Séance 3 : Séries de Fourier généralisées

Rappel théorique. Les informations suivantes se trouvent dans le chapitre 14 du cours.

Voici un rappel de quelques définitions, vues notamment au cours d'algèbre, ainsi que de l'algorithme de Gram-Schmidt.

Définitions

- Un *espace préhilbertien* est un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ (on omettera l'indice E lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité).
- *Norme (au sens large) :* Le produit produit scalaire induit une norme, $\|\vec{x}\|_E = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_E}$, qui n'est pas forcément une norme au sens strict : on peut avoir $\|\vec{x}\|_E = 0$ sans que $\vec{x} = \vec{0}$. On notera alors $\vec{x} \overset{E}{=} \vec{0}$.
- *Classe d'équivalence :* On dit que $\vec{x}$ et $\vec{y} \in E$ sont équivalents au sens de la norme induite $\|\cdot\|_E$ si $\|\vec{x} - \vec{y}\|_E = 0$. On note alors $\vec{x} \overset{E}{=} \vec{y}$.
- *Orthogonalité :* Soient E un espace préhilbertien et $\vec{x}, \vec{y} \in E$. Alors $\vec{x} \perp_E \vec{y} \iff \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_E = 0$.
- *Projection orthogonale :* Soit V un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien E, et $\vec{x} \in E$. La *projection orthogonale* de $\vec{x}$ sur V, notée $\mathrm{proj}_V(\vec{x})$ est l'unique vecteur $\vec{v} \in V$ tel que $\vec{x} - \vec{v} \perp_E V$.
- *Système orthogonal :* Un système $(\vec{e}_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ de E est dit orthogonal si $\vec{e}_i \perp_E \vec{e}_j$ pour tout $i \neq j$.
- *Convergence au sens de la norme induite :* La série $\sum_{i=1}^{\infty} \vec{x}_i$ converge au sens de la norme induite $\|\cdot\|_E$ vers $\vec{x}$ si $\lim_{n\to\infty} \|\vec{x} - \sum_{i=1}^{n} \vec{x}_i\|_E = 0$. On note alors $\sum_{i=1}^{\infty} \vec{x}_i \overset{E}{=} \vec{x}$.
- *Système complet :* Un système orthogonal $(\vec{e}_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ de E est dit complet si, pour tout $\vec{x} \in E$:

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i \vec{e}_i \overset{E}{=} \vec{x} \quad \text{où} \quad c_i = \frac{\langle \vec{e}_i, \vec{x} \rangle_E}{\|\vec{e}_i\|_E^2}$$

Algorithme de Gram-Schmidt

L'algorithme de Gram-Schmidt permet de construire une base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ à partir d'une base quelconque $(\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_n)$ d'un espace préhilbertien E de dimension n.

- $k = 1$: On norme le premier vecteur de la base : $\vec{e}_1 := \dfrac{\vec{s}_1}{\|\vec{s}_1\|_E}$.
- $\forall\, 1 < k \leq n$:
  (a) On retire la composante du vecteur $\vec{s}_k$ qui est linéairement dépendante des vecteurs précédents pour obtenir une base orthogonale :

  $$\vec{v}_k := \vec{s}_k - \mathrm{proj}_{V_{k-1}}(\vec{s}_k)$$

  où V_{k-1} est l'espace engendré par les k premiers vecteurs de base $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k$.

  (b) On norme le résultat : $\vec{e}_k := \dfrac{\vec{v}_k}{\|v_k\|_E}$.