_n = \frac{n\pi}{L}. \quad (10.26)$$

En vertu de la relation $k = \omega/v$, chacune de ces valeurs du nombre d'onde correspond à une valeur différente de la fréquence de vibration propre. Ceci constitue une différence essentielle avec l'OH : alors que l'OH n'a qu'une fréquence propre de vibration, la corde en possède une infinité dénombrable. Pour une valeur de n donnée, la pulsation de vibration propre est $\omega_n = vk_n = nv\pi/L$. Chacune de ces pulsations correspond à un « *mode propre* » de vibration de la corde,

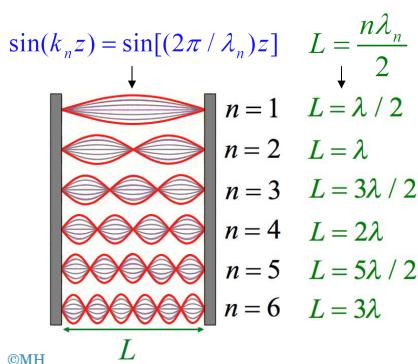
$$\begin{aligned} \omega &= kv \\ k_n &= \frac{n\pi}{L} \Rightarrow \omega_n = n \frac{v\pi}{L}. \end{aligned} \quad (10.27)$$

Profils spatiaux des modes propres

Pour visualiser ce qu'est un mode propre, il est intéressant de traduire la condition de vibration propre en termes de longueur d'onde. Le nombre d'onde k détermine la longueur d'onde au travers de la relation $\lambda = 2\pi/k$, ce qui nous permet de constater que les modes propres de vibration sont caractérisés par une longueur d'onde bien précise des ondes contra-propagatives qui le composent. Ceci est traduit par (10.28) ci-dessous qui aboutit à la conclusion qu'une corde vibrant selon un mode propre de vibration a une longueur L , nécessairement égale à un multiple de demi-longueurs d'onde,

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2\pi L}{n\pi} = \frac{2L}{n} \Rightarrow L = n \frac{\lambda_n}{2}. \quad (10.28)$$

FIGURE 10.4 : Ondes stationnaires compatibles avec la présence de deux points fixes (nœuds) séparés d'une distance L . On voit que les longueurs d'ondes possibles sont données par $\lambda_n = 2L/n$.



©MH

Ce résultat est très facile à interpréter : le fait que la longueur de la corde soit égale à un nombre entier de demi-longueurs d'onde constitue simplement la condition pour avoir un point fixe à chacune des deux extrémités de la corde. Ceci se vérifie très facilement en se rappelant d'une part que la forme de la corde est donnée par la fonction $\sin(kz) = \sin[(2\pi/\lambda)z]$ et en vérifiant d'autre part que pour les valeurs de longueurs d'onde $\lambda_n = 2L/n$ on a bien $\sin[(2\pi/\lambda_n)z] = 0$ à la fois en $z = 0$ et $z = -L$. Ceci nous permet de nous représenter un mode propre de vibration. À titre d'illustration, quelques modes de vibration propres de la corde sont représentés à la figure 10.4 pour différentes valeurs de n . Pour chaque valeur de n la corde est représentée en différents temps séparés d'un douzième de période (cf. lignes noires continues).

Application pratique

Instruments à cordes

Les phénomènes d'onde stationnaire et de vibration propre sont rencontrés dans de nombreuses situations pratiques. Pour reprendre l'exemple des instruments de musique à cordes, une corde de guitare vibre selon ses modes propres de vibration. D'après la relation donnant la vitesse de propagation des ondes sur une corde, soit $v = \sqrt{F_T/\mu}$, et d'après les formules que nous venons de dériver, les fréquences acoustiques qu'une corde émet sont fonction de sa longueur L , de sa tension F_T ainsi que de sa masse linéique μ . Par exemple, les notes graves seront générées par les cordes longues de grande masse linéique et peu tendues, ce qui est illustré à la figure 10.5.

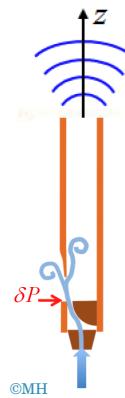
Remarquez que, puisqu'il y a toujours un amortissement qui provoque une diminution de l'amplitude de vibration, un mode propre de vibration nécessite une excitation pour être maintenu.



FIGURE 10.5 : Illustration du lien entre la longueur d'une corde d'instrument musical et la fréquence du son qu'elle émet.

$$\omega_n = n \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{F_T}{\mu}} \quad \text{où} \quad v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$$

FIGURE 10.6 : Schéma d'un tuyau d'orgue permettant d'expliquer l'apparition d'ondes stationnaires dont la longueur d'onde est en lien avec la longueur du tuyau.



Application pratique

Instruments à vent

Les instruments à vent reposent également sur le principe d'ondes stationnaires entretenues. Prenons l'exemple d'un tuyau d'orgue représenté à la figure 10.6. La pression au repos est la pression atmosphérique notée ici P_0 .

Comme montré sur le schéma de la figure 10.7, le sifflet par lequel passe un flux d'air provoque des variations de pression δP (c'est l'équivalent du mouvement source en $z = -L$ pour la corde). La perturbation de pression δP (c'est-à-dire, la pression acoustique) se propage à la vitesse du son dans le tuyau. Or, à la sortie du tuyau la pression est toujours la pression atmosphérique P_0 , ce qui signifie que la pression acoustique doit s'y annuler. Il y a donc un nœud de pression acoustique à l'extrémité du tuyau. En raison de cette condition de pression acoustique nulle, l'onde acoustique est réfléchie dans le haut du tuyau et revient vers le bas pour former avec l'onde qui monte une onde stationnaire. La perturbation de pression contient, a priori, plusieurs fréquences mais seules les fréquences qui entrent en résonance (c'est-à-dire, les fréquences de vibration propre pour lesquelles il se forme des nœuds aux deux extrémités du tuyau) sont amplifiées (c'est la situation $A > A_S$ que l'on avait plus haut pour les cordes) et deviennent audibles. En raison de l'amortissement des ondes acoustiques, le sifflet doit vibrer continument pour fournir un mouvement source mais seules les ondes amplifiées par résonance deviennent audibles. En fait, le nœud au niveau du sifflet n'est pas un véritable nœud car la pression acoustique n'y est pas rigoureusement nulle, il y a une per-

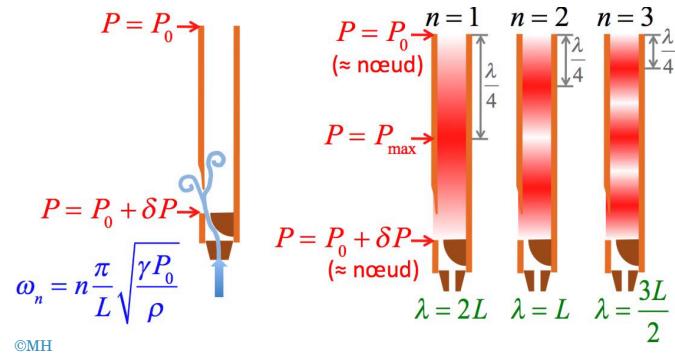


FIGURE 10.7 : Illustration de la formation d'ondes stationnaires de pression acoustique δP dans un tuyau d'orgue, données respectivement pour les valeurs $n = 1, 2, 3$ et illustration du lien entre la pression ambiante P_0 , la fréquence émise, la taille du tube et la masse volumique de l'air, ρ . Comme précédemment, le coefficient adiabatique γ de l'air vaut 1.4.

turbation de pression faible qui permet juste de compenser l'amortissement des ondes acoustiques dans le tuyau (c'est pourquoi on peut tout de même le considérer comme un nœud). La pression maximale aux ventres de vibration est beaucoup plus élevée que la pression δP au niveau du sifflet ou de la sortie du tuyau où la pression acoustique n'est pas non plus rigoureusement nulle car sinon le son ne serait pas émis.

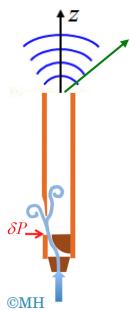
La sélection naturelle des fréquences dans le tuyau se fait selon la relation qui donne les pulsations propres de résonance $\omega_n = n\pi/L$ où la vitesse doit être remplacée par la vitesse du son $(\gamma P_0/\rho)^{1/2}$ (voir section 8.2.2). En vertu de la linéarité de l'équation d'onde acoustique, le principe de superposition s'applique et plusieurs modes de vibration peuvent vibrer simultanément.



L10P4



FIGURE 10.8 : Tuyau d'orgue dans lequel on étudie la propagation d'un signal de battement entre deux fréquences.



10.2 Composition de fréquences, phénomène de battement

Le tuyau d'orgue que nous venons d'étudier brièvement émet plusieurs harmoniques dont les fréquences correspondent aux conditions de résonance des ondes acoustiques dans le tuyau (cf. Fig. 10.8). Les pulsations résonantes ω_n sont rappelées ci-après,

$$\omega_n = n \frac{v\pi}{L}. \quad (10.29)$$

Supposons qu'il n'y ait que deux fréquences générées et étudions l'onde acoustique résultant de la superposition des deux ondes correspondantes. Pour la simplicité, nous les considérerons de même amplitude et de même phase, soit $A \cos(k_1 z - \omega_1 t) + A \cos(k_2 z - \omega_2 t)$.

10.2.1 Signal de battement temporel

Dans un premier temps, nous ne considérerons l'onde qu'en un point de l'espace de façon à nous centrer sur l'étude de sa variation temporelle. Pour la simplicité, nous supposons que les deux ondes ont un ventre en commun et nous appelons ce point $z = 0$, ce qui donne le signal temporel

$$f(0, t) = A \cos(\omega_1 t) + A \cos(\omega_2 t). \quad (10.30)$$

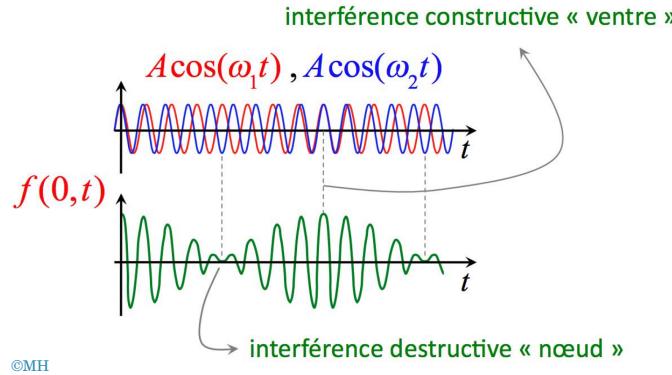


FIGURE 10.9 : Battement. En combinant les signaux à pulsation ω_1 et ω_2 (haut), on obtient une onde dont la porteuse correspond à $(\omega_1 + \omega_2)/2$ et la modulation à une enveloppe de pulsation $|\omega_1 - \omega_2|/2$.

En utilisant la *formule de Simpson* pour la somme des cosinus,

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad (10.31)$$

on peut écrire la variation de pression acoustique $f(0, t)$ résultante de façon compacte et facile à interpréter,

$$f(0, t) = 2A \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right). \quad (10.32)$$

↑
fréquence "moyenne"
↓
fréquence de "battement"

Interprétation du signal de battement On voit apparaître deux facteurs harmoniques de fréquences angulaires différentes. Une des fréquences angulaires vaut $(\omega_1 + \omega_2)/2$ et peut être interprétée comme la fréquence moyenne. Nous supposerons dans la suite que l'écart entre les fréquences de départ ω_1 et ω_2 est faible ($\omega_1 \approx \omega_2$). Cette fréquence moyenne est donc très proche à la fois de ω_1 et ω_2 et il s'agit dès lors d'une fréquence sonore audible (on suppose que les deux ondes de départ sont des ondes acoustiques audibles). L'autre fréquence angulaire qui apparaît dans le signal acoustique vaut $(\omega_1 - \omega_2)/2$ et constitue donc une fréquence très faible par rapport à la fréquence moyenne. Si cette fréquence est suffisamment faible elle ne sera pas dans le domaine des fréquences audibles et le facteur $\cos[(\omega_1 - \omega_2)t/2]$ aura alors pour effet de simplement moduler en amplitude le signal acoustique de fréquence moyenne $(\omega_1 + \omega_2)/2$. Cette modulation est périodique et le signal sonore apparaîtra donc modulé de façon périodique. C'est le phénomène de *battement*.

Représentation du signal de battement Le signal sonore $f(0, t)$ est représenté sur le graphe de la figure 10.9. Le graphe supérieur montre les variations temporelles des ondes de fréquence ω_1 et ω_2 . Le graphe inférieur montre leur somme, c'est-à-dire, le signal acoustique résultant de leur superposition. Le signal résultant possède deux fréquences caractéristiques comme l'indique la formule vue ci-dessus. La haute fréquence (période courte) est la fréquence moyenne tandis que la basse fréquence (période longue) correspond au phénomène de battement. On voit bien sur ce graphe la modulation d'amplitude périodique de l'onde acoustique résultant de la

superposition. Les *ventres* de l'onde de battement apparaissent aux temps pour lesquels les extrema des ondes initiales coïncident. En ces temps, on dit que les ondes se somment *en phase* dans la mesure où leurs phases sont égales. On dit également que les ondes initiales « *interfèrent constructivement* » ou encore qu'elles forment des « *interférences constructives* ». Cette situation est indiquée à la figure 10.9 par la ligne pointillée centrale.

Les *nœuds* du signal de battement correspondent aux temps pour lesquels les ondes initiales ont des pressions acoustiques opposées. Ces pressions s'annulent donc mutuellement. C'est ce que l'on appelle le phénomène d'« *interférence destructive* », par opposition au cas précédent des interférences constructives. On dit également que les ondes sont en « *opposition de phase* », car en ces temps leurs phases sont séparées de π , comme le montre le schéma de la figure 10.9 au niveau des lignes pointillées de gauche et de droite.

Période du battement La période de *battement* T_B est définie comme étant le temps qui s'écoule entre deux *nœuds* de battement (ou deux *ventres*). Il s'agit donc de la demi-période du cosinus de basse fréquence $\cos[(\omega_1 - \omega_2)t/2]$. Elle est calculée par

$$T_B = \frac{\pi}{(\omega_1 - \omega_2)/2} = \frac{2\pi}{(\omega_1 - \omega_2)}. \quad (10.33)$$

Limite du phénomène de battement, harmoniques et timbre

Notez que si les fréquences composant le signal sont très différentes l'une de l'autre, la période de battement devient trop rapide pour percevoir le battement comme une modulation du signal acoustique. Si c'est le cas, c'est que la pulsation différence $\omega_1 - \omega_2$ entre elle-même dans le domaine acoustique et le son apparaît alors simplement comme étant composé de plusieurs harmoniques, ici ω_1 et ω_2 . C'est le cas d'une corde de guitare qui vibre naturellement sur plusieurs fréquences de vibration propre ω_n . Ces fréquences étant multiples l'une de l'autre, (voir la section 10.1.2 où nous avons trouvé $\omega_n = nv\pi/L$) elles sont effectivement très éloignées l'une de l'autre et ne provoquent donc pas de phénomène de battement. Leur composition détermine le « *timbre* » du son (de nombreuses harmoniques donnent un timbre riche donnant ce que l'on appelle communément un son « *métallique* »).

10.2.2 Propagation d'une onde de battement

Considérons maintenant la propagation de l'onde de battement. Dans l'exemple de l'onde de pression acoustique que nous traitons, pour décrire la propagation, il suffit de calculer la pression acoustique f en toute valeur de z , soit $f(z, t)$, connaissant

$$f(0, t) = A \cos(\omega_1 t) + A \cos(\omega_2 t). \quad (10.34)$$

Pour décrire la dépendance spatiale correctement, il faut se rappeler que le nombre d'onde k est fonction de la fréquence, via

$$k_n = \frac{\omega_n}{v}. \quad (10.35)$$

Si on pose $k_1 = k(\omega_1)$ et $k_2 = k(\omega_2)$ l'onde acoustique totale peut s'écrire

$$f(z, t) = A \cos(k_1 z - \omega_1 t) + A \cos(k_2 z - \omega_2 t). \quad (10.36)$$

À nouveau, la *formule de Simpson* pour la somme des cosinus donne une forme compacte et facile à interpréter,

$$\begin{aligned} f(z, t) &= 2A \cos\left(\frac{k_1 + k_2}{2}z - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \\ &\times \cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2}z - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right). \end{aligned} \quad (10.37)$$

Vitesse de l'onde de battement En remplaçant k_1 et k_2 par leur valeur en fonction des pulsations $k_n = \omega_n/v$, on trouve

$$f(z, t) = 2A \cos\left[\frac{\omega_1 + \omega_2}{2v}(z - vt)\right] \cos\left[\frac{\omega_1 - \omega_2}{2v}(z - vt)\right]. \quad (10.38)$$

Cette expression mathématique montre qu'il s'agit d'une onde se propageant à la vitesse du son v et qui présente le phénomène de battement dans le temps et dans l'espace. Si on fait une « *photographie* » de l'onde en un temps t_0 donné, on voit une fonction cosinus de longueur d'onde courte (longueur d'onde dans le domaine audible) modulée en amplitude par une fonction cosinus de grande période spatiale.

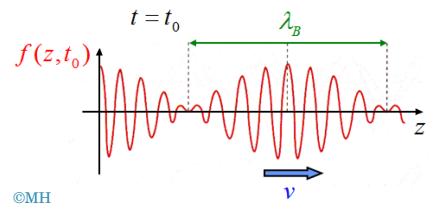
Longueur d'onde du battement La longueur d'onde du battement spatial est donnée par la distance entre deux *nœuds* de l'onde de battement,

$$\lambda_B = \frac{\pi}{|\frac{\omega_1 - \omega_2}{2v}|} = \frac{2\pi}{|k_1 - k_2|} = \left| \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{\lambda_1} - \frac{2\pi}{\lambda_2}} \right|. \quad (10.39)$$

Une autre manière de définir la longueur d'onde de battement est

$$\frac{1}{\lambda_B} = \left| \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right|. \quad (10.40)$$

FIGURE 10.10 : Illustration de la longueur de battement obtenue par combinaison de deux signaux de fréquences différentes.



10.3 Effet Doppler

Pour terminer l'introduction aux phénomènes ondulatoires que constitue ce chapitre, nous allons étudier ici le phénomène de l'*effet Doppler*. L'effet Doppler est bien connu de tout le monde, il s'agit du phénomène de variation de la fréquence d'une onde provoquée par le déplacement relatif de la source de l'onde et du dispositif qui détecte l'onde. Du point de vue de l'ingénieur, c'est un effet important car il trouve de nombreuses applications techniques que nous



L10P5



n'aurons malheureusement pas le temps d'étudier ici. Dans cette section, vous aborderez cet effet pour les ondes acoustiques pour lesquelles on peut l'expérimenter très facilement. Les résultats obtenus sont toutefois valables pour tous les types d'ondes sauf les ondes électromagnétiques pour lesquelles il faut recourir à la relativité restreinte pour en faire une description correcte (ceci est dû au fait que les ondes lumineuses se propagent dans le vide).

10.3.1 DéTECTEUR EN MOUVEMENT

FIGURE 10.11 : DéTECTEUR EN MOUVEMENT À VITESSE \vec{v}_0 PAR RAPPORT À UNE SOURCE FIXE ÉMETTANT UNE onde DE PULSATiON ω .

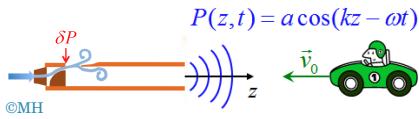


FIGURE 10.12 : Périodes perçues par une oreille fixe T et une oreille s'approchant T' de l'émetteur fixe.

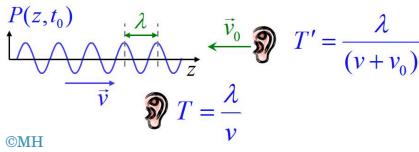
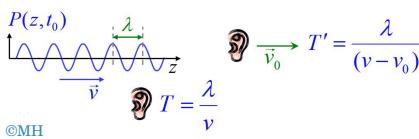


FIGURE 10.13 : Périodes perçues par une oreille fixe T et une oreille s'éloignant T' de l'émetteur fixe.



Commençons par le cas du détecteur en mouvement par rapport à une source d'onde acoustique, comme schématisé à la figure 10.11 (l'oreille du pilote de la voiture est le détecteur et le tuyau d'orgue est la source fixe). L'onde de pression acoustique $P(z,t)$ est donnée par

$$P(z,t) = a \cos(kz - \omega t). \quad (10.41)$$

Elle est représentée sur le graphe de la figure 10.12 à un temps quelconque $t = t_0$. La longueur d'onde λ de cette onde est représentée sur le graphe comme étant la distance entre deux maxima successifs de la pression acoustique. Les maxima de pression se succèdent en un point z à une cadence donnée par la période T de l'onde déterminée par la vitesse du son v , soit $T = \lambda/v$. C'est la période du signal acoustique perçue par le détecteur au repos (dans le même référentiel que le tuyau d'orgue) symbolisé par l'oreille se trouvant sous l'axe z sur le schéma de la figure 10.12.

Période perçue

Puisque le détecteur (symbolisé par l'oreille située à côté de l'axe z) se déplace à la vitesse \vec{v}_0 vers la source, la cadence temporelle à laquelle les maxima seront perçus sera donnée par la même formule $T = \lambda/v$ mais dans laquelle la vitesse v est à remplacer par la vitesse relative de l'onde par rapport au détecteur, soit la vitesse $v + v_0$. En effet, si le détecteur de l'onde est en mouvement uniforme à la vitesse v_0 vers la source, il va rencontrer les maxima de pression acoustique à une cadence plus élevée puisque dans son repère les maxima ont une vitesse de déplacement plus élevée de v_0 . Nous obtenons donc une période de signal acoustique nouvelle de valeur $T' = \lambda/(v + v_0)$, comme indiqué sur le schéma de la figure 10.12.

On peut traiter le cas du détecteur qui s'éloigne de la source (figure 10.13) en inversant le signe de v_0 , comme dans les calculs qui suivent. En effet, dans ce cas la vitesse relative de l'onde par rapport au détecteur devient plus faible, elle vaut $v - v_0$, ce qui donne $T' = \lambda(v - v_0)$.

Les effets du rapprochement et de l'éloignement du détecteur sur la période acoustique peuvent être résumés en une expression unique,

$$T' = \frac{\lambda}{v \pm v_0}. \quad (10.42)$$

Transformation de la période

Pour trouver la formule de transformation de la *période* par *effet Doppler*, on transforme cette formule en divisant en haut et en bas par la vitesse v . En remplaçant λ/v par la période T , on obtient alors $T' = \frac{T}{1 \pm v_0/v}$,

$$T' = \frac{\lambda}{v \pm v_0} = \frac{\lambda/v}{1 \pm v_0/v} = \frac{T}{1 \pm v_0/v}. \quad (10.43)$$

Transformation de la fréquence

Comme la fréquence est donnée par l'inverse de la période, on peut calculer la fréquence détectée par le détecteur en mouvement. On trouve ainsi la formule de l'*effet Doppler* dans la situation où c'est le détecteur qui se déplace vers la source (+) ou s'éloigne de la source (-),

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow f' = \left(1 \pm \frac{v_0}{v}\right) f. \quad (10.44)$$

Détecteur en mouvement uniforme, orientation quelconque

Pour traiter le cas général, d'une onde sphérique ou plane perçue depuis un observateur en translation uniforme, il suffit d'utiliser l'algèbre vectorielle et les équations de changement de repère. Les vitesses impliquées étant faibles, on se limite aux transformations de Galilée. Le détecteur se déplace dans le repère R du milieu matériel à la vitesse \vec{v}_d . Sa position est donc donnée dans ce milieu par

$$\vec{r}_d = \vec{r}_0 + \vec{v}_d t, \quad (10.45)$$

où \vec{r}_0 est un point fixe par rapport au milieu de propagation. Dans ce repère R' en mouvement, un point de coordonnées \vec{r}' correspond donc à

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_d = \vec{r}_0 + \vec{v}_d t + \vec{r}'. \quad (10.46)$$

Pour la modélisation de l'onde, nous supposons que la variation d'amplitude ne modifie la fréquence que de manière négligeable et nous nous concentrerons sur l'évolution de la phase,

$$\Phi(t, \vec{r}) = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0. \quad (10.47)$$

Pour étudier la phase vue par le détecteur, nous nous plaçons dans les coordonnées du repère R' , ce qui donne

$$\Phi(t, \vec{r}) = \omega t - \vec{k} \cdot [\vec{r}_0 + \vec{v}_d t + \vec{r}'] + \varphi_0 = \left(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}_d\right) t - \vec{k} \cdot \vec{r}' + \varphi'_0. \quad (10.48)$$

Nous voyons que l'onde évolue dans le temps avec comme facteur de fréquence

$$\omega' = \omega - \vec{k} \cdot \vec{v}_d, \quad \frac{f'}{f} = \frac{\omega'}{\omega} = 1 - \frac{\vec{k} \cdot \vec{v}_d}{\omega}. \quad (10.49)$$

Onde plane Si l'onde émise est plane, on peut choisir qu'elle se déplace selon l'axe $\vec{1}_z$ et donc $\vec{k} = k\vec{1}_z$, ce qui permet d'écrire

$$\frac{f'}{f} = 1 - \frac{2\pi v_{d,z}}{2\pi f \lambda} = 1 - \frac{v_{d,z}}{v}, \quad (10.50)$$

tenant compte de $\lambda f = v$ et de $v_{d,z} = \vec{v}_d \cdot \vec{1}_z$.

Onde sphérique Si l'onde émise est sphérique, on a $\vec{k} = k\vec{1}_r$, et on conclut que

$$\frac{f'}{f} = 1 - \frac{2\pi \vec{v}_d \cdot \vec{1}_r}{2\pi f \lambda} = 1 - \frac{v_d \cos \theta}{v}, \quad (10.51)$$

où θ est l'angle entre le vecteur $\vec{1}_r$ centré sur la source et la vitesse \vec{v}_d et où l'on a tenu compte de $\lambda f = v$.

■ Petit poisson rouge... peut-on passer la barre rouge ?

Oui, à condition de répondre à ma question !

Comparez la formule pour l'onde plane et pour l'onde sphérique, lorsque le détecteur se déplace selon $\pm \vec{1}_z$ et discutez la différence de formule obtenue. Que vaut le produit $\vec{1}_z \cdot \vec{1}_r$?

FIGURE 10.14 : Source sonore mobile s'approchant d'un récepteur fixe.

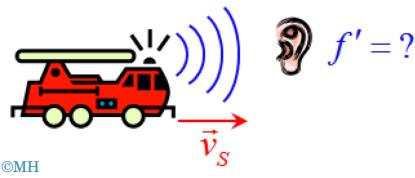
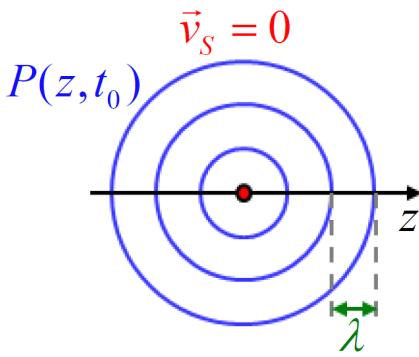


FIGURE 10.15 : Fronts d'onde d'une source ponctuelle, représentés comme des cercles concentriques équidistants, séparés d'une distance λ . La perturbation mesurée à une distance z de la source à un instant t en un point est désigné par $P(z, t)$.



©MH

10.3.2 Source en mouvement

Dans le cas où c'est la source qui est en mouvement, il y a également une modification de la fréquence détectée. La raison en est différente ce qui se reflète dans la différence de résultat que nous obtiendrons pour la fréquence détectée. L'illustration choisie ci-dessous correspond à une expérience que l'on peut faire fréquemment dans la vie de tous les jours en raison des ondes sonores émises par les véhicules automobiles.

Pour bien comprendre l'effet Doppler dans ce cas, il faut visualiser l'onde émise par la source sous forme de *fronts d'onde*. Rappelons à cette occasion que les fronts d'onde sont les lieux des points de pression acoustique maximale. Ce sont donc des sphères concentriques séparées d'une longueur d'onde, comme l'indique le schéma de la figure 10.14 où l'on considère une source au repos ($\vec{v}_S = 0$). Les cercles bleus représentent les fronts d'onde en coupe au temps t_0 et le point rouge central représente la source. Le cercle le plus grand correspond à une pression maximale émise par la source trois périodes avant le temps t_0 , soit au temps, $t_3 = t_0 - 3T$. De même pour les deux autres fronts d'onde, les temps d'émission sont $t_2 = t_0 - 2T$ et $t_1 = t_0 - T$. L'écart entre les fronts d'onde est la longueur d'onde $\lambda = vT$.

Période perçue

Dans le cas où la source est en mouvement à la vitesse v_S , les endroits où sont générés chacun des fronts d'ondes sont différents. Ils sont séparés sur l'axe z de la distance $v_S T$. Comme chaque front d'onde est centré sur le point où se trouvait la source au moment de sa génération, les fronts d'onde sont des sphères maintenant décentrées. Il en résulte que du côté vers lequel la source se déplace, les fronts d'onde sont plus proches les uns des autres. La distance de séparation, qui n'est rien d'autre que la longueur d'onde apparente pour le détecteur, est donnée par la longueur λ' à laquelle il faut retrancher la distance parcourue par la source sur une période, soit $\lambda' = \lambda - v_S T$. De l'autre côté, on a l'effet opposé d'augmentation de la longueur d'onde $\lambda' = \lambda + v_S T$. C'est la situation rencontrée quand la source s'éloigne du détecteur. Tout ceci est illustré sur le schéma de la figure 10.16.

$$\lambda' = \lambda \pm v_S T \quad (10.52)$$

Transformation de la période

Puisque la vitesse de propagation v de l'onde est fixée par le milieu dans lequel elle se propage et non par la vitesse de la source, la période T' perçue par le détecteur est toujours donnée par la distance entre les fronts d'onde divisée par la vitesse v , soit $T' = \lambda'/v$. On a donc

$$T' = \frac{\lambda \pm v_S T}{v} \Rightarrow T' = T \left(1 \pm \frac{v_S}{v} \right). \quad (10.53)$$

Transformation de la fréquence

Dans ces expressions, le signe + (resp. -) est à appliquer quand la source s'éloigne (resp. se rapproche). Le calcul de la fréquence détectée $f' = 1/T'$ est alors

$$f' = \frac{f}{\left(1 \pm \frac{v_S}{v} \right)}. \quad (10.54)$$

Ce résultat montre qu'une source se rapprochant du détecteur (signe -) fournit un son plus aigu que si elle était au repos. De même si la source s'éloigne du détecteur (signe +), elle fournit un son plus grave. Ceci est très facile à expérimenter, par exemple, au passage suffisamment rapide d'une voiture lorsque l'on se trouve sur le bord de la route sur laquelle elle se déplace.

Source en mouvement uniforme, orientation quelconque

Pour décrire le cas d'une source en mouvement, un simple changement de repère n'est pas possible, car le déplacement de la source modifie le profil de l'onde émise. Une description vectorielle simple est toutefois possible. L'approche que nous proposons est inspirée

FIGURE 10.16 : Fronts d'onde d'une source ponctuelle mobile, évoluant à vitesse $\vec{v}_S \neq \vec{0}$. Comme la source se déplace, les fronts correspondants à des temps d'émission différents ont des centres différents, ce qui modifie la longueur d'onde perçue λ' de manière différente, que l'on se place devant ou derrière la source, tout en étant sur sa trajectoire.

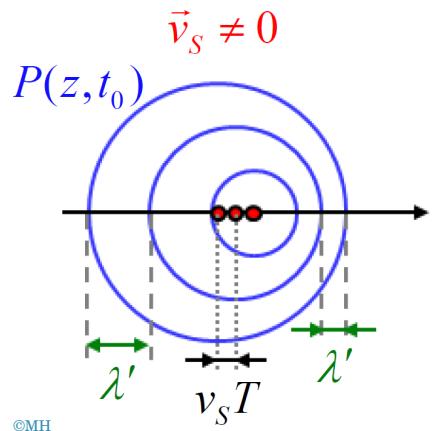


FIGURE 10.17 : Fronts d'onde d'une onde isotrope à vitesse v émise par une source ponctuelle évoluant à vitesse \vec{v}_S . Comme la source se déplace, les fronts correspondants à des temps d'émission différents ont des centres différents, ce qui modifie la longueur d'onde perçue.

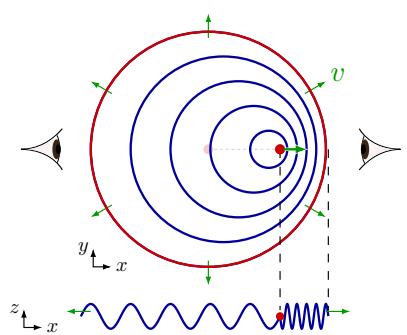
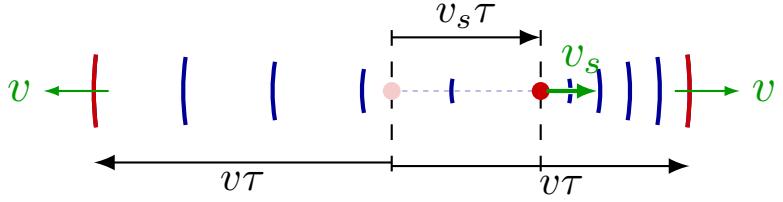


FIGURE 10.18 : Fronts d'onde d'une onde isotrope à vitesse v émise par une source ponctuelle évoluant à vitesse \vec{v}_s . Le front d'onde rouge a parcouru une distance $v\tau$ sur le temps τ , durant lequel la source s'est déplacée de $\vec{v}_s\tau$. On suppose que la source se déplace à une vitesse plus faible que celle de l'onde ($v_s < v$).



de [11] : on considère le front d'onde rouge sur les figures 10.17 et 10.18.

Ce front a été émis une durée $\tau > 0$ avant son observation au temps t . Si l'on connaît la phase Φ_s de la source au temps $t - \tau$, on peut donc en déduire la phase du front externe représenté en rouge. Nous notons ceci, sous la forme

$$\Phi(\vec{r}, t) = \Phi_s(t - \tau) = \varphi_s + \omega(t - \tau), \quad (10.55)$$

où nous prenons une source de pulsation $\omega = 2\pi f$.

Détermination du délai τ Si l'on sait que la source se déplace à vitesse \vec{v}_s et qu'on l'observe à la position \vec{r}_s à l'instant t , on peut en déduire qu'à l'instant $t - \tau$, cette source se trouvait à la position

$$\vec{r}_0 = \vec{r}_s - \vec{v}_s \tau. \quad (10.56)$$

De même, on sait que l'onde a parcouru une distance

$$|\vec{r}_0 - \vec{r}| = v\tau, \quad (10.57)$$

sur ce temps. On peut regrouper ces deux équations en une seule qui nous donne τ sous une forme implicite,

$$(\vec{r}_s - \vec{v}_s \tau - \vec{r})^2 = v^2 \tau^2, \quad (10.58)$$

qui conduit à

$$(v^2 - v_s^2) \tau^2 + 2\vec{v}_s \cdot (\vec{r}_s - \vec{r}) \tau - (\vec{r}_s - \vec{r})^2 = 0, \quad A\tau^2 + B\tau + C = 0, \quad (10.59)$$

où

$$A = v^2 - v_s^2, \quad B = 2\vec{v}_s \cdot (\vec{r}_s - \vec{r}), \quad C = -(\vec{r}_s - \vec{r})^2. \quad (10.60)$$

On en déduit que

$$\tau = -\frac{B}{2A} + \frac{1}{2A} \sqrt{B^2 - 4AC}, \quad (10.61)$$

où le signe devant le radical est choisi pour que $\tau > 0$.

Fréquence perçue en un point d'observation Pour déterminer la pulsation $\omega' = 2\pi f'$ perçue au point d'observation \vec{r} , on calcule la dérivée première de la phase en ce point. En effet, si la phase est de la forme $\Phi(t) = \Phi(t_1) + \omega(t - t_1) + a_2(t - t_1)^2 + a_3(t - t_1)^3 + \dots$, on aura $\frac{d\Phi}{dt}(t_1) = \omega$. Dans notre cas,

$$\omega' = \frac{d\Phi(\vec{r}, t)}{dt} = \frac{d\Phi_s(t - \tau)}{dt} = \frac{d\Phi_s}{dt}\Big|_{t-\tau} \frac{dt - \tau}{dt} = \omega \left(1 - \frac{d\tau}{dt}\right). \quad (10.62)$$

La variation de τ avec le temps t vient de ce que $\vec{r}_s(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_s t$.

Le calcul de la dérivée de τ est un calcul de dérivée classique. Avant de l'effectuer, notons que

$$\frac{dA}{dt} = 0, \quad \frac{dB}{dt} = 2\vec{v}_s^2 = 2(v^2 - A), \quad \frac{dC}{dt} = -2\vec{v}_s \cdot (\vec{r}_s - \vec{r}) = -B. \quad (10.63)$$

Nous sommes maintenant prêts à calculer

$$2A \frac{d\tau}{dt} = -\frac{dB}{dt} + \frac{2B\dot{B} - 4AC}{2\sqrt{B^2 - 4AC}} = 2(A - v^2) + 2B \frac{2(v^2 - A) + 2A}{2\sqrt{B^2 - 4AC}}. \quad (10.64)$$

En portant cette valeur dans la relation donnant la fréquence perçue, on obtient

$$\frac{\omega'}{\omega} = 1 - \frac{d\tau}{dt} = \frac{v^2}{A} - \frac{B}{A} \frac{v^2}{\sqrt{B^2 - 4AC}} = \frac{v^2}{A} \left(1 - \frac{B}{\sqrt{B^2 - 4AC}}\right). \quad (10.65)$$

Pour obtenir une expression plus compacte, on note $\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_s = \Delta r \vec{1}_{\Delta r}$ ^a et $\vec{q} = \vec{v}_s/v$, ce qui conduit à

$$\frac{f'}{f} = \frac{\omega'}{\omega} = \frac{1}{1 - \vec{q}^2} \left[1 + \frac{\vec{q} \cdot \Delta\vec{r}}{\sqrt{(\vec{q} \cdot \Delta\vec{r})^2 + (1 - \vec{q}^2)\Delta r^2}} \right], \quad (10.66)$$

qui peut encore être simplifiée en divisant les deux parties de la fraction par Δr , ce qui donne^b

$$\frac{f'}{f} = \frac{1}{1 - \vec{q}^2} \left[1 + \frac{\vec{q} \cdot \vec{1}_{\Delta r}}{\sqrt{(\vec{q} \cdot \vec{1}_{\Delta r})^2 + 1 - \vec{q}^2}} \right] = \frac{1}{1 - (\vec{q} \times \vec{1}_{\Delta r})^2 - \vec{q} \cdot \vec{1}_{\Delta r} \sqrt{1 - (\vec{q} \times \vec{1}_{\Delta r})^2}}. \quad (10.67)$$

Utilisation de la formule générale dans le cas colinéaire Lorsque

$\vec{1}_{\Delta r} \parallel \vec{1}_x \parallel \vec{v}_s$, on a^c $\vec{q} \cdot \vec{1}_{\Delta r} = \pm q$ et $\vec{q} \times \vec{1}_{\Delta r} = \vec{0}$, ce qui permet d'écrire

$$\frac{f'}{f} = \frac{1}{1 \mp q} = \frac{1}{1 \mp \frac{v_s}{v}},$$

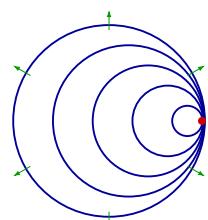
qui fournit le même résultat que (10.54).

a Le vecteur $\vec{1}_{\Delta r}$ indique la direction de la source vers l'observateur, ces deux positions étant repérées à l'instant d'observation. Le vecteur \vec{q} est la vitesse de la source rapportée à la vitesse de l'onde dans le milieu.

b On utilise $q^2 = (\vec{q} \cdot \vec{1}_{\Delta r})^2 + (\vec{q} \times \vec{1}_{\Delta r})^2$ et on simplifie la fraction par $\sqrt{1 - (\vec{q} \times \vec{1}_{\Delta r})^2} + \vec{q} \cdot \Delta\vec{r}$.

c Le signe du haut correspond à une source se rapprochant de l'observateur et celui du bas à une source s'en éloignant.

FIGURE 10.19 : Fronts d'onde d'une onde isotrope à vitesse v émise par une source ponctuelle évoluant à vitesse \vec{v} .



■ **Petit poisson rouge...** peut-on passer la barre rouge ?

Oui, à condition de répondre à ma question !

Que se passe-t-il lorsque $\vec{q} \rightarrow \vec{1}_{\Delta r}$? Voir figure 10.19.

10.4 Le coin des assistant·es

Ondes stationnaires

Considérons la superposition de deux ondes de même amplitude et de même fréquence, mais de vitesses opposées. Supposons également que ces deux ondes soient déphasées de π . Le profil d'interférence peut nous apparaître clairement en utilisant la formule de Simpson,

$$f(z, t) = a \cos(kz - \omega t - \varphi) - a \cos(kz + \omega t + \varphi) = A \sin(kz) \sin(\omega t + \varphi), \quad A = 2a.$$

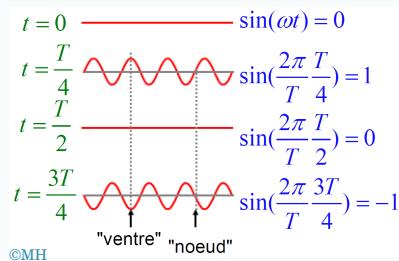
Nous voyons une séparation des variables spatiales et temporelles. Autrement dit, l'onde que nous obtenons ne se déplace pas. Par conséquent, ce type d'onde est dit stationnaire. Figeons le temps en prenant $t = t_0$. Les points tels que

$$z_m = m \frac{\pi}{k} \quad (m \in \mathbb{Z}),$$

sont les positions auxquelles l'onde stationnaire est toujours nulle. Ces points, où ont lieu des interférences complètement destructives, sont les noeuds de l'onde stationnaire. Les points pour lesquels la fonction $f(z, t)$ est extrémale sont donnés par

$$z_n = \frac{\pi}{k} \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Ces points, où ont lieu des interférences complètement constructives, sont les ventres de l'onde stationnaire. Laissons maintenant le temps s'écouler. Le profil spatial est désormais modulé en temps à la pulsation ω .



Il est possible d'exprimer l'amplitude de l'onde stationnaire en fonction de la source des oscillations harmoniques,

$$A = \frac{A_s}{\sin(kL)},$$

où L est la longueur de la corde et A_s est l'amplitude de la source des oscillations. Puisque $|\sin(kL)| \leq 1$, nous voyons que l'onde stationnaire présente une amplitude amplifiée par rapport à celle du signal source.

Oscillations propres

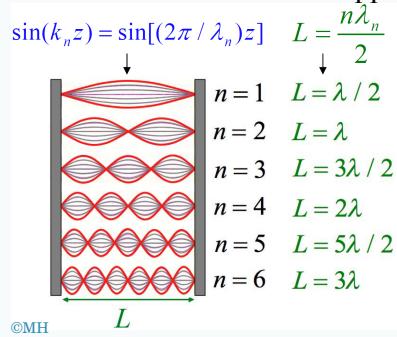
Imaginons une corde fixée à ses deux extrémités. Si des ondes se propagent dans la corde, elles doivent rebondir sur les extrémités de la corde qui sont figées. De ce fait, nous avons des ondes contra-propagatives qui inter ferment. Il en résulte une onde stationnaire dont l'expression mathématique générale est donnée par

$$f(z, t) = \frac{A_s}{\sin(kL)} \sin(kz) \sin(\omega t + \varphi),$$

où L est la longueur de la corde et A_s est l'amplitude de la source des oscillations. Puisque la corde est fixée à ses deux extrémités, il n'est pas possible d'y appliquer une source d'excitation harmonique. Nous avons donc $A_s \rightarrow 0$. Dans ce cas, la seule manière d'obtenir une solution non triviale est de faire tendre le dénominateur vers zéro. Autrement dit,

$$\sin(kL) = 0 \Leftrightarrow kL = k_n \quad L = n\pi \quad (n \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n}.$$

Par conséquent, dans le cas d'une corde figée à ses deux extrémités, y appliquer une perturbation (par exemple, tirer sur la corde) revient à exciter des ondes stationnaires de longueur d'onde λ_n caractérisée par la longueur de la corde L . À chaque valeur de n correspond une onde stationnaire appelée mode propre de vibration.



Battement

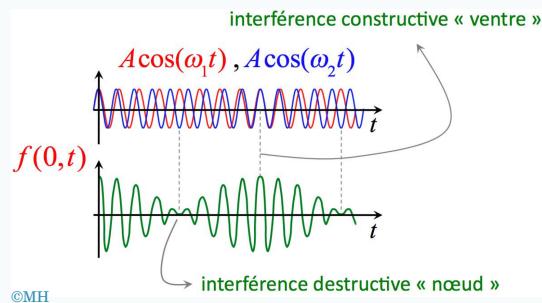
Le phénomène de battement intervient lorsque deux ondes de fréquences très proches interfèrent. Considérons deux ondes harmoniques de même amplitude et de pulsation ω_1 et ω_2 , telles que $\omega_1 \approx \omega_2$.

La relation de dispersion nous indique que $k_1 \approx k_2$. Le profil d'interférence peut nous apparaître clairement en utilisant la formule de Simpson,

$$f(z, t) = A \cos(k_1 z - \omega_1 t) + \cos(k_2 z - \omega_2 t) = 2A \cos\left(\frac{k_1 + k_2}{2}z - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2}z - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right).$$

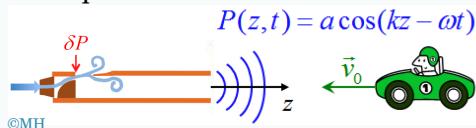
Dans l'argument du premier cosinus, nous retrouvons un nombre d'onde moyen et une pulsation moyenne. Nous avons donc une onde harmonique dont les oscillations spatiales et temporelles sont comparables aux oscillations de nos ondes initiales. Nous appelons cette onde la porteuse. Nous voyons également que l'amplitude de l'onde porteuse est modulée par le second cosinus dont l'argument contient un nombre d'onde et une pulsation qui sont petits. Ces modulations lentes de l'amplitude sont appelées l'enveloppe de l'onde. La période (resp. longueur d'onde) de battement est définie par la durée (resp. la longueur) entre 2 nœuds du signal,

$$T_B = \frac{2\pi}{|\omega_1 - \omega_2|}, \quad \lambda_B = \frac{2\pi}{|k_1 - k_2|}.$$



Doppler

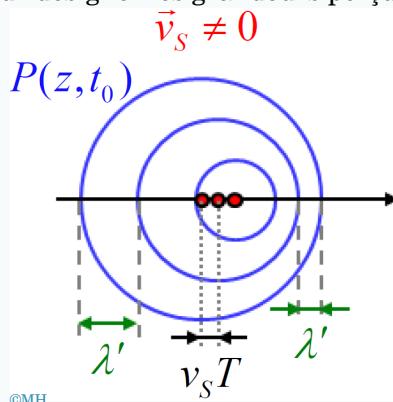
L'effet Doppler intervient dans le cas où la source et le détecteur d'un signal sont en mouvement relatif l'un par rapport à l'autre. Dans ce cas, la fréquence du signal **perçue** par le détecteur est différente de la fréquence du signal émis par la source. Considérons d'abord le cas d'une source statique et d'un détecteur en mouvement, puis le cas inverse.



Considérons une source statique qui émet un signal et un détecteur se déplaçant vers la source, c'est-à-dire dans le sens opposé aux fronts d'onde du signal. Comme le détecteur se déplace vers les fronts d'onde, le délai entre la détection de deux fronts d'onde est réduit. Il perçoit donc une période plus courte. Si le détecteur s'éloigne de la source, alors il se déplace dans la même direction que les fronts d'onde. Dans ce cas, le délai entre la détection de deux fronts d'onde est allongé. Le détecteur perçoit donc une période plus longue. La formulation mathématique est

$$T' = \frac{T}{1 \pm \frac{v_0}{v}}, \quad f' = \frac{1}{T'} = f \left(1 \pm \frac{v_0}{v} \right),$$

où v et v_0 sont respectivement les valeurs absolues des vitesses du front d'onde et du détecteur. Le signe + correspond au cas où le détecteur se déplace dans le sens opposé aux fronts d'onde. Le signe - correspond au cas où le détecteur se déplace dans le même sens que les fronts d'onde. Le symbole prime est utilisé pour désigner les grandeurs perçues par le détecteur.



Soit une source en mouvement par rapport à un détecteur statique. Comme la source émet un signal tout en se déplaçant, les fronts d'onde se déplaçant dans le même sens que la source sont rapprochés. Les fronts d'onde se déplaçant dans le sens opposé de la source sont plus espacés. La formulation mathématique est la suivante :

$$\lambda' = \lambda \pm v_s T, \quad T' = T \left(1 \pm \frac{v_s}{v} \right), \quad f' = \frac{f}{\left(1 \pm \frac{v_s}{v} \right)},$$

où v et v_s sont respectivement les valeurs absolues des vitesses du front d'onde et de la source. Le signe + correspond au cas où les fronts d'onde se déplacent dans le sens opposé à la source. Le signe - correspond au cas où les fronts d'onde se déplacent dans le même sens que la source. L'apostrophe est utilisée pour désigner les grandeurs perçues par le détecteur.

En résumé, la fréquence perçue augmente lorsque la source et le détecteur se rapprochent (les fronts d'onde se resserrent) et diminue lorsqu'ils s'éloignent (les fronts d'onde s'écartent).

10.5 Questions théoriques

1. Ma corde de guitare s'est cassée, mais je n'ai pas de corde équivalente et je dois me contenter d'une autre corde dont la masse linéique est le triple de celle de la corde d'origine. Comment modifier la tension de la corde pour qu'elle reste accordée.
2. Une ambulance vient de me dépasser et roule devant moi sur l'autoroute sirène hurlante à 150km h^{-1} . Je roule à 100km h^{-1} tandis qu'une voiture me dépasse à 110km h^{-1} . Quelles sont les relations entre les fréquences entendues.

10.6 Exercices

Exercice 10.1

Une onde harmonique de corde a une amplitude $x_0 = 5\text{ cm}$ et une longueur d'onde $\lambda = 120\text{ cm}$. À un instant t donné, la hauteur x de la corde en $z = 0$ est nulle. Quelle est la hauteur de la corde à cet instant en $z_1 = 10\text{ cm}$?

Exercice 10.2

Soit une corde de masse linéique $m = 100\text{ g m}^{-1}$ tendue entre deux points distants de $L = 10\text{ m}$. On applique à un des points une variation de hauteur $h(t)$ donnée par une période de sinus, soit $h(t) = h_0 \sin(\omega t)$ si $0 < \omega t < 2\pi$ et $h(t) = 0$ pour tout autre temps t . L'amplitude du mouvement vaut $h_0 = 5\text{ cm}$ et sa pulsation vaut $\omega = 0.5\text{ Hz}$. Calculez la norme de la tension F_T qu'il faut donner à la corde pour que l'onde résultant de cette perturbation de hauteur occupe toute la longueur de la corde (2 ventres, trois nœuds). Calculez le temps t_0 qu'il faut pour que l'onde atteigne l'extrémité de la corde et donnez l'expression analytique $f(z)$ de la forme de l'onde à ce moment.

Exercice 10.3

Considérons une corde tendue dont les deux extrémités sont mises en mouvement harmonique transversal d'amplitude $a = 2\text{ cm}$ à la fréquence $f = 10\text{ Hz}$. La corde a une masse linéique $m = 100\text{ g m}^{-1}$, une longueur totale $L = 10\text{ m}$ et elle est tendue avec une force de tension de norme $F_T = 10\text{ N}$. Calculez en tout temps la forme de l'onde résultante de cette double perturbation harmonique en fonction du déphasage $\Delta\phi$ entre les deux perturbations (on fait abstraction des réflexions aux extrémités en considérant l'onde sur un temps plus court que le temps de propagation sur la longueur L).

Exercice 10.4

Donnez l'expression du phaseur de l'onde progressive $x = a \cos(kz - \omega t + \phi)$ ainsi que le phaseur de l'onde stationnaire $x = a \sin(kz) \sin(\omega t)$.

Exercice 10.5

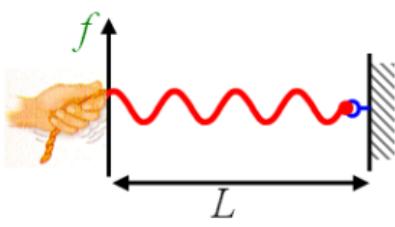
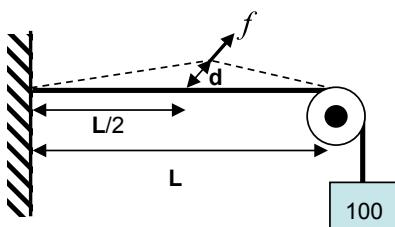
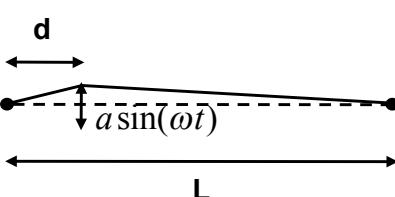
Considérons une corde tendue dont une extrémité est fixe et l'autre est mise en mouvement harmonique transversal à la fréquence $f = 10\text{ Hz}$. La corde a une masse linéique de $\mu = 100\text{ g m}^{-1}$ et une longueur totale $L = 10\text{ m}$. Calculez la norme de la tension F_T qu'il faut donner à la corde pour obtenir un minimum d'amplitude de son mouvement.

Exercice 10.6

Une corde dont la masse linéique est $\mu = 400 \text{ g m}^{-1}$ est tendue avec une tension de norme $F_T = 160 \text{ N}$. La position sur cette corde est repérée par la coordonnée z . Le point de coordonnée $z_0 = 3 \text{ m}$ est mis en mouvement harmonique $a \cos(2\pi f t)$ avec une amplitude $a = 2 \text{ mm}$ et une fréquence $f = 50 \text{ Hz}$. Donnez l'expression analytique de la forme de la corde en tout point z et en tout temps.

Exercice 10.7

Soit une corde de longueur $L = 5 \text{ m}$ et de masse linéique μ dont une extrémité est mise en mouvement harmonique transverse et dont l'autre extrémité est fixe. Sachant que la corde est tendue avec une force de tension de norme $F_T = 1000 \text{ N}$, calculez la masse linéique la plus faible μ_{\min} qui permet d'obtenir une amplitude d'oscillation minimale de la corde à la pulsation $\omega_0 = 10 \text{ rad s}^{-1}$. (Réponse : $\mu_{\min} = 987 \text{ g m}^{-1}$)

**FIGURE E.10.1 :****FIGURE E.10.2 :****FIGURE E.10.3 :****Exercice 10.8**

Une corde de guitare de masse linéique μ et de longueur L tendue avec une force de tension de norme F_T vibre naturellement à la fréquence f donnée par la relation $f = 2L\sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$. Vrai ou faux ? Justifiez.

Exercice 10.9

Le schéma de la figure E.10.2 représente une corde tendue horizontalement par une masse M de 100 kg par l'intermédiaire d'une poulie sans frottement placée à une distance $L = 10 \text{ m}$ du point fixe de la corde. Les dix mètres de corde tendue constituent une masse m de 10 kg (on négligera l'effet de la pesanteur sur la forme que prend la corde au repos).

- Calculez, dans l'approximation des petits angles, la force qu'il faut exercer au point situé au milieu de la corde pour la déplacer horizontalement de la distance $d = 1 \text{ cm}$ (voir schéma en "pseudo-vue 3D"). $f = 4 \text{ N}$
- Calculez la vitesse de propagation des ondes transversales le long de cette corde. $v = 31,6 \text{ m/s}$
- Calculez la fréquence angulaire de résonance correspondant à l'onde stationnaire à 2 ventres. $f = 3,16 \text{ Hz}$

Exercice 10.10

Le schéma de la figure E.10.3 montre une corde de longueur $L = 2,5 \text{ m}$ tendue entre deux points fixes avec une force de tension F_T de 250 N. Cette corde de masse linéique $\mu = 25 \text{ g/m}$ peut être mise en mouvement harmonique d'amplitude a donnée en un point situé à une distance d de l'une de ses extrémités. Cette distance vaut un dixième de sa longueur, soit $d = L/10$.

- Calculez la fréquence f qu'il faut adopter pour que cette excitation conduise à une amplitude d'oscillation minimale de la corde. $f = 500 \text{ Hz}$
- Calculez la fréquence f' qu'il faut adopter pour que cette excitation conduise à une amplitude d'oscillation maximale de la corde. $f' = 1 \text{ kHz}$

Exercice 10.11

Le schéma de la figure E.10.4 montre une corde tendue dont une extrémité (en $z = L$) est mise en mouvement de manière telle que sa hauteur varie selon la fonction du temps $h(t)$. Cette fonction $h(t)$ n'a de valeurs non nulles que sur l'intervalle $\Delta t = 0,3 \text{ s}$. La corde est tendue avec une force F_T de 20 N et a une masse linéique μ de 1,25 g/cm.

- Calculez l'expression mathématique de l'onde générée sur la corde dans les coordonnées (z, t) .
- Calculez l'intervalle de longueur Δl qu'occupe l'onde générée sur la corde. $\Delta l = 3,8 \text{ m}$
- Donnez l'expression générale de l'onde générée en prenant en compte le fait que l'extrémité de la corde en $z = 0$ est fixée. Exprimez votre compréhension du résultat obtenu à l'aide d'un schéma de la corde en trois temps (avant, pendant et après la réflexion).

Exercice 10.12

Le schéma de la figure E.10.5 montre une corde dont une extrémité est fixe et l'autre est mise en mouvement harmonique à la fréquence f de 4 Hz avec une amplitude A_S de 5 cm. La longueur L de la corde est de 1,5 m et sa masse totale m est de 250 g. Calculez la force de tension F_T qu'il faut appliquer à la corde pour que celle-ci ne forme qu'un seul ventre entre ses deux extrémités et que l'amplitude A de son mouvement soit de 10 cm.

$$F_T = 34,6 \text{ N}$$

Exercice 10.13

Le schéma de la figure E.10.6 montre un étudiant de BA1 soufflant dans un tube à essai pendant les laboratoires de chimie. Le tube à essai a une longueur L de 15 cm et une section S de 2 cm^2 .

- Établissez l'expression analytique de l'onde acoustique plane formée dans le tube à essai lorsque l'étudiant atteint la résonance acoustique. L'expression doit être établie dans le repère de l'axe z donné graphiquement à la figure E.10.6 à côté du schéma du tube à essai. Pour fournir votre réponse, il faut savoir que, le tube étant fermé en $z = 0$, la valeur de la pression

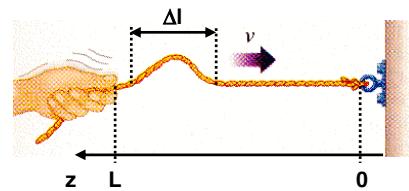


FIGURE E.10.4



FIGURE E.10.5

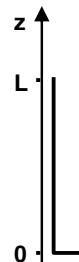


FIGURE E.10.6

acoustique P en ce point constitue un extremum de la distribution spatiale de pression $P(z, t)$. De même, il faut considérer qu'à l'embouchure du tube la pression est égale à la pression atmosphérique P_a qui est de 1 bar (le souffle de l'étudiant ne provoque qu'une perturbation négligeable de la pression).

- b) Calculez la fréquence f de la note émise par l'étudiant sachant que la pression atmosphérique P_a est de 1 bar et que la température T est de 20°C. $f = 553 \text{ Hz}$

Exercice 10.14

La sirène d'une ambulance émet un son à la fréquence $f = 440 \text{ Hz}$. L'ambulance avance à la vitesse $v = 80 \text{ km h}^{-1}$ vers la façade d'un bâtiment qui renvoie le son en écho au chauffeur de l'ambulance. Quelle est la fréquence f' du son entendu en écho par l'ambulancier? Justifiez votre raisonnement à l'aide d'un schéma.

Exercice 10.15

Oscar roule en voiture décapotable vers un grand bâtiment. Comme son tachymètre est cassé, il sait qu'il peut connaître sa vitesse v_s grâce au phénomène d'écho sonore qui se manifestera grâce à la présence du bâtiment. Il crie donc un son à une fréquence f_s de 880 Hz correspondant à un La. Il entend en retour un son d'un ton plus aigu, soit un Si de fréquence $f_e = 988 \text{ Hz}$.

- a) Sachant que la vitesse v du son dans l'air est de 340 m/s, calculez la vitesse v_s d'Oscar. $v_s = 71 \text{ km/h}$
 b) Quelle serait la fréquence f'_e perçue par Oscar si le vent soufflait à la vitesse v_v de 36 km/h dans la même direction que lui? $f'_e = 990 \text{ Hz}$



FIGURE E.10.7 :



FIGURE E.10.8 :

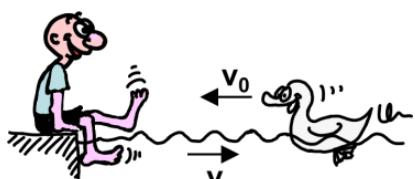


FIGURE E.10.9 :

Exercice 10.16

Le schéma de la figure E.10.8 montre Jane surprise d'entendre le cri de Tarzan sur un autre ton que d'habitude. Sachant que Tarzan crie avec une fréquence f_0 de 440 Hz (correspondant au *la*), qu'il se déplace sur sa liane à la belle vitesse v_T de 20 m/s et qu'il avance contre un vent de tempête qui lui a une vitesse v_V de 50 m/s, calculez la fréquence qu'entend Jane. $f = 473 \text{ Hz}$

Exercice 10.17

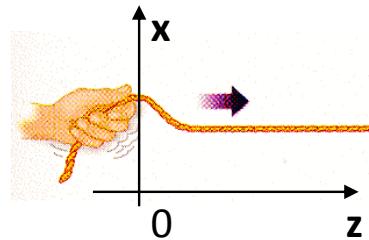
Assis au bord d'une marre aux canards, Oscar bat des pieds dans l'eau, ce qui provoque l'émission d'une onde harmonique de surface (vagues) de fréquence $f = 2 \text{ Hz}$ et de vitesse $v = 30 \text{ cm s}^{-1}$.

- a) Calculez la longueur λ de l'onde générée par le battement de pieds d'Oscar. (Réponse : $\lambda = 15 \text{ cm}$)
 b) Calculez la fréquence f' de l'onde perçue par un canard qui avance vers Oscar à la surface de l'eau à la vitesse $v_0 = 20 \text{ cm s}^{-1}$. (Réponse : $f' = 3.33 \text{ Hz}$)

Exercice 10.18

Soit une corde de masse linéique $\mu = 25 \text{ g m}^{-1}$ tendue avec une force de tension de norme $F_T = 1 \text{ kN}$. Les points de cette corde sont repérés par un axe transversal x et par un axe longitudinal z (voir figure E.10.10). La corde est agitée en $z = 0$ de façon harmonique à la fréquence $f = 4 \text{ Hz}$.

- Sur base des paramètres mentionnés ci-dessus, donnez les expressions analytiques ou les valeurs numériques des grandeurs suivantes :
 - Équation du mouvement de la corde
 - Expression analytique générale de la solution harmonique « progressive » de cette l'équation
 - Expression analytique et valeur de la vitesse v de l'onde de corde (Réponse : $v = 200 \text{ m s}^{-1}$)
 - Expression analytique et valeur nombre d'onde k de l'onde de corde (Réponse : $k = 0.126 \text{ m}^{-1}$)
 - Expression analytique et valeur de la longueur d'onde λ de l'onde (Réponse : $\lambda = 50 \text{ m}$)
- Sachant que l'agitation harmonique se fait selon la fonction $x(0, t) = a \sin(2\pi f t)$, où $a = 1.3 \text{ cm}$, calculez la coordonnée x_0 de la corde au point $z = z_0 = 25 \text{ m}$ au temps $t = t_0 = \frac{1}{16} \text{ s}$. (Réponse : $x_0 = -1.3 \text{ cm}$)

**FIGURE E.10.10**

Récapitulatif des notions vues dans cette leçon

Indispensable	Nécessaire	Intéressant
<ul style="list-style-type: none"> — Onde stationnaire. — Résonance pour une onde stationnaire. — Oscillations propres. — Battement : expression mathématique, vitesse, longueur. — Effet Doppler pour un détecteur mobile. — Effet Doppler pour une source mobile. 	<ul style="list-style-type: none"> — Formation des sons dans une guitare. 	<ul style="list-style-type: none"> — Fonctionnement des instruments à vent

Exercices du volume II

Préparation aux séances d'exercices du volume II

À préparer avant de venir au TP

Exercice A

Après un spectaculaire saut à l'élastique au départ d'une hauteur h de 60m, Jon se retrouve suspendu par les pieds au-dessus d'une voie ferrée. Sachant que Jon a une masse de $M = 60\text{kg}$ et que l'élastique a une longueur de repos $l_0 = 20\text{m}$ et une constante de rappel $\kappa = 20\text{Nm}^{-1}$, répondez aux questions suivantes :

- Déterminez la position de repos x_0 de Jon. Pour ce faire, utilisez un axe x vertical dirigé vers le bas, dont l'origine se situe à hauteur de l'extrémité basse de l'élastique au repos (sans Jon).
- Jon gigote et se déplace légèrement de sa position d'équilibre (verticalement). Il se met alors à osciller à la fréquence f . Exprimez que le mouvement initié est petit et déduisez-en l'équation de ces petits mouvements.
- Quelle aurait été la fréquence d'oscillations f' si on avait remplacé l'élastique par une corde de longueur l_0 et que le vent avait (légèrement) déplacé Jon latéralement (au lieu de verticalement) ?

À préparer avant de venir au TP

Exercice B

Démontrez l'expression du délai entre les variations harmoniques de la tension et du courant dans un circuit purement

- a) résistif b) inductif c) capacitif

sachant qu'on trouve aux bornes de ce circuit une tension $V(t) = V_m \sin(\omega t + \varphi_v)$

Pour chacun des éléments considérés : partez des relations liant le courant et la tension déduisez-en les équations des phaseurs respectives et utilisez les propriétés des phaseurs pour exprimer les déphasages en question. Enfin trouvez à quels délais ces déphasages correspondent.

⚠ Dans les exercices, certaines grandeurs oscillantes seront

mentionnées comme étant $x(t) = X_m \sin(\omega t + \varphi_x)$ ou comme $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi_x)$. Il n'y a pas de différence essentielle entre ces deux écritures, à part que ces deux grandeurs sont déphasées d'un angle $\frac{\pi}{2}$. Le choix est donc totalement arbitraire (sauf s'il est imposé par l'énoncé) mais une fois qu'il est posé, il faut s'y tenir durant la totalité de l'exercice.

À préparer avant de venir au TP

Exercice C

Dans un circuit constitué d'une résistance R de 200Ω en parallèle avec une inductance L de 5mH et alimenté par une source de tension de fréquence 1000Hz , que vaut la partie réelle de l'impédance de ce circuit ?

À préparer avant de venir au TP

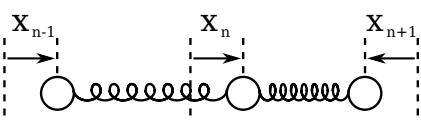
Exercice D

Donnez l'expression du développement de MacLaurin d'ordre un (c'est-à-dire les deux premiers termes) des fonctions \sin , \cos et \tan .

À préparer avant de venir au TP

Exercice E

Effectuez le passage du modèle discret au modèle continu de l'équation du mouvement de la corde.



À préparer avant de venir au TP

Exercice F

Soit un cristal dont la constante du réseau Δl vaut $5 \times 10^{-9}\text{ m}$, la masse de chaque atome vaut $2 \times 10^{-19}\text{ kg}$ et la constante de rappel κ vaut 1 N m^{-1} , que vaut la vitesse caractéristique d'une onde de pression se propageant dans ce milieu cristallin ?

À préparer avant de venir au TP**Exercice G**

Le schéma de la figure ?? montre les atomes d'un cristal (à une dimension) dont les interactions sont symbolisées par des ressorts de constante de rappel κ .

- Donnez l'expression de la force totale exercée sur l'atome central « n » en fonction des positions des 3 atomes (mesurées par rapport à leur position de repos).
- Déduisez-en l'équation de son mouvement.
- Effectuez le passage du modèle discret au modèle continu.
- Quelle est la vitesse caractéristique de propagation des ondes dans le cristal ?
- Définissez les différents paramètres qui déterminent cette vitesse.

À préparer avant de venir au TP**Exercice H**

Soit une onde radio caractérisée par le nombre d'onde $k = 6.28\text{m}^{-1}$, que vaut la période de cette onde ?

À préparer avant de venir au TP**Exercice I**

Jimi a cassé sa corde de guitare lors de sa dernière répétition. Il souhaite la remplacer par une nouvelle corde de densité linéique $\mu = 3.5 \times 10^{-4}\text{kg m}^{-1}$. Sachant que la longueur de la corde montée sur la guitare sera de $L = 1\text{m}$ et que Jimi veut un *mi* (330Hz) comme fréquence fondamentale, quelle sera la tension de la corde qu'il devra lui appliquer ?

À préparer avant de venir au TP**Exercice J**

En patientant à l'arrêt de bus, je vois un camion de pompiers passer, sirène retentissante. Le son me paraît-il plus aigu avant ou après son passage à mon niveau ? Démontrez.

Je prends ensuite le bus et dépasse le camion qui s'était arrêté un peu plus loin, toujours sirène retentissante. Le son me paraît-il plus aigu avant ou après mon passage à son niveau ? Démontrez.

À préparer avant de venir au TP
Exercice K

En écoutant les formules 1 à Spa-Francorchamps, Martine entend que la fréquence émise par un véhicule avant son passage est à l'octave, c'est-à-dire le double, de celle après son passage. Quelle est la vitesse du véhicule sachant que la vitesse du son est de 340 m s^{-1} .

Exercices complémentaires du volume II
Exercice II.1

Le schéma de la figure E.II.1 montre en coupe un condensateur sphérique constitué de deux sphères métalliques creuses concentriques de rayons a et b alimenté par une tension alternative $V(t) = V_m \cos(\omega t)$ (le signe positif de la tension correspondant à une charge Q positive sur la sphère centrale).

- Calculez l'expression analytique de la capacité C de ce condensateur en supposant les charges uniformément réparties (approximation quasi-statique).
- Calculez le phaseur I du courant délivré par la source de tension (en fonction de V_m , C et ω).
- Calculez l'expression analytique de la densité de courant de déplacement $\vec{J}_D(r, t)$ présente entre les sphères à toute distance r du centre de celles-ci ($a < r < b$).

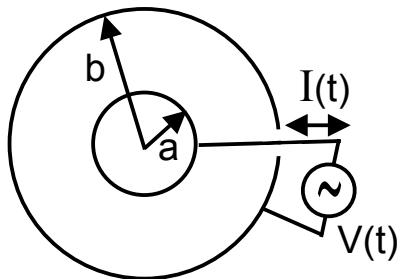


FIGURE E.II.1 :

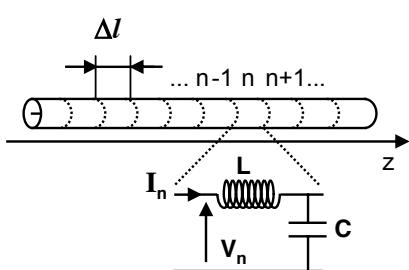


FIGURE E.II.2 :

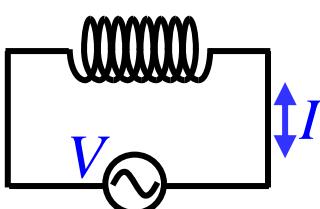


FIGURE E.II.3 :

Exercice II.2

Le schéma de la figure E.II.2 représente un câble coaxial de grande longueur. On vous demande de le modéliser en le décomposant en sections de longueur Δl arbitrairement petites, en vous basant sur la notion de circuit équivalent vue à l'énoncé 19 d'électromagnétisme. Le but du modèle mathématique qui vous est demandé est de donner, en tout point du câble z , la variation temporelle de la tension entre la gaine et le fil central, soit $V(z, t)$ (coup de pouce : commencez par exprimer les liens entre courants et tensions des sections de câble adjacentes).

Exercice II.3

- Le circuit représenté à la figure E.II.3 est alimenté en tension alternative. Les maxima de courant dans ce circuit surviennent un quart de période avant les maxima de tension.
- Une masse ponctuelle m se trouve plongée dans le potentiel $E_p(x) = a(e^{bx} + e^{-bx})$ où x est la position de la masse (mouvement à une dimension). Dans l'approximation des petits mouvements, la fréquence d'oscillation de la masse dans ce potentiel autour de l'origine $x = 0$, vaut $f_0 = \frac{b\sqrt{a}}{\pi\sqrt{2m}}$.

- c) Le phaseur $\underline{X} = iA \cos(kz)$ correspond à l'onde réelle stationnaire $x(z, t) = A \cos(kz) \sin(\omega t)$.
- d) L'onde vectorielle $\vec{E} = A \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) \vec{1}_x$, où $\vec{k} = \frac{\omega}{\sqrt{2c}} (\vec{1}_x + \vec{1}_z)$, représente le champ électrique d'une onde électromagnétique plane se propageant dans le vide.
- e) La vitesse d'une impulsion lumineuse (paquet d'ondes) dans un milieu diélectrique dont l'indice de réfraction dépend de la fréquence selon la loi $n(\omega) = a\omega + b$, est donnée par l'expression $v(\omega) = 2\omega c$.
- f) La relation de dispersion $k(\omega) = \frac{\omega}{c} + i\alpha$ décrit des fonctions d'ondes complexes régies par l'équation d'onde $\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\alpha \psi$.
- g) Le phaseur $\underline{X} = a(1 + i\sqrt{3})$ (où $a \in \mathbb{R}$) représente l'évolution harmonique d'une grandeur physique $x(t)$ dont la valeur au temps $t = 0$ vaut a , soit $x(0) = a$.
- h) Soit une onde vectorielle $\vec{E} = \vec{A} \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)$ décrite dans un repère cartésien orthonormé (x, y, z) avec $\vec{A} = 2 \text{ V m}^{-1} \vec{1}_x$ et $\vec{k} = (\vec{1}_x + 2\vec{1}_y - \vec{1}_z) \times 10^6 \text{ m}^{-1}$. Cette onde peut physiquement représenter le champ électrique d'une onde électromagnétique se propageant dans le vide.

Exercice II.4

Un câble coaxial dont le conducteur présente une résistance non négligeable peut être modélisé par le circuit schématisé à la figure E.II.4. Rappel : l'inductance L et la capacité C de chaque segment répondent à la relation $LC = \left(\frac{\Delta z}{c}\right)^2$ où Δz est la longueur d'un segment.

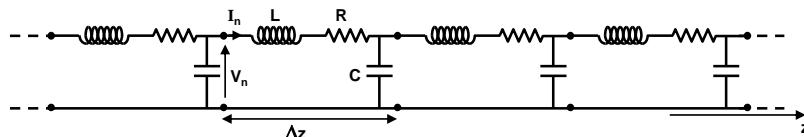


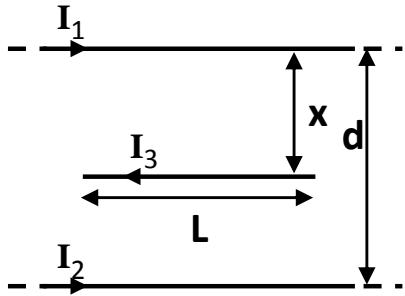
FIGURE E.II.4 :

- Donnez les relations qui lient les tensions V_n , V_{n+1} et les courants I_n , I_{n+1} des segments adjacents n et $n + 1$.
- En vous servant du résultat ci-dessus, établissez l'équation différentielle qui régit la propagation de la tension $V(z, t)$ dans le câble.
- Calculez la relation de dispersion qui caractérise la propagation des ondes harmoniques dans le câble.

Exercice II.5

Le schéma de la figure E.II.5 montre deux fils rectilignes parallèles supposés infiniment longs et minces dans lesquels circulent,

dans le même sens, les courants $I_1 = 2.3\text{A}$ et $I_2 = 2I_1$. La distance entre ces fils est $d = 12\text{mm}$. Un troisième fil de longueur $L = 1.5\text{m}$ et de masse $m = 27\text{g}$ véhiculant un courant $I_3 = 4.5\text{A}$ est placé parallèlement aux premiers et entre ceux-ci. Le courant I_3 est de sens opposé aux deux autres. Le troisième fil est maintenu dans le plan des deux premiers sans force de frottement. On appelle x la distance entre les fils 1 et 3.



- Calculez la distance x_0 à laquelle le troisième fil trouve sa position de repos. (Réponse : $x_0 = 4\text{mm}$)
- Calculez la pulsation ω_0 à laquelle le deuxième fil vibre lorsque sa position de repos est légèrement perturbée. (Réponse : $\omega_0 = 3.3\text{rads}^{-1}$)

FIGURE E.II.5 :

Acronyms

EDO équation différentielle ordinaire II.35, II.59, II.123

EDP équation aux dérivées partielles II.59

f.é.m. force électromotrice *glossaire* : force électromotrice

MRU mouvement rectiligne uniforme *glossaire* : mouvement rectiligne uniforme

MRUA mouvement rectiligne uniformément accéléré *glossaire* : mouvement rectiligne uniformément accéléré

OH Oscillateur harmonique II.11–II.16, II.18, II.19, II.24–II.27, II.59, II.61, II.128–II.130

OLA oscillateur linéaire amorti II.18–II.21, II.35, *glossaire* : oscillateur linéaire amorti

OLAF oscillateur linéaire amorti forcé II.21, II.22, II.29, II.35–II.43, II.45–II.48, *glossaire* : oscillateur linéaire amorti forcé

OSUP onde sphérique unidirectionnelle paraxiale *glossaire* : onde sphérique unidirectionnelle paraxiale

é.é.m. électromotance électromagnétique *glossaire* : électromotance électromagnétique

é.é.m.i. électromotance électromagnétique induite *glossaire* : électromotance électromagnétique induite

Ce glossaire est en construction. Vous pouvez le compléter à titre individuel ou en groupe.

Glossaire

accélération $a = \dot{v} = \ddot{x}$ II.1

ailes II.41

argument II.23

battement Modulation d'une porteuse résultant de la superposition de deux signaux de fréquences voisines. II.133, II.134

canonique II.18, II.20

circulation Notion associée à un champ de vecteurs \vec{F} et une courbe orientée γ . Elle correspond à l'intégration dans le sens de parcours défini pour la courbe du champ projeté sur la direction de l'élément d'arc $d\vec{r}$ en chaque point de cette courbe : $\mathcal{C} = \int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r}$. II.1

composante longitudinale II.114

composante transverse II.114, II.115

condensateur Dispositif formé de deux conducteurs présentant des surfaces étendues et rapprochées, mais n'étant pas en contact. Il permet d'accumuler des charges de signes opposés sur les deux surfaces voisines, l'attraction coulombienne entre les charges de chacune des surfaces compensant la répulsion coulombienne au sein des charges de même signe sur chacune des deux surfaces. Le condensateur se caractérise par sa capacité à emmagasiner des charges qui se mesure en Farads de symbole « F » et correspondant à 1C/V. Notez qu'un conducteur isolé est aussi doté d'une capacité propre qui reflète sa propension à stocker des charges. II.35

condition initiale Dans la résolution d'un problème différentiel, des constantes d'intégration apparaissent. Les conditions initiales permettent de relier une situation physique particulière aux équations générales en définissant la valeur des constantes par identification avec les valeurs des grandeurs physiques à un instant initial, souvent noté $t = 0$. Lorsque l'intégration se fait sur l'espace, on parle plutôt de conditions aux bords, de raccord ou plus généralement de conditions aux limites. II.70

conditions aux limites Dans la résolution d'un problème différentiel, des constantes d'intégration apparaissent. Les conditions aux limites permettent de relier une situation physique particulière aux équations générales en définissant la valeur des constantes par identification avec les valeurs des grandeurs physiques à des positions données. Lorsque l'intégration se fait sur le temps, on parle plutôt de conditions initiales. II.73, II.98

constante de rappel Rapport de la force à l'élongation, en valeur absolue, pour une force de rappel linéaire, souvent notée κ .
On a $\kappa = \frac{|f|}{|x|}$ II.4

divergence II.95

déphasage $\Delta\varphi$ II.6

dérivée II.1, II.59

dérivée partielle II.59, II.95

EDO linéaire Une EDO désigne une équation différentielle ordinaire. Par ordinaire, on entend que toutes les dérivées apparaissant dans l'équation concernent une seule variable scalaire. Les EDOs linéaires sont de la forme $\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)} = b$, où $y^{(n)}$ désigne la dérivée d'ordre n de la fonction y . Les coefficients a_i sont des fonctions continues de la variable d'intégration. Dans le cas où ces fonctions ont des valeurs constantes, on parle d'EDO linéaire à coefficients constants. Cette catégorie d'équation est facilement intégrable. C'est la raison pour laquelle, lorsqu'on aborde un problème physique, on le simplifie au moyen d'hypothèses permettant d'aboutir à un tel système. II.1

effet Doppler Variation de la fréquence d'une onde provoquée par le déplacement relatif de la source de l'onde et du dispositif qui détecte l'onde. II.135, II.137

effet Joule Échauffement d'un conducteur parcouru par un courant, dû à sa résistivité. La conversion d'une partie de l'énergie électromagnétique en énergie thermique entraîne des « pertes Joule » pour le champ électromagnétique. II.16, II.17

en phase Se dit de deux ondes qui présentent la même phase. Elles ont donc un déphasage nul. Lorsque deux ondes sont en phase et qu'on les additionne, l'amplitude de l'onde résultante est maximale et vaut la somme des amplitudes. II.126, II.134

force II.1, II.2, II.8

force attractive Force qui conduit à ce que deux objets s'attirent II.4

force de rappel Force \bar{f} de direction opposée à celle du déplacement \bar{x} d'un objet par rapport à sa position d'équilibre, telle que $\bar{f} \cdot \bar{x} < 0$ II.4

force de rappel élastique Force de rappel \bar{f} proportionnelle au déplacement d'un objet \bar{x} par rapport à sa position d'équilibre, telle que $\bar{f} \propto -\bar{x}$ II.4, II.5, II.12, II.60

force extérieure Ailes d'un pic : zones latérales éloignées du maximum. II.41

formule d'expulsion La formule d'expulsion permet de transformer un double produit vectoriel comme suit,

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}. \quad (\text{G.1})$$

II.96, II.113

formule de Simpson Les formules de Simpson en trigonométrie permettent d'écrire la somme ou la différence de deux fonctions cosinus ou de deux fonctions sinus sous la forme d'un produit. La formule de Simpson pour la somme ou différence des sinus ou cosinus désigne donc une des quatre expressions suivantes,

$$\begin{aligned}\cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \\ \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}, \\ \sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \\ \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.\end{aligned}$$

Ces formules peuvent être utilisées pour transformer un produit de fonctions trigonométriques en somme. Pour ce faire, on pose avantageusement $A = \frac{\alpha+\beta}{2}$ et $B = \frac{\alpha-\beta}{2}$ et on les insère dans les expressions précédentes, en remarquant que $\alpha = A + B$ et $\beta = A - B$. II.123, II.125, II.133, II.135

front d'onde Lieu des points contigus où l'amplitude d'un signal ondulatoire est maximale. Lorsque le signal est mis sous forme d'une sinusoïde $\cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)$, le front d'onde apparaît pour les phases multiples de 2π . À un instant t donné, les fronts d'onde vérifient donc l'équation

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = \omega t_0 + \varphi = C^{\text{te}}.$$

II.138

frottement sec Frottement dont la force est indépendante de la vitesse entre les deux parties subissant le frottement. Le frottement dissipe de l'énergie mécanique sous forme thermique. II.17

frottement visqueux Frottement dont la force est proportionnelle à la vitesse entre les deux parties subissant le frottement. Le frottement dissipe de l'énergie mécanique sous forme thermique. II.17

fréquence angulaire pulsation II.2

gradient Il s'agit d'un opérateur qui indique la direction de plus grande pente d'une fonction. Le gradient est décrit en détails dans le volume I, à l'annexe C.1 et présenté dans la section 1.2 p. I.3 II.95

générique II.18

indice de réfraction Nombre réel ou complexe caractérisant les propriétés optique d'un matériau transparent, à une longueur

d'onde donnée. La partie réelle n de cet indice est liée à la vitesse de propagation de l'onde dans le milieu via la relation $v = c/n$, où c est la *vitesse de la lumière* dans le vide et v la vitesse dans le milieu transparent. Il s'agit également du rapport entre la longueur d'onde dans le vide et celle dans le milieu transparent. La partie imaginaire de l'indice de réfraction est liée à l'atténuation par unité de longueur parcourue dans ce milieu. viii, ix

inductance II.35

inducteur II.35

loi de Laplace Loi liant la pression et le volume d'un gaz lors d'une *transformation adiabatique* réversible, telle que l'entropie S du système soit constante. Pour un gaz parfait ($PV = nRT$) l'hypothèse d'adiabaticité réversible,

$$TdS = C_p dT + h dP = C_v dT + l dV = 0,$$

conduit à la Loi de Laplace, $PV^\gamma = C^t e$, avec P la pression, V le volume, n le nombre de molécules, et T , la température du système considéré. La constante R est universelle, et $\gamma = C_p/C_v$. II.59

loi de Newton II.1

lois de Newton Loi d'inertie, loi de changement d'état sous l'action d'une force, loi d'action-réaction. II.59

masse linéique Masse par unité de longueur d'un objet. Cette masse apparaît souvent dans les problèmes où on modélise le volume physique de la corde par une ligne, sans dimension transverse. II.61

mésoscopique Qualifie une échelle d'analyse des phénomènes inférieure à l'échelle macroscopique, mais suffisamment grande pour que les lignes, surfaces ou volumes étudiés contiennent un nombre important d'objets microscopiques (ou nanoscopiques). Les objets physiques peuvent désigner des atomes, molécules, longueurs d'onde, etc II.59

nombre complexe II.1, II.35

noeud Pour une onde, le noeud désigne un point auquel l'amplitude d'oscillation est nulle. II.134, II.135

onde Perturbation qui se déplace dans un milieu. II.72, II.123

oscillateur harmonique II.6, II.7

oscillateur linéaire amorti II.18

oscillateur linéaire amorti forcé II.21

phase Argument de la fonction périodique liée à une onde, généralement écrit sous la forme $\vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi$. Cette phase peut comprendre ou non le terme de propagation $\vec{k} \cdot \vec{r}$ en fonction du contexte. Parfois la phase désigne uniquement la phase à l'origine φ , obtenue en posant $\vec{r} = \vec{0}$ II.6, II.23

phaseur Variable complexe encodant l'amplitude d'un signal monochromatique dans son module et la phase de ce signal dans son argument. II.19, II.23–II.25, II.27, II.35, II.44, II.46, II.110, II.123

physique quantique Branche de la physique qui étudie les particules constituant la matière et les autres objets de l'univers (comme l'anti-matière), au moyen de modèles qui diffèrent des modèles classiques applicables aux systèmes à grand nombre de particules. Le nom « quantique » vient du fait que les échanges d'énergie, par exemple, sont quantifiés. Cette quantification des échanges est indispensable pour comprendre les spectres d'émission des atomes soumis à une excitation, ou à l'inverse leurs spectres d'absorption. II.11

potentiel II.59

pression acoustique Variation de pression par rapport à la pression au repos. II.84

produit vectoriel Opération mathématique associant à deux vecteurs d'un espace tridimensionnel un troisième vecteur qui est orthogonal au plan des deux premiers vecteurs. La norme du vecteur résultant correspond à l'aire du parallélogramme sous-tendu par les deux vecteurs. La direction du vecteur résultant est choisie pour que les vecteurs forment un trièdre d'orientation dextrogyre ou lévogyre en fonction d'un choix arbitraire, mais devant être posé de manière cohérente pour l'ensemble d'un raisonnement. Le produit vectoriel est noté $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{c}$. Il implique que le vecteur \bar{c} est orthogonal aux vecteurs \bar{a} et \bar{b} et donc au plan sous-tendu par ces vecteurs. Sa norme vaut $ab \sin \theta$, où θ est l'angle orienté de \bar{a} vers \bar{b} . Si pour amener le vecteur \bar{a} sur le vecteur \bar{b} par la rotation de moindre amplitude possible on tourne dans le sens des aiguilles d'une montre, alors le vecteur \bar{c} plonge dans l'horloge si le repère est dextrogyre et il en sort si le repère est lévogyre. L'orientation dextrogyre est choisie dans ces notes et illustrée à la figure G.1 II.116

pseudo-vecteur II.115

pulsation $\omega = 2\pi\nu$ II.2

pulsation propre Pulsion d'oscillation d'un système harmonique, lorsque ce système est écarté de sa position d'équilibre, puis relâché pour lui permettre un mouvement libre. II.5, II.15

période T II.2, II.3, II.6, II.137

relation de dispersion Relation liant la partie spatiale d'une onde à sa partie spatiale. Dans le vide, pour une onde plane électromagnétique, la relation de dispersion est donnée par $k^2 = \omega^2 c^2$, où la partie spatiale est représentée par le vecteur d'onde \vec{k} et la partie temporelle par la pulsation ω . Ces deux quantités sont liées par la célérité de l'onde c . II.115, II.119

rotationnel En anglais, le rotationnel est appelé « curl ». II.95

FIGURE G.1 : Illustration de l'orientation du produit vectoriel dextrogyre : le vecteur résultant pointe vers le bas, si le mouvement du premier vers le second vecteur correspond au sens des aiguilles d'une montre.



réactance II.35

résistance II.35

résonance II.123

théorème circulation-rotationnel de Stokes II.95

théorème flux-divergence d'Ostrogradski-Gauss II.95

transformation adiabatique Transformation thermodynamique pour laquelle il n'y a pas d'échanges de chaleur entre le système qu'on étudie et son environnement (le reste de l'univers). Une transformation adiabatique réversible se fait sans échange d'entropie. vi

transformation de Fourier Opération mathématique permettant de représenter des fonctions temporelles en termes de composantes fréquentielles. Dans l'espace à quatre dimensions, (t, \vec{r}) , la transformation de Fourier permet d'obtenir la décomposition dans le domaine des fréquences temporelles et spatiales, noté ω, \vec{k} . Chaque composante correspond à une onde plane donnée par

$$\tilde{A} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}.$$

II.111

travail II.7

uniforme Une grandeur physique est uniforme si elle ne varie pas avec la position. En général, une grandeur est supposée uniforme dans une zone de l'espace. Par exemple, on supposera qu'une vitre est faite d'un matériau uniforme. Cela veut dire, pour le chimiste que la composition chimique est partout la même. Pour l'opticien, cela veut dire que l'*indice de réfraction* est partout le même. D'un point de vue mathématique, une grandeur uniforme ne dépend pas des variables d'espace. Pour reprendre l'exemple de l'indice de réfraction, un indice quelconque s'écrirait $n(x, y, z)$ dans le système d'axes *Oxyz*. Si l'indice est uniforme, $\partial n / \partial x = \partial n / \partial y = \partial n / \partial z = 0$. Il faut noter qu'une grandeur uniforme n'est pas nécessairement constante. Par exemple une vitre qui chaufferait par moment et refroidirait à d'autres moments pourrait avoir un indice de réfraction qui varie dans le temps, tout en restant uniforme. On aurait donc $n(x, y, z; t)$, avec les dérivées spatiales nulles, mais $\partial n / \partial t \neq 0$. II.98, II.110

universel Qui s'applique dans tous les domaines. II.9

ventre Pour une onde, le ventre désigne un point auquel l'amplitude d'oscillation atteint la valeur maximale. II.134

vibration propre II.129

vitesse de la lumière La vitesse de la lumière dans le vide, communément appelée « vitesse de la lumière » désigne la vitesse de toute onde électro-magnétique qui évolue en dehors d'un

milieu matériel. Dans le vide, la permittivité est donnée par ϵ_0 et la perméabilité vaut μ_0 . Ces deux grandeurs se combinent pour donner la *célérité* d'une onde dans le vide, valant $c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$. Cette valeur est une des constantes de base de la physique qui permet de relier la notion de longueur (mètre) à celle de temps (seconde) ou de fréquence (Hertz). Dans la plupart des applications, on utilise la valeur proche de $c = 300\,000 \text{ km/s} = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$. La vitesse de la lumière dans un milieu optique transparent dépend de la partie réelle de son *indice de réfraction* vi

vitesse de rotation $\omega = \dot{\theta}$ II.2

électromagnétisme II.95

énergie cinétique II.7, II.8

énergie potentielle II.7, II.8

équation d'onde Équation différentielle décrivant la propagation d'une onde. Dans sa forme la plus simple, cette équation prend la forme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0,$$

qui correspond à la propagation à vitesse $\pm v \hat{1}_z$ II.72, II.95, II.123

Crédits des illustrations

1.1	Marco Livesu. Documentation de cinolib. https://github.com/mlivesu/cinolib/tree/master/examples/snapshots	I.2
1.2	Marco Livesu. Documentation de cinolib. https://github.com/mlivesu/cinolib/tree/master/examples/snapshots	I.2
1.3	Marco Livesu. Documentation de cinolib. https://github.com/mlivesu/cinolib/tree/master/examples/snapshots	I.3
1.4	Door SteHanRo - Eigen werk, CC BY-SA 4.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=49925080	I.3
1.5	Pascal Kockaert, biosphère de Montréal, Québec, 2024	I.3
1.6	Julien Minet, Nobohan, OpenStreetMap	I.4
1.7	Pascal Kockaert, 2024	I.4
1.8	Julien Minet, Nobohan, OpenStreetMap	I.4
1.9	Image générée par IA, copilot, DALL-E.	I.5
2.1	Image générée par IA, DALL-E, août 2024.	I.21
2.2	Images générées par IA (DALL-E) le 20 août 2024 . .	I.22
2.3	Image générée par IA, DALL-E, août 2024.	I.22
2.4	Photo de Brennan Tolman sur pexels.	I.24
2.5	Image générée par IA, DALL-E, août 2024.	I.24
2.6	Photo de Isi Parente sur Pexels	I.26
2.7	Images générées par IA (DALL-E) le 20 août 2024 . .	I.26
2.8	Images générées par IA (DALL-E) le 19 juillet 2024 .	I.26
2.11	Escalier impossible de Penrose. Source : Wikipedia. Fichier libre de droits.	I.33
2.12	Escalier impossible de Penrose modifié. Source : Wikipedia, modifié.	I.35
2.14	Images générées par IA (DALL-E) le 20 août 2024 . .	I.37
3.1	Photo by Wolfgang Wendefuer, pexels.com	I.57
3.2	Photo by Arthur A, pexels.com	I.58
3.3	Izaak Neuteling, Inspired by Eugene Khutoryansky, tikz.net (December 2021) CC-BY SA 4.0	I.60
3.6	Wikimedia common. Auteur inconnu.	I.62
3.12	Wikimedia commons. Jérémie Günter-Heinz, Dalton terror (Walibi), 2012.	I.71
3.13	Wikimedia commons. Projet Gutenberg eText 13013. Libre de droits.	I.72
4.1	Wikimedia Common. Illustration libre de droits. . .	I.97
4.4	Adaptations d'un graphique de Izaak Neuteling sur Tikz.net	I.100
4.9	« La trahison des dénominations. », Pascal Kockaert, 22 octobre 2024.	I.106
4.11	Adaptations d'un graphique de Izaak Neuteling sur Tikz.net	I.107
4.12	Adaptations d'un graphique de Izaak Neuteling sur Tikz.net	I.108

4.13	Wikimedia Common. Illustration libre de droits.	I.110
4.14	Boilly, Julien Léopold. Wikimedia Common. Illustration libre de droits.	I.110
4.15	Wikimedia Common. Illustration libre de droits.	I.110
4.16	Wikimedia Common. Illustration libre de droits.	I.111
4.17	Wikimedia Common. Illustration libre de droits.	I.111
4.35	Image sous licence CC BY-NC 4.0, femto-physique.fr	I.123
5.1	Image générée par copilot-Designer.	I.133
5.2	Wikimedia Commons. Illustration libre de droits.	I.134
5.22	René Terp, pexels.com	I.149
5.23	Pascal Kockaert, juillet 2025.	I.149
5.25	Wikimedia commons. Illustration libre de droits, publiée en 1914 et reprise de « The New Student's Reference Work », vol.4, p. 1893.	I.150
5.26	Wikimedia commons. Illustration libre de droits, publiée en 1920, reprise dans Edison and Music.	I.151
6.1	(a) Louis Charles Desnos (1725–1805), Wikimedia Commons, Creative Commons 3.0, recadrée ; (b) Richie Bendall, Wikimedia Commons, Creative Common 4.0 Itl ; (c) Photo de Polverini Lian sur Pexels ; (d) Photo de Dušan Cvetanović sur Pexels	II.1
6.2	(a) Photo de Skylar Kang sur Pexels ; (b) Photo de Adriaan Greyling sur Pexels ; (c) Photo de Thgustavo Santana sur Pexels ; (d) Photo de Hammad Khalid sur Pexels.	II.2
6.16	Photo de jasmin chew sur Pexels	II.13
6.25	(a) Photo de Monstera Production sur Pexels ; (b) Photo de Polverini Lian sur Pexels ; (c) Photo de Skylar Kang sur Pexels ; (d) Photo de jasmin chew sur Pexels	II.21
7.6	Photo de jasmin chew sur Pexels	II.41
7.7	Photo de Monstera Production sur Pexels	II.41
7.8	Photo de Magicbowls sur Pexels	II.41
8.33	Photo de'Alexandre Saraiva Carniato sur Pexels.	II.87
9.16	Heinrich Hertz par R. Krewaldt (1894), Wikimedia common, Public domain	II.116
10.17	Version modifiée d'une image de Izaak Neutelings sur Tikz.net	II.139
10.18	Version modifiée d'une image de Izaak Neutelings sur Tikz.net	II.140
10.19	Image de Izaak Neutelings sur Tikz.net	II.141
11.1	Wikimedia common. Auteur inconnu.	III.2
11.5	Bengt Nyman from Vaxholm, Sweden, CC BY-SA 2, Wikimedia common	III.6
11.6	École polytechnique (France), CC BY-SA 2.0, Wikimedia common	III.6
12.13	Wikimedia Common. Auteur inconnu. Libre de droits par extinction des droits de reproduction.	III.42
12.25	Photo de Timothy Yiadom sur pexels.	III.56
13.1	Izaak Neuteling, Tikz.net	III.72

13.2 Adaptation d'un graphique de Izaak Neuteling sur Tikz.net	III.73
13.8 Izaak Neuteling, Tikz.net	III.83
13.9 Adaptations d'un graphique de Izaak Neuteling sur Tikz.net	III.84
13.11 Adaptations d'un graphique de Izaak Neuteling sur Tikz.net	III.84
13.10 Adaptations d'un graphique de Izaak Neuteling sur Tikz.net	III.85
14.1 Wikimedia common, auteurs inconnus, domaine public.	III.96
14.2 Adaptation d'un graphique de Izaak Neuteling sur Tikz.net	III.97
14.3 Adaptation d'un graphique de Izaak Neuteling sur Tikz.net	III.99
14.4 Adaptation d'un graphique de Izaak Neuteling sur Tikz.net	III.101
14.5 Adaptation d'un graphique de Izaak Neuteling sur Tikz.net	III.102
14.6 Adaptation d'un graphique de Izaak Neuteling sur Tikz.net	III.103
14.7 Adaptation d'un graphique de Izaak Neuteling sur Tikz.net	III.104
14.9 Adaptation d'un graphique de Izaak Neuteling sur Tikz.net	III.106
14.10 Adaptations d'un graphique de Izaak Neuteling sur Tikz.net	III.110
15.1 Adaptation d'un graphique de Izaak Neuteling sur Tikz.net	III.124
15.2 Wikimedia commons. Photographie de F. Langhans, bibliothèque ETH, domaine public.	III.129
15.3 Graphique de Izaak Neuteling sur Tikz.net	III.132
15.4 Graphique de Izaak Neuteling sur Tikz.net	III.133
15.5 Modification d'un graphique de Izaak Neuteling sur Tikz.net	III.133
B.1 Documentation de Gmsh.	IV.6
B.2 Marco Livesu, documentation de Cinolib.	IV.6
C.1 Photo de mhtoori.com sur Pexels.	IV.15
C.2 Cronholm144, Wikimedia Commons. Illustration libre de droits.	IV.20
C.3 Inductiveload, Wikimedia Commons. Illustration libre de droits. Modifiée.	IV.21
C.4 Andeggs, Wikimedia Commons. Illustration libre de droits.	IV.23
D.1 Image générée par l'IA DALL.E 3	IV.25
G.1 Généré par IA, Copilot, DALLE.	vii
Les licences Creative Common (CC) sont décrites sur le site creativecommons.org. Les conditions de partage des images prove- nant du site Pexels sont décrites sur https://www.pexels.com/ .	

Bibliographie

- [1] E. Hairer and G. Wanner, editors. *Analysis by Its History*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York, NY, 2008.
- [2] Wikipedia. Coordonnées orthogonales — Wikipedia, the free encyclopedia. <http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Coordonn%C3%A9es%20orthogonales&oldid=212406736>, 2024. [Online ; accessed 05-September-2024].
- [3] Álvaro Suárez, Arturo C. Martí, Kristina Zuza, and Jenaro Guisasola. Electromagnetic field presented in introductory physics textbooks and consequences for its teaching. *Phys. Rev. Phys. Educ. Res.*, 19(2) :020113, August 2023. Publisher : American Physical Society.
- [4] Ruth W. Chabay and Bruce A. Sherwood. *Matter and Interactions*. Wiley, 2020.
- [5] Thomas A. Moore. *Six ideas that shaped physics : UnitE – Electric and Magnetic Fields are Unified*. McGraw Hill, 4 edition, 2022.
- [6] Andrew Zangwill. *Modern Electrodynamics*. Cambridge University Press, 2012.
- [7] Eric Mazur. *Principles and Practice of Physics*. Pearson, 2nd edition edition, 2022.
- [8] Anupam Garg. *Classical Electrodynamics in a Nutshell*. Princeton University Press, 2012.
- [9] Toshio Hyodo. Maxwell's displacement current and the magnetic field between capacitor electrodes. *European Journal of Physics*, 43(6) :065202, September 2022. Publisher : IOP Publishing.
- [10] BIPM. Mise en pratique for the definition of the metre in the si. Technical report, 2019. <https://www.bipm.org/documents/20126/41489670/SI-App2-metre.pdf>.
- [11] Óscar Alejos and José María Muñoz. The classical doppler effect revisited by the mathematical description of the phase function, 2024.
- [12] M. N. Polyanskiy. Refractive index database. <http://refractiveindex.info>, 2008–2024. [Online ; accessed 21-November-2024].
- [13] Achin Sen. How galileo could have derived the special theory of relativity. *American Journal of Physics*, 62(2) :157–162, 02 1994.

- [14] Carl G. Adler. Does mass really depend on velocity, dad? *American Journal of Physics*, 55(8) :739–743, August 1987.
- [15] Richard A. Feynman, B. Leighton Robert, and Matthew Sands. *The Feynman Lectures on Physics Set : The New Millennium Edition*. Basic Books, new millennium edition, 2011.

Table des matières

Remerciements	i
Préambule	iii
I Électromagnétisme	i
1 Physique mésoscopique : gradient	I.1
1.1 Découpage d'un objet en petits volumes	I.2
1.1.1 Décompositions triangulaires et tétraédrale .	I.2
1.1.2 Association de grandeurs à chaque élément de surface ou volume	I.2
1.1.3 Le maillage : un outil pour les architectes . .	I.3
1.2 Courbes de niveau, potentiel et gradient	I.3
1.2.1 Courbes de niveau, altitude et potentiel	I.4
1.2.2 Courbes de niveau et gradient	I.6
1.2.3 Utilisation du vecteur de plus grande pente .	I.9
1.2.4 Détermination de la pente dans une direction choisie	I.10
1.2.5 Opérateur gradient et dérivées directionnelles	I.10
1.2.6 Opérateur gradient en trois dimensions	I.12
1.2.7 Opérateur gradient dans des axes orthonormés	I.13
1.2.8 Gradient, dérivées partielles et opérateur nabla	I.13
1.2.9 Approche classique	I.13
1.2.10 Gradient et potentiel	I.14
1.3 Le coin des assistant·es	I.15
1.4 Questions théoriques	I.16
1.5 Exercices	I.17
Notions indispensables, nécessaires, intéressantes	I.19
2 Flux et circulation	I.21
2.1 Entraînement, circulation et rotationnel	I.21
2.1.1 Circulation	I.22
2.1.2 Exemple d'application de la circulation : le tir à la corde	I.24
2.1.3 Circulation et potentiel	I.25
2.1.4 Entraînement et champ tourbillonnaire	I.26
2.1.5 Circulation et rotationnel	I.26
2.1.6 Circulation et opérateur gradient	I.28
2.1.7 Circulation sur un ensemble de triangles . . .	I.31
2.1.8 Potentiel global et pseudo-potentiel local . . .	I.34
2.2 Flux, conservation et divergence	I.36
2.2.1 Flux et lois de conservation	I.37
2.2.2 Flux, frontière et orientation	I.37

2.2.3	Flux sur un tétraèdre	I.38
2.2.4	Flux au travers d'un ensemble de tétraèdres . .	I.42
2.2.5	Synthèse	I.44
2.3	Équations de Maxwell	I.45
2.3.1	Équations de Maxwell statiques	I.45
2.3.2	Équations de Maxwell dynamiques	I.47
2.4	Le coin des assistant·es	I.49
2.5	Questions théoriques	I.50
2.6	Exercices	I.51
	Notions indispensables, nécessaires, intéressantes	I.53
3	Loi de Faraday	I.55
3.1	Électromotance	I.56
3.1.1	Forces et masse	I.56
3.1.2	Forces et charge	I.58
3.1.3	Extension de la notion de champ électrique . .	I.60
3.2	Électromotance électromagnétique	I.61
3.3	Force de Lorentz, électromotance et relativité	I.61
3.3.1	Conducteur en mouvement dans un champ fixe	I.61
3.3.2	Conducteur fixe dans un champ en mouvement	I.63
3.4	Transformation galiléenne du champ électromagnétique	I.65
3.4.1	Transformation galiléenne de l'équation de Maxwell-Faraday	I.66
3.4.2	Transformation galiléenne de l'équation d'Ampère-Maxwell	I.68
3.4.3	Champ électrique induit par un déplacement .	I.69
3.4.4	Travail à l'origine de l'électromotance électromagnétique	I.70
3.4.5	La dynamo : invention	I.72
3.4.6	La dynamo : fonctionnement	I.72
3.5	Champ électrique non electrostatique	I.73
3.5.1	Potentiel vecteur	I.73
3.5.2	Équation de Maxwell pour les potentiels . .	I.73
3.6	Loi de Faraday sur des cas simples	I.75
3.6.1	Point de départ	I.76
3.6.2	Champ homogène sur une spire en mouvement	I.76
3.6.3	Champ inhomogène sur une spire en mouvement : électromotance	I.77
3.6.4	Champ inhomogène sur une spire en mouvement : flux magnétique	I.78
3.6.5	Interprétation	I.78
3.7	Lois intégrales de Faraday	I.80
3.7.1	Variation du flux au travers d'une surface déformable en mouvement	I.80
3.7.2	Hypothèses conduisant à la loi de Faraday .	I.84
3.7.3	Lois de Faraday pour des vitesses non relativistes	I.85
3.7.4	Le disque générateur de courant de Faraday .	I.86
3.8	Le coin des assistant·es	I.89

3.9 Questions théoriques	I.91
3.10 Exercices	I.92
Notions indispensables, nécessaires, intéressantes	I.96
4 Ampère, Maxwell & Lenz	I.97
4.1 Loi d'Ampère et courants de déplacement	I.97
4.1.1 Problématique de la loi d'Ampère	I.98
4.1.2 Loi de conservation de la charge	I.101
4.1.3 Courant de déplacement	I.103
4.1.4 Loi d'Ampère-Maxwell électromagnétique . . .	I.106
4.1.5 Illustration : charge du condensateur	I.107
4.1.6 Interprétation de l'exemple du condensateur .	I.108
4.2 Équations de Maxwell microscopiques	I.109
4.2.1 Loi de Faraday	I.110
4.2.2 Loi d'Ampère-Maxwell	I.110
4.2.3 Loi de Gauss pour le champ électrique	I.111
4.2.4 Loi de Gauss pour le champ magnétique	I.111
4.3 Loi de Lenz	I.111
4.3.1 Opposition du champ induit	I.112
4.3.2 Analyse en termes de forces	I.113
4.3.3 Conservation de l'énergie	I.114
4.3.4 Causalité	I.114
4.4 Champ magnétique dans la matière	I.115
4.4.1 Diamagnétisme	I.115
4.5 Application du phénomène d'induction	I.119
4.5.1 Le microphone	I.119
4.5.2 Le haut-parleur	I.120
4.5.3 La tête de lecture magnétique	I.120
4.5.4 Les courants de Foucault	I.120
4.5.5 Le générateur de tension alternative	I.123
4.6 Le coin des assistant·es	I.125
4.7 Questions théoriques	I.126
4.8 Exercices	I.127
Notions indispensables, nécessaires, intéressantes	I.131
5 Dynamique des circuits électriques	I.133
5.1 L'auto-induction	I.133
5.1.1 Introduction	I.134
5.1.2 Illustration	I.134
5.1.3 Sens de mesure des circulations et courants .	I.135
5.1.4 Inductance	I.136
5.1.5 Inductance d'un solénoïde idéalisé	I.138
5.1.6 Impédance quasi-statique	I.139
5.1.7 Circuit RL	I.139
5.1.8 Décharge d'un inducteur	I.141
5.1.9 Énergie stockée dans l'inducteur	I.142
5.1.10 Énergie du champ magnétique	I.144
5.1.11 Loi courant-tension de l'inducteur	I.145
5.1.12 Tension sinusoïdale	I.147
5.1.13 Convention graphique	I.148

5.2	Courants alternatifs	I.149
5.2.1	Introduction	I.149
5.2.2	Le transformateur	I.151
5.2.3	Circuits primaire et secondaire à spires multiples	I.154
5.2.4	Résistances en courant alternatif	I.155
5.2.5	Inducteurs en courant alternatif	I.158
5.2.6	Condensateurs en courant alternatif	I.162
5.3	Le coin des assistant·es	I.165
5.4	Questions théoriques	I.166
5.5	Exercices	I.167
	Notions indispensables, nécessaires, intéressantes	I.170
	Exercices (vol I)	I.E.1
	Préparation aux séances d'exercices (vol I)	I.E.1
	Exercices complémentaires (vol I)	I.E.2
	II Oscillations & ondes	i
	6 Oscillateurs harmoniques et amortis	II.1
6.1	L'oscillateur harmonique	II.2
6.1.1	Le mouvement de rotation	II.2
6.1.2	Mouvement harmonique	II.3
6.1.3	Oscillateur harmonique naturel	II.4
6.1.4	Potentiel harmonique	II.7
6.1.5	Universalité de l'oscillateur harmonique . . .	II.9
6.2	L'oscillateur linéaire amorti	II.17
6.2.1	Équation de l'oscillateur linéaire amorti . . .	II.17
6.2.2	Solution générale	II.19
6.2.3	Exemple d'oscillateur linéaire amorti : le circuit RLC	II.20
6.3	Oscillations forcées	II.21
6.4	Les phaseurs	II.23
6.4.1	Représentation complexe du mouvement harmonique	II.23
6.4.2	Déphasages et phaseurs	II.24
6.4.3	Équations des phaseurs	II.25
6.5	Le coin des assistant·es	II.29
6.6	Questions théoriques	II.30
6.7	Exercices	II.31
	Notions indispensables, nécessaires, intéressantes	II.33
	7 Oscillateur linéaire amorti forcé	II.35
7.1	L'Oscillateur linéaire amorti forcé	II.35
7.1.1	Solution harmonique, équation du phaseur .	II.36
7.1.2	Résonance	II.37
7.1.3	Le circuit RLC	II.42
7.1.4	Phaseurs et impédances	II.44
7.2	Le coin des assistant·es	II.50
7.3	Questions théoriques	II.51

7.4 Exercices	II.52
Notions indispensables, nécessaires, intéressantes	II.57
8 Ondes de corde et de compression	II.59
8.1 Ondes de corde	II.59
8.1.1 Modélisation des forces et du mouvement en un point d'une corde	II.59
8.1.2 Modélisation des Cordes	II.61
8.1.3 Modèle de la corde continue	II.64
8.1.4 Solutions de l'équation des cordes	II.66
8.1.5 Interprétation physique des solutions	II.70
8.2 Ondes de compression	II.76
8.2.1 Ondes dans les milieux cristallins	II.76
8.2.2 Ondes dans les milieux amorphes	II.80
8.3 Le coin des assistant·es	II.88
8.4 Questions théoriques	II.91
8.5 Exercices	II.92
Notions indispensables, nécessaires, intéressantes	II.94
9 Ondes électromagnétiques	II.95
9.1 Équation d'onde électromagnétique	II.95
9.1.1 Combinaison des équations de Maxwell en conservant le champ électrique	II.96
9.1.2 Combinaison des équations de Maxwell en conservant le champ magnétique	II.97
9.1.3 Analyse des équations obtenues	II.97
9.2 Interprétation physique	II.97
9.2.1 Champ proche	II.98
9.2.2 Champ distant	II.98
9.2.3 Simplification due aux symétries	II.98
9.2.4 Équation d'onde unidimensionnelle	II.99
9.2.5 Vitesse de propagation	II.99
9.2.6 Évolution de la propagation	II.99
9.2.7 Approche scalaire	II.100
9.2.8 Forme de l'onde propagative	II.100
9.3 Équation d'onde scalaire à une dimension	II.101
9.3.1 Équation unidimensionnelle en composantes .	II.101
9.3.2 Séparation des composantes	II.102
9.3.3 Limitations de l'approche scalaire	II.103
9.4 Ondes harmoniques	II.103
9.4.1 Hypothèses des ondes planes	II.103
9.4.2 Excitation harmonique	II.103
9.4.3 Propagation d'une onde harmonique	II.104
9.4.4 Nombre d'onde	II.104
9.4.5 Propriétés générales des ondes harmoniques .	II.105
9.4.6 Vitesse de l'onde harmonique	II.105
9.5 Polarisation	II.106
9.5.1 Polarisation rectiligne	II.106
9.5.2 Caractère transverse des ondes planes dans le vide	II.107

9.5.3	Polarisation elliptique	II.107
9.5.4	Polarisation circulaire	II.108
9.6	Onde plane d'orientation quelconque	II.108
9.6.1	Front d'onde	II.108
9.6.2	Rotation du repère	II.109
9.6.3	Vecteur d'onde	II.110
9.7	Équations de Maxwell harmoniques	II.110
9.7.1	Notations	II.111
9.7.2	Opérateurs différentiels appliqués à une onde plane	II.111
9.7.3	Équations de Maxwell pour des sources harmoniques	II.112
9.7.4	Équation d'onde en l'absence de source	II.115
9.8	Lien champs électrique & magnétique	II.115
9.8.1	Orientation du trièdre vecteur d'onde, champ électrique, champ magnétique	II.115
9.9	Le coin des assistant·es	II.118
9.10	Exercices	II.120
	Notions indispensables, nécessaires, intéressantes	II.121
10	Ondes stationnaires, battement, Doppler	II.123
10.1	Ondes stationnaires	II.123
10.1.1	Problèmes aux conditions aux limites	II.123
10.1.2	Onde stationnaire	II.126
10.1.3	Amplification et résonance	II.127
10.1.4	Oscillations propres	II.128
10.2	Composition de fréquences & battement	II.132
10.2.1	Signal de battement temporel	II.132
10.2.2	Propagation d'une onde de battement	II.134
10.3	Effet Doppler	II.135
10.3.1	Détecteur en mouvement	II.136
10.3.2	Source en mouvement	II.138
10.4	Le coin des assistant·es	II.142
10.5	Questions théoriques	II.146
10.6	Exercices	II.147
	Notions indispensables, nécessaires, intéressantes	II.152
	Exercices (vol II)	II.E.1
	Préparation aux séances d'exercices (vol II)	II.E.1
	Exercices complémentaires (vol II)	II.E.4

III Ondes & relativité

i

11	Modèle de Lorentz, susceptibilité et dispersion	III.1
11.1	Dispersion pour les différentes ondes	III.1
11.2	Densité de courant de charge liée	III.2
11.2.1	Milieu diélectrique	III.2
11.2.2	Densité de courant	III.3
11.3	Modèle de Lorentz	III.4
11.3.1	Mouvement harmonique du nuage électronique	III.4

11.3.2 Modèle de l'oscillateur harmonique amorti forcé	III.6
11.3.3 Équations de Maxwell harmoniques couplées à un oscillateur	III.6
11.3.4 Relation de dispersion	III.7
11.4 Relation de dispersion	III.8
11.4.1 Susceptibilité, permittivité et indice de réfraction	III.8
11.4.2 Indice de réfraction	III.9
11.4.3 Courant, champ de polarisation et champ de déplacement	III.9
11.4.4 Interprétation de la susceptibilité complexe . .	III.11
11.5 Battement et vitesse de groupe	III.14
11.5.1 Battement de deux ondes de même amplitude	III.15
11.5.2 Vitesse de phase et vitesse de groupe	III.16
11.5.3 Généralité des notions en lien avec la relation de dispersion	III.17
11.6 Paquet d'ondes et dispersion	III.17
11.6.1 Profil spatio-temporel d'un paquet d'ondes . .	III.18
11.6.2 Vitesse d'un paquet d'onde	III.18
11.6.3 Dispersion non linéaire	III.19
11.6.4 Les fibres optiques	III.20
11.7 Le coin des assistant·es	III.21
11.8 Questions théoriques	III.23
11.9 Exercices	III.24
Notions indispensables, nécessaires, intéressantes	III.26
12 Interférence, réfraction et lentilles	III.27
12.1 Phénomènes d'interférence	III.27
12.1.1 Interférences d'ondes planes	III.28
12.1.2 Figure d'interférence, intensité lumineuse . .	III.30
12.1.3 Onde sphérique	III.33
12.1.4 Expérience de Young	III.37
12.1.5 Description mathématique	III.39
12.2 Réfraction	III.41
12.2.1 Loi de la réfraction de Snell-Descartes	III.41
12.3 Lentilles	III.44
12.3.1 Optique géométrique versus optique ondulatoire	III.45
12.3.2 Lame de verre d'épaisseur constante	III.45
12.3.3 Lame de verre d'épaisseur variable	III.46
12.3.4 Onde sphérique convergente	III.48
12.3.5 Lentille convergente	III.49
12.3.6 Lentilles divergentes	III.51
12.3.7 Formes de lentilles rencontrées en pratique .	III.51
12.3.8 Formation d'images	III.51
12.4 Ondes transmises et réfléchies : coefficients de Fresnel	III.56
12.4.1 Hypothèses	III.56
12.4.2 Information recherchée	III.57
12.4.3 Continuité du champ électrique à une interface	III.57
12.4.4 Continuité du champ magnétique à une inter- face	III.58

12.4.5 Calcul des coefficients de réflexion et transmission pour une onde transverse électrique	III.58
12.4.6 Coefficients de réflexion et transmission pour une onde transverse magnétique	III.60
12.4.7 Polarisation lumineuse et coefficients de réflexion	III.60
12.5 Le coin des assistant·es	III.62
12.6 Questions théoriques	III.64
12.7 Exercices	III.65
Notions indispensables, nécessaires, intéressantes	III.69
13 La relativité restreinte	III.71
13.1 La relativité Galiléenne	III.71
13.1.1 Formule d'addition des vitesses	III.73
13.2 De Galilée à Lorentz	III.74
13.2.1 Deux trains et une mouche	III.74
13.2.2 Événements	III.74
13.2.3 Hypothèses	III.75
13.2.4 Analyse depuis le train bleu	III.76
13.2.5 Analyse depuis le train rouge	III.77
13.2.6 Comparaison des résultats obtenus dans les deux repères	III.77
13.2.7 Analyse depuis le repère de la mouche	III.79
13.2.8 Composition des vitesses	III.80
13.2.9 Discussion : dans quel univers vivons-nous ? .	III.81
13.2.10 Étude du coefficient de dilatation	III.81
13.3 Transformation de l'espace-temps	III.82
13.3.1 Notations usuelles des repères	III.83
13.3.2 Représentation de l'espace-temps	III.83
13.3.3 Ligne d'univers et événement	III.84
13.3.4 Invariant des transformations espace-temps de Lorentz	III.85
13.4 Le coin des assistant·es	III.87
13.5 Questions théoriques	III.89
13.6 Exercices	III.90
Notions indispensables, nécessaires, intéressantes	III.91
14 Cinématique relativiste	III.93
14.1 Ondes et relativité	III.93
14.1.1 Onde matérielle et relativité	III.93
14.1.2 Onde électromagnétique et relativité	III.94
14.1.3 Incohérence des ondes électromagnétiques avec la relativité galiléenne	III.94
14.1.4 Mathématiques, versus physique	III.95
14.1.5 Hypothèse des équations de Maxwell incomplètes	III.95
14.1.6 Hypothèse de l'existence d'un milieu matériel : l'éther	III.95
14.1.7 Défauts principaux de l'hypothèse de l'éther .	III.96
14.1.8 Rejet expérimental de l'hypothèse de l'éther .	III.96

14.2 Temps propre et longueur propre	III.97
14.2.1 Graduation des axes	III.98
14.3 Particularités de la relativité	III.101
14.3.1 Dilatation du temps	III.101
14.3.2 Calcul d'un intervalle de temps entre événements	III.101
14.3.3 Vérification expérimentale de la dilatation du temps	III.102
14.3.4 Contraction des longueurs	III.103
14.4 Loi de composition des vitesses	III.105
14.5 Vecteurs de l'espace-temps	III.106
14.5.1 Quadrivecteur	III.106
14.5.2 Transformation de Lorentz	III.106
14.5.3 Pseudo-produit scalaire	III.107
14.5.4 Construire un quadrivecteur	III.109
14.5.5 Effet Doppler relativiste	III.109
14.6 Vitesse spatio-temporelle	III.110
14.6.1 Définition intrinsèque	III.110
14.6.2 Composition des vitesses au départ des quadritess	III.111
14.6.3 Cohérence de la définition du quadrivecteur vitesse	III.112
14.7 Le coin des assistant·es	III.113
14.8 Questions théoriques	III.116
14.9 Exercices	III.117
Notions indispensables, nécessaires, intéressantes	III.119
15 Dynamique relativiste	III.121
15.1 Incompatibilité de la mécanique classique avec la relativité	III.121
15.1.1 Choc élastique classique de deux particules .	III.121
15.2 Énergie et impulsion	III.123
15.2.1 Quadrivecteur impulsion	III.124
15.2.2 Partie spatiale du quadrivecteur impulsion .	III.124
15.2.3 Une masse variable?	III.125
15.2.4 Invariant scalaire lié au quadrivecteur impulsion	III.125
15.2.5 Partie temporelle du quadrivecteur impulsion	III.126
15.2.6 Équivalence masse-énergie	III.127
15.2.7 Le photon, particule sans masse	III.129
15.2.8 Puissance et force	III.130
15.3 Force de Lorentz et relativité restreinte	III.131
15.3.1 Problème du champ induit	III.132
15.4 Autres quadrivecteurs	III.135
15.5 Le coin des assistant·es	III.136
15.6 Questions théoriques	III.137
15.7 Exercices	III.138
Notions indispensables, nécessaires, intéressantes	III.139

Exercices (vol III)	III.E.1
Préparation aux séances d'exercices (vol III)	III.E.1
IV Annexes	i
A Rotationnel sur maillage triangulaire	IV.1
A.1 Introduction	IV.1
A.1.1 Définition des triangles et des tangentes à leurs côtés	IV.1
A.1.2 Intégrale d'un vecteur variant linéairement sur une droite	IV.1
A.1.3 Circulation d'un champ sur un triangle	IV.2
A.1.4 Champ linéaire en coordonnées cartésiennes .	IV.2
A.2 Circulation & flux sur des triangles	IV.3
A.3 Champ vectoriel non linéaire différentiable	IV.3
A.3.1 Théorème du rotationnel de Stokes	IV.4
B Divergence sur maillage tétraédral	IV.5
B.1 Introduction	IV.5
B.1.1 Logique de la démonstration	IV.5
B.2 Champ linéaire intégré sur un tétraèdre	IV.5
B.2.1 Définition des surfaces et de leurs normales extérieures	IV.5
B.2.2 Base des vecteurs normaux	IV.7
B.2.3 Surface opposée au sommet zéro	IV.7
B.2.4 Intégrale d'un vecteur variant linéairement sur une surface triangulaire	IV.7
B.2.5 Intégrale du flux d'un champ variant linéairement sur une surface triangulaire	IV.9
B.2.6 Flux total sortant d'un tétraèdre	IV.9
B.3 Gradient champ linéaire sur un tétraèdre	IV.10
B.3.1 Volume d'un tétraèdre	IV.10
B.3.2 Lien entre intégrale de volume et intégrale de surface	IV.11
C Gradient	IV.13
C.1 Gradient et dérivée unidirectionnelle	IV.13
C.1.1 Préambule sur les notations	IV.13
C.1.2 Dérivées selon un vecteur, directionnelle et partielle	IV.15
C.1.3 Gradient	IV.17
C.1.4 Interprétation du gradient	IV.20
C.2 Calcul de nabla	IV.20
D Loi de corrélation de Faraday	IV.25
D.1 Introduction	IV.25
D.2 Équations de Jefimenko	IV.26
D.2.1 Présentation des équations de Jefimenko . . .	IV.26
D.2.2 Analyse des équations de Jefimenko	IV.26

TABLE DES MATIÈRES	xxvii
E Unités	IV.29
V Exercices	i
Exercices (vol I)	I.E.1
Préparation aux séances d'exercices (vol I)	I.E.1
Exercices intégrés aux leçons (Vol I)	I.E.2
Exercices complémentaires (vol I)	I.E.16
Solutions (vol I)	I.S.1
Solutions des exercices intégrés aux leçons	I.S.1
Solutions des exercices complémentaires	I.S.40
Exercices (vol II)	II.E.1
Préparation aux séances d'exercices (vol II)	II.E.1
Exercices intégrés aux leçons	II.E.4
Exercices complémentaires (vol II)	II.E.17
Solutions (vol II)	II.S.1
Solutions des exercices intégrés aux leçons	II.S.1
Solutions des exercices complémentaires	II.S.41
Exercices (vol III)	III.E.1
Préparation aux séances d'exercices (vol III)	III.E.1
Exercices intégrés aux leçons	III.E.2
Solutions (vol III)	III.S.1
Solutions des exercices intégrés aux leçons	III.S.1
Solutions des exercices complémentaires	III.S.34
Listes, index et glossaire	i
Acronymes	i
Glossaire	iii
Notations	xi
Crédits des illustrations	xi
Bibliographie	xv
Table des matières	xvii
Colophon	xxviii



Ce syllabus a été réalisé en utilisant la suite logicielle libre L^AT_EX.

La mise en page spécifique est rendue possible grâce à l'extension « sidenotesplus ».

La police utilisée est New Century pour le texte et Fourier pour les expressions mathématiques. Les titres sont réalisés en Vera Sans.

L'orthographe a été vérifiée à l'aide de L^TE_X.

La présente version date du 21 janvier 2026.

[git] : main @ 7876236•1.9.9-68-g7876236 (2026-01-21)•Pascal.Kockaert@ulb.be



Troisième de couverture

Quatrième de couverture