



# Physique générale II

Partie I

## Électromagnétisme

---

**Pascal Kockaert**

Auteur : **Marc Haelterman**

Revu par **Pascal Kockaert**

---

IRCI 1 & IRAR 2  
**PHYS-H-1002**

Année académique 2025–2026





[git] : main @ db1490e • 1.9.9-34-gdb1490e (2026-01-11) • Pascal.Kockaert@ulb.be

# Remerciements

**J**E TIENS À REMERCIER PROFONDÉMENT MARC qui a accepté de partager et de mettre à disposition les supports de cours qu'il a construits au fil du temps.

Pendant vingt ans, Marc a construit un cours de physique pour ingénieurs en accord avec les principes de la physique contemporaine les plus avancés.

La physique ne s'est pas construite en un jour et il est tentant de s'arrêter aux principes fondateurs d'une théorie. Chaque théorie est plongée dans un ensemble et utilisée par les branches voisines de la physique, mécanique, chimie. Petit à petit des incohérences dans les représentations intuitives que l'on se fait de la physique sont découvertes et des corrections doivent y être apportées.

Il est important, comme l'a excellement fait Marc, de montrer l'évolution de la pensée scientifique et de fournir une vision simple des effets principaux de la physique sans induire d'intuition contraire aux avancées les plus récentes de la connaissance scientifique.

C'est avec enthousiasme et humilité que je vais essayer de poursuivre ce long travail.

Je voudrais également remercier les nombreux assistants qui ont enrichi ce cours au fil du temps et dont les contributions individuelles sont difficiles à tracer. Sous la coordination de Marc Haelterman et Yves Louis, ils ont sans cesse amélioré les supports des exercices et laboratoires. Il s'agit notamment de : Adrien De-wandre, Maïté Swaelens, François Gonze, Laurent Olislager, Guillaume Tillema, Jonathan Verlant-Chenet, Jennifer Watchi, Robin de Gernier, Thomas Bury, Matthieu Arnem, Bertrand de Prelle de la Nieppe, Virginie Lecocq, Robert Vanden Heyden, Olivier Decroly, Elisabeth Gruwé, Antoine Platteau, Edem Akakpo, Quentin Leponce, Julien Dechanxhe.

Pascal Kockaert  
Été 2025

*Les 500 illustrations réutilisées dans ce cours sont identifiées par l'indication « ©MH ».*



# Préambule

C'EST AVEC BEAUCOUP D'ENTHOUSIASME que je reprends cette partie du cours de physique générale. Ces notes de cours sont une partie du dispositif pédagogique qui ne se limite pas à un texte.

Être acteur ou actrice de son apprentissage est très important, non seulement pour trouver la motivation de suivre les cours, mais plus fondamentalement parce que tout ce que nous apprenons passe par notre mémoire de travail qui constitue une sorte de goulet d'étranglement<sup>a</sup>. Monopoliser vos connaissances sur une base régulière est important pour que les termes et concepts que vous apprenez puissent progressivement être retenus et libérer de la place dans votre mémoire de travail. Ceci nécessite un travail régulier.

Il ne suffit pas de mémoriser : il faut aussi comprendre. Vous aurez l'occasion, à de multiples reprises, de réfléchir et discuter à différentes situations physiques avec vos camarades. Parfois votre interprétation sera la bonne, parfois vous vous tromperez, mais dans tous les cas, vous apprendrez à réfléchir à des situations et vous consolidez vos connaissances.<sup>b</sup> En effet, dans ce processus de compréhension et de discussion, vous tisserez des liens avec vos connaissances existantes et chacun de ces liens constituera une manière de récupérer votre souvenir.

Les activités qui vous seront proposées au cours participent à ces opérations qui vous aideront à assimiler la matière contenue dans ces notes. Elles seront complétées de parties dans lesquelles vous mettrez en pratique les apprentissages théoriques, les exercices et les laboratoires. La répartition dans le temps de ces activités vous permettra de réactiver régulièrement les concepts repris dans ce cours et de vous les rendre aussi familier que l'addition de deux nombres ou la manière d'écrire votre nom.

Un effort régulier vous sera bien plus profitable qu'une étude accélérée<sup>c</sup>. C'est un conseil vieux comme le monde... mais toujours utile à répéter.

## Version 2025-2026

Pour cette deuxième version, j'ai poursuivi la reprise des notes de Marc Haelterman, comme indiqué dans les remerciements.

J'en ai retravaillé plus ou moins profondément différentes parties.

En particulier, j'ai réduit l'utilisation du concept de ligne de champ, car ce concept peut conduire à des représentations erronées et qu'il ne correspond pas à la pratique industrielle et de recherche, qui consiste à représenter l'orientation des champs par des flèches et leur intensité par une représentation en fausses couleurs. Les corrections des exercices ont été réécrites dans cette même optique.

a Baddeley, A. (2003). "Working memory : looking back and looking forward". *Nature Reviews Neuroscience*, 4(10), 829-839.

b Chi, M. T. H., Bassok, M., Lewis, M. W., Reimann, P., & Glaser, R. (1989). "Self-explanations : How students study and use examples in learning to solve problems". *Cognitive Science*, 13(2), 145-182.



L01P1



c Ebbinghaus, H. (1885). "Über das Gedächtnis" (On Memory).

J'ai également intégré les exercices aux différents chapitres, de sorte qu'il soit possible de s'entraîner directement après la lecture d'un chapitre. De nouveaux exercices ont été intégrés à plusieurs chapitres, pour permettre de s'entraîner progressivement. C'est le cas, par exemple pour les deux premiers chapitres portant sur les opérateurs différentiels dont la manipulation est importante dans certains passages du cours, même si l'analyse vectorielle n'est utilisée que lorsqu'elle est indispensable à l'obtention d'une expression correcte.

Le dernier volume n'avait été revu que partiellement dans la première version.

Ce volume est maintenant en lien plus direct avec la matière qui sera vue au cours. Dans la partie couvrant les lentilles, le lien entre la théorie et les expressions utilisées au laboratoire est maintenant continu. Pour la partie sur la relativité, les notes reflètent l'approche suivie au cours pour introduire la contraction des longueurs et le lien avec l'électromagnétisme n'apparaît qu'ensuite pour valider l'approche. Les références au temps complexe ont été supprimées complètement pour utiliser le même formalisme que dans les cours des années suivantes. La trigonométrie hyperbolique, bien qu'élégante, a également été supprimée car elle augmente l'abstraction nécessaire, sans être indispensable aux calculs.

Afin de guider les lectrices et lecteurs dans l'appropriation du contenu de ce syllabus, des expressions importantes ont été encadrées. Cette mise en exergue devrait permettre de retrouver rapidement les informations les plus utiles, notamment dans les préparations des séances d'exercices et des laboratoires.

Finalement, les liens vers les vidéos de mon prédécesseur ont été retirés, au profit de liens vers la version du cours donnée l'an passé. Utiliser les anciennes vidéos est maintenant déconseillé car les approches temps-complexe et lignes de champ ne feront pas écho à ce qui est enseigné dans ce cours.

La liste des prérequis en début de chaque leçon devrait vous permettre de vous préparer au mieux AVANT DE SUIVRE UN COURS.

Comme dans la première version, toutes les rubriques « Pour aller plus loin... » sont facultatives. VOUS POUVEZ EN SAUTER COMPLÈTEMENT LA LECTURE. Néanmoins, cette présentation alternative pourrait vous être utile pendant votre étude.

Les rubriques « exemples » illustrent la mise en œuvre de la théorie. Dans une phase d'approche de la matière, un ou plusieurs exemples seront avantageusement lus avant d'aborder la présentation de la théorie plus générale.

Dans une phase de révision de la matière, vous pouvez commencer par lire la partie théorique et revenir ensuite sur les exemples pour vérifier si vous avez compris.

Les rubriques « Le coin des assistants » vous permettent de relire la matière rapidement avant d'aller à une séance d'exercices. Elles ont été rédigées au fil du temps par l'équipe des assistants qui évolue sans cesse, et remise à jour cette année par Julien Dechanxhe. CES RUBRIQUES NE SONT PAS SUFFISANTES POUR PRÉPARER

#### L'EXAMEN ORAL DU COURS.

Un glossaire en fin de volume peut servir également d'index. Il n'est pas encore complet. Les prérequis de chaque leçon sont mentionnés en début de chapitre. Ils sont directement liés au glossaire, afin que vous puissiez identifier rapidement le contenu lié à ces prérequis.

Chaque leçon se termine par un récapitulatif des notions qui y ont été abordées. Ces notions sont classées en trois catégories : indispensable, nécessaire et intéressant. J'espère que ces catégories vous aideront à organiser au mieux votre étude, et qu'elles vous permettront de progresser plus rapidement dans le cours en vous permettant de doser vos efforts.

Pascal Kockaert  
Novembre 2025



# **Physique générale II**

Partie I

## **Électromagnétisme**

---

**Pascal Kockaert**

Auteur : **Marc Haelterman**

Revu par **Pascal Kockaert**

---

IRCI 1 & IRAR 2  
**PHYS-H-1002**

Année académique 2025–2026



# Physique mésoscopique : potentiel et gradient

Leçon  
1

## ■ Pré-requis pour cette leçon ■

- |                               |                                 |
|-------------------------------|---------------------------------|
| — <i>produit scalaire</i>     | — <i>élément de surface</i>     |
| — <i>produit vectoriel</i>    | — <i>élément de volume</i>      |
| — <i>surface orientée</i>     | — <i>dérivée</i>                |
| — <i>intégrale de contour</i> | — <i>dérivée partielle</i>      |
| — <i>intégrale de surface</i> | — <i>dérivée directionnelle</i> |
| — <i>intégrale de volume</i>  | — <i>dérivation en cascade</i>  |

DANS CETTE LEÇON, nous allons aborder de manière intuitive, puis mathématique, des concepts utiles à la physique. Bien que nous comptions les utiliser dans le contexte de l'électromagnétisme, nous les présenterons de manière plus générale afin d'en développer l'intuition.

Pour appliquer les lois physiques à des systèmes complexes, les ingénieurs recourent quasiment systématiquement à des ordinateurs. La raison simplifiée en est que les lois sont souvent données pour un espace dont les paramètres ne varient pas, ou qui varient lentement. Si cela ne vous convainc pas, songez à un énoncé typique d'un problème de physique :

- « On considère un milieu *homogène*... caractérisé par un *indice n* ... »;
- « Soit un cube réalisé dans *un matériau* dont *la densité* vaut *d*, immergé dans un récipient contenant de l'eau avec *une densité 1*. »;
- « On utilise une barre métallique de *diamètre constant*, caractérisée par un *coeffcient de ...* valant ... », etc.

Pour appliquer les lois physiques, on divise mentalement l'objet étudié en un ensemble de petits volumes, parfois très petits, pour lesquels on peut considérer que les propriétés physiques sont *uniformes*, ou varient proportionnellement à la position par rapport à un point du volume. On parle d'échelle mésoscopique pour désigner ces volumes qui contiennent suffisamment de molécules ou atomes pour qu'on puisse considérer que la matière est continue, et suffisamment petits pour qu'on puisse considérer que les paramètres décrivant le milieu sont constants ou varient linéairement avec la position.



L01P2



## 1.1 Découpage d'un objet en petits volumes

De manière un peu étonnante, alors qu'on découpe un objet en petits volumes pour le modéliser sur un ordinateur, on aime écrire les lois physiques en un point, c'est-à-dire sur un espace de volume nul. C'est une étape qui simplifie les énoncés des lois physiques mais peut gêner leur compréhension. Appliquer ces lois sur un volume mésoscopique peut aider à mieux les comprendre.

L'idée de ce chapitre est de vous montrer qu'on peut étudier énormément de propriétés très simplement sur un élément de volume mésoscopique, puisque essentiellement, tout y est linéaire. L'étape suivante consistera à voir comment assembler les différents volumes pour résoudre un problème à notre échelle, appelée *macroscopique* et résoudre des problèmes très complexes.

Avant de nous lancer dans l'étude de volumes mésoscopiques, voyons quelles formes permettent de décomposer des surfaces et volumes de manière pratique.

### 1.1.1 Décompositions triangulaires et tétraédrale

La discréttisation par parallélépipèdes rectangles est très utile comme première approche, mais elle se heurte à un problème majeur : les normales sont toutes orientées verticalement ou horizontalement. Cette décomposition ne peut donc pas servir de cadre général.

La discréttisation tétraédrale est la plus élémentaire. Elle fait apparaître naturellement un système d'axes pour chaque tétraèdre et présente l'avantage que les tétraèdres peuvent épouser toutes les surfaces régulières avec une erreur aussi petite que désirée sur l'orientation des normales aux surfaces. La figure 1.1 illustre la possibilité de pavier une surface régulière par des triangles. Cette base de triangles peut ensuite être utilisée pour décomposer l'intérieur du volume en tétraèdres, comme illustré à la figure 1.2.

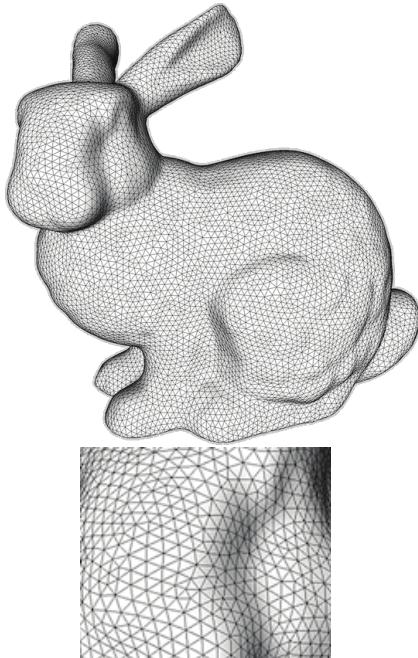
### 1.1.2 Association de grandeurs à chaque élément de surface ou volume

Une fois le volume ou la surface décomposé en éléments, on associe à chaque élément une valeur particulière des paramètres physiques, comme la température, la pression, la vitesse, le champ électrique, la quantité de mouvement, etc. Chacune de ces grandeurs est définie localement. Une quantité qu'on peut définir localement, et qui possède donc une valeur bien définie en chaque point de l'espace est appelée un champ.

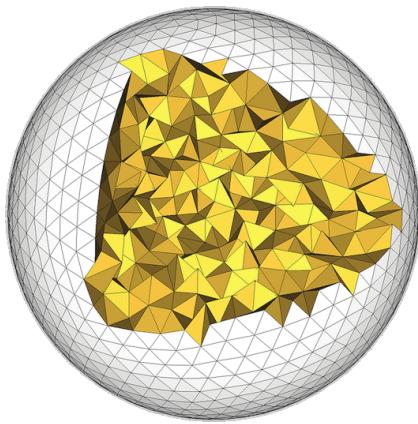
Sur la figure 1.3, on a représenté un champ vectoriel, qui pourrait être un champ de vitesse, par exemple : pour chaque triangle de la discréttisation, une flèche donnant l'orientation du champ est tracée. L'intensité du champ est représentée au moyen de fausses couleurs selon une échelle qui doit être précisée si on veut interpréter correctement l'image. Remarquez que la grandeur vectorielle

**FIGURE 1.1 :** Exemple de découpage de la surface en triangles, extensible à une décomposition du volume en tétraèdres.

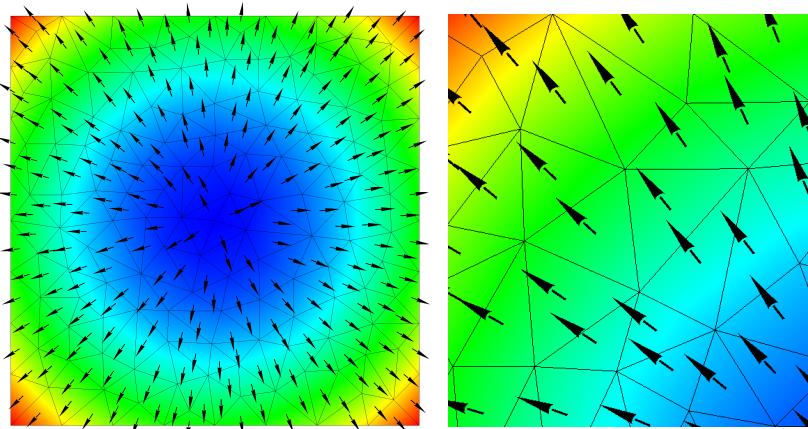
En bas, détail de la tête.



**FIGURE 1.2 :** Découpage d'une sphère en tétraèdres.



**FIGURE 1.3** – Représentation d'un champ vectoriel : pour chaque triangle de la discrétisation, l'intensité du champ est représentée au moyen de fausses couleurs. Une flèche donnant l'orientation du champ est tracée. Si la grandeur était scalaire, comme la température, la flèche ne serait pas nécessaire. À droite, détail de la figure de gauche.



est ici représentée au centre de l'élément. On pourrait alternative-  
ment représenter la valeur du champ sur chacun des points d'in-  
tersection du maillage.

### 1.1.3 Le maillage : un outil pour les architectes

Remarquons que les (ingénieurs et ingénieries) architectes ont souvent recours à un découpage en éléments triangulaires ou tétraédraux. La différence avec ce qui a été dit précédemment est que le volume considéré est à notre échelle (*macroscopique*) et non à l'échelle *mésoscopique*. C'est le cas, par exemple, de la tour de la maison du verre à Lommel (figure 1.4), dessinée par Samyn et Partners. Bien que chacune des vitres soit plane, le volume global donne l'impression d'être courbé régulièrement. La biosphère de Montréal, représentée à la figure 1.5 est un dôme géodésique d'apparence sphérique, obtenu par un maillage tétraédral. Il s'agit d'une réalisation architecturale spectaculaire de l'architecte Richard Buckminster Fuller illustrant à l'échelle macroscopique comment un volume sphérique peut être approché de manière assez fidèle par un nombre relativement limité de tétraèdres.

## 1.2 Courbes de niveau, potentiel et gradient

Il existe de nombreuses situations où l'on veut prédire dans quelle direction un mouvement va se produire. Par exemple, Moussa<sup>a</sup> est dans un skate park. Il voudrait positionner au mieux sa planche. Pour cela, il évalue intuitivement la pente maximale. S'il voulait programmer un robot pour le faire, quelles indications devrait-il lui donner? Quelle serait la manière de lui présenter l'information?

**FIGURE 1.4** : Het glazen huis, Lommel.  
Volume d'apparence conique réalisé unique-  
ment avec des triangles plans.



**FIGURE 1.5** : Biosphère de Montréal,  
Québec, Canada. Exemple de maillage  
tétraédral approchant une sphère.

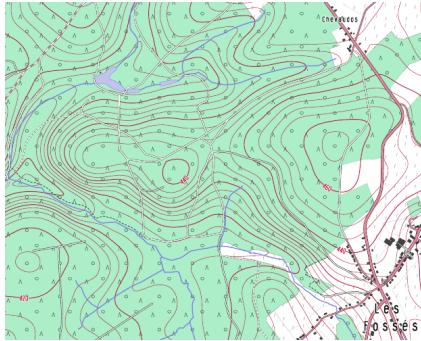


a Afin de vous représenter le mieux possible dans ces exemples, au moment de rédiger ces notes, les prénoms sont choisis aléatoirement parmi les prénoms des étudiants de l'année précédente.

Eddy est randonneur. En fonction de sa forme, il aime à choisir la difficulté des chemins qu'il emprunte. Il a l'habitude d'utiliser des cartes avec des courbes de niveaux, comme sur la figure 1.6. Non seulement, elles lui permettent de choisir le meilleur chemin, mais en plus le relief l'aide à se repérer.

### 1.2.1 Courbes de niveau, altitude et potentiel

**FIGURE 1.6 :** Carte présentant le relief au moyen de courbes de niveau.



Les courbes de niveau indiquent l'altitude de chaque point de la carte, c'est-à-dire la hauteur de ce point par rapport au niveau moyen de la mer. L'altitude est un *champ scalaire* : à chaque point de l'espace, correspond une altitude unique. Pour tracer une courbe de niveau, on relie entre eux tous les points qui se trouvent à une altitude donnée, par exemple 440 m sur la carte de la figure 1.6.

#### Petit poisson rouge... peut-on passer la barre rouge ?

Oui, à condition de répondre à ma question !

Observez la carte de la figure 1.6. Voyez-vous des courbes qui se croisent ? Pensez-vous que votre observation est généralisable à toutes les cartes du monde ?

**FIGURE 1.7 :** Les falaises correspondent à des zones de définition multiple pour l'altitude.



Dans de rares cas, les cartographes doivent représenter plusieurs altitudes en un point. Il s'agit par exemple de falaises, comme illustré à la figure 1.7. Si ces falaises sont parfaitement verticales, à une longitude et une latitude correspondent plusieurs altitudes. Cela constitue une singularité du champ d'altitude. Ce genre d'endroit doit être abordé avec prudence, tant pour David qui se promène au bord de la falaise et risque une chute, que pour Amin qui veut calculer la pente en ce point, et qui devra sans doute se plonger dans son cours d'analyse pour continuer ses calculs.

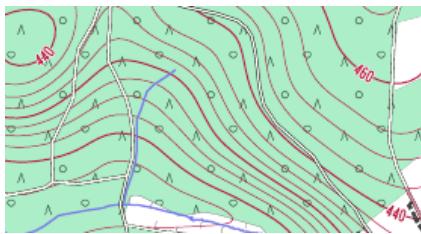
#### Niveau de référence

Soufiane est cartographe et il a choisi de représenter sur ces cartes le chemin le plus haut. Cela lui permet d'avoir toujours une seule altitude pour chaque latitude et longitude et fait de l'altitude un champ bien défini en tout point de la planète. Il peut donc écrire des nombres en rouge (figure 1.8) partout sur sa carte pour indiquer l'altitude des courbes. Pour éviter de surcharger sa carte, il ne le fait que pour les multiples de 20 m. Par exemple, le nombre 440 indique que l'altitude de cette courbe est de 440 m au-dessus du niveau de la mer. Le choix de ce niveau de référence est nécessaire pour donner un sens aux valeurs sur la carte.

#### Pente, inclinaison, déclivité

On l'appelle comme on veut, mais la pente ou l'inclinaison du terrain, est un élément essentiel pour planifier son itinéraire.

**FIGURE 1.8 :** Détail de la carte présentée à la figure 1.6. Les indications 440, 460, etc. indiquent l'altitude.



Pour calculer l'inclinaison, on mesure de combien l'altitude s'accroît lorsque l'on avance d'une distance, par exemple 1 m ou un pas, dans une direction. Remarquons que si on s'intéressait à un champ de température ou de pression, on mesurerait de combien la température ou la pression s'accroît. Dans le cas de l'altitude, si on observe une variation d'altitude de 10 cm pour une progression de 1 m, on dit que la pente vaut 10%, ce qui correspond à  $10\text{cm}/(100\text{cm}) = 0,1$ . En général, la pente n'est pas adimensionnelle. Elle est par exemple de  $1^\circ\text{C}/\text{m}$ , ou  $1\text{Pa}/\text{m}$ .

Ce qui est à souligner, c'est qu'on doit décider dans quelle direction on se déplace pour pouvoir spécifier la variation d'altitude. Constatons également que comme cette variation apparaît sous forme de rapport, on peut très bien faire un pas de 50 cm et mesurer une variation d'altitude de 5 cm et rapporter une pente de  $5\text{cm}/50\text{cm} = 1\text{cm}/10\text{cm} = 10\text{cm}/\text{m}$ . On peut donc estimer la pente sur un petit pas ou un grand pas et parvenir au même résultat *pourvu que le terrain soit plan sur la distance de la mesure*. Si le terrain est très irrégulier, on devra le diviser en petites zones planes et mesurer l'inclinaison locale sur ces petites zones.

### Invariance de la différence de niveau

Sana et Nathan sont payés pour cartographier des endroits reculés du monde. Ils sont munis d'une caméra reliée à un GPS qui alimentera une base de données. Ils sont face à une colline représentée à la figure 1.9. Ils décident d'emprunter chacun un chemin différent à la première bifurcation, pour prendre des photos différentes et cartographier plus vite les environs. Leur GPS enregistre leur position horizontale et verticale très régulièrement. On suppose que cette mesure est faite avec une précision très élevée, bien inférieure à la distance d'un de leur pas, ce qui n'est pas le cas des dispositifs actuels. De ces mesures, on déduit les différences de niveaux pour chacun des pas de Sana ( $\Delta h_n^S$ ) et pour chacun des pas de Nathan ( $\Delta h_n^N$ ). Sana effectue au total  $N_S$  pas, tandis que Nathan en fait  $N_N$ . Êtes-vous d'accord sur le fait que si on somme les différences de niveau entre chacun de leurs pas — en conservant le signe positif quand ça monte et négatif, quand ça descend — la somme sera la même pour tous les deux,

$$\sum_{n=1}^{N_S} \Delta h_n^S = \sum_{n=1}^{N_N} \Delta h_n^N ? \quad (1.1)$$

La réponse à cette question devrait être positive, du fait que Sana et Nathan partent de la même altitude et arrivent à la même altitude. Si on écrit pour Sana  $\Delta h_n^S = h_n^S - h_{n-1}^S$ , la différence de niveau correspondant à un pas, la hauteur de départ est donnée par  $h_0^S$  et celle d'arrivée est donnée par  $h_{N_S}^S$ , puisque

$$\sum_{n=1}^{N_S} \Delta h_n^S = (h_1^S - h_0^S) + (h_2^S - h_1^S) + \dots + (h_{N_S}^S - h_{N_S-1}^S) = -h_0^S + h_{N_S}^S. \quad (1.2)$$

**FIGURE 1.9 :** Sana et Nathan partent du même point et se donnent rendez-vous au haut de la colline en face. Ils suivent des chemins différents et enregistrent leurs trajets.



Les hauteurs de départ et d'arrivée pour Sana et Nathan étant les mêmes, on a bien

$$\Delta h = h_{N_S}^S - h_0^S = h_{N_N}^N - h_0^N, \quad (1.3)$$

qui indique que les deux sommes sont identiques. Le dénivellé total entre deux points est indépendant du chemin suivi, du nombre de pas effectués et du temps mis pour parcourir le chemin. C'est d'ailleurs pour cette raison qu'on peut indiquer une altitude sur chacune des courbes de niveau.

### Courbes de niveau et énergie potentielle

Dans une centrale hydroélectrique, on récupère une partie de l'énergie potentielle de l'eau captée en altitude et relâchée en contrebas. L'énergie perdue par l'eau ( $\Delta E$ ) correspond à la masse d'eau ( $m$ ) multipliée par l'accélération gravitationnelle ( $g$ ) multipliée par la différence de hauteur (altitude) entre l'entrée et la sortie du tube ( $\Delta h$ ) au bout duquel on place une turbine,

$$\Delta E = mg\Delta h. \quad (1.4)$$

L'expression ci-dessus nous indique que l'énergie perdue ne dépend pas du trajet suivi par l'eau et donc du chemin suivi par le tube<sup>a</sup>.

*La quantité d'énergie convertible en électricité peut par contre en dépendre.*

### Activité

#### 1.2.2 Courbes de niveau et gradient

On part de trois piliers sur lesquels reposent un triangle (et donc un plan), comme représenté à la figure 1.10. Les piliers sont positionnés sur un plan contenant les trois points  $P_0$ ,  $P_1$  et  $P_2$ .

On définit

$$\bar{a}_1 = \overrightarrow{P_0 P_1}, \quad (1.5)$$

$$\bar{a}_2 = \overrightarrow{P_0 P_2}. \quad (1.6)$$

La hauteur du pilier reposant sur le point  $P_i$  est notée  $h_i$ , avec  $i = 1, 2, 3$ .

### Question

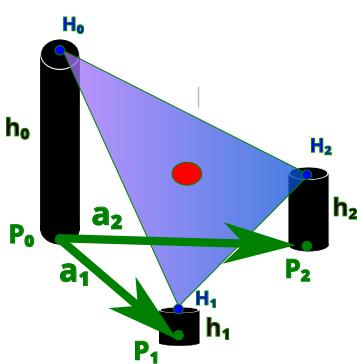
On demande de trouver la direction de plus grande pente sur ce plan, en deux temps :

1. définir la direction des courbes de niveaux au moyen d'un vecteur  $\bar{p}$ ;
2. définir la direction de plus grande pente, au moyen d'un vecteur  $\bar{g}$ .

On demande, ensuite, de calculer les différences de hauteur  $h_1 - h_0$ ,  $h_2 - h_0$  et  $h_2 - h_1$  au départ de  $\bar{g}$ , puis de déterminer un lien entre le vecteur  $g$  et la variation de hauteur dans une direction quelconque.



**FIGURE 1.10 :** Plan reposant sur trois piliers de hauteurs  $h_0$ ,  $h_1$  et  $h_2$ . On s'intéresse à la direction dans laquelle une balle (en rouge) roulera sur le plan si on la lâche sans vitesse initiale.



### Résolution

**Stratégie** Avant d'entamer le calcul, nous allons définir notre stratégie pour identifier les courbes de niveau. Nous verrons que les courbes de niveau d'un plan sont toutes parallèles. Comme indiqué sur la figure 1.11, nous pouvons choisir un point  $Q_1$  entre  $P_0$  et  $P_1$  et calculer la hauteur  $h(Q_1)$  du plan en ce point. La courbe de niveau passant par ce point est située dans le plan vertical dessiné sur cette figure. Ce plan coupe la droite  $P_0P_2$  au point  $Q_2$ . Pour identifier la position du point  $Q_2$  en fonction de la position du point  $Q_1$ , nous allons imposer que la hauteur de ces deux points soit identique, ce qui garantit qu'elles appartiennent à la même courbe de niveau. La position du point  $Q_1$  sera définie par rapport à  $P_0P_1$ . Pour cela, nous introduisons une variable sans dimension,  $u_1$  qui varie de 0 à 1 lorsque  $Q_1$  se déplace de  $P_0$  à  $P_1$ . Nous introduirons de manière similaire une coordonnée  $u_2$  permettant de repérer la position du point  $Q_2$  sur  $P_0P_2$ .

**Calculs** Comme nous venons de l'expliquer, nous notons  $u_i$  la position du point  $Q_i$  depuis  $P_0$  (voir figure 1.11),

$$\overline{P_0Q_i} = u_i \bar{a}_i, \quad (1.7)$$

$$h(Q_i) = h_0 + u_i \Delta h_i, \quad (1.8)$$

avec  $a_i = \|\bar{a}_i\| = \|\overline{P_0P_i}\|$  la distance entre les bases des piliers 0 et  $i$ , et  $\Delta h_i = h_i - h_0$ . Les points  $Q_1$  et  $Q_2$  sont situés respectivement sur les droites  $P_0P_1$  et  $P_0P_2$ .

Comme une courbe de niveau relie deux points de même hauteur, on peut établir un lien entre l'intersection d'une courbe de niveau et le plan vertical passant par  $P_0$  et  $P_1$  et l'intersection de cette même courbe de niveau avec le plan vertical passant par  $P_0$  et  $P_2$ . Vérifiez que si on impose

$$h(Q_1) = h(Q_2), \quad (1.9)$$

on obtient

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{\Delta h_2}{\Delta h_1}. \quad (1.10)$$

Suggestion : écrire (1.8) pour  $i = 1$  et pour  $i = 2$  et insérer ces deux expressions dans (1.9) et constater que  $h_0$  disparaît.

La projection de la courbe de niveau correspondant à  $Q_1$  dans le plan  $P_0P_1P_2$  est donc

$$\bar{p} = \overline{P_0Q_2} - \overline{P_0Q_1} \quad (1.11)$$

$$= u_2 \bar{a}_2 - u_1 \bar{a}_1 \quad (1.12)$$

$$= u_2 \left( \bar{a}_2 - \frac{u_1}{u_2} \bar{a}_1 \right) \quad (1.13)$$

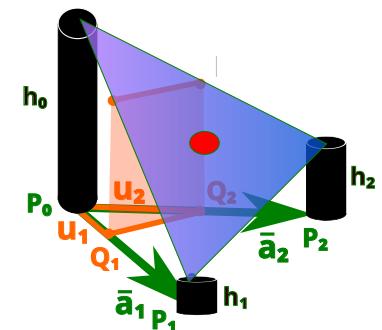
$$= u_2 \left( \bar{a}_2 - \frac{\Delta h_2}{\Delta h_1} \bar{a}_1 \right) \quad (1.14)$$

$$= \frac{u_2}{\Delta h_1} (\Delta h_1 \bar{a}_2 - \Delta h_2 \bar{a}_1). \quad (1.15)$$

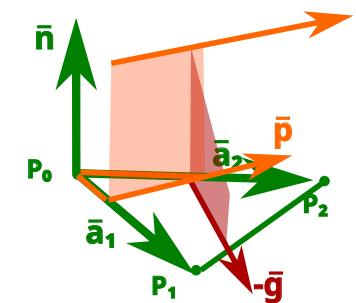


L01P3

**FIGURE 1.11 :** Pour  $Q_1$  donné à une distance  $u_1$  de  $P_0$  sur  $P_0P_1$ , on identifie  $Q_2$  tel que la hauteur du plan soit la même à la verticale des points  $Q_1$  et  $Q_2$ .



**FIGURE 1.12 :** Les points  $Q_1$  et  $Q_2$  correspondant à une même hauteur définissent la direction de  $\bar{p}$  parallèle aux courbes de niveau. Le vecteur gradient lui est orthogonal. Pour calculer  $\pm \bar{g}$ , on définit  $\bar{n}$  orthogonal à  $\bar{a}_1$  et  $\bar{a}_2$ .



Comme on s'intéresse seulement à la direction de  $\bar{p}$ , on peut écrire

$$\bar{p}(u_2) = \alpha(u_2)(\Delta h_1 \bar{a}_2 - \Delta h_2 \bar{a}_1), \quad (1.16)$$

qui montre bien que tous les vecteurs  $\bar{p}$  correspondant aux courbes de niveau sont parallèles. Cette conclusion résulte du fait que le facteur  $\alpha(u_2)$  n'a pas d'impact sur la direction du vecteur  $\bar{p}$  et que les autres grandeurs apparaissant dans l'expression ne dépendent pas de  $u_1$  ou  $u_2$ . Ceci est représenté à la figure 1.12.

Le vecteur  $\bar{g}$ , qui correspond à la *direction de plus grande pente*, est perpendiculaire aux courbes de niveau. Les courbes de niveau sont en effet les directions de *pente nulle*. Pour calculer la direction perpendiculaire à  $\bar{p}$ , on peut utiliser le produit vectoriel comme suit.

**Normale au plan  $P_0P_1P_2$**  On définit un troisième axe perpendiculaire au plan de  $\bar{a}_1$  et  $\bar{a}_2$ ,

$$\bar{n} = \beta \bar{a}_1 \times \bar{a}_2, \quad (1.17)$$

où  $\beta$  est une constante permettant de normaliser  $\bar{n}$  pour que cette normale soit unitaire. On peut ensuite calculer la direction perpendiculaire à  $\bar{p}$  en prenant

$$\bar{g} = \gamma \bar{p} \times \bar{n}, \quad (1.18)$$

où  $\gamma$  est une constante de normalisation qu'on ajustera plus tard.

### ■ Petit poisson rouge... peut-on passer la barre rouge ?

Oui, à condition de répondre à ma question !

Dans quel espace se trouve le vecteur  $\bar{g}$ ? Est-ce dans l'espace bidimensionnel du triangle  $P_0P_1P_2$  ou dans l'espace tridimensionnel dans lequel on représente le graphe de  $h$ ?

Dans quel espace se trouve  $\bar{p}$ ?

*Introduction de vecteurs orthogonaux aux  $\bar{a}_i$ .* On voit que le calcul détaillé de  $\bar{g}$  fait apparaître  $\bar{n} \times \bar{a}_1$  et  $\bar{n} \times \bar{a}_2$ . Nous allons donner un nom à ces deux vecteurs, qu'on normalise par rapport au *produit mixte*  $\bar{n} \cdot (\bar{a}_1 \times \bar{a}_2)$ ,

$$\bar{c}_1 = -\frac{\bar{n} \times \bar{a}_2}{\bar{n} \cdot (\bar{a}_1 \times \bar{a}_2)}, \quad (1.19)$$

$$\bar{c}_2 = \frac{\bar{n} \times \bar{a}_1}{\bar{n} \cdot (\bar{a}_1 \times \bar{a}_2)}. \quad (1.20)$$

Rappelons que le *produit mixte* peut s'écrire de différentes manières :

$$[\bar{n}, \bar{a}_1, \bar{a}_2] = \bar{n} \cdot (\bar{a}_1 \times \bar{a}_2) = \bar{a}_1 \cdot (\bar{a}_2 \times \bar{n}) = \bar{a}_2 \cdot (\bar{n} \times \bar{a}_1), \quad (1.21)$$

et qu'on a également

$$[\bar{n}, \bar{a}_1, \bar{a}_2] = -[\bar{n}, \bar{a}_2, \bar{a}_1]. \quad (1.22)$$

Par construction,  $\bar{c}_1$  est orthogonal à  $\bar{a}_2$  et  $\bar{c}_2$  est orthogonal à  $\bar{a}_1$  :

$$\bar{c}_1 \cdot \bar{a}_2 = \bar{c}_2 \cdot \bar{a}_1 = 0. \quad (1.23)$$

Par ailleurs, la normalisation par le produit mixte permet d'écrire

$$\bar{c}_1 \cdot \bar{a}_1 = \bar{c}_2 \cdot \bar{a}_2 = 1. \quad (1.24)$$

La base  $c$  des vecteurs  $\{\bar{c}_i\}$  est appelée « base conjuguée » de la base  $a$  des vecteurs  $\{\bar{a}_i\}$ . Elle permet d'exprimer simplement le vecteur  $\bar{g}$  qui est l'objet de notre calcul. Repartant de (1.18), on a

$$\bar{g} = \gamma \bar{p} \times \bar{n} \quad (1.25)$$

$$= \gamma \alpha (\Delta h_1 \bar{a}_2 - \Delta h_2 \bar{a}_1) \times \bar{n} \quad (1.26)$$

$$= \gamma' (\Delta h_1 \bar{a}_2 \times \bar{n} - \Delta h_2 \bar{a}_1 \times \bar{n}) \quad (1.27)$$

$$= \gamma'' (\Delta h_1 \bar{c}_1 + \Delta h_2 \bar{c}_2), \quad (1.28)$$

où les constantes  $\gamma, \gamma', \gamma''$  n'ont pas d'intérêt pour la suite.

**Direction de la plus grande pente** Nous venons d'identifier le vecteur du plan  $\bar{a}_1, \bar{a}_2$  qui correspond à la direction de plus grande pente du plan donné par les hauteurs  $h_i$ . C'est la direction que nous recherchions. On constate que les vecteurs  $\bar{g}$  et  $\bar{p}$  constituent une autre base de ce plan que  $(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$ . Cette base

$$\bar{p} \propto \Delta h_1 \bar{a}_2 - \Delta h_2 \bar{a}_1, \quad (1.29)$$

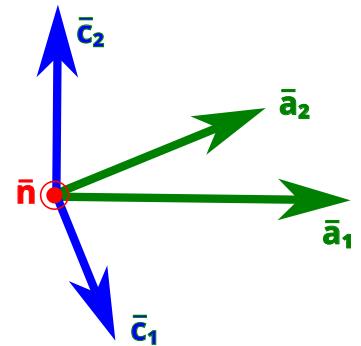
$$\bar{g} \propto \Delta h_1 \bar{c}_1 + \Delta h_2 \bar{c}_2, \quad (1.30)$$

est orthogonale et liée à l'inclinaison du plan. Elle est donc intrinsèque en ce sens qu'on peut la calculer au départ de n'importe quelle base  $(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$ , on doit toujours parvenir au même résultat.

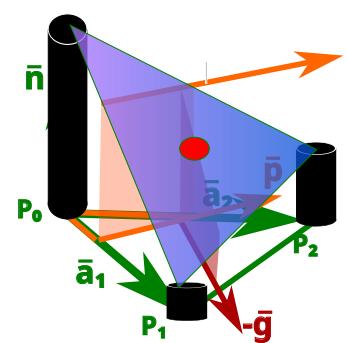
### 1.2.3 Utilisation du vecteur de plus grande pente

Ce vecteur est utile pour donner des réponses à certains problèmes physiques, souvent liés à la direction dans laquelle une force s'applique et donc la direction dans laquelle un objet soumis à cette force accélérerait. Ce serait le cas d'un plan incliné sur lequel on pose une bille (figure 1.14). Lorsqu'on lâche la bille, on sait qu'elle va aller vers le bas, mais pour donner une direction exacte, on doit identifier la direction de plus grande pente. Les courbes de niveaux sont parallèles à  $\bar{p}$  qui se calcule facilement. Il est toutefois nécessaire d'utiliser un produit vectoriel ou un calcul équivalent pour définir les vecteurs de la base conjuguée qui permettent de calculer le gradient au départ de n'importe quelle base.

**FIGURE 1.13 :** Base  $c$  conjuguée de la base  $a$ . Elle est définie par les relations  $\bar{c}_i \cdot \bar{a}_j = 0$  si  $i \neq j$  et  $\bar{c}_i \cdot \bar{a}_i = 1$  pour  $i = 1, 2$ . Pour que la base  $a$  et la base  $c$  aient la même orientation, on impose également que les *produits mixtes*  $[\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{n}]$  et  $[\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{n}]$  soient de même signe. La normale unitaire  $\bar{n}$  est perpendiculaire au plan de la page et pointe vers vous.



**FIGURE 1.14 :** La projection du gradient sur le plan incliné nous indique dans quelle direction partira la bille : celle de plus grande pente, indiquée par  $-\bar{g}$ .



### 1.2.4 Détermination de la pente dans une direction choisie

À ce stade, comme on s'intéresse uniquement à la direction du vecteur  $\bar{g}$ , la constante  $\gamma''$  n'a pas d'importance. Observons que

$$\bar{a}_1 \cdot \bar{g} = \gamma'' \Delta h_1, \quad (1.31)$$

$$\bar{a}_2 \cdot \bar{g} = \gamma'' \Delta h_2. \quad (1.32)$$

En choisissant  $\gamma'' = 1$ , on peut donc retrouver les variations de hauteur dans les directions  $\bar{a}_1$  et  $\bar{a}_2$  au départ du vecteur  $\bar{g} = \sum_i \bar{c}_i \Delta h_i$ ,

$$\Delta h_i = \bar{a}_i \cdot \bar{g} \quad (i = 1, 2). \quad (1.33)$$

**Variation dans une direction quelconque** Le vecteur  $\bar{g}$  ne dépend pas, *a priori*, de la position des points  $P_0, P_1, P_2$  choisis pour le calcul de la plus grande pente, cette pente étant uniquement liée à l'inclinaison du plan. Le fait qu'on retrouve la variation selon le vecteur  $\bar{a}_i$  par projection de  $\bar{a}_i$  sur  $\bar{g}$  doit donc être une propriété généralisable à n'importe quel vecteur. On peut vérifier cela pour une direction dans laquelle les calculs sont simples : la direction  $P_1P_2$ . On a

$$\overline{P_1P_2} = \bar{a}_2 - \bar{a}_1, \quad (1.34)$$

$$\begin{aligned} \overline{P_1P_2} \cdot \bar{g} &= (\bar{a}_2 - \bar{a}_1) \cdot (\Delta h_1 \bar{c}_1 + \Delta h_2 \bar{c}_2) \\ &= \Delta h_2 - \Delta h_1 = (h_2 - h_0) - (h_1 - h_0) = h_2 - h_1, \end{aligned} \quad (1.35)$$

qui est bien la différence de niveau lorsque l'on se déplace de  $P_1$  à  $P_2$ .

### 1.2.5 Opérateur gradient et dérivées directionnelles

Ci-dessus, nous avons calculé la direction de plus grande pente d'une fonction scalaire en supposant que cette fonction est linéaire.

Nous avons défini le gradient de sorte que

$$\bar{g} = \bar{c}_1 \Delta h_1 + \bar{c}_2 \Delta h_2 = \sum_i \bar{c}_i [h(\bar{r}_0 + \bar{a}_i) - h(\bar{r}_0)]. \quad (1.36)$$

Remarquons que cette définition oriente le gradient dans le sens de la montée.<sup>a</sup>

Comme on fait l'hypothèse que  $h$  est linéaire, on peut également noter les écarts de hauteur par  $\Delta h_i = h(\bar{a}_i)$ , ce qui donne une notation intéressante car elle sera similaire pour les différents types d'opérateurs que nous considérerons dans ce chapitre,

$$\bar{g} = \bar{c}_1 h(\bar{a}_1) + \bar{c}_2 h(\bar{a}_2), \quad (1.37)$$

qui conduiront aux expressions (2.35) et (2.73).

Dans un problème classique, les surfaces peuvent ressembler plus à celles d'un parc à rollers qu'à des plans. Dans ces cas, comme expliqué en 1.1, on peut découper les surfaces en petits triangles.

*En jargon plus technique, on pourrait dire que le gradient correspond à la densité linéique d'accroissement.*

Chaque triangle est parfaitement plan et on y calcule le gradient comme ci-dessus. Pour être certain de pouvoir assimiler la surface localement à un plan, on doit choisir un triangle très petit. L'hypothèse de la physique mésoscopique est qu'on peut trouver un triangle suffisamment petit pour que la fonction évaluée varie linéairement sur la surface du triangle, mais suffisamment grand pour que les propriétés de la matière sur ce volume soient les mêmes que sur un volume plus grand, ce qui revient à dire que la taille du triangle considéré est beaucoup plus grande que celle d'un atome, d'une molécule ou d'une maille cristalline.

### Calcul du gradient sur un triangle mésoscopique

Que devient le gradient si on applique le calcul précédent sur un triangle plus petit? Diminuons les côtés  $\bar{a}_1$  et  $\bar{a}_2$  et remplaçons-les par des côtés plus petits,

$$\bar{a}'_1 = \eta_1 \bar{a}_1 \quad (0 < \eta_1 < 1), \quad (1.38)$$

$$\bar{a}'_2 = \eta_2 \bar{a}_2 \quad (0 < \eta_2 < 1). \quad (1.39)$$



L01P5



La base conjuguée se calcule en appliquant (1.19)–(1.20) et en utilisant  $\bar{a}'_i$  au lieu de  $\bar{a}_i$ . On obtient

$$\bar{c}'_1 = \frac{\eta_2 \bar{a}_2 \times \bar{n}}{\bar{n} \cdot (\eta_1 \bar{a}_1 \times \eta_2 \bar{a}_2)} = \frac{\eta_2}{\eta_1 \eta_2} \bar{c}_1 = \frac{\bar{c}_1}{\eta_1}, \quad (1.40)$$

$$\bar{c}'_2 = \frac{\bar{n} \times \eta_1 \bar{a}_1}{\bar{n} \cdot (\eta_1 \bar{a}_1 \times \eta_2 \bar{a}_2)} = \frac{\eta_1}{\eta_1 \eta_2} \bar{c}_2 = \frac{\bar{c}_2}{\eta_2}. \quad (1.41)$$

Le gradient calculé avec ces vecteurs est donc

$$\bar{g} = \bar{c}'_1 (h(\bar{r}_0 + \bar{a}'_1) - h(\bar{r}_0)) + \bar{c}'_2 (h(\bar{r}_0 + \bar{a}'_2) - h(\bar{r}_0)) \quad (1.42)$$

$$= \bar{c}_1 \frac{h(\bar{r}_0 + \eta_1 \bar{a}_1) - h(\bar{r}_0)}{\eta_1} + \bar{c}_2 \frac{h(\bar{r}_0 + \eta_2 \bar{a}_2) - h(\bar{r}_0)}{\eta_2}. \quad (1.43)$$

Si la fonction  $h$  est linéaire, on retrouve bien (1.36), ce qui est attendu puisque la définition du gradient est intrinsèque et ne doit donc pas dépendre du choix de  $\bar{a}_1$  et  $\bar{a}_2$ .

### Dérivée directionnelle

Lorsque la fonction  $h$  n'est pas linéaire, comme expliqué ci-avant, on suppose qu'il existe des valeurs de  $\eta_1$  et  $\eta_2$  correspondant à l'échelle mésoscopique et pour lesquelles la variation de  $h$  entre  $\bar{r}_0$  et  $\bar{r}_0 + \eta_i \bar{a}_i$  est linéaire, ce qui permet d'écrire

$$h(\bar{r}_0 + \eta_i \bar{a}_i) = h(\bar{r}_0) + \eta_i \frac{\partial h}{\partial \bar{a}_i}, \quad (1.44)$$

où l'on a introduit la dérivée directionnelle de  $h$  dans la direction  $\bar{a}_i$ ,<sup>a</sup> et par suite

$$\bar{g} = \bar{c}_1 \frac{\partial h}{\partial \bar{a}_1} + \bar{c}_2 \frac{\partial h}{\partial \bar{a}_2}. \quad (1.45)$$



L01P6



<sup>a</sup> Cette dérivée directionnelle de  $h$  dans la direction  $\bar{a}$  est définie par

$$\frac{\partial h}{\partial \bar{a}} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{h(\bar{r} + \eta \bar{a}) - h(\bar{r})}{\eta} = \left. \frac{\partial h(\bar{r} + \eta \bar{a})}{\partial \eta} \right|_{\eta=0}.$$

## Opérateur gradient

Sur la base du résultat précédent, on peut définir un opérateur  $\overrightarrow{\text{grad}}$  qui appliqué à une fonction  $h$  donnée, renvoie son gradient

$$\overrightarrow{\text{grad}} h = \bar{c}_1 \frac{\partial h}{\partial \bar{a}_1} + \bar{c}_2 \frac{\partial h}{\partial \bar{a}_2}. \quad (1.46)$$

Les dérivées directionnelles sont des opérateurs agissant sur la fonction  $h$ . On peut donc définir l'opérateur gradient comme

$$\overrightarrow{\text{grad}} \cdot = \bar{c}_1 \frac{\partial \cdot}{\partial \bar{a}_1} + \bar{c}_2 \frac{\partial \cdot}{\partial \bar{a}_2}. \quad (1.47)$$

### 1.2.6 Opérateur gradient en trois dimensions

Lorsque l'espace des paramètres est à trois dimensions, le raisonnement que nous venons d'effectuer sur un triangle se généralise à un tétraèdre dont les arêtes sont  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ , et l'opérateur gradient prend la forme

$$\overrightarrow{\text{grad}} \cdot = \bar{c}_1 \frac{\partial \cdot}{\partial \bar{a}_1} + \bar{c}_2 \frac{\partial \cdot}{\partial \bar{a}_2} + \bar{c}_3 \frac{\partial \cdot}{\partial \bar{a}_3}, \quad (1.48)$$

où la base des  $\bar{c}_i$  est conjuguée de la base  $\bar{a}_i$ , ce qui implique<sup>a</sup>

$$\bar{a}_i \cdot \bar{c}_j = 1 \quad (i = j), \quad (1.49)$$

$$\bar{a}_i \cdot \bar{c}_j = 0 \quad (i \neq j). \quad (1.50)$$

On utilise souvent le *delta de Kronecker* qui se définit par

$$\delta_{ij} = 1 \quad (i = j), \quad (1.51)$$

$$\delta_{ij} = 0 \quad (i \neq j). \quad (1.52)$$

L'utilisation de ce symbole permet d'écrire de manière très compacte que la base  $c$  est conjuguée de la base  $a$  si

$$\bar{a}_i \cdot \bar{c}_j = \delta_{ij}. \quad (1.53)$$

On constate que cette définition implique que la base  $a$  est conjuguée de la base  $c$ . Les deux bases sont donc réciproquement conjuguées<sup>b</sup>. La base conjuguée  $c$  peut se calculer via

$$\bar{c}_1 = \frac{\bar{a}_2 \times \bar{a}_3}{[\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3]}, \quad (1.54)$$

$$\bar{c}_2 = \frac{\bar{a}_3 \times \bar{a}_1}{[\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3]}, \quad (1.55)$$

$$\bar{c}_3 = \frac{\bar{a}_1 \times \bar{a}_2}{[\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3]}. \quad (1.56)$$

## Opérateur gradient

$$\overrightarrow{\text{grad}} f \Big|_{\vec{r}} = \sum_i \bar{c}_i \frac{\partial f}{\partial \bar{a}_i} \Big|_{\vec{r}} = \sum_i \bar{c}_i \frac{\partial}{\partial \eta} f(\vec{r} + \eta \bar{a}_i) \Big|_{\eta=0} \quad \bar{a}_i \cdot \bar{c}_j = \delta_{ij}$$

Le gradient est utilisé dans de nombreux domaines, y compris en intelligence artificielle. Dans ces méthodes de recherche et d'optimisation, l'espace est souvent à plus que trois paramètres. La définition de la base conjuguée via  $\bar{a}_i \cdot \bar{c}_j = \delta_{ij}$  est extensible à n'importe quel nombre de dimensions, ce qui n'est pas le cas du calcul utilisant le produit vectoriel. La résolution du système au moyen de déterminants se généralise facilement.

En algèbre, on parle de bases duals ou b réciproques, la base  $a$  étant utilisée pour décrire les vecteurs et la base  $c$  servant à décrire les opérateurs qui agissent sur ces vecteurs. On note souvent  $\vec{e}_i = \bar{a}_i$  et  $\vec{e}^i = \bar{c}_i$ .

### 1.2.7 Opérateur gradient dans des axes orthonormés

La définition du gradient se simplifie lorsque les vecteurs de la base sur laquelle on calcule les variations d'une fonction est orthonormée. En effet, supposons qu'on utilise une base  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$  qui soit orthonormée. L'orthonormalisation correspond aux relations

$$\bar{a}_i \cdot \bar{a}_j = \delta_{ij}, \quad (1.57)$$

qui montrent que la base  $a$  est sa propre base conjuguée. Dans ce cas de figure, l'opérateur gradient prend la forme

$$\overrightarrow{\text{grad}} \cdot = \bar{a}_1 \frac{\partial \cdot}{\partial \bar{a}_1} + \bar{a}_2 \frac{\partial \cdot}{\partial \bar{a}_2} + \bar{a}_3 \frac{\partial \cdot}{\partial \bar{a}_3}. \quad (1.58)$$

### 1.2.8 Gradient, dérivées partielles et opérateur nabla

Dans le cadre de la paramétrisation en coordonnées cartésiennes, nous choisissons de représenter un point par le vecteur

$$\vec{r} = x \bar{1}_x + y \bar{1}_y + z \bar{1}_z, \quad (1.59)$$

dans un repère fixe  $Oxyz$ .

Une fonction  $h$  dépendant d'un paramètre vectoriel  $\vec{r}$  peut aussi s'écrire sous la forme d'une fonction  $f$  de trois variables<sup>a</sup>

$$h(\vec{r}) = h(x \bar{1}_x + y \bar{1}_y + z \bar{1}_z) = f(x, y, z). \quad (1.60)$$

Dans ce cas, on peut calculer le gradient comme précédemment avec  $\bar{a}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \bar{1}_x$ , et de manière similaire,  $\bar{a}_2 = \bar{1}_y$  et  $\bar{a}_3 = \bar{1}_z$ .

La dérivée directionnelle selon  $\bar{a}_1 = \bar{1}_x$  en  $\vec{r}_0$  correspond à

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{g(\vec{r}_0 + \eta \bar{1}_x) - g(\vec{r}_0)}{\eta} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \eta, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\eta} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0, z_0)}. \quad (1.61)$$

On obtient des résultats similaires pour  $y$  et  $z$ <sup>b</sup>.

On utilise généralement l'opérateur  $\nabla$ , qui se lit « nabla », pour désigner le gradient calculé au moyen de dérivées partielles,

$$\nabla f(x, y, z) = \bar{1}_x \frac{\partial f}{\partial x} + \bar{1}_y \frac{\partial f}{\partial y} + \bar{1}_z \frac{\partial f}{\partial z}. \quad (1.62)$$

Il faut noter que la forme de l'opérateur  $\nabla$  dépend de la paramétrisation de l'espace choisi. Les formes en coordonnées cylindriques et sphériques sont données respectivement en annexe, aux pages IV.22 et IV.24.

### 1.2.9 Approche classique

Finalement, notez qu'une démarche plus habituelle consiste à définir l'opérateur gradient au départ de la définition de dérivée directionnelle et d'en déduire que le gradient d'une fonction désigne sa direction de plus grande pente. Une telle approche est reprise à l'annexe C.1, p. IV.13.

a Les fonctions  $f$  et  $g$  sont différentes d'un point de vue physique, car  $g$  dépend d'un argument qui est un vecteur, indépendant d'un repère de référence et  $f$  dépend de trois variables scalaires qui définissent la position d'un point dans un repère. Dans un langage informatique typé, comme Julia, on devrait définir différemment ces deux fonctions :  $f(r::Vector)$  et  $g(x::Real, y::Real, z::Real)$ .

b On a introduit le concept de dérivée directionnelle précédemment. La dérivée directionnelle selon  $\bar{1}_x$  est notée  $\partial \cdot / \partial \bar{1}_x$ . On voit ici, que cette dérivée est directement liée à la dérivée partielle en  $x$ , notée elle  $\partial \cdot / \partial x$ . Il est fréquent que des utilisateurs expérimentés ne s'embarrassent pas de cette distinction, sachant quelle définition utiliser en fonction du contexte.

La démarche suivie ci-dessus part du problème physique qui est d'identifier les courbes de niveau liées à une fonction et d'en déduire la direction de plus grande pente, ce qui fait apparaître l'expression la plus générale possible du gradient en coordonnées non orthogonales et non orthonormées, non liée à une paramétrisation particulière de l'espace. Tout en étant générale, cette approche est en prise directe avec un problème physique très simple et donc très régulièrement rencontré.

### 1.2.10 Gradient et potentiel

On a déjà évoqué, à la section 1.2.1 que l'énergie potentielle perdue par un volume d'eau descendant d'une montagne ne dépend que de la différence d'altitude.

Cette conclusion est liée au fait qu'on puisse définir une altitude en chaque point et que l'énergie potentielle ne dépende, pour la gravitation, que de l'altitude selon l'expression  $V = mgh$ , où  $V$  est l'énergie potentielle,  $m$ , la masse de fluide considéré,  $g$  l'accélération de la pesanteur et  $h$  l'altitude.

Nous allons voir à la section 2.1 l'intérêt de la notion de gradient pour le calcul de la circulation et comment cette notion de circulation est liée à la notion de champ dérivant d'un potentiel.

## 1.3 Le coin des assistant·es

### Approche mésoscopique et gradient

En physique, il est souvent utile de subdiviser le système étudié en plein de « petits morceaux ». Ces morceaux, appelés éléments, sont suffisamment grands pour supposer que la matière est continue, mais sont aussi suffisamment petits pour que les quantités physiques évoluent linéairement dans cet élément (approche mésoscopique). La physique de l'élément est alors relativement simple à analyser. Ensuite, on additionne la contribution de tous les éléments en intégrant sur le système entier (un contour, une surface ou un volume), ce qui nous donne le comportement macroscopique de la physique du système.

En général, les fonctions étudiées en physique dépendent de plusieurs variables. Pour décrire les variations de telles fonctions dans les directions des vecteurs de base, on utilise un opérateur mathématique nommé *gradient*. Cet opérateur vectoriel nous donne la direction de plus forte pente de la fonction et est orienté dans le sens de la croissance de la pente. Si on multiplie l'opérateur par  $-1$ , alors il est orienté dans le sens de la décroissance de la pente. Le gradient est donc une densité linéaire d'accroissement orientée. Le gradient est toujours perpendiculaire aux courbes de niveaux de la fonction (courbe le long desquelles la fonction ne varie pas).

Dans une base orthogonale 3D, le gradient se définit comme suit,

$$\overrightarrow{\text{grad}} \cdot = \bar{c}_1 \frac{\partial \cdot}{\partial \bar{a}_1} + \bar{c}_2 \frac{\partial \cdot}{\partial \bar{a}_2} + \bar{c}_3 \frac{\partial \cdot}{\partial \bar{a}_3}, \quad (1.63)$$

où  $\bar{a}_i \cdot \bar{c}_j = \delta_{ij}$ . Dans une base orthonormée 3D ( $\bar{a}_i \cdot \bar{a}_j = \delta_{ij}$ ) et le gradient devient

$$\overrightarrow{\text{grad}} \cdot = \bar{a}_1 \frac{\partial \cdot}{\partial \bar{a}_1} + \bar{a}_2 \frac{\partial \cdot}{\partial \bar{a}_2} + \bar{a}_3 \frac{\partial \cdot}{\partial \bar{a}_3}. \quad (1.64)$$

Comme exemple, prenons le cas du champ électrostatique :  $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ . Comme le champ électrique est donné par le gradient du potentiel, nous comprenons que le champ électrique pointe dans la direction de plus grande variation de potentiel. Le signe « $-$ » nous indique que le champ électrique pointe dans le sens d'une décroissance du potentiel. Enfin, nous notons qu'il est perpendiculaire aux équipotentielles (courbes de niveaux de la fonction  $V$ ).

### Nabla dans différentes paramétrisations

À l'annexe C.1, on trouve les expressions de  $\nabla$  dans différentes paramétrisations,

$$\vec{\nabla}_r = \vec{1}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{1}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{1}_z \frac{\partial}{\partial z}, \quad (1.65)$$

$$\vec{\nabla}_c = \vec{1}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \vec{1}_\theta \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{1}_z \frac{\partial}{\partial z}, \quad (1.66)$$

$$\vec{\nabla}_s = \vec{1}_R \frac{\partial}{\partial R} + \vec{1}_\theta \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{1}_\varphi \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (1.67)$$

qui correspondent aux paramétrisations de l'espace

$$\vec{R}_r(x, y, z) = x \vec{1}_x + y \vec{1}_y + z \vec{1}_z, \quad (1.68)$$

$$\vec{R}_c(\rho, \theta, z) = \rho \cos \theta \vec{1}_x + \rho \sin \theta \vec{1}_y + z \vec{1}_z, \quad (1.69)$$

$$\vec{R}_s(R, \theta, \varphi) = R \sin \theta \cos \varphi \vec{1}_x + R \sin \theta \sin \varphi \vec{1}_y + R \cos \theta \vec{1}_z. \quad (1.70)$$

## 1.4 Questions théoriques

1. Sachant que la chaleur se déplace par conduction des zones chaudes vers les zones froides, indiquez la direction de la densité de flux thermique  $\vec{\Phi}$ , connaissant la distribution de température  $T$  dans un matériau homogène.
2. Donnez l'expression qui relie le potentiel électrique  $V$  et le champ électrique  $\vec{E}$ .
3. Sur une piste de planche à roulette, on pose une boule pétanque soumise à l'attraction gravitationnelle de la terre. Indiquez le lien entre la direction prise par la boule et l'équation du relief  $z = h(x, y)$ , où  $(x, y)$  sont les coordonnées cartésiennes au sol de la piste, et  $z$  la direction verticale.

## 1.5 Exercices

### Exercice 1.1 Calculs de gradients

Appliquez la définition du gradient pour calculer les expressions suivantes :

- $\overrightarrow{\text{grad}}(x^2 - y^2 + z) \Big|_{\vec{r}=\vec{0}}$ ;
- $\overrightarrow{\text{grad}}(x^2 - y^2 + z) \Big|_{\vec{r}=\vec{1}_x}$ ;
- $\vec{1}_z \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(x^2 - y^2 + z) \Big|_{\vec{r}=\vec{1}_x}$ ;
- $\overrightarrow{\text{grad}}(\rho^2 + \theta z) \Big|_{\vec{r}=\vec{1}_\rho}$ ;
- $\overrightarrow{\text{grad}}R \Big|_{\vec{r}=\vec{1}_y}$ ;
- $\overrightarrow{\text{grad}}\theta \Big|_{\vec{r}=\rho_0 \vec{1}_\rho}$ .

Remarque : dans un problème physique, les quantités  $x, y, z, \rho, R$  ont les dimensions d'une longueur. On ne prend pas cette dimension en compte dans cet exercice-ci.

### Exercice 1.2 Gradients de fonctions

Calculer le gradient des fonctions suivantes :

- $f(x, y, z) = ax + by + cz$ ;
- $g(\vec{r}) = \vec{k} \cdot \vec{r}$ , avec  $\vec{k} = k_1 \vec{1}_x + k_2 \vec{1}_y + k_3 \vec{1}_z$ ;
- $h(R) = kR$ ;
- $m(\vec{r}) = u(\vec{k} \cdot \vec{r})$ ;
- $n(R) = 1/R$ .

### Exercice 1.3 Gradient et pente

On place une bille sur un plan passant par les points de coordonnées  $(x, y, z) \in \{(0, 0, 0), (1, 0, 3), (0, 1, 1)\}$ . On demande d'identifier la direction dans laquelle partira cette bille si on la lâche sans vitesse et la pente de la trajectoire suivie.

### Exercice 1.4 Gradient et potentiel

On considère les champs suivants, dérivant d'un potentiel scalaire. Pour chacun des champs, quel potentiel permet de retrouver ce champ :

- $\vec{E} = -\vec{a}_0$ , un champ constant;
- $\vec{F} = \frac{x\vec{1}_x + y\vec{1}_y + z\vec{1}_z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$ ;

### Exercice 1.5 Gradient et base conjuguée / duale

On considère la base des vecteurs  $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3$ , définis par

$$\bar{c}_1 = \frac{\bar{a}_2 \times \bar{a}_3}{[\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3]}, \quad \bar{c}_2 = \frac{\bar{a}_3 \times \bar{a}_1}{[\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3]}, \quad \bar{c}_3 = \frac{\bar{a}_1 \times \bar{a}_2}{[\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3]}. \quad (\text{E.1.1})$$

Calculez  $\vec{c}_2 \times \vec{c}_3$  et montrez que ce produit est parallèle à  $\vec{a}_1$ .

**Exercice 1.6 Gradient et dérivée directionnelle**

Calculez la dérivée temporelle de  $f(\vec{r} + \vec{a}t)$ ,

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\vec{r} + \vec{a}t). \quad (\text{E.1.2})$$

**Exercice 1.7 Gradient et paramétrisation de l'espace**

On considère une paramétrisation cylindrique de l'espace par la fonction  $\vec{R}_c(\rho, \theta, z)$ , définie par rapport à un repère cartésien par

$$\vec{R}_c(\rho, \theta, z) = \rho \cos \theta \vec{1}_x + \rho \sin \theta \vec{1}_y + z \vec{1}_z. \quad (\text{E.1.3})$$

Calculez la base des vecteurs  $(\vec{a}_\rho, \vec{a}_\theta, \vec{a}_z)$  définis respectivement par

$$\vec{a}_\rho = \frac{\partial \vec{R}_c}{\partial \rho}, \quad \vec{a}_\theta = \frac{\partial \vec{R}_c}{\partial \theta}, \quad \vec{a}_z = \frac{\partial \vec{R}_c}{\partial z}. \quad (\text{E.1.4})$$

Montrez que

$$\frac{\partial f(\vec{R}_c(\rho, \theta, z))}{\partial \rho} = \frac{\partial f}{\partial \vec{a}_\rho}, \quad \frac{\partial f(\vec{R}_c(\rho, \theta, z))}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial \vec{a}_\theta}, \quad \frac{\partial f(\vec{R}_c(\rho, \theta, z))}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial \vec{a}_z}. \quad (\text{E.1.5})$$

Calculez la base  $c$  conjuguée de la base  $a$  et donnez l'expression de  $\vec{\nabla}$  dans cette base, en fonction des dérivées directionnelles et en fonction des dérivées partielles.

**Récapitulatif des notions vues dans cette leçon**

Indispensable	Nécessaire	Intéressant
<ul style="list-style-type: none"><li>— Définition et signification du gradient.</li><li>— Théorème du gradient-potentiel.</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>— Savoir utiliser l'opérateur nabla en base cartésienne, en base cylindriques et en base sphériques.</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>— Différence conceptuelle entre <math>\overrightarrow{\text{grad}}</math> et <math>\nabla</math>.</li><li>— Savoir calculer <math>\nabla</math> en base cartésienne, en base cylindrique et en base sphérique.</li></ul>



# Physique mésoscopique : conservation et flux, circulation et entraînement

Leçon  
2

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux notions de flux et d'entraînement, qui sont omniprésentes en physique. Nous allons présenter ces notions sur des volumes mésoscopiques et nous en déduirons les expressions pour des volumes macroscopiques.

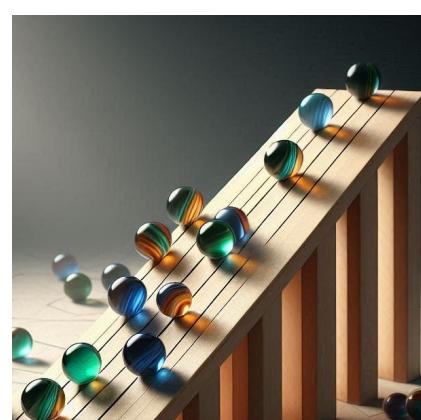
Les notions de flux et de circulation sont des notions globales liées à un ensemble. Nous allons voir comment elles sont associées aux notions locales de divergence et de gradient.

Ces notions sont centrales en physique car elles permettent de définir les lois de conservation et de transfert de matière, énergie, charge et autres quantités mesurables.

## ■ Pré-requis pour cette leçon ■

- |                     |                          |
|---------------------|--------------------------|
| — électrostatique   | — intégrale de contour   |
| — magnétostatique   | — intégrale de surface   |
| — charge            | — intégrale de volume    |
| — courant           | — élément de surface     |
| — champ électrique  | — élément de volume      |
| — champ magnétique  | — dérivée                |
| — flux              | — dérivée partielle      |
| — circulation       | — dérivée directionnelle |
| — produit scalaire  | — dérivation en cascade  |
| — produit vectoriel | — loi de Gauss           |
| — repère dextrogyre | — loi d'Ampère           |
| — repère levogyre   | — loi de Biot-Savart     |
| — surface orientée  |                          |

**FIGURE 2.1 :** Billes ayant des trajectoires indépendantes et dont les mouvements peuvent être décrits bille par bille sans tenir compte d'interactions.



## 2.1 Entraînement, circulation et rotationnel

Nous continuons notre investigation du monde mésoscopique. Dans celui-ci, des éléments sont mis en contact. C'est en effet le cas des volumes tétraédraux que nous avons définis précédemment. Pour illustrer les interactions entre volumes voisins, nous allons remplacer ces petits volumes par des billes. Dans certain cas, décrire la trajectoire d'un ensemble de billes revient à décrire la trajectoire de chaque bille séparément. C'est le cas, par exemple, si toutes les billes sont posées côté à côté sur un plan incliné et lâchées

**FIGURE 2.2 :** Des billes interagissant les unes avec les autres ne suivent pas la même trajectoire que si elles étaient seules. Ici, les billes du haut sont bloquées par celles du bas.



L02P2



**FIGURE 2.3 :** La circulation désigne le déplacement global des voitures le long d'un chemin, entre un point de départ et un point d'arrivée. On s'intéresse au mouvement dans le sens de la route, matérialisé par les lignes blanches.



toutes en même temps. C'est la situation illustrée à la figure 2.1, où l'on imagine que toutes les billes accéléreront dans la direction du gradient lié à l'énergie potentielle (perpendiculaire aux courbes de niveau) et auront des trajectoires indépendantes. Dans d'autres cas, comme celui de la figure 2.2, les billes interagissent les unes avec les autres et le mouvement d'une bille au sein de l'ensemble peut différer du mouvement qu'elle aurait seule. Dans ce cas, il faut tenir compte des interactions entre billes voisines. Ce cas est plus compliqué que le précédent, mais permet néanmoins de décrire de nombreuses situations physiques assez simplement.

Dans cette section et la suivante, nous introduisons des notions qui sont utiles pour décrire ces situations d'ensemble. Nous commencerons par la notion de circulation.

### 2.1.1 Circulation

Dans l'exemple de la centrale hydroélectrique présenté en 1.2.10, l'eau emprunte un chemin imposé par le tube de la centrale, puis elle est évacuée à son extrémité. On dit que l'eau circule de haut en bas. Le mot *circulation* est utilisé dans un sens précis pour un champ de vecteurs. Il se rapproche du sens de ce mot dans la vie de tous les jours, par exemple lorsqu'on parle de circulation automobile. Il faut néanmoins toujours bien distinguer l'usage courant d'un terme comme celui-ci avec son acception physique.

#### Notion de circulation dans la vie de tous les jours

Voici quelques phrases qui sont entendues souvent et qui vont nous servir de point de départ pour comprendre la notion de *circulation* :

- « La circulation automobile le long du boulevard Général Jacques est complètement à l'arrêt entre le rond-point Montgomery et l'avenue Buyl. »
- « Avenue Roosevelt, on observe une circulation fortement ralentie, à la hauteur de l'université. »
- « La circulation autour du rond-point Montgomery est à présent rétablie. »

La notion de circulation, illustrée à la figure 2.3, est liée à un axe routier, c'est-à-dire un *chemin* suivi par des voitures. Dans le premier exemple, on s'intéresse explicitement à la circulation automobile le long de cet axe, mais on pourrait tout aussi bien étudier la circulation piétonne, cycliste, etc. Notons que l'axe routier est généralement limité à une section : entre le rond-point et le bas de l'avenue pour le premier cas et, de manière moins précise, à la hauteur de l'université. Ce qui nous intéresse, c'est la vitesse des voitures le long de cet axe routier. Pour être encore plus précis, on ne s'intéresse pas à la vitesse latérale des voitures (qui correspondrait à un changement de bande), mais à la vitesse longitudinale, c'est-à-dire dans l'axe routier.

Entre le rond-point Montgomery et l'avenue Buyl, il y a plusieurs feux de circulation. Si l'on prend une mesure instantanée de la vitesse de tous les véhicules (par exemple via une application de guidage installée dans chaque véhicule), on observera une vitesse différente pour chacune des voitures : certaines sont à l'arrêt, d'autres en train de freiner, d'autres encore viennent de redémarrer car un feu de circulation est passé au vert. Sur la base de cet exemple, on se rend compte qu'il est difficile de déterminer l'état du trafic en utilisant une seule mesure au moyen d'un seul capteur placé dans une seule voiture. Pour avoir une idée plus globale de ce trafic, on peut calculer la vitesse moyenne le long de cet axe routier en sommant les vitesses de chacun des véhicules et en divisant par le nombre de véhicules. On peut aussi se contenter de sommer la vitesse de tous les véhicules présents le long de l'axe, sans diviser par le nombre total de véhicules. Cette dernière grandeur est plus intéressante que la moyenne si l'on veut évaluer le nombre de voitures parcourant le chemin au cours du temps. En effet, la vitesse moyenne sera la même qu'il y ait une ou mille voitures sur la route. La somme des vitesses de tous les véhicules nous donne une mesure combinée de la quantité de voitures le long de cet axe et de leur vitesse. Cette dernière quantité correspond, à un facteur dimensionnel près, à la notion de *circulation* du champ de vitesses le long du chemin suivi par les voitures.

### Définition formelle de la circulation

La notion de *circulation* en physique est liée à un champ de vecteur, et à un segment de courbe orientée. Dans l'exemple qui précède, le champ de vecteurs est la vitesse automobile et la courbe orientée est l'axe routier considéré entre deux points.

Dans la définition qui suit, on note par  $\gamma$  le chemin suivi et par  $\vec{F}$  le champ vectoriel considéré. La direction longitudinale du flux en chaque point correspond à l'élément d'arc  $d\vec{r}$ . Souvenez-vous, dans notre exemple, qu'on ne s'intéresse pas aux changements de bande des voitures, mais seulement à leur vitesse dans l'axe de la route. Cet axe est matérialisé par les lignes blanches tracées sur la route. C'est donc la composante de vitesse dans la direction de cette ligne qui nous intéresse. Autrement dit, on ne s'intéresse pas aux dépassements qui se font transversalement à la ligne blanche et on ne considère que la composante de vitesse d'une voiture qui est parallèle à la ligne blanche tracée sur la route à sa hauteur.

La circulation  $\mathcal{C}$  correspond à

$$\mathcal{C} = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad (2.1)$$

où le chemin  $\gamma$  est souvent défini par une paramétrisation. Il pourrait s'agir, par exemple, d'une paramétrisation au moyen des coordonnées  $(x, y, z)$  dans un repère fixe, données en fonction d'un paramètre  $t$  qui peut ou non être relié au temps. La position  $\vec{r}$  d'un

point de la courbe est alors

$$\vec{r} = x(t)\vec{1}_x + y(t)\vec{1}_y + z(t)\vec{1}_z \quad (t \in [t_0, t_1]), \quad (2.2)$$

ce qui permet d'exprimer l'élément d'arc

$$d\vec{r} = (x'(t)\vec{1}_x + y'(t)\vec{1}_y + z'(t)\vec{1}_z) dt, \quad (2.3)$$

et de calculer

$$\mathcal{C} = \int_a^b \vec{F}(x(t), y(t), z(t)) \cdot (x'(t)\vec{1}_x + y'(t)\vec{1}_y + z'(t)\vec{1}_z) dt. \quad (2.4)$$

Dans cette définition, on a utilisé F, première lettre du mot « field », qui veut dire « champ », en anglais, pour rappeler que la définition est valable pour n'importe quel type de champ. Même si le sens physique de la circulation d'un champ  $\vec{F}$  quelconque n'apparaît pas toujours aussi clairement que pour la vitesse de circulation des voitures, cette circulation se calcule toujours de la même manière. Les unités de la circulation sont celles du champ multipliées par une longueur<sup>a</sup>.

Finalement, il est important de mentionner qu'on calcule souvent la circulation sur un contour fermé. Pour un parcours circulaire, une paramétrisation permettant de faire cela serait, par exemple,

$$\vec{r} = \cos(\omega_0 t)\vec{1}_x + \sin(\omega_0 t)\vec{1}_y + 0\vec{1}_z \quad (t \in [0, T = 2\pi/\omega_0]), \quad (2.5)$$

avec  $\omega_0$  une constante réelle et positive.

Une telle courbe pourrait être utilisée pour décrire la « circulation autour d'un rond-point », comme celui de la figure 2.4, l'intégration se faisant alors depuis un point quelconque du contour jusqu'à ce même point auquel on revient après avoir parcouru la courbe dans le sens positif (ici dans le sens des  $t$  croissants). La circulation sera donc positive ou négative suivant qu'on fasse le tour du rond-point dans le même sens que les voitures ou dans le sens opposé.

## ■ Exemple

### 2.1.2 Exemple d'application de la circulation : le tir à la corde

Vous connaissez probablement la discipline olympique du « tir à la corde » qui rapporta une médaille olympique à la Belgique en 1920. Dans ce jeu aux origines millénaires, deux équipes sont formées et chacune des deux équipes tire sur la corde pour la déplacer. L'équipe gagnante est celle qui parvient à faire bouger l'équipe adverse sur une certaine distance. Ce jeu est représenté à la figure 2.5. Pour déterminer dans quelle direction la corde va bouger, il faut additionner les forces appliquées par chaque joueur et

*La circulation d'un champ de vitesses a s'exprime en m<sup>2</sup>/s, celle d'un champ de forces en N·m, celle d'un champ électrique en V/m · m = V et celle d'un champ d'induction magnétique est en N/A.*

**FIGURE 2.4 :** La circulation dans un rond-point correspond à la circulation évaluée sur un contour fermé.



**FIGURE 2.5 :** Illustration du jeu de tir à la corde.



joueuse sur la corde. Il est possible de calculer cette résultante des forces en sommant les forces appliquées par les différents joueurs. C'est une première approche dans laquelle on considère que la force appliquée par les joueurs est ponctuelle. On peut aussi considérer, de manière plus réaliste, que la force appliquée par un joueur est répartie sur un segment de corde de la longueur de sa paume. On utilise alors une force linéaire ou force par unité de longueur. La résultante des forces correspond alors à la circulation de la force linéaire.

Pour simplifier le raisonnement qui suit, on suppose que chaque joueur n'agrippe la corde que d'une main. Chaque joueur, numéroté  $i$ , dont la paume est située entre la position longitudinale  $z = a_i$  et la position  $z = b_i$ , exerce une force longitudinale totale  $f_i$ , ce qui signifie que la force linéaire  $\vec{\phi}_i(z)$  est liée à la force longitudinale totale  $f_i$  par

$$f_i = \int_{a_i}^{b_i} \vec{\phi}_i(z) \cdot \vec{1}_z dz. \quad (2.6)$$

Aux emplacements situés entre les mains des  $N$  joueurs, la force linéaire est nulle. La circulation totale de la force linéaire le long de la corde de longueur  $L$  se calcule donc de la manière suivante

$$\mathcal{C} = \int_0^L \vec{\phi}(z) \cdot \vec{1}_z dz = \sum_{i=1}^N \int_{a_i}^{b_i} \vec{\phi}_i(z) \cdot \vec{1}_z dz \quad (2.7)$$

$$= \sum_{i=1}^N f_i. \quad (2.8)$$

Notez que la projection des forces sur la direction  $\vec{1}_z$  implique que l'équipe exerçant une traction dans la direction  $\vec{1}_z$  voit ses efforts comptés positivement, tandis que l'autre équipe a une contribution négative à la somme. Le signe de la circulation nous indique dans quelle direction la corde va se déplacer. Si la circulation est nulle, cela signifie que les forces exercées par les deux équipes sont égales en valeur absolue (les sens de traction étant opposés).

### 2.1.3 Circulation et potentiel

Dans la section 1.2.10, nous avions lié la notion de *potentiel* (courbes de niveau) à la notion de *gradient* (direction de plus grande pente). Nous allons maintenant lier la notion de potentiel à la notion de *circulation*.

À cet effet, considérons à nouveau la force d'attraction gravitationnelle qui peut être reliée à la notion de potentiel et d'altitude. On considère ici une zone de la terre très limitée, de sorte qu'on puisse décrire la gravitation comme une force verticale  $\vec{f}$  agissant du haut vers le bas. Cette force est directement liée à l'énergie potentielle gravitationnelle  $V$ , qui ne dépend, selon nos hypothèses, que de l'altitude. En notant  $z$  la coordonnée mesurant l'altitude, on

a donc

$$V(x, y, z) = mgz, \quad (2.9)$$

$$\vec{f} = -\overrightarrow{\text{grad}} V = -\frac{dV}{dz} \vec{1}_z = -mg \vec{1}_z, \quad (2.10)$$

où  $m$  et  $g$  ont le même sens qu'en 1.2.10.

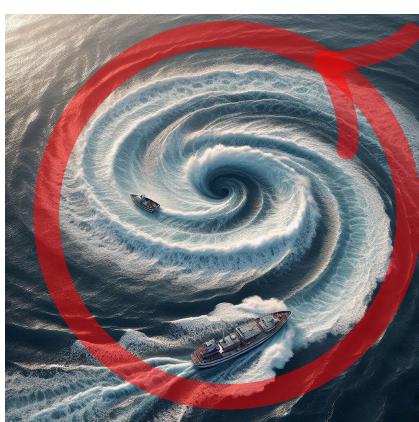
On sait que cette force peut mettre en mouvement vertical un objet isolé, comme une bille. Elle peut également faire tourner la roue d'un moulin à aubes. Peut-elle aussi faire circuler des billes (ou un liquide) dans un tube? Cette force peut-elle faire tourner une grande roue (équilibrée)? Voir figures 2.6 et 2.7.



**FIGURE 2.6 :** Les nacelles de la grande roue peuvent-elles circuler grâce à la force gravitationnelle?



**FIGURE 2.7 :** Des billes ayant la même densité peuvent-elles circuler dans un tube sous l'action de la force d'attraction gravitationnelle?



**FIGURE 2.8 :** Dans un tourbillon, le sens de parcours modifie fortement l'effort à fournir pour avancer : la circulation sur un contour fermé autour du tourbillon n'est pas nulle, le tourbillon entraîne les bateaux en surface vers son centre.

### ■ Petit poisson rouge... peut-on passer la barre rouge ?

Oui, à condition de répondre à ma question !

Que répondriez-vous intuitivement à ces questions? Quel outil pourriez-vous utiliser pour vérifier vos réponses par calcul?

Pour répondre à la question précédente, vous avez probablement considéré que si une nacelle (bille) descend sur la gauche du dispositif, elle doit faire remonter une nacelle (bille) vers le haut sur la droite. Le dispositif étant symétrique, l'énergie récupérée d'un côté lorsque la nacelle (bille) descend devrait être utilisée pour faire remonter une nacelle (bille) de l'autre côté. Si le système est initialement immobile, il n'y a donc pas de raison pour qu'il se mette en mouvement. Comme nous l'avons fait pour le tir à la corde en 2.1.2, on pourrait sommer les contributions de chacune des nacelles (billes) en intégrant sur le contour. Le signe de la circulation serait opposé pour les côtés droits et gauche du système conduisant à une circulation totale nulle.

### 2.1.4 Entrainement et champ tourbillonnaire

L'exemple typique d'un champ de vitesse correspondant à une circulation non nulle est celui du tourbillon, illustré à la figure 2.8. Dans l'exemple de la figure, la circulation sur un contour fermé entourant le centre du tourbillon sera positive dans le sens trigonométrique et négative dans le sens horlogique. Un tel champ de vitesses de circulation non nulle entraîne les objets vers son centre. C'est ce qui se produit à plus petite échelle lorsque l'on vide une baignoire.

### 2.1.5 Circulation et rotationnel

On veut exploiter la dimension mésoscopique pour calculer la *circulation* d'un *champ* vectoriel sur un *contour orienté* fermé élémentaire. Comme pour le calcul du *gradient*, nous allons considérer un triangle, dans l'idée que ce triangle puisse faire partie d'un

maillage. Nous allons en outre considérer que le champ vectoriel varie de manière *linéaire* sur l'étendue de ce triangle. Nous verrons que ceci introduira la notion de rotation autour d'un axe perpendiculaire à la face triangulaire.

### Activité

#### Circulation sur un triangle

Calculer la circulation du champ linéaire  $\bar{F}$  représenté à la figure 2.9, le long du contour fermé  $P_0P_1P_2P_0$ .

**Notations** On note par  $P$  un point quelconque intérieur au triangle. La position de ce point par rapport au point  $P_0$  s'écrit

$$\overline{P_0P} = u_1\overline{P_0P_1} + u_2\overline{P_0P_2} = u_1\bar{a}_1 + u_2\bar{a}_2, \quad (2.11)$$

avec les deux paramètres  $u_1$  et  $u_2$  vérifiant

$$0 \leq u_1, \quad (2.12)$$

$$0 \leq u_2, \quad (2.13)$$

$$u_1 + u_2 \leq 1, \quad (2.14)$$

pour garantir que le point  $P$  est intérieur au triangle.

La position d'un des points  $P_i$  depuis l'origine est notée

$$\bar{r}_i = \overline{OP_i}, \quad (2.15)$$

de sorte que

$$\bar{a}_1 = \bar{r}_1 - \bar{r}_0, \quad (2.16)$$

$$\bar{a}_2 = \bar{r}_2 - \bar{r}_0. \quad (2.17)$$

**Expression à évaluer** La circulation se calcule comme suit

$$\mathcal{C}_{0120} = \oint_{0120} \bar{F}(\bar{r}) d\bar{r} = \int_{01} \bar{F}(\bar{r}) d\bar{r} + \int_{12} \bar{F}(\bar{r}) d\bar{r} + \int_{20} \bar{F}(\bar{r}) d\bar{r}, \quad (2.18)$$

qui montre que trois intégrales sur un côté doivent être évaluées.

**Circulation sur un côté** La circulation sur le côté  $P_0P_1$  s'évalue facilement tenant compte de la linéarité du champ vectoriel.

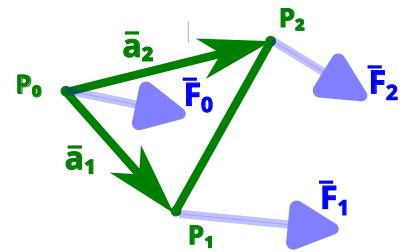
$$\int_{P_0P_1} \bar{F}(\bar{r}) d\bar{r} = \int_0^1 \bar{F}(\bar{r}_0 + u_1\bar{a}_1) \bar{a}_1 du_1 \quad (2.19)$$

$$= \bar{a}_1 \int_0^1 \bar{F}(\bar{r}_0) + u_1 \bar{F}(\bar{a}_1) du_1 \quad (2.20)$$

$$= \bar{a}_1 \left[ \bar{F}(\bar{r}_0) + \frac{1}{2} \bar{F}(\bar{a}_1) \right] \quad (2.21)$$

$$= \overline{P_0P_1} \frac{\bar{F}_0 + \bar{F}_1}{2}, \quad (2.22)$$

**FIGURE 2.9 :** On veut calculer la circulation du champ linéaire  $\bar{F}$  le long du contour fermé  $P_0P_1P_2P_0$ .



où l'on a noté  $\bar{F}_i = \bar{F}(\bar{r}_i)$ . Le fait que  $\bar{F}$  est *linéaire* est utilisé pour passer de (2.19) à (2.20) et puis pour passer de (2.21) à (2.22), tenant compte de  $\bar{a}_1 = \bar{r}_1 - \bar{r}_0$ .

On obtient donc le produit du vecteur définissant le côté  $\overline{P_0P_1}$  par la valeur moyenne du champ vectoriel aux extrémités de ce côté. En appliquant ce résultat aux deux autres côtés du triangle, on obtient la circulation sur le contour fermé, comme décrit ci-dessous.

### Circulation sur le triangle

$$\mathcal{C}_{0120} = \overline{P_0P_1} \frac{1}{2} (\bar{F}_0 + \bar{F}_1) + \overline{P_1P_2} \frac{1}{2} (\bar{F}_1 + \bar{F}_2) + \overline{P_2P_0} \frac{1}{2} (\bar{F}_2 + \bar{F}_0). \quad (2.23)$$

Tenant compte de  $\overline{P_1P_2} = \overline{P_0P_2} - \overline{P_0P_1} = \bar{a}_2 - \bar{a}_1$  et de la définition des  $\bar{a}_i$ , on trouve

$$2\mathcal{C}_{0120} = \bar{a}_1 (\bar{F}_0 + \bar{F}_1) + (\bar{a}_2 - \bar{a}_1) (\bar{F}_1 + \bar{F}_2) - \bar{a}_2 (\bar{F}_2 + \bar{F}_0) \quad (2.24)$$

$$= -\bar{a}_1 (\bar{F}_2 - \bar{F}_0) + \bar{a}_2 (\bar{F}_1 - \bar{F}_0) \quad (2.25)$$

$$= \bar{a}_2 \bar{F}(\bar{a}_1) - \bar{a}_1 \bar{F}(\bar{a}_2), \quad (2.26)$$

où la dernière étape découle de  $\bar{F}_i - \bar{F}_0 = \bar{F}(\bar{r}_i) - \bar{F}(\bar{r}_0) = \bar{F}(\bar{r}_i - \bar{r}_0) = \bar{F}(\bar{a}_i)$ .

### 2.1.6 Circulation et opérateur gradient

Comme nous allons le montrer ci-après, il est possible d'écrire la circulation d'un champ vectoriel linéaire au moyen de l'opérateur gradient défini en (1.48).

Pour y parvenir, on observe que dans (2.26), la composante  $\bar{a}_1$  est associée au vecteur  $\bar{F}(\bar{a}_2)$ . On se souvient que la base conjuguée introduite précédemment associait  $\bar{c}_1$  à  $\bar{a}_2$  et  $\bar{n}$  et que par ailleurs l'opérateur gradient est défini sur la base conjuguée des  $\bar{c}_i$ .

### Circulation dans la base conjuguée

Au départ de  $\bar{a}_1$  et  $\bar{a}_2$ , on définit

$$2S\bar{n} = \bar{a}_1 \times \bar{a}_2, \quad (2.27)$$

où  $S$  est la surface du triangle  $P_0P_1P_2$  ( $2S$  est la surface du parallélogramme sous-tendu par les vecteurs  $\bar{a}_1$  et  $\bar{a}_2$ ), et  $\bar{n}$  la normale unitaire au plan défini par ces deux vecteurs. L'orientation de la normale dépend du sens de parcours du triangle et de la définition du produit vectoriel.

En choisissant  $\bar{a}_3 = \bar{n}$  on calcule les vecteurs de la base  $c$ , conjuguée de  $a$ , comme on l'avait fait précédemment aux équations (1.19) et (1.20). On trouve réciproquement

$$\bar{c}_2 \times \bar{c}_3 = (\bar{a}_3 \times \bar{a}_1) \times (\bar{a}_1 \times \bar{a}_2) / (4S^2) = [\bar{a}_3, \bar{a}_1, \bar{a}_2] \bar{a}_1 / (4S^2) = \bar{a}_1 / (2S), \quad (2.28)$$

où l'on utilise comme précédemment la notation  $[\cdot, \cdot, \cdot]$  pour le *produit mixte*. On obtient similairement

$$\bar{a}_1 = 2S \bar{c}_2 \times \bar{c}_3, \quad (2.29)$$

$$\bar{a}_2 = 2S \bar{c}_3 \times \bar{c}_1, \quad (2.30)$$

$$\bar{a}_3 = 2S \bar{c}_1 \times \bar{c}_2. \quad (2.31)$$

En utilisant la base conjuguée, la circulation du champ  $\bar{F}$  sur le triangle sous-tendu par les vecteurs  $\bar{a}_1$  et  $\bar{a}_2$  de surface  $S$  et de normale unitaire  $\bar{n}$  [voir (2.26) et Fig. 2.9] prend la forme

$$2\mathcal{C} = 2S [(\bar{c}_3 \times \bar{c}_1) \bar{F}(\bar{a}_1) - (\bar{c}_2 \times \bar{c}_3) \bar{F}(\bar{a}_2)]. \quad (2.32)$$

Utilisant  $\bar{n} = \bar{c}_3$ ,

$$\mathcal{C} = S ([\bar{c}_3, \bar{c}_1, \bar{F}(\bar{a}_1)] - [\bar{c}_2, \bar{c}_3, \bar{F}(\bar{a}_2)]) \quad (2.33)$$

$$= S ([\bar{n}, \bar{c}_1, \bar{F}(\bar{a}_1)] + [\bar{n}, \bar{c}_2, \bar{F}(\bar{a}_2)]), \quad (2.34)$$

qu'on écrit finalement sous la forme

$$\mathcal{C} = S \bar{n} \cdot (\bar{c}_1 \times \bar{F}(\bar{a}_1) + \bar{c}_2 \times \bar{F}(\bar{a}_2)). \quad (2.35)$$

Cette expression montre que la circulation d'un tourbillon dépend de la surface du contour sur lequel on la calcule. Plus le contour englobe une large surface, plus la circulation est grande. Si l'on veut calculer la force d'un tourbillon pour pouvoir comparer différents tourbillons, on doit plutôt recourir à la circulation par unité de surface  $\mathcal{C}/S$ .

### Influence de la taille du triangle sur la circulation

Comme nous l'avions fait pour le calcul du *gradient*, et dans la logique de notre approche mésoscopique, si un champ n'est pas *linéaire*, on réduit la taille du triangle sur lequel on calcule la *circulation*. De manière identique à ce que nous avions fait en 1, nous recalculons la circulation sur un triangle pour lequel  $\bar{a}'_i = \eta_i \bar{a}_i$ . On utilise les expressions de la base conjuguée (1.40)–(1.41), et

$$\frac{\mathcal{C}}{S} = \sum_{i=1}^2 \bar{n} \cdot \{\bar{c}'_i \times [\bar{F}(\bar{r}_0 + \bar{a}'_i) - \bar{F}(\bar{r}_0)]\} \quad (2.36)$$

$$= \sum_{i=1}^2 \bar{n} \cdot \left[ \bar{c}_i \times \frac{\bar{F}(\bar{r}_0 + \eta_i \bar{a}_i) - \bar{F}(\bar{r}_0)}{\eta_i} \right] \quad (2.37)$$

$$= \bar{n} \cdot \left[ \left( \sum_{i=1}^2 \bar{c}_i \frac{\partial \cdot}{\partial \bar{a}_i} \Big|_{\bar{r}_0} \right) \times \bar{F} \right]. \quad (2.38)$$

### Circulation comme opérateur différentiel

On peut écrire l'équation (2.38) au départ de l'opérateur *gradient* tridimensionnel

$$\frac{\mathcal{C}}{S} = \bar{n} \cdot (\overrightarrow{\text{grad}} \times \bar{F}), \quad (2.39)$$

puisque  $\bar{n} \cdot (\bar{n} \times \bar{v}) = 0$ , quel que soit  $\bar{v}$ .

## Opérateur rotationnel et circulation

L'opérateur gradient appliqué à un vecteur en utilisant le produit vectoriel est également appelé opérateur *rotationnel*. Il est désigné en français par  $\overline{\text{rot}}$  et en anglais par curl.

Ayant calculé cet opérateur pour le champ de vecteurs  $\bar{F}$  variant linéairement, on peut évaluer la circulation du champ sur un contour triangulaire en multipliant le rotationnel du champ par la surface orientée de ce triangle. On appelle *surface orientée* une surface associée à un vecteur normal  $\bar{S} = S\bar{n}$ . Cette surface orientée permet d'associer un sens de parcours au contour formé par le bord de cette surface. Ici, pour  $\bar{S} = \bar{a}_1 \times \bar{a}_2$ , le sens de calcul de la circulation sur le triangle est celui de  $\bar{a}_1$  (et donc opposé au sens de  $\bar{a}_2$ )<sup>a</sup>. Grâce à l'orientation de la surface, on peut attribuer un signe à la circulation du champ dont on connaît le *rotationnel*.

En résumé,

### Rotationnel

$$\overline{\text{rot}}\bar{F} = \overrightarrow{\text{grad}} \times \bar{F}, \quad (2.40)$$

est un opérateur qui fournit la densité surfacique de circulation du champ linéaire  $\bar{F}$  pour un contour triangulaire.

Lorsque le champ considéré est un champ de force, le rotationnel du champ nous indique si ce champ de force a tendance à faire entrer en rotation le triangle sur lequel on calcule la circulation

$$\mathcal{C}_{\partial S}[\bar{F}] = \bar{S} \cdot \overline{\text{rot}}\bar{F}, \quad (2.41)$$

où on note  $\partial S$  — qui se lit « bord de S » — le *contour orienté* associé à la *surface orientée*  $\bar{S}$ .

Remarquons que la forme exacte du triangle n'importe pas, seule sa surface orientée intervient dans le pouvoir rotatoire du champ de force. Le repère utilisé pour faire les calculs n'apparaît pas dans le résultat final.

L'opérateur *rotationnel* porte donc bien son nom pour un champ de force. Il conserve ce nom même lorsqu'on l'applique à d'autres champs.

L'opérateur *rotationnel* défini en (2.40) permet de déterminer rapidement si un champ peut être exprimé comme le gradient d'une fonction. Lorsque c'est le cas, le rotationnel de ce champ est nul.

### Petit poisson rouge... peut-on passer la barre rouge ?

Oui, à condition de répondre à ma question !

En combinant les résultats présentés ci-avant, démontrez que le rotationnel d'un champ qui est le gradient d'une fonction est nul.

Pour quelle orientation de la surface  $\bar{S}$ , un champ  $\bar{F}$  induira-t-il la plus grande circulation sur un contour triangulaire fermé ?

Une manière de répondre à la question précédente est de détailler le calcul du rotationnel d'un champ dérivant d'un potentiel,  $\overrightarrow{\text{rot grad}} V = (\bar{a}_1 \partial_1 + \bar{a}_2 \partial_2 + \bar{a}_3 \partial_3) \times (\bar{a}_1 \partial_1 V + \bar{a}_2 \partial_2 V + \bar{a}_3 \partial_3 V)$  pour lequel on a les termes du type  $\bar{a}_1 \times \bar{a}_1$  qui disparaissent et les termes du type  $\bar{a}_1 \times \bar{a}_2$  qui se regroupent par paires de la forme

$$(\bar{a}_1 \times \bar{a}_2)(\partial_1 \partial_2 V - \partial_2 \partial_1 V).$$

Ces termes s'annulent si l'ordre des dérivées mixtes est interchangeable. Une condition suffisante est que les dérivées mixtes existent et soient continues au point de calcul [1]<sup>a</sup>.

### 2.1.7 Circulation sur un ensemble de triangles

Nous avons vu comment calculer la circulation sur un triangle au moyen du rotationnel. Comme expliqué à la section 1.1, une surface d'intérêt physique est généralement composée de multiples triangles dont la taille est choisie suffisamment petite pour que le comportement physique du champ dont on calcule la circulation soit linéaire sur chaque triangle. En outre, il faut que ces triangles épousent au mieux la surface à modéliser, ce qui requiert également que leur taille soit petite. Comme on travaille avec de petits triangles, ceux-ci seront nombreux et il est important d'étudier comment la circulation se calcule sur un ensemble de triangles. Cette situation est schématisée à la figure 2.10, où on s'intéresse à trois triangles d'un maillage. Rien dans le raisonnement qui suit ne suppose que ces trois triangles sont dans un même plan.

#### Circulation totale sur les différents triangles

On calcule la circulation sur chacun des triangles séparément en identifiant les chemins orientés 014, 134 et 123, comme représenté à la figure 2.10(b). Sur chacun de ces triangles mésoscopiques, on peut calculer la circulation en utilisant (2.41), ce qui donne

$$\mathcal{C}_{014} = \bar{S}_{014} \overrightarrow{\text{rot}} \bar{F}|_{014}, \quad (2.42)$$

$$\mathcal{C}_{134} = \bar{S}_{134} \overrightarrow{\text{rot}} \bar{F}|_{134}, \quad (2.43)$$

$$\mathcal{C}_{123} = \bar{S}_{123} \overrightarrow{\text{rot}} \bar{F}|_{123}, \quad (2.44)$$

où la surface est orientée comme précédemment et le champ est évalué au centre du triangle considéré.

En assignant un indice 1 au triangle, 014, 2 au triangle 134 et 3 au dernier triangle, on peut écrire

$$\mathcal{C}_i = \bar{S}_i \overrightarrow{\text{rot}} \bar{F}_i, \quad (2.45)$$

$$\mathcal{C} = \sum_{i=1}^3 \mathcal{C}_i, \quad (2.46)$$

où  $\mathcal{C}$  est la circulation totale, schématisée à la figure 2.10(c).

<sup>a</sup> Si vous vous demandez quelle fonction pourrait ne pas vérifier cette condition, en voici une définie par Peano en 1884  $f = 0$  si  $(x, y) = (0, 0)$  et  $f = xy(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$  sinon. Cette fonction est telle que  $\partial_x \partial_y f(0, 0) = -1$  et  $\partial_y \partial_x f(0, 0) = 1$ . Comme mentionné dans [1], en 1734, Euler pensait que l'ordre des dérivées mixtes était toujours interchangeable. C'est en 1873 qu'un premier contre-exemple a été fourni par H.A.Schwarz.



L02P1



L02P3



### Circulation sur le contour externe

Comme suggéré par l'illustration de la figure 2.10(d), dans la circulation totale calculée en (2.46), on peut éliminer certaines contributions qui correspondent à la circulation calculée sur un même côté dans deux sens différents. Cette situation se présente pour tous les côtés communs à deux triangles. L'orientation de la normale unitaire au triangle doit être choisie pour que le sens de parcours soit opposé.

Du point de vue des équations, on a

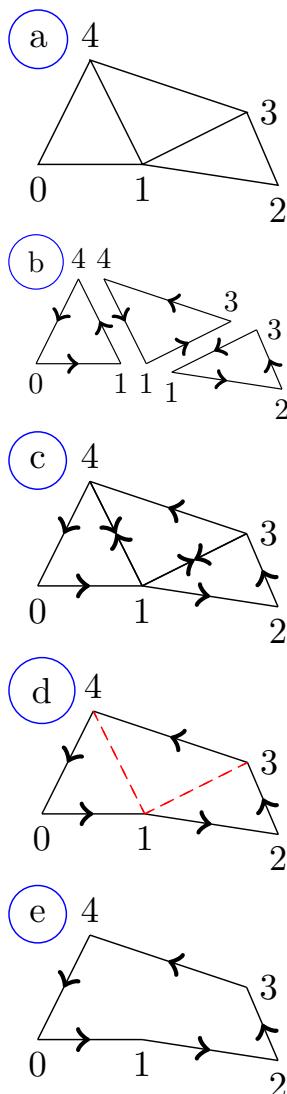
$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_{0140} + \mathcal{C}_{1341} + \mathcal{C}_{1231} \quad (2.47)$$

$$= \mathcal{C}_{01} + \mathcal{C}_{14} + \mathcal{C}_{40} + \mathcal{C}_{13} + \mathcal{C}_{34} + \mathcal{C}_{41} + \mathcal{C}_{12} + \mathcal{C}_{23} + \mathcal{C}_{31}$$

$$= \mathcal{C}_{01} + \mathcal{C}_{40} + \mathcal{C}_{34} + \mathcal{C}_{12} + \mathcal{C}_{23} + (\mathcal{C}_{14} + \mathcal{C}_{41}) + (\mathcal{C}_{13} + \mathcal{C}_{31})$$

$$= \mathcal{C}_{012340}. \quad (2.48)$$

**FIGURE 2.10 :** Illustration montrant que la somme des circulations sur plusieurs triangles de même orientation est équivalente à la circulation sur le contour externe de l'ensemble des triangles. (a) Assemblage des triangles; (b) Circulation sur chacun des triangles; (c) Circulation totale sur les triangles; (d) Identification des segments de contribution totale nulle; (e) Circulation extérieure à l'ensemble des triangles.



La circulation totale sur le contour externe peut donc s'écrire

$$\mathcal{C}_{\text{ext}} = \sum_{(i,j) \in \text{ext}} \frac{\bar{F}_i + \bar{F}_j}{2} (\bar{r}_j - \bar{r}_i) \quad (2.49)$$

$$= \sum_{i=1}^3 \mathcal{C}_i = \sum_{i=1}^3 \bar{S}_i \overline{\text{rot}} \bar{F}_i, \quad (2.50)$$

où la notation  $(i,j) \in \text{ext}$  signifie que l'arête allant du sommet  $i$  vers le sommet  $j$  appartient au contour externe lorsqu'il est parcouru dans le sens de référence.

### Théorème de la circulation-rotationnel de Stokes

Le résultat (2.50) se généralise à n'importe quel nombre de triangles. En particulier, sur un maillage dense, le nombre de triangles devient très grand et la taille des triangles très petite. Dans la limite des triangles infiniment petits, on obtient

#### Théorème de la circulation-rotationnel de Stokes

$$\mathcal{C}_{\text{ext}} = \oint_{\text{ext}} \bar{F} d\bar{r} = \iint d\bar{S} \cdot \overline{\text{rot}} \bar{F}, \quad (2.51)$$

où l'intégrale de contour vient de (2.49) qui calcule la circulation sur le contour externe représenté à la figure 2.10(e) et où l'intégrale de surface vient de la somme des circulations (2.50) sur des triangles suffisamment petits pour que la circulation sur chacun des triangles soit remplacée par l'opérateur rotationnel appliqué au champ multiplié par la surface du triangle.

Connaissant la définition du rotationnel, a le théorème de Stokes dit simplement que la circulation totale sur un découpage en sous-domaines d'une surface limitée équivaut à la circulation sur le bord extérieur de cette surface, ce qui est illustré à la figure 2.10.

Ce résultat très souvent utilisé en physique est connu sous le nom de théorème de Stokes <sup>a</sup>, *théorème circulation-rotationnel de Stokes* ou théorème de la circulation-rotationnel. Il ne peut être

appliqué que si la circulation et le rotationnel sont bien définis sur chacun des triangles du maillage.

### ■ Petit poisson rouge... peut-on passer la barre rouge ?

Oui, à condition de répondre à ma question !

Utilisez (2.51) pour démontrer qu'un champ de forces dérivant d'un potentiel est conservatif, ce qui signifie que sa circulation entre deux points notés  $A$  et  $B$  ne dépend pas du chemin choisi pour aller de  $A$  à  $B$ .

Un champ qui ne dérive pas d'un potentiel permet d'accumuler de la circulation sur un tour. C'est ce qui est illustré par l'escalier de Penrose, représenté à la figure 2.11. Cet objet ne peut être réalisé en pratique car le champ qui dérive d'une fonction potentielle, comme la hauteur, est irrotationnel. La perception d'un escalier qui grimpe en permanence est une illusion d'optique. Si cet escalier existait, en tournant dans un sens ou dans l'autre dans cet escalier, on pourrait accumuler un dénivelé aussi important (positif ou négatif) qu'on le désire. C'est parce qu'un tel escalier ne peut être réalisé en pratique que les courbes de niveau ont du sens.

### ■ Pour aller plus loin...

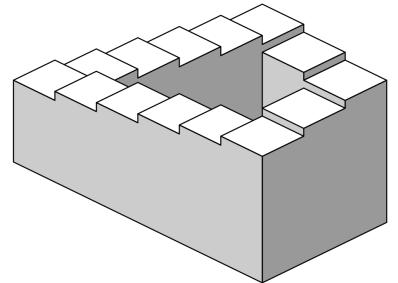
Dans l'exemple qui précède, la grandeur « hauteur » ( $h$ ) dépend de deux coordonnées spatiales. Si on avance d'une distance infinitésimale  $dl_1$  dans la direction  $\bar{a}_1$  et d'une distance  $dl_2$  dans la direction  $\bar{a}_2$ , le déplacement total est donnée par  $d\bar{l} = \bar{a}_1 dl_1 + \bar{a}_2 dl_2$ . Notons qu'en thermodynamique, on étudie aussi la variation d'un système le long d'un chemin, mais ce chemin est donné dans des axes n'ayant pas les mêmes unités. Par exemple, si on étudie la température d'un gaz en fonction de sa pression et de son volume, on peut regarder ce qui se passe si on modifie la pression de  $dp$  et le volume de  $dV$ . On écrit  $dT = g_p dp + g_V dV$ . Si on devait généraliser la notion de gradient, on pourrait noter  $\bar{g} = (g_p, g_V)$ . L'élément d'arc correspondrait à  $d\bar{x} = (dp, dV)$ . Les coefficients  $g_i$  sont donnés par

$$g_p = \left( \frac{\partial T}{\partial p} \right)_{V=\text{cte}}, \quad (2.52)$$

$$g_V = \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_{p=\text{cte}}, \quad (2.53)$$

où les dérivées partielles le long d'un chemin où certaines grandeurs sont constantes correspondent à des dérivées directionnelles. La variation de température serait  $dT = \bar{g} \cdot d\bar{x}$ . Comme on le fait pour les changements de base spatiaux, on peut changer de base thermodynamique, en veillant à ne pas introduire plus de vecteurs

**FIGURE 2.11 :** Escalier impossible de Penrose. Il illustre à quoi pourrait correspondre un potentiel dont le gradient aurait une composante rotationnelle : une fonction hauteur augmentant sans cesse pour un sens de rotation (et diminuant pour l'autre).



de base qu'il n'y a de variables indépendantes dans l'espace thermodynamique.

La notion de variation correspondant au gradient d'une fonction est associée en thermodynamique à la notion de différentielle exacte.

Pouvez-vous faire un lien entre la notion de cycle thermodynamique et la notion de circulation? Quelle correspondance peut-on faire entre un champ irrotationnel et une différentielle exacte?

Pourquoi certaines variables sont-elles dites d'« état »?

### 2.1.8 Potentiel global et pseudo-potentiel local

Un champ est une grandeur définie dans tout l'espace. Un champ qui dérive d'un potentiel doit donc être défini par un potentiel unique dans tout l'espace. Il existe néanmoins des champs qui dérivent localement d'un potentiel, mais n'en dérivent pas globalement. Ce sont des champs irrotationnels presque partout. De tels champs apparaissent couramment en électromagnétisme, notamment lorsqu'un circuit contient un solénoïde. Le vocabulaire des circuits électrique contient des expressions comme « différence de potentiel » qui manquent de nuances et peuvent créer de la confusion. C'est pourquoi il est important de s'attarder sur un exemple.

#### Modélisation d'un tourbillon

Considérons un champ ayant la forme d'un vortex, comme le champ de vitesse d'un tourbillon (cf. Fig. 2.8). En observant un tourbillon, on constate que le champ de vitesse ne dépend que de la distance à son centre, que nous noterons  $\rho$  et que cette vitesse est dans la direction azimutale, donnée par le vecteur  $\vec{1}_\theta = -\sin\theta \vec{1}_x + \cos\theta \vec{1}_y$ . Les coordonnées cylindriques (ou polaires si on se place en  $z = 0$ ) sont donc les plus adaptées pour décrire simplement un tourbillon.

Plusieurs évolutions du champ avec  $\rho$  sont possibles. Considérons l'évolution décroissant en  $1/\rho$  qui correspond au champ de vitesse

$$\vec{v}(\rho, \theta, z) = \frac{K}{\rho} \vec{1}_\theta, \quad (2.54)$$

où la constante  $K$  assure la cohérence des unités.

**Discontinuité** Notons que le champ tourbillonnaire décrit ci-dessus présente une discontinuité en  $\rho = 0$ .

**Potentiel** Pour savoir si le champ de vitesses dérive d'un potentiel, nous utilisons la forme cylindrique de l'opérateur  $\nabla$ , donnée en (C.68), page IV.22 et qui s'écrit

$$\vec{\nabla} = \vec{1}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \vec{1}_\theta \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{1}_z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (2.55)$$

Si le champ de vitesse dérive d'un potentiel  $\Phi$ , on doit donc avoir  $\vec{v} = -\vec{\nabla}\Phi$ . Notre champ est orienté selon  $\vec{1}_\theta$  et on peut donc se contenter d'analyser cette composante,

$$\frac{K}{\rho} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \Phi, \quad (2.56)$$

qui s'intègre facilement entre  $\theta_1$  et  $\theta_2$ , et conduit à

$$\Phi(\theta_2) = \Phi(\theta_1) - K(\theta_2 - \theta_1). \quad (2.57)$$

Il semblerait donc qu'on puisse calculer le potentiel du champ que nous avons donné comme exemple d'un champ ne dérivant pas d'un potentiel !

**Pseudo-potentiel, défini presque partout** Le potentiel défini par  $\Phi(\theta) = \Phi_0 + \theta$  n'est en réalité pas physique, car il peut prendre des valeurs différentes pour un même point physique. Par exemple, le point  $(\rho_1, \theta_1)$  et le point  $(\rho_1, \theta_1 + 2\pi)$  désignent le même point physique mais sont associés à des potentiels qui diffèrent de  $2\pi$ .

On pourrait décider que le potentiel n'est défini que sur  $0 \leq \theta < 2\pi$ , mais cela ne réglerait pas le problème : le potentiel aurait deux valeurs très différentes en  $\theta = 0$  et en  $\theta \approx 2\pi$ , alors que les points physiques seraient très proches. Le potentiel serait alors discontinu et on ne pourrait prendre son gradient partout dans l'espace.

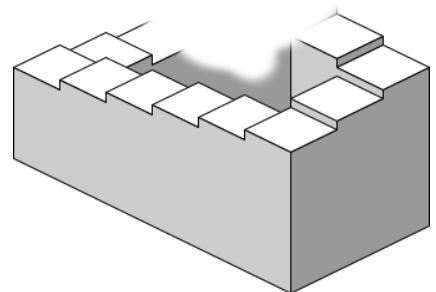
L'escalier de Penrose, représenté à la figure 2.11 n'est problématique que lorsque l'on effectue un tour complet. À la figure 2.12, nous illustrons un « escalier de Penrose presque partout » qui est beaucoup moins saisissant et tout à fait réalisable en pratique.

L'analyse qui précède montre que le champ de vitesse lié à un tourbillon ne dérive pas d'un potentiel, mais qu'il peut être calculé au départ d'un potentiel défini presque partout. En effet, on pourrait travailler sur la partie du plan définie par  $\rho > 0$  et  $\varepsilon < \theta < 2\pi - \varepsilon$ , avec  $\varepsilon > 0$ , et y définir  $\vec{v} = -\vec{\nabla}\Phi = -\vec{\nabla}(K\theta)$ .

Le tourbillon est un exemple de champ de vitesse *irrotationnel presque partout*, pour lequel on peut définir un *pseudo-potentiel défini presque partout* (PPDPP)<sup>a</sup>.

**Pseudo-potentiel et intégrale de contour** Tant qu'on ne tourne pas autour du point de discontinuité du champ  $\vec{v}$  en  $\rho = 0$ , le *théorème circulation-rotationnel de Stokes* est applicable avec le pseudo-potentiel et les intégrales de contour sur un contour fermé sont nulles. Par contre, si on tourne autour de cette discontinuité, on accumule de la circulation à chaque tour complet (cf. exercice 2.7).

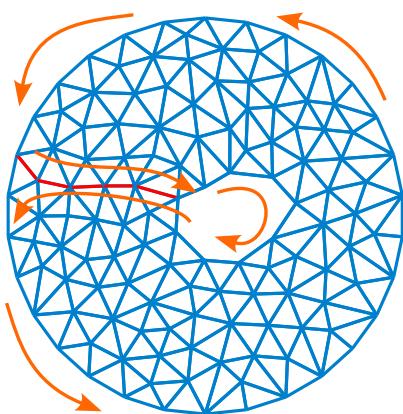
La démonstration du *théorème circulation-rotationnel de Stokes* ne demande pas que le potentiel soit partout défini, mais uniquement sur le domaine d'intégration. Ce théorème ne peut donc pas être appliqué lorsque le contour encercle la discontinuité. Par contre, lorsque le contour n'encercle pas le point de discontinuité, on peut utiliser le pseudo-potentiel défini presque partout de (2.57),  $\Phi = K\theta$  pour conclure que l'intégrale sur un contour fermé est nulle<sup>b</sup>. De



**FIGURE 2.12 :** Escalier de Penrose défini presque partout. L'escalier n'effectuant plus un tour complet, sa perspective n'est plus faussée et l'escalier devient réalisable.

<sup>a</sup> Les différences de potentiel (DDP) dans les circuits électriques sont dans la majorité des cas des différences de pseudo-potentiel défini presque partout, ce qui devrait se noter DD(PPDPP)

<sup>b</sup> Nous avons ici un exemple intéressant où la notion de discontinuité qui peut paraître réservée au champ de l'analyse s'invite dans le champ de la physique pour nous permettre d'affiner notre compréhension du champ de vitesse d'un tourbillon.



**FIGURE 2.13 :** Le théorème circulation-rotationnel de Stokes s'applique à un champ qui présente des discontinuités en contournant ces discontinuités. Ici, on a défini un chemin en rouge pour relier les deux parties extérieures du domaine. En suivant les flèches, on peut donc définir le contour d'intégration extérieur. En pratique la ligne brisée rouge est parcourue dans les deux sens et ne contribue pas à la circulation totale.

manière plus visuelle, on constate sur la figure 2.13 que l'intégration sur le bord externe d'un domaine qui comprend une zone de discontinuité équivaut à deux intégrales de contour parcourues en sens opposés. L'exemple traité à l'exercice 2.7 montre qu'on accumule une circulation  $2\pi K$  pour un contour incluant la discontinuité du champ de vitesse (2.54). Cette valeur ne dépendant pas de la position du contour, on peut concevoir que lorsque le contour est parcouru en sens inverse, la contribution est  $-2\pi K$  et donc la circulation sur le contour externe est nulle.

## 2.2 Flux, conservation et divergence

Les sections précédentes nous ont montré comment calculer le gradient d'une fonction et comment le gradient d'une fonction linéaire est relié au mouvement d'un objet dans un champ gravitationnel. Nous avons ensuite observé qu'une manière particulière d'appliquer le gradient à un champ, en utilisant le produit vectoriel conduit à la notion de rotationnel. Le rotationnel d'un champ de vecteurs nous indique dans quelle direction ce champ a tendance à faire tourner un objet contenu dans un plan, défini par sa normale.

Ces opérateurs permettent d'identifier les variations d'une quantité (gradient de température, altitude, concentration chimique, etc.). Ils nous permettent également de déterminer la circulation d'une quantité sur un ensemble d'objets contenus dans un plan.

En reprenant la notion de circulation telle que nous l'avons appliquée aux voitures sur un axe routier, on se rend compte que la circulation nous indique combien de voiture défilent sur cet axe. Plus leur vitesse et leur nombre sont grands, plus la circulation augmente. La circulation ne nous permet pas de déterminer combien de voitures sont présentes sur un tronçon de route.

Dans certains cas, on peut imaginer qu'il est utile de compter les voitures stationnées dans un parking pour indiquer aux utilisateurs le nombre de places restantes. Il est également très utile de connaître l'énergie stockée dans un système ou la charge électrique totale contenue dans un volume. Pour ce faire, nous pouvons utiliser la notion de flux qui va nous permettre de compter les éléments entrant et sortant d'un volume donné. Par exemple, pour savoir combien de voitures sont présentes dans un parking, nous pouvons compter le nombre de voitures qui y sont entrées et le nombre qui en sont ressorties. Il s'agit d'une mesure du flux de voitures sur la frontière d'un domaine (ici, le parking est le domaine et la frontière en est l'ensemble des barrières d'entrée et de sortie). On se rend compte avec cet exemple qu'il est nécessaire de distinguer les flux entrants et les flux sortants.



L02P4



### Activité

### 2.2.1 Flux et lois de conservation

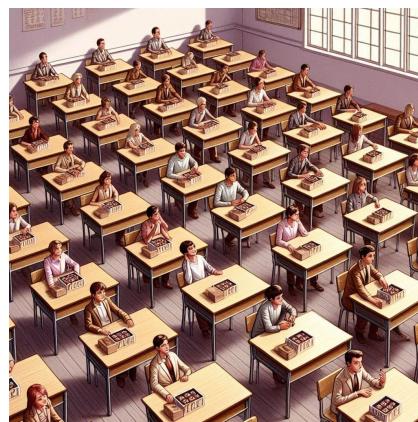
Pour illustrer la notion de flux et le lien avec notre approche mésoscopique, on peut regarder la figure 2.14 qui représente des élèves assis dans une classe et ayant chacun reçu une boîte de pralines. Il se fait que Gilles n'aime pas les pralines contenant de l'alcool. Anthony, par contre en raffole. Darryl doit éviter les pralines contenant des noisettes, Gaël évite celles avec du gluten, Oscar ne mange que du chocolat noir car il ne supporte pas le lait. Au final, chacun et chacune fait voyager à gauche, à droite, devant et derrière les pralines qui leurs sont interdites, tout en récupérant leurs préférées.

Chaque praline qui quitte une table constitue un flux sortant. Une praline qui arrive sur une table est un flux entrant. Le flux peut être évalué de différentes manières : en nombre de pralines, en masse, en volume, en quantité de cacao, etc.

Quelle que soit la complexité des échanges étant intervenus entre Gilles, Anthony, Darryl, Gaël, Oscar et les autres membres de la classe, on s'attend à ce que toutes les pralines ayant quitté une table soient arrivées sur une autre table (on exclut ici la possibilité qu'elles se retrouvent sur le sol). En d'autres termes on s'attend à ce qu'il y ait des quantités conservées : nombre de pralines, masse de praline, nombre de pralines aux noisettes, etc. Certaines de ces quantités peuvent être conservées sans exceptions, alors que d'autres, comme le nombre de pralines pourraient varier, par exemple si les pralines sont posées en plein soleil et se mettent à fondre.

On peut donc mesurer le flux de plusieurs grandeurs différentes pour un même échange. Si certaines de ces grandeurs sont conservées, cela doit pouvoir s'écrire en termes de relations faisant intervenir le flux.

**FIGURE 2.14 :** Des pralines sont échangées dans une classe.



#### ■ Petit poisson rouge... peut-on passer la barre rouge ?

Oui, à condition de répondre à ma question !

Quelle relation faut-il imposer en termes de flux aux entrées et sortie d'un parking pour que le nombre de voitures à l'intérieur du parking soit constant? Sachant qu'il y a un accès piéton au parking, la relation que vous avez écrite garantit-elle que le nombre de personnes présentes dans le parking ne varie pas ?



L02P5

### 2.2.2 Flux, frontière et orientation

Pour définir le sens d'un flux, il faut définir une orientation au niveau de la frontière et la comparer à celle des « objets physiques »



qui traversent la frontière. Il faut donc travailler avec une *surface orientée* et une quantité à mesurer orientée, ce qui conduit à considérer un *champ* vectoriel.

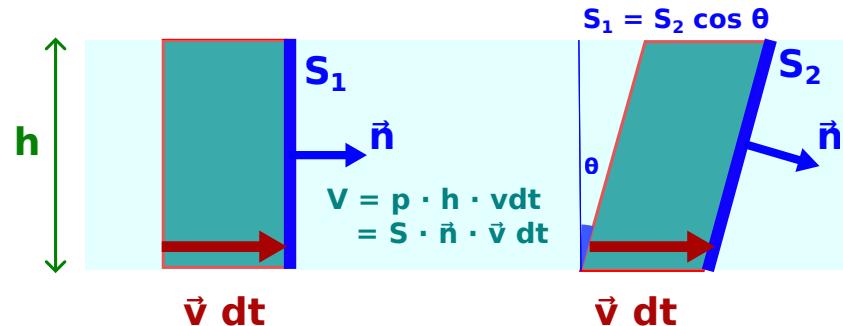
Le flux  $\Phi$  d'un champ  $\bar{F}$  au travers d'une *surface orientée*  $S$  dont la normale unitaire est donnée localement par  $\bar{n}$  est par définition

$$\Phi = \int_S \bar{F} \cdot \bar{n} dS = \int_S \bar{F} \cdot d\bar{S}, \quad (2.58)$$

où l'élément de surface peut-être écrit sous deux formes :  $d\bar{S} = \bar{n} dS$ . L'utilisation du produit vectoriel oriente automatiquement les échanges. Une pratique courante, lorsque la surface d'intégration est fermée, comme pour une sphère, est d'orienter la normale à la surface vers l'extérieur. Dans ce cas, le flux sortant est orienté dans la même direction que la surface et est donc positif ( $\bar{F} \cdot \bar{n} > 0$ ), tandis que le flux entrant correspond à une valeur négative ( $\bar{F} \cdot \bar{n} < 0$ ).

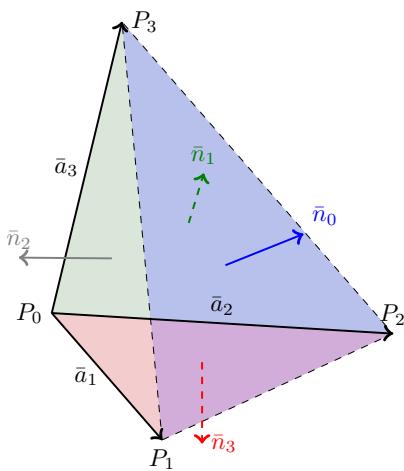
### ■ Petit poisson rouge... peut-on passer la barre rouge ?

Oui, à condition de répondre à ma question !



**FIGURE 2.15 :** Schéma permettant de conceptualiser que le flux d'un champ vectoriel au travers d'une surface est donné par la projection de ce champ sur la normale unitaire à la surface.

**FIGURE 2.16 :** Tétraèdre de sommets  $P_0, P_1, P_2, P_3$ . L'ordre des points est choisi pour que la base des vecteurs ( $\bar{a}_1 = \overrightarrow{P_0P_1}, \bar{a}_2 = \overrightarrow{P_0P_2}, \bar{a}_3 = \overrightarrow{P_0P_3}$ ) soit d'orientation dextrogryre. Cette convention fixera la définition des normales extérieures dans ce qui suit. Les normales unitaires  $\bar{n}_i$  sont repérées par un indice qui indique le sommet opposé à la face qui leur est orthogonale.



La définition du flux au moyen d'une projection assure-t-elle qu'on mesure le même débit que la surface soit orthogonale à la vitesse des particules d'un fluide, ou que cette surface soit inclinée? Pour répondre à cette question, vous pouvez vous aider d'un schéma comme celui de la figure 2.15 et calculer le volume  $V$  de fluide animé d'une vitesse  $\bar{v}$  traversant chacune des deux surfaces sur un intervalle de temps  $dt$ .

### 2.2.3 Flux sur un tétraèdre

Nous continuons ici notre investigation des propriétés d'éléments mésoscopiques. À nouveau, nous commençons par considérer un élément correspondant à une maille élémentaire d'un maillage. Ici, nous nous intéressons à un élément de volume et travaillerons donc avec un tétraèdre comme illustré à la figure 2.16. Le *champ* étudié,  $\bar{F}$ , sera considéré *linéaire* sur ce volume. Par la suite, nous étendrons notre raisonnement à n'importe quel type de champ en

considérant un volume *mésoscopique*, de taille suffisamment réduite pour que les variations du champs y soient linéaires, mais de taille suffisamment importante pour que ce volume contienne des atomes, molécules, cristaux ou autres constituants du milieu en nombre suffisant pour garantir que le comportement de ce milieu est le même que celui d'un milieu *macroscopique*.

### Représentation du tétraèdre et notations

On considère un tétraèdre dont les sommets correspondent aux points  $P_0$  à  $P_3$ , comme schématisé à la figure 2.16. Comme pour les calculs de la section 1, on définit  $\bar{a}_i = \overline{P_0 P_i}$ . L'ordre des vecteurs est choisi pour que le produit vectoriel dextrogryre  $\bar{a}_1 \times \bar{a}_2$  soit un vecteur entrant dans le tétraèdre. Il en est de même de  $\bar{a}_2 \times \bar{a}_3$  et  $\bar{a}_3 \times \bar{a}_1$ .

**Lien entre produits vectoriels, surfaces et volumes** Dans les expressions qui précèdent, on constate que la permutation cyclique des indices apparaît souvent. Pour noter cela de manière compacte, on introduit le symbole *epsilon de Levi-Civita*.<sup>a</sup> Ce symbole est défini par

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (i,j,k) \in \{(1,2,3), (2,3,1), (3,1,2)\} \\ -1 & (i,j,k) \in \{(3,2,1), (2,1,3), (1,3,2)\} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.59)$$

Grâce à ce symbole, on peut écrire la base  $c$  conjuguée de la base  $a$  de manière condensée sous la forme

$$\bar{c}_i = \frac{\bar{a}_j \times \bar{a}_k}{[\bar{a}_i, \bar{a}_j, \bar{a}_k]} \quad (\epsilon_{ijk} = 1), \quad (2.60)$$

qui indique qu'on ne considère que les permutations de  $(i, j, k)$  telles que  $\epsilon_{ijk} = 1$ . Il s'agit des permutations cycliques des indices  $(1, 2, 3)$ . Dans cette expression, le *produit mixte*  $[\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3]$  correspond au volume du parallélépipède sous-tendu par les vecteurs  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ . Le volume du tétraèdre est réduit d'un facteur 6 par rapport à celui du parallélépipède. Puisque nous nous intéressons à un tétraèdre, nous noterons son volume  $V$ , de sorte que

$$[\bar{a}_i, \bar{a}_j, \bar{a}_k] = \epsilon_{ijk} 6V. \quad (2.61)$$

Par ailleurs, chaque face  $i$  du tétraèdre est associée à une normale unitaire  $n_i$  et une surface  $S_i$  qui sont liées par

$$2S_i \bar{n}_i = 2\bar{S}_i = -\bar{a}_j \times \bar{a}_k = -6V \bar{c}_i \quad (\epsilon_{ijk} = 1). \quad (2.62)$$

La normale externe au tétraèdre  $\bar{n}_0$  n'est pas donnée par ces définitions. On peut la calculer par

$$S_0 \bar{n}_0 = \bar{S}_0 = \overline{P_1 P_2} \times \overline{P_1 P_3} \quad (2.63)$$

$$= (\bar{a}_2 - \bar{a}_1) \times (\bar{a}_3 - \bar{a}_1) \quad (2.64)$$

$$= \bar{a}_2 \times \bar{a}_3 - \bar{a}_1 \times \bar{a}_3 - \bar{a}_2 \times \bar{a}_1 - \bar{0} \quad (2.65)$$

$$= -\bar{S}_1 - \bar{S}_2 - \bar{S}_3, \quad (2.66)$$

<sup>a</sup> Par la suite nous utiliserons la condition  $\epsilon_{ijk} = 1$  pour indiquer qu'une expression est limitée aux permutations paires des indices 1,2,3.

qui montre que la somme des surfaces orientées d'un tétraèdre est nulle,

$$\sum_{i=0}^3 \bar{S}_i = \bar{S}_0 + \bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \bar{S}_3 = 0. \quad (2.67)$$

### Flux d'un champ linéaire sur une des faces

Le flux total  $\Phi$  sortant du tétraèdre correspond à la somme des flux sortant par chacune des faces, ce qui s'écrit pour le champ  $\bar{F}$ , supposé linéaire et le tétraèdre de la figure 2.16,

$$\Phi = \iint_{S_{tot}} \bar{F} \cdot d\bar{S} = \iint_{S_{tot}} \bar{F} \cdot \bar{n} dS = \sum_{i=0}^3 \iint_{S_i} \bar{F} \cdot \bar{n}_i dS. \quad (2.68)$$

Comme nous l'avions fait pour le calcul de la circulation sur un triangle, nous effectuerons une des intégrales en supposant que le champ  $y$  varie de manière linéaire. L'intégrale est évaluée en annexe, à l'équation (B.25). Le calcul n'est pas détaillé ici, mais nous allons vérifier que son résultat est physiquement plausible. L'expression obtenue à la page IV.8 est

$$\iint_{S_{ABC}} \bar{F} \cdot d\bar{S} = \frac{1}{3} [\bar{F}(\bar{r}_A) + \bar{F}(\bar{r}_B) + \bar{F}(\bar{r}_C)] \cdot \bar{S}_{ABC}. \quad (2.69)$$

Cette expression est symétrique par rapport aux trois sommets, ce qui est attendu pour une expression linéaire. Le résultat de l'intégrale est proportionnel à la surface, ce qui est également nécessaire. En effet, dans le cas particulier d'un champ uniforme de valeur  $\bar{F}_0$  identique en tous les points du triangle, on s'attend à avoir

$$\iint_{S_i} \bar{F}_0 \cdot \bar{n}_i dS = \bar{F}_0 \cdot \bar{n}_i \iint_{S_i} dS = \bar{F}_0 \cdot \bar{n}_i S_i. \quad (2.70)$$

Finalement, comme  $\bar{F}$  varie linéairement,

$$\frac{1}{3} [\bar{F}(\bar{r}_A) + \bar{F}(\bar{r}_B) + \bar{F}(\bar{r}_C)] = \bar{F} \left( \frac{\bar{r}_A + \bar{r}_B + \bar{r}_C}{3} \right), \quad (2.71)$$

ce qui montre que la moyenne des valeurs du champ aux coins du triangle correspond à la valeur du champ au centre du triangle. Ceci nous indique que (2.69) peut être interprétée de la manière suivante : pour un champ linéaire, on peut remplacer le flux sur une face par la valeur du champ au centre de cette face multipliée par la surface orientée qu'on considère. C'est à nouveau une conclusion qui est physiquement satisfaisante.

### Flux sortant du tétraèdre

Le flux total sortant du tétraèdre se calcule en utilisant (2.69) et (2.66), ce qui donne

$$\begin{aligned}\Phi &= \iint_{S_{tot}} \bar{F} \cdot d\bar{S} = \sum_{i=0}^3 \iint_{S_i} \bar{F}_i \cdot \bar{S}_i && (2.72) \\ &= \frac{1}{3} [\bar{F}(\bar{r}_1) + \bar{F}(\bar{r}_2) + \bar{F}(\bar{r}_3)] \cdot \bar{S}_0 + \frac{1}{3} [\bar{F}(\bar{r}_0) + \bar{F}(\bar{r}_2) + \bar{F}(\bar{r}_3)] \cdot \bar{S}_1 \\ &\quad + \frac{1}{3} [\bar{F}(\bar{r}_0) + \bar{F}(\bar{r}_1) + \bar{F}(\bar{r}_3)] \cdot \bar{S}_2 + \frac{1}{3} [\bar{F}(\bar{r}_0) + \bar{F}(\bar{r}_1) + \bar{F}(\bar{r}_2)] \cdot \bar{S}_3 \\ &= \frac{1}{3} \{ [\bar{F}(\bar{r}_0) - \bar{F}(\bar{r}_1)] \cdot \bar{S}_1 + [\bar{F}(\bar{r}_0) - \bar{F}(\bar{r}_2)] \cdot \bar{S}_2 + [\bar{F}(\bar{r}_0) - \bar{F}(\bar{r}_3)] \cdot \bar{S}_3 \}.\end{aligned}$$

Utilisant le lien (2.62) entre la base conjuguée et les vecteurs des surfaces orientées ( $\bar{S}_i = -3V\bar{c}_i$ ), on écrit finalement

$$\begin{aligned}\Phi &= V \{ \bar{c}_1 \cdot [\bar{F}(\bar{r}_1) - \bar{F}(\bar{r}_0)] + \bar{c}_2 \cdot [\bar{F}(\bar{r}_2) - \bar{F}(\bar{r}_0)] + \bar{c}_3 \cdot [\bar{F}(\bar{r}_3) - \bar{F}(\bar{r}_0)] \} \\ &= V [\bar{c}_1 \cdot \bar{F}(\bar{a}_1) + \bar{c}_2 \cdot \bar{F}(\bar{a}_2) + \bar{c}_3 \cdot \bar{F}(\bar{a}_3)]. && (2.73)\end{aligned}$$

---

#### ■ Petit poisson rouge... peut-on passer la barre rouge ?

Oui, à condition de répondre à ma question !

---

Regardez attentivement l'expression (2.73) et comparez-la aux expressions (2.35) et (1.37), puis tentez de deviner sous quelle forme nous allons mettre cette équation dans la section suivante. Essayez également de deviner les étapes suivantes de notre raisonnement.



### Influence de la taille du tétraèdre sur le flux

Comme on l'a fait précédemment, à la section 2.1.6, si le champ qu'on doit étudier n'est pas linéaire, on réduit la taille du tétraèdre sur lequel on calcule le flux. L'expression (2.73) pourra à nouveau s'écrire à l'aide de l'opérateur gradient. En remplaçant  $\bar{a}_i$  par  $\bar{a}'_i = \eta_i \bar{a}_i$  on obtient

$$\bar{c}'_i = \frac{\bar{a}'_j \times \bar{a}'_k}{[\bar{a}'_i, \bar{a}'_j, \bar{a}'_k]} \quad (\epsilon_{ijk} = 1) \quad (2.74)$$

$$= \frac{\eta_j \eta_k}{\eta_i \eta_j \eta_k} \bar{c}_i = \frac{\bar{c}_i}{\eta_i}, \quad (2.75)$$

comme précédemment, ce qui conduit pour le tétraèdre réduit à

$$\frac{\Phi}{V} = \sum_{i=1}^3 \frac{\bar{c}_i}{\eta_i} \cdot [\bar{F}(\bar{r}_0 + \eta_i \bar{a}_i) - \bar{F}(\bar{r}_0)] \quad (2.76)$$

$$= \sum_{i=1}^3 \bar{c}_i \cdot \frac{\bar{F}(\bar{r}_0 + \eta_i \bar{a}_i) - \bar{F}(\bar{r}_0)}{\eta_i} \quad (2.77)$$

$$= \sum_{i=1}^3 \bar{c}_i \cdot \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{a}_i} \quad (2.78)$$

$$= \left[ \sum_{i=1}^3 \bar{c}_i \frac{\partial}{\partial \bar{a}_i} \right] \cdot \bar{F} \quad (2.79)$$

$$= \overrightarrow{\text{grad}} \cdot \bar{F}. \quad (2.80)$$

On retrouve à nouveau l'opérateur gradient. Il est cette fois appliqué à un champ vectoriel par l'intermédiaire du produit scalaire.

### Divergence

L'opérateur gradient permet d'écrire la densité volumique du flux sortant d'un élément mésoscopique sous la forme

$$\frac{\Phi}{V} = \overrightarrow{\text{grad}} \cdot \bar{F}, \quad (2.81)$$

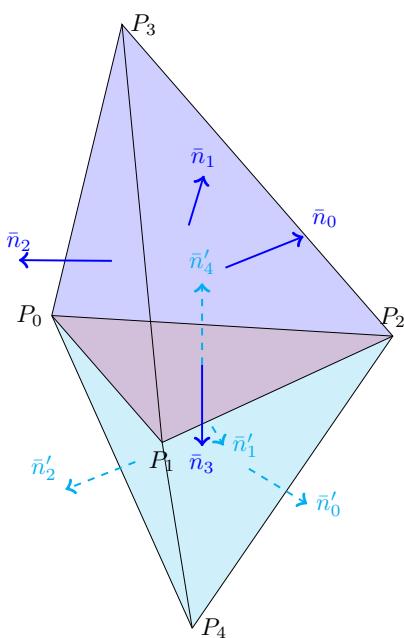
qui se note habituellement en utilisant l'opérateur *divergence*

$$\text{div } \bar{F} = \overrightarrow{\text{grad}} \cdot \bar{F}, \quad (2.82)$$

et permet d'écrire, sur un tétraèdre mésoscopique,

$$\Phi = V \text{div } \bar{F}. \quad (2.83)$$

**FIGURE 2.17 :** Tétraèdres de sommets  $(P_0, P_1, P_2, P_3)$  et  $(P_0, P_1, P_2, P_4)$ . Les normales unitaires  $\bar{n}_0, \bar{n}_1, \bar{n}_2, \bar{n}_3$  sont associées au tétraèdre supérieur et les normales unitaires  $\bar{n}'_0, \bar{n}'_1, \bar{n}'_2, \bar{n}'_4$  au tétraèdre inférieur. Le flux sortant du tétraèdre du dessus s'ajoute au flux sortant du tétraèdre du dessous, sauf pour la face commune aux deux tétraèdres  $(P_0, P_1, P_2)$  sur laquelle les flux sortants sont opposés ( $\bar{n}_3 = -\bar{n}'_4$ ) et s'annulent. Le flux total équivaut au flux sur la surface extérieure.



## 2.2.4 Flux au travers d'un ensemble de tétraèdres

Dans l'approche par discréttisation du milieu en tétraèdres, il est important de pouvoir combiner les propriétés de différents tétraèdres. Nous étudions cette combinaison ci-après.

### Flux total sur les différents tétraèdres

En utilisant l'expression de l'équation (2.83) pour chacun des deux tétraèdres de la figure 2.17 et en ajoutant un symbole ' pour les grandeurs qui concernent le tétraèdre du bas, on peut écrire

$$\Phi_{tot} = \Phi + \Phi' = V \text{div } \bar{F} + V' \text{div } \bar{F}', \quad (2.84)$$

où le champ est à calculer au centre du tétraèdre.

### ■ Petit poisson rouge... peut-on passer la barre rouge ?

Oui, à condition de répondre à ma question !

Si le champ  $\bar{F}$  est linéaire, montrez que l'expression (2.84) peut s'écrire sous la forme de (2.83). Pouvez-vous en déduire que pour un champ linéaire  $\bar{F}$ ,

$$\Phi_{tot} = V_{tot} \operatorname{div} \bar{F} = \iiint_{V_{tot}} \operatorname{div} \bar{F} dV, \quad (2.85)$$

quel que soit le volume  $V_{tot}$  ?

Utilisez (2.83) pour démontrer qu'un champ qui peut s'écrire comme le rotationnel d'un autre champ a une divergence nulle, ce qui veut dire que le flux de ce champ au travers d'une surface fermée est toujours nul.

Un champ tel que sa divergence est nulle et dit « solénoïdal ». Voyez-vous pourquoi?



### Flux total sur la surface externe

La composition des flux sur deux éléments mésoscopiques voisins est très similaires à celle des circulations sur deux éléments voisins. La figure (2.17) illustre la manière dont se combinent les flux pour deux tétraèdres voisins. Les normales servant à calculer le flux étant dirigées vers l'extérieur, elles sont de signes opposés la face commune ( $P_0, P_1, P_2$ ). Il en résulte que leur contributions s'annulent. Par juxtaposition successive de tétraèdres les uns à côtés des autres, on peut ainsi démontrer que seules les faces non communes à deux tétraèdres contribuent au flux total. Ces faces sont les faces externes. D'un point de vue algébrique, en notant les faces par l'indice de leur normale, on a

$$\begin{aligned} \Phi_{tot} &= (\Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3) + (\Phi_0' + \Phi_1' + \Phi_2' + \Phi_4') \\ &= (\Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_0' + \Phi_1' + \Phi_2') + (\Phi_3 + \Phi_4') \\ &= \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_0' + \Phi_1' + \Phi_2' \\ &= \Phi_{ext}. \end{aligned} \quad (2.86)$$

### Théorème du flux-divergence d'Ostrogradski-Gauss

Le calcul du flux total au moyen de (2.84) et (2.86) se généralise à un nombre quelconque de tétraèdres. Dans la limite où l'on divise un système en un très grand nombre de tétraèdres dont le volume est très petit, on peut écrire

#### Théorème du flux-divergence d'Ostrogradski-Gauss

$$\Phi_{ext} = \iint_{\partial V} \bar{F} \cdot d\bar{S} = \iiint_V \operatorname{div} \bar{F} dV, \quad (2.87)$$

où  $V$  désigne le volume total considéré et  $\partial V$  — qui se lit « bord de  $V$  » — désigne la surface orientable délimitant ce volume<sup>a</sup>.

<sup>a</sup> Pour lier un volume et sa surface extérieure, on trouve deux notations. Soit on part d'une surface  $S$  et on désigne son intérieur par  $V_S$ . À l'inverse, on peut partir d'un volume  $V$  et désigner sa surface extérieure par  $\partial V$ . On a donc une équivalence entre  $S$  et  $\partial V$ , d'une part, et entre  $V_S$  et  $V$ , d'autre part.

Pour que le raisonnement précédent soit valable il est indispensable que le calcul du flux direct et via la divergence puisse être effectué sur chacun des tétraèdres intérieurs au volume.

### ■ Petit poisson rouge... peut-on passer la barre rouge ?

Oui, à condition de répondre à ma question !

En vous basant sur un des exemples donnés précédemment, montrez qu'un champ à divergence nulle peut être associé à la conservation de la grandeur donnée par l'intégrale de flux qui apparaît dans l'équation (2.87).

### 2.2.5 Synthèse

Dans ce chapitre, nous avons introduit l'opérateur gradient. Celui-ci apparaît naturellement lorsque l'on recherche la direction de plus grande pente d'une fonction. Le mot pente est naturellement associé à un champ d'altitude, mais l'opérateur gradient désigne la direction de plus grande variation de n'importe quel champ scalaire. Nous avons ensuite établi un lien entre la notion de circulation d'un champ et l'opérateur rotationnel, qui est une combinaison de l'opérateur gradient et du produit vectoriel. L'opérateur rotationnel désigne la direction de plus grande rotation pour un champ de vitesse, mais s'applique à n'importe quel champ vectoriel. Finalement, nous avons introduit la notion de flux et l'avons reliée à l'opérateur divergence qui est une combinaison de l'opérateur gradient et du produit scalaire. L'opérateur divergence est lié à la notion de flux et à l'idée de conservation de certaines quantités.

Le *gradient* est donc une *densité linéique d'accroissement orientée*, le *rotationnel* est une *densité surfacique de circulation orientée* et la *divergence* est une *densité volumique de flux sortant*.

L'opérateur gradient est un opérateur différentiel. Il permet de remplacer localement un champ par son approximation linéaire, lorsque celle-ci existe. Il est naturellement omniprésent en physique car il permet d'appliquer des lois localement (pensez à de tout petits volumes). Son utilisation est indispensable quand les paramètres d'un milieu varient en fonction de l'espace.

Le gradient est associé à l'opérateur nabla défini différemment dans différents systèmes de coordonnées (cartésiennes, cylindriques, sphériques, ...)<sup>a</sup>

Les notions centrales en physique de variation, circulation, flux sont donc reliées à ces trois opérateurs différentiels. Ils s'utilisent entre autres pour décrire l'élasticité dans les solides, le comportement des fluides, le transfert de chaleur, et bien sûr le champ électromagnétique qui sera étudié dans les chapitres suivants.

Ces systèmes sont les plus courants, mais il en existe bien d'autres : ellipsoïdales, paraboloïdales, coniques, toroïdales, parmi lesquels on compte 14 systèmes curvilignes orthogonaux [2].



L02P6



## 2.3 Équations de Maxwell

L'électromagnétisme est régi par les équations de Maxwell. Ces équations unissent les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ , appelés respectivement « champ électrique » et « champ magnétique ». Nous verrons que ces deux champs constituent le champ électromagnétique qui est une seule entité.<sup>b</sup>

Un *champ* est une grandeur définie de manière unique en chaque point de l'espace, au contraire des notions de *circulation*, *flux*, *charge électrique*, qui sont des notions globales, définies par rapport à une ligne, une surface ou un volume. Ces grandeurs résultant d'une somme s'expriment au moyen d'intégrales.

Une expérience consiste en général à mesurer une de ces quantités intégrales (charge, flux, travail, etc.). Si l'expérience présente une géométrie simple et que les contours sont bien choisis, ces expériences permettent de remonter aux grandeurs locales.

Les chapitres qui précèdent permettent de passer des grandeurs locales aux grandeurs globales. Dans ce passage, on introduit des grandeurs linéaires, surfaciques ou volumiques, comme la densité volumique de charge  $\rho$  et la densité volumique de courant  $\vec{J}$ .

Les cours d'électrostatique et de magnétostatique se basent souvent sur l'approche expérimentale développée par les pionniers de l'électromagnétisme en partant de lois intégrales, comme la *loi d'Ampère*, la *loi de Gauss* ou la *loi de Biot-Savart*.

Les formes locales de ces lois s'obtiennent en considérant un volume mésoscopique sur lequel on peut calculer les intégrales en supposant que les variations de champ sont linéaires. En procédant de la sorte, on voit apparaître des expressions différentielles faisant intervenir les champs.

Nous avons vu que les trois opérateurs différentiels principaux peuvent s'exprimer au départ de l'opérateur *gradient*. C'est donc naturellement à l'aide de cet opérateur que s'exprimeront les équations décrivant le lien entre les sources (densité de charges et de courant) et les composantes du champ électromagnétique.

<sup>b</sup> L'utilisation de la notation  $\vec{E}$  pour la composante électrique du champ et  $\vec{B}$  pour la composante magnétique peut sembler bizarre. Pourquoi utiliser une fois une flèche et une autre fois une barre? Dans ce cours, nous utilisons la barre pour désigner un vecteur au sens mathématique et la flèche pour désigner un vecteur au sens physique. Vous constaterez dans les exercices que certaines hypothèses de symétries permettent de simplifier les calculs. Si les symétries s'appliquent directement aux vecteurs comme  $\vec{E}$ , elles ne s'appliquent pas aux pseudo-vecteurs comme  $\vec{B}$ .

### 2.3.1 Équations de Maxwell statiques

#### Loi d'Ampère

La *loi d'Ampère* relie la densité volumique de courant  $\vec{J} = \eta q \vec{v}$ , avec  $q$  la *charge électrique* d'une particule,  $\vec{v}$ , sa vitesse et  $\eta$  sa densité volumique. Elle s'exprime sous la forme locale

$$\overline{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{J}, \quad (2.88)$$

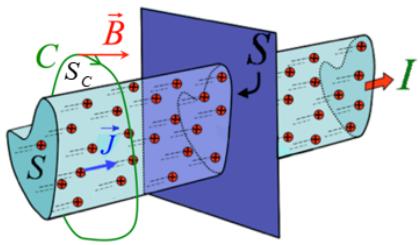
qui conduit par intégration sur une surface orientée  $\mathcal{C}$  à

$$\iint_{S_C} \overline{\text{rot}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_C} \vec{J} \cdot d\vec{S}, \quad (2.89)$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \iint_{S_C} \vec{J} \cdot d\vec{S} = I_{S_C}, \quad (2.90)$$

$$(2.91)$$

où  $C$  est le *contour orienté* associé à la *surface orientée*  $S_C$  et où le *théorème circulation-rotationnel de Stokes* a été appliqué, ce qui permet de définir le lien entre la circulation du champ magnétique sur un contour orienté fermé et le courant total  $I_{S_C}$  traversant cette surface dans la direction de la normale à la surface orientée.



**FIGURE 2.18 :** Figure illustrant le contexte d'application de la loi d'Ampère : une densité de courant  $\vec{J}$  est associée au mouvement des charges dans le milieu. Ces charges sont symbolisées par des billes rouges et animées d'une vitesse moyenne  $\vec{v}$  proportionnelle à  $\vec{J}$ . La circulation du champ  $\vec{B}$  sur le contour orienté  $C$  est associée au courant  $I_{S_C}$  qui est le flux de la densité volumique de courant traversant la surface  $S_C$ .

### Loi de Gauss magnétique

La loi de Gauss magnétique s'exprime sous forme locale par

$$\text{div } \vec{B} = 0, \quad (2.92)$$

qui nous permet d'affirmer que le flux du champ magnétique  $\vec{B}$  sur une surface  $S$  fermée est toujours nul, puisque

$$\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iiint_{V_S} \text{div } \vec{B} dV = 0, \quad (2.93)$$

### Loi de Gauss électrique

La *loi de Gauss* électrique s'exprime sous forme locale par

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (2.94)$$

Elle nous indique que flux du champ électrique  $\vec{E}$  sur une surface fermée  $S$  est équivalent à la charge totale  $Q$  contenue dans le volume  $V_S$  défini par cette surface (au facteur  $\epsilon_0$  près),

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_{V_S} \text{div } \vec{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{V_S} \rho dV = Q. \quad (2.95)$$

$$(2.96)$$

### Loi de Faraday

La *loi de Faraday* s'exprime sous la forme locale

$$\overline{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}, \quad (2.97)$$

qui indique que la circulation du champ électrique sur un contour fermé est toujours nulle. Elle montre qu'en régime statique, la circulation entre deux points  $A$  et  $B$  ne dépend pas du trajet suivi et

donc que le champ électrostatique  $\vec{E}$  dérive d'un potentiel  $V$ .

$$\iint_{S_C} \overline{\text{rot}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (2.98)$$

$$\text{int}_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} + \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (2.99)$$

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = -[V(\vec{r}_B) - V(\vec{r}_A)], \quad (2.100)$$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V. \quad (2.101)$$

La définition du potentiel est choisie avec un signe qui garantit qu'une particule chargée positivement se dirige vers les régions de potentiel les plus basses.

### 2.3.2 Équations de Maxwell dynamiques

Nous allons ici compléter les équations de Maxwell statiques en leur ajoutant des termes dynamiques. Il est possible de relier l'ajout de ces termes à des évolutions historiques dans la compréhension de l'électricité et du magnétisme qui ont conduit à l'unification de ces deux notions. Nous préférons décrire les équations complètes et les étudier ensuite pour en déduire les propriétés du champ électromagnétique dans des situations de plus en plus élaborées.

Les termes à ajouter dans les équations de Maxwell sont des termes dynamiques, qui s'expriment au moyen de dérivées partielles par rapport au temps<sup>a</sup>. Ces termes modifient les lois de circulation d'Ampère et Faraday et laissent inchangées les lois de flux de Gauss. L'électrostatique et la magnétostatique se retrouvent en supprimant ces deux termes dynamiques.

#### Équations de Maxwell dynamiques microscopiques

Les équations de Maxwell prennent la forme suivante, dans laquelle nous avons placé à gauche les termes du champ électromagnétique et à droite les termes de source à l'origine de ce champ,

$$-\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \overline{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{J}, \quad (2.102)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0, \quad (2.103)$$

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (2.104)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \overline{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}. \quad (2.105)$$

<sup>a</sup> Nos définitions peuvent être questionnées. En effet, si on définit la densité volumique de courant comme entité de base, elle est préservée en régime statique. Si, par contre, on se réfère à  $\vec{J} = \eta \rho \vec{v} = \eta \rho \partial_t \vec{r}$ , en régime statique,  $\partial_t \vec{r} = \vec{0}$  conduirait à  $\vec{J} = 0$ . Considérer les courants continus comme statiques est lié au principe de relativité dans la mesure où ce qui est un courant de charges à vitesse fixe dans un repère peut toujours se ramener à ce qui est une densité de charge immobile dans un repère en translation à vitesse constante.

Dans les chapitres qui suivent, nous allons étudier les équations d'Ampère et Faraday dynamique.

#### Force de Lorentz

Afin de comprendre l'impact du champ électromagnétique ( $\vec{E}, \vec{B}$ ) sur une charge  $q$  évoluant à une vitesse  $\vec{v}$ , nous allons combiner la

force électrique de Coulomb  $\vec{F}_e = q\vec{E}$  et la force magnétique de Laplace  $\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$  qui agissent sur cette charge en une force unique, dite *force de Lorentz*,

$$\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad (2.106)$$

qui est valable pour les faibles vitesses  $|\vec{v}|^2 \ll c^2$ , où  $c$  est la *vitesse de la lumière* dans le vide, ce que nous comprendrons dans le chapitre sur la relativité restreinte. Nous verrons que l'expression relativiste de cette force est donnée par (15.48).

## 2.4 Le coin des assistant·es

### Circulation

Pour déterminer la circulation d'un champ  $\vec{F}$  le long d'un contour  $C$ , nous découpons le contour en éléments de contour  $d\vec{r}$ . Pour déterminer à quel point le champ  $\vec{F}$  est aligné sur cet élément de contour, nous calculons le produit scalaire  $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ . Pour obtenir la circulation totale le long de ce contour, nous additionnons la contribution de chaque élément de contour en intégrant sur tout le contour,

$$\mathcal{C} = \int_C \vec{F} \cdot dr. \quad (2.107)$$

Dans le cas d'une circulation sur un contour **fermé**, nous pouvons relier la circulation de  $\vec{F}$  sur ce contour à l'évolution de  $\vec{F}$  sur la *surface orientée* sous-tendue par ce même contour ( $\bar{S} = S\bar{n}$ , où  $\bar{n}$  est la normale). C'est le *théorème circulation-rotationnel de Stokes*,

$$\mathcal{C}_{ext} = \oint_{ext} \vec{F} d\vec{r} = \iint d\bar{S} \cdot \overline{\text{rot}} \vec{F}, \quad (2.108)$$

où l'opérateur intervenant dans l'intégrale de surface est ce qu'on appelle le rotationnel  $\overline{\text{rot}} \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$ . Le rotationnel est une densité surfacique de circulation orientée. Notons que le sens de la circulation le long du contour est donné par la règle de la main droite appliquée à la normale extérieure de la surface (je pointe le pouce de ma main droite dans le sens de la normale  $\bar{n}$  et le sens dans lequel mes doigts se referment me donne le sens de la circulation).

### Flux

Pour déterminer le flux d'un champ  $\vec{F}$  au travers d'une *surface orientée*  $\bar{S}$ , nous découpons cette surface en éléments de surface  $d\bar{S}$ . Rappelons que  $\bar{S} = \bar{n}S$ , où  $n$  est la normale pointant vers l'extérieur de la surface. Pour déterminer à quel point le champ  $\vec{F}$  sort de l'élément de surface, nous calculons le produit scalaire  $\vec{F} \cdot d\bar{S} = \vec{F} \cdot \bar{n}dS$ . Afin d'obtenir le flux du champ au travers de la surface totale, il ne reste plus qu'à intégrer sur toute cette surface,

$$\Phi = \int_S \vec{F} \cdot \bar{n} dD = \int_S \vec{F} \cdot d\bar{S}. \quad (2.109)$$

En étudiant le flux d'un champ  $\vec{F}$  sortant d'une surface orientée et **fermée**, il est possible de relier le flux sortant à l'évolution de  $\vec{F}$  dans le volume  $V$  contenu dans cette surface fermée. C'est le *théorème flux-divergence d'Ostrogradski-Gauss*,

$$\Phi_{ext} = \iint_S \vec{F} \cdot d\bar{S} = \iiint_V \text{div} \vec{F} dV, \quad (2.110)$$

où l'opérateur intervenant dans l'intégrale de volume est ce qu'on appelle la divergence :  $\text{div} \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ . La divergence est la densité volumique de flux sortant.

## 2.5 Questions théoriques

1. Expliquez ce qu'est un champ irrotationnel. Établissez un lien avec la notion de potentiel.
2. Expliquez pourquoi le flux mesuré à la sortie d'un tuyau d'arrosage ne dépend pas de l'angle auquel est coupée l'extrémité du tuyau (extrémité droite ou biseautée).
3. Quelle équation de Maxwell est associée à la loi des mailles ?
4. Quelle équation de Maxwell est associée à la loi des nœuds ?

## 2.6 Exercices

### Exercice 2.1

Calculez la circulation du champ vectoriel  $\vec{F}_0$  constant sur la courbe  $\gamma$  correspondant à un cercle de rayon  $a$  et de centre 0,0.

### Exercice 2.2

Pour chacun des champs représentés à la figure E.2.1, déterminez s'il est à divergence nulle et/ou à rotationnel nul.

### Exercice 2.3

Considérez un contour orienté quelconque  $C$ . Appuyez deux surfaces distinctes sur ce contour et notez-les  $S_{C1}$  et  $S_{C2}$ . Ces surfaces sont caractérisées par les normales  $\vec{n}_1$  et  $\vec{n}_2$ .

Orientez ces surfaces en suivant la convention des *surface orientées* et *contour orientés*. En utilisant le théorème de Gauss, montrez que n'importe quel champ  $\vec{F}$  de divergence nulle totalisera le même flux au travers de chacune des deux surfaces  $S_1$  et  $S_2$ .

Expliquez le lien entre la convention d'orientation des surfaces apparaissant dans le *théorème flux-divergence d'Ostrogradski-Gauss* et les normales  $\vec{n}_1$  et  $\vec{n}_2$ .

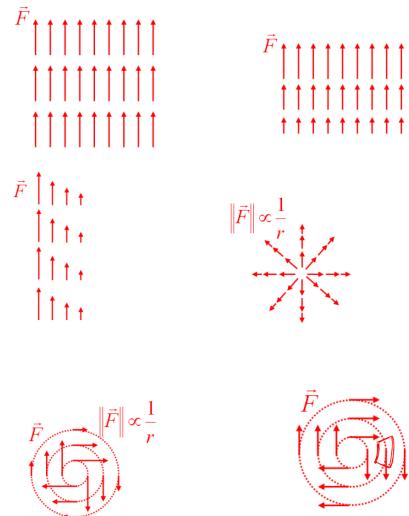
### Exercice 2.4

Il arrive souvent qu'on doive prendre un opérateur différentiel de produit (scalaire, vectoriel, etc.) Comme pour tout opérateur différentiel, le gradient et ses dérivées appliqués à un produit se développent en une somme de deux termes où l'opérateur porte sur une partie du produit puis sur l'autre. Feynman a proposé une manière de mener ces calculs, comme dans l'exemple suivant :  $\overrightarrow{\text{grad}}(fg) = \overrightarrow{\text{grad}}_f(fg) + \overrightarrow{\text{grad}}_g(fg) = g\overrightarrow{\text{grad}}f + f\overrightarrow{\text{grad}}g$ . En utilisant la notation de Feynman où l'on met en indice la variable sur laquelle porte l'opérateur et la notation  $\nabla$  pour représenter les différents opérateurs, développez les expressions suivantes :

- a)  $\text{div}(f\vec{a})$
- b)  $\overline{\text{rot}}(f\vec{a})$
- c)  $\text{div}(\vec{a} \times \vec{b})$
- d)  $\overline{\text{rot}}(\vec{a} \times \vec{b})$
- e)  $\vec{a} \times \overline{\text{rot}}\vec{b}$

### Exercice 2.5

En utilisant les résultats qui précèdent, calculez la dérivée directionnelle d'un vecteur  $\vec{b}$  dans la direction  $\vec{a}$ , définie par  $\partial_{\vec{a}}\vec{b} = (\vec{a} \cdot \overline{\text{grad}})\vec{b}$ .



**FIGURE E.2.1 :** Diverses configurations de champs. Pour les champs décroissant en  $1/r$ , l'origine est le centre de symétrie.

### Exercice 2.6

Les opérateurs d'opérateurs apparaissent naturellement dans les calculs. Notamment, lorsqu'on combine plusieurs équations, comme pour trouver l'équation d'ondes au départ des équations de Maxwell. Lors de cette combinaison, on distingue deux opérateurs particuliers : le Laplacien et le Laplacien vectoriel. Développés sur une base cartésienne fixe, par exemple  $x, y, z$ , ils prennent tous deux la forme  $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 = \vec{\Delta}$ , le Laplacien s'appliquant à une fonction scalaire et le Laplacien vectoriel à un vecteur.

Développez les expressions suivantes :

- a)  $\overline{\text{div}} \overrightarrow{\text{grad}} f$
- b)  $\overline{\text{rot}} \overrightarrow{\text{grad}} f$
- c)  $\overline{\text{div}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{a}$
- d)  $\overline{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{a}$
- e)  $\overrightarrow{\text{grad}} \overline{\text{div}} \vec{a}$

### Exercice 2.7 Champ tourbillonnaire

On considère le tourbillon décrit à la section 2.1.8, associé au champ de vitesse

$$\vec{v} = \frac{K}{\rho} \vec{1}_\theta.$$

On demande de calculer la circulation :

1. autour d'un contour fermé passant autour de l'origine ( $\rho = 0$ );
2. autour d'un contour fermé n'incluant pas l'origine.

**Récapitulatif des notions vues dans cette leçon**

Indispensable	Nécessaire	Intéressant
<ul style="list-style-type: none"><li>— Définition et signification du rotationnel.</li><li>— Définition et signification de la divergence.</li><li>— Théorème de la circulation-rotationnel.</li><li>— Théorème du flux-divergence.</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>— Reconnaître des lignes de type irrotationnel, solénoïdales, via les lignes orthogonales aux lignes de champ.</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>— Savoir calculer <math>\nabla</math> en base cartésienne, en base cylindrique et en base sphérique.</li></ul>



# Loi de Faraday et induction électromagnétique

3  
Leçon

## ■ Pré-requis pour cette leçon ■

- |   |                        |
|---|------------------------|
| — notion de force                               | — force de Laplace     |
| — théorème circulation-rotationnel de Stokes    | — charge               |
| — théorème flux-divergence d'Ostrogradski-Gauss | — champ électrique     |
| — travail                                       | — champ magnétique     |
| — potentiel                                     | — flux                 |
| — gradient                                      | — circulation          |
| — rotationnel                                   | — surface orientée     |
|   | — intégrale de contour |
|   | — intégrale de surface |

EN ÉLECTROSTATIQUE, on apprend que le champ magnétique est une manifestation de la charge électrique en mouvement. Dans le cadre de la magnétostatique, on se limite au cas de mouvements de charges permanents invariables se traduisant par des courants (ou plus précisément des densités de courants) stationnaires. Nous allons voir dans cette partie du cours que les charges électriques se manifestent de façon plus complexe lorsque les courants sont variables. Nous verrons en particulier que les champs électrique et magnétique sont intimement liés entre eux alors que jusqu'à présent nous avions considéré qu'ils constituent deux champs bien distincts et indépendants, l'un étant créé par les charges électriques et l'autre par les courants électriques. En électromagnétisme, le lien entre les champs électrique et magnétique est tel que l'on ne peut pas les considérer l'un sans l'autre; ils sont inséparables dans la description mathématique des phénomènes liés à la charge électrique et sont considérés comme constituant une seule et unique entité physique que l'on appelle le « *champ électromagnétique* » [voir Annexe D]. Bien que ce point de vue fasse consensus au sein de la communauté scientifique, il n'est pas toujours fidèlement exposé dans les cours de physique. Voir à ce sujet [3]. Cette référence recommande les cours [4, 5] pour aborder le mieux possible ces notions. Dans ce cours, nous suivrons également [6].

L'électromagnétisme est la discipline scientifique qui décrit les systèmes de charges électriques dans les situations les plus générales de charges et de courants variables. En raison des progrès



L03P1



**TABLE 3.1 :** Récapitulatif des notions d'électrostatique et magnétostatique. L'électromagnétisme ne fait pas d'hypothèses sur la stationnarité des courants et charges.

Domaine	Quantité stationnaire
Électrostatique	distribution de charge
Magnétostatique	courant électrique
Electromagnétisme	aucune.

techniques considérables qu'elle a permis de réaliser, la théorie de l'électromagnétisme est devenue un sujet d'étude incontournable dans les études d'ingénieur. Ce chapitre a pour but de vous familiariser avec les notions de base de l'électromagnétisme.

### 3.1 Électromotance

*L'électromotance*, désignée par  $\mathcal{E}$ , est le nom moderne donné au concept de *force électromotrice*. La raison est que l'électromotance n'est pas une force, mais la circulation d'un champ de force par unité de charge. L'électromotance présente donc des similitudes avec le potentiel électrostatique, en termes de définition et d'unités. Pour bien comprendre la différence entre l'électromotance et le potentiel, nous partirons de la notion de force appliquée à un objet de taille très réduite. Nous procéderons en deux temps, en considérant un objet doté d'une masse, puis en considérant un objet doté d'une charge. Cet objet peut correspondre à une particule, comme un électron ou un proton, ou correspondre à un petit volume sur lequel une force s'applique.

#### 3.1.1 Forces et masse

Un objet doté d'une masse  $m$  est attiré par un autre objet doté d'une masse  $M$ , selon la loi de gravitation

$$\vec{F}_g = m \frac{GM\vec{r}}{r^3}, \quad (3.1)$$

où  $G \approx 6.674 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$  est la constante gravitationnelle et  $\vec{r}$  désigne le vecteur allant du centre de gravité de l'objet de masse  $m$  au centre de l'objet de masse  $M$  :  $\vec{r} = P_m \vec{P}_M$ , où  $P_m$  et  $P_M$  désignent les points auxquels sont positionnées les deux masses.

#### Potentiel gravitationnel

La force gravitationnelle subie par la masse  $m$  dérive d'un potentiel qui s'écrit  $V_g = mGM/r$ , avec  $r = |\vec{r}|$ . Une masse  $m$  sous l'influence d'une masse  $M$  subit donc une force  $\vec{F}_g = -\overrightarrow{\text{grad}} V_g = -m\overrightarrow{\text{grad}}(GM/r)$ . Il est tentant de définir un potentiel par unité de masse (potentiel massique),  $U = V_g/m = GM/r$ , indépendant de la masse à laquelle il s'applique. Ce potentiel massique décrit donc l'action d'une masse sur les objets qui l'entourent. Il peut être défini pour une planète, par exemple.

#### Accélération gravitationnelle

Partant du potentiel massique, on peut définir une force massique (par unité de masse),

$$\vec{f}_g = \frac{\vec{F}_g}{m} = -GM\overrightarrow{\text{grad}} 1/r = GM/r^2 \vec{1}_r, \quad (3.2)$$

où le vecteur  $\vec{l}_r$  pointe de  $m$  vers  $M$ , comme précédemment. Comme cette force massique a les dimensions d'une accélération, on l'appelle généralement accélération gravitationnelle. On peut la calculer à la surface de la terre, en considérant que  $r$  est le rayon terrestre et  $M$  est la masse terrestre, ce qui donne

$$g = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2} \cdot 5.97 \times 10^{24} \text{ kg} / (6371 \text{ km})^2 = 9.81 \text{ ms}^{-2}. \quad (3.3)$$

On peut également définir  $\vec{g}$  qui pointe vers le centre de la terre.

### Forces d'origine non gravitationnelle

Les objets de notre quotidien baignent dans le champ gravitationnel et subissent donc cette force en permanence. D'autres forces sont également présentes. Il peut s'agir de la force d'un ressort attaché à l'objet, dont l'expression  $\vec{F} = -\kappa \delta x$  est indépendante de la masse de l'objet; d'une force d'origine électromagnétique, d'une force de pression (par exemple si on souffle sur l'objet), d'une force d'origine chimique comme la force liée à la pression osmotique, etc. Ces forces additionnelles ne sont généralement pas liées à la masse. On peut alors choisir d'écrire la force totale comme

$$\vec{F}_t = \vec{F}_g + \vec{F}_{ng} = mGM \overrightarrow{\text{grad}} 1/r + \vec{F}_{ng}, \quad (3.4)$$

où  $\vec{F}_{ng}$  désigne l'ensemble des forces non gravitationnelles. La force massique (force par unité de masse) prend alors la forme

$$\vec{f}_t = \vec{g} + \vec{f}_{ng} = GM \overrightarrow{\text{grad}} 1/r + \frac{1}{m} \vec{F}_{ng}. \quad (3.5)$$

On constate que la division par la masse  $m$  de l'objet qu'on étudie simplifie l'expression de la force gravitationnelle, mais pas celle de la force d'origine non gravitationnelle.

### Importance des forces d'origine non gravitationnelle

Les forces d'origine non gravitationnelles permettent d'aller à l'encontre de la force gravitationnelle. Elles permettent, par exemple, à un objet de s'élever. Plus généralement, elles permettent l'entraînement. Pour mettre en mouvement une grande roue, comme illustré à la figure 2.6, la force gravitationnelle n'est pas suffisante : il faut lui adjoindre une force qui ne dérive pas d'un potentiel. En effet, supposant que le champ gravitationnel est constant sur toute l'étendue de la grande roue, on peut utiliser le résultat de l'exercice 2.1 pour arriver à cette conclusion. D'un point de vue intuitif, chaque nacelle qui descend d'un côté de la roue fournit l'énergie qui permet à une nacelle de l'autre côté de remonter. Le bilan est que l'énergie totale apportée par le champ gravitationnel à une grande roue est nulle.



**FIGURE 3.1 :** Le jet d'eau à Genève baigne dans le champ gravitationnel terrestre. À sa base, une pompe ajoute une force d'origine non gravitationnelle qui le propulse en l'air. La force agissant sur le jet d'eau dérive d'un potentiel presque partout, c'est-à-dire dans le domaine qui exclut la pompe.

### Identification des forces non conservatives

Les forces conservatives permettent de définir un potentiel et correspondent au gradient de ce potentiel. Comme le rotationnel d'un gradient est nul, on peut identifier les forces non conservatives comme celles dont le rotationnel est non nul. Pour les forces agissant sur un objet ayant une masse, on a  $\overline{\text{rot}} \vec{F}_g = \vec{0}$  et donc les forces non conservatives sont aussi les forces non gravitationnelles (indépendantes de la masse).

#### 3.1.2 Forces et charge

L'étude de l'électrostatique a montré de nombreuses similitudes entre la force gravitationnelle et la *force coulombienne*. En effet, un objet portant une charge  $q$  est influencé par une charge  $Q$  via la force coulombienne  $\vec{F}_q = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}$ , où  $\vec{r}$  est le vecteur défini par  $\vec{r} = \vec{P}_Q \vec{P}_q$ , où  $P_Q$  désigne le point où se trouve la charge  $Q$  et  $P_q$  le point où se trouve la charge  $q$  subissant la force.

#### Potentiel électrique en électrostatique

Le potentiel électrostatique est donné par  $V_{es} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r}$ . On peut définir un potentiel par unité de charge, ou potentiel électrique

$$U = \frac{V_{es}}{q} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (3.6)$$

qui ne dépend pas de la charge  $q$  sur laquelle il agit.

#### Champ électrostatique

Le champ électrique, défini dans le cadre électrostatique correspond à la densité électrique de force liée au potentiel électrique. On note ce champ

$$\vec{E}_s = -\overrightarrow{\text{grad}} U = -\frac{1}{q} \overrightarrow{\text{grad}} V_{es} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \overrightarrow{\text{grad}} 1/r \quad (3.7)$$

#### Forces d'origine non électrostatique

Les forces d'origine non électrostatiques, qui ne dérivent pas d'un potentiel, vont permettre la mise en mouvement de charges. Ce mouvement peut être dû à des réactions chimiques, l'entraînement d'un ruban dans un générateur de Van de Graaff, le mouvement des gouttes d'eau dans l'atmosphère par convection, etc.

Comme pour le cas de la masse et de la gravitation, on peut écrire la force totale agissant sur un volume chargé

$$\vec{F}_t = \vec{F}_{es} + \vec{F}_{nes} = -q \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \overrightarrow{\text{grad}} 1/r + \vec{F}_{nes}, \quad (3.8)$$

où  $\vec{F}_{nes}$  désigne l'ensemble des forces non électrostatiques. La force électrique (force par unité de charge) prend alors la forme

$$\vec{f}_t = \vec{f}_{es} + \vec{f}_{nes} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \overrightarrow{\text{grad}} 1/r + \frac{1}{q} \vec{F}_{nes}. \quad (3.9)$$



**FIGURE 3.2 :** Le champ électrique créé par cette pile dérive d'un potentiel presque partout. Dans le domaine qui exclut la batterie, on peut écrire  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$ . Cela permet de définir une différence de potentiel entre les deux bornes, qu'on appelle *tension de source* ou *électromotance* électrochimique (anciennement dénommée *force électromotrice* électrochimique.).

où  $\vec{F}_{nes}$  désigne la composante d'origine *non électrostatique*.

À nouveau, l'entraînement des particules chargées n'est possible que grâce à la partie qui ne dérive pas du potentiel et qui permet d'avoir  $\overline{\text{rot}} \vec{f}_t \neq 0$ .

### Électromotance

L'*électromotance* désigne la circulation par unité de charge de la force non électrostatique  $\vec{F}_{nes}$  :

$$\mathcal{E} = \int \frac{\vec{F}_{nes}}{q} \cdot d\vec{\ell}. \quad (3.10)$$

Lorsque l'*électromotance* est d'origine électrochimique, comme dans une batterie, la Commission électrotechnique internationale a émis la recommandation de l'appeler *tension de source*.<sup>a</sup>

### Électromotance et énergie

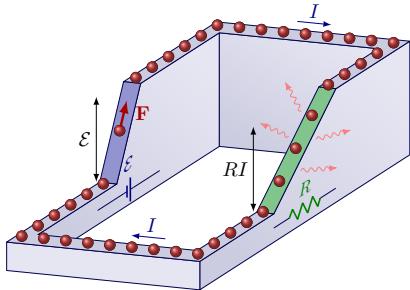
On lit souvent que la *force électromotrice*, et donc l'*électromotance*, désigne le travail fourni par une source. Ceci n'est vrai que si les charges circulent effectivement. En effet, l'*électromotance* représente la circulation d'une force sur un contour. Si les charges sont libres de se déplacer, elles suivront un chemin  $C$  et on pourra calculer le travail nécessaire à effectuer ce déplacement sur un intervalle de temps donné. Néanmoins, dans une batterie en circuit ouvert, les charges ne se déplacent pas et l'*électromotance* peut être définie malgré tout. Lorsque les charges se mettent en mouvement, une résistance s'oppose à ce mouvement. Cette résistance correspond à une force additionnelle qui diminue l'*électromotance* totale. L'*électromotance* correspond donc en général en l'énergie maximale que le système pourrait fournir si les charges effectuaient leur mouvement à une vitesse quasi-nulle.

<sup>a</sup> *L'électromotance est un concept souvent mal compris, notamment parce que sa définition varie souvent en fonction du contexte. En effet, nous venons de définir l'électromotance comme une circulation. Il est donc indispensable de spécifier le chemin d'intégration pour connaître la tension de source (électromotance) aux bornes d'une batterie. Pourtant, sur une batterie, on indique simplement la tension entre les bornes + et -, comme 1.5 V. Cette indétermination du chemin vient du fait que les sources de tension sont associées à un champ dérivant d'un potentiel presque partout (voir Sec. 2.1.8). Le chemin suivi doit passer dans l'électrolyte de la batterie pour rejoindre les deux bornes. En dehors du volume de la batterie, le champ semblera dériver d'un potentiel. La tension de source pourra donc être traitée comme une différence de potentiel presque partout.*

**Analogie du tourniquet** Stefan, Denis, Eliot et Nikolas sont à la plaine de jeux avec leurs parents. Ils poussent un tourniquet. Le couple total que les 4 enfants exercent au centre du manège est lié à la circulation sur son contour. Cette circulation met le tourniquet en mouvement. Ce faisant, le tourniquet se met à grincer. Il dissipe donc une partie de l'énergie communiquée sous forme acoustique. Une autre partie se perd dans les frottements. Ces frottements s'ajoutent au couple induit par les 4 enfants, mais agissent en sens opposé. Il en résulte un couple plus faible que celui transmis par les enfants. Il se pourrait qu'un bâton abandonné dans le tourniquet bloque le tourniquet. À l'arrêt, le bâton n'exerce aucune force. Lorsque les enfants appliquent une couple, qui peut se voir comme un entraînement lié à la circulation de la force appliquée sur le cercle extérieur au tourniquet, le bâton coincé équilibre le couple appliqué et la vitesse reste nulle. Il n'y a pas de travail fourni, mais la circulation est non nulle puisque les enfants exercent un couple.

Dans ce raisonnement, on distingue bien le couple fourni par les enfants (source étudiée) du couple dû à la dissipation d'énergie (grincement, échauffement) et du couple total (qui est nul lorsque le bâton bloque le mouvement).

Lorsqu'on parle d'*électromotance*, on identifie de même une source et on calcule la circulation qu'elle peut induire par unité de charge (voir figure 3.3). Dans un système réel, d'autres forces s'ajoutent à cette source (résistance liée à la dissipation thermique, etc.). En fonction du contexte, on peut les considérer comme une dissipation d'énergie, les inclure dans l'*électromotance* ou même les considérer comme une contre-*électromotance* (ou force contre-*électromotrice*).



**FIGURE 3.3 :** L'*électromotance* correspond à la circulation par unité de charge qui s'applique aux charges. Elle augmente le potentiel, des charges comme un escalator augmentent l'énergie potentielle des particules massiques. Ce potentiel permet aux charges de circuler dans un circuit électrique, en y perdant de l'énergie potentielle.

Cette double négation signifie simplement que l'*électromotance* peut être proportionnelle à la charge.

### Forces d'origine non électrostatique proportionnelles à la charge

Dans la suite de cette leçon, nous allons voir que l'*électromotance* contient un terme proportionnel à la charge électrique, ce qui complique l'analyse, par rapport au cas de la gravitation. En effet, dans le cas gravitationnel, les termes non conservatifs étaient non gravitationnels, non proportionnels à la masse.

Dans le cas électromagnétique, nous allons voir que certains termes non conservatifs associés à l'*électromotance* peuvent être proportionnels à la charge  $q$ . En particulier, lorsqu'un objet chargé se déplace dans un champ magnétique à vitesse  $\vec{v}$ , il subit une force non électrostatique directement proportionnelle à sa charge et donnée par la force magnétique de Laplace  $\vec{F}_M = q(\vec{v} \times \vec{B}) = q\vec{f}_M$  (voir Fig. 3.5).

L'*électromotance* est donc purement non conservative mais pas nécessairement d'origine non électromagnétique<sup>a</sup>.

#### 3.1.3 Extension de la notion de champ électrique

En électromagnétisme, le champ électrique ne dérive pas systématiquement d'un potentiel. En particulier, l'équation de Faraday,  $\overline{\text{rot}} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$ , montre que si  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq \vec{0}$ , on ne peut avoir  $\overline{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}$ . Ceci indique bien que le champ électrique contient une composante *non électrostatique*. Cette composante est bien souvent appelée *champ électrique induit*, pour les mêmes raisons que le champ  $\vec{B}$  est appelé *champ d'induction*. L'induction supposerait toutefois une causalité : les variations de  $\vec{B}$  devraient précéder les variations de  $\vec{E}$ . Or les équations de Maxwell montrent ces variations doivent être simultanées (cf. Annexe D).

En électromagnétisme, la force de Lorentz regroupe le champ électrique et le champ magnétique sous la forme  $\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = q(\vec{f}_E + \vec{f}_M)$ .

Nous allons étudier cette force et en relier les effets à la loi de Faraday. Pour cela, nous aurons recours aux *équations de Maxwell*, ainsi qu'au *théorème circulation-rotationnel de Stokes*, au *théorème flux-divergence d'Ostrogradski-Gauss* et à l'*électromotance*.

## 3.2 Électromotance électromagnétique

Ce titre peut sembler bizarre en première lecture. Analysons-le. L'électromotance désigne le rapport entre :

- la circulation d'un champ de force non conservatif agissant sur un contour contenant des objets portant une même charge;
- cette charge.

Le mot électromagnétique indique que la force qui agit sur ces objets est d'origine électromagnétique. Rappelons que l'électromotance peut être électrochimique (comme dans une pile), électromécanique (comme dans l'électricité statique), etc.

## 3.3 Force de Lorentz, électromotance et relativité

L'électromotance électromagnétique et liée à la Force de Lorentz.

Pour comprendre comment elle se manifeste, nous allons étudier le mouvement d'une tige métallique qui se déplace dans un champ magnétique. Nous ferons cela depuis deux repères, l'un fixe par rapport au laboratoire et l'autre fixe par rapport à la tige.

### 3.3.1 Conducteur en mouvement dans un champ fixe

Considérons la figure 3.4 qui montre un conducteur en mouvement à vitesse constante dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B}$ , en l'absence de champ électrique ( $\vec{E} = \vec{0}$ ). Une telle situation peut être obtenue, par exemple, en imposant à une tige de cuivre rectiligne un mouvement de translation latéral dans l'entrefer d'un aimant. Le schéma de gauche de la figure 3.4 illustre ceci, avec  $\vec{v}$  la vitesse de translation de la tige.

#### Géométrie du problème

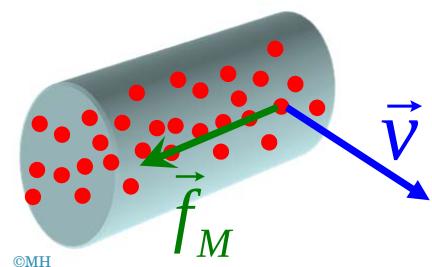
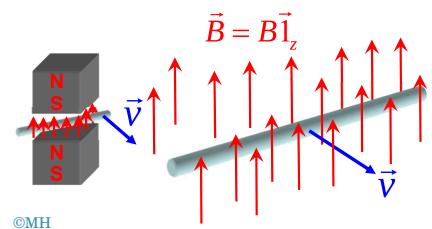
Le schéma de droite de la figure 3.4 indique la géométrie du problème étudié : on choisit, pour simplifier, une vitesse de translation  $\vec{v}$  perpendiculaire au champ magnétique  $\vec{B}$  et à l'axe de la tige elle-même.

#### Porteurs de charge : rigidité, ions et électrons

Les « porteurs de charge » ou simplement « charges » du conducteur métalliques sont de deux natures. D'une part, certains électrons, chargés négativement, sont libres de se déplacer dans le milieu. D'autre part, les ions sont liés les uns aux autres et occupent des positions fixes, ce qui rend la tige métallique rigide.

La force de Lorentz agit sur toutes les charges. Lorsque les forces sont modérées, on peut supposer que la tige ne se déforme pas et que le mécanisme permettant le déplacement de la tige impose le mouvement selon  $\vec{v}$ , exactement comme indiqué sur le schéma

**FIGURE 3.4 :** À gauche, l'aimant crée un champ magnétique vertical homogène autour du barreau horizontal. Ce barreau est animé d'une vitesse constante  $\vec{v}$ . À droite, une vue agrandie, du barreau du champ et de la vitesse.



**FIGURE 3.5 :** Partie magnétique de la force de Lorentz

$\vec{F}_M = q\vec{f}_M = q\vec{v} \times \vec{B}$ . Les points rouges symbolisent les charges  $q$  positives suivant la force.

de la figure 3.5. La somme des forces agissant sur les ions est donc transmise au mécanisme d'entraînement de la tige. La force agissant sur les électrons peut mettre ceux-ci en mouvement au sein de la tige métallique.

### Électromotance et force de Lorentz

**FIGURE 3.6 :** Hendrik Antoon Lorentz (1902), physicien néerlandais qui reçut le prix Nobel de physique pour sa contribution à l'étude de l'influence du magnétisme sur le phénomène de radiation.



Les charges positives et négatives subissent la force de Lorentz. Nous calculerons d'abord la force agissant sur les charges positives, puis celle agissant sur les charges négatives. En choisissant la tige alignée sur l'axe  $Ox$ ,  $\vec{v} = \vec{1}_y$  et  $\vec{B} = \vec{1}_z$ , en chaque point du barreau, les charges subissent une force

$$\vec{F}_q = q(\vec{v} \times \vec{B}) = q v B \vec{1}_y \times \vec{1}_z = q v B \vec{1}_x, \quad (3.11)$$

alignée sur la tige. La force de Lorentz agissant sur des charges positives est représentée sur le schéma de la figure 3.5. Puisque cette force n'est pas associée à un champ électrostatique, mais qu'elle est proportionnelle à la charge  $q$  sur laquelle elle agit, elle peut être associée à une électromotance électromagnétique. Celle-ci se calcule via

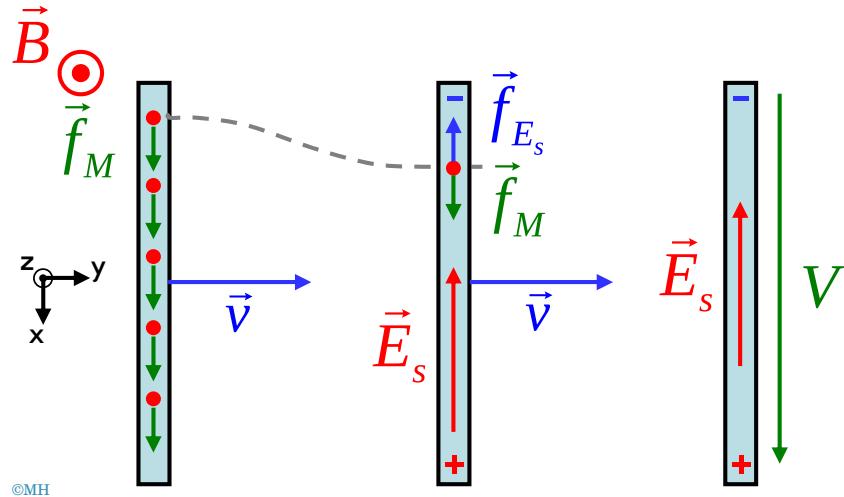
$$\mathcal{E} = \frac{1}{q} \int_{\text{tige}} \vec{F}_q \cdot d\vec{l} = \frac{1}{q} \int_0^\ell q v B dx = v B \ell. \quad (3.12)$$

Une électromotance positive nous indique que les charges positives sont poussées dans la direction positive, soit de la position  $x = 0$  vers la position  $x = \ell$ . Elle nous indique également que les charges négatives sont poussées en sens inverse, de la position  $x = \ell$  vers la position  $x = 0$ .

### Migration des charges dans une tige isolée

Sous l'effet de la force  $\vec{F}_q$ , les charges libres migrent *longitudinalement* dans la tige. Les charges positives sont poussées vers le bas, mais les ions étant fixés rigidement entre eux, ils ne se déplacent pas. Les électrons libres sont des charges négatives. Elles sont donc poussées vers le haut sur ce même schéma. Le bas de la tige est donc dépeuplé de ses électrons libres et seuls les ions chargés positivement s'y retrouvent. Le haut de la tige accumule des électrons. Il y a donc plus d'électrons que d'ions et le haut de la tige se charge négativement. La tige reste neutre globalement. Ces accumulations de charges négatives en haut et positives en bas sont indiquées par les signes  $-$  et  $+$  sur le schéma du milieu montrant la tige après la migration des charges.

Le centre de la distribution de charges positives s'étant déplacé vers le bas et celui des charges négatives vers le haut, le conducteur n'est plus neutre localement et un champ électrostatique  $\vec{E}_s$  apparaît en chaque point de la tige, comme illustré à la figure 3.7 (partie centrale). Ce champ électrostatique est orienté dans la direction opposée à celle de la force de Lorentz, donc vers le haut.



**FIGURE 3.7 :** Le premier schéma à gauche montre la force réduite  $\vec{f}_M = \vec{F}_M/q$  agissant sur les charges. Cette force réduite est orientée comme la force agissant sur les charges positives. La force agissant sur les charges négatives est orientée dans le sens opposé. La position supérieure correspond à  $x = 0$  et la position inférieure à  $x = \ell$ . Le schéma du milieu illustre le régime établi, dans lequel les charges ont migré, ce qui conduit à l'apparition d'une force de rappel électrostatique  $\vec{F}_{E_s} = q\vec{E}_s$ . Cette force de réaction réduite correspond à la partie électrostatique du champ électrique  $\vec{E}_s$ , liée au potentiel électrique  $V = V(\ell) - V(0)$ , orienté de  $x = 0$  à  $x = \ell$ .

### Electromotance et différence de potentiel (presque partout)

Comme détaillé dans la légende, la force magnétique réduite  $\vec{f}_M = \vec{F}_M/q$  induit un déplacement des charges à l'origine d'un champ électrostatique  $\vec{E}_s = \vec{f}_{E_s} = \vec{F}_{E_s}/q$ . Ce champ s'oppose à la migration induite par la composante magnétique de la *force de Lorentz* (voir figure 3.6) et le mouvement des charges libres vers le bas s'arrête quand la circulation des forces poussant vers le haut équilibre la circulation des forces poussant vers le bas. Cette situation est désignée par l'expression *régime établi*. Elle correspond à la condition

$$q \left( \int_0^\ell \vec{f}_M \cdot \vec{l}_x dx + \int_0^\ell \vec{f}_{E_s} \cdot \vec{l}_x dx \right) = 0, \quad (3.13)$$

qui s'écrit également

$$V(\ell) - V(0) = - \int_0^\ell \vec{E}_s \cdot \vec{l}_x dx = - \int_0^\ell \vec{f}_{E_s} \cdot \vec{l}_x dx = \int_0^\ell \vec{f}_M \cdot \vec{l}_x dx = \mathcal{E}. \quad (3.14)$$

En régime établi, lorsque les charges ne se déplacent plus dans la tige, on a donc  $\mathcal{E} = V(\ell) - V(0)$ , qui montre que l'électromotance a permis de séparer les charges de signes opposés, ce qui a créé une (pseudo) différence de potentiel (presque partout) entre les deux extrémités de la tige (voir Sec. 2.1.8). Cette électromotance électromagnétique se comporte donc de façon similaire à l'électromotance électrochimique (aussi dénommée *tension de source*), puisqu'elle est à l'origine d'une (pseudo) différence de potentiel (presque partout) mesurable aux extrémités. Nous verrons pourquoi il est prudent de distinguer l'électromotance électromagnétique de la tension de source.<sup>a</sup>

### 3.3.2 Conducteur fixe dans un champ en mouvement

Le principe de relativité consiste à imposer que les lois de la physique sont identiques dans tous les *référentiels inertiels*. L'expérience que nous venons de décrire dans le repère du laboratoire en supposant la tige mobile à vitesse constante  $\vec{v}$  doit donc être décrite par les mêmes lois de la physique dans le repère de la tige.

<sup>a</sup> Pour simplifier la lecture du texte qui suit, nous utiliserons comme cela est fait dans la plupart des manuels de physique, l'expression « différence de potentiel » pour désigner une différence de pseudo-potentiel défini presque partout.

**Relativité galiléenne et grandeurs mesurées** Ce n'est pas parce que les lois sont les mêmes que les grandeurs mesurées sont les mêmes. Imaginez Raouda se tenant sur le quai de la gare où elle vient de dire au revoir à son amie Eve. Si Eve marche à  $v'_E = 3 \text{ km/h}$  dans le train, de l'arrière vers l'avant, et que le train avance à  $u_0 = 10 \text{ km/h}$  par rapport au quai sur lequel se trouve Raouda, on pourra décrire la position d'Eve de deux manières différentes. En supposant qu'à l'instant  $t = 0$ , Eve est à la porte du train en  $x'_P = 0$  dans le repère du train et que Raouda est en  $x_0 = 0$  dans le repère du quai, comme le train évolue à la vitesse  $u_0$ , Raouda voit la porte du train s'éloigner à une vitesse  $u_0 = (x_P - x_0)/t$  et Raouda voit Eve s'éloigner à la vitesse  $(x_E - x_0)/t$ . Eve se déplace à la vitesse  $v'_E$  par rapport à la porte du train. Elle est donc à une position  $x'_E = v'_E t$  de la porte du train.

$$x_P = x_0 + u_0 t, \quad (\text{porte du train depuis le quai}) \quad (3.15)$$

$$x_E = x_0 + v_E t, \quad (\text{Eve depuis le quai}) \quad (3.16)$$

$$x'_E = (x_E - x_P) = v'_E t, \quad (\text{Eve depuis le train}) \quad (3.17)$$

$$= (v_E - u_0) t. \quad (3.18)$$

Ceci montre que Raouda verra Eve partir à une vitesse

$$v_E = u_0 + v'_E, \quad (3.19)$$

où l'indice 0 dans  $u_0$  rappelle que durant toute l'expérience,  $u_0$  est une vitesse constante. Si la mesure est faite (très) rapidement, la vitesse  $u_0$  ne doit donc être constante que sur un temps (très) court.

Si Eve se met à courir et que le train continue d'évoluer à vitesse constante, l'accélération d'Eve sera identique dans les deux repères puisque

$$a_E = \frac{d v_E}{dt} = \frac{d v'_E + u_0}{dt} = \frac{d v'_E}{dt} = a'_E. \quad (3.20)$$

Les grandeurs mesurées peuvent se comporter de différentes manières. En particulier, elles peuvent être identiques, comme l'accélération  $\ddot{x}$ ; être translatées d'une valeur  $u_0$ , comme la vitesse  $\dot{x}$  ou se transformer de manière plus complexe, comme la position  $x = x_0 + u_0 t + x'$ .

**Équivalence des forces entre repères en translation uniforme**  
Notons que si la loi de Newton  $\vec{F} = m\vec{a}$  est vérifiée, l'équivalence des accélérations indique, en relativité galiléenne, l'équivalence des forces à l'origine du mouvement, si on suppose que la masse est invariante d'un repère à l'autre ( $m = m'$ ). En effet, dans ce cas

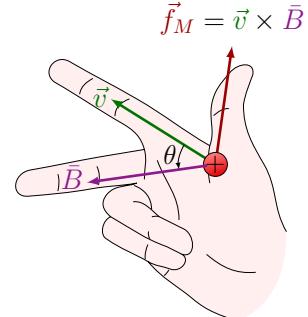
$$\vec{F}' = m' \vec{a}' = m \vec{a} = \vec{F}. \quad (3.21)$$

Considérons une charge mobile en translation *uniforme* dans un repère où l'on mesure le champ électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B})$ . La charge évoluant à vitesse constante, le principe de relativité galiléenne nous dit que la force agissant sur cette tige doit être la

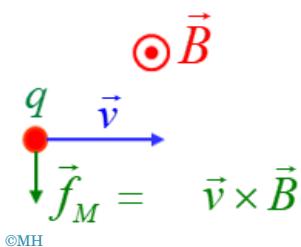
même, que le mouvement soit décrit dans le repère où l'on mesure le champ électromagnétique ou qu'il soit décrit dans le repère de la charge, puisque nous venons de voir que les quantités du genre force et accélération sont invariantes dans des repères en translation uniforme.

**Force de Lorentz depuis un repère fixe** Dans le repère de mesure du champ, nous avons  $\vec{F}_q = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$  (cf. Fig. 3.8). La force est due aux deux composantes du champ (électrique et magnétique). La figure 3.9 illustre le cas particulier pour lequel le champ mesuré est purement magnétique ( $\vec{E} = \vec{0}$ ). On a donc

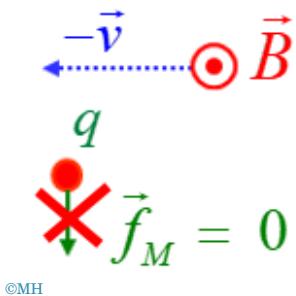
$$\vec{F}_q = q\vec{f}_M = q\vec{v} \times \vec{B}. \quad (3.22)$$



**FIGURE 3.8 :** En repère dextrogyre, le produit vectoriel  $\vec{f}_M = \vec{v} \times \vec{B}$  est associé à la règle de la main droite comme sur ce schéma.



**FIGURE 3.9 :** Force  $q\vec{f}_M$  agissant sur une charge mobile  $q$  dans un champ fixe  $\vec{B}$ , calculée depuis le repère dans lequel on mesure le champ. Sur ce schéma, on suppose  $\vec{E} = \vec{0}$ .



**FIGURE 3.10 :** Force  $q\vec{f}_M$  agissant sur une charge mobile  $q$ , calculée depuis le repère de la charge. Le champ électromagnétique est mesuré depuis un repère qui se déplace à la vitesse  $-\vec{v}$ . Dans cet exemple, ce champ supposé purement magnétique, est constant  $\vec{B} = \vec{B}_0$  et  $\vec{E} = \vec{0}$ .

## 3.4 Transformation galiléenne du champ électromagnétique

En physique, on associe des objets physiques à des objets mathématiques qui ont le même comportement. Par exemple, en observant comment s'additionnent des vitesses, on constate que la vitesse se comporte comme un vecteur. On constate également qu'une force peut être associée à un vecteur et nous avons vu que cette force doit se comporter comme une accélération et être invariante par changement de repère inertiel.

Puisque les équations de Maxwell sont notre outil pour décrire le champ électromagnétique, nous pouvons les utiliser pour savoir

comment le champ électromagnétique se comporte lors d'un changement de repère.

Nous verrons dans le chapitre sur la relativité restreinte, que les équations de Maxwell ne sont pas invariantes pour la relativité galiléenne. Nous allons toutefois étudier leur quasi-invariance lorsque la vitesse entre les deux repères inertIELS considérés est faible devant la vitesse de la lumière. Ce cas recouvre la plupart des applications électrotechniques.

### 3.4.1 Transformation galiléenne de l'équation de Maxwell-Faraday

Comme pour le calcul de la force de Lorentz agissant sur une tige en mouvement, nous allons faire une hypothèse importante sur le champ électromagnétique. Cette hypothèse est que le champ  $\bar{B}$  perçu depuis les deux repères est identique. Nous la justifierons ci-dessous via l'équation (3.45).

Sous cette hypothèse, nous allons calculer le champ  $\vec{E}$  qui préserve l'équation de Faraday.

#### Notation des quantités

Le repère  $R$  est un repère dans lequel on mesure les champs  $\vec{E}$  et  $\bar{B}$ . Ces champs sont définis dans tout l'espace et chaque point de l'espace est identifié par le vecteur position  $\vec{r}$ . Le temps est défini par la variable  $t$ . L'expression détaillée des champs est donc

$$\vec{E} = \vec{E}(t, \vec{r}), \quad (3.25)$$

$$\bar{B} = \bar{B}(t, \vec{r}). \quad (3.26)$$

*En relativité restreinte, nous verrons que à le temps ne peut être décrit par la même quantité  $t$  dans deux repères en mouvement relatif.*

Le repère  $R'$  évolue à la vitesse  $\vec{u}_0$  par rapport au repère  $R$ . On y repère un point par le temps  $t' = t$  et la position  $\vec{r}'^a$ . On a donc

$$t' = t, \quad (3.27)$$

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{u}_0 t, \quad (3.28)$$

$$\vec{E}' = \vec{E}'(t', \vec{r}'), \quad (3.29)$$

$$\bar{B}' = \bar{B}'(t', \vec{r}'), \quad (3.30)$$

et nous faisons l'hypothèse que le champ magnétique se comporte comme une accélération lors d'un changement de repère, c'est-à-dire que

$$\bar{B}'(t', \vec{r}') = \bar{B}(t, \vec{r}) = \bar{B}(t, \vec{r}' + \vec{u}_0 t). \quad (3.31)$$

### Transformation de l'équation de Maxwell-Faraday

L'équation de Maxwell-Faraday dans le repère  $R$  établit que

$$\overline{\text{rot}} \vec{E} + \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = 0, \quad (3.32)$$

et nous cherchons à montrer que sa forme ne change pas lorsque nous appliquons le changement de variables permettant de se placer dans le repère  $R'$ . Ceci signifie que nous espérons montrer que

$$\overline{\text{rot}}' \vec{E}' + \partial'_t \vec{B}' = 0. \quad (3.33)$$

Nous avons pris la précaution de noter  $\overline{\text{rot}}'$  car le rotationnel dans  $R'$  doit s'exprimer par rapport au vecteur position dans  $R'$  qui est  $\vec{r}'$ .

Calculons  $\overline{\text{rot}}' \vec{E}'$  en utilisant les équations du changement de repère,

$$\overline{\text{rot}}' \vec{E}' \stackrel{(3.33)}{=} -\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t'} \quad (3.34)$$

$$\stackrel{(3.28)}{=} -\frac{\partial \vec{B}(t', \vec{r}', \vec{u}_0 t')}{\partial t'} \quad (3.35)$$

$$= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - (\vec{u}_0 \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{B} \quad (3.36)$$

$$\stackrel{(2.105)}{=} \overline{\text{rot}} \vec{E} - (\vec{u}_0 \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{B} \quad (3.37)$$

$$\stackrel{(3.40)}{=} \overline{\text{rot}} \vec{E} + \overline{\text{rot}} (\vec{u}_0 \times \vec{B}), \quad (3.38)$$

$$= \overline{\text{rot}} (\vec{E} + \vec{u}_0 \times \vec{B}). \quad (3.39)$$

Dans ce développement, on utilise un résultat de l'exercice 2.4,

$$\overline{\text{rot}}(\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{b} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{a} - \vec{b} \text{ div } \vec{a} - (\vec{a} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{b} + \vec{a} \text{ div } \vec{b}, \quad (3.40)$$

qui se simplifie fortement pour  $\vec{a} = \vec{u}_0$  uniforme et  $\vec{b} = \vec{B}$ , car  $\text{div } \vec{B} = 0$ . On en déduit  $\overline{\text{rot}}(\vec{u}_0 \times \vec{B}) = -(\vec{u}_0 \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{B}$ . On calcule également l'équivalence entre  $\partial_{\vec{u}_0}$  et  $(\vec{u}_0 \cdot \overrightarrow{\text{grad}})$ , en travaillant composante par composante, c'est-à-dire qu'on l'applique à  $B_x$ , puis à  $B_y$  et enfin à  $B_z$  pour démontrer que  $\partial_{\vec{u}_0} \vec{B} = (\vec{u}_0 \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{B}$ , au départ de la définition donnée en (1.44). Finalement, notons que  $\partial'_x \vec{E}' = \partial_x \vec{E}$  et de même pour les composantes  $y$  et  $z$ , ce qui implique que  $\overline{\text{rot}}' \vec{E}' = \overline{\text{rot}} \vec{E}'$ .

**Interprétation du calcul** Le développement en (3.39) montre que l'équation de Faraday est préservée si le champ électrique se transforme comme

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{u}_0 \times \vec{B}, \quad (3.41)$$

lors du changement de repère.

Si le champ  $\vec{B}$  est invariant lors d'un changement de repère, alors  $\vec{E}$  ne peut l'être.

La transformation (3.41) peut être utilisée pour justifier la forme de la force de Lorentz.

Cette équation montre qu'en l'absence de champ  $\vec{B}$ , le champ  $\vec{E}$  est invariant pour une transformation galiléenne de repère.

### 3.4.2 Transformation galiléenne de l'équation d'Ampère-Maxwell

Nous venons de voir que si  $\bar{B}$  est invariant pour un changement galiléen de repère, alors  $\vec{E}$  doit se transformer. Mais qu'arrive-t-il à  $\bar{B}$  lors d'un tel changement de repère ? Pouvons-nous réellement prétendre que  $\bar{B}$  est invariant ?

Nous allons partir de l'équation de Maxwell-Ampère (2.102) et reproduire le raisonnement fait pour l'équation de Maxwell-Faraday. Nous notons  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \approx 3 \times 10^8$  m/s et essayons de démontrer que

$$\overline{\text{rot}} \bar{B}' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}'}{\partial t} = \mu_0 \vec{J}', \quad (3.42)$$

au départ de (2.102).

Calculons  $\overline{\text{rot}} \bar{B}'$  en utilisant les équations du changement de repère, l'équation  $\overline{\text{rot}}(\vec{u}_0 \times \vec{b}) = -(\vec{u}_0 \cdot \overline{\text{grad}}) \vec{b} + \vec{u}_0 \text{div} \vec{b}$ , et l'équation de Maxwell-Gauss,

$$\begin{aligned} \overline{\text{rot}}' \bar{B}' &\stackrel{(3.42)}{=} \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}'}{\partial t} + \mu_0 \vec{J}' \\ &\stackrel{(3.28)}{=} \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}(t', \vec{r}' + \vec{u}_0 t')}{\partial t'} + \mu_0 \vec{J}' \\ &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} (\vec{u}_0 \cdot \overline{\text{grad}}) \vec{E} + \mu_0 \vec{J}' \\ &\stackrel{(3.40) \& (2.102)}{=} \overline{\text{rot}} \bar{B} - \mu_0 \vec{J} - \frac{1}{c^2} \overline{\text{rot}} (\vec{u}_0 \times \vec{E}) + \frac{1}{c^2} \vec{u}_0 \text{div} \vec{E} + \mu_0 \vec{J}' \\ &= \overline{\text{rot}} \left( \bar{B} - \frac{\vec{u}_0}{c^2} \times \vec{E} \right) + \mu_0 \left( \vec{u}_0 \rho + \vec{J}' - \vec{J} \right). \end{aligned} \quad (3.43)$$

**Interprétation du calcul** L'équation (3.43) montre qu'on aura invariance si on tient compte du changement de repère pour calculer le courant, selon

$$\vec{J}' = \vec{J} - \rho \vec{u}_0, \quad (3.44)$$

et si on a en outre

$$\bar{B}' = \bar{B} - \frac{\vec{u}_0}{c^2} \times \vec{E}. \quad (3.45)$$

On constate que le rapport  $u_0/c^2$  est très faible devant  $B/E$  pour des vitesses associées au mouvement de pièces électrotechniques. Par exemple, si on considère une vitesse de 100 m/s, et un champ de 400 kV/m, comme dans les lignes de haute tension, alors  $u_0/c^2 E \approx 0.5 \text{nT}$ . Cette valeur est à comparer à celle du champ magnétique terrestre  $B \approx 50 \mu\text{T}$ . La variation de champ magnétique induite par un changement de repère est donc de l'ordre de 100 000 fois inférieure à celle du champ magnétique terrestre.

Pour ces systèmes, on peut considérer que le champ magnétique est un invariant des transformations galiléennes<sup>a</sup>. Il s'agit néanmoins d'une approximation qui n'est pas compatible avec des vitesses élevées, comme on en rencontre dans les accélérateurs de particule. Nous détaillerons ceci dans les dernières leçons de ce cours, portant sur la relativité restreinte.

Dans le calcul qui précède (3.43), nous avons considéré  $\vec{E}$  invariant. Si nous avions ajouté un terme  $\vec{u}_0 \times \bar{B}$ , nous aurions obtenus des termes supplémentaires, tous aussi négligeables que le terme  $u_0/c^2 E$ .

### 3.4.3 Champ électrique induit par un déplacement

Les transformations qui précèdent mettent bien en évidence que le champ électromagnétique constitue une seule entité. Les parties électrique et magnétique varient suivant le repère d'observation<sup>b</sup>.

Sous l'hypothèse d'un déplacement à faible vitesse ( $u_0 \ll c$ ), les équations de Maxwell sont invariantes lors d'un changement de repère galiléen, pour autant qu'on adapte les composantes du champ électromagnétique. On en déduit les formules de transformations suivantes,

#### Champ électromagnétique depuis un repère en translation uniforme

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{u}_0 \times \vec{B}, \quad (3.46)$$

$$\vec{B}' = \vec{B}, \quad (3.47)$$

$$\vec{J}' = \vec{J} - \vec{u}_0 \rho, \quad (3.48)$$

$$\vec{F}'_L/q = \vec{E}' + (\vec{v} - \vec{u}_0) \times \vec{B}' \quad \vec{F}_L/q = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}. \quad (3.49)$$

pour le changement de repère  $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{u}_0 t$ , qui correspond un repère  $R'$  se déplaçant à vitesse uniforme constante  $\vec{u}_0$  dans  $R$ .

Comme le champ magnétique est invariant dans ce changement de repère, dans de nombreux ouvrages de physique, il est pris comme référence pour définir le mouvement relatif. On lit donc souvent des phrases comme « Le balayage à vitesse  $\vec{u}_0$  des lignes de champ  $\vec{B}$  par une charge induit un champ électrique  $\vec{E} = \vec{u}_0 \times \vec{B}$ . » Cette approche ne permet pas toujours d'identifier clairement quel est le repère  $R$  et quelle est la vitesse  $\vec{u}_0$ . Les questions à se poser pour identifier cette vitesse  $\vec{u}_0$  sont les suivantes :

- Dans quel repère le champ électromagnétique ( $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ ) est-il mesuré? Il s'agit de  $R$ .
- Dans quel repère dois-je utiliser le champ électromagnétique? Il s'agit de  $R'$ .
- Quelle est la vitesse  $\vec{u}_0$  entre ces deux repères? Il s'agit de la vitesse de  $R'$  dans  $R$ .
- Par rapport à la dynamique du système, puis-je considérer  $\vec{u}_0$  constante?

L'équation (3.46) montre qu'à faible vitesse, la composante électrique du champ électromagnétique dépend du repère d'observation. En imposant une vitesse  $\vec{u}_0$  à un objet, on induit un changement de  $\vec{E}$  qui devient  $\vec{E}'$ .

b Cela peut sembler bizarre, mais c'est la même chose pour la vitesse qui a été prise comme exemple précédemment.

### Champ électrique induit par le mouvement

La composante de champ électrique supplémentaire

$$\vec{E}_i = \vec{E}' - \vec{E} = \vec{u}_0 \times \vec{B} \quad (3.50)$$

est appelée « champ électrique induit ». Il dépend de la vitesse relative  $\vec{u}_0$  entre le repère de mesure de  $\vec{E}$  et le repère de calcul de  $\vec{E}'$ .

Ce champ est nul si  $u_0 = 0$  ou  $B = 0$ . Lorsqu'il n'est pas nul, il en résulte une électromotance qui est capable de mettre en mouvement des charges, à l'origine d'un courant induit, qui peut lui-même créer un champ électromagnétique, et ainsi de suite...

Au lieu de parler d'*électromotance* électromagnétique, on parle aussi d'*électromotance* induite, ou de tension induite, voire en termes plus anciens, de *force électromotrice induite* (*f.e.m.i.*).

Il est important de noter que la Commission électrotechnique internationale a émis la recommandation d'appeler l'électromotance électrochimique « *tension de source* ». Elle ne conseille toutefois pas l'utilisation du vocabulaire tension induite.

La raison en est que la tension de source ne dépend pas du chemin suivi par les fils qui conduiront le courant lorsqu'on reliera la pile à un circuit. Par contre, la forme et la position de la spire qui évolue dans un champ électromagnétique — et donc le chemin sur lequel on calcule la circulation — sont très importantes pour l'*électromotance* d'origine électromagnétique. Comme la pseudo différence de potentiel aux bornes de la spire peut dépendre de la manière dont on déforme la spire, on ne peut strictement définir une « tension » entre deux points du circuit.

C'est pour marquer cette différence fondamentale entre les deux types d'*électromotance* que nous avons pris la peine d'introduire la notion de pseudo-potentiel défini presque partout en Sec. 2.1.8.

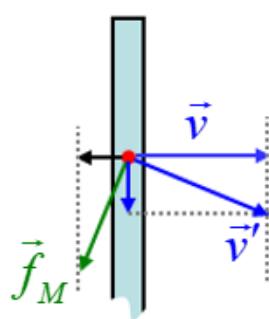
#### 3.4.4 Travail à l'origine de l'électromotance électromagnétique

On peut se demander d'où vient l'énergie qui permet de faire circuler les charges électriques sous l'action de l'*électromotance*.

En effet, dans l'exemple de la figure 3.4, les charges opposées se séparent, ce qui crée un potentiel électrique. Cette situation créée dans la tige est comparable à celle de la charge d'un condensateur qui requiert de l'énergie. Le schéma de la figure 3.11 permet de comprendre que l'établissement du champ électrostatique (ou du potentiel électrique) requiert de l'énergie. Sous l'influence de l'*électromotance*, les charges libres de la tige se mettent en mouvement vertical. Ceci ajoute à la vitesse de la tige, une vitesse de dérive  $v_d$  alignée sur la tige, dirigée selon  $-\hat{1}_x$  pour les charges négatives. Cette vitesse est proportionnelle à la force appliquée aux charges par le champ électrique vu par la tige  $\vec{E}'$  et à un coefficient de mo-



L03P2



**FIGURE 3.11 :** Calcul du travail correspondant au déplacement des charges par la force magnétique.

bilité, généralement noté  $\mu$ . On a donc

$$\vec{v}_d = \mu q \vec{E}' = \mu q(\vec{v} \times \vec{B}). \quad (3.51)$$

La composante de vitesse  $\vec{v}_d$  ajoute une composante à la force de Lorentz, qui vaut

$$\vec{F}_{L_d} = q(\vec{v}_d \times \vec{B}) = q[\mu q(\vec{v} \times \vec{B}) \times \vec{B}] = \mu q^2 [(\vec{v} \cdot \vec{B})\vec{B} - \vec{B}^2 \vec{v}] = -\mu q^2 B^2 \vec{v}. \quad (3.52)$$

Ce calcul montre que la mise en mouvement des électrons due à l'electromotance s'accompagne d'une force s'opposant au mouvement. C'est sur ce principe que se base le mécanisme de freinage du « Dalton terror », comme indiqué à la figure 3.12. Dans le cas de notre tige, si on ne fournit pas une énergie pour déplacer la tige, celle-ci s'arrête. Maintenir la vitesse  $\vec{v}$  constante nécessite de fournir un travail. Ce travail permet la migration des charges comme indiqué sur le schéma de la figure 3.4. Lorsque l'équilibre décrit à l'équation (3.13) est atteint, la vitesse de dérive des charges devient nulle (mais pas leur vitesse  $\vec{v}$ ). La force qui s'opposait au mouvement s'estompe.

Ceci se comprend de la manière suivante. Initialement, la tige est uniformément neutre. Lorsque la tige est mise en mouvement, ses charges commencent à se séparer, ce qui constitue une réserve d'énergie potentielle. Lorsque le régime est établi, il n'est plus nécessaire de fournir d'énergie pour séparer les charges, puisque ces charges positives et négatives ont atteint une distribution d'équilibre. Si on modifie  $\vec{v}$  ou  $\vec{B}$ , les charges vont à nouveau se déplacer avec  $\vec{v}_d$  non nulle et donc avec un échange d'énergie mécanique. Lorsqu'elles auront atteint leur nouvelle distribution d'équilibre, il n'y aura plus d'échange d'énergie mécanique.

Le schéma de la figure 3.11 montre que la composante de vitesse vers le bas se combine à la vitesse de translation  $\vec{v}$  et donne une vitesse totale  $\vec{v}'$  inclinée vers le bas. La composante magnétique *force de Lorentz* (étant toujours perpendiculaire à la vitesse de la charge) a donc une composante opposée au sens du déplacement de la tige (donné par la vitesse de translation  $\vec{v}$ ). Pour translater la tige à la vitesse  $\vec{v}$ , il faut donc effectuer un travail mécanique. Sur un temps  $dt$  la translation se fait sur la distance  $vdt$  et nécessite un travail

$$dW_M = \vec{f}_M \cdot d\vec{l} = \vec{f}_M \cdot \vec{v} dt \neq 0. \quad (3.53)$$

L'analyse détaillée du problème montre que le travail fourni est égal à l'énergie électrique du système de charges dans la tige, qui correspond à l'electromotance en l'absence de dissipation d'énergie.

### ■ Petit poisson rouge... peut-on passer la barre rouge ?

Oui, à condition de répondre à ma question !

Expliquez pourquoi le *Dalton terror* effectue sa montée lentement.



**FIGURE 3.12 :** Le freinage du Dalton terror à Walibi est électromagnétique. Lorsque la nacelle chute, des plaques conductrices arrivent avec une grande vitesse dans un champ magnétique. La force de Lorentz agissant sur les électrons, sépare ceux-ci des ions du matériau, ce qui crée un courant qui exerce une force de réaction ralentissant la nacelle.

### ■ Un peu d'histoire...

#### 3.4.5 La dynamo : invention

C'est Michael Faraday qui a découvert ce phénomène d'apparition d'un champ électrostatique dans les conducteurs en mouvement dans les champs magnétiques. C'est une démarche expérimentale qui a conduit Faraday à l'observation du phénomène. Faraday a immédiatement entrevu la possibilité d'application du phénomène à la génération de tension et de courant électrique. Il inventa ainsi la dynamo.

Cette découverte était extraordinaire pour l'époque car il faut réaliser que les seules sources de tension électrique qui existaient alors étaient les piles de Volta (dont le principe relève de l'électrochimie). L'utilisation des piles n'était pas commode et elles n'étaient certainement pas adaptées à l'utilisation domestique de l'électricité. La découverte de Faraday est véritablement le point de départ de l'avènement de l'électricité.

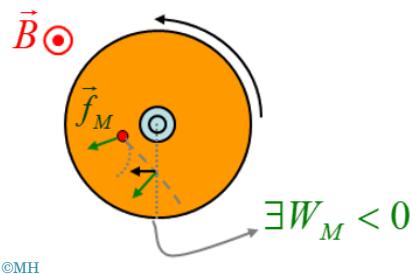


**FIGURE 3.13 :** Michael Faraday (1791–1867).

### ■ Application pratique

#### 3.4.6 La dynamo : fonctionnement

Le principe de fonctionnement de la première dynamo de Faraday est très simple. Il est schématisé à la figure 3.14. Un disque de matériau conducteur est mis en rotation autour de son axe à l'aide d'une manivelle. Une portion de la surface du disque se trouve dans l'entrefer d'un aimant en forme de fer à cheval. Les charges libres du matériau conducteur subissent dans cette zone la composante magnétique de la *force de Lorentz* qui, étant perpendiculaire à la vitesse et au champ magnétique, s'exerce dans la direction radiale. Ces charges tendent donc à migrer vers la périphérie (ou le centre, selon les directions de la vitesse et du champ magnétique). Comme pour le cas de la tige vue plus haut, cette migration de charge crée une (pseudo) différence de potentiel électrique (presque partout) entre le centre et la périphérie du disque. On voit ainsi que ce simple dispositif constitue une source de tension électrique. Si des contacts électriques sont réalisés sur ces zones extrêmes, et que ces contacts sont reliés par un circuit électrique, un courant sera établi. On crée ainsi un courant continu.



**FIGURE 3.14 :** Dynamo de Faraday. Un disque métallique est mis en rotation dans le champ magnétique d'un entrefer.



L03P3a



L03P3b



## 3.5 Composante non électrostatique du champ électrique

Nous avons entamé ce chapitre en introduisant la notion de force non conservative agissant sur les charges électriques, à distinguer de la force électrostatique qui est conservative.

En pratique, le champ électrique agit sur les charges électriques et on ne peut simplement distinguer si ce champ est conservatif ou non.

En calculant l'électromotance sur un contour fermé, la contribution du champ électrostatique conservatif est nulle et on peut ainsi isoler la circulation du champ non conservatif.

En appliquant ce raisonnement sur un contour très petit, on devrait obtenir une densité de circulation du champ non conservatif, qui correspond à un calcul de rotationnel.

Dans ce qui suit, nous allons analyser les équations de Maxwell dynamique et mettre en évidence les contributions conservatives et non conservatives.

### 3.5.1 Potentiel vecteur

La contribution保守ive devrait pouvoir s'écrire sous la forme d'un potentiel, du type  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$ . De la même manière, nous allons introduire un potentiel vecteur,  $\vec{A}$ . Ce potentiel vecteur est défini par son lien avec le champ magnétique,

$$\overline{\text{rot}} \vec{A} = \vec{B}, \quad (3.54)$$

où  $\vec{B}$  est le champ magnétique. Cette équation à elle seule ne suffit pas à définir complètement  $\vec{A}$ , de la même manière que l'équation  $\vec{F} = m\ddot{\vec{x}}$  ne définit le mouvement qu'à deux constantes d'intégration près.

### 3.5.2 Équation de Maxwell pour les potentiels

Nous allons introduire le potentiel vecteur dans les équations de Maxwell. Celles-ci prennent la forme

$$\overline{\text{rot}} \overline{\text{rot}} \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J}, \quad (3.55)$$

$$\text{div} \overline{\text{rot}} \vec{A} = 0, \quad (3.56)$$

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (3.57)$$

$$\overline{\text{rot}} \vec{E} + \frac{\partial \overline{\text{rot}} \vec{A}}{\partial t} = 0. \quad (3.58)$$

### Équation de Gauss magnétique

On constate que le choix du potentiel vecteur permet de vérifier automatiquement la loi de Gauss magnétique, puisque nous avons vu que la divergence d'un rotationnel est toujours nulle.

## Équation de Faraday

L'équation de Faraday s'écrit sous la forme

$$\overline{\text{rot}} \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0; \quad (3.59)$$

Comme le rotationnel d'un gradient est toujours nul, on peut choisir d'écrire l'argument de ce rotationnel comme un gradient. Notons

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}} \Phi, \quad (3.60)$$

ou encore

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} \Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (3.61)$$

Cette équation montre qu'en régime statique, lorsque  $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ , le champ électrique dérive d'un potentiel. Nous pouvons donc identifier  $\Phi$  à  $V$  pour la suite. La partie  $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  n'apparaît qu'en régime dynamique. Elle rend compte de la partie non conservative du champ électromagnétique.

### Pour aller plus loin...

## Équations de Gauss et d'Ampère

Les équations de Gauss et d'Ampère s'écrivent de manière assez simple si on choisit comme condition complémentaire, appelée « jauge de Lorentz »

$$\text{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0. \quad (3.62)$$

On obtient par substitution dans les équations précédentes

$$\overline{\text{rot}} \overline{\text{rot}} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \overrightarrow{\text{grad}} V}{\partial t} = \mu_0 \vec{J}, \quad (3.63)$$

$$\overline{\text{rot}} \overline{\text{rot}} \vec{A} - \overrightarrow{\text{grad}} \text{div} V + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \mu_0 \vec{J}, \quad (3.64)$$

$$-\text{div} \overrightarrow{\text{grad}} V - \frac{\partial \text{div} \vec{A}}{\partial t} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (3.65)$$

$$-\text{div} \overrightarrow{\text{grad}} V + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (3.66)$$

qui se mettent sous la forme finale

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\Delta} \vec{A} = \mu_0 \vec{J}, \quad (3.67)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \Delta V = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (3.68)$$

où le laplacien scalaire  $\Delta$  est défini par  $\Delta = \text{div} \overrightarrow{\text{grad}}$  et le laplacien vectoriel, qui agit sur un vecteur, est défini par  $\vec{\Delta} = \overrightarrow{\text{grad}} \text{div} - \overline{\text{rot}} \overline{\text{rot}}$ .

Ces deux opérateurs s'expriment de la même manière en coordonnées cartésiennes, via

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \vec{\Delta}. \quad (3.69)$$

### Intérêt des potentiels

L'expression des équations sous forme de potentiels fait apparaître une symétrie entre les charges statiques à l'origine du potentiel électrostatique et les courants statiques, à l'origine du potentiel vecteur, dont découle le champ magnétique.

Nous verrons que ces équations sont des équations d'onde.

Ces équations ne comptent que 4 variables (1 fonction scalaire, 1 vecteur à trois composantes). Par comparaison, le champ électromagnétique ( $\vec{E}, \vec{B}$ ), comporte 6 composantes. Cela nous indique une certaine redondance dans la description ( $\vec{E}, \vec{B}$ ).

C'est cette redondance par rapport à une description à 4 variables qui explique l'égalité entre  $-\overline{\text{rot}}\vec{E}$  et  $\partial_t \vec{B}$ . En effet, ces deux quantités sont équivalentes à  $\partial_t \overline{\text{rot}}\vec{A}$ .

La représentation à 4 composantes apparaît de manière naturelle en relativité où nous verrons que la vitesse, l'impulsion et les autres grandeurs physiques se représentent de manière naturelle par des quadrivecteurs.

L'utilisation de la forme ( $\vec{E}, \vec{B}$ ) présente de nombreux avantages dans le domaine de l'électrotechnique. Un de ses inconvénients, par contre, est que la force agissant sur une charge électrique prend la forme un peu particulière de la force de Lorentz  $\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ .



## 3.6 Loi de Faraday sur des cas simples

On présente souvent *la* loi de Faraday comme une loi d'induction écrite sous la forme

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}, \quad (3.70)$$

où le membre de gauche représente l'*électromotance* électromagnétique et le terme de droite est l'opposé de la variation du flux. Bien que cette loi soit simple à retenir sous cette forme, elle est souvent difficile à appliquer ou mal comprise. En effet, à ce stade, nous ne savons pas sur quel contour on calcule l'électromotance et sur quelle surface on évalue le flux. On ne sait pas non plus dans quel repère on représente le champ électrique et le champ magnétique.

Ci-après, nous allons essayer de donner une vision globale des lois de Faraday<sup>a</sup>.

La loi simple de Faraday peut être construite au départ d'une expérience simple comme celle de la spire à un côté mobile. On peut combiner ces différentes expériences pour obtenir la loi de Faraday locale, qui constitue une des équations de Maxwell,  $\overline{\text{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ .



L03P4



<sup>a</sup> L'utilisation du pluriel vient du fait que cette loi peut apparaître sous deux formes différentes qui lient toutes deux l'électromotance et la variation de flux. Ces deux formes se révèlent également intéressantes pour aborder les problèmes, l'une étant souvent plus simple à appliquer que l'autre.

### 3.6.1 Point de départ

Notre point de départ de l'étude de la loi de Faraday est une des équations locales de Maxwell. Il s'agit de l'équation

$$\overline{\text{rot}} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0. \quad (3.71)$$

Cette loi nous indique que l'existence d'un champ magnétique variable est corrélée à l'existence d'une densité de *circulation* du champ électrique non nulle. Le mot induction était traditionnellement utilisé, mais nous le remplaçons ici par « corrélation ». En effet, les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  étant décrits localement au même instant, il ne peut y avoir de causalité entre eux.

Dans son ouvrage [7], Eric Mazur parle de champs qui s'accompagnent : la présence d'un champ électrique à densité de circulation non nulle s'accompagne de la présence d'un champ magnétique variable ou l'inverse : la présence d'un champ magnétique variable s'accompagne de la présence d'un champ électrique à densité de circulation non nulle.

Ce sont les sources qui créent les champs. Toute la force de l'approche en termes de champs et qu'il n'est pas nécessaire de connaître l'agencement, ni la variation de ces sources. Une connaissance des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  dans un repère donné est suffisante pour décrire les interactions entre ces sources et d'autres charges.

Avant de présenter le cas général, à la section 3.7, nous traitons plusieurs exemples. Vous pouvez directement lire la généralisation puis vérifier votre compréhension sur les exemples ou poursuivre votre lecture ci-après.

---

### ■ Exemple

---

### 3.6.2 Champ homogène sur une spire en mouvement

On considère la spire rectangulaire de la figure 3.15. Cette spire est en mouvement à la vitesse  $\vec{v}$  par rapport au repère dans lequel on mesure le champ magnétique  $\vec{B}$ .

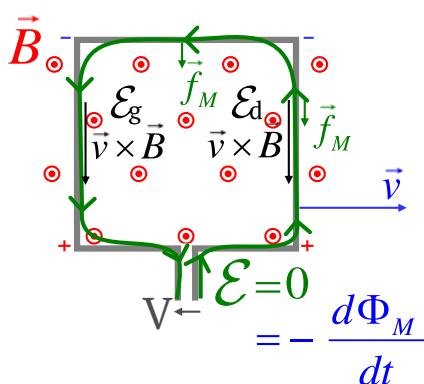
Calculons l'*électromotance* électromagnétique le long du contour. On a, en notant par  $d$ ,  $h$ ,  $g$  et  $b$  les côtés droit, haut, gauche et bas de la spire,

$$\mathcal{E} = \frac{1}{q} \oint_{\text{spire}} \vec{F}_L \cdot d\vec{\ell} = \mathcal{E}_d + \mathcal{E}_h + \mathcal{E}_g + \mathcal{E}_b. \quad (3.72)$$

Sur les côtés horizontaux ( $h$  et  $b$ ) l'*électromotance* est nulle, puisque  $\vec{v} \parallel d\vec{\ell}$ . On a donc  $\mathcal{E}_h + \mathcal{E}_b = 0$ .

Par contre, la force de Lorentz par unité de charge étant dirigée parallèlement aux côtés verticaux de la spire, l'*électromotance* n'y est pas nulle. Pour la calculer, on introduit *Oxyz* le *repère de mesure du champ électromagnétique*, de sorte que *Ox* soit l'axe horizontal

**FIGURE 3.15 :** Spire rectangulaire se déplaçant dans un champ magnétique homogène. La spire est ouverte sur son bord inférieur de façon à pouvoir y mesurer une *électromotance* calculée sur le contour vert (arrondi dans les coins pour augmenter la lisibilité du graphique). Le champ magnétique est perpendiculaire au plan de la spire rectangulaire (plan de la feuille) et on suppose que celle-ci se déplace transversalement à la vitesse  $\vec{v}$  dans une direction parallèle à deux de ses côtés (les côtés horizontaux sur le schéma). La force de Lorentz qui s'exerce sur les charges vaut  $q\vec{v} \times \vec{B}$ .



(de gauche à droite) et que  $Oy$  soit l'axe vertical (de bas en haut), et que  $\bar{B} = B\vec{1}_z$ ,

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_d &= \int_0^\ell (v\vec{1}_x \times B(x_d)\vec{1}_z) \cdot dy \vec{1}_y \\ &= vB_d[\vec{1}_x, \vec{1}_z, \vec{1}_y] \int_0^\ell dy \\ &= -vB_d\ell,\end{aligned}\tag{3.73}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_g &= \int_0^\ell (v\vec{1}_x \times B(x_g)\vec{1}_z) \cdot dy (-\vec{1}_y) \\ &= +vB_g\ell,\end{aligned}\tag{3.74}$$

$$\mathcal{E}_d + \mathcal{E}_g = v(B_g - B_d)\ell\tag{3.75}$$

$$= 0,\tag{3.76}$$

où l'on a noté  $B_d = B(x_d)$  et  $B_g = B(x_g)$ . Comme la spire se déplace à vitesse constante, si en  $t = 0$  on a  $x_g = 0$  et  $x_d = d$ , aux instants ultérieurs, on aura

$$x_g = vt, \quad x_d = d + vt.\tag{3.77}$$

Comme nous avons fait l'hypothèse que le champ est homogène, l'électromotance totale est donc nulle, puisque  $B_g = B_d$  à tout instant et en toute position.

### ■ Exemple

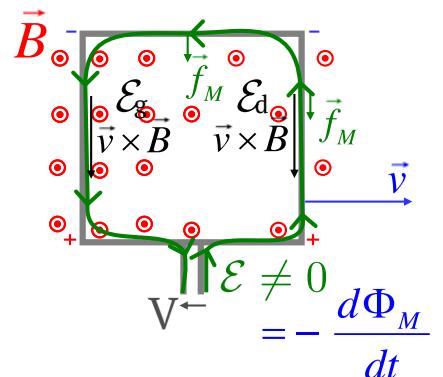
#### 3.6.3 Champ inhomogène sur une spire en mouvement : électromotance

L'exemple précédent montre que si on considère un champ inhomogène dans la direction  $\vec{1}_x$ , mais homogène dans la direction  $\vec{1}_y$ , de sorte que  $\bar{B} = B(x)\vec{1}_z$ , alors l'électromotance totale sera donnée par (3.75), qui vaudra  $\mathcal{E} = v(B_g - B_d)\ell \neq 0$ . Tenant compte du déplacement à vitesse  $v\vec{1}_x$  de la spire dans le repère de mesure du champ électromagnétique, décrit par (3.77), on aura

$$\mathcal{E} = v(B_g - B_d)\ell = v\ell[B(vt) - B(d + vt)].\tag{3.78}$$

Cette situation est représentée sur le schéma de la figure 3.16 par une densité de vecteurs  $\bar{B}$  sortant du plan, qui varie sur l'axe  $Ox$ .

### ■ Exemple



**FIGURE 3.16 :** Le contour fléché est utilisé pour calculer la circulation. Ce contour est arrondi dans les coins pour augmenter la lisibilité du graphique. La contribution sur le côté gauche est plus importante que celle sur le côté droit, ce qui contribue à une électromotance totale non nulle.

### 3.6.4 Champ inhomogène sur une spire en mouvement : flux magnétique

Nous allons voir ici que l'*électromotance* d'une spire en mouvement dans un champ magnétique peut être exprimée en termes du flux du champ magnétique. Ceci nous conduira à la loi d'induction de Faraday. Reprenons la situation de la figure 3.16 et calculons le flux magnétique qui la traverse à un instant  $t$ . Nous orientons la surface du rectangle selon  $\vec{1}_z$ , pour qu'elle puisse être associée au *contour orienté* utilisé pour calculer l'électromotance.

L'intégrale de flux prend la forme

$$\Phi_B = \iint_{\text{spirvBe}} \bar{B} \cdot d\bar{S} = \int_{x_g}^{x_d} \int_0^{\ell} B(x) \vec{1}_z \cdot \vec{1}_z dx dy = \ell \int_{x_g}^{x_d} B(x) dx. \quad (3.79)$$

Rappelons que les bornes de l'intégrale sont variables puisque la spire se déplace selon (3.75). On a donc

$$\Phi_B = \ell \int_{vt}^{d+vt} B(x) dx \stackrel{x=u+vt}{=} \ell \int_0^d B(u+vt) du, \quad (3.80)$$

où le changement de variables permet de se ramener à une intégrale dont les bornes sont fixes.

La variation de flux est donnée par

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \ell \int_0^d \frac{dB(u+vt)}{dt} du. \quad (3.81)$$

Le passage suivant est conceptuellement plus difficile. En effet, nous prenons la dérivée par rapport au temps d'une fonction  $B(x)$ , qui pourrait par exemple être de la forme  $B(x) = \frac{I}{2\pi\mu_0 r}$  si le champ est créé par un courant  $I$  circulant dans un fil placé en  $x = 0$  et qu'on se limite à observer ce qui se passe lorsque  $x > 0$ . On doit donc appliquer la règle de dérivation en cascade

$$\frac{dB(u+vt)}{dt} = \frac{du+vt}{dt} \left. \frac{dB(x)}{dx} \right|_{x=u+vt} = v \frac{dB}{dx}(u+vt). \quad (3.82)$$

En introduisant ceci dans l'équation de la variation du flux (3.81), on obtient

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \ell \int_0^d v \frac{dB}{dx}(u+vt) du \stackrel{x=u+vt}{=} v \ell \int_{x_d}^{x_g} \frac{dB}{dx}(x) dx = v \ell [B(x)]_{x_g}^{x_d}, \quad (3.83)$$

qui est l'opposé de (3.78) et permet d'écrire, pour cet exemple,

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_B}{dt}. \quad (3.84)$$

### 3.6.5 Interprétation

Les champs  $\vec{E}$  et  $\bar{B}$  étant partiellement corrélés par l'équation de Maxwell-Faraday, on peut calculer le rotationnel du champ électrique au départ de la variation du champ magnétique. Le flux d'un rotationnel étant lié par le *théorème circulation-rotationnel de*

*Stokes* à la circulation, on peut s'attendre à ce qu'il y ait un lien entre la circulation du champ électrique et la variation de flux. Ce lien est vérifié dans l'exemple traité ci-dessus, pour lequel la forme exacte de  $\bar{B}$  n'a pas dû être définie. Plusieurs hypothèses ont néanmoins été formulées pour arriver à ce résultat.

La section suivante vise à établir ce lien en toute généralité. Nous verrons qu'en toute généralité, il manque un terme à l'équation (3.84). Nous verrons que ce lien est lié à une hypothèse implicite dans notre exemple, qui consiste à supposer les fils conducteurs très fins par rapport à leur longueur.

D'un point de vue plus intuitif, on peut constater qu'une variation du flux magnétique n'est pas possible par une simple translation si le champ  $\bar{B}$  est homogène. Lorsque ce champ n'est pas homogène, par exemple, si la spire se déplace vers une zone où  $B$  est plus faible, le flux  $\Phi_B$  capté par la fibre va diminuer. Ceci induira  $d\Phi < 0$ . Dans ce cas, la partie droite de la spire voit un champ  $\bar{B}_d$  plus faible que la partie gauche qui voit  $\bar{B}_g$ , ce qui permet d'avoir une électromotance non nulle, positive, conformément à (3.75).

C'est la convention de *contour orienté* qui impose que le flux diminue quand la circulation augmente.

### ■ Exemple

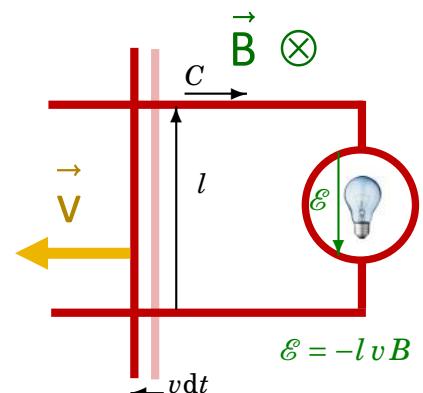
#### Spire à un côté mobile

Avant de faire une généralisation complète de (3.84), tentons de l'appliquer au cas d'une spire déformable dans un champ magnétique uniforme. La spire représentée à la figure 3.17 est constituée de deux fils conducteurs parallèles reliés à une ampoule électrique. Une tige conductrice est placée en contact avec les deux fils conducteurs et se déplace à la vitesse  $\vec{v}$  parallèle à ceux-ci.

Comme nous l'avons vu plus haut, le déplacement latéral de la tige à la vitesse  $\vec{v}$  dans le champ  $\bar{B}$  perpendiculaire au plan de la spire correspond à une *électromotance* électromagnétique égale à  $lvB$ . Or, la variation du flux magnétique capté par la spire sur un temps  $dt$  est égale au produit du module  $B$  du champ par la surface balayée par la tige mobile, soit,  $d\Phi_M = Blvdt$ . La dérivée temporelle du flux magnétique est donc égale à  $lvB$ , ce qui, en valeur absolue, est bien la valeur de l'électromotance induite par le mouvement de la tige,

$$d\Phi_M = lvdtB = -(-lvB)dt, \quad \mathcal{E} = -lvB. \quad (3.85)$$

**FIGURE 3.17 :** La spire est constituée de deux fils conducteurs parallèles reliés à une ampoule électrique. Une tige conductrice est placée en contact avec les deux fils conducteurs et se déplace à la vitesse  $\vec{v}$  parallèle à ceux-ci.



### 3.7 Lois intégrales de Faraday

Après avoir étudié quelques cas particuliers, lançons-nous dans l'élaboration d'une formulation générale du lien qui unit l'*électromotance* électromagnétique et la variation du flux au travers d'une surface sous-tendue par un contour.

Dans un premier temps, nous allons essentiellement établir la formule analytique de la variation d'un flux au cours du temps. Cette variation sera due, d'une part à la variation du champ dont on prend le flux au cours du temps ; et d'autre part à la déformation du contour sous-tendant la surface au-travers de laquelle le flux est calculé.

Dans un deuxième temps, nous la particulariserons au cas du champ magnétique qui est à divergence nulle.

Nous interpréterons physiquement ce premier résultat.

Après cette analyse générale, nous nous placerons dans le cadre des mouvements lents qui permettent d'utiliser la *relativité galiléenne* et d'obtenir des expressions d'utilisation plus pratiques.

Enfin, nous verrons comment appliquer ces expressions à des cas pratiques pour lesquels la loi de Faraday dans son expression la plus simple ne convient pas.

#### 3.7.1 Variation du flux au travers d'une surface déformable en mouvement

La question qui nous intéresse est de savoir comment varie le flux au travers d'une surface mobile, telle que celle représentée à la figure 3.18.

Le flux d'un champ  $\bar{B}$ , qui N'EST PAS À CE STADE IDENTIFIÉ AU CHAMP MAGNÉTIQUE est donné par

$$\Phi_B(t) = \iint_{S(t)} \bar{B}(\vec{r}, t) \cdot d\bar{S}, \quad (3.86)$$

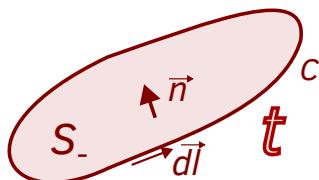
où le vecteur  $\vec{r}$  varie sur la surface  $S$  au cours de l'intégration. Si la surface  $S$  est invariante dans le temps,  $\vec{r}$  ne dépend donc pas du temps non plus.

#### Variation globale du flux

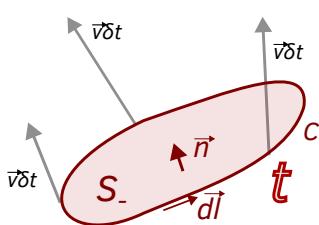
Le calcul de la variation du flux sur une surface mobile peut se faire d'un point de vue mathématique rigoureux, au moyen de l'analyse en coordonnées curvilignes orthogonales. Il conduit aux mêmes conclusions que l'analyse du point de vue physique présentée dans de nombreux ouvrages dont [6, Sec. 1.4.5].

Dans cette vision physique, on procède de la manière suivante. On considère la déformation du contour définie par le champ de vitesse  $\vec{v}$  défini en chaque point de la surface  $S$ . Sur un intervalle de temps très court, noté  $\delta t$ , les différents points de cette surface se déplacent d'une distance  $\delta\vec{x} = \vec{v}\delta t$ , comme représenté sur la figure 3.19.

**FIGURE 3.18 :** Surface servant à l'intégration du flux. Le vecteur  $\vec{n}$  désigne sa normale, qui varie en chaque point. La surface est délimitée par un *contour orienté*  $C$  d'élément d'arc  $d\bar{l}$ , qu'on aurait également pu noter  $d\vec{r}$ . Comme d'habitude, le schéma est représenté pour un produit vectoriel dextrogyre.



**FIGURE 3.19 :** Surface d'intégration subissant un déplacement d'une distance  $\delta\vec{x} = \vec{v}\delta t$  en chaque point. Seuls les déplacements du contour  $C$  sont représentés. L'intervalle de temps  $\delta t$  est choisi suffisamment petit pour que le mouvement puisse être considéré linéaire sur cet intervalle de temps.



Au terme de ce court laps de temps  $\delta t$ , la surface se retrouve à une nouvelle position dans l'espace. Bien que ces deux surfaces correspondent à des instants différents, on peut les représenter sur un même graphique, avec des couleurs différentes pour des instants différents (voir figure 3.20).

Le flux varie donc en fonction du temps parce que  $\bar{B}$  dépend du temps et parce que la surface  $S$  est mobile.

La variation globale du flux  $\delta\Phi_B$  sur l'intervalle de temps  $\delta t$  correspond à la différence entre les intégrales de flux considérées sur les deux surfaces,

$$\delta\Phi_B = \Phi_B(t + \delta t) - \Phi_B(t) = \iint_{S(t+\delta t)} \bar{B} \cdot d\bar{S} - \iint_{S(t)} \bar{B} \cdot d\bar{S}. \quad (3.87)$$

### Séparation des différentes variations

Nous allons distinguer les variations dues à l'évolution du champ  $\bar{B}$  et celles dues au fait que nous avons décidé de considérer une surface mobile. Pour cela, nous introduisons et retranchons la même intégrale, ce qui laisse la variation inchangée, puis nous regroupons les intégrales par deux,

$$\delta\Phi_{\bar{B}} = \int_{S(t+\delta t)} \bar{B}(t + \delta t) + \left( - \int_{S(t)} \bar{B}(t + \delta t) + \int_{S(t)} \bar{B}(t + \delta t) \right) - \int_{S(t)} \bar{B}(t). \quad (3.88)$$

Remarquez que ces intégrales sont écrites sous une forme compacte, sans l'élément  $d\bar{S}$  et que  $\bar{B}(t)$  est une notation condensée pour  $\bar{B}(\bar{r}, t)$  où  $\bar{r}$  représente la variation spatiale.

**Variation due au mouvement de la surface** Dans (3.88), les deux premiers termes représentent une variation due au mouvement de la surface, puisque  $\bar{B}$  est évalué au même moment dans les intégrales et peut donc être considéré constant (fixe). Nous notons cela

$$[\delta\Phi_B]_{B=\text{cte}} = \int_{S(t+\delta t)} \bar{B}(\bar{r}, t + \delta t) \cdot d\bar{S} - \int_{S(t)} \bar{B}(\bar{r}, t + \delta t) \cdot d\bar{S}. \quad (3.89)$$

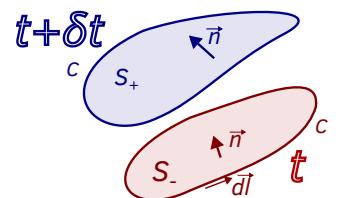
**Variation due à l'évolution temporelle du champ** Dans (3.88), les deux derniers termes représentent une variation due à l'évolution du champ, puisque les deux intégrales sont évaluées sur la même surface  $S(t)$ , qui peut donc être considérée constante. Nous notons cela

$$[\delta\Phi_B]_{S=\text{cte}} = \int_{S(t)} \bar{B}(\bar{r}, t + \delta t) \cdot d\bar{S} - \int_{S(t)} \bar{B}(\bar{r}, t) \cdot d\bar{S}. \quad (3.90)$$

**Variation totale du flux** La variation totale du flux est donc constituée de deux parties ayant chacune leur sens physique. La dérivée totale du flux se calculera comme suit

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left( \frac{[\delta\Phi_B]_{B=\text{cte}}}{\delta t} + \frac{[\delta\Phi_B]_{S=\text{cte}}}{\delta t} \right). \quad (3.91)$$

**FIGURE 3.20 :** Surface d'intégration représentée à deux instants proches. En rouge, la surface à l'instant  $t$  et en bleu cette même surface à l'instant  $t + \delta t$ . Au cours de ce mouvement, tous les points se déplacent et donc la normale  $\vec{n}$  à la surface est également modifiée.



Avant d'effectuer le calcul de limite, rappelons que la limite d'une somme est la somme des limites si toutes les limites considérées existent. Une propriété similaire vaut pour la limite d'un produit.

### Variation du flux lié à la surface

Ci-dessous, on calcule la variation du flux correspondant au déplacement de la surface

$$\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} \Big|_{B=cte} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\iint_{S(t+\delta t)} \bar{B} \cdot d\bar{S} - \iint_{S(t)} \bar{B} \cdot d\bar{S}}{\delta t}. \quad (3.92)$$

**Identification d'un volume d'intégration** Le calcul de cette différence peut s'effectuer en constatant que ces deux surfaces et les vecteurs  $\delta \vec{x} = \vec{v} \delta t$  dont l'origine est sur le contour  $C$  forment un volume fermé, comme représenté à la figure 3.21. Sur cette figure, on voit que l'intégration sur les surfaces notées  $S_+$  et  $S_-$  orientées avec une normale extérieure correspond à la différence

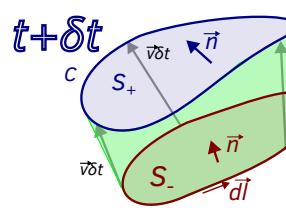
$$\iint_{S_+} \bar{B} \cdot d\bar{S} - \iint_{S_-} \bar{B} \cdot d\bar{S}. \quad (3.93)$$

On note  $S_{ext}$ , la surface externe du volume  $V$  illustré à la figure 3.20 et  $S_{lat}$ , la surface latérale représentée sur la figure 3.22. En tenant compte de l'orientation de chaque surface par rapport à la direction de la normale extérieure, on a de manière symbolique  $S_{ext} = S_{t+\delta t} - S_t + S_{lat}$ , ou encore  $S_{t+\delta t} - S_t = S_{ext} - S_{lat}$ . La différence (3.93) prend la forme

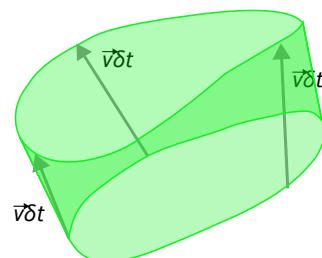
$$\iint_{S_{ext}} \bar{B} \cdot d\bar{S} - \iint_{S_{lat}} \bar{B} \cdot d\bar{S}. \quad (3.94)$$

En omettant la limite pour simplifier l'écriture et en utilisant (3.94), l'expression (3.92) devient

$$\delta t \frac{\partial \Phi_B}{\partial t} \Big|_B = \iint_{S_{ext}} \bar{B} \cdot d\bar{S} - \iint_{S_{lat}} \bar{B} \cdot d\bar{S}. \quad (3.95)$$



**FIGURE 3.21 :** L'écart entre les surfaces  $S_+ = S(t) + \delta t$  et  $S_- = S(t)$  définit un volume  $V$ . La normale de  $S_+$  est extérieure au volume, tandis que la normale à  $S_-$  est intérieure au volume.



**FIGURE 3.22 :** Surface latérale formée des vecteurs  $\delta \vec{x} = \vec{v} \delta t$  s'appuyant sur  $C$ .

**Réduction de l'intégrale sur la surface externe du volume** L'intégrale sur la surface externe du volume  $V$  qui apparaît dans (3.94) peut être convertie en une intégrale de volume au moyen du *théorème flux-divergence d'Ostrogradski-Gauss*, ce qui donne

$$\delta t \frac{\partial \Phi_B}{\partial t} \Big|_B = \iiint_V \text{div } \bar{B} dV - \iint_{S_{lat}} \bar{B} \cdot d\bar{S}. \quad (3.96)$$

**Factorisation des éléments de volume et surface** Dans la première intégrale, l'élément de volume est donné, au premier ordre en  $\delta t$  par le produit  $d\bar{S} \cdot \vec{v} \delta t$ , qui correspond à l'intégration de 0 à  $\vec{v} \delta t$  du volume élémentaire dans lequel on suppose que  $\bar{1}_v$  est

constante. De manière explicite, en notant  $\bar{1}_v dx$ , on peut donc récrire l'intégrale de volume sous la forme

$$\iint_S \int_0^{v\delta t} \operatorname{div} \bar{B} d\bar{S} \cdot \bar{1}_v dx = \iint_S (\operatorname{div} \bar{B} d\bar{S} \cdot \bar{v}) \delta t. \quad (3.97)$$

Pour que le volume soit positif, il faut que la normale intérieure au volume sur  $S(t)$  soit considérée. Ce n'est donc pas la normale extérieure qui est à prendre en compte comme pour l'application du *théorème flux-divergence d'Ostrogradski–Gauss*, mais la normale  $\bar{n}$  telle qu'elle apparaît sur la figure 3.18.

De même, dans l'équation sur la surface latérale, l'élément de surface est donné par  $d\bar{S} = d\bar{l} \times \bar{1}_v dx$ , avec  $x$  variant de 0 à  $v\delta t$ , ce qui permet d'écrire

$$\oint_{C(t)} \int_0^{v\delta t} \bar{B} \cdot (d\bar{l} \times \bar{1}_v dx) = \oint_{C(t)} [\bar{B} \cdot (d\bar{l} \times \bar{v}) \delta t]. \quad (3.98)$$

On en conclut que la variation due au mouvement de la surface peut s'écrire

$$\delta t \frac{\partial \Phi_B}{\partial t} \Big|_B = \delta t \left[ \iint_{S(t)} \operatorname{div} \bar{B} \bar{v} \cdot d\bar{S} - \oint_{C(t)} \bar{B} \cdot (d\bar{l} \times \bar{v}) \right], \quad (3.99)$$

expression dans laquelle on voit que la simplification par  $\delta t > 0$  est possible, ce qui fournit la dérivée partielle associée au mouvement de la surface.

### Variation du flux liée à l'évolution du champ

Cette variation se calcule au départ de (3.89). On obtient

$$\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} \Big|_S = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \int_{S(t)} \frac{\bar{B}(\bar{r}, t + \delta t) - \bar{B}(\bar{r}, t)}{\delta t} \cdot d\bar{S} = \int_{S(t)} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \cdot d\bar{S}. \quad (3.100)$$

### Variation totale du flux

La variation totale du flux s'obtient en additionnant les variations partielles données en (3.99) et (3.100). Dans cette opération, on réagence l'ordre des facteurs dans le produit mixte  $[\bar{B}, d\bar{l}, \bar{v}]$ , ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iint_S \bar{B} \cdot d\bar{S} &= \iint_S \left( \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} + \bar{v} \operatorname{div} \bar{B} \right) \cdot d\bar{S} - \oint_C (\bar{v} \times \bar{B}) \cdot d\bar{l}, \\ &= \iint_S \left[ \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} + \bar{v} \operatorname{div} \bar{B} - \operatorname{rot} (\bar{v} \times \bar{B}) \right] \cdot d\bar{S}, \end{aligned} \quad (3.101)$$

où le rotationnel apparaît par utilisation du *théorème circulation-rotationnel de Stokes*.

Les deux écritures montrent ce qui est nécessaire pour calculer la variation totale du flux sur une surface mobile représentée à la figure 3.19 : la surface et son *contour orienté*, la vitesse  $\bar{v}$  de chaque point du contour et le champ  $\bar{B}$  sur cette surface.

**Particularisation au champ d'induction magnétique** Lorsqu'on s'intéresse au flux du champ magnétique,  $\bar{B}$ , on peut utiliser l'équation locale de Maxwell-Faraday et l'équation locale de Gauss pour le champ magnétique,

$$\operatorname{div} \bar{B} = 0, \quad (3.102)$$

$$\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = -\overline{\operatorname{rot}} \vec{E}. \quad (3.103)$$

L'expression (3.101) se simplifie alors en

$$\frac{d\Phi_B}{dt} \stackrel{(3.102)}{=} \iint_S \left[ \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} - \overline{\operatorname{rot}} (\vec{v} \times \bar{B}) \right] \cdot d\bar{S} \quad (3.104)$$

$$\stackrel{(3.103)}{=} \iint_S \left[ -\overline{\operatorname{rot}} \vec{E} - \overline{\operatorname{rot}} (\vec{v} \times \bar{B}) \right] \cdot d\bar{S} \quad (3.105)$$

$$= - \iint_S \overline{\operatorname{rot}} (\vec{E} + \vec{v} \times \bar{B}) \cdot d\bar{S} \quad (3.106)$$

$$\stackrel{(2.51)}{=} - \oint_C (\vec{E} + \vec{v} \times \bar{B}) \cdot d\bar{l}. \quad (3.107)$$

Cette équation constitue pour certains auteurs l'équation de Faraday. Néanmoins, dans le raisonnement qui précède, rien ne nous indique que  $\vec{E} + \vec{v} \times \bar{B}$  est l'élément d'*électromotance* à intégrer pour obtenir l'*électromotance* électromagnétique.



L03P5



### 3.7.2 Hypothèses conduisant à la loi de Faraday

Pour que l'expression (3.107) soit liée à l'*électromotance* électromagnétique, il faut que la circulation calculée soit celle de la force non conservative agissant sur les charges mobiles.

Pour qu'il en soit ainsi, on doit faire des hypothèses.

#### Hypothèse macroscopique

On peut faire l'hypothèse que le contour d'intégration est lié à un matériau conducteur. Le critère proposé dans [6, Sec. 14.4.1] est de choisir  $\vec{v}$  équivalente à la vitesse des ions dans la matière, qui lui confèrent sa rigidité. On peut noter  $\vec{v}_i$  cette vitesse des ions. Pour une spire de fil conducteur  $\vec{v}_i$  est donc simplement la vitesse du fil conducteur.

#### Hypothèse microscopique et relativité galiléenne

On peut supposer que le mouvement des électrons dans la matière est lent par rapport aux vitesses nécessaires pour entrer dans le régime relativiste. Ceci permet de décrire le mouvement moyen des électrons par une vitesse de dérive  $\vec{v}_d$ . Dans l'hypothèse de *relativité galiléenne*, la vitesse des électrons dans le repère où les champs  $\vec{E}$  et  $\bar{B}$  ont été calculés est donc

$$\vec{v}_e(\vec{r}, t) = \vec{v}_i(\vec{r}, t) + \vec{v}_d(\vec{r}, t). \quad (3.108)$$

### 3.7.3 Lois de Faraday pour des vitesses non relativistes

Lorsque  $v_i \ll c$  et  $v_e \ll c$ , la *relativité galiléenne* s'applique et on peut récrire l'intégrale de circulation (3.107) sous la forme

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = - \oint_{C_i} [\vec{E} + (\vec{v}_e - \vec{v}_d) \times \vec{B}] \cdot d\bar{l} \quad (3.109)$$

$$= - \oint_{C_i} [\vec{E} + \vec{v}_e \times \vec{B}] \cdot d\bar{l} + \oint_{C_i} (\vec{v}_d \times \vec{B}) \cdot d\bar{l} \quad (3.110)$$

$$= - \oint_{C_i} \vec{F}_L/q_e \cdot d\bar{l} + \oint_{C_i} (\vec{v}_d \times \vec{B}) \cdot d\bar{l}, \quad (3.111)$$

où  $\vec{F}_L = q_e (\vec{E} + \vec{v}_e \times \vec{B})$  est la force de Lorentz.

On constate que la valeur de l'intégrale ne change pas, que l'on inclue ou non le champ électrostatique dans la définition de  $\vec{E}$ , puisque l'intégrale sur un contour fermé d'un champ dérivant d'un potentiel est nulle.

#### Lien entre l'électromotance électromagnétique et le champ

L'équation (3.111) prend la forme suivante par réarrangement

##### Loi de Faraday (variation du flux total)

$$\mathcal{E}_F = \oint_{C_i} \vec{F}_L/q_e \cdot d\bar{l} = - \frac{d\Phi_B}{dt} + \oint_{C_i} (\vec{v}_d \times \vec{B}) \cdot d\bar{l}, \quad (3.112)$$

où  $\vec{v}_d$  est la vitesse de dérive des électrons par rapport au contour  $C_i$  des ions dont la vitesse est  $\vec{v}_i$ . Les électrons se déplacent à  $\vec{v}_e = \vec{v}_i + \vec{v}_d$  dans le repère de mesure de  $(\vec{E}, \vec{B})$ .

On peut également faire apparaître la dérivée partielle du champ magnétique en utilisant (3.104) et le *théorème circulation-rotationnel de Stokes*, ce qui permet d'écrire

$$-\frac{d\Phi_B}{dt} = - \iint_{S_i} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\bar{S} + \oint_{C_i} (\vec{v}_i \times \vec{B}) \cdot d\bar{l}, \quad (3.113)$$

et par combinaison avec (3.112)

##### Loi de Faraday (flux de la variation partielle)

$$\mathcal{E}_F = \oint_{C_i} \vec{F}_L/q_e \cdot d\bar{l} = - \iint_{S_i} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\bar{S} + \oint_{C_i} (\vec{v}_e \times \vec{B}) \cdot d\bar{l}, \quad (3.114)$$

où  $\vec{v}_e$  et  $(\vec{E}, \vec{B})$  sont mesurés dans un même repère.

#### Équation de Faraday pour un conducteur filiforme lent

Dans le cas d'un conducteur filiforme, la vitesse de dérive  $\vec{v}_d$  est alignée sur le contour. Le produit mixte  $[\vec{v}_d, \vec{B}, d\bar{l}]$  est donc nul

puisque  $\vec{v}_d$  et  $d\vec{l}$  sont parallèles. Il en résulte une simplification plus forte de la loi de Faraday,

$$\mathcal{E}_F = - \frac{d\Phi_B}{dt}. \quad (3.115)$$

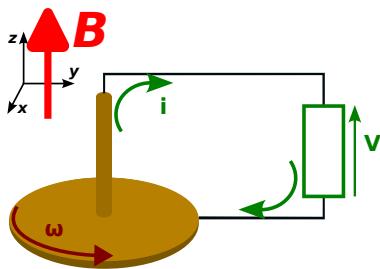
Une telle simplification ne peut pas toujours être effectuée, au risque de ne pas pouvoir décrire les effets observés. C'est par exemple le cas pour l'effet Hall, qui est utilisé, notamment, dans les sondes de mesure de courant. Il est donc préférable de toujours partir d'une des formes (3.112) ou (3.114).



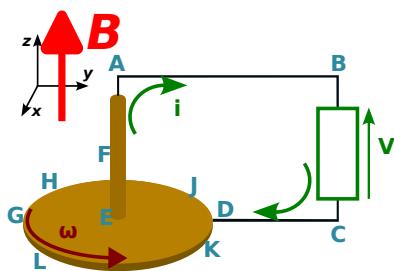
L03P6



**FIGURE 3.23 :** Disque de Faraday, tournant autour d'un axe  $z$  à une vitesse angulaire  $\omega$ . L'axe du disque est connecté à un circuit électrique comportant éventuellement une résistance (éventuellement infinie), aux bornes de laquelle on mesure la tension  $V$ . Le circuit est refermé sur la circonférence du disque conducteur, par exemple au moyen de balais, qui assurent un contact électrique même si le disque est en rotation. Le dispositif complet est immergé dans un champ magnétique aligné sur l'axe  $z$ ,  $\vec{B} = B_0 \vec{1}_z$ , constant et uniforme sur toute l'étendue du montage.



**FIGURE 3.24 :** Disque de Faraday décrit à la figure 3.23, avec identification de points pouvant servir de base à un contour d'intégration.



### Application pratique

#### 3.7.4 Le disque générateur de courant de Faraday

Le générateur de Faraday est un bon exemple d'application des équations de Faraday car il nécessite de bien identifier quelle partie du montage correspond aux intégrales de surface et de contour. Ce générateur est représenté à la figure 3.23

On demande quelle tension  $V$  est disponible aux bornes de la résistance, en négligeant toutes les origines possibles pour les pertes.

**Approche via la Force de Lorentz** Nous allons utiliser l'expression (3.114) qui résulte d'un calcul direct de la circulation de la *force de Lorentz* sur un contour. La question à se poser initialement est de savoir quel contour d'intégration utiliser. On peut choisir le contour passant par les points  $A, B, C, D, E, A$  sur la figure 3.24. Dans l'expression (3.114), comme  $\vec{B} = B_0 \vec{1}_z$  est constant sur toute l'étendue du montage, sa dérivée est nulle partout et l'intégrale de surface est nulle. Dans l'intégrale de contour, on doit distinguer la zone du disque et la zone du circuit filaire. Pour la zone du circuit filaire, dans l'hypothèse où un courant circule, on a  $\vec{v}_i = 0$  et donc  $\vec{v}_e = \vec{v}_d \parallel d\vec{l}$ , de sorte que la contribution à la circulation est nulle, puisque le produit mixte  $[\vec{v}_e, \vec{B}, d\vec{l}] = 0$ . La seule contribution non nulle à l'intégrale de circulation apparaît sur le tronçon non filiforme  $DE$ .

**Hypothèse microscopique** On suppose que le disque rigide contenant les ions entraîne les électrons dans son mouvement et qu'à ce mouvement s'ajoute le mouvement dû à la force de Lorentz. En notant la position d'un ion du disque par

$$\vec{r}_i = r \cos(\omega t) \vec{1}_x + r \sin(\omega t) \vec{1}_y, \quad (3.116)$$

on obtient comme expression de la vitesse de ce point

$$\vec{v}_i = -r\omega \sin(\omega t) \vec{1}_x + r\omega \cos(\omega t) \vec{1}_y, \quad (3.117)$$

L'élément d'arc  $ED$  est aligné sur  $\bar{1}_y$  lorsque  $\sin(\omega t) = 1$ , ce qui permet d'écrire

$$d\bar{l} = -dy \bar{1}_y, \quad (3.118)$$

$$\vec{v}_i = -y\omega \bar{1}_x, \quad (3.119)$$

$$\vec{v}_d \propto \vec{v}_i \times \bar{B} \propto \bar{1}_x \times \bar{1}_z \propto \bar{1}_y \quad (3.120)$$

On en déduit que le produit mixte  $[\vec{v}_e, \bar{B}, d\bar{l}]$  sur  $DE$  vaut

$$[\vec{v}_i + \vec{v}_d, B_0 \bar{1}_z, -dy \bar{1}_y] = [-y\omega \bar{1}_x + v_d \bar{1}_y, B_0 \bar{1}_z, -dy \bar{1}_y] = -\omega B_0 y dy. \quad (3.121)$$

La circulation totale dans le sens de parcours du courant indiqué par les flèches sur la figure 3.23 vaut donc

$$\mathcal{E}_F = -\omega B_0 \frac{a^2}{2}, \quad (3.122)$$

où  $a = ||DE||$  est le rayon du disque.

Il s'agit de l'*électromotance* responsable de la tension  $V$  aux bornes de la charge utile.

**Approche via la une surface déformable** Pour illustrer la possibilité d'utiliser différentes versions de la loi de Faraday, dans ce paragraphe, nous allons appliquer (3.112). Pour appliquer cette version de la loi de Faraday, il est important de se souvenir que le contour sous-tendant la surface doit suivre le mouvement des ions dans la matière.

La partie du circuit composée de fil électrique ( $A-D$  sur la figure 3.24) est immobile et peut facilement être utilisée comme base du contour. Au niveau du disque, dans la mesure où les ions (atomes dépourvus de leurs électrons de conduction) sont en mouvement, il faut que le contour soit en mouvement.

Ce contour est représenté à la figure 3.25. La surface colorée est une des surfaces sous-tendues par ce contour. Elle présente l'avantage d'être orthogonale au champ  $\bar{B}$  sur sa partie verticale  $A-E$ . Le calcul de l'intégrale de surface sera donc limité au secteur  $DKED$ . L'équation (3.112) peut donc s'écrire

$$\mathcal{E}_F = \oint_{ABCDKEA} \vec{F}_L/q_e \cdot d\bar{l} = -\frac{d}{dt} \left( \Phi_B^{ABCDEA} + \Phi_B^{DKED} \right) + \oint_{C_i} (\vec{v}_d \times \bar{B}) \cdot d\bar{l}. \quad (3.123)$$

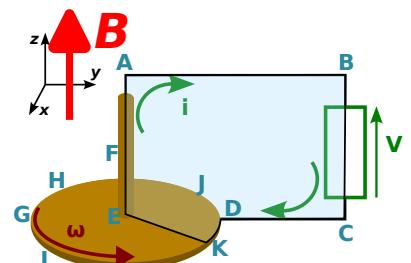
L'intégrale sur le contour  $C_i$  est nulle partout où  $\vec{v}_d \parallel d\bar{l}$ , soit sur le tronçon  $EABCD$ . Il reste donc à calculer

$$\mathcal{E}_F = -\frac{d}{dt} \iint_{DKED} \bar{B} \cdot d\bar{S} + \oint_{DKE} (\vec{v}_d \times \bar{B}) \cdot d\bar{l}. \quad (3.124)$$

*Hypothèses microscopiques* La force de Lorentz est à l'origine de la vitesse de dérive  $\vec{v}_d$ .

Sur le tronçon  $KE$ , cette force est radiale et donc alignée sur  $d\bar{l}$ , ce qui rend nul le produit mixte  $[\vec{v}_d, \bar{B}, d\bar{l}] = 0$ .

**FIGURE 3.25 :** Disque de Faraday décrit à la figure 3.25. Le contour est fixe des points  $A$  à  $D$  et mobile dans la partie  $DKE$ . Le point  $D$  est supposé fixe, à l'extérieur du disque, mais le point  $K$  est fixé au disque à une position  $a \cos(\theta_0 + \omega t) \bar{1}_x + a \sin(\theta_0 + \omega t) \bar{1}_y$ .



Sur le tronçon  $DK$ , la force de Lorentz agit également de manière radiale, mais comme l'air qui entoure le disque est isolant, la vitesse de dérive en régime établi doit être nulle.

Il nous reste donc à calculer

$$\mathcal{E}_F = -\frac{d}{dt} \iint_{DKED} \bar{B} \cdot d\bar{S}. \quad (3.125)$$

*Intégrale de surface variable* Pour calculer l'intégrale de surface, nous devons calculer l'élément de surface  $d\bar{S}$ . Tenant compte de l'orientation du circuit  $DKED$  dans le sens des aiguilles d'une montre, pour respecter la règle du *contour orienté*, on doit orienter la normale vers le bas, dans la direction  $-\bar{1}_z$ . On en déduit

$$\bar{B} \cdot d\bar{S} = -B_0 r dr d\theta, \quad (3.126)$$

où  $\theta$  désigne l'angle ( $\bar{1}_x, \overline{EK}$ ).

Pour terminer le calcul, il nous faut encore déterminer les bornes d'intégration. Pour la grandeur  $r$ , il s'agit de  $[0, a]$ , où  $a$  est le rayon du disque. Pour l'angle  $\theta$ , l'intégrale doit être calculée de la position  $\theta_0 + \omega t$  jusqu'à la position  $\theta = \pi/2$ . Pour simplifier les discussions, on peut limiter cette plage d'angles à des valeurs  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ . Cela conduit à

$$\mathcal{E}_F = -\frac{d}{dt} \int_{\theta_0 + \omega t}^{\pi/2} \int_0^a (-B_0) r dr d\theta = B_0 \frac{a^2}{2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\pi}{2} - \theta_0 - \omega t \right). \quad (3.127)$$

On obtient finalement

$$\mathcal{E}_F = -B_0 \omega \frac{a^2}{2}, \quad (3.128)$$

qui est identique à (3.122).

### ■ Petit poisson rouge... peut-on passer la barre rouge ?

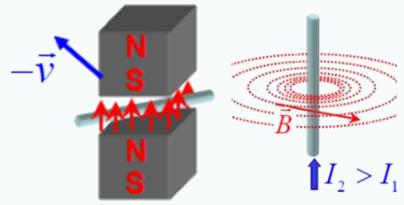
Oui, à condition de répondre à ma question !

Que deviendrait le calcul précédent, si on choisissait de suivre le mouvement du disque de  $ED$  vers  $EJ$ ? Dans ce cas, la surface  $EDJE$  augmenterait avec le temps et on pourrait s'attendre à ce que l'*electromotance* calculée soit de signe opposé. Néanmoins, une analyse plus détaillée devrait vous permettre de conclure qu'on obtiendrait (3.128).

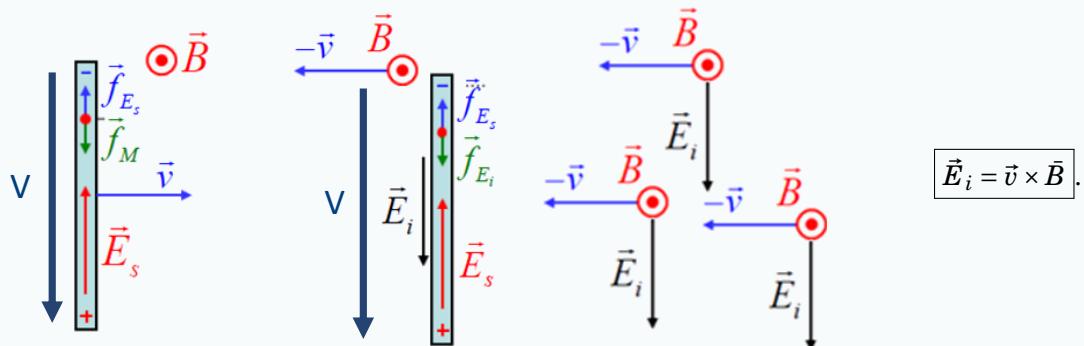
## 3.8 Le coin des assistant·es

### Champ électrique induit par déplacement

Prenons une barre conductrice initialement neutre (non soumise à une différence de potentiel). Cette barre est plongée dans un champ magnétique  $\vec{B}$  constant. On tire ensuite sur la barre pour qu'elle se déplace à la vitesse  $\vec{v}$ . Une force sera alors appliquée sur les charges négatives qui constituent cette barre conductrice. Cette force est la force de Lorentz dont l'expression générale est  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ .



Étudions cette barre de deux points de vue différents. D'abord, plaçons-nous dans un repère fixe (celui du laboratoire). Comme la barre n'est soumise à aucune différence de potentiel, le champ électrique est nul et nous voyons que la force qui s'exerce sur les charges est purement magnétique. Si on se place maintenant dans le repère mobile (celui de la barre), les charges doivent également subir une force puisque la physique du système ne dépend pas du référentiel inertiel choisi (principe de relativité de Galilée). Or celle-ci ne peut pas être d'origine magnétique puisque les charges sont immobiles dans ce repère ( $\vec{v} = 0$ ). Dans ce cas, la force qui s'exerce est donc d'origine électrique. Autrement dit, cette force est due à un **champ électrique induit** dans la barre. Celui-ci est différent des champs électrostatiques rencontrés précédemment puisqu'il ne dérive pas d'un potentiel électrostatique. On voit donc qu'en toute généralité, le champ électrique n'est pas conservatif. Le champ électrique induit est donné par  $\vec{E}_i = \vec{v} \times \vec{B}$ , où  $\vec{v}$  est maintenant la vitesse du repère mobile. Notons qu'il est incohérent que la nature de la force qui s'exerce sur les charges mobiles de la barre change en fonction du référentiel inertiel choisi. Cela est dû au fait que l'on traite le champ électrique et le champ magnétique comme des entités physiques distinctes, alors qu'ils sont les 2 facettes d'une même pièce : le champ électromagnétique.



### Électromotance

Contrairement au cas du champ électrostatique, l'intégrale d'un champ électrique induit sur un contour fermé ne sera pas nulle puisque celui-ci ne dérive pas d'un potentiel scalaire ( $\text{rot } \vec{E}_i \neq 0$ ). Le résultat de l'intégration du champ électrique induit sur un contour fermé  $C$  donne une quantité qu'on identifie comme une (pseudo) différence de potentiel (presque partout définie) que l'on appelle l'*électromotance*,

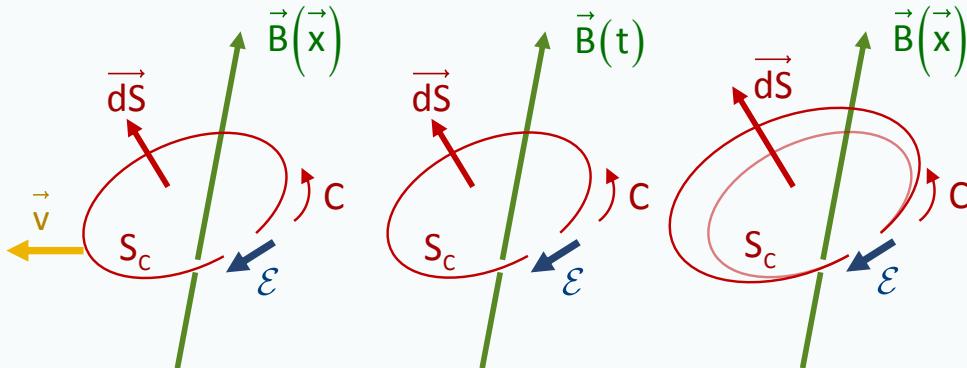
$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{E}_i \cdot d\vec{\ell}. \quad (3.129)$$

Si on multiplie l'électromotance par une charge  $q$ , on obtient une énergie potentielle. Le principe de conservation de l'énergie stipule que cette énergie doit venir de quelque part. Cette énergie provient soit d'un mouvement mécanique, soit de la variation temporelle du champ magnétique.

### Loi de Faraday

Pour un fil mince et lent par rapport à la vitesse de la lumière, l'électromotance est donnée par la variation du flux magnétique au travers de la surface sous-tendue par le fil mince,

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial \Phi_b}{\partial t}. \quad (3.130)$$



Le flux magnétique peut changer de trois manières différentes :

- le champ n'est pas uniforme (schéma de gauche) et la spire se déplace et intercepte un champ magnétique différent ;
- le champ n'est pas constant (schéma du milieu) et la spire intercepte un champ variable sans même devoir se déplacer ;
- la surface de la spire augmente ou diminue (schéma de droite) et la spire intercepte respectivement plus ou moins de flux.

Attention, il faut garder à l'esprit que cette forme de la loi de Faraday ne peut être utilisée que dans des cas relativement simples (fil mince et lent). En toute généralité, la loi intégrale de Faraday peut s'exprimer sous les 2 formes suivantes (à conditions que les hypothèses de la section 3.7.2 soient vérifiées),

$$\mathcal{E}_F = \oint_{C_i} \vec{F}_L / q_e \cdot d\bar{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} + \oint_{C_i} (\vec{v}_d \times \vec{B}) \cdot d\bar{l}, \quad (3.131)$$

$$\mathcal{E}_F = \oint_{C_i} \vec{F}_L / q_e \cdot d\bar{l} = -\iint_{S_i} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\bar{S} + \oint_{C_i} (\vec{v}_e \times \vec{B}) \cdot d\bar{l}. \quad (3.132)$$

### 3.9 Questions théoriques

1. Définissez mathématiquement le champ électrique induit à l'aide d'un schéma permettant de comprendre la signification physique des grandeurs qui y apparaissent. [section 3.4.3, p. I.69]
2. Définissez mathématiquement l'électromotance électromagnétique induite par la mise en mouvement d'une charge. [section 3.7.3, p. I.85]
3. Donnez l'expression mathématique générale de la loi de Faraday en termes des champs électrique et magnétique. Expliquez en quelques mots et à l'aide d'un schéma la convention de signe et de sens des vecteurs de la loi de Faraday. [section 3.7, p. I.80]
4. Écrivez la forme locale de la loi de Faraday. [section 3.7, p. I.80]

## 3.10 Exercices

### Exercice 3.1

Pour chacune des formes de l'équation de Faraday, (3.112) et (3.114), écrivez l'expression de l'electromotance électromagnétique lorsque le fil conducteur est immobile  $\vec{v}_i = \vec{0}$ . Montrez que ces deux équations sont identiques.

### Exercice 3.2

Le schéma de la figure E.3.1 montre une tige de cuivre parallélépipédique d'épaisseur  $e = 1\text{ mm}$ , de hauteur  $h = 5\text{ mm}$  et de longueur  $L = 20\text{ mm}$ . Cette tige véhicule un courant  $I$  de  $15\text{ A}$  dans le sens de sa longueur et elle est plongée dans un champ magnétique uniforme  $B$  de  $0,25\text{ T}$  dirigé perpendiculairement à ses grandes faces, comme indiqué sur le schéma.

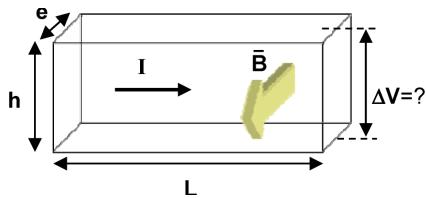


FIGURE E.3.1 :

- Quelles sont les charges en mouvement ?
- Faites un schéma de la situation en y représentant la vitesse des charges, le champ magnétique, et la ou les forces impliquées.
- Expliquez qualitativement, sur base du schéma, les phénomènes qui entrent en jeu.
- Sachant que la densité d'électrons libres  $\eta_c$  dans le cuivre est de  $8,47 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3}$ , calculez la tension  $\Delta V$  qui apparaît entre les faces horizontales du bloc et indiquez sa polarité. (Réponse :  $\Delta V = 0,27 \mu\text{V}$ )
- À l'aide de votre résultat, imaginez une technique de mesure du champ magnétique. Vous aurez alors découvert par vous-même le principe de la sonde à effet Hall inventée par le physicien américain Edwin Hall en 1879 et beaucoup utilisée depuis pour mesurer les champs magnétiques.

### Exercice 3.3

Dans le montage schématisé à la figure E.3.2, on supposera que le champ est de  $1\text{ T}$  et que la vitesse  $v$  de déplacement de la barrette conductrice est de  $1\text{ m/s}$ . Calculez la force qu'il faut exercer sur la barrette pour effectuer un tel déplacement si sa longueur est  $\ell = 10\text{ cm}$  et si la résistance  $R$  de l'ampoule est de  $1\Omega$ . (Réponse :  $F_{\min} = 10\text{ mN}$ )

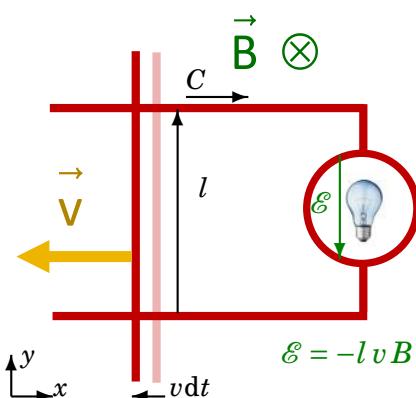


FIGURE E.3.2 : Spire déformable. L'axe  $z$  est sortant du plan (il pointe vers vous).

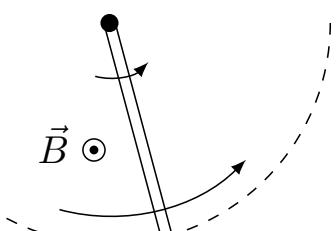


FIGURE E.3.3 :

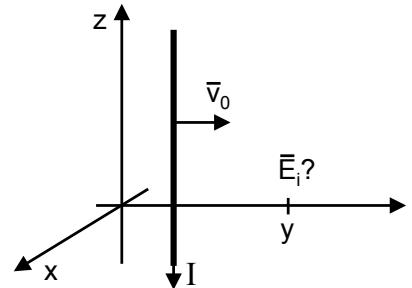
### Exercice 3.4

Le schéma représente une tige métallique tournant autour d'une de ses extrémités dans un plan perpendiculaire au champ magnétique uniforme appliqué. La tige, qui a une longueur  $L$  de  $10\text{ cm}$ , tourne à raison de  $10$  tours par seconde et le champ magnétique est de  $1\text{ T}$ . Calculez la force électromotrice induite entre les extrémités de la tige et indiquez à l'aide d'une flèche sur le schéma la direction et le sens du champ électrique induit. (Réponse :  $\mathcal{E} = 0,31\text{ V}$ )

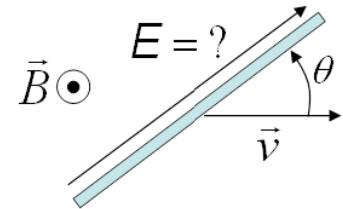
**Exercice 3.5**

Le schéma de la figure E.3.4 montre un fil conducteur rectiligne vertical (supposé infiniment long et mince) véhiculant un courant  $I$  constant dirigé vers le bas. Le fil se déplace à vitesse constante  $\vec{v}_0$  dans la direction de l'axe  $y$ . Le fil se trouve le long de l'axe  $z$  au temps  $t = 0$  et reste parallèle à l'axe  $z$  en tout temps.

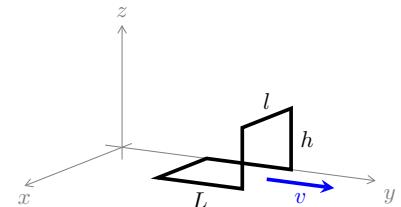
- Calculez l'expression du champ électrique induit  $\vec{E}_i(t, y)$  au point  $(0, y, 0)$  en fonction du temps  $t$  (pour  $t < y/v_0$ ) et de la coordonnée  $y$ .
- Démontrez la loi de Faraday dans cette situation physique particulière, c'est-à-dire : démontrez qu'au point  $(0, y, 0)$ , on vérifie bien la relation  $\text{rot} \vec{E}_i = -\partial \vec{B} / \partial t$  (coup de pouce : utilisez le fait que sur l'axe  $y$  on a :  $\partial \vec{E}_i / \partial x = 0$ ).

**FIGURE E.3.4****Exercice 3.6**

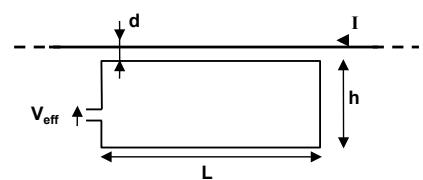
Calculez la force électromotrice induite aux bornes d'un conducteur filiforme rectiligne d'une longueur  $L = 10\text{cm}$  et incliné d'un angle  $\theta = 30^\circ$  par rapport à la direction de la vitesse  $v = 1\text{m s}^{-1}$  avec laquelle il se déplace dans un champ magnétique uniforme de norme  $B = 1\text{T}$  et perpendiculaire au conducteur et à la vitesse. (Réponse :  $\mathcal{E} = 50\text{mV}$ )

**FIGURE E.3.5****Exercice 3.7**

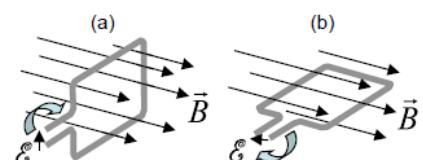
La spire  $C$  représentée à la figure E.3.6 se meut à vitesse  $v$  dans un champ magnétique  $\vec{B}(\vec{r}, t) = B_0 \frac{b}{y+d} \vec{1}_z$ , où  $B_0$  est une constante qui s'exprime en teslas, et  $b$  et  $d$  des paramètres de distance fixés. À l'instant  $t = 0$ , l'extrémité gauche de la spire est située en  $y = 0$ . Calculez, pour tout temps  $t \geq 0$ , l'intégrale du champ électrique induit le long de la spire,  $\oint_{C(t)} \vec{E}_i \cdot d\vec{l}$ . Vérifiez ensuite votre résultat en calculant, pour tout temps  $t \geq 0$ , l'intégrale de flux du champ magnétique  $-\frac{d}{dt} \int_{S_{C(t)}} \vec{B} \cdot d\vec{S}$  à travers la surface délimitée par la spire.

**FIGURE E.3.6****Exercice 3.8**

Le schéma de la figure E.3.7 montre un câble de ligne à haute tension véhiculant un courant alternatif  $I$  de fréquence  $f = 50\text{Hz}$  et d'amplitude  $I_m = 800\text{A}$ . Un circuit rectangulaire de longueur  $L = 4\text{m}$  et de hauteur  $h = 2\text{m}$  est disposé à une distance  $d = 50\text{cm}$  de ce câble. Calculez la tension efficace  $V_{\text{eff}}$  générée aux bornes du circuit (on suppose le câble rectiligne). (Réponse :  $V_{\text{eff}} = 0.23\text{V}$ )

**FIGURE E.3.7****Exercice 3.9**

Les schémas de la figure E.3.8 illustrent le principe de l'alternateur : il montre une spire tournant dans un champ magnétique uniforme.

**FIGURE E.3.8**

C'est dans la position verticale (situation a) que la force électromotrice aux bornes de la spire est la plus grande. Vrai ou faux ? Justifiez.

### Exercice 3.10

Le schéma de la figure E.3.9 montre un disque de métal de rayon  $a = 20\text{ cm}$  tournant à 1200 tours par minute. Ce disque est plongé dans un champ magnétique uniforme de norme  $B = 2.1\text{ T}$  parallèle à son axe de rotation. Le bord et l'axe du disque sont reliés à un circuit électrique à l'aide de balais (contacts électriques glissants). Les pertes résistives des conducteurs du dispositif sont représentées schématiquement par la résistance « interne »  $R_i = 5.3\Omega$ . À l'aide d'un interrupteur, le circuit peut être fermé sur une résistance chauffante de valeur inconnue  $x$ .

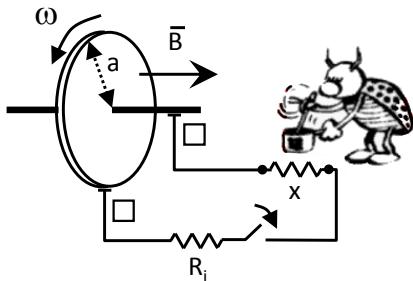


FIGURE E.3.9 :

- Calculez la force électromotrice  $\mathcal{E}$  générée aux bornes du circuit (interrupteur ouvert) et indiquez-en la polarité à l'aide des signes + et - dans les cases (■) réservées à cet effet sur le schéma de la figure E.3.9.
- Calculez la valeur à donner à la résistance  $x$  pour obtenir sa plus grande puissance de chauffe  $P_J$  avec les paramètres donnés ci-dessus. Exposez clairement la démarche mathématique qui mène à votre résultat.

### Exercice 3.11

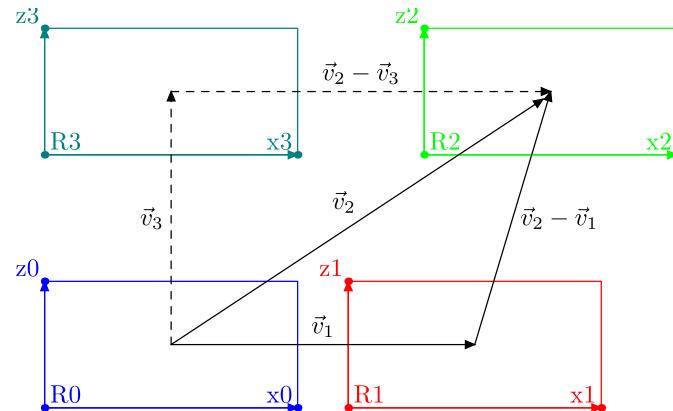


FIGURE E.3.10 : Spires évoluant dans différents repères à des vitesses différentes par rapport au fil parcouru par le courant continu à l'origine du champ  $\vec{B}$ . À chacune des spires correspond un repère  $R_i$  en translation uniforme par rapport aux autres, à vitesse  $\vec{v}_i$  par rapport au repère du fil véhiculant le courant.

On a représenté à la figure E.3.10, un plan contenant plusieurs repères en mouvement relatif par rapport au repère de référence  $R_0$ . Dans ce repère  $R_0$ , un fil vertical supposé infini génère un champ magnétique donné par  $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \hat{1}_\theta$ , où  $(\rho, \theta, z)$  sont des coordonnées cylindriques telles que fil soit en  $\rho = 0$ . Pour la suite de l'exercice, on supposera qu'on travaille dans le plan  $\theta = 0$ , d'un seul côté du fil, de sorte qu'on puisse considérer que  $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi(x_0+d)} \hat{1}_y$ , où  $d$  est la distance entre le fil et l'origine du repère  $r_0$ .

On demande de calculer les composantes du champ électromagnétique dans chacun des repères, qui se déplacent aux vitesses

constantes  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$  et  $\vec{v}_3$ . Pour simplifier les expressions, on supposera que

$$\vec{v}_2 - \vec{v}_1 \parallel \vec{l}_z; \quad (\text{E.3.1})$$

$$\vec{v}_3 \parallel \vec{l}_z; \quad (\text{E.3.2})$$

$$\vec{v}_2 - \vec{v}_3 \parallel \vec{l}_x. \quad (\text{E.3.3})$$

### Exercice 3.12

Le schéma de la figure E.3.11 montre un circuit électrique constitué de deux tiges métalliques parallèles séparées de la distance  $L = 30\text{cm}$ . Sur ces deux tiges glisse une troisième tige métallique qui leur est perpendiculaire. Cette tige mobile se déplace à vitesse constante  $v = 2.5\text{ m s}^{-1}$  dans le sens indiqué par la flèche. L'ensemble du circuit est plongé dans un champ magnétique uniforme  $\bar{B}$  sortant du plan de la feuille et dont le module vaut  $B = 3.2\text{T}$ . Le circuit est fermé sur une résistance  $R = 0.53\Omega$  (on néglige la résistivité des autres conducteurs).

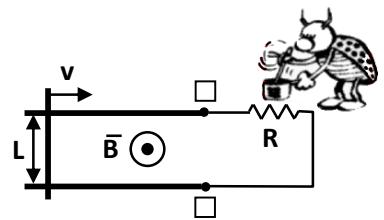


FIGURE E.3.11

- Calculez l'électromotance  $\mathcal{E}$  générée aux bornes du circuit et indiquez-en la polarité à l'aide des signes + et – dans les cases (■) réservées à cet effet sur le schéma de la figure E.3.11
- Calculez la puissance électrique  $P_J$  dissipée dans la résistance et démontrez que celle-ci est identique à la puissance mécanique  $P_M$  dépensée pour maintenir la tige mobile en mouvement.

### Exercice 3.13

Le schéma de la figure E.3.12 montre une tige conductrice libre de se mouvoir le long de deux fils conducteurs verticaux reliés à leur extrémité par une résistance  $R = 1.2\Omega$ . Des contacts électriques glissants sans frottement permettent au courant de passer entre les deux fils et la tige sans résistance additionnelle. La tige a une masse  $m = 120\text{g}$  et une longueur  $L = 12\text{cm}$ . L'ensemble est plongé dans l'entrefer d'un aimant au sein duquel règne un champ magnétique uniforme horizontal, perpendiculaire à la tige et dont le module vaut  $B = 2.2\text{T}$ . Calculez la vitesse maximale  $v$  qu'atteint la tige lors de sa chute dans le champ gravitationnel de module  $g = 9.81\text{ m s}^{-2}$  (on négligera les frottements de l'air).

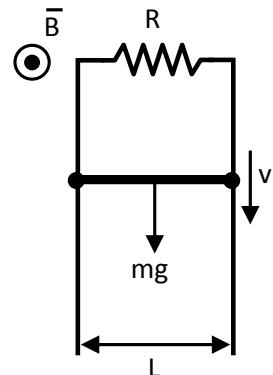


FIGURE E.3.12

### Exercice 3.14

À l'aide d'une ligne fléchée, représentez sur le schéma de la figure E.3.13 le sens du courant qui parcourt la spire lorsque celle-ci se rapproche de l'aimant (c'est-à-dire passe de la position 1 à la position 2). Justifiez brièvement votre réponse.

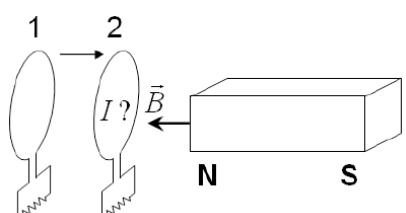


FIGURE E.3.13 : La spire passe de la position 1 à la position 2, alors que l'aimant permanent est immobile. La convention est que la circulation du champ magnétique du nord vers le sud est positive à l'extérieur de l'aimant.

## Récapitulatif des notions vues dans cette leçon

Indispensable	Nécessaire	Intéressant
<ul style="list-style-type: none"> <li>— Forme locale de l'équation de Maxwell-Faraday (2.105).</li> <li>— Expliquer le sens physique de l'<i>électromotance</i> et en connaître l'expression. Sec. 3.2 et (3.10).</li> <li>— Équations donnant le champ électromagnétique dans un repère en translation uniforme (relativité galiléenne). Sec. 3.4.3 et (3.46)-(3.47)</li> <li>— Calculer l'<i>électromotance</i> électromagnétique dans une configuration simple comme une de celles présentées dans cette leçon.</li> <li>— Connaître les deux formes intégrales de l'équation de Faraday (3.112) et (3.114) et savoir les appliquer.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>— Expliquer sur quel principe physique repose l'idée qu'une force doit être invariante pour deux repères en translations uniforme.</li> <li>— Obtenir (3.41) au départ de (2.105), (3.28) et (3.40), en justifiant les hypothèses et les calculs.</li> <li>— Obtenir les formes globales (3.112) et (3.114) en termes de flux au départ de l'équation locale (2.105).</li> <li>— Établir le lien entre <i>électromotance</i>, force de Laplace et force de Lorenz.</li> <li>— Identifier les contours d'intégration pour les intégrales de contour et celles de surface.</li> <li>— Simplifier la loi du flux de Faraday pour des conducteurs minces.</li> <li>— Expliquer l'origine de l'énergie produite par l'<i>électromotance</i> dans un conducteur en mouvement.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>— Comprendre les équations de Maxwell au départ des potentiels vecteur et scalaire.</li> <li>— Équations d'évolution des potentiels.</li> </ul>

# Loi d'Ampère, équations de Maxwell et loi de Lenz

Leçon  
4

## ■ Pré-requis pour cette leçon ■

- |  |                             |
|--|-----------------------------|
| — <i>rotationnel</i>                                   | — <i>surface orientée</i>   |
| — <i>théorème circulation-rotationnel de Stokes</i>    | — <i>contour orienté</i>    |
| — <i>divergence</i>                                    | — <i>loi de Biot-Savart</i> |
| — <i>théorème flux-divergence d'Ostrogradski-Gauss</i> | — <i>loi de Gauss</i>       |
| — <i>électrostatique</i>                               | — <i>loi d'Ampère</i>       |
| — <i>magnétostatique</i>                               | — <i>charge</i>             |
|  | — <i>courant</i>            |
|  | — <i>condensateur</i>       |

NOTRE ÉTUDE DE LA LOI DE MAXWELL-FARADAY nous a montré l'importance du terme dynamique qui apparaît dans la loi locale de Faraday. Dans ce chapitre, nous allons étudier la deuxième loi de Maxwell à laquelle il est nécessaire de rajouter un terme qui n'apparaît pas dans son équivalent électrostatique : la *loi d'Ampère*.

Nous présenterons alors un récapitulatif des *équations de Maxwell* microscopiques dans leur forme la plus générale, ce qui nous permettra d'expliquer différentes expériences simples d'*électromagnétisme*, en commençant par l'étude de la loi de Lenz.

Ceci nous amènera à discuter rapidement de la réaction de la matière à des champs externes et nous préparera à étudier la dynamique des circuits électriques.



L04P1



## 4.1 Loi d'Ampère et courants de déplacement

Nous allons présenter le concept de courant de déplacement introduit par Maxwell vers 1860. Ce concept est d'une très grande importance historique car il a permis de compléter le cadre théorique de l'électromagnétisme et d'expliquer grâce à cela un bon nombre de propriétés du champ électromagnétique jusque-là inexplicées. En particulier, le travail de Maxwell a permis d'anticiper et d'expliquer l'existence des ondes électromagnétiques.



**FIGURE 4.1 :** James-Clerk Maxwell (1831–1879).

### 4.1.1 Problématique de la loi d'Ampère

L'origine de la découverte de Maxwell se situe dans son analyse critique de la *loi d'Ampère* dont on rappelle la formulation ci-dessous. Cette loi dit que la circulation du champ magnétique sur un contour fermé  $C$  est égale au courant électrique qui passe au travers de ce contour, multiplié par la perméabilité du vide  $\mu_0$ . Comme représenté à la figure 4.2, le courant est exprimé comme le flux de la densité de courant  $\vec{J}$  au travers de la surface  $S_C$  sous-tendue par le contour  $C$ ,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int_{S_C} \vec{J} \cdot d\vec{S}. \quad (4.1)$$

Rappelons que cette loi doit être appliquée en respectant la règle de la main droite pour le sens des vecteurs ( $d\vec{S}$ , la normale à la *surface orientée* dans le sens du pouce si les doigts repliés indiquent le sens de parcours du *contour orienté*, c'est-à-dire, le sens de  $d\vec{\ell}$ ).

Pour les scientifiques de l'époque et pour Maxwell en particulier, cette loi posait un important problème conceptuel dans la mesure où la surface sous-tendue  $S_C$  n'y est pas définie de façon univoque. En effet, il y a une infinité de choix possibles pour une surface sous-tendue par un contour donné et il n'est pas du tout évident que le courant au travers de toutes ces surfaces soit le même. Or, si le courant n'est pas le même cela signifierait que la circulation du champ sur un contour  $C$  donné aurait plusieurs valeurs possibles, ce qui rendrait la loi d'Ampère complètement incohérente et donc sans signification et sans utilité.

Pour bien comprendre cette problématique, considérons le choix de deux surfaces distinctes  $S_{C1}$  et  $S_{C2}$ , sous-tendues par le même contour  $C$ . Elles sont représentées sur le schéma de la figure 4.3. Les surfaces y apparaissent comme des lignes et le circuit est représenté par les deux petits cercles correspondant à la section du contour par le plan de coupe. Nous allons voir ci-dessous que les courants au travers des deux surfaces ne sont effectivement pas nécessairement les mêmes, ce qui en principe invalide la loi d'Ampère. La problématique est donc de savoir si

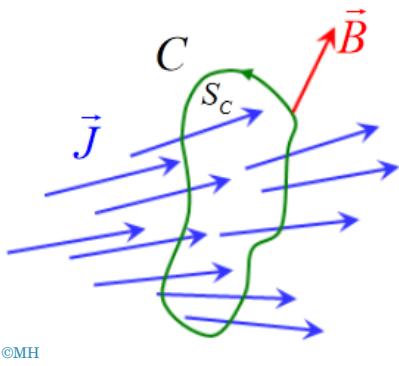
$$\int_{S_{C1}} \vec{J} \cdot d\vec{S}_{C1} \stackrel{?}{=} \int_{S_{C2}} \vec{J} \cdot d\vec{S}_{C2}. \quad (4.2)$$

#### Condition de validité de la loi d'Ampère

Pour aborder le problème calculons le flux de  $\vec{J}$  au travers de la surface fermée  $S$  résultant de la réunion des surfaces  $S_{C1}$  et  $S_{C2}$ . Cette surface fermée apparaît en pointillés rouges sur le schéma de la figure 4.3. Le flux au travers de la surface fermée  $S$  est donné par la somme des flux de  $\vec{J}$  au travers des surfaces  $S_{C1}$  et  $S_{C2}$ , pour autant que ces surfaces soient orientées de la même manière. Nous y reviendrons. On a

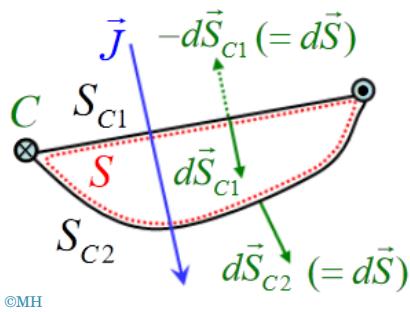
$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_{S_{C1}} \vec{J} \cdot d\vec{S} + \int_{S_{C2}} \vec{J} \cdot d\vec{S}. \quad (4.3)$$

**FIGURE 4.2 :** Organisation des différents éléments apparaissant dans la loi d'Ampère : surface d'intégration  $S_C$  sous-tendue par le contour  $C$ , densité de courant  $\vec{J}$  et champ d'induction  $\vec{B}$ .



©MH

**FIGURE 4.3 :** Vue en coupe de deux surfaces  $S_{C1}$  et  $S_{C2}$  sous-tendues par le même contour  $C$ .



©MH

Les deux intégrales du membre de droite ne sont rien d'autre que les courants passant au travers des surfaces  $S_{C1}$  et  $S_{C2}$ . Pour que la loi d'Ampère soit cohérente il faudrait que ces courants soient en toutes circonstances identiques. Dans cette situation particulière toutes les charges électriques qui rentreraient par la surface  $S_{C1}$  ressortiraient par la surface  $S_{C2}$ . Ce qui aurait pour conséquence que le flux net de charges électriques au travers de la surface fermée serait nul.

**Orientation des surfaces** Ce résultat n'est pas évident dans (4.3) dans laquelle les flux sur  $S_{C1}$  et  $S_{C2}$  semblent s'additionner plutôt que de se retrancher pour donner le zéro attendu. Cette incohérence apparente provient du fait que dans ces intégrales les vecteurs  $d\vec{S}$  sont, par convention, sortants de la surface fermée  $S$ . Or, l'intégrale de courant dans le membre de droite de la loi d'Ampère se fait conventionnellement avec un vecteur de surface répondant à la règle de *contour orienté*. Pour un sens de parcours donné, les vecteurs  $d\vec{S}_{C1}$  et  $d\vec{S}_{C2}$  qui apparaissent dans les deux intégrales de courant de (4.3) sont donc des vecteurs de même orientation, comme représenté sur le schéma de la figure 4.3, où l'on peut voir que l'orientation des vecteurs  $d\vec{S}_{C1}$  et  $d\vec{S}_{C2}$  répond bien à la règle de la main droite (notez que le sens de parcours  $d\vec{\ell}$  est indiqué sur ce schéma par les symboles habituels des flèches entrant ( $\otimes$ ) et sortant ( $\odot$ ) du plan de la feuille). Nous sommes donc en présence de deux conventions différentes et il convient d'en tenir compte dans notre développement. Par exemple, dans la situation du schéma les vecteurs de surface  $d\vec{S}$  sont dans le même sens que  $\vec{J}$  sur  $S_{C2}$ , ce qui donne un courant positif ( $\vec{J} \cdot d\vec{S} > 0$ ) alors que les vecteurs de surface  $d\vec{S}$  sont dans le sens opposé à  $\vec{J}$  sur  $S_{C1}$ , ce qui donne un courant négatif ( $\vec{J} \cdot d\vec{S} < 0$ ). Mais comme notre but est ici de comparer les flux de  $\vec{J}$  au travers des surfaces  $S_{C1}$  et  $S_{C2}$  il convient de décrire ces flux dans la même convention. Pour cela nous allons écrire l'expression de l'intégrale de surface fermée en considérant la règle du *contour orienté* pour les deux portions de surface  $S_{C1}$  et  $S_{C2}$ . Ceci se fait simplement en inversant les vecteurs de surface de  $S_{C1}$ , ce qui revient mathématiquement à renommer ces vecteurs en posant  $d\vec{S} = -d\vec{S}_{C1}$  dans la première intégrale de droite ci-dessus. Comme les deux conventions donnent le même sens de vecteur de surface pour la portion  $S_{C2}$  on peut écrire  $d\vec{S} = d\vec{S}_{C2}$  pour l'intégrale sur la portion de surface  $S_{C2}$ . La relation (4.3) s'écrit donc

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = - \int_{S_{C1}} \vec{J} \cdot d\vec{S}_{C1} + \int_{S_{C2}} \vec{J} \cdot d\vec{S}_{C2}. \quad (4.4)$$

**Surfaces voisines dans le vide** Pour que la loi d'Ampère soit cohérente il faudrait que le choix de la surface sous-tendue soit complètement libre et n'influence pas la valeur du courant qui y passe. Dans notre problème, ceci se traduit par le fait que le flux de  $\vec{J}$  au travers de  $S_{C1}$  doit absolument être égal au flux de  $\vec{J}$  au travers de  $S_{C2}$ . Si tel était effectivement le cas, la relation ci-dessus

montrerait que le flux de  $\vec{J}$  au travers de la surface fermée  $S$  est nul. En résumé, on veut

$$\int_{S_{C1}} \vec{J} \cdot d\vec{S}_{C1} = \int_{S_{C2}} \vec{J} \cdot d\vec{S}_{C2} \Rightarrow \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0. \quad (4.5)$$

On constate donc, avec cette dernière relation, que pour être valable, la loi d'Ampère impose que le flux de la densité de courant  $\vec{J}$  soit nul sur la surface fermée  $S$ . Bien sûr, dans ce raisonnement le choix du contour  $C$  et des surfaces sous-tendues  $S_{C1}$  et  $S_{C2}$  est complètement libre et arbitraire, ce qui signifie aussi que la surface fermée  $S$  est arbitraire. Nous pouvons donc dire plus précisément que la validité de la loi d'Ampère impose que le flux de la densité de courant  $\vec{J}$  soit nul sur toute surface fermée  $S$ . Pour comprendre ce que cette conclusion implique, il est intéressant de considérer le théorème d'Ostrogradski qui dit que le flux d'un champ vectoriel sur une surface fermée  $S$  est égal à l'intégrale de volume de la divergence de ce champ sur le volume  $V_S$  enfermé par cette surface (voir Sec. 2.2.4 et annexe B). À l'aide de ce théorème, la condition de validité de la loi d'Ampère peut s'écrire

$$\int_{V_S} \operatorname{div} \vec{J} dV = 0 \quad \forall V_S. \quad (4.6)$$

Comme cette relation est valable pour tout volume elle l'est également pour un volume arbitrairement petit. Or si  $V_S$  devient arbitrairement petit, la divergence de  $\vec{J}$  peut être considérée comme constante sur ce volume et peut donc sortir de l'intégrale. Ce qui nous amène à la conclusion qu'il faut que la divergence de la densité de courant soit nulle en tout point de l'espace<sup>a</sup> pour que la loi d'Ampère soit valable,

$$\operatorname{div} \vec{J} = 0. \quad (4.7)$$

En remontant le fil conducteur du raisonnement que l'on vient de faire, on constate que si la divergence de la densité de courant  $\vec{J}$  était non nulle, les flux sur deux surfaces distinctes sous-tendues par le même contour  $C$  seraient différents et la loi d'Ampère ne serait effectivement pas cohérente puisqu'elle fournirait des valeurs différentes à la circulation du champ magnétique sur un contour donné.

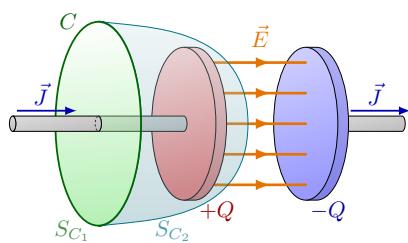
**Conclusion** La loi d'Ampère ne peut être valable que si  $\operatorname{div} \vec{J} = 0$ .

### Incohérence de la loi d'Ampère pour un condensateur

Le problème avec cette condition sur la densité de courant est qu'elle est très restrictive. Il n'y a en effet rien en pratique qui impose que la divergence de la densité de courant soit nulle. La densité de courant représente un flux de particules chargées qui peuvent, a priori, avoir n'importe quelle vitesse. En particulier, les particules peuvent s'arrêter à un endroit pour s'y accumuler, ce qui donnerait en cet endroit une divergence de  $\vec{J}$  clairement non nulle

Cela pourrait se voir directement au départ de la forme locale  $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$  et de la relation  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B} = 0$  qui impose  $\operatorname{div} \vec{J} = 0$ . L'approche en termes de surface nous sera toutefois utile dans le paragraphe suivant.

**FIGURE 4.4 :** Choix des surfaces d'application de la loi d'Ampère conduisant à conclure à son incohérence. Lors de la charge d'un condensateur, le courant  $I$  amène des charges qui s'accumulent dans le volume délimité par les surfaces  $S_1 + S_2$ .



(négative). Nous sommes là au cœur d'un problème fondamental auquel était confronté le monde scientifique vers le milieu du XIXe siècle.

**Illustration** Une situation d'accumulation de charges électriques est représentée schématiquement à la figure 4.4, avec l'exemple de la charge d'un condensateur. Le contour  $C$  entoure un fil de connexion du condensateur qui véhicule un certain courant  $I$ . Selon la loi d'Ampère, l'intégrale de circulation de  $\vec{B}$  sur  $C$  est égale à  $\mu_0 I$  si la surface sous-tendant le contour  $C$  coupe le fil de connexion (surface  $S_{C1}$  sur le schéma). Mais si on choisit la surface passant entre les plaques du condensateur où la densité de courant  $\vec{J}$  est nulle ( $S_{C2}$  sur le schéma), on trouve forcément zéro pour le flux de  $\vec{J}$  sur la deuxième surface. Ceci constitue clairement un problème d'application de la loi d'Ampère puisqu'on obtient deux valeurs distinctes de la circulation du champ :  $\mu_0 I$  et zéro. C'est le problème auquel s'est attelé le jeune James Clerk Maxwell à peine quelques mois après être sorti de l'Université de Cambridge en 1854.

### 4.1.2 Loi de conservation de la charge

Dans sa démarche Maxwell a procédé en considérant la loi de conservation de la *charge* électrique que nous allons dans un premier temps formuler ici sous sa forme intégrale.

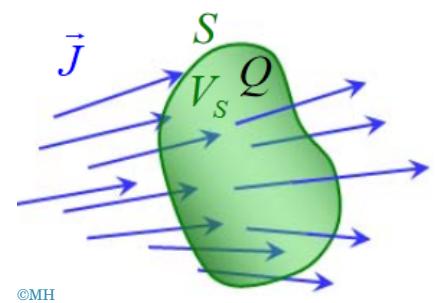
#### Forme intégrale

Pour bien comprendre cette loi, il est essentiel d'avoir à l'esprit la signification physique de la densité de courant  $\vec{J}$ . La densité de courant est un vecteur qui représente un flux de charge électrique. Plus exactement, l'intégrale de surface de la densité de courant sur une surface  $S$  quelconque représente la quantité de charge électrique qui passe au travers de cette surface par unité de temps. Dès lors, s'il s'agit d'une surface fermée, comme celle représentée sur la figure 4.5, le flux de  $\vec{J}$  au travers de cette surface représente la quantité de charge électrique qui passe de l'intérieur à l'extérieur de la surface  $S$ . Le sens de l'intérieur vers l'extérieur est imposé par la convention des vecteurs de surface sortants pour une surface fermée. En d'autres termes, si  $Q$  est la charge totale enfermée dans la surface  $S$ , le flux de  $\vec{J}$  au travers de  $S$  représente la variation temporelle de la quantité de charge  $Q$  contenue à l'intérieur de la surface  $S$ . Bien entendu, si le flux est positif, cette variation correspond à une décroissance de la charge  $Q$ . Mathématiquement cela se traduit par l'égalité entre l'intégrale de flux de  $\vec{J}$  et l'opposé de la dérivée de  $Q$  par rapport au temps,

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\frac{dQ}{dt}. \quad (4.8)$$

Notez que ce résultat est la traduction mathématique de la loi de conservation de la charge. Il est obtenu car nous avons considéré

**FIGURE 4.5 :** Version intégrale de la loi de conservation électrique. Le volume  $V$  contient une charge totale  $Q$ . Il est alimenté par une densité de courant  $\vec{J}$  entrant par endroit et sortant à d'autres, selon que la densité est opposée à la normale extérieure (flux de charge entrant) ou de même sens que celle-ci (flux de charge sortant). On en déduit que ces grandeurs doivent vérifier (4.8).



que les charges du volume  $V_S$  enfermé par la surface  $S$  ne peuvent quitter ou entrer dans ce volume qu'en passant au travers de la surface  $S$  : elles ne peuvent ni disparaître, ni apparaître d'une autre manière, ce qui signifie qu'il n'y a pas de processus physique connu de création ou de destruction de la charge.

### Forme locale de la conservation de la charge

Pour refaire le raisonnement de Maxwell, nous allons exploiter la loi de conservation de la charge sous sa forme locale. Pour cela nous commençons par exprimer le fait que la quantité de charge électrique qui se trouve à l'intérieur de la surface  $S$  est égale à l'intégrale de volume de la densité de charges  $\rho$  sur le volume  $V_S$  enfermé par la surface  $S$ . En prenant la dérivée par rapport au temps de cette relation et en substituant le résultat dans la forme intégrale de la loi de conservation de la charge obtenue ci-dessus, on obtient

$$Q = \int_{V_S} \rho dV, \quad (4.9)$$

$$-\frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_{V_S} \rho dV, \quad (4.10)$$

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = - \int_{V_S} \frac{\partial \rho(\vec{x}, t)}{\partial t} dV. \quad (4.11)$$

Notez que l'on a fait passer la dérivée temporelle à l'intérieur de l'intégrale de volume. Comme la densité de charge dépend en toute généralité des coordonnées de position et du temps, il convient de transformer la dérivée par une dérivée partielle. Cette opération ne pose pas de problème si le volume d'intégration est fixe [voir section 3.7.1 et (3.101) lorsque  $v = 0$ ], hypothèse qui est faite ici.

En appliquant le *théorème flux-divergence d'Ostrogradski-Gauss* à l'intégrale du flux de la densité de courant, on obtient

$$\int_{V_S} \operatorname{div} \vec{J} dV = - \int_{V_S} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV. \quad (4.12)$$

Finalement, comme ce raisonnement peut être fait pour n'importe quelle surface fermée  $S$ , ce résultat est applicable à n'importe quel volume  $V_S$ . Il est donc valable, en particulier, pour un volume arbitrairement petit situé autour d'un point choisi arbitrairement dans l'espace. Dans cette limite les intégrandes des intégrales peuvent être considérées comme constantes et peuvent sortir des intégrales, ce qui donne

$$\operatorname{div} \vec{J} \int_{V_S} dV = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \int_{V_S} dV, \quad (4.13)$$

et nous permet de dire que la divergence de la densité de courant est, en tout point de l'espace, égale à l'opposé de la dérivée temporelle de la densité de charge,

$$\operatorname{div} \vec{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (4.14)$$

**Équation de continuité : conservation locale de la charge**

On obtient de cette manière une équation qui lie les densités de charge et de courant. Cette expression mathématique porte le nom d'équation de « *continuité* ». Le développement qui y a mené rend sa signification physique évidente, il s'agit de la loi locale de conservation de la charge électrique qui se note

$$\operatorname{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (4.15)$$

**4.1.3 Courant de déplacement**

Revenons maintenant à la problématique de la liberté du choix de la surface sous-tendue dans loi d'Ampère. La loi d'Ampère statique est rappelée à l'équation (4.16) et est illustrée pour une densité de courant dont la divergence est non nulle, ce qui est représenté schématiquement par une densité de courant de module plus faible sur la surface  $S_{C2}$  que sur la surface  $S_{C1}$ . D'après la loi de conservation de la charge, si la densité de courant diminue entre les deux surfaces, comme c'est suggéré sur le schéma (divergence de  $\vec{J}$  négative), c'est qu'il y a accumulation de charge électrique dans cette zone de l'espace, c'est-à-dire que la dérivée de la densité de charge est positive,  $\partial \rho / \partial t > 0$ , et

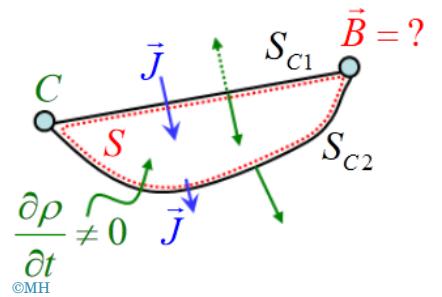
$$\oint_C \bar{B} \cdot d\ell = \mu_0 \int_{S_C} \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad \operatorname{div} \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0. \quad (4.16)$$

La conséquence de la diminution de la densité de courant entre les deux surfaces est que la loi d'Ampère donne deux valeurs différentes à la circulation de  $\bar{B}$  sur le contour  $C$  en fonction du choix de surface, ce qui n'est pas acceptable,

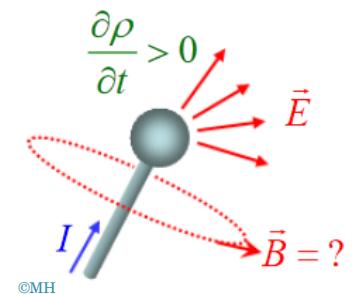
$$\int_{S_{C1}} \vec{J} \cdot d\vec{S} \neq \int_{S_{C2}} \vec{J} \cdot d\vec{S}. \quad (4.17)$$

Nous avions illustré une telle situation avec le condensateur lors de l'introduction du problème (section 4.1.1). À la figure 4.7, cette même problématique est illustrée avec une antenne : la surface sous-tendue peut être choisie comme une surface plane passant au travers du conducteur ou bien comme une surface bombée évitant le conducteur. Clairement ces deux situations donnent différentes valeurs pour la circulation du champ magnétique puisque le courant qui circule dans une antenne doit forcément s'annuler au bout de l'antenne. Mais il est intéressant de noter à ce stade que l'annulation du courant au bout de l'antenne provoque dans le conducteur une accumulation de charge électrique qui est responsable de la génération d'un champ électrostatique autour de l'extrémité de l'antenne, comme suggéré sur le schéma de la figure 4.7. Nous allons voir dans la suite que c'est ce champ électrique qui permet de redonner de la cohérence à la loi d'Ampère dans le cas de courants à divergence non nulle.

**FIGURE 4.6 :** Violation de l'équation de continuité si la charge à l'intérieur du volume d'intégration varie.



**FIGURE 4.7 :** Configuration d'antenne dans laquelle l'incohérence de la loi d'Ampère peut être mise en évidence.



### Loi de Gauss

Comme on l'apprend en *électrostatique*, si la loi de Gauss est d'une grande importance pratique, c'est surtout en tant qu'outil de calcul pour le développement de la théorie de l'électromagnétisme. Le travail de Maxwell dont il est question ici constitue une brillante illustration de ce point de vue. Pour répondre à la problématique relative à la loi d'Ampère, Maxwell a effectivement appliqué la loi de Gauss au champ électrique dû à la charge électrique accumulée par la densité de courant à divergence non nulle.

Rappelons-nous que la loi de Gauss dit que la divergence du champ électrique est égale à la densité de charge divisée par la permittivité du vide. Maxwell a combiné cette loi avec la loi de conservation de la charge,

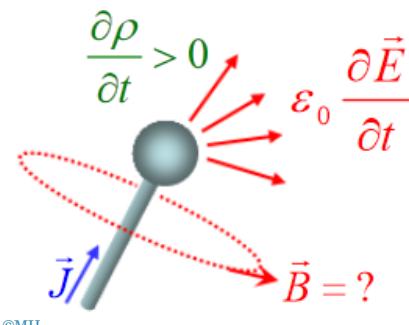
$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho, \quad \operatorname{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (4.18)$$

En substituant, dans la loi de conservation de la charge, la valeur de  $\rho$  donnée par la loi de Gauss, on voit après un développement repris ci-après que la divergence de la somme de la densité de courant  $\vec{J}$  et de la dérivée du champ électrique  $\partial \vec{E} / \partial t$  multipliée par  $\epsilon_0$  est nulle. On a en effet, successivement

$$\rho = \epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{E} \Rightarrow \operatorname{div} \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad (4.19)$$

$$\hookrightarrow \operatorname{div} \vec{J} + \operatorname{div} \left( \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \left( \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0. \quad (4.20)$$

**FIGURE 4.8 :** Champ  $\vec{E}$  permettant de vérifier l'équation de continuité en cas d'accumulation (ou de diminution) de la charge.



©MH

Ce résultat montre que la densité de courant  $\vec{J}$  complétée de la dérivée du champ électrique multiplié par  $\epsilon_0$ , constitue un champ vectoriel à divergence toujours nulle. En d'autres termes, si la divergence de  $\vec{J}$  est non nulle dans une zone de l'espace, un champ électrique  $\vec{E}$  est automatiquement généré et sa croissance est telle que la divergence de  $\vec{J} + \epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$  est nulle, ce qui est illustré à la figure 4.8.

Dans les cas extrêmes où la densité de courant s'annule complètement, comme pour le condensateur ou l'antenne, tout se passe donc comme si le flux de charges électriques était remplacé par le champ vectoriel  $\epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$  dans les zones où la densité de courant est nulle.

#### ■ Petit poisson rouge... peut-on passer la barre rouge ?

Oui, à condition de répondre à ma question !

Réfléchissez à la situation suivante : un courant alimente de manière continue, durant un temps qui peut être réduit, par exemple quelques nanosecondes ou microsecondes, une plaque de condensateur. Le fil conducteur était neutre, peut-on dire la même chose de la plaque du condensateur ? Sur la base de vos connaissances de

l'électrostatique, pouvez-vous en déduire où un champ électrique va apparaître ?

L'expression  $\operatorname{div}(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) = 0$  est-elle équivalente à dire : « soit le courant circule en conservant la neutralité des conducteurs et il n'y pas de raison qu'un champ électrique apparaisse, soit le courant est bloqué ou réduit, des charges s'accumulent et un champ électrostatique apparaît » ?



### Loi d'ampère-Maxwell

L'idée originale de Maxwell a été de considérer que ce nouveau champ vectoriel  $\epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$  doit être pris en compte dans la loi d'Ampère pour résoudre le problème de l'indétermination du champ magnétique dans le cas des courants à divergence non nulle. En adoptant cette idée, on aboutit à une généralisation de la loi d'Ampère que l'on appelle la loi d'Ampère-Maxwell ; elle est donnée ci-dessous. Il s'agit bien d'une généralisation dans la mesure où la loi d'Ampère est valable seulement pour les courants à divergence nulle alors que la loi d'Ampère-Maxwell est valable dans toutes les circonstances,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_{S_C} (\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \cdot d\vec{S}. \quad (4.21)$$

Il est important de comprendre que cette loi est effectivement valable dans toutes les circonstances dans la mesure où l'intégrale de surface se fait sur un champ à divergence nulle,  $\operatorname{div}(\vec{J} + \epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t) = 0$ , ce qui implique que la valeur de cette intégrale est indépendant du choix de la surface sous-tendue (voir sous-section 4.1.1). Maxwell a donc rendu la loi d'Ampère cohérente et applicable sans condition.

### Courant de déplacement

Puisque dans ce raisonnement le nouveau champ vectoriel  $\epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$  est vu comme prolongeant les courants de conduction, Maxwell l'a appelé « *la densité de courant de déplacement* ». On le note souvent  $\vec{J}_D$  car, historiquement, on a cru que  $J_D$  avait les mêmes propriétés qu'un courant et pouvait induire à son tour un champ magnétique. Cette dénomination est toutefois obscure [8, Sec. 32]. En particulier,  $J_D$  ne peut pas être utilisé dans la *loi de Biot-Savart*.

### Origine des champs

En réalité, seules les charges créent des champs magnétiques. Le champ magnétique qui entoure un condensateur peut se calculer au départ des courants circulant dans le fil amenant le courant aux plaques et le courant correspondant à la répartition des charges sur les plaques du condensateur [9].

Il n'en reste pas moins que les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  rendent compte à eux seuls des effets provoqués par l'ensemble des charges. De ce fait, il est possible de calculer le champ magnétique qui entoure un condensateur au départ du courant de déplacement. Comme pour l'induction de Faraday, il n'y a pas de causalité entre ces deux champs qui sont en réalité un seul champ résultant du mouvement des charges.

### Causalité dans les équations de Maxwell

S'il y avait causalité dans la loi d'Ampère, ce serait  $\vec{E}$  qui devrait varier à cause de  $\vec{J}$  et  $\vec{B}$  selon

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} (\overline{\text{rot}} \vec{B} - \vec{J}). \quad (4.22)$$

Prédire l'évolution du champ électromagnétique au départ des équations de Maxwell est néanmoins plus complexe que cela puisque la loi de Faraday indique que

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\overline{\text{rot}} \vec{E}, \quad (4.23)$$

c'est-à-dire que cette fois, c'est la présence d'une composante rotationnelle du champ qui induit une variation de champ magnétique.

Nous verrons comment résoudre ce problème mathématique dans la partie sur les ondes électromagnétiques. Dans le problème de l'antenne ci-dessus, la densité de courant de déplacement « prolonge » le courant de conduction de façon à ce que  $\vec{J} + \epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$  ait une divergence nulle,

$$\vec{J}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (4.24)$$

**FIGURE 4.9 :** Bien que le terme  $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  ait les unités d'un courant, il ne s'agit pas d'un courant : il ne véhicule pas de charge électrique et ne produit pas de champ magnétique. Le dessin ci-dessous pourrait s'appeler « La trahison des dénominations ».



L04P2



L04P3



### 4.1.4 Loi d'Ampère-Maxwell électromagnétique

La loi d'Ampère-Maxwell est tout à fait générale car le choix de la surface sous-tendant le contour  $C$  est tout à fait libre. Maxwell a proposé cette loi sur base du raisonnement qui est décrit ci-dessus et non pas sur base de l'expérience. C'est pourquoi on parle de la « *conjecture de Maxwell* ». Une conjecture est une proposition basée sur une construction purement intellectuelle qu'il faut donc par la suite vérifier par l'expérience, ce qui dans le cas de Maxwell a été fait avec succès. Nous aurons l'occasion d'approfondir cette question dans la partie consacrée aux oscillations et aux ondes.

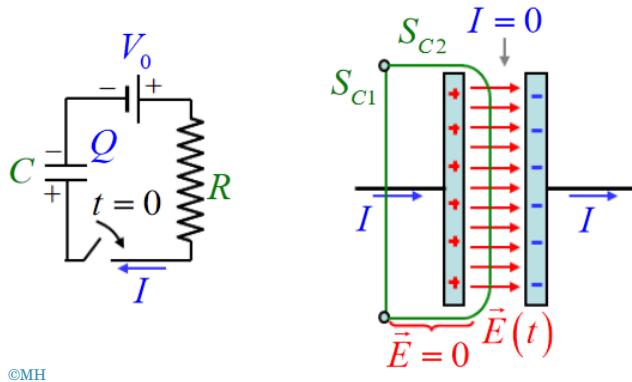
L'application du théorème de Stokes (voir section 2.1.7 et annexe A) à la loi d'Ampère-Maxwell, donne la forme locale de cette loi. Le résultat est

$$\begin{cases} \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int_{S_C} (\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \cdot d\vec{S}, \\ \overline{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \end{cases} \quad (4.25)$$

[PHYS-H-1002, partie I]

### ■ Exemple

#### 4.1.5 Illustration : charge du condensateur



**FIGURE 4.10 :** Dispositif permettant de vérifier la loi d'Ampère-Maxwell.

La vérification de la validité de la loi d'Ampère-Maxwell est remarquablement simple et facile à comprendre dans le cas du condensateur plan. Le condensateur est un dispositif dans lequel le courant de conduction est interrompu et doit donc faire place, selon l'idée de Maxwell, au courant de déplacement de sorte que la loi d'Ampère-Maxwell fournisse une seule valeur de circulation du champ magnétique quel que soit le choix de la surface sous-tendue  $S_C$  de l'intégrale de flux. Nous allons vérifier cela en faisant le calcul de l'intégrale de flux de la loi d'Ampère-Maxwell sur deux surfaces distinctes, l'une appelée  $S_{C1}$  coupant le fil de connexion du condensateur et l'autre appelée  $S_{C2}$ , passant par l'espace situé entre les plaques du condensateur, comme indiqué sur le schéma de la figure 4.11 et celui en coupe de la figure 4.10.

La loi d'Ampère-Maxwell appliquée avec la surface  $S_{C1}$  est similaire à la loi d'Ampère puisque seul le courant de conduction contribue et donne le terme  $\mu_0 I$ ,

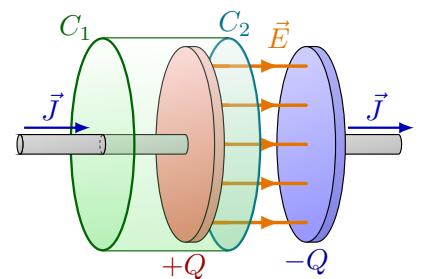
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int_{S_{C1}} \vec{J} \cdot d\vec{S} = \mu_0 I. \quad (4.26)$$

Par contre, la loi d'Ampère-Maxwell appliquée avec la surface  $S_{C2}$  implique seulement le courant de déplacement. Notre but est ici de calculer l'intégrale de flux correspondante et de montrer que, en vertu de la divergence nulle de la somme des courants de conduction et de déplacement, elle donne la même valeur  $\mu_0 I$ . Nous voulons donc calculer

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \epsilon_0 \int_{S_{C2}} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = ? \quad (4.27)$$

Le champ électrique du condensateur est donné par la *densité surfacique de charge*  $\sigma$  divisée par la *permittivité du vide*  $\epsilon_0$  (on suppose un condensateur vide), soit  $E = \sigma/\epsilon_0$ . La densité surfacique de charge est égale à la charge totale  $Q(t)$  de la plaque du condensateur divisée par la surface  $S$  de cette plaque, soit  $\sigma = Q/S$  de sorte

**FIGURE 4.11 :** Application de la loi d'Ampère-Maxwell dynamique sur deux contours différents.



que  $E = Q/(S\epsilon_0)$ . La dérivée temporelle du champ électrique est donc proportionnelle à  $dQ(t)/dt$  qui n'est rien d'autre que le courant  $I$  dans le fil de connexion, ce qui donne  $dE/dt = I/(S\epsilon_0)$  (notez que la dérivée partielle apparaissant dans la loi d'Ampère-Maxwell est remplacée ici par une dérivée totale puisque le champ dans le condensateur est supposé homogène et ne dépend donc pas des coordonnées d'espace). Dans les expressions qui suivent, le vecteur  $\vec{1}_S$  est le vecteur unitaire perpendiculaire aux plaques du condensateur,

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{1}_S = \frac{Q(t)}{S\epsilon_0} \vec{1}_S \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{E}}{dt} = \frac{1}{S\epsilon_0} \frac{dQ(t)}{dt} \vec{1}_S = \frac{1}{S\epsilon_0} I \vec{1}_S \quad (4.28)$$

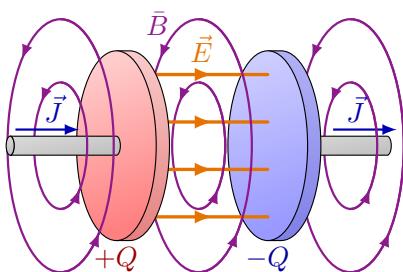
On choisit la surface  $S_{C2}$  de sorte qu'elle soit perpendiculaire au champ  $\vec{E}$  en tout point où celui-ci est non nul (sur le graphique ci-dessus, les courbures de  $S_{C2}$  se situent en dehors de la zone délimitée par les plaques du condensateur). L'intégrale de surface de la loi d'Ampère-Maxwell est donc très facile à calculer puisqu'elle se limite à l'intégrale de  $d\vec{E}/dt \cdot d\vec{S}$  sur une portion de surface égale à la surface  $S$  du condensateur. Or si cette portion de surface est perpendiculaire au champ  $\vec{E}$  entre les plaques, ses vecteurs de surface sont parallèles à  $\vec{1}_S$ , soit  $d\vec{S} = dS \vec{1}_S$ , de sorte que  $d\vec{E}/dt \cdot d\vec{S} = 1/(S\epsilon_0) IdS$  et

$$\frac{d\vec{E}}{dt} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{S\epsilon_0} IdS. \quad (4.29)$$

De plus, puisque la surface sur laquelle le champ est non nul est la surface  $S$  des plaques du condensateur, l'intégrale de flux sur  $S_{C2}$  peut être remplacée par l'intégrale sur  $S$  avec  $I/(S\epsilon_0)$  comme intégrande. Comme cette intégrande est une constante sur toute la surface  $S$ , on la sort de l'intégrale et la valeur de la circulation du champ  $\vec{B}$  obtenue par la loi d'Ampère-Maxwell est  $\mu_0 I$  qui, comme attendu, est la même valeur que celle obtenue avec le choix de la surface  $S_{C1}$ . Tout ceci est résumé à l'aide du développement mathématique

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \mu_0 \epsilon_0 \int_{S_{C2}} \frac{I}{S\epsilon_0} dS = \mu_0 \frac{I}{S} \overbrace{\int_S dS}^S = \mu_0 I, \\ &= \mu_0 \int_{S_{C1}} \vec{J} \cdot d\vec{S}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

**FIGURE 4.12 :** Interprétation du courant de déplacement dans un condensateur.



#### 4.1.6 Interprétation de l'exemple du condensateur

Le schéma de la figure 4.12 illustre la signification physique du résultat obtenu. Dans les zones qui entourent les fils de connexion

du condensateur, le champ  $\bar{B}$  est donné par la loi d'Ampère, il décrit des lignes de champ circulaires concentriques autour des fils. Dans la zone entre les plaques, le champ  $\bar{B}$  est corrélé au champ  $\bar{E}$  variable ce qui permet d'en calculer correctement la valeur.

D'après la loi d'Ampère-Maxwell, le champ  $\bar{B}$  ne souffre pas de discontinuité en passant de la zone des fils à la zone entre les plaques. Ce résultat était prévisible au départ de la *loi de Biot-Savart* appliquée au courant incident sur le condensateur. Chaque élément de courant génère un champ  $\bar{B}$  continu qui s'étend en diminuant dans tout l'espace, et en particulier, au-delà de la première plaque.

La loi d'Ampère permet cette continuité par la combinaison de deux termes  $\vec{J}$  et  $\epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$  qui se reliaient pour passer des zones où le courant circule, sans accumulation de charges, aux zones où le courant ne circule plus et où les charges s'accumulant génèrent un champ électrique.

## Interprétation du terme de Maxwell

Ce champ électrique repousse les charges de même signe sur la plaque opposée, induisant leur mouvement et la création d'un courant dans la continuité du courant incident, sans qu'il n'y ait de transfert de charge entre les deux plaques.

## Symétrie des équations de Faraday et Ampère

En l'absence de courant de conduction, la loi d'Ampère-Maxwell a la même structure que la loi de Faraday, les rôles des champs électrique et magnétique sont interchangés en passant d'une loi à l'autre. Ceci est illustré en (4.31)

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \overline{\text{rot}} \vec{B} \quad \quad \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\overline{\text{rot}} \vec{E}. \quad (4.31)$$

Il faut néanmoins se méfier de l'asymétrie présente en pratique : un champ magnétique faible créé par un aimant qui se déplace est associé à un champ électrique dont l'*électromotance* associée peut alimenter un circuit (cas de la dynamo). La présence du facteur,  $\epsilon_0$ , rend le terme de Maxwell  $\epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$  généralement petit.



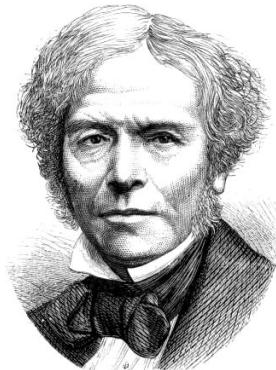
L04P4

## 4.2 Équations de Maxwell microscopiques (dans le vide)

Dans cette section, nous reprenons les quatre lois fondamentales de l'électromagnétisme qui sont connues sous le nom d'*équations de Maxwell* microscopiques<sup>a</sup>. Il s'agit de la loi de l'induction électromagnétique de Faraday, la loi d'Ampère-Maxwell et les lois de Gauss pour les champs électrique et magnétique. Ces quatre lois permettent de décrire tous les phénomènes électromagnétiques, de

a) On distingue souvent les équations de Maxwell microscopiques des équations de Maxwell macroscopiques, ces dernières prenant en compte la réaction de la matière via les champs de déplacement ou de polarisation et le champ magnétique ou le champ de magnétisation. Ceci sera abordé brièvement à la section 11.4.1.

la force électrique de Coulomb à la notion de champ de déplacement en passant par le phénomène d'induction (notez que si on considère ces phénomènes dans la matière il faut y introduire, à la place de la permittivité et la perméabilité du vide, la permittivité et la perméabilité de la matière en question). Ces quatre équations sont appelées équations de Maxwell parce qu'en introduisant la notion de champ de déplacement, Maxwell a mis la dernière pierre à la construction de la théorie de l'électromagnétisme. Grâce à lui, les lois de l'électromagnétisme connues jusqu'alors sont apparues comme intimement liées les unes aux autres et comme formant un cadre mathématique cohérent dans lequel une symétrie élégante apparaît entre les champs électrique et magnétique. C'est grâce à cette synthèse des lois de l'électromagnétisme que Maxwell a pu prévoir l'existence des ondes électromagnétiques que nous étudierons dans la partie de ce cours consacrée aux ondes.



**FIGURE 4.13 :** Michael Faraday.



**FIGURE 4.14 :** Marie-André Ampère.



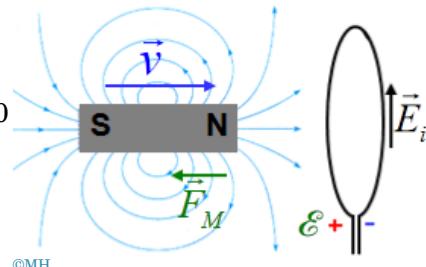
**FIGURE 4.15 :** James-Clerk Maxwell.

#### 4.2.1 Loi de Faraday

La loi de Faraday est liée au phénomène (non causal) d'induction électromagnétique. Elle décrit la conservation locale de l'énergie qui impose que la création d'un champ électrique non conservatif s'accompagne d'une variation de l'énergie magnétique. L'énergie peut passer d'un champ à l'autre dans les deux directions.

$$\int_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} + \frac{d}{dt} \int_{S_C} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\text{rot } \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$



#### 4.2.2 Loi d'Ampère-Maxwell

La loi d'Ampère-Maxwell montre qu'un courant peut être à l'origine d'un champ magnétique ou, si le courant induit une accumulation de charge — positive ou négative —, à l'origine d'une variation du champ électrique. En l'absence de courant de conduction, la loi d'Ampère-Maxwell a la même structure que la loi de Faraday et témoigne de l'échange d'énergie possible entre le champ magnétique et la partie non conservative du champ électrique. En introduisant le courant de déplacement, Maxwell a symétrisé les rôles des champs électrique et magnétique dans les zones de l'espace sans charges ni courants. Combinée à la loi de Gauss, la loi d'Ampère-Maxwell, démontre la conservation de la charge électrique, liée à la partie longitudinale de la densité de courant.

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} - \mu_0 \epsilon_0 \int_{S_C} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \int_{S_C} \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

$$\text{rot } \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J}$$

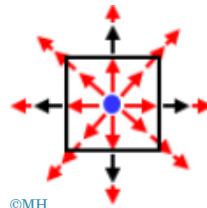
©MH

### 4.2.3 Loi de Gauss pour le champ électrique

La loi de Gauss du champ électrique exprime que la charge électrique est une source de champ électrique conservatif. Elle est équivalente à la loi de Coulomb.

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{V_S} \rho dV$$

$$\text{div } \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

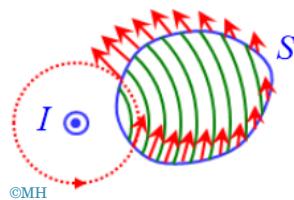


### 4.2.4 Loi de Gauss pour le champ magnétique

La loi de Gauss du champ magnétique exprime qu'il n'existe pas de charges (ou monopôles) magnétiques. Cela a pour conséquence que le flux magnétique au travers d'une surface fermée quelconque est nul.

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$



**FIGURE 4.16 :** Carl Friedrich Gauss.



L04P5



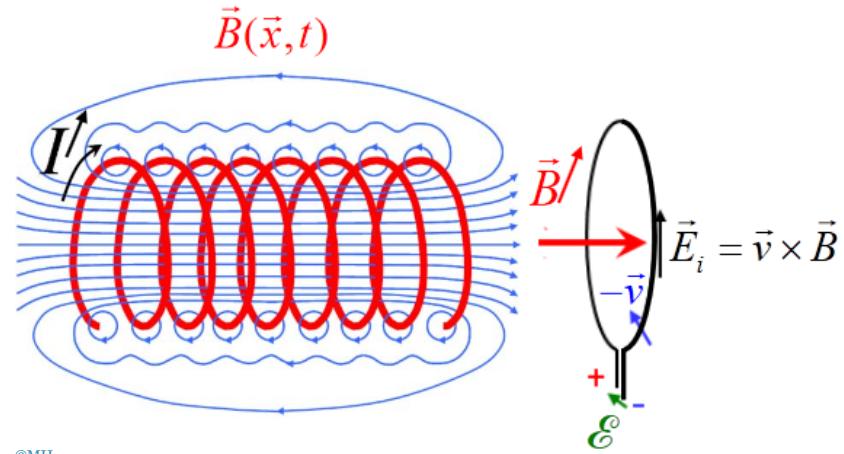
## 4.3 Loi de Lenz

**L**A LOI DE FARADAY indique que l'*électromotance électromagnétique* (é.e.m.) induite par induction électromagnétique dans une spire a une polarité de signe opposé à celui de la variation de flux. Concrètement ceci n'a de signification que dans le cadre de la convention d'orientation des contours et des surfaces, c'est-à-dire que dans le cas d'une augmentation de champ magnétique, les doigts de la main droite indiquent le sens d'une chute de tension électrique si le pouce est dans le sens du champ magnétique, comme illustré sur le schéma de la figure 4.19, qui permet d'interpréter correctement l'équation

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_{S_C} \vec{B} \cdot d\vec{S}. \quad (4.32)$$

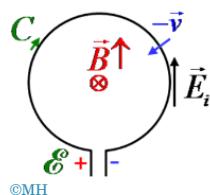
**FIGURE 4.17 :** Emil Heinrich Lenz (1804–1865).

**FIGURE 4.18 :** La variation du champ  $\vec{B}$  s'accompagne d'une électromotance liée à  $\vec{E}_i$ . Sur le schéma, le côté de la spire associé au symbole – se trouve à l'avant et le côté + à l'arrière. Si  $\vec{B}$  augmente, la variation de  $\vec{B}$  est dans le même sens que  $\vec{B}$ . La règle du *contour orienté* associe la direction de  $\vec{B}$  à un parcours de + vers -. La *loi de Faraday* pour les circuits filiformes lents nous indique que l'*electromotance* est orientée dans le sens inverse, soit de – vers +.



Sur le plan de l'interprétation physique, cette polarité a une signification importante car elle traduit, pour le phénomène d'induction électromagnétique, le principe de conservation de l'énergie. Cet aspect essentiel de la phénoménologie de l'induction électromagnétique est formulé au travers de la *loi de Lenz* que nous allons voir ici sur base de l'exemple vu plus haut de la spire plongée dans le champ d'un solénoïde. La loi de Lenz n'apporte rien de neuf par rapport à ce qui a déjà été vu, sinon un moyen simple à appliquer lorsqu'on veut raisonner de manière intuitive sur un problème.

**FIGURE 4.19 :** Rappel du concept d'é.e.m..



©MH

### 4.3.1 Opposition du champ induit

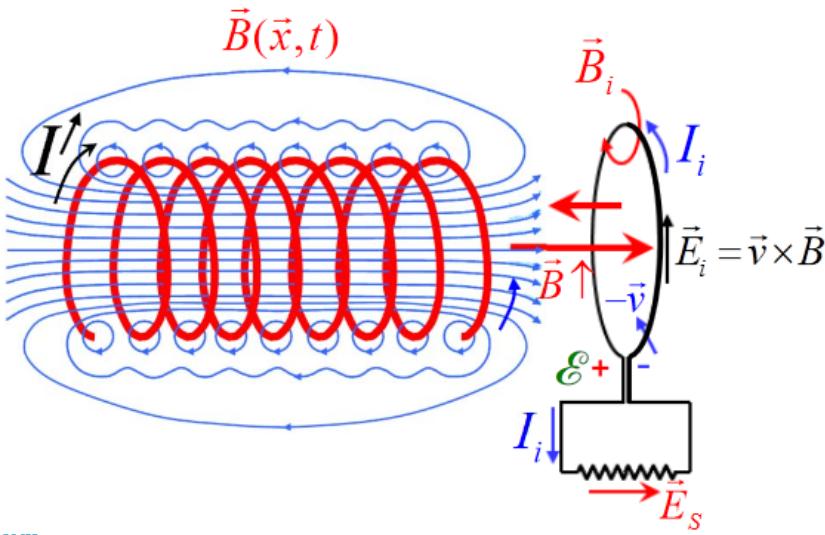
Nous avons déjà analysé ce problème et nous avons vu que le signe négatif entre la variation de flux magnétique et l'*e.e.m.* induite correspond au fait que, dans le cas d'une augmentation (ou une diminution) de flux magnétique, le champ induit s'oriente dans le sens opposé au (ou dans le même sens que le) sens de parcours de la spire donné par la règle de la main droite avec le pouce dans le sens du champ magnétique.

On peut synthétiser plus efficacement cette règle donnant la polarité du phénomène d'induction en disant simplement que le sens de  $\vec{E}_i$  (qui détermine la polarité de l'*e.e.m.* de la spire) est opposé au sens conventionnel de la main droite avec le pouce orienté, non pas dans le sens du champ magnétique, mais dans le sens de la variation du champ magnétique  $\partial\vec{B}/\partial t$ . Dans le cas d'une augmentation du module  $B$  du champ, la variation du champ  $\partial\vec{B}/\partial t$  est un vecteur qui est dans le même sens que  $\vec{B}$ . Et dans le cas d'une diminution du module  $B$  du champ, la variation du champ  $\partial\vec{B}/\partial t$  est un vecteur qui est dans le sens opposé à celui de  $\vec{B}$ . Donc, si on met le pouce dans le sens de  $\partial\vec{B}/\partial t$ , le sens indiqué par les doigts est bien toujours opposé à celui du champ induit<sup>a</sup>.

On pourrait également retenir que la circulation du champ induit répond à la règle de la main gauche : le pouce orienté dans la direction de la variation du flux, les doigts de la main gauche indiquent la direction de circulation positive.

Ceci signifie que, lorsque la spire sera connectée à un circuit (sur le schéma de la figure 4.20, il s'agit d'une simple boucle contenant une résistance), le courant  $I_i$  induit par l'induction électromagnétique dans la spire aura également un sens opposé à celui donné par l'orientation conventionnelle associée à la variation de champ

vectoriel  $\partial\vec{B}/\partial t$ . Ceci est évident puisque les charges libres (positives) sont emportées par le champ  $\vec{E}_i$ . Dès lors, le champ magnétique  $\vec{B}_i$  généré par la spire en raison de la présence de ce courant induit sera opposé à la variation de champ  $\partial\vec{B}/\partial t$ , comme indiqué sur le schéma de la figure 4.20 dans le cas d'une augmentation du module du champ  $\vec{B}$ . Le champ magnétique total dans la spire est



**FIGURE 4.20 :** Le courant  $I_i$  lié à la variation  $d\vec{B}$  génère un champ  $\vec{B}_i$  dans le sens opposé de  $d\vec{B}$ .

©MH

plus faible que dans le cas où il n'y a pas de courant (spire ouverte). En d'autres termes, on peut dire que le champ magnétique « *induit* »  $\vec{B}_i$  s'oppose à l'augmentation du champ  $\vec{B}$ .

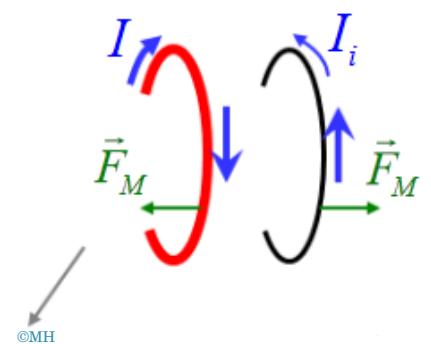
De même, puisque le courant induit dans la spire a toujours le sens opposé au sens conventionnel donné par la variation de champ le champ magnétique  $\partial\vec{B}/\partial t$ , alors, lorsque le module  $B$  du champ diminue le champ magnétique « *induit* »  $\vec{B}_i$  s'oppose à la diminution du champ  $\vec{B}$ . Dans tous les cas on peut dire que le champ magnétique induit par la spire est opposé à la variation du champ extérieur  $\vec{B}$ . C'est la *loi de Lenz*, qui simplifie les raisonnements sans ajouter de nouvel élément à la théorie électromagnétique.

### 4.3.2 Analyse en termes de forces

Il est intéressant d'analyser cela du point de vue des forces magnétiques. Dans le cas d'une augmentation du champ extérieur  $\vec{B}$ , le courant induit  $I_i$  est opposé au courant  $I$  du solénoïde. Or Ampère a montré que des courants de sens opposés se repoussent (voir schéma de la figure 4.21). On peut donc conclure qu'il apparaît dans notre système une force répulsive entre la spire et le solénoïde. En d'autres termes, la force magnétique induite tend à éloigner la spire du solénoïde pour s'opposer à l'augmentation du champ dont ce dernier est responsable.

Si le champ du solénoïde diminue, le courant  $I_i$  est dans le même sens que le courant  $I$  du solénoïde et la force magnétique devient attractive comme si elle « voulait » compenser la diminution du champ  $\vec{B}$  au niveau de la spire.

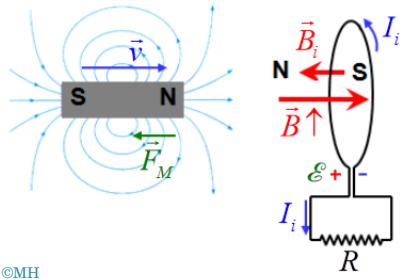
**FIGURE 4.21 :**  $\vec{F}_M$  s'oppose à l'augmentation du champ  $\vec{B}$



©MH

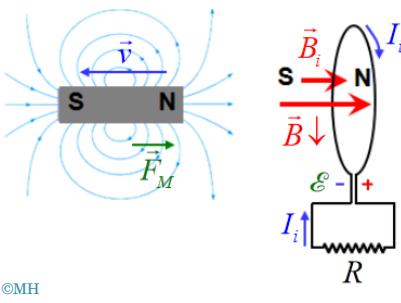
### 4.3.3 Conservation de l'énergie

**FIGURE 4.22 :** La spire parcourue par le courant  $I_i$  constitue un électroaimant dont les pôles sont orientés dans le même sens que ceux de l'aimant qui s'éloigne. Il en résulte une force de répulsion  $\vec{F}_M$ , opposée à la vitesse  $\vec{v}$ .



©MH

**FIGURE 4.23 :** La spire parcourue par le courant  $I_i$  constitue un électroaimant dont les pôles sont orientés dans le même sens que ceux de l'aimant qui s'éloigne. Il en résulte une force d'attraction  $\vec{F}_M$ , opposée à la vitesse  $\vec{v}$ .



©MH

L'interprétation de la *loi de Lenz* en termes de force magnétique nous permet de comprendre que cette loi reflète le principe de conservation de l'énergie. Le schéma de la figure 4.22 illustre cela très clairement. Si un aimant est déplacé vers une spire fermée sur un circuit, le module du champ magnétique extérieur  $\bar{B}$  augmente dans la spire, ce qui provoque un champ magnétique induit opposé à  $\bar{B}$  car  $\bar{B}$  et  $\partial\bar{B}/\partial t$  ont le même sens dans le cas d'une augmentation du module. Les courants de la spire et de l'aimant sont donc opposés et une force magnétique mutuelle répulsive apparaît entre l'aimant et la spire. Comme le schéma de la figure 4.22 le suggère, la spire agit comme un aimant (c'est en fait un électroaimant) dont les pôles sont orientés en opposition avec ceux de l'aimant qui approche. Puisque le déplacement de l'aimant doit vaincre la force magnétique de répulsion, cette analyse montre que pour générer un courant dans la spire, il faut dépenser une énergie mécanique.

La situation est analogue lorsque l'aimant est éloigné de la spire. C'est alors une force attractive qui apparaît si la spire est fermée sur un circuit. Comme le schéma de la figure 4.23 le suggère, la spire constitue un électroaimant dont les pôles sont orientés dans le même sens que ceux de l'aimant qui s'éloigne. Clairement, cette force s'oppose à la diminution du champ magnétique à l'intérieur de la spire.

Dans les deux cas, une analyse détaillée montrerait que la puissance mécanique nécessaire au mouvement de translation de l'aimant est égale à la puissance Joule dissipée dans le circuit, conformément au principe de conservation de l'énergie. Notez que la puissance mécanique est donnée par le produit scalaire de la force appliquée (l'opposé de la force magnétique) et de la vitesse à laquelle le point d'application de cette force se déplace,

$$P = RI_i^2 = \frac{\mathcal{E}^2}{R} = -\vec{F}_M \cdot \vec{v}. \quad (4.33)$$

On voit donc que la *loi de Lenz* (qui dit que le champ magnétique induit s'oppose à la variation du champ magnétique extérieur) est le reflet du principe de conservation de l'énergie. La loi de Lenz est de nature très générale, on la retrouve dans d'autres domaines de la science sous d'autres noms comme la loi du déplacement des équilibres physico-chimiques de Le Chatelier (voir cours de chimie).

### 4.3.4 Causalité

Dans sa forme initiale, la *loi de Faraday* établit une corrélation entre le comportement spatial du champ magnétique et le comportement temporel du champ électrique, sans qu'il n'y ait de causalité. Souvenez-vous qu'on avait insisté sur le fait que seul le mouvement des charges crée des champs et que le champ électromagnétique est une seule entité.

Dans le cas de l'induction, l'é.e.m. est à l'origine d'un courant, qui constitue donc une vraie source, car des charges sont mises en

mouvement par le champ électromagnétique initial. Cette mise en route s'accompagne d'un délai. Ce courant va donc engendrer un nouveau champ électromagnétique qui se superpose au champ existant avec un certain retard. On peut donc bien parler d'induction et de causalité dans ce cas-ci.

### ■ Pour aller plus loin...

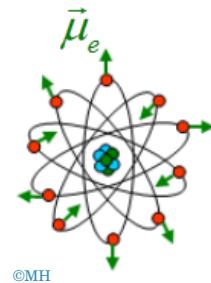
## 4.4 Champ magnétique dans la matière

### 4.4.1 Diamagnétisme

Nos connaissances du phénomène d'induction électromagnétique nous permettent maintenant d'expliquer une propriété magnétique importante de la matière. Il s'agit du diamagnétisme. Le diamagnétisme est présent dans tous les matériaux mais comme ses manifestations sont faibles, il n'est dans la pratique observable que sur les matériaux qui ne sont ni ferromagnétiques, ni paramagnétiques. En d'autres termes, le diamagnétisme n'est observable que dans les matériaux dont les atomes comportent un nombre pair d'électrons appariés, comme représenté à la figure 4.24. Le moment magnétique de tels atomes est nul et aucun effet d'orientation en présence d'un champ magnétique n'est possible. Ces matériaux sont pourtant le siège de phénomènes magnétiques. En particulier, ils subissent des forces magnétiques faibles lorsqu'ils sont plongés dans des champs magnétiques, c'est pourquoi on les qualifie de matériaux diamagnétiques. Le diamagnétisme s'explique facilement à partir de la notion d'induction électromagnétique et de la *loi de Lenz* qui y est associée.

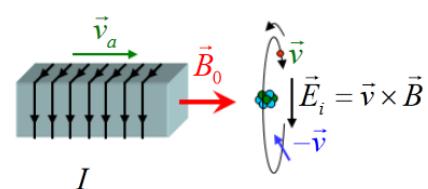
### Dispositif

À la figure 4.25, vous voyez un aimant générant un champ  $\vec{B}_0$ . Cet aimant est rapproché d'un matériau diamagnétique à la vitesse  $\vec{v}_a$ . Le matériau est représenté schématiquement à l'échelle microscopique à l'aide d'un atome qui le constitue. Pour la clarté une seule orbite électronique est représentée ; il s'agit plus précisément de l'orbite perpendiculaire au champ magnétique de l'aimant. Les autres orbites ont d'autres orientations puisqu'aucun atome vu globalement n'a une orientation particulière (moment magnétique nul). Cette orbite constitue une boucle de courant  $I$  pouvant être vue comme une spire de courant microscopique. Sur le schéma le sens du courant sur l'orbite atomique est choisi identique à celui des courants de surface de l'aimant (l'électron a une vitesse opposée au courant). Lorsque l'aimant est approché, le champ dans la spire correspondant à l'orbite augmente ce qui provoque un champ électrique induit dont le sens est opposé à celui du courant de la spire atomique. Conformément à la *loi de Lenz*, on voit que l'effet

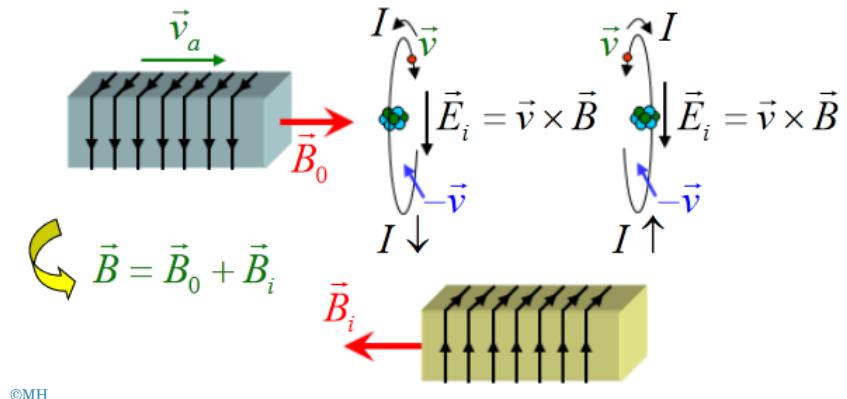


**FIGURE 4.24 :**  $\sum_{n=1}^{N_e=2N} \vec{\mu}_{e,n} = 0$

**FIGURE 4.25 :** Aimant lié au champ  $\vec{B}_0$ , en mouvement vers un matériaux diamagnétique à la vitesse  $\vec{v}_a$ . Pour comprendre la perspective, il faut savoir que le champ induit  $\vec{E}_i$  y est représenté le long de la portion de l'orbite sur laquelle l'électron a un mouvement descendant.



**FIGURE 4.26 :** Schéma à deux électrons correspondant à la figure 4.25. Notez que le champ induit à droite est représenté le long de la portion de l'orbite sur laquelle l'électron a un mouvement montant. L'atome dessiné à droite sur le schéma est le même atome qu'à gauche, il n'est séparé que pour pouvoir représenter la deuxième orbite avec clarté.



du champ induit est de diminuer le courant de la spire atomique en diminuant la vitesse orbitale de l'électron (réaction en opposition à l'augmentation initiale du champ magnétique).

### Influence sur une orbite

Puisque le matériau est diamagnétique ses atomes comportent un nombre pair d'électrons appariés. L'électron sur l'orbite représentée sur le schéma de la figure 4.25 est donc toujours accompagné d'un autre électron tournant dans l'autre sens. Cette deuxième orbite atomique est représentée séparément sur le schéma de la figure 4.26 (). Le sens du courant sur l'orbite atomique représentée à droite est opposé à celui des courants de surface de l'aimant. L'effet du champ induit est d'augmenter le courant de la spire atomique (augmentation de la vitesse orbitale de l'électron due au fait que, constituant une charge négative, l'électron subit une force dans la direction opposée à  $\vec{E}_i$ ).

### Influence combinée

Considérons maintenant le système réel constitué des deux orbites superposées. En l'absence de champ magnétique extérieur, le courant net de ce système est rigoureusement nul car dans les matériaux diamagnétiques les électrons en nombre pair s'organisent spontanément autour du noyau en équilibrant leurs moments magnétiques intrinsèques (spin) et orbitaux, il n'y a donc pas de moment magnétique net. Par contre, comme on vient de le voir, lorsqu'un champ magnétique est appliqué, c'est-à-dire, lorsque le module du champ magnétique extérieur passe de zéro à une valeur non nulle, le phénomène d'induction magnétique accélère un électron et décélère l'autre. L'induction est donc responsable d'un déséquilibre de courant entre les deux orbites. Dans notre exemple, le courant de l'orbite de droite est plus élevé que celui de gauche et il en résulte un courant net dans le sens opposé aux courants de surface de l'aimant qui génère le champ extérieur  $\vec{B}_0$ . Ce courant induit génère donc un champ magnétique induit  $\vec{B}_i$  opposé au champ de l'aimant  $\vec{B}_0$ , comme dans le cas de la spire macroscopique considérée plus haut à la section 4.3.1.

Ce phénomène ne concerne pas que les orbites perpendiculaires à  $\vec{B}_0$ . Toutes les orbites qui captent un flux magnétique extérieur non nul subissent le champ induit et s'opposent donc au champ  $\vec{B}_0$ . En combinant les courants nets de toutes les orbites électroniques, le milieu diamagnétique peut être vu comme formant des courants de surface opposés à ceux de l'aimant.

### Persistante

Une fois l'aimant arrivé à sa position de repos finale, le champ magnétique extérieur devient stationnaire sur la spire et le phénomène d'induction s'arrête ( $\vec{E}_i = 0$ ). Mais ceci ne signifie pas pour autant que le champ induit  $\vec{B}_i$  disparaît car une fois qu'ils ont été accélérés par le champ induit dû au rapprochement de l'aimant, les électrons orbitaux conservent leur vitesse (précisons que le mouvement orbital des électrons s'effectue sans frottement). Le champ  $\vec{B}_i$  reste donc stationnaire tant que le champ magnétique extérieur reste stationnaire. Par contre, si le champ extérieur change à nouveau, les courants orbitaux sont modifiés et le champ induit  $\vec{B}_i$  change en conséquence. Par exemple, lorsqu'on retire l'aimant ( $\vec{v}_a$  est inversée sur les schémas analysés ci-avant), les courants orbitaux sont modifiés de façon à compenser la diminution du champ magnétique extérieur (*loi de Lenz*). Le courant net du milieu diamagnétique qui est de sens opposé à celui des courants superficiels de l'aimant diminue donc et il en est de même du champ magnétique induit. Quand l'aimant aura été éloigné à l'infini (c'est-à-dire suffisamment loin pour que son champ magnétique puisse être considéré comme nul dans le matériau), la variation de flux magnétique au travers des spires orbitales sera exactement l'inverse de la variation de flux magnétique provoquée par le rapprochement de l'aimant et le champ  $\vec{B}_i$  redeviendra nul, laissant le matériau non magnétisé.

### Matériaux résistifs

Notez que si, plutôt qu'avec un matériau diamagnétique, on faisait la même expérience avec une spire macroscopique refermée sur une résistance, le courant de la spire s'annulerait lors de l'arrêt de l'aimant. Ceci est dû à la résistivité du matériau de la spire qui « freine » les électrons (une telle résistance n'existe pas au niveau des courants orbitaux). La loi d'Ohm qui est d'application dans ce cas indique effectivement que si l'é.e.m. s'annule le courant ne peut être que nul également. Si après l'arrêt on retire l'aimant le mouvement de recul de l'aimant provoque cette fois un courant induit dans le même sens que les courants de surface de l'aimant et une force attractive s'établit entre les deux. Cette force attractive n'est jamais établie dans les milieux diamagnétiques car les courants subsistent en l'absence de variation de champ magnétique extérieur dans la mesure où il n'y a pas de dissipation des courants orbitaux. Comme le retrait de l'aimant provoque simplement un effet

inverse à celui dû à son arrivée, ce retrait conduit à une diminution jusqu'à zéro des courants induits dans le matériau diamagnétique.

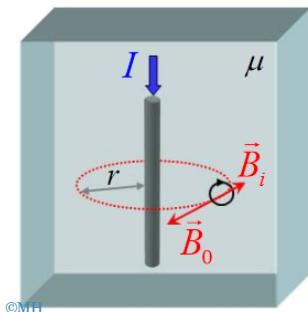
En conclusion, le champ magnétique induit dans un matériau diamagnétique est toujours opposé au champ magnétique extérieur  $\bar{B}_0$  et le champ magnétique total  $\bar{B} = \bar{B}_0 + \bar{B}_i$  est dès lors toujours inférieur au champ extérieur. De ce fait, la perméabilité relative — dont la définition est redonnée en 4.27 — des matériaux diamagnétiques est toujours inférieure à l'unité,

$$\bar{B} = \bar{B}_0 + \bar{B}_i = \frac{\mu}{\mu_0} \bar{B}_0 = \mu_r \bar{B}_0 \quad (\mu_r < 1). \quad (4.34)$$

### ■ Exemple

#### Exemple de l'eau

**FIGURE 4.27 :** Champ magnétique dans l'eau. Des courants orbitaux conduisent à diminuer le champ magnétique total. Cette diminution est toutefois très faible pour l'eau.

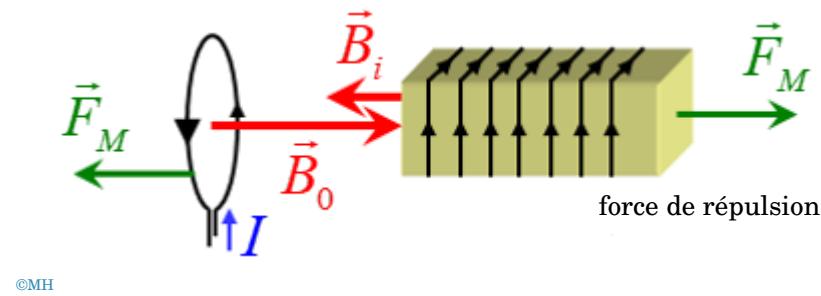


Dans l'exemple du courant rectiligne plongé dans un matériau diamagnétique (tel que l'eau) représenté à la figure 4.27, le champ magnétique  $\bar{B}$  est réduit par rapport à ce qu'il serait dans le vide en raison de l'apparition de courants orbitaux induits en opposition avec le champ  $\bar{B}_0$  généré par le courant de conduction (les courants orbitaux sont représentés symboliquement à l'aide d'une petite boucle fléchée entourant le point auquel les champs sont représentés). Notez que les courants orbitaux subsistent en l'absence de variations du courant  $I$  car ils ont été établis au moment de l'établissement du courant  $I$  et, en raison de l'absence de dissipation, ils ne disparaîtront que lorsque le courant sera annulé. Le module du champ magnétique total dans le matériau vaut  $B = \mu I / (2\pi r)$ .

Une perméabilité relative inférieure à l'unité signifie que le champ magnétique généré par un courant sera plus faible dans un matériau diamagnétique que dans le vide, le facteur de diminution étant  $\mu_r$ . Les valeurs de  $\mu_r$  sont très proches de l'unité. Pour l'eau par exemple, elle vaut  $1 - 0.88 \times 10^{-5}$ . Le diamagnétisme se manifeste très faiblement en pratique car les perméabilités relatives de la plupart des matériaux sont très proches de l'unité (les matériaux supraconducteurs constituent un cas atypique pour lequel le diamagnétisme est fort et facilement mesurable, en particulier, parce qu'il est dû à des courants de conduction non dissipatifs)

**Exemple :**  $\mu_r(\text{eau}) = 1 - 0.88 \times 10^{-5}$ .

Le schéma de la figure 4.28 illustre le fait que, contrairement à ce qui se produit avec les milieux paramagnétiques et ferromagnétiques, un aimant exercera toujours une force répulsive sur un milieu diamagnétique. Ceci est indiqué sur le schéma de la figure 4.28 par l'opposition que l'on y voit entre le sens du courant de la spire qui génère le champ magnétique extérieur, d'une part, et le sens des courants de surface du matériau diamagnétique, d'autre part.



©MH

**FIGURE 4.28 :** Diamagnétisme. On observe une force répulsive.

**Remarque** Il est important de réaliser que la description du diamagnétisme proposée ici est très fortement simplifiée par rapport à la théorie moderne de ce phénomène. En particulier, l'image que l'on peut se faire du diamagnétisme est très simplifiée en ne traitant le phénomène d'induction électromagnétique que sur les orbites électroniques. Pour être complet il faudrait également tenir compte du spin de l'électron mais le traitement du problème devrait alors impérativement se faire dans le cadre théorique de la physique quantique, ce qui n'est pas approprié pour un cours de première année. Le but ici est de vous donner une image aussi simple que possible du diamagnétisme vous permettant d'en comprendre la phénoménologie de base qui n'est autre que le phénomène d'induction électromagnétique à l'échelle atomique.

## 4.5 Application du phénomène d'induction

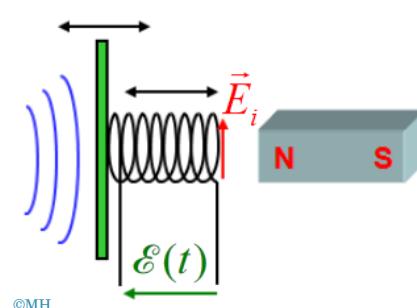
Les applications du phénomène d'induction électromagnétique sont nombreuses. En voici quelques-unes de la vie courante, brièvement décrites.

### Application pratique

#### 4.5.1 Le microphone

Le microphone est un exemple type d'application du phénomène d'induction électromagnétique de Faraday. Une membrane, se déplaçant sous les effets de la pression acoustique, est solidaire d'un petit solénoïde placé à proximité d'un aimant permanent. La vibration acoustique se manifeste par une vibration longitudinale du solénoïde. Le flux magnétique capté par le solénoïde varie donc selon les fluctuations de la pression acoustique. Selon la loi de Faraday, les variations de flux se traduisent naturellement par des variations d'é.e.m. aux bornes du solénoïde. Cette é.e.m. reproduit donc

**FIGURE 4.29 :** Schéma de principe d'un microphone.

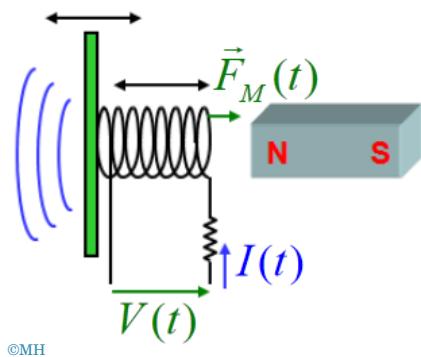


le signal acoustique sous forme d'un signal électrique qui peut être amplifié, traité, enregistré, selon l'application considérée.

### ■ Application pratique

#### 4.5.2 Le haut-parleur

**FIGURE 4.30 :** Schéma de principe d'un haut-parleur.



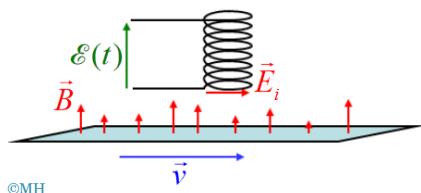
©MH

Le haut parleur a la même structure que le microphone mais son fonctionnement est inversé. Une source de tension dépendante du temps  $V(t)$  (reproduisant en général un signal acoustique provenant d'un microphone) alimente un solénoïde représenté ici avec une résistance en série pour mettre en évidence que tout circuit présente une certaine résistance. Le courant dans le solénoïde varie en fonction de la tension  $V(t)$ , ce qui provoque une variation du champ magnétique généré par le solénoïde. La force magnétique entre le solénoïde et l'aimant permanent varie donc également selon la tension  $V(t)$ . La membrane du haut-parleur est donc ainsi mise en mouvement et reproduit la vibration acoustique contenue dans le signal électrique  $V(t)$ .

### ■ Application pratique

#### 4.5.3 La tête de lecture magnétique

**FIGURE 4.31 :** Tête de lecture et bande magnétique se déplaçant à une vitesse  $\vec{v}$ .



©MH

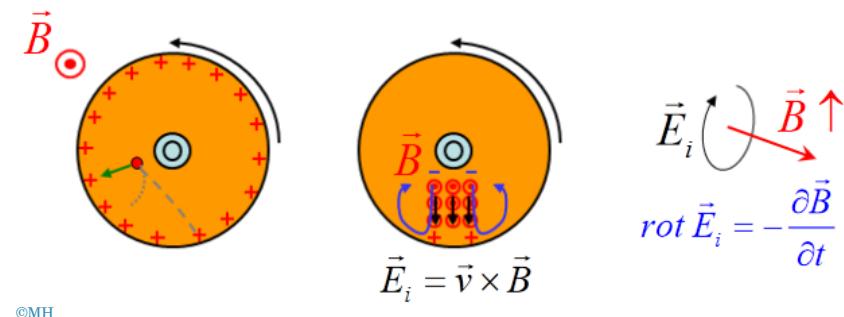
La tête de lecture des systèmes d'enregistrement à bande ou disque magnétique renferme un petit solénoïde. La bande ou le disque est constitué d'un milieu magnétique magnétisé de façon à reproduire le signal à enregistrer sous forme d'une variation du champ magnétique. Le défilement de la bande ou du disque provoque donc une variation du flux magnétique dans le solénoïde qui se traduit par une variation d'é.e.m. à ses bornes. Le signal électrique ainsi récupéré reproduit le signal enregistré.

### ■ Application pratique

#### 4.5.4 Les courants de Foucault

Les courants de Foucault ne constituent pas à proprement parler une application car il s'agit plutôt d'un effet nuisible se pro-

duisant dans les systèmes électromagnétiques sujets à des variations de champ magnétique. Considérons par exemple le problème de la dynamo de Faraday. Lorsque le disque tourne dans un champ magnétique uniforme, toutes les charges libres subissent une force de Lorentz radiale qui polarise le disque de façon homogène sur tout le périmètre (cette situation est illustrée ci-dessous à gauche). Par contre, si le champ magnétique se réduit à une zone du disque (schéma de droite), l'*électromotance* n'est établie qu'aux limites de cette zone. Plus précisément, les charges libres sont déplacées par le champ induit aux limites de la zone de champ magnétique et créent donc de part et d'autre de cette zone des excédents de charges positives et négatives responsables d'un champ électrostatique de type dipolaire. Mais puisque ces charges sont libres rien ne les empêche de suivre les lignes de champs électrostatiques dipolaires. Elles créent ainsi des boucles de courant (boucles bleues fléchées sur le schéma de la figure 4.32). C'est ce que l'on appelle les courants de Foucault.



©MH

Une autre manière de voir les choses est de considérer que, lors de la rotation du disque, une zone donnée de ce disque est traversée par un flux magnétique variable. Selon la loi de Faraday, ce flux magnétique variable s'accompagne d'une é.e.m. non nulle sur le pourtour de la zone. Le champ induit correspondant à cette é.e.m. crée inévitablement un courant circulant en boucle autour de cette zone (le courant forme des boucles dans les zones de flux magnétique variables, comme le suggère le schéma de la figure 4.32 illustrant la loi locale de Faraday). D'après la *loi de Lenz*, le sens de ces courants est tel qu'ils compensent la variation de flux. Par exemple, dans la zone du disque entrante dans l'entrefer de l'aimant le flux magnétique augmente dans le sens du champ  $\vec{B}$  (sortant de la feuille sur le schéma ci-dessus) et les courants de Foucault sont donc générés spontanément dans une direction qui est telle que le champ magnétique induit qu'ils génèrent est opposé au champ de l'aimant (c'est le sens horlogique indiqué par la flèche bleue dans la zone d'entrée à gauche de l'entrefer sur la figure 4.32). La boucle de courant de Foucault agit donc comme un électroaimant dont les pôles sont opposés à ceux de l'aimant. Il y a donc une force de répulsion qui agit entre le disque et l'aimant. Cette force de répulsion exigera la dépense d'une certaine puissance mécanique pour faire tourner le disque. Ceci est attendu en vertu du principe de conservation

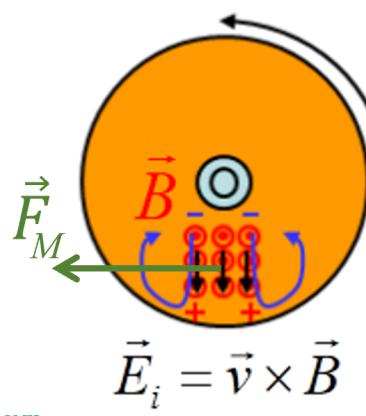
**FIGURE 4.32 :** Courants de Foucault.

de l'énergie puisque les courants de Foucault dissipent de l'énergie par effet Joule. Cette énergie électrique dissipée provient de l'énergie mécanique dépensée pour faire tourner le disque.

Il en est de même pour la zone du disque qui se trouve à la sortie de la zone de champ magnétique non nul. Dans cette zone de sortie, les courants de Foucault renforcent le champ  $\vec{B}$  puisqu'ils s'opposent à sa diminution, ils prennent donc un sens trigonométrique dans la situation du schéma de la figure 4.33, ce qui correspond à la création d'un électroaimant de même polarité que l'aimant. Ceci crée une force attractive qui, elle aussi, tend à freiner le disque lors de sa rotation, en accord avec le principe de conservation de l'énergie.

### Freinage électromagnétique

**FIGURE 4.33 :** Freinage induit par les courants de Foucault.



©MH

Cet effet de freinage électromagnétique du disque est exploité pour réaliser ce que l'on appelle des freins à courant de Foucault (voir aussi la section 3.4.4). Le principe en est le suivant : on remplace les plaquettes de frein du frein à disque traditionnel par un aimant. Quand le chauffeur du véhicule actionne le frein, l'aimant se rapproche du disque et provoque le freinage par courants de Foucault. Le schéma de la figure 4.33 permet de comprendre le phénomène de freinage de façon différente. La flèche verte orientée vers la gauche indique la force magnétique que subissent les courants de Foucault dans la zone où ils sont plongés dans le champ magnétique de l'aimant (champ  $\vec{B}$  sortant du plan de la feuille). Cette force n'est rien d'autre que la force magnétique de Laplace exercée sur les courants de Foucault. Elle s'oppose clairement à la rotation du disque conformément à la *loi de Lenz*.

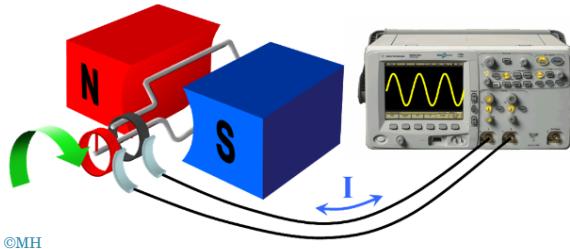
L'avantage de ce type de frein est qu'il ne nécessite pas le contact entre pièces métalliques. Ceci est un grand avantage car l'échauffement résultant de la dissipation provoque dans ces pièces métalliques des déformations qui sont responsables de fortes contraintes mécaniques pouvant conduire à leur rupture lorsque celles-ci sont en contact. L'absence de contact permet au disque de s'échauffer et de se dilater sans provoquer de contraintes mécaniques dangereuses. C'est la raison pour laquelle ce type de frein équipe les véhicules de type poids-lourds dont le freinage engendre de grande quantité d'énergie à dissiper.

De manière générale, les courants de Foucault affectent tous les systèmes électromagnétiques dans lesquels il y a des variations de champ magnétique (ou de flux magnétique) au sein de conducteurs. On peut le comprendre très simplement à partir de la forme locale de la loi de Faraday  $\overline{\text{rot}} \vec{E}_i = -\partial \vec{B} / \partial t$ . Si  $\partial \vec{B} / \partial t$  est non nul dans un conducteur, le champ induit  $\vec{E}_i$  est également non nul et, en vertu de la loi d'Ohm locale  $\vec{J} = \sigma \vec{E}_i$  il y a bien des courants générés dans ce conducteur. Ces courants peuvent être très nuisibles car ils dissipent inutilement de l'énergie par effet Joule et ils peuvent provoquer des échauffements importants.

### ■ Application pratique

#### 4.5.5 Le générateur de tension alternative

Le générateur de tension alternative est un dispositif basé sur la loi de l'induction de Faraday appliquée au cas d'un contour variable  $C(t)$  plongé dans un champ magnétique stationnaire  $\bar{B}(\vec{x})$ ,



**FIGURE 4.34 :** Générateur de tension alternative.

$$\mathcal{E} = \oint_{C(t)} \vec{E}_i \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_{S_C(t)} \bar{B}(\vec{x}) \cdot d\vec{S} \quad (4.35)$$

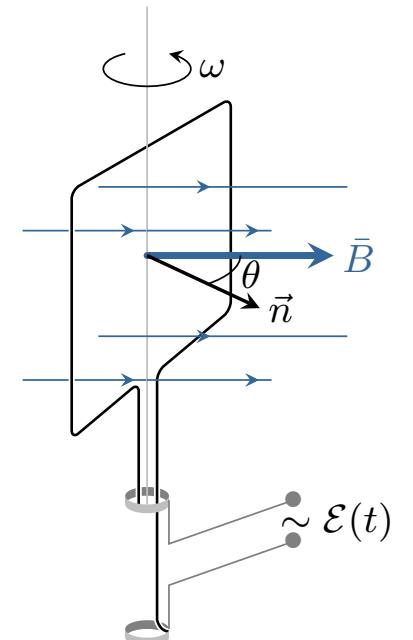
Le dispositif est représenté globalement à la figure 4.34 et détaillé à la figure 4.35. Son principe de fonctionnement est très simple. Une spire fixée sur un axe tournant est mise en mouvement de rotation dans l'entrefer d'un aimant permanent. Le mouvement de rotation de la spire provoque une variation du flux magnétique qu'elle capte et une é.e.m. est générée à ses bornes.

À un temps  $t$  donné l'orientation de la spire fait un angle  $\theta$  avec le champ magnétique de l'entrefer. Si la vitesse de rotation est constante, cet angle évolue linéairement avec le temps et on peut écrire  $\theta(t) = \omega t$  où le coefficient  $\omega$  s'appelle la vitesse angulaire de rotation. Le temps pour faire un tour complet, soit le temps  $T$  tel que  $\omega T = 2\pi$ , est appelé la « période de révolution ». La période du mouvement circulaire vaut donc  $T = 2\pi/\omega$ .

L'expression du flux magnétique capté par la spire est donnée par

$$\int_{S_C(t)} \bar{B}(\vec{x}) \cdot d\vec{S} = Blh \cos(\omega t). \quad (4.36)$$

En effet, nous considérerons pour la simplicité que le champ  $\bar{B}$  de l'aimant est uniforme. L'intégrale de flux fait apparaître le produit scalaire de  $\bar{B}$  et du vecteur de surface  $d\vec{S}$  qui tourne avec la spire à la vitesse angulaire  $\omega$ . Ce produit scalaire fait donc apparaître le cosinus de l'angle  $\theta(t) = \omega t$ . Si le champ est uniforme et que son module vaut  $B$ , le flux magnétique est simplement donné par le produit de la surface de la spire, du module du champ magnétique et du cosinus de l'angle  $\theta$ . Dans le cas d'une spire rectangulaire comme sur le schéma ci-dessus, la surface de la spire vaut  $lh$  où  $l$  et  $h$  sont respectivement sa longueur et sa largeur. Le flux magnétique prend donc la forme suivante de (4.36).



**FIGURE 4.35 :** Spire d'un alternateur. Spire tournant à fréquence angulaire  $\omega = \dot{\theta}$  dans un champ  $\bar{B}$  fixe, reliée à deux contacts fixes.

C'est la dérivée du flux magnétique qui donne l'é.e.m. induite

$$\mathcal{E} = Blhw \sin(\omega t). \quad (4.37)$$

L'é.e.m. induite est donc périodique de période  $T = 2\pi/\omega$ . C'est ce que l'on appelle une tension alternative. C'est la raison pour laquelle le dispositif s'appelle un alternateur.

Un cycle complet de rotation de la spire est représenté en quatre étapes à la figure 4.36. Son analyse va nous permettre d'interpréter physiquement la forme sinusoïdale de l'é.e.m. aux bornes de la spire. La spire est représentée avec un de ses côtés coloré en rouge de façon à pouvoir retracer facilement la polarité de l'é.e.m. Admettons qu'au temps  $t = 0$ , la spire soit perpendiculaire au champ magnétique  $\vec{B}$ . C'est la situation de flux magnétique maximum correspondant à un angle  $\theta = 0$  (valeur maximale de  $\cos\theta$ ). À cette valeur de  $\theta$  correspond une é.e.m. nulle puisque la dérivée d'une fonction est nulle en son maximum (ici il s'agit de la fonction cosinus). Un quart de période plus tard la spire a effectué un quart de tour,  $\theta = 90^\circ$ . Le flux magnétique est maintenant nul ce qui correspond à un maximum de sa dérivée (le sinus est maximum là où le cosinus est nul). L'é.e.m. est donc maximale. À côté des schémas de la spire, la courbe d'évolution de l'é.e.m. est donnée jusqu'au temps  $t$  considéré sur le schéma correspondant.

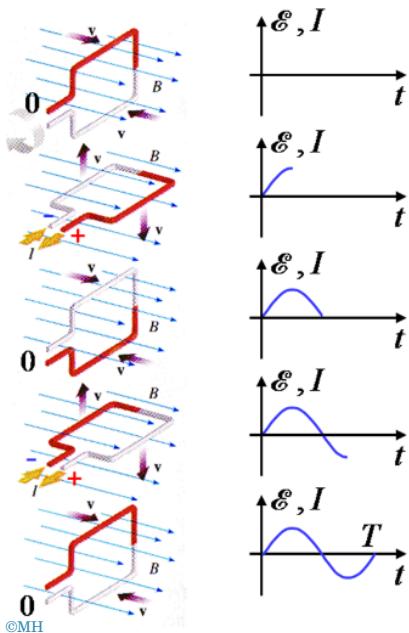
Le produit  $\vec{v} \times \vec{B}$  ( $\vec{v}$  étant la vitesse de déplacement du bord de la spire qui coupe les lignes de champ) donne le sens du champ induit  $\vec{E}_i$  et donne donc la polarité de l'é.e.m. (indiquée sur les schémas avec les signes + et -). On voit donc qu'après un quart de période l'é.e.m. est maximale et a une polarité telle que la borne rouge de la spire montre une tension positive.

Un quart de tour plus tard, le flux repasse par un extremum correspondant à une é.e.m. nulle. L'é.e.m. a donc chuté de son maximum à zéro sur un quart de période.

Arrivé à  $\theta = 270^\circ$ , le flux capté par la spire est de nouveau nul mais sa dérivée est maximum. Le sinus en facteur de l'é.e.m. est cette fois négatif et vaut -1. Cette inversion de signe est facilement compréhensible sur le schéma en remarquant que le côté blanc de la spire est dans la même situation que l'était le côté rouge quand  $\theta$  valait  $90^\circ$ . Lorsque  $\theta = 270^\circ$ , la borne blanche de la spire est donc soumise à une tension positive alors que cette tension était négative lorsque  $\theta = 90^\circ$ . Comme les extrémités de la spire constituent les bornes de la source de tension, la tension générée change de signe alternativement, conformément à la description mathématique donnée plus haut.

Arrivé à  $360^\circ$ , la situation est identique à la situation de départ, une période complète a été effectuée et le cycle recommence. Le dernier diagramme  $\mathcal{E}(t)$  ci-dessus à gauche montre une période de révolution du générateur de tension alternative.

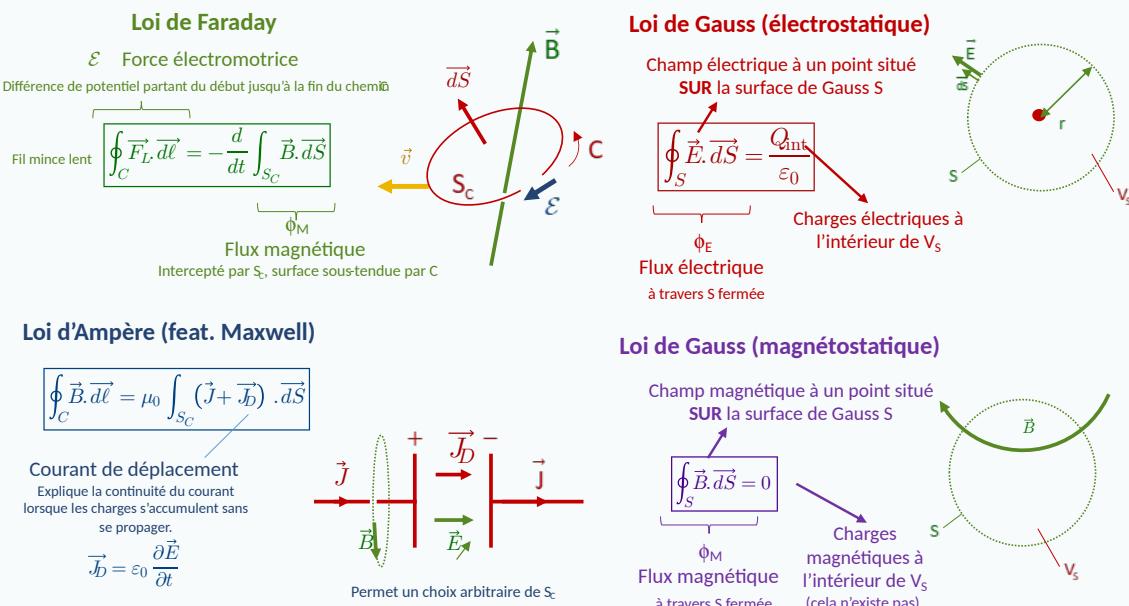
**FIGURE 4.36 :** Spire en rotation dans un champ magnétique constant. La variation du flux au sein de la spire s'accompagne d'une variation de l'*electromotance* aux bornes de la spire. L'évolution temporelle de cette force (proportionnelle au courant si la spire est refermée sur une résistance) est représentée pour quatre orientations de la spire.



## 4.6 Le coin des assistant·es

### Équations de Maxwell

Les équations de Maxwell constituent un ensemble de quatre équations découvertes à des époques différentes (Gauss, Ampère, Faraday, ...) et unifiées par Maxwell (section 4.2). Un champ électrique ou magnétique ne peut exister en un point de l'espace à un instant donné que s'il respecte en même temps ces quatre équations. On distingue les équations qui ne changent pas en conditions « statiques » (loi de Gauss)  $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$  et  $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$  et celles qui contiennent un terme « dynamique »  $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} + \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$  (loi de Faraday) et  $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \mu_0 I$  (loi d'Ampère-Maxwell). Elles sont résumées et schématisées ci-dessous.



L'équation d'Ampère-Maxwell diffère de celle d'Ampère par l'apparition d'un terme ayant les dimensions d'un courant, appelé **courant de déplacement**. Ce terme n'est pas un courant et ne peut, par exemple, pas être utilisé dans la loi de Biot et Savart. Il a la forme

$$\vec{J}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

et est nécessaire pour rendre la loi d'Ampère valable dans n'importe quelle situation. Typiquement, lorsqu'il y a une accumulation de charge comme dans le condensateur ci-dessus, on pourrait calculer la loi d'Ampère via le chemin circulaire vert en pointillés et déterminer l'existence d'un champ magnétique à l'aide de l'expression du courant passant à travers ce contour. Cependant, on pourrait très bien choisir une surface délimitée par ce même contour mais passant par l'intérieur du condensateur. On aurait alors un courant nul, et donc un champ magnétique nul, ce qui est contradictoire avec le calcul réalisé avec la première surface. Maxwell a alors introduit le concept de courant de déplacement qui « prend le relais » lorsque le courant de conduction n'est plus présent. Il ne correspond pas à un déplacement de charges, mais il permet de calculer le champ magnétique lorsque la surface d'intégration est choisie entre les plaques du condensateur.

## 4.7 Questions théoriques

1. Écrivez la loi de conservation de la charge sous forme intégrale (illustrez-la à l'aide d'un schéma permettant d'identifier clairement les grandeurs physiques qui y apparaissent). [section 4.1.2, p. I.101]
2. Écrivez la loi de conservation de la charge sous forme locale (ou équation de continuité) (définissez les grandeurs physiques qui y apparaissent). [section 4.1.2, p. I.101]
3. Donnez l'expression de la loi d'Ampère-Maxwell sous forme intégrale. [section 4.1.3, p. I.105]
4. Donnez l'expression de la loi d'Ampère-Maxwell sous forme locale. [section 4.1.3, p. I.105]
5. Calculez le terme de Maxwell  $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  au sein d'un condensateur vide d'épaisseur  $e$  et de surface  $S$  parcouru par un courant  $I$ . [section 4.1.5, p. I.107]
6. Que vaut  $\overline{\text{rot}} \vec{B}$  autour d'un fil conducteur, dans la région de l'espace où  $\vec{J} = \vec{0}$ , lorsque  $\vec{J}$  est constant dans le fil? Peut-on en déduire que  $\vec{B}$  dérive d'un potentiel? Peut-on dire que  $\vec{B}$  dérive d'un pseudo-potentiel défini presque partout?

## 4.8 Exercices

### Exercice 4.1

Soit un alternateur, comme celui de la figure 4.35, muni d'une bobine mobile rectangulaire de  $N = 100$  spires de surface  $S = 200 \text{ cm}^2$  ( $\ell = 10 \text{ cm}$  et  $L = 20 \text{ cm}$ ). La bobine est plongée dans un champ magnétique uniforme de norme  $B = 3 \text{ T}$ . L'alternateur est branché à une résistance  $R = 1 \text{ k}\Omega$ .

- Calculez la tension générée par l'alternateur lorsqu'il tourne à une fréquence de 50 tours par seconde. (Réponse :  $\mathcal{E} = 1.885 \text{ kV} \sin(100\pi t)$ )
- Montrez que, à tout moment, la puissance mécanique  $P_{\text{méc}}$  consommée par l'alternateur est égale à la puissance Joule  $P_J$  dissipée dans la résistance. (Réponse :  $P_{\text{méc}} = P_J = 3.55 \text{ kW} \sin^2(100\pi t)$ )

### Exercice 4.2

Le schéma de la figure E.4.1 montre un condensateur alimenté par une source de tension alternative  $V(t) = V_m \sin(\omega t)$  de 71 V efficace et 50 Hz. Le condensateur a des plaques de géométrie circulaire de rayon  $R = 10 \text{ cm}$  et l'écart  $e$  entre ces plaques est de 1 cm. On négligera la dynamique des courants de conduction à la surface des plaques (densité surfacique de charge électrique uniforme).

- Calculez le champ électrique  $E(t)$  établi en tout point entre les plaques du condensateur.
- Calculez le champ magnétique  $B(t)$  établi en tout point entre les plaques du condensateur.
- Calculez le champ magnétique  $B(t)$  établi en tout point situé à une distance  $r > R$  de l'axe du condensateur (on suppose pour cela que les fils d'alimentation sont sur l'axe du condensateur et que les dimensions du circuit sont beaucoup plus grandes que celles du condensateur lui-même).
- Le schéma de la figure E.4.2 montre une spire rectangulaire disposée radialement entre les plaques du condensateur, son bord supérieur étant sur l'axe du condensateur. La longueur de la spire est égale au rayon  $R$  et sa largeur vaut  $e/2$ , soit 0,5 cm. Calculez l'electromotance  $\mathcal{E}(t)$  induite aux bornes de cette spire. (Réponse :  $\mathcal{E}(t) = 1,371 \times 10^{-13} \text{ V} \sin(\omega t)$ )

### Exercice 4.3

Le schéma de la figure E.4.3 montre l'extrémité d'une antenne dans laquelle circule un courant  $I$ . Les charges transportées par ce courant aboutissent dans une sphère conductrice de rayon  $R = 1 \text{ mm}$ .

- Calculez la densité de courant de déplacement en tout point de l'espace autour de la sphère lorsque le courant  $I$  vaut 0,25 mA dans le sens indiqué sur le schéma.

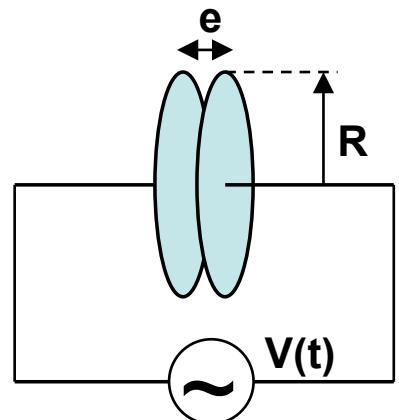


FIGURE E.4.1

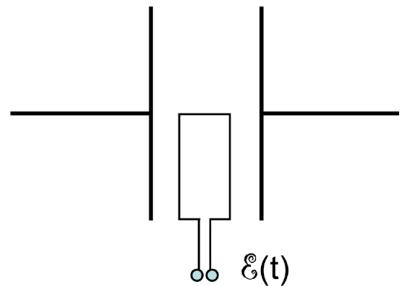


FIGURE E.4.2

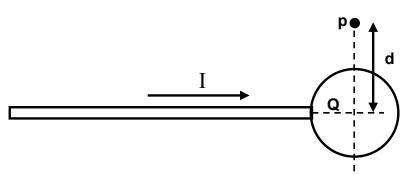


FIGURE E.4.3

- b) Vérifiez que, conformément à la conjecture de Maxwell, le flux de la densité de courant totale au travers de toute surface sphérique fermée entourant la sphère et centrée sur celle-ci est nul.
- c) Calculez le champ magnétique généré dans l'espace au point  $p$  se trouvant à une distance  $d = 2\text{ cm}$  de l'axe de l'antenne à la verticale du centre de la sphère (voir schéma).

#### Exercice 4.4

Le schéma de la figure E.4.4 montre un câble coaxial utilisé comme condensateur. Le fil intérieur a un rayon  $a$  de 1 mm, la gaine conductrice a un rayon  $b$  de 5 mm. La longueur  $d$  du câble est de 12 m. Pour la simplicité, on supposera que le milieu diélectrique qui assure la stabilité mécanique du câble a une permittivité égale à celle du vide.

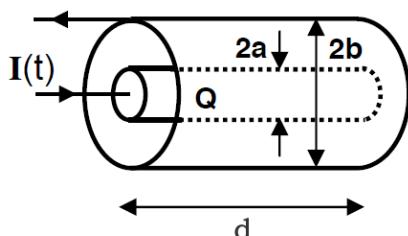


FIGURE E.4.4 :

- a) Donnez le lien entre la charge  $Q$  du condensateur et le champ électrique  $E$  en tout point entre le fil et la gaine. Déduisez-en la capacité  $C$  du condensateur.
- b) Pour un courant  $I$  donné, calculez l'expression analytique de la densité de courant de déplacement  $J_D$  à toute distance  $r$  de l'axe du câble.
- c) Vérifiez que, à toute distance  $r$  de l'axe du câble, le courant de déplacement  $J_D$  est égal au courant de conduction  $I$ .

#### Exercice 4.5

Le schéma de la figure E.4.5 montre une paroi de courant (d'extension supposée infinie) véhiculant une densité de courant de surface  $\vec{J}_s$  variable dans le temps selon l'expression :  $\vec{J}_s(t) = J_{s0} e^{-t^2/t_0^2} \hat{1}_x$ .

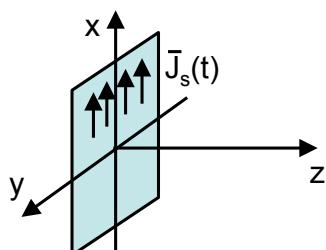


FIGURE E.4.5 :

- a) Donnez l'expression analytique de l'onde de champ magnétique  $\vec{B}(z, t)$  émise par cette paroi ( $z > 0$ ).
- b) Donnez l'expression analytique de la densité de courant de déplacement  $\vec{J}_D(z, t)$  émise par cette paroi ( $z > 0$ ).

#### Exercice 4.6

Le schéma de la figure E.4.6 montre un aimant disposé à proximité d'une roue de matériau conducteur non ferromagnétique.

Supposons que la roue tourne autour d'un axe dont on peut négliger les frottements. Expliquez pourquoi la roue est freinée par l'aimant.

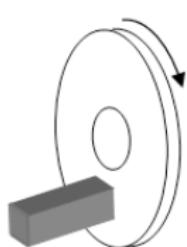


FIGURE E.4.6 :

#### Exercice 4.7

Le schéma de la figure E.4.7 montre une bille métallique maintenue au-dessus d'un aimant permanent. Le métal constituant la

bille n'est ni ferromagnétique ni paramagnétique. Si on laisse tomber la bille, sa vitesse de chute dans le champ gravitationnel sera plus faible que s'il n'y avait pas d'aimant. Vrai ou faux ? Justifiez.

### Exercice 4.8

Le schéma de la figure E.4.8 montre un solénoïde de  $N$  spires alimenté par une source de tension alternative  $V$ .

L'amplitude des variations du flux magnétique total généré au sein de ce solénoïde est d'autant plus grande que  $N$  est grand. Vrai ou faux ? Justifiez.

### Exercice 4.9

Le schéma de la figure E.4.9 montre en coupe un solénoïde générant un champ magnétique sortant du plan de la feuille.

Ce solénoïde contient une charge électrique positive  $q$ . Si le courant du solénoïde augmente, la charge a tendance à se déplacer vers la gauche, comme indiqué sur le schéma. Vrai ou faux ? Justifiez.

### Exercice 4.10

Vrai ou faux ? Justifiez.

- Les schémas de la figure E.4.10 montrent une roue métallique en rotation libre à proximité d'un fil conducteur véhiculant un courant  $I$ . Dans la situation (a), la roue tourne dans un plan perpendiculaire au fil alors que dans la situation (b), elle tourne dans un plan contenant le fil. Dans la situation (a), la roue s'arrête plus vite que dans la situation (b).
- Le schéma de la figure E.4.11 montre un aimant permanent qui se déplace à vitesse  $v$  vers un anneau de cuivre qui lui fait face. L'anneau de cuivre subit une force qui tend à l'éloigner de l'aimant.
- Le schéma de la figure E.4.12 montre (en vue du haut) un fil rectiligne et un anneau de cuivre déposés côté à côté sur une table. Le fil véhicule un courant  $I$  dans la direction indiquée par la flèche. Si le courant  $I$  augmente régulièrement au cours du temps, l'anneau subit une force qui tend à l'éloigner du fil.
- Le schéma de la figure E.4.13 montre une source de tension continue mise en court-circuit à l'aide d'un circuit rectangulaire de longueur  $d$  et de résistance négligeable. Après la fermeture de l'interrupteur, le courant augmente d'autant plus vite que la longueur  $d$  est grande (tout autre paramètre restant inchangé).

### Exercice 4.11

Vrai ou faux ? Justifiez.

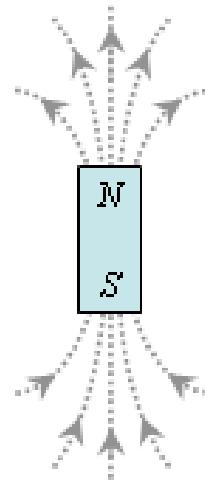


FIGURE E.4.7

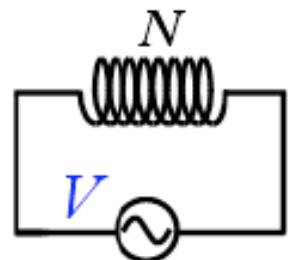


FIGURE E.4.8

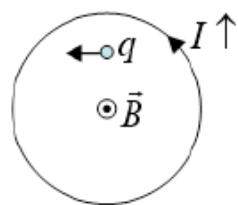


FIGURE E.4.9

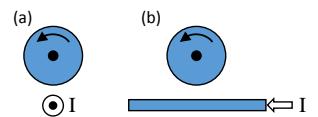


FIGURE E.4.10

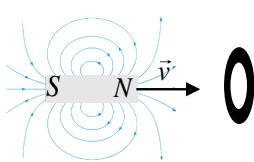


FIGURE E.4.11 :

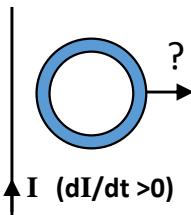


FIGURE E.4.12 :

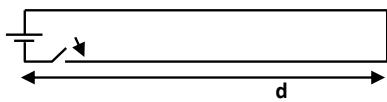


FIGURE E.4.13 :

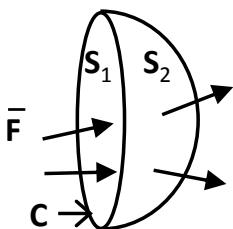


FIGURE E.4.14 :

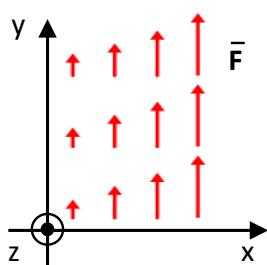


FIGURE E.4.15 :

- a) La densité de courant  $\vec{J} = \alpha \sin(kx) \cos(\omega t) \vec{1}_x$  et la densité de courant de déplacement  $\vec{J}_D = k\alpha \cos(kx) \cos(\omega t) \vec{1}_y$  décrivent une situation physiquement acceptable.
- b) Le schéma de la figure E.4.14 montre deux surfaces  $S_1$  et  $S_2$  sous-tendues par le même contour circulaire  $C$  ( $S_1$  est un disque et  $S_2$  est une demi-sphère). Si la divergence du champ vectoriel  $\vec{F}$  est nulle en tout point de l'espace, alors les flux du champ  $\vec{F}$  au travers de ces deux surfaces sont identiques en valeur absolue.
- c) Le schéma de la figure E.4.15 montre un champ vectoriel  $\vec{F}$  parallèle à l'axe  $y$  d'un repère cartésien  $(x, y, z)$ . Ce champ est invariant par translation dans les directions  $y$  et  $z$ . Les composantes en  $y$  et en  $z$  du rotationnel de  $\vec{F}$  sont donc nulles, soit  $(\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{1}_y = (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{1}_z = 0$ .

### Exercice 4.12

Dans un système de courants électriques variables de façon harmonique règne un champ électrique donné par l'expression analytique

$$\vec{E} = \alpha \left( xy \vec{1}_x - \frac{1}{2} y^2 \vec{1}_y \right) \sin(\omega t).$$

- a) Donnez l'expression analytique du champ magnétique  $\vec{B}$  générée par ce système de courants.
- b) Donnez les expressions analytiques des densités de charge  $\rho$  et de courant  $\vec{J}$  caractérisant le système.

### Exercice 4.13

Dans un matériau diélectrique règne un champ électrique à variations harmoniques donné par l'expression analytique

$$\vec{E} = a \sin(kx) \cos(\omega t) \vec{1}_z.$$

- a) Donnez l'expression analytique du champ magnétique harmonique  $\vec{B}$  présent dans le même diélectrique.
- b) Donnez l'expression analytique de la densité de courant de charges liées  $\vec{J}$  dans le diélectrique.

**Récapitulatif des notions vues dans cette leçon**

Indispensable	Nécessaire	Intéressant
<ul style="list-style-type: none"> <li>— équation de conservation de la charge</li> <li>— version dynamique des équations de Maxwell</li> <li>— application de la loi d'Ampère à un condensateur</li> <li>— <i>loi de Lenz</i>, incluant les orientations des champs et courants</li> <li>— notion de retard et causalité associée aux courants induits, par opposition à la simultanéité et corrélation du champ électrique non conservatif et de la variation de champ magnétique</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>— origine des champs liée aux charges</li> <li>— le champ électromagnétique constitue une seule entité</li> <li>— le courant de déplacement n'est pas un vrai courant</li> <li>— explication physique de <math>\operatorname{div} \vec{J} = 0</math> autour d'un condensateur, malgré l'absence de transfert de charges</li> <li>— conservation de l'énergie dans la <i>loi de Lenz</i></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>— diamagnétisme</li> <li>— applications de l'induction</li> </ul>



# Équations dynamiques des circuits électriques

5  
Leçon

## ■ Pré-requis pour cette leçon ■

- |  |   |
|--|---|
| — <i>nombre complexe</i>                                     | — <i>résistance</i>   |
| — <i>loi de Faraday</i>                                      | — <i>condensateur</i>   |
| — <i>potentiel</i>   | — <i>équation différentielle ordinaire (EDO)</i> linéaire à coefficients constants, solution homogène et particulière |
| — <i>électromotance électromagnétique induite (é.e.m.i.)</i> |   |
| — <i>loi de Lenz</i>   |   |

**J**USQU'À PRÉSENT, nous avons considéré que les distributions de charge et de courant était mises en place un peu par magie, comme un si une marionnettiste les plaçait au bon endroit sans qu'elles puissent bouger (cf. figure 5.1). Cette approche un peu abstraite est très utile pour comprendre les interactions de base et vérifier la validité des lois. La vérification de ces lois repose néanmoins sur la fabrication de systèmes pour lesquels cette idéalisation est bien approchée.

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser aux mouvements que les sources induisent dans la matière. Ces mouvements de charges seront eux-mêmes à considérer comme des sources dont l'effet apparaît après un certain retard. Les champs créés par ces nouvelles sources viendront s'ajouter aux champs initiaux, créant une nouvelle distribution de champ qui agira sur les charges, créant de nouveaux courants, altérant le champ, etc.

Dans l'approche statique ou quasi-statique, on observait l'état final du système. Dans ce qui suit, nous allons mettre à profit les termes dépendant du temps dans les *équations de Maxwell* pour modéliser l'évolution du système.

**FIGURE 5.1 :** Distribution de charges positives et négatives fixée dans l'espace à des emplacements bien précis par une marionnettiste.



## 5.1 L'auto-induction

Dans les mécanismes d'induction étudiés précédemment, on pouvait considérer que les courants induits étaient faibles et généreraient un *champ électromagnétique* faible par rapport à celui des sources initiales. L'influence allait des sources vers le champ.

Avec l'auto-induction, nous entrons dans un monde plus réaliste, mais également plus complexe. En effet, nous allons consi-



L05P2



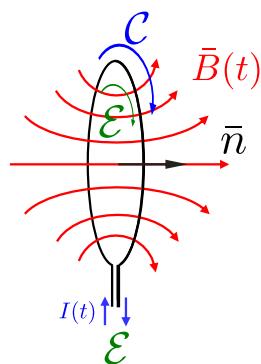
dérer des courants induits suffisamment importants pour qu'on ne puisse pas les négliger par rapport aux courants initiaux. Le champ sera à l'origine de sources et nous aurons donc une influence mutuelle des courants de départ et des courants induits.

### 5.1.1 Introduction

**FIGURE 5.2 :** Joseph Henry (1797–1878), ayant donné son nom à l'unité de mesure de l'inductance.



**FIGURE 5.3 :** Spire alimentée par un courant  $I(t)$  variable, générant un champ  $\bar{B}(t)$  variable induisant une é.e.m. dans la spire.



L'auto-induction est un phénomène électromagnétique prédict, observé et décrit pour la première fois à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle par le scientifique américain Joseph Henry. L'idée très simple d'Henry était de considérer que si une spire est alimentée par un courant variable, celle-ci subit la variation du flux magnétique qu'elle génère elle-même par le passage de ce courant. En vertu de la loi de Faraday (3.112), sous l'effet de cette variation de flux, une é.e.m. induite est produite aux bornes de la spire. C'est le phénomène d'auto-induction.

Le schéma de la figure 5.3 montre une spire alimentée par un courant variable  $I(t)$ . Ce courant génère un champ magnétique également variable  $\bar{B}(t)$ . Le flux magnétique capté par la spire elle-même est donc variable lui aussi. D'après la *loi de Faraday* (3.112), en supposant la spire filiforme, de sorte que

$$\oint (\vec{v}_d \times \bar{B}) \cdot d\vec{\ell} = 0, \quad (5.1)$$

l'é.e.m. tout au long de la spire est donnée par la variation de ce flux magnétique,

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_M}{dt}. \quad (5.2)$$

Une conséquence de ceci est que l'auto-induction obéit à la loi de Lenz. C'est-à-dire que l'é.e.m. associée à la variation de champ magnétique tend à contrer la cause qui l'a produite. Ceci est illustré à la figure 5.4 à l'aide d'un exemple.

### 5.1.2 Illustration

Le phénomène d'auto-induction a beaucoup d'importance en pratique car tout circuit électrique comporte des boucles susceptibles de capter des flux variables et d'engendrer des perturbations de tension dans le circuit. Ceci est illustré à la figure 5.4 avec l'exemple simple d'une spire alimentée par une source de tension continue mise en série avec une résistance. En régime continu, le courant dans le système est stationnaire et le flux magnétique est constant, ce qui correspond à une é.e.m.  $\mathcal{E}$  nulle. La spire se comporte donc comme un simple conducteur que l'on supposera dans la suite sans résistance,  $V = IR$ . Le courant dans le circuit est dès lors donné par la loi d'Ohm  $I = V/R$ .

Supposons maintenant que la tension d'alimentation  $V$  diminue à un instant donné. D'après la loi d'Ohm le courant diminue alors lui aussi. Dans ce cas, le flux magnétique au travers de la spire diminue et une électromotance accompagne cette diminution.

Tenant compte du sens de calcul défini pour la circulation, une é.e.m. induite par la variation de tension s'ajoute à cette tension.

L'électromotance totale du circuit est donc  $V + \mathcal{E}$ , puisque ces électromotances sont mesurées dans le même sens de circulation. Bien qu'on additionne les électromotances, en cas d'augmentation du courant dans le circuit, l'é.e.m. peut être négative, ce qui freine l'augmentation du courant.

L'équation de la maille est donc donnée par

$$V + \mathcal{E} = RI. \quad (5.3)$$

Dans la section suivante, nous allons détailler la forme de  $\mathcal{E} \propto I$  pour introduire la notion d'inductance qui nous permettra de calculer l'évolution du courant dans le circuit.

Comme nous le verrons plus loin, cette modification peut engendrer des comportements très différents de ceux des simples circuits résistifs.

Les comportements nouveaux provoqués par l'auto-induction dans les circuits électriques peuvent être très utiles en pratique. Pour profiter de ces comportements, on intègre dans les circuits des solénoïdes. Ceux-ci jouent le même rôle que la spire unique décrite ci-dessus. En captant le flux magnétique qu'ils créent eux-mêmes, les solénoïdes induisent des é.e.m. variables qui confèrent aux circuits électriques des propriétés que l'on ne pourrait pas obtenir en leur absence. Comme leur principe de fonctionnement est basé sur l'induction électromagnétique, ces solénoïdes sont appelés « *inducteurs* ».

### 5.1.3 Sens de mesure des circulations et courants

Face à l'é.e.m. qui agit en contresens des variations de courant, il est facile de se tromper de signe dans les calculs.

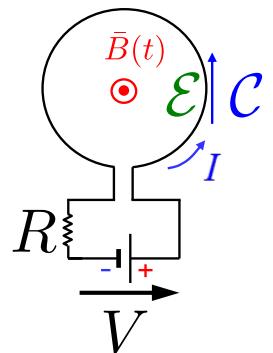
#### Convention d'orientation

On définit tout d'abord un sens de circulation pour la mesure de l'électromotance de la source ou tension de source. Sur cette base, on définit :

- le sens dans lequel on mesure le courant (identique au sens de l'électromotance de la source) ;
- l'orientation de la surface sur laquelle on mesure le flux magnétique dans les spires,  $\Phi_M$  ;
- le sens de circulation lié à la variation du flux magnétique (identique à la circulation de la source).

Il en résulte bien que l'électromotance de la source et l'électromotance induite dans une spire sont mesurées par rapport au même sens de circulation.

**FIGURE 5.4 :** Circuit électrique simple, contenant une boucle de courant. Le sens de circulation est choisi dans le même sens que le courant. L'auto-induction apparaît comme suit : le courant  $I$  crée un champ  $\bar{B}$ . Lorsque  $V$  varie,  $I$  varie en conséquence et donc  $\bar{B}$  également, ce qui indique qu'une é.e.m.  $\mathcal{E}$  est présente dans la spire. Cette é.e.m.  $\mathcal{E}$  s'ajoute à la tension  $V$  et tend à compenser la variation de  $V$  et à limiter la variation de  $I$ .



### 5.1.4 Inductance

Pour caractériser un inducteur donné, il faut connaître l'*é.e.m.* qu'il produit à ses bornes or celle-ci est donnée par la variation du flux magnétique qu'il crée lui-même. Il nous faut donc a priori connaître le champ magnétique généré par l'inducteur pour pouvoir en calculer l'*é.e.m.*, ce qui implique des calculs en général compliqués. Mais du point de vue conceptuel, les choses sont simples car le flux magnétique  $\Phi_M$  est proportionnel au champ magnétique  $\bar{B}$  qui est lui-même proportionnel au courant  $I$  (cf. loi de Biot et Savart ou d'Ampère). Le flux magnétique  $\Phi_M$  est donc simplement proportionnel au courant. Ceci signifie que pour décrire mathématiquement le comportement d'un inducteur on peut toujours introduire un coefficient de proportionnalité  $L$  entre le courant  $I$  et le flux  $\Phi_M$ , soit  $\Phi_M = LI$ . Le coefficient de proportionnalité  $L$  s'appelle l'*« inductance »* de l'inducteur. L'inductance a une valeur qui dépend essentiellement de la géométrie de l'inducteur. Son calcul n'est pas évident car il demande la connaissance du champ magnétique sur toute la surface des spires du solénoïde. Néanmoins, nous ferons plus loin le calcul de l'inductance d'un solénoïde idéal dans lequel le champ peut être considéré comme uniforme mais c'est le seul exemple que nous considérerons. D'autres exemples sont disponibles dans les exercices (notamment, E.5.7, 5.1, et 5.5). Il est facile de vérifier que les unités de l'inductance sont des  $\text{Tm}^2/\text{A}$ .

#### Unités d'inductance

En pratique ces unités sont regroupées dans une unité d'inductance que l'on appelle le « *henry* » en hommage à Joseph Henry qui découvrit le phénomène d'auto-induction. Le symbole de cette unité d'inductance est «  $\text{H}$  ».

#### Inductance : définition et unités

$$|\bar{B}| \propto I \Rightarrow \Phi_M \propto I, \quad \Phi_M \equiv LI, \quad [L] = \frac{\text{Tm}^2}{\text{A}} \equiv \text{H}. \quad (5.4)$$

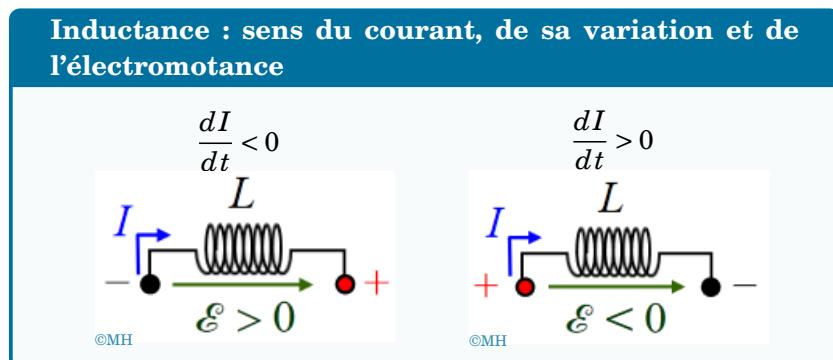
#### Électromotance en fonction du courant

La connaissance de l'inductance  $L$  d'un inducteur nous permet de connaître l'*é.e.m.* qu'il génère en fonction du courant qu'il véhicule. En effet, l'*é.e.m.* induite aux bornes de l'inducteur vaut l'opposé de la dérivée temporelle du flux magnétique,  $\Phi_M$ , c'est-à-dire,  $\mathcal{E} = -d\Phi_M/dt = -LdI/dt$ . En d'autres termes l'*é.e.m.* aux bornes de l'inducteur est proportionnelle à l'opposé de la dérivée du courant qu'il véhicule,

$$\frac{d\Phi_M}{dt} = L \frac{dI}{dt} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt}. \quad (5.5)$$

## Représentation schématique

Dans la pratique, un inducteur est représenté sur les schémas de circuits électriques par un petit solénoïde stylisé tel que ceux qui sont représentés à la figure 5.5. Mathématiquement, l'effet d'un inducteur dans un circuit est décrit au travers de l'é.é.m. qu'il produit, c'est-à-dire  $-LdI/dt$ . Sur le schéma de l'inducteur il est cohérent de représenter conventionnellement l'é.é.m. par une flèche dans le sens du courant, comme sur les schémas de la figure 5.6. Si le courant diminue, l'é.é.m.  $\mathcal{E} = -LdI/dt$  est positive puisque  $dI/dt < 0$ , ce qui correspond au pôle positif (signe +) du côté indiqué par la flèche dans son sens conventionnel (schéma de gauche, Fig. 5.6). Si le courant augmente, l'é.é.m.  $\mathcal{E} = -LdI/dt$  est négative puisque  $dI/dt > 0$ , ce qui correspond dans la convention au pôle positif du côté opposé à celui indiqué par la flèche (schéma de droite, Fig. 5.6).



**FIGURE 5.5 :** Schémas d'inductances sur des circuits électriques.

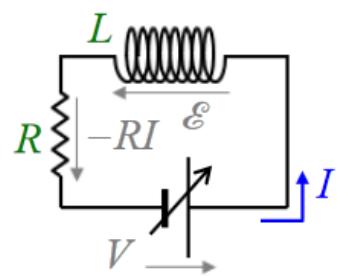
Le schéma de la figure 5.6 illustre cette description conventionnelle de l'inducteur à l'aide d'un circuit élémentaire constitué d'un inducteur, d'une résistance et d'une source de tension variable (la flèche oblique sur le symbole de la source de tension indique qu'il s'agit d'une source de tension variable). Les tensions rencontrées dans le circuit sont la tension source  $V$ , l'é.é.m. de l'inducteur  $\mathcal{E}$  et la chute de tension dans la résistance  $-RI$ . Comme nous l'avons vu plus haut, l'é.é.m. de l'inducteur  $\mathcal{E} = -LdI/dt$  se met dans le sens du courant. En calculant la somme des tensions de chaque élément du circuit, soit  $V + \mathcal{E} - RI$ , on doit trouver zéro (car on parcourt tout le tour du circuit et le point final du parcours est le même que le point initial)<sup>a</sup>. Nous obtenons donc

$$V + \mathcal{E} - RI = 0 \Rightarrow V = RI + L \frac{dI}{dt} \quad (L > 0). \quad (5.6)$$

Ceci suggère que l'équivalent de la loi d'Ohm pour l'inducteur est  $V = LdI/dt$ . Nous aurons l'occasion d'approfondir ce point plus loin.

Remarquez que l'inductance d'un inducteur est une quantité définie positive, c'est-à-dire que dans le lien entre le flux  $\Phi_M$  et le courant  $I$ , on suppose toujours que l'on fait l'intégrale de flux avec le vecteur de surface donné par la règle du *contour orienté* lorsque

**FIGURE 5.6 :** Schéma d'un inducteur réel modélisé par un inducteur idéal, une résistance et une source de tension variable.



<sup>a</sup> Souvenons-nous qu'en dehors des sources d'électromotance, le champ électrique dérive d'un (pseudo) potentiel (presque partout), ce que nous avions expliqué dans la section 2.1.8

la spire est parcourue dans le sens du courant, comme expliqué à la section 5.1.3.

### ■ Exemple

#### 5.1.5 Inductance d'un solénoïde idéalisé

Pour simplifier notre développement, nous devons considérer un solénoïde idéal pour lequel on connaît l'expression du champ magnétique partout dans l'espace. Un résultat de la magnétostatique pour le calcul du champ magnétique dans un solénoïde très long par rapport à son diamètre est que son module  $B = \mu_0 n I$ , où  $n$  est la densité linéique de spires du solénoïde, soit  $n = N/\ell$  où  $N$  est le nombre total de spire du solénoïde et  $\ell$  est sa longueur.

Si le solénoïde est très long par rapport à son diamètre, ce champ est quasiment uniforme sur toute sa longueur et nul à l'extérieur.

En conclusion, le champ à l'intérieur du solénoïde est uniforme et vaut en module  $B = \mu_0 n I$ . Ceci nous permettra de remplacer le courant  $I$  par le module du champ  $B$  dans l'expression de l'énergie magnétique de l'inducteur,

$$I = \frac{B}{\mu_0 n}. \quad (5.7)$$

Pour les besoins du calcul, on remplace dans cette expression du courant la densité linéique de spires par le nombre total de spires du solénoïde  $N$  divisé par la longueur  $\ell$  du solénoïde,

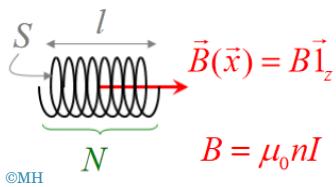
$$n = \frac{N}{\ell} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{Bl}{\mu_0 N}. \quad (5.8)$$

Par définition, l'inductance est le rapport entre le flux magnétique capté par le solénoïde et le courant qui génère ce flux. Le flux capté par une spire est donné par  $BS$  où  $S$  est la section du solénoïde. Le flux capté par l'ensemble des spires est donc  $NBS$ , c'est le flux magnétique total capté par le solénoïde ; c'est bien cette valeur de flux qui est à considérer pour le calcul de l'é.e.m. à partir de la loi de Faraday. En effet, notre but est ici de calculer l'inductance du solénoïde de façon à pouvoir calculer l'é.e.m. induite à ses bornes en raison d'une variation de courant.

La circulation totale d'un solénoïde est la somme des circulations sur les  $N$  spires de ce solénoïde. Sur chaque spire, la loi de Faraday s'applique, avec toujours le même flux  $\Phi_M(t)$ . L'électromotance totale est

$$\mathcal{E} = \sum_{n=1}^N \mathcal{E}_n = \sum_{n=1}^N -\frac{d\Phi_M}{dt} = -N \frac{d\Phi_M}{dt}. \quad (5.9)$$

**FIGURE 5.7 :** Champ  $B$  solénoïdal.



©MH

Finalement, en remplaçant  $B$  par sa valeur en fonction du courant  $I$  nous trouvons l'expression de l'inductance du solénoïde,

$$\begin{aligned} L &= ? \quad \Phi_M = NBS = N\mu_0 nIS \equiv LI \\ L &= \mu_0 N n S = \mu_0 \frac{N^2}{l} S. \end{aligned} \quad (5.10)$$



### 5.1.6 Impédance quasi-statique

L'exemple de calcul à la section 5.1.5 est effectué en régime statique, c'est-à-dire en négligeant le terme  $\epsilon_0 \mu_0 \partial_t \vec{E}$  dans l'équation d'Ampère-Maxwell. L'impédance calculée est donc valable lorsque ce terme est négligeable, ce qui sera le cas si les variations sont suffisamment lentes. Il s'agit du régime quasi-statique.

Lorsque les variations de courant sont plus rapides, par exemple pour des courants alternatifs (voir section 5.2) de haute fréquence, l'inductance varie avec la fréquence. Les deux composantes du champ électromagnétique  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  étant liées linéairement, on conserve une proportionnalité entre  $I$  et  $\Phi_M$ .

### 5.1.7 Circuit RL

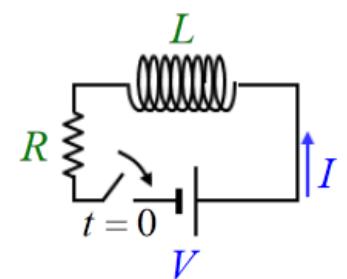
Comme mentionné plus haut, l'inducteur est un dispositif beaucoup utilisé dans les circuits électriques en raison de ses comportements électriques particuliers. Afin de vous familiariser avec ces comportements, nous proposons ici d'étudier un petit circuit tout simple contenant juste une source de tension continue, un inducteur et une résistance. L'étude de ce circuit permet non seulement d'entrevoir l'utilité pratique des inducteurs mais également d'approfondir nos connaissances du phénomène d'auto-induction. C'est un exemple classique de circuit électrique auquel il est souvent fait référence dans les cours de base de physique ou d'électricité. Il est représenté à la figure 5.8. Pour pouvoir l'identifier sans ambiguïté dans un texte, on lui donne le nom de circuit *RL* (notez que le circuit similaire composé d'une résistance et d'un condensateur s'appelle le circuit *RC*).

#### Modélisation du circuit

Nous supposerons que le circuit est initialement ouvert (interrupteur ouvert) de façon à ne véhiculer aucun courant ( $I = 0$ ). Au temps  $t = 0$ , l'interrupteur du circuit est fermé et la tension  $V$  de la source est appliquée au circuit. Nous venons de voir que cette tension est équilibrée par la chute de potentiel dans la résistance  $-RI$  et par l'*electromotance* de l'inducteur  $\mathcal{E}$ , ce qui donne l'équation du circuit

$$V = RI + L \frac{dI}{dt}. \quad (5.11)$$

**FIGURE 5.8 :** Circuit RL passant d'ouvert à fermé à l'instant  $t = 0$ . La circulation du courant  $I$  induit une *é.e.m.* dans l'inducteur par auto-induction. L'effet de cette *é.e.m.* s'atténue progressivement jusqu'à parvenir à la situation de régime, comme représenté à la figure 5.9.



©MH

Cette équation constitue une équation différentielle pour le courant que nous pouvons écrire

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L}I + \frac{V}{L} \quad (5.12)$$

Il s'agit d'une équation différentielle du premier ordre inhomogène (inhomogène car elle comporte des termes de puissance différente en  $I$ , en l'occurrence, deux termes de puissance 1 (les deux premiers) et un terme de puissance nulle (le dernier terme indépendant de  $I$ )).

### Résolution de l'équation du circuit

La théorie de l'analyse mathématique (voir cours d'analyse de 1ère année) montre que la solution générale d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants, non homogène, est donnée par la somme de la solution de l'équation homogène correspondante et d'une solution particulière.

L'équation homogène est très simple. C'est l'expression d'une loi de décroissance naturelle. Elle a pour solution l'exponentielle négative de coefficient  $-R/L$ . Le coefficient  $a$  est la constante d'intégration. On a

$$\begin{cases} \text{sol. homog. : } I = ae^{-\frac{R}{L}t}, \\ \text{sol. part. : } I = \frac{V}{R}. \end{cases} \quad (5.13)$$

Une solution particulière est par exemple la solution de régime stationnaire, soit celle qui répond à la condition  $dI/dt = 0$ . Cette solution est triviale, c'est  $I = V/R$ .

La solution générale de l'équation du circuit est donc

$$I(t) = ae^{-\frac{R}{L}t} + \frac{V}{R}. \quad (5.14)$$

La constante d'intégration  $a$  est déterminée par la condition initiale sur le courant. Comme le courant est nul en  $t = 0$  (puisque le circuit est initialement ouvert), on trouve  $a = -V/R$  et

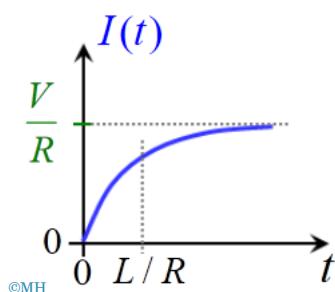
$$I(0) = 0 \Rightarrow a + \frac{V}{R} = 0 \Rightarrow a = -\frac{V}{R}. \quad (5.15)$$

La solution de l'équation différentielle est donc finalement donnée par l'expression

$$I = \frac{V}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right). \quad (5.16)$$

La représentation graphique de la figure 5.9 montre que le courant augmente initialement de façon linéaire et qu'ensuite sa croissance présente une saturation. Le courant tend asymptotiquement vers une constante donnée par le rapport  $V/R$ . Remarquez que cette valeur correspond à la loi d'Ohm que l'on aurait en l'absence de l'inducteur, ce qui montre que l'inducteur ne joue plus aucun rôle lorsque l'on attend suffisamment longtemps.

**FIGURE 5.9 :** Évolution temporelle du courant dans un circuit RL soumis à une tension  $V$  à l'instant  $t = 0$ .



### Temps caractéristique

Pour chiffrer ce que veut dire « attendre assez longtemps », il convient d'analyser la dépendance temporelle du courant. On voit à la figure 5.9 que la dépendance temporelle est déterminée par une exponentielle décroissante de coefficient  $-R/L$ . Ceci signifie qu'au temps  $t = L/R$ , l'exponentielle vaut  $e^{-1} = 0.37$  et le courant a donc augmenté de zéro à  $(1 - e^{-1})V/R = 0.63V/R$ . Le temps  $L/R$  détermine l'échelle de la variation temporelle du courant, c'est la raison pour laquelle on l'appelle le temps caractéristique du circuit.

### Unités

On peut facilement vérifier que les unités du rapport  $L/R$  sont bien des secondes,

$$\begin{cases} [L] = H = \frac{Tm^2}{A} \\ [R] = \Omega = \frac{V}{A} \end{cases} \quad \left[ \frac{L}{R} \right] = \frac{\cancel{A} T m^2}{V \cancel{A}} = \frac{1}{V} \frac{Nm^2}{Am} = \frac{\cancel{C} Js}{\cancel{J} \cancel{C}} = s. \quad (5.17)$$

### Interprétation physique

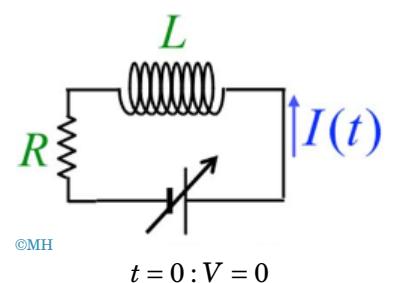
Notez qu'en l'absence d'inducteur, le courant serait établi instantanément à la valeur asymptotique  $I = V/R$  dans le circuit car l'équation du circuit serait simplement la loi de proportionnalité  $V = RI$ . On voit donc que l'inducteur a pour effet de ralentir l'établissement du courant par rapport à la tension. Ceci s'explique par le phénomène d'auto-induction : lorsque la tension est appliquée au circuit, en  $t = 0$ , le courant commence à circuler et donc augmente. Le flux magnétique capté par l'inducteur augmente donc également et il en résulte la génération d'une é.e.m. qui s'oppose à  $V$  aux bornes de l'inducteur de façon à minimiser l'augmentation de courant (cf. loi de Lenz). C'est cette opposition qui explique le retard du courant sur la tension appliquée  $V$ . En régime, lorsque le courant est établi à sa valeur asymptotique, le flux magnétique de l'inducteur ne varie plus et donc son é.e.m. est nulle ce qui explique pourquoi le courant répond alors à la *loi d'Ohm*,  $I(\infty) = V/R$ .

**Remarque** Il est intéressant de noter l'analogie qui existe entre la charge de l'inducteur et la charge du condensateur en *chapitre d'électrostatique*. Le rôle que tient le courant dans la dynamique de l'inducteur est l'analogie du rôle que tient la tension dans le condensateur :  $C^{-1}\dot{V} = I$  &  $L\dot{I} = V$ .

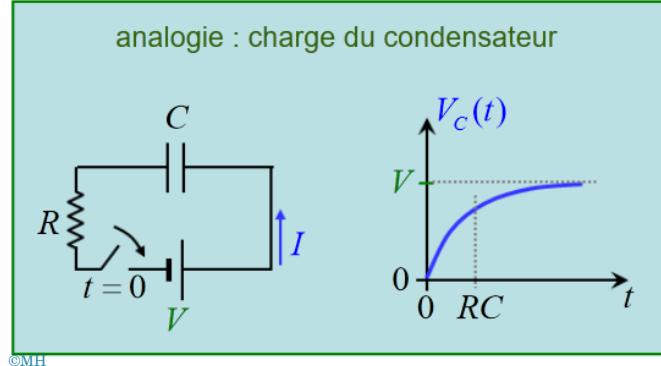
#### 5.1.8 Décharge d'un inducteur

Imaginons un circuit  $RL$  muni d'une source de tension variable comme schématisé à la figure 5.11 (la flèche oblique sur le symbole de la source de tension indique que la tension est variable). Initialement la tension est maintenue stationnaire à une valeur  $V$  donnée. Le circuit fonctionne alors en régime stationnaire, ce qui signifie

**FIGURE 5.11 :** Circuit considéré pour l'étude de la décharge d'un inducteur.



**FIGURE 5.10 :** Analogie entre la charge de l'inducteur et celle du condensateur. Le rôle que tient le courant dans l'inducteur est analogue à celui de la tension dans le condensateur.



que le courant est donné par la loi d'Ohm  $I = V/R$  (car la variation de flux est nulle et donc il en est de même de l'é.e.m.). Au temps  $t = 0$ , on annule instantanément la tension. On suppose alors que la source de tension n'offre aucune résistance au passage du courant. Ceci n'est réaliste que pour un certain type de source comme la dynamo (dans ce cas l'annulation de la tension est simplement obtenue par l'arrêt de la dynamo).

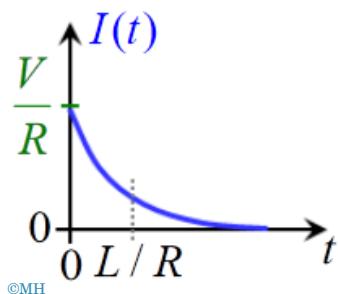
Nous allons nous servir de l'équation du circuit  $RL$  pour décrire son comportement après annulation de la tension, c'est-à-dire, pour  $t > 0$ . Puisque la tension  $V$  est nulle pour  $t > 0$ , nous pouvons écrire

$$V = RI + L \frac{dI}{dt} = 0. \quad (5.18)$$

L'équation différentielle du courant est donc cette fois homogène et sa solution est la simple exponentielle négative de coefficient  $-R/L$ . La constante d'intégration est déterminée par la condition initiale sur le courant. Comme on sait que le courant vaut  $I = V/R$  en  $t = 0$ , on trouve  $I(t) = (V/R) \exp[-(R/L)t]$ ,

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L}I, \quad , \quad I(0) = \frac{V}{R}, \quad \Rightarrow \quad I = \frac{V}{R} e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (5.19)$$

**FIGURE 5.12 :** Évolution du courant lors de la décharge d'un inducteur.



La représentation graphique de la figure 5.12 montre que le courant n'est pas annulé instantanément comme la tension et on peut dire, comme pour la charge de l'inducteur, que le courant est en retard par rapport à la tension. À nouveau, c'est le temps caractéristique  $L/R$  du circuit qui conditionne la vitesse de variation du courant.

### 5.1.9 Énergie stockée dans l'inducteur

La présence d'un courant en l'absence de source de tension signifie que l'inducteur avait emmagasiné de l'énergie avant le temps  $t = 0$ . En effet, le courant qui continue à décroître avec le temps caractéristique  $L/R$  provoque des pertes Joule dans la résistance. Ces pertes sont caractérisées par la puissance  $P_J = RI^2$ . Notez que cette puissance dissipée est dépendante du temps puisque le courant varie de façon exponentielle. L'énergie totale dissipée après le temps  $t = 0$ , soit  $W$ , est donnée par l'intégrale sur le temps de la

puissance Joule depuis 0 jusqu'à l'infini. Par conservation de l'énergie, le calcul de  $W$  nous donne l'énergie totale qui était stockée dans l'inducteur au temps  $t = 0$ ,

$$P_J(t) = RI(t)^2 \Rightarrow W = \int_0^\infty P_J(t)dt. \quad (5.20)$$

Pour calculer l'intégrale de la puissance Joule, il est commode d'utiliser la valeur du produit  $RI$  telle que donnée par l'équation du circuit  $RL$ ,

$$RI = -L \frac{dI}{dt} \quad (5.21)$$

$$RI^2 = -LI \frac{dI}{dt}. \quad (5.22)$$

L'énergie stockée dans l'inducteur est donc donnée par

$$W_m = -L \int_{I(0)}^0 I \frac{dI}{dt} dt = -L \left[ \frac{I^2}{2} \right]_{I(0)}^0 = L \frac{I(0)^2}{2}. \quad (5.23)$$

On peut interpréter l'énergie stockée dans l'inducteur comme provenant de *l'inertie* du courant dû au phénomène d'auto-induction. En d'autres termes, elle ralentit la diminution du courant de façon analogue à la masse qui ralentit la décélération d'un objet massique subissant une force opposée à sa vitesse (l'énergie stockée dans ce cas est l'énergie cinétique de l'objet). En quelque sorte, l'énergie magnétique stockée dans l'inducteur agit sur le circuit comme l'énergie cinétique agit sur une masse.

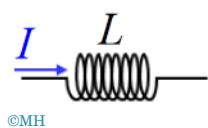
### Énergie stockée dans un inducteur

En conclusion, on peut dire qu'un inducteur d'inductance  $L$  véhiculant un courant  $I$  contient une énergie donnée par  $LI^2/2$ . On appelle  $W_m$  cette énergie car elle est d'origine magnétique. Elle vaut

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2. \quad (5.24)$$

Il est intéressant de noter la similitude de cette expression avec l'énergie électrique stockée dans les condensateurs (voir *cours d'électrostatique*). Les rôles du courant et de l'inductance dans l'inducteur sont joués respectivement par la tension et la capacité dans le condensateur. Notons également que le condensateur stocke des charges immobiles, alors que la bobine ne stocke de l'énergie que si des charges sont en mouvement. On associe donc l'énergie du condensateur à de l'énergie potentielle, celle de l'inductance à de l'énergie cinétique et celle de la résistance à de la dissipation.

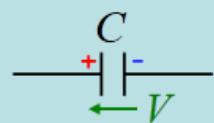
**FIGURE 5.13 :** Énergie stockée dans un inducteur :  $W_m = \frac{1}{2} LI^2$ .



©MH

**FIGURE 5.14 :** Énergie stockée dans un condensateur :  $W_e = \frac{1}{2} CV^2$ .

Rappel :  
énergie électrique



$$W_e = \frac{1}{2} CV^2$$

©MH

### 5.1.10 Énergie du champ magnétique

En exprimant l'énergie magnétique de l'inducteur en termes du module  $B$  du champ magnétique, nous pouvons définir l'énergie associée au champ magnétique, d'une manière similaire à ce qui peut se faire pour l'énergie du condensateur (voir figure 5.13). Nous considérons le cas d'un solénoïde idéalisé.

Comme l'énergie magnétique  $W_m = LI^2/2$  dépend de l'inductance, nous devons calculer la valeur  $L$  du solénoïde idéal en fonction de ces paramètres géométriques. Nous reprenons le résultat de l'équation (5.10) dans l'exemple à la section 5.1.5 :  $L = \mu_0 S N^2 / l$ .

En combinant les valeurs du courant  $I = Bl/(\mu_0 N)$  [voir (5.8)] et de l'inductance  $L$  que nous venons d'obtenir, nous pouvons exprimer l'énergie magnétique  $W_m$  en fonction du module du champ magnétique et des paramètres géométriques du solénoïde. En particulier, après simplification, on voit apparaître en facteur le produit  $Sl$  qui n'est rien d'autre que le volume du solénoïde ou, en d'autres termes, le volume occupé par le champ magnétique (le champ étant nul en dehors du solénoïde idéal).

$$\frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\mu_0 \cancel{\frac{N^2}{l}} S \cancel{\frac{B^2 l^2}{\mu_0 \cancel{N^2}}} = \frac{1}{2} \underbrace{\frac{1}{\mu_0} Sl}_{\text{Volume}} B^2. \quad (5.25)$$

Comme on l'a fait en électrostatique, on peut attribuer l'énergie magnétique au champ magnétique. Si on adopte ce point de vue, on peut définir la densité d'énergie magnétique  $w_m$  portée par le champ magnétique, qui est par définition l'énergie du champ magnétique divisée par le volume qu'occupe ce champ. Il s'agit donc d'une énergie par unité de volume exprimée en  $\text{J/m}^3$ .

#### Densité d'énergie magnétique

$$w_m \equiv \frac{W_m}{\text{Volume}} \Rightarrow w_m = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} \|\vec{B}\|^2 \quad (5.26)$$

La densité d'énergie magnétique portée par le champ magnétique est donc proportionnelle à son module carré. Ceci est analogue au résultat obtenu au chapitre d'électrostatique pour la densité d'énergie du champ électrique.

#### Rappel : densité d'énergie électrique

$$w_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 \|\vec{E}\|^2 \quad (5.27)$$

Ces notions de densité d'énergie des champs électrique et magnétique ont été introduites sur base de l'analyse de dispositifs simples idéalisés (pour le champ électrique, il s'agit du condensateur plan supposé d'extension infinie pour pouvoir négliger les effets de déformation des lignes de champ aux bords des plaques et, pour le champ magnétique il s'agit du solénoïde supposé infiniment long pour pouvoir négliger les effets de déformation des lignes de

champ à ses extrémités) mais on peut montrer que ces notions sont tout à fait générales et peuvent être appliquées à toute configuration de champ. Vous verrez cela en détail au cours d'électricité de deuxième année (IRCI2).

### 5.1.11 Loi courant-tension de l'inducteur

Le rôle de la résistance dans circuit  $RL$  que nous avons étudié jusqu'ici est de représenter l'effet de la résistivité du fil conducteur qui constitue l'inducteur. Sur les schémas électriques on représente parfois explicitement la résistance comme on l'a fait ici car celle-ci est susceptible de jouer un rôle important dans le comportement des circuits électriques (rappelons-nous à titre d'exemple qu'elle détermine, en particulier, le temps caractéristique  $L/R$  du circuit  $RL$  étudié dans les sous-sections 5.1.7 et 5.1.8 ci-dessus). Ce n'est que pour le cas très particulier de matériaux supraconducteurs que la résistance  $R$  de l'inducteur peut être considérée comme nulle en pratique. Néanmoins, dans la pratique les inducteurs sont fabriqués avec des fils de résistivité suffisamment faible pour être négligeables dans la plupart des applications.

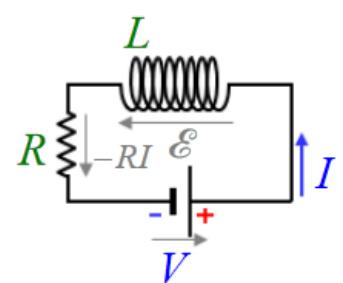
#### Inductance idéale

Pour la description mathématique de la plupart des applications de l'inducteur, il est donc utile de considérer cette limite théorique de résistance nulle. C'est cette limite que nous allons étudier ici. On appelle ici « *inducteur idéal* » un inducteur beaucoup plus long que large (champ uniforme à l'intérieur et nul à l'extérieur) dont le matériau conducteur ne présente pas de résistivité (comme un matériau supraconducteur).

Le schéma, le diagramme et les expressions de la figure 5.15 rappellent les résultats obtenus à la section 5.1.7 pour le circuit  $RL$ . En particulier, on voit que lors de la charge de l'inducteur le courant évolue selon une loi exponentielle avec le temps caractéristique  $L/R$ . Dans la limite de résistance nulle, ce temps caractéristique tend vers l'infini et il est dès lors naturel de se poser la question de savoir ce que devient l'évolution du courant. On pourrait conclure trop vite en disant que, puisque le temps caractéristique de l'évolution est infini, le courant restera stationnaire et conservera donc sa valeur nulle. Mais nous verrons qu'il n'en est rien.

L'inducteur idéal sans résistance est représenté schématiquement à la figure 5.16. Dans cette situation idéalisée, la tension de la source  $V$  est en tout temps exactement équilibrée par l'é.e.m. de l'inducteur, c'est-à-dire,  $V = -\mathcal{E}$  (car la somme des tensions sur un tour complet du circuit ne peut être que nulle  $V + \mathcal{E} = 0$ ). Et puisque c'est la variation du courant qui détermine l'é.e.m. de l'inducteur, ce résultat signifie que le courant dans le circuit varie en tout temps de façon telle que l'é.e.m.  $\mathcal{E}$  de l'inducteur idéal équilibre exactement la tension de la source.

**FIGURE 5.15 :**  $I = \frac{V}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$



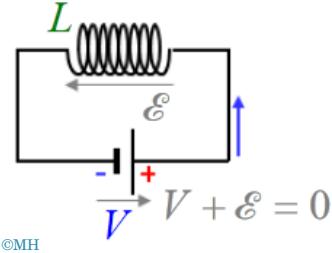
©MH

### Loi courant-tension aux bornes d'un inducteur

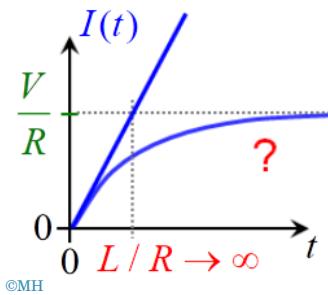
Comme l'é.e.m. est donnée par l'opposé de la dérivée du flux magnétique, soit  $-LdI/dt$ , on trouve

$$V = L \frac{dI}{dt}. \quad (5.28)$$

**FIGURE 5.16 :**  $R \rightarrow 0 \leftarrow V = RI + L \frac{dI}{dt}$



**FIGURE 5.17 :**  $V + E - RI = 0 \Rightarrow V = RI + L \frac{dI}{dt}$



La relation  $V = LdI/dt$  constitue l'équation du circuit muni d'un inducteur et d'une source de tension constante. C'est une équation différentielle pour le courant dont la solution est  $I = (V/L)t + I_0$  où  $I_0$  est la constante d'intégration dont la signification physique s'obtient simplement en remplaçant  $t$  par 0 dans la solution. On voit ainsi qu'il s'agit du courant initial  $I_0 = I(t = 0)$ . Si le courant initial est nul la solution, représentée à la figure 5.17 est donc

$$I = \frac{V}{L}t. \quad (5.29)$$

On ne retrouve donc plus la caractéristique de saturation exponentielle que l'on avait obtenue avec une résistance non nulle, au contraire, cette solution montre que le courant augmente linéairement avec le temps de façon illimitée. Le fait que le courant croisse de façon illimitée s'explique par le fait que l'inducteur ne présente aucune résistivité (autrement dit, rien ne limite le courant dans le système). De même, on pourrait dire que si le courant n'est pas établi directement à sa valeur infinie donnée par la loi d'Ohm  $I = V/R$  où  $R \rightarrow 0$ , c'est parce que l'effet d'induction électromagnétique tarde sa croissance en induisant l'é.e.m. aux bornes de l'inducteur. Puisqu'il n'y a pas de résistance, cette é.e.m. compense exactement la tension de la source  $V$ ; elle est donc constante, ce qui implique que le courant augmente de façon constante ou, en d'autres termes, qu'il adopte une croissance linéaire (dont la dérivée est bien une constante  $dI/dt = V/L$ ).

**Remarque** Notez que cette évolution linéaire du courant peut être obtenue à partir de la loi exponentielle du circuit  $RL$  en passant à la limite de résistance nulle, soit  $R \rightarrow 0$ . Ce calcul de limite est fait en (5.30–5.32) où l'on a considéré  $(R/L)t \rightarrow 0$ . On a simplement adopté une approximation du premier ordre de l'exponentielle, soit  $\exp(\varepsilon) = 1 + \varepsilon$  où  $\varepsilon = -(R/L)t$ .

$$I = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{V}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) \quad (5.30)$$

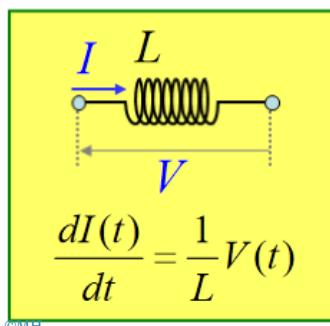
$$= \lim_{R \rightarrow 0} \frac{V}{R} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{R}{L}t \right) \right] \quad (5.31)$$

$$= \lim_{R \rightarrow 0} \frac{V}{R} \left( \frac{R}{L}t \right) = \frac{V}{L}t. \quad (5.32)$$

### Généralisation

La loi qui lie le courant à la tension appliquée aux bornes de l'inducteur,  $V = LdI/dt$ , est immédiatement généralisable au cas où la

**FIGURE 5.18 :** Inducteur idéal, lien entre tension et variation du courant.



tension appliquée est variable dans le temps. En effet, cette loi ne fait qu'exprimer le fait évident que l'é.é.m. de l'inducteur équilibre exactement la tension appliquée à ses bornes en raison de l'absence de résistivité supposée du matériau de l'inducteur, soit  $V + \mathcal{E} = 0$ . Nous pouvons donc établir de façon tout à fait générale que le courant d'un inducteur idéal varie toujours de façon à ce que sa dérivée ait la valeur  $dI/dt = (1/L)V(t)$  où  $V(t)$  est la tension qui lui est appliquée (cf. Fig. 5.18).

### ■ Exemple

#### 5.1.12 Tension sinusoïdale

À titre d'exemple, voyons ce que vaut le courant dans un inducteur alimenté par une tension alternative sinusoïdale  $V = V_m \sin(\omega t)$  où le coefficient  $\omega = 2\pi f$  détermine la fréquence  $f$  de la variation de tension. On utilise la loi courant tension de l'inducteur, qu'on intègre pour obtenir successivement

$$V = V_m \sin(\omega t), \quad (5.33)$$

$$L \frac{dI}{dt} = V_m \sin(\omega t), \quad (5.34)$$

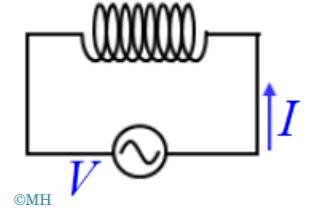
$$\begin{aligned} I(t) &= I_0 + \frac{V_m}{L} \int_0^t \sin(\omega t') dt' = I_0 + \frac{V_m}{\omega L} [1 - \cos(\omega t)] \\ &= I_1 - \frac{V_m}{\omega L} \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (5.35)$$

#### Constante d'intégration indéterminée : une conséquence de l'idéalisation

Le cas de l'inducteur idéal (sans résistivité) pourrait paraître difficile à comprendre si on considère le fait que l'équilibre entre la tension appliquée et l'électromotance est toujours vérifié, soit  $V + \mathcal{E} = 0$ . En effet, si cet équilibre est vérifié l'inducteur peut être vu comme une source de tension qui s'oppose exactement en tout temps à la source de tension qui lui est appliquée et il est donc légitime de se demander pourquoi un courant est établi dans le circuit ; pourquoi n'est-il pas tout simplement nul ? Cette vision des choses est représentée sur le schéma de la figure 5.20. Si le courant est non nul dans le circuit alors que les deux sources de tension s'opposent exactement, c'est parce que la résistance du circuit est nulle. On peut voir les deux sources de tension comme donnant une tension totale nulle ( $V_{\text{tot}} = V + \mathcal{E} = 0$ ) aux bornes de la branche droite du circuit représenté à la figure 5.20. Selon la loi d'Ohm, le courant dans cette branche est donné par  $I = V_{\text{tot}}/R$  où  $R$  est la résistance de la branche. Comme à la fois  $V_{\text{tot}}$  et  $R$  sont nulles, le courant  $I$  est indéterminé, il peut donc bien être différent de zéro,

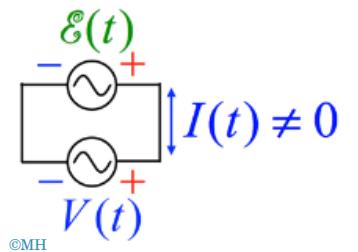
$$I = \frac{V_{\text{tot}}}{R} \rightarrow 0. \quad (5.36)$$

**FIGURE 5.19 :** Réponse en courant d'une bobine soumise à une tension sinusoïdale.



©MH

**FIGURE 5.20 :** Inducteur idéal, de résistivité nulle.



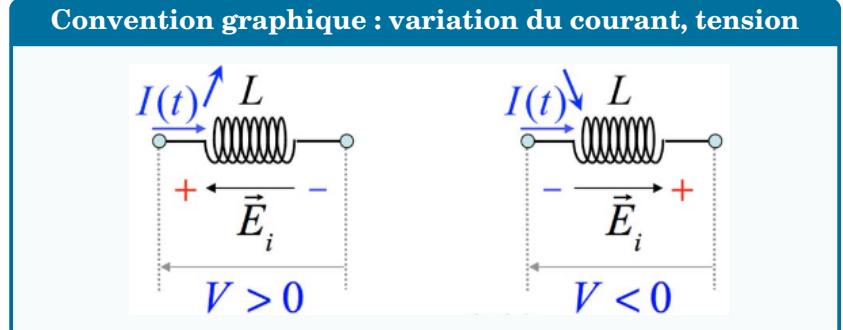
©MH

Dans les faits le courant n'est ni indéterminé, ni aléatoire, puisque l'inducteur impose que sa variation soit donnée par la loi  $dI/dt = V(t)/L$ . Notez aussi que la moindre résistivité non nulle conduit à la disparition du courant continu, qui n'est pas entretenu, au contraire du courant oscillant, proportionnel à  $V_m$ . Ceci se comprendra mieux dans le chapitre 7 sur l'*oscillateur linéaire amorti forcé (OLAF)*.

### 5.1.13 Convention graphique

Sur les schémas de circuits électriques, les inducteurs sont traditionnellement considérés comme des inducteurs idéaux sans résistance (sans dissipation Joule). Quand il est nécessaire de prendre en compte la résistance, celle-ci est indiquée sur les schémas sous forme d'une résistance ajoutée en série avec l'inducteur idéal. Notez que pour faire l'analyse d'un circuit contenant des inducteurs il convient d'adopter une convention graphique en accord avec la loi courant-tension de l'inducteur  $V = LdI/dt$ . Cette convention est très simple dans la mesure où il s'agit de la même que celle adoptée pour la *loi d'Ohm*. Elle est illustrée sur les schémas de la figure 5.21. On y voit que la tension est représentée par une flèche

**FIGURE 5.21 :** Illustration de la tension  $V(t) = L \frac{dI(t)}{dt}$  aux bornes d'une inductance : si  $I$  augmente, l'é.é.m. négative correspond à  $V_L > 0$  et à l'inverse, si  $I$  diminue, l'é.é.m. positive correspond à  $V_L < 0$ .



orientée conventionnellement en opposition au sens du courant. Ceci suggère que le courant descend le potentiel comme dans une résistance où le courant passe toujours d'un potentiel élevé vers un potentiel plus faible. Ici la situation est néanmoins plus complexe : si le courant augmente, l'inducteur se polarise de façon à diminuer le courant, c'est-à-dire que le champ induit est généré dans le sens opposé à celui du courant (loi de Lenz). Le champ induit tire donc les charges positives dans le sens opposé au courant et le pôle positif de l'é.é.m. résultante apparaît du côté d'où le courant vient. On comprend que, dans ce cas, le courant descend bien le potentiel comme dans une résistance. Mais si le courant diminue, le champ induit s'établit dans le sens du courant (loi de Lenz) et dans ce cas le courant remonte le potentiel (voir schéma de droite de la figure 5.21) puisque le pôle positif de l'é.é.m. se trouve du côté où

le courant sort de l'inducteur. Notez que ceci est en accord avec le fait que dans ce cas la tension  $V = LdI/dt$  est négative puisque le courant diminue. Du point de vue graphique, une tension négative signifie que la pointe de la flèche est tournée vers le potentiel inférieur (le courant passe d'un potentiel inférieur vers un potentiel supérieur). Ces deux situations sont schématisées à la figure 5.21, où la convention est que la tension est mesurée en sens inverse au sens du courant, comme déjà décrit en 5.1.3.

**Remarque** Il est intéressant de noter que dans le cas de la diminution de courant, les charges remontent le potentiel, c'est-à-dire qu'elles acquièrent de l'énergie contrairement au cas de la résistance où les charges ne peuvent faire que perdre de l'énergie. Nous aurons l'occasion d'analyser en détail les aspects énergétiques de l'inducteur dans la section 5.2, consacrée aux courants alternatifs.

## 5.2 Courants alternatifs

### 5.2.1 Introduction

La brève étude de l'inducteur que nous avons menée ci-dessus nous conduit naturellement à introduire le thème des courants alternatifs. L'image de la figure 5.22 évoque le principe du transport de l'énergie électrique à haute tension. Comme nous allons le voir ici, le transport de l'électricité dans les réseaux est basé sur l'utilisation de courant alternatif. La raison de ceci est que la transformation de tension indispensable au transport de l'électricité ne pouvait se faire traditionnellement qu'avec des tensions alternatives (grâce à l'électronique de puissance on peut aujourd'hui transformer également des tensions continues, les courants alternatifs ne sont donc formellement plus indispensables). Le transport de l'électricité à la sortie de la centrale électrique se fait après transformation vers une haute tension (typiquement quelques centaines de kV). La distribution vers les utilisateurs d'électricité se fait ensuite par l'intermédiaire de transformations vers des basses tensions (230 V pour la consommation domestique en Europe), comme illustré à la figure 5.23. Le transport de l'électricité sous haute tension est nécessaire pour éviter que les pertes Joules dans les câbles électriques ne soient trop importantes.

Ceci peut être expliqué très simplement à partir de l'analyse du schéma de la figure 5.24 représentant une ligne de transport de l'électricité. Pour une première compréhension, on suppose que la distribution d'énergie électrique se fait en courant continu, ce qui n'est pas le cas des réseaux de distribution dans la pratique. Les câbles de la ligne sont représentés en traits noirs épais. Leur résistance est notée  $R_t$  ( $t$  pour transport). La consommation de l'énergie électrique transportée par les câbles est représentée schématiquement par une résistance de charge  $R_u$  ( $u$  pour utile). Il s'agit de la résistance globale de tous les dispositifs électriques qui utilisent le courant de la ligne, on l'appelle également la « *charge* » de la ligne.

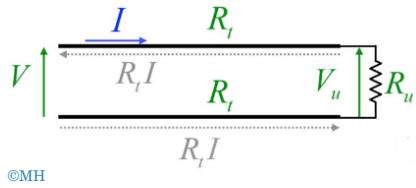


**FIGURE 5.22 :** Illustration de l'utilisation de la haute tension dans les réseaux de distribution électrique.



**FIGURE 5.23 :** Transformateur amenant la distribution à 230 V.

**FIGURE 5.24 :** Schéma de principe d'une ligne de transmission :  $R_t$ , résistance de la ligne de transport ;  $R_u$ , résistance utile ;  $V$ , tension de la centrale ;  $V_u$ , tension utile.



La charge ne voit pas la tension  $V$  générée par la centrale car il y a des chutes de potentiel  $R_t I$  dans les câbles. En exprimant que la tension générée  $V$  est équilibrée par les différences de potentiels aux bornes des trois résistances du circuit que représentent la ligne et la charge, on trouve facilement que la tension « *utile* » ( $V_u$ ) de la charge s'obtient via

$$V = R_t I + V_u + R_t I, \quad (5.37)$$

$$V_u = V - 2R_t I. \quad (5.38)$$

La puissance  $P_u$  consommée par la charge est donnée par le produit  $V_u I = VI - 2R_t I^2$ ,

$$P_u = V_u I = \overset{P}{\underset{\uparrow}{VI}} - 2R_t I^2, \quad (5.39)$$

où le produit  $VI$  est la puissance  $P$  fournie par la centrale.

On arrive ainsi au résultat attendu qui dit que la puissance utile consommée par la charge est égale à la puissance fournie par la centrale diminuée de la puissance de dissipation Joule dans les câbles de transport.

Avec la connaissance de  $P_u$  et  $P$ , on peut calculer le rendement  $\eta_t$  du transport de l'électricité de la centrale jusqu'à la charge. Ce rendement est, par définition, le rapport entre la puissance utile consommée et la puissance fournie (la différence entre les deux étant due aux pertes Joule dans les câbles de transport). On trouve :

$$\eta_t = \frac{P_u}{P} = \frac{P - 2R_t I^2}{P} = 1 - \frac{2R_t I^2}{P} \quad (5.40)$$

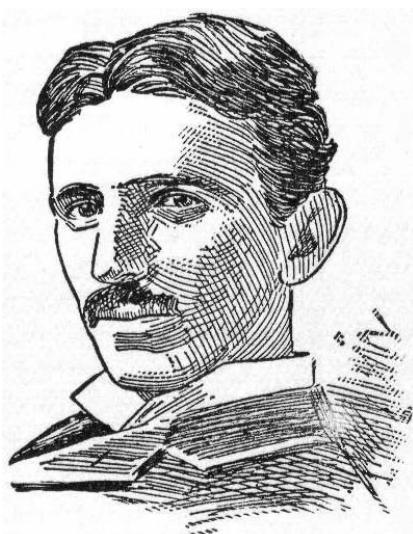
On constate donc que le rendement augmente si le courant est diminué dans la ligne de transport. Remarquez que le courant intervient au carré dans l'expression du rendement, ce qui signifie en pratique que sa dépendance en le courant est très sensible. En conséquence, on recherche en pratique à avoir le courant  $I$  aussi faible que possible pour le transport de l'électricité. Pour pouvoir diminuer le courant sans modifier la puissance utile consommée, il faut augmenter la tension  $V$  ce qui indique qu'on a bien besoin d'un transformateur.

C'est donc la raison pour laquelle le transport de l'électricité se fait sous haute tension. La tension peut être augmentée pour le transport et ensuite diminuée grâce au transformateur dont nous allons voir le principe à la section 5.2.2.

### ■ Un peu d'histoire...

L'avènement de la distribution d'électricité et des courants alternatifs dans la société est pour une bonne part dû à Nicolas Tesla qui au cours de ses recherches sur la génération et l'application du courant alternatif en a très vite compris l'intérêt pratique. Tesla (fi-

**FIGURE 5.25 :** Nicolas Tesla (1856–1943).



gure 5.25) était à l'époque engagé par George Westinghouse (fondateur de la compagnie américaine Westinghouse) qui avait tout misé sur le courant alternatif alors qu'Edison (figure 5.26) et ses associés croyaient eux au courant continu. Il faut dire qu'après l'invention de l'ampoule électrique d'Edison, les habitations étaient équipées de générateurs individuels de tension continue de 110 V et il était difficile d'entrevoir l'utilité du transport de l'électricité. Mais, grâce à Tesla, la Westinghouse maîtrisait parfaitement le courant alternatif qui s'est vite avéré beaucoup plus pratique et souple d'utilisation que le courant continu. D'une part, la génération de courant alternatif était naturelle avec l'alternateur et, d'autre part, le transport du courant alternatif était possible grâce aux transformateurs qui permettaient de limiter les pertes Joule dans les câbles grâce aux hautes tensions. De plus, la plupart des applications électromécaniques apparaissaient beaucoup plus naturelles en courant alternatif notamment grâce au moteur à courant alternatif développé par Tesla. C'est donc finalement la solution du courant alternatif qui s'est imposée (pour le malheur d'Edison qui a bien dû se rallier aux partisans du courant alternatif après leur avoir causé les pires ennuis).




---

Vu l'importance des courants alternatifs en pratique, il est utile d'étudier le comportement des éléments de base des circuits électriques lorsqu'ils sont alimentés par une tension alternative. Après le transformateur nous allons donc considérer aux sections 5.2.4, 5.2.5 et 5.2.6, le comportement des résistances, des inducteurs et des condensateurs alimentés en tension alternative.

## 5.2.2 Le transformateur

Maintenant que nous connaissons le comportement de l'inducteur idéal, il nous est facile de comprendre le fonctionnement du transformateur de tension alternative. Le transformateur est un dispositif d'une grande utilité pratique car il permet de passer d'un niveau de tension à un autre en fonction des besoins. Nous avons déjà discuté de l'exemple du transport de l'électricité qui exige de très hautes tensions. À une échelle plus proche de nous il y a une multitude d'autres exemples. La plupart des appareils électriques doivent être alimentés avec une tension spécifique qui n'est pas nécessairement égale à la tension de distribution. Pour pouvoir malgré tout utiliser la tension du réseau de distribution, on doit donc avoir recours à des transformateurs.

### Variation de flux et tension

Le fonctionnement du transformateur est basé sur la notion d'induction électromagnétique, qui est très similaire à la notion d'auto-induction, mais avec deux spires différentes dans deux circuits électriques différents. Pour provoquer l'induction, on génère

**FIGURE 5.26 :** Thomas Edison (1847–1931).



L05P4



un champ magnétique variable grâce à un inducteur que l'on va considérer ici comme idéal (sans résistance). La figure ci-contre montre un inducteur constitué d'une spire unique. Si la spire est connectée à une source de tension alternative (comme la tension du réseau de distribution d'électricité), elle génère un champ magnétique variable dont le flux au travers de la spire elle-même vaut  $LI$ , où  $I$  est le courant parcourant la spire et  $L$  est son inductance,

$$\Phi_M(t) = \int_{S_C} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} \equiv LI(t). \quad (5.41)$$

Or, la loi courant-tension de l'inducteur  $V = LdI/dt$  indique, après intégration (voir sous-section 5.1.11), que le courant dans l'inducteur idéal alimenté par la tension alternative  $V(t) = V_m \sin(\omega t)$  est donné par l'expression

$$I(t) = -\frac{1}{\omega L} V_m \cos(\omega t). \quad (5.42)$$

En substituant cette expression du courant dans l'expression du flux magnétique  $\Phi_M = LI$  on trouve

$$\Phi_M = -\frac{1}{\omega} V_m \cos(\omega t). \quad (5.43)$$

Remarquez qu'en fait ce résultat ne nécessite pas le calcul du courant  $I$  comme on vient de le faire, puisqu'il suffit d'exprimer l'équilibre entre l'é.é.m. de l'inducteur et la tension de la source pour voir que le flux magnétique capté par la spire est donné par l'intégrale temporelle de la tension de la source, ce qui donne effectivement  $\Phi_M = -(1/\omega)V_m \cos(\omega t)$ ,

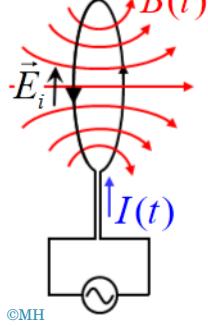
$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_M}{dt} = -V(t). \quad (5.44)$$

Dans le transformateur, le flux magnétique variable généré par l'inducteur est mis à profit pour créer une é.é.m. dans un deuxième circuit en boucle que l'on appelle « *circuit secondaire* » ou, tout simplement, le « *secondaire* » (l'inducteur est quant à lui appelé le « *circuit primaire* »). Le circuit secondaire est représenté à la figure 5.28 par une spire unique. Cette spire a les mêmes dimensions que la spire du circuit primaire et est placée volontairement tout près de ce dernier de façon à capter le même flux magnétique  $\Phi_M$ . Si c'est effectivement le cas, l'é.é.m. induite aux bornes de la spire du secondaire est donnée par l'opposé de la dérivée du flux magnétique  $\Phi_M$ . Si on appelle  $\mathcal{E}_s$  cette é.é.m. secondaire, on peut écrire  $\mathcal{E}_s = -d\Phi_M/dt$ . Or,  $d\Phi_M/dt$  vaut précisément la tension  $V$  appliquée au primaire. On a donc

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_s &= \mathcal{E}_p &= \oint_C \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_M}{dt} = -V(t), \\ &&= -V_m \sin(\omega t). \end{aligned} \quad (5.45)$$

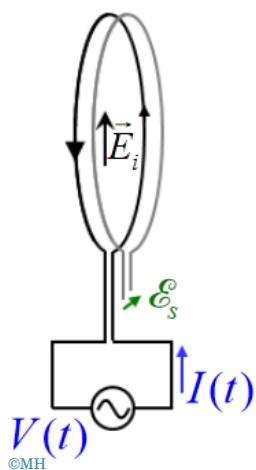
### ■ Exemple

**FIGURE 5.27 :**  $V(t) = V_m \sin(\omega t)$



©MH

**FIGURE 5.28 :** Spire réceptrice (secondaire) captant le flux produit par la spire émettrice ( primaire) sous tension  $V$ .



©MH

### Circuit secondaire à spires multiples

Si on dispose, comme à la figure 5.29, un circuit secondaire de deux spires à côté du circuit primaire, l'*é.e.m.* secondaire sera donnée par l'intégrale de circulation du champ induit sur deux tours de spire. C'est la signification de l'inscription  $2C$  sur l'intégrale de circulation ci-contre. Il en résulte que cette intégrale vaut deux fois l'intégrale de circulation sur un seul tour de spire et on peut conclure que l'*é.e.m.* du secondaire sera deux fois plus importante que dans le cas du secondaire à spire unique. Comme discuté plus haut pour le calcul de l'inductance du solénoïde (voir section 5.1.10), ce résultat est conforme à l'idée que les deux spires du « secondaire » sont connectées en série et que, dès lors, leur *é.e.m.* se somment pour donner le facteur 2,

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_s &= \oint_{2C} \vec{E}_i \cdot d\vec{l}, \\ &= -2 \frac{d\Phi_M}{dt}.\end{aligned}\quad (5.46)$$

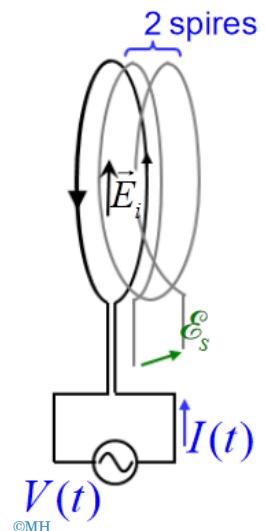
On peut interpréter ce résultat en disant que le flux magnétique total capté par les deux spires du secondaire vaut le double de celui capté par une seule spire. La variation de flux total est donc aussi doublée et en conséquence l'*é.e.m.* est doublée par rapport à ce qu'elle était avec le secondaire à spire unique. En conclusion, l'*é.e.m.* du « secondaire » vaut en valeur absolue le double de la tension appliquée au « primaire ». On a donc réalisé un dispositif qui transforme la tension appliquée  $V$  en une tension deux fois plus grande. C'est le principe du transformateur de tension,

$$\mathcal{E}_s = -2V_m \sin(\omega t), \quad (5.47)$$

$$\hookrightarrow |\mathcal{E}_s| = 2|V|. \quad (5.48)$$

On peut résumer la situation en disant que la transformation de la tension peut être réalisée grâce à la possibilité de capter plusieurs fois un même flux magnétique en utilisant plusieurs spires disposées en série.

**FIGURE 5.29 :** Connexion en série de deux spires réceptrices captant chacune le flux de la spire émettrice sous tension  $V$ .

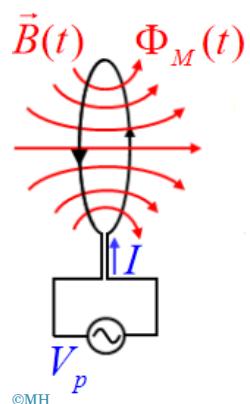


### ■ Exemple

### Circuit primaire à spires multiples

On peut naturellement augmenter le rapport de transformation de la tension en multipliant le nombre de spires du secondaire. Si on choisit  $N$  spires, on a un facteur d'augmentation de la tension qui vaut simplement  $N$ . Mais, en pratique, on ne se contente pas d'obtenir un simple multiple de la tension initiale. Un transformateur est un dispositif qui permet la transformation de tension

**FIGURE 5.30 :** Spires primaires multiples sous tension  $V$ .

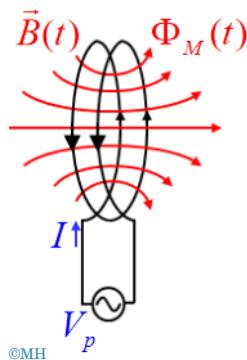


avec n'importe quel rapport de transformation. Pour réaliser cela en pratique, on utilise des circuits primaires et secondaires à grand nombre de spires. Pour en comprendre le principe, nous reprenons à la figure 5.30 la situation de la spire primaire unique alimentée par la tension alternative primaire  $V_p$ . Pour ce cas, l'é.e.m. du primaire est donnée par l'opposé de la dérivée du flux magnétique et, d'autre part, on sait que celle-ci doit équilibrer à tout moment la tension de la source ( $V_p + \mathcal{E}_p = 0$ ),

$$\begin{cases} \mathcal{E}_p = \oint_C \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_M}{dt}, \\ \mathcal{E}_p = -V_p \longrightarrow \text{Cette condition d'équilibre des tensions fixe la variation du flux magnétique à la valeur } V_p \end{cases} \quad (5.49)$$

$$\rightarrow \frac{d\Phi_M}{dt} = V_p. \quad (5.50)$$

**FIGURE 5.31 :** Spires primaires connectées en série sous tension  $V$ .



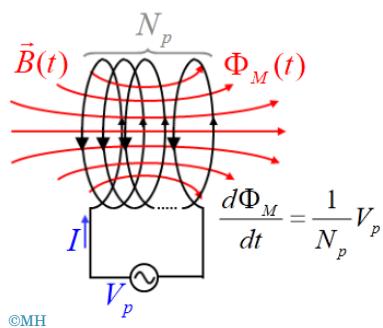
Considérons maintenant le cas d'un primaire de deux spires représenté schématiquement à la figure 5.31. Comme ces deux spires sont montées en série, l'é.e.m. est donnée par deux fois l'opposé de la dérivée du flux magnétique capté par une spire unique. Mais, de même que ci-dessus, cette é.e.m. doit équilibrer à tout moment la tension de la source, soit  $V_p + E_p = 0$ ,

$$\begin{cases} \mathcal{E}_p = \oint_{2C} \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -2 \frac{d\Phi_M}{dt}, \\ \mathcal{E}_p = -V_p \longrightarrow \text{Cette condition d'équilibre des tensions fixe la variation du flux magnétique à la valeur } \frac{1}{2}V_p \end{cases} \quad (5.51)$$

$$\rightarrow \frac{d\Phi_M}{dt} = \frac{1}{2}V_p. \quad (5.52)$$

En résumé, la variation de flux magnétique est deux fois plus faible que dans le cas d'une spire unique car cette variation équilibre toujours la même tension  $V_p$  alors qu'elle est captée deux fois en série par le circuit primaire.

**FIGURE 5.32 :** Source de tension  $V$  connectée à  $N_p$  spires primaires connectées en série.



### 5.2.3 Circuits primaire et secondaire à spires multiples

Le raisonnement que nous venons de faire se généralise à un nombre quelconque  $N_p$  de spires primaires. Dans ce cas le flux est capté  $N_p$  fois en série et, comme l'é.e.m. résultante équilibre toujours la même tension  $V_p$ , la dérivée temporelle du flux vaut  $d\Phi_M/dt = V_p/N_p$ . Ce cas est illustré à la figure 5.32.

Considérons maintenant un secondaire de  $N_s$  spires qui captent en série tout le flux généré par le primaire de  $N_p$  spires. Ce cas est illustré à la figure 5.33. L'é.e.m. induite aux bornes du secondaire est donnée par la circulation du champ induit sur les  $N_s$  spires, ce qui donne  $\mathcal{E}_s = -N_s d\Phi_M/dt$  où  $d\Phi_M/dt = V_p/N_p$ . De ce fait, si on définit la tension aux bornes du secondaire comme étant  $V_s = -\mathcal{E}_s$ ,

### Tensions primaire et secondaire d'un transformateur

$$\mathcal{E}_s = \oint_{N_s C} \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -N_s \frac{d\Phi_M}{dt}, \quad (5.53)$$

$$\hookrightarrow V_s = \frac{N_s}{N_p} V_p. \quad (5.54)$$

On voit donc que le facteur de transformation d'un transformateur est donné par le rapport du nombre de spires du secondaire et du primaire. Tous les rapports de transformation sont donc en principe possibles (sauf les rapports de valeur non rationnelle, ce qui n'est pas très restrictif...).

### Transformateur à noyau ferromagnétique

C'est par fabrication que l'on détermine le rapport de transformation. En pratique, le transformateur est constitué de deux solénoides reliés par un noyau ferromagnétique. Le but de ce noyau est simplement de guider les lignes de champ magnétique de façon à ce que le secondaire capte le plus possible le flux magnétique généré par le primaire. L'augmentation du champ magnétique due au noyau ferromagnétique ne joue aucun rôle dans le rapport de transformation.

### Importance des transformateurs

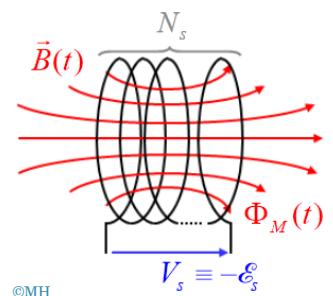
Comme exprimé dans l'introduction, c'est grâce au transformateur que le transport de l'électricité peut se faire à grande échelle. C'est donc grâce à la génération de tension alternative par des alternateurs que l'on peut disposer de l'électricité dans notre environnement quotidien. Les circuits en tension alternative prennent donc une importance considérable dans l'étude de l'électricité. Pour cette raison, nous allons brièvement étudier dans les sections suivantes le comportement des éléments de base des circuits lorsqu'ils sont soumis à une tension alternative. Cela nous permettra de nous familiariser avec la description des systèmes oscillants qui seront vus de façon plus approfondie dans la deuxième partie du cours consacré aux phénomènes oscillatoires et aux ondes.

#### 5.2.4 Résistances en courant alternatif

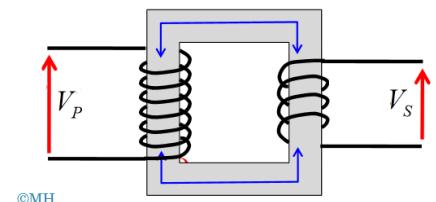
Le comportement de la résistance alimentée en tension alternative est extrêmement simple puisque la loi d'Ohm dit que le courant est directement proportionnel à la tension. Nous profiterons ici de la simplicité de ce cas pour introduire les différentes notions de base ainsi que la terminologie associées aux courants alternatifs.

Le schéma de la figure 5.35 montre une résistance aux bornes de laquelle est branchée une source de tension alternative,  $V(t) = V_m \sin(\omega t)$ . D'après la loi d'Ohm, cette tension provoque le courant

**FIGURE 5.33 :** Ensemble de  $N_s$  spires secondaires générant une é.e.m.  $\mathcal{E}$ .



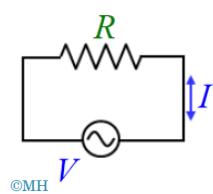
**FIGURE 5.34 :** Transformateur à noyau ferromagnétique.



L05P5



**FIGURE 5.35 :** Résistance sur une source de tension alternative.



$I(t) = (V_m/R)\sin(\omega t)$ . L'amplitude des variations du courant vaut donc  $I_m = V_m/R$ , ce qui reproduit la forme classique de la loi d'Ohm,

$$V = RI, \quad (5.55)$$

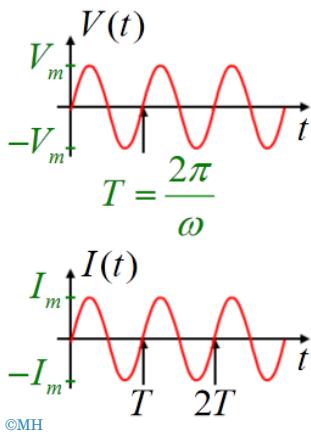
$$V(t) = V_m \sin(\omega t), \quad (5.56)$$

$$\hookrightarrow I(t) = \frac{V_m}{R} \sin(\omega t) = I_m \sin(\omega t). \quad (5.57)$$

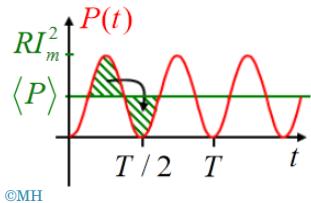
La variation sinusoïdale de la tension est caractérisée par le coefficient  $\omega$  que l'on appelle la pulsation ou la fréquence angulaire. La pulsation  $\omega$  détermine la période  $T$  de la variation de tension (c'est-à-dire le temps qui s'écoule entre deux maxima). Celle-ci vaut  $T = 2\pi/\omega$ , ce qui se comprend immédiatement en voyant que  $\sin[\omega(t+T)] = \sin(\omega t)$ . L'inverse de la période s'appelle la fréquence,  $f = 1/T$ . La fréquence vaut donc la pulsation divisée par  $2\pi$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pulsation : } \omega \\ \text{période : } T = \frac{2\pi}{\omega} \\ \text{fréquence : } f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \end{array} \right. \quad (5.58)$$

**FIGURE 5.36 :** Évolution de la tension  $V$  et du courant  $I$  du montage de la figure 5.35.



**FIGURE 5.37 :** Puissance  $P$  dissipée dans le montage de la figure 5.35. Illustration de  $\sin^2(\omega t) = \frac{1-\cos(2\omega t)}{2}$



La tension et le courant sont représentés graphiquement à la figure 5.36. Il n'y a pas grand-chose à dire si ce n'est que le courant et la tension ont exactement les mêmes variations : ils présentent leurs extrema et leurs zéros aux mêmes instants  $t$ . On verra que pour l'inducteur et le condensateur ceci n'est plus vrai.

### Puissance dissipée et valeurs efficaces

La puissance dissipée dans la résistance  $P = VI = RI^2$  est représentée graphiquement à la figure 5.37. Puisque le courant varie en  $\sin(\omega t)$ , la puissance varie en  $\sin^2(\omega t)$ , soit  $P = RI_m^2 \sin^2(\omega t)$  où  $I_m$  est la valeur maximale que prend le courant dans ses variations, c'est l'*« amplitude »* du courant déjà calculée plus haut ( $V_m$  étant l'*« amplitude »* de la tension),

$$P = IV = I_m V_m \sin^2(\omega t) = RI_m^2 \sin^2(\omega t). \quad (5.59)$$

En utilisant la formule de l'arc double du cosinus ( $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta$ ), on peut dire que la variation de la puissance est en  $[1 - \cos(2\omega t)]$ , ce qui montre que la puissance dissipée évolue périodiquement avec la pulsation  $2\omega$ , c'est-à-dire, avec une période deux fois plus courte que la période  $T$  de la source de tension. En général les variations périodiques de puissance sont beaucoup trop rapides pour être considérées en pratique et on ne s'intéresse donc pas à la puissance dissipée à un instant  $t$  bien précis. Dans ce cas, seule la puissance moyenne dissipée est une grandeur pertinente ; on la note  $\langle P \rangle$  où les crochets désignent que l'on a pris la moyenne dans le temps. La moyenne de la puissance s'obtient en calculant la moyenne de la fonction  $\sin^2(\omega t)$ . Comme indiqué ci-dessus, la formule de l'arc double du cosinus nous montre que cette moyenne

vaut  $1/2$  puisque la moyenne du cosinus est nulle. Ce résultat mathématique apparaît évident sur le graphique de la figure 5.37 où l'on voit que les deux aires hachurées sont égales, ce qui montre effectivement que la moyenne de  $P(t)$  vaut bien  $(1/2)RI_m^2$  (toutes les aires se trouvant au-dessus de la valeur  $(1/2)RI_m^2$  compensent exactement les aires se trouvant sous cette valeur).

L'expression de la puissance moyenne dissipée dans la résistance est donc  $\langle P \rangle = (1/2)RI_m^2$ . On aurait donc deux formules différentes liant  $P$ ,  $R$  et  $I$ , en régime continu et alternatif. En pratique, on préfère conserver une seule expression. Pour cela, on préfère donner à la puissance moyenne sa forme habituelle obtenue pour les tensions continues, soit  $P = RI^2$ . Ceci se fait artificiellement en introduisant la notion de « *courant efficace* ». Par définition, le courant efficace est donné par la relation  $I_{eff} = I_m/\sqrt{2}$  de sorte que,

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2}RI_m^2 \quad \xrightarrow{I_{eff} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}} \quad \langle P \rangle = RI_{eff}^2. \quad (5.60)$$

**Remarque** Notez que le courant efficace vaut la racine carrée de la moyenne du carré de l'intensité, soit  $I_{eff} = \sqrt{\langle I^2 \rangle}$ . Ceci est facile à vérifier en se rappelant que la moyenne de la fonction  $\sin^2(\omega t)$  vaut  $1/2$ , ce qui permet effectivement d'écrire  $\langle I^2 \rangle = \frac{1}{2}I_m^2 = I_{eff}^2$ . La relation  $I_{eff} = \sqrt{\langle I^2 \rangle}$  est une définition plus rigoureuse et plus générale du courant efficace qui est utile lorsque le courant ne varie pas sinusoïdalement. Vous rencontrerez de telles situations dans les cours d'électricité et d'électronique des années supérieures.

En pratique, on chiffre le courant dans les systèmes électriques en termes de courant efficace  $I_{eff}$  plutôt qu'en termes de courant maximal  $I_m$ . Lorsque l'on dit, par exemple, qu'un circuit véhicule un courant de 1 ampère « *efficace* », cela signifie que le courant alternatif a des variations dont l'amplitude maximale  $I_m$  vaut  $\sqrt{2}$  ampère.

On définit de la même manière la tension efficace pour caractériser une différence de potentiel alternative. La tension efficace est donc la tension maximale divisée par  $\sqrt{2}$ , soit  $V_{eff} = V_m/\sqrt{2}$ , de sorte que la formule de la puissance moyenne dissipée en termes de tension prennent la même forme qu'en régime continu, soit

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \frac{V_m^2}{R}, \quad \xrightarrow{V_{eff} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}}, \quad \langle P \rangle = \frac{V_{eff}^2}{R}. \quad (5.61)$$

Notez que la loi d'Ohm en termes de grandeurs efficaces conserve sa formulation classique,  $V_{eff} = RI_{eff}$ . En effet, la loi d'Ohm s'écrit  $V(t) = RI(t)$ , ou encore  $V_m \sin \omega t = RI_m \sin \omega t$  de sorte que  $V_m = RI_m$ , ce qui, en divisant membre à membre par  $\sqrt{2}$ , donne finalement  $V_{eff} = RI_{eff}$ . En conclusion, en chiffrant le courant et la tension en valeurs « *efficaces* », les trois expressions classiques de la puissance moyenne dissipée prennent la même forme qu'en courant continu,

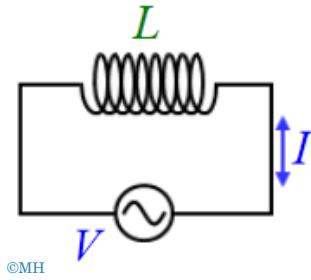
$$\langle P \rangle = RI_{eff}^2 = V_{eff}^2/R = I_{eff}V_{eff}. \quad (5.62)$$

C'est dans ces expressions que se situe l'intérêt de la notion de valeur efficace des courants et des tensions,

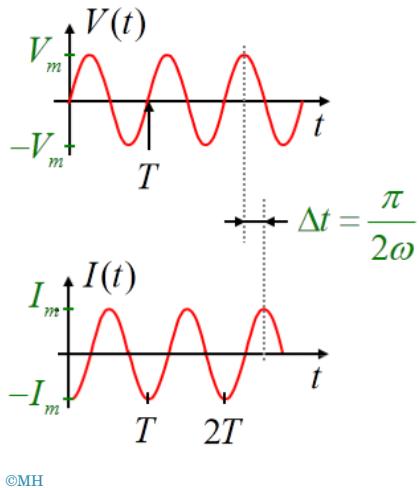
$$I_{eff} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}, \quad V_{eff} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}. \quad (5.63)$$

### 5.2.5 Inducteurs en courant alternatif

**FIGURE 5.38 :** Inducteur  $L$  sous tension oscillante  $V$ .



**FIGURE 5.39 :** Évolution de la tension et du courant aux bornes d'une inductance et retard  $\Delta t$  entre ces deux grandeurs.



Le montage étudié est représenté à la figure 5.38. On considérera que l'inducteur en courant alternatif est régi par la loi d'induction pour l'inducteur idéal (on suppose l'inducteur sans résistance électrique). Dans ce cas, si la tension est sinusoïdale d'amplitude  $V_m$  et de pulsation  $\omega$ , le courant est donné par  $I(t) = -V_m/(\omega L) \cos(\omega t)$ , comme le montre le développement

$$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{L}V, \quad (5.64)$$

$$V = V_m \sin(\omega t), \quad (5.65)$$

$$\rightarrow I(t) = -\frac{V_m}{\omega L} \cos(\omega t). \quad (5.66)$$

En définissant l'amplitude du courant  $I_m = V_m/(\omega L)$  et en utilisant la relation trigonométrique de base  $\cos(\omega t) = -\sin(\omega t - \pi/2)$ , on peut écrire  $I(t) = I_m \sin(\omega t - \pi/2)$ , ce qui montre que la variation périodique de courant est en retard sur la variation périodique de la tension. Notez que ce résultat est en accord avec ce que l'on avait vu plus haut concernant le retard du courant sur la tension dans un inducteur (le courant subit une forme d'*inertie*, voir section 5.1.8). On a

$$I_m = \frac{V_m}{\omega L} \Rightarrow I(t) = I_m \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}). \quad (5.67)$$

La tension et le courant sont représentés graphiquement à la figure 5.39. On voit que le courant est en retard sur la tension d'un quart de période  $T$ , correspondant à la différence de  $\pi/2$  des arguments des sinus de la tension et du courant ( $V(t) = V_m \sin(\omega t)$  et  $I(t) = I_m \sin(\omega t - \pi/2)$ ).

#### Déphasage

Pour voir ce qu'implique le déphasage de  $\pi/2$  en termes de retard temporel du courant par rapport à la tension, il suffit de mettre la pulsation  $\omega$  en évidence dans l'argument du sinus,

$$\begin{aligned} I(t) &= I_m \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) \\ &= I_m \sin\left[\omega(t - \frac{\pi}{2\omega})\right] \\ &= I_m \sin[\omega(t - \Delta t)], \end{aligned} \quad (5.68)$$

$$\Delta t = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{T}{4}, \quad (5.69)$$

où  $\Delta t$  est le retard du courant par rapport à la tension.

Sachant que la période  $T = 2\pi/\omega$ , on constate que le retard  $\Delta t$  vaut bien un quart de période. On dit dans ce cas que le courant est en « *quadrature de phase* » avec la tension. Cette terminologie s'explique par le fait que l'argument du sinus des variations de tension et de courant s'appelle la « *phase* ». La phase de la tension que l'on peut noter  $\varphi_V$  vaut  $\omega t$  alors que la phase du courant vaut  $\varphi_I = \omega t - \pi/2$ <sup>a</sup>. On peut ainsi également dire que le courant est « *déphasé* » par rapport à la tension ou encore qu'il subit un « *retard de phase* » par rapport à la tension,

$$\begin{cases} \text{phase de } V : & \varphi_V = \omega t, \\ \text{phase de } I : & \varphi_I = \omega t - \frac{\pi}{2} = \varphi_V - \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (5.70)$$

Comme indiqué en (5.71), le déphasage  $\Delta\varphi$  du courant par rapport à la tension est de  $-\pi/2$ , le signe – indiquant que ce déphasage correspond à un retard du courant sur la tension et non d'une avance

$$\Delta\varphi = -\frac{\pi}{2}. \quad (5.71)$$

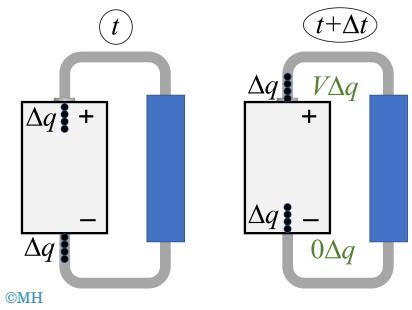
a On distingue la phase, par exemple  $\omega t - \pi/2$  de la phase à l'origine,  $-\pi/2$ , dans cet exemple.

### Puissance fournie par la source

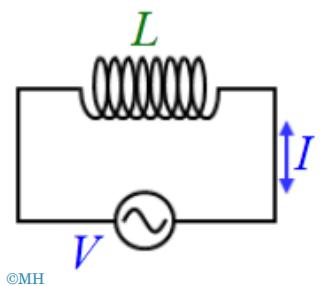
La puissance  $P$  fournie au circuit par la source est donnée par le produit  $IV$ . Il est essentiel de garder à l'esprit la signification physique de cette expression déjà rencontrée en électrostatique. À cette fin, considérons le schéma de la figure 5.40 qui représente une source de tension (rectangle blanc) connectée à un élément de circuit quelconque figuré par le rectangle bleu. Ce rectangle bleu représente indifféremment soit une résistance, soit un condensateur, soit un inducteur ou même un circuit électrique quelconque contenant de multiples éléments. Le schéma de gauche représente la situation au temps  $t$  alors que le schéma de droite représente la situation au temps  $t + \Delta t$ . La source de tension peut être vue comme un système thermodynamique dont la frontière est symbolisée par le bord noir épais du rectangle blanc qui la représente. En passant du temps  $t$  au temps  $t + \Delta t$  la source fournit au monde extérieur (au travers de son pôle positif) une quantité de charge  $\Delta q$  sous un potentiel  $V$ . Cette quantité de charge a donc une énergie  $V\Delta q$ . Sur le même temps la source reçoit (par son pôle négatif) la même quantité de charge  $\Delta q$  sous un potentiel nul. Ces charges retirées au monde extérieur ont donc une énergie nulle. Le bilan net de ce que reçoit le monde extérieur de la part de la source est donc l'énergie  $V\Delta q$ . Autrement dit,  $V\Delta q$  est l'énergie que reçoit l'élément de circuit (rectangle bleu) sur le temps  $\Delta t$ . L'énergie par unité de temps (c'est-à-dire, la puissance  $P$ ) qu'il reçoit de la source est donc  $P = V\Delta q/\Delta t$ , c'est-à-dire,  $P = VI$ .

Pour calculer la puissance  $P$ , nous avons donc besoin à la fois de la tension  $V$  et du courant  $I$ . C'est pourquoi ces grandeurs déjà

**FIGURE 5.40 :** Source de tension (rectangle blanc) alimentant un circuit (rectangle bleu), considéré à deux instants différents ( $t$  et  $t + \Delta t$ ).



**FIGURE 5.41 :** Inducteur  $L$  alimenté en tension alternative  $V(t) = V_m \sin(\omega t)$ .



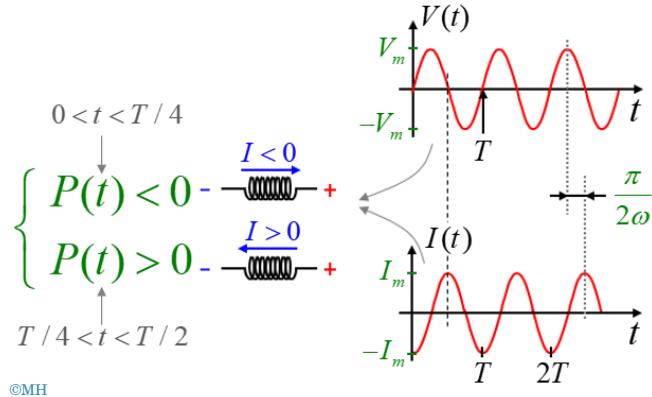
étudiées plus haut sont rappelées ci-dessous,

$$\begin{aligned} I(t) &= -\frac{V_m}{\omega L} \cos(\omega t) \\ I(t) &= I_m \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}). \end{aligned} \quad (5.72)$$

La formule du sinus de l'arc double montre que la puissance  $P = IV$  varie de façon sinusoïdale. Ce qui signifie que la puissance prend autant de valeurs positives que de valeurs négatives et que sa moyenne temporelle est donc nulle. Remarquez que ceci est dû au déphasage en quadrature du courant par rapport à la tension,

$$P(t) = IV = I_m V_m \underbrace{\cos(\omega t) \sin(\omega t)}_{\sin(2\omega t)/2} \Rightarrow \langle P(t) \rangle = 0. \quad (5.73)$$

Les graphes de la tension et du courant à la figure 5.42 montrent



**FIGURE 5.42 :** Évolution de la tension et du courant aux bornes d'un inducteur et calcul de la puissance fournie par la source.

que pendant la première demi-période de variation de la tension le courant dans le circuit passe d'une valeur négative à une valeur positive. Un courant négatif combiné à une tension positive signifie que les charges libres (supposées ici positives pour simplifier le raisonnement) remontent le potentiel et gagnent donc de l'énergie. On peut dire que la source de tension reçoit de l'énergie puisqu'elle reçoit des charges positives à son pôle positif. C'est la signification physique de la puissance négative correspondant à cette situation. Ceci est illustré sur le schéma de la figure 5.42 qui indique que pour le premier quart de période on a bien un courant négatif et une tension positive, ce qui correspond à une puissance négative  $P(t) < 0$ . Après un quart de période le courant devient positif, ce qui correspond à une descente des charges libres dans le potentiel. À ce moment-là, la situation est analogue à ce qui se produit dans une résistance, c'est-à-dire que les charges libres perdent de l'énergie. Mais il convient d'être prudent au niveau de l'interprétation physique de cette perte d'énergie : l'énergie ne se dissipe pas sous forme de chaleur mais va au champ magnétique de l'inducteur. Pendant ce quart de période, l'inducteur se charge. Après une demi-période le courant reste positif mais cette fois la tension devient négative et l'énergie repasse donc à la source ( $P(t) < 0$ ). Ce cycle de charge et décharge de la source se répète toutes les demi-périodes de variation de la tension.

En conclusion, un inducteur idéal ne consomme pas d'énergie en courant alternatif. Il provoque un transfert alterné entre l'énergie électrique de la source et l'énergie magnétique de l'inducteur.

### Réactance

En général, on ne s'attarde pas aux aspects temporels des variations de courant et de tension dans un circuit électrique car celles-ci sont trop rapides pour la plupart des applications d'intérêt pratique. Dans la pratique, ce qui nous intéresse ce sont simplement les valeurs moyennes de courant et de tension et les rapports entre elles. Comme on l'a vu plus haut, on utilise à cette fin les *valeurs efficaces* pour chiffrer les courants et les tensions dans un circuit. Puisque le courant maximal vaut la tension maximale divisée par  $\omega L$ , soit  $I_m = V_m/(\omega L)$  et que les valeurs efficaces sont, par définition,  $I_{eff} = I_m/\sqrt{2}$  et  $V_{eff} = V_m/\sqrt{2}$ , on a  $I_{eff} = V_{eff}/(\omega L)$ ,

$$I_{eff} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad , \quad V_{eff} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad I_{eff} = \frac{V_{eff}}{\omega L}. \quad (5.74)$$

On voit donc que le rapport entre la tension et le courant dépend de la pulsation  $\omega$  [ou de la fréquence  $f = \omega/(2\pi)$ ] de la source de tension. Plus la pulsation est élevée, plus le courant est faible pour une tension donnée. Du point de vue des valeurs efficaces de courant et de tension, le produit  $\omega L$  joue le rôle d'une résistance (on retrouve en effet la structure de la loi d'Ohm  $I = V/R$ ). Ce qui est intéressant, ici, c'est qu'il s'agit de l'analogie d'une résistance variable puisqu'elle dépend de la fréquence de la source de tension. On appelle cette résistance variable une *réactance* pour marquer la différence essentielle qui existe entre elle et une *vraie résistance*. Notez qu'au-delà de cette dépendance en fréquence, la différence essentielle entre une réactance et une résistance est que la réactance, contrairement à la résistance, est associée à un décalage temporel des variations de tension et de courant (voir sous-section précédente).

La réactance est notée  $X_L$  et, d'après la relation  $I_{eff} = V_{eff}/(\omega L)$ , elle vaut  $X_L = \omega L$ . Cette réactance  $X_L$  joue un rôle similaire à la résistance de la loi d'Ohm puisque l'on peut écrire

$$X_L = \omega L \quad [X_L] = \Omega, \quad \Rightarrow \quad V_{eff} = X_L I_{eff}. \quad (5.75)$$

L'unité de réactance est l'ohm, qui se note  $\Omega$ .

### Application pratique

#### Filtrage passe-bas

Le fait que la réactance dépende de la fréquence de l'alimentation de tension est très utile en pratique, car cela lui donne les propriétés d'un filtre de fréquence. Supposons que la tension d'alimentation  $V(t)$  de l'inducteur comporte plusieurs fréquences comme

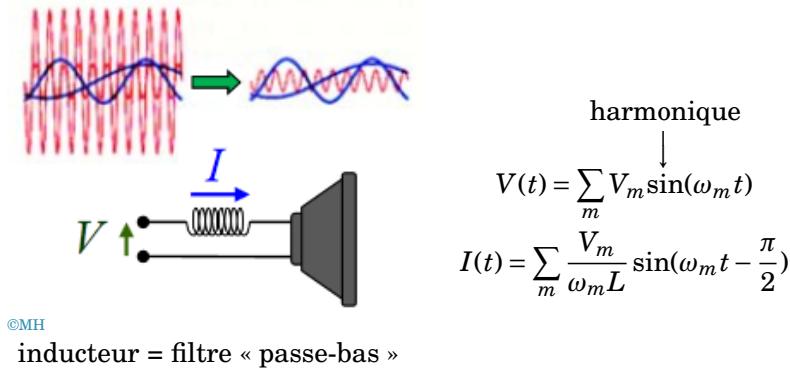


L05P6



un signal sonore mis sous forme d'une tension électrique par un microphone, soit  $V(t) = \sum V_m \sin(\omega_m t)$ , où  $V_m$  sont les amplitudes de chaque composante fréquentielle de fréquence  $\omega_m$  (ces composantes sont également appelées les « *harmoniques* » du signal). En vertu du principe de superposition, les composantes fréquentielles du signal peuvent être considérées indépendamment les unes des autres et on peut donc leur appliquer séparément la théorie vue ci-dessus. Ceci est illustré à la figure 5.43. Ainsi chaque composante

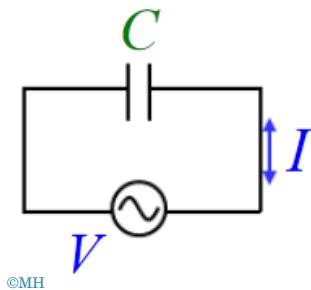
**FIGURE 5.43 :** Filtrage en fréquence. Un signal multifréquence passe au travers d'un inducteur. Chaque composante fréquentielle subit une chute de tension d'autant plus importante que sa fréquence est élevée, ce qui résulte en un filtrage passe-bas.



$V_m$  est responsable d'un courant  $I_m = V_m/X_L = V_m/(\omega_m L)$  dont l'amplitude est d'autant plus faible que la fréquence est élevée. Dès lors, si le courant du circuit sert à alimenter un haut-parleur, le haut-parleur subira plus les basses fréquences que les hautes. Les hautes fréquences seront en quelque sorte « *coupées* » par l'inducteur du circuit. On dit que l'inducteur est un filtre « *passe-bas* » car il laisse passer les basses fréquences, comme résumé ci-après,

$$I_m = \frac{V_m}{\omega_m L} \quad \Rightarrow \quad \text{si } \omega_m \uparrow \quad \Rightarrow \quad I_m \downarrow. \quad (5.76)$$

**FIGURE 5.44 :** Circuit contenant un condensateur  $C$  sous tension alternative  $V$ .



## 5.2.6 Condensateurs en courant alternatif

Nous allons voir ici que le condensateur en courant alternatif a un comportement analogue à celui de l'inducteur (nous avons déjà mis en évidence des similitudes entre les deux dispositifs lors de l'étude de l'inducteur à la section 8). Considérons le circuit représenté à la figure 5.44, constitué d'une source de tension alternative et d'un condensateur de capacité  $C$ . Pour décrire ce système, nous avons besoin de connaître la relation entre le courant et la tension. Pour établir cette relation, il suffit de se rappeler que la charge  $Q$  du condensateur est déterminée par la tension à ses bornes  $V$  par l'intermédiaire de la capacité  $C$ , soit  $Q = CV$ . Ceci est vrai à tout moment et on peut donc écrire cette relation en explicitant la variable temps,  $Q(t) = CV(t)$ . Le courant dans le circuit est donné par la variation temporelle de la charge  $Q$ , soit  $I = dQ/dt$  et on peut

donc écrire :  $I = CdV/dt$ , comme résumé ici,

$$Q = CV \quad I = \frac{dQ}{dt}, \quad (5.77)$$

$$\hookrightarrow I = C \frac{dV}{dt}. \quad (5.78)$$

Comme la tension est donnée par  $V(t) = V_m \sin(\omega t)$ , le courant vaut  $I(t) = C\omega V_m \cos(\omega t)$ ,

$$V(t) = V_m \sin(\omega t) \Rightarrow I(t) = C\omega V_m \cos(\omega t). \quad (5.79)$$

En introduisant l'amplitude du courant  $I_m = \omega CV_m$ , on peut écrire  $I(t) = I_m \sin(\omega t + \pi/2)$ ,

$$I_m = \omega CV_m \Rightarrow I(t) = I_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right). \quad (5.80)$$

En écrivant cette dernière relation comme suit :  $I(t) = I_m \sin[\omega(t + \pi/(2\omega))]$ , on voit que le courant est cette fois en avance sur la tension d'un quart de période,

$$I(t) = I_m \sin\left[\omega\left(t + \frac{\pi}{2\omega}\right)\right], \quad (5.81)$$

$$\Delta t = \pi/(2\omega) = T/4. \quad (5.82)$$

*avance*

Le courant et la tension du condensateur sont représentés graphiquement à la figure 5.45.

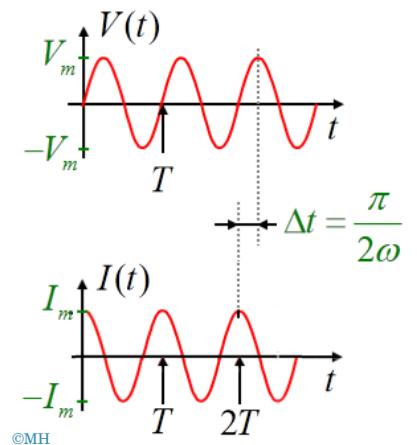
**Avance de phase** : L'avance temporelle du courant sur la tension peut être exprimée comme une avance de phase. La phase de la tension est  $\omega t$  et la phase du courant est  $\omega t + \pi/2$ . On a donc une avance de phase de  $\pi/2$  correspondant à une « *quadrature* » de phase entre le courant et la tension,

$$\varphi_I = \omega t + \frac{\pi}{2} = \varphi_V + \frac{\pi}{2}. \quad (5.83)$$

**Puissance moyenne nulle** Comme pour l'inducteur, le calcul donné ci-dessous de la puissance fournie par la source  $P = IV$  donne une valeur nulle en moyenne. La raison de ce résultat est la même que pour l'inducteur, le courant monte et descend alternativement le potentiel électrique de la source. Un courant négatif (positif) sous une tension positive (négative) correspond à un retour des charges libres vers la source tandis que le courant positif (négatif) sous une tension positive (négative) correspond à un passage des charges libres vers le condensateur. On peut donc dire qu'il y a une alternance de l'énergie entre deux réservoirs d'énergie, d'une part la source de tension et d'autre part le champ électrostatique du condensateur,

$$P(t) = IV = I_m V_m \overbrace{\cos(\omega t) \sin(\omega t)}^{\sin(2\omega t)/2} \Rightarrow \langle P(t) \rangle = 0. \quad (5.84)$$

**FIGURE 5.45 :** Évolution de la tension et du courant aux bornes d'un condensateur et illustration de l'avance temporelle du courant.



**Réactance.** De façon analogue à ce qui a été fait pour l'inducteur, on introduit la réactance du condensateur,  $X_C = 1/(\omega C)$ . Du point de vue des valeurs efficaces de courant et de tension, cette réactance est analogue à une résistance variable dépendante de la fréquence de la source de tension. Plus la fréquence est grande, plus la réactance est petite et donc plus le courant efficace est grand pour une tension donnée,

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \quad [X_C] = \Omega, \quad (5.85)$$

$$I_{eff} = \frac{V_{eff}}{X_C}. \quad (5.86)$$

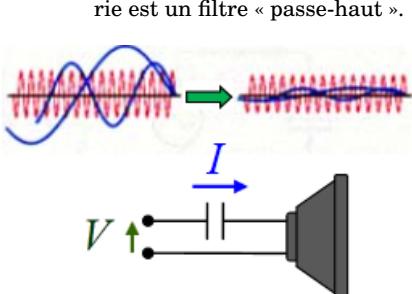
### ■ Application pratique

#### Filtrage passe-haut

Comme pour l'inducteur, le condensateur peut être utilisé pour filtrer des signaux électriques. Ceci est illustré à la figure 5.46 où on voit un circuit muni d'un condensateur. Les composantes fréquentielles (où les harmoniques) de la tension  $V(t)$  induisent un courant qui est d'autant plus faible que leur fréquence est faible. On dit que le condensateur agit comme un filtre « passe-haut ».

Le filtrage passe-haut d'un condensateur en série est illustré à la figure 5.46 et résumé par

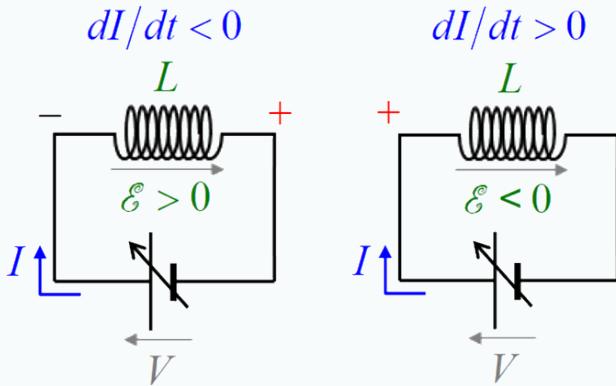
$$I_m = \omega_m C V_m \Rightarrow \text{si } \omega_m \uparrow \Rightarrow I_m \uparrow. \quad (5.87)$$



©MH

## 5.3 Le coin des assistant·es

### Auto-induction



L'auto-induction intervient dans un élément de circuit qui génère un champ magnétique variable, faisant apparaître à ses propres bornes une *électromotance*. En général, cet élément de circuit est un fil conducteur enroulé en hélice, que l'on nomme « inducteur », « solénoïde » ou « bobine » et parfois « self » (de l'anglais « auto- »). Lorsque le courant varie dans l'inducteur, le champ magnétique généré varie également. L'inducteur capte donc une variation de flux magnétique qui est due à son propre courant. La loi de Lenz stipule qu'un champ électrique non conservatif est lié à cette variation.

Ce champ non conservatif contre la variation du courant. Il est associé à une électromotance qui peut-être mesurée aux bornes de l'inducteur. C'est le phénomène d'auto-induction.

Prenons l'exemple du circuit de la figure ci-dessus. Lorsque le courant diminue (cas de gauche), une électromotance  $\mathcal{E}$  apparaît, de manière à créer un courant induit  $I_i$ , qui s'ajoute au courant initial et induit une inertie en *compensant sa diminution*. C'est comme si le solénoïde se comportait temporairement en une source de tension continue  $\mathcal{E}$ , générant un courant circulant de sa borne + vers sa borne -. Lorsque le courant augmente, une électromotance apparaît, de manière à créer un courant  $I_i$  qui s'oppose au courant initial pour *contrer son augmentation*.

Comme le flux magnétique est proportionnel au champ magnétique, lui-même proportionnel au courant, on peut montrer que le flux magnétique intercepté par l'inducteur est proportionnel au courant qui circule en son sein :  $\phi_m = LI$  où  $L$  est appelé l'**inductance**. Remarquons que cette loi présente une structure similaire à la loi du condensateur ( $Q = CV_C$ ). Par convention, dans l'étude des circuits, la tension sur un élément passif (tel que l'inducteur, la résistance ou le condensateur) est prise dans le *sens* opposé au courant (comme indiqué sur les deux schémas de cet encadré). En utilisant la loi de Faraday pour des conducteurs filiformes ( $\vec{v}_d \parallel d\vec{l}$ ) avec cette convention, nous trouvons l'expression de la tension aux bornes d'un inducteur **idéal** (résistance nulle, champ magnétique uniforme à l'intérieur et nul à l'extérieur),

$$V_L = L \frac{dI}{dt}.$$

À nouveau, nous trouvons une structure similaire au cas du condensateur ( $I = C dV_C/dt$ ).

## 5.4 Questions théoriques

1. Donnez l'expression mathématique de l'énergie électromagnétique stockée dans un inducteur. [section 5.1.10, p. I.144]
2. Donnez l'expression analytique du courant  $I(t)$  circulant dans un inducteur d'inductance  $L$  soumis à un échelon de tension d'amplitude  $V_0$ . [section 5.1.11, p. I.145]
3. Écrivez la loi courant-tension de l'inducteur et illustrez-la à l'aide d'un schéma permettant de comprendre la convention de signe associée au courant et à la tension. [section 5.1.11, p. I.145]
4. Donnez l'expression analytique du courant harmonique  $I(t)$  circulant dans un inducteur d'inductance  $L$  soumis à une différence de potentiel harmonique  $V(t) = V_m \sin(\omega t)$  (précisez la formule de base utilisée). [section 5.2.2, p. I.151]
5. Donnez, en termes de la résistance  $R$  et du courant efficace  $I_{\text{eff}}$ , l'expression de la puissance dissipée dans une résistance  $R$  véhiculant un courant harmonique  $I(t) = I_m \sin(\omega t)$  (définissez au préalable le courant efficace). [section 5.2.4, p. I.155]
6. Donnez, en termes de la résistance  $R$  et la tension efficace  $V_{\text{eff}}$ , l'expression de la puissance dissipée dans une résistance  $R$  soumise à la tension harmonique  $V(t) = V_m \sin(\omega t)$  (définissez au préalable la tension efficace). [section 5.2.4, p. I.155]
7. Donnez, en termes des courant et tension effi-
- caces  $I_{\text{eff}}$  et  $V_{\text{eff}}$  uniquement, l'expression de la puissance dissipée dans un circuit purement résistif alimenté en courant alternatif (définissez au préalable le courant et la tension efficaces). [section 5.2.4, p. I.155]
8. Démontrez que dans un inducteur soumis à la tension harmonique  $V(t) = V_m \sin(\omega t)$  le courant est en retard d'un quart de période sur la tension. [section 5.2.5, p. I.158]
9. Soit un inducteur soumis à la tension harmonique  $V(t) = V_m \sin(\omega t)$ . Démontrez que la puissance moyenne délivrée à cet inducteur est toujours nulle. [section 5.2.5, p. I.158]
10. Donnez l'expression de la réactance d'un inducteur d'inductance  $L$  alimenté en tension alternative de pulsation  $\omega$  (précisez la formule de base utilisée). [section 5.2.5, p. I.158]
11. Démontrez que dans un condensateur soumis à la tension harmonique  $V(t) = V_m \sin(\omega t)$  le courant est en avance d'un quart de période sur la tension. [section 5.2.6, p. I.162]
12. Soit un condensateur soumis à la tension harmonique  $V(t) = V_m \sin(\omega t)$ . Démontrez que la puissance moyenne délivrée à ce condensateur est toujours nulle. [section 5.2.6, p. I.162]
13. Donnez l'expression de la réactance d'un condensateur de capacité  $C$  alimenté en tension alternative de pulsation  $\omega$  (précisez la formule de base utilisée). [section 5.2.6, p. I.162]

## 5.5 Exercices

### Exercice 5.1

Le schéma de la figure E.5.1 représente une ligne bifilaire fermée en court-circuit et alimentée par une source de tension délivrant une tension efficace  $V_{\text{eff}} = 220\text{V}$  à la fréquence  $f = 50\text{Hz}$ . La ligne est constituée d'un fil dont la résistance  $R$  vaut  $0,1\Omega$  et dans lequel la densité de courant est uniforme. La longueur  $M$  de la ligne est de  $10\text{m}$ , le diamètre  $d$  du fil est de  $0,1\text{mm}$  et l'écart  $D$  entre les fils de la ligne est de  $3\text{mm}$  (voir schéma de coupe de la ligne).

- Donnez l'expression analytique du champ magnétique  $\bar{B}$  dans le plan de la ligne [plan  $(x,z)$ ]. On supposera que le champ magnétique généré par la ligne est uniforme le long de l'axe  $z$ , c'est-à-dire que l'on néglige les distorsions de lignes de champ dues aux sections verticales du circuit formant les extrémités de la ligne. De même, on négligera l'existence de champ magnétique au sein du fil conducteur.
- À partir du calcul du flux magnétique  $\phi_M$  capté par la ligne, calculez l'inductance  $L$  de la ligne (pour l'intégrale de surface considérez l'élément de surface  $d\vec{S} = dx dz \vec{1}_y$ ). (Réponse :  $L = 16.31\mu\text{H}$ )

### Exercice 5.2

Lorsqu'on ouvre brusquement un circuit électrique contenant un inducteur à l'aide d'un interrupteur il se produit souvent un arc électrique aux bornes de l'interrupteur. Expliquez ce phénomène.

### Exercice 5.3

Le schéma de la figure E.5.2 montre un circuit contenant une résistance  $R$ , un inducteur d'inductance  $L$  et une source de tension  $V$ . Au temps  $t = 0$ , on ferme l'interrupteur.

- Calculez l'expression analytique de la puissance  $P(t)$  délivrée par la source en fonction du temps ainsi que la puissance dissipée par la résistance  $P_J(t)$ . Expliquez la différence entre ces deux puissances et vérifiez votre hypothèse.
- Sachant que  $R = 1,2\Omega$  et  $L = 15\text{mH}$ , calculez le temps  $t_2$  auquel le courant  $I(t)$  atteint la moitié de sa valeur asymptotique  $I(\infty)$ . (Réponse :  $t_2 = 8.7\text{ms}$ )

### Exercice 5.4

Le schéma de la figure E.5.3 montre deux aimants permanents identiques disposés bout à bout dans le même sens, en contact l'un avec l'autre. Ces aimants génèrent un champ magnétique  $B$  de  $1,6\text{T}$  à leurs extrémités. Ils ont une section circulaire de rayon  $R = 2\text{cm}$ , et une longueur  $L = 8\text{cm}$ . En vous basant sur le principe de conservation de l'énergie, calculez la force  $F$  qu'il faut exercer pour les séparer. (Réponse :  $F = 5.12\text{kN}$ )

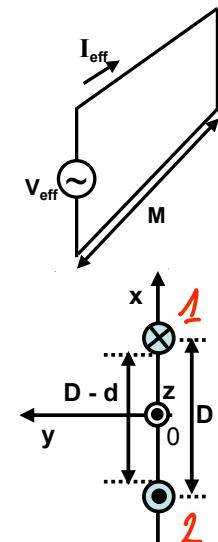


FIGURE E.5.1

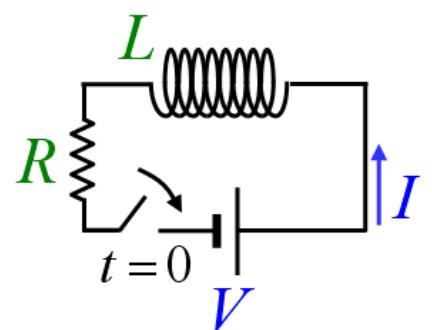


FIGURE E.5.2

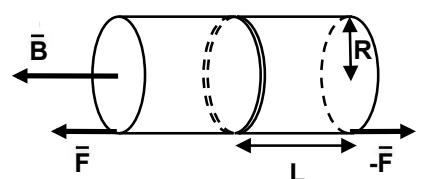
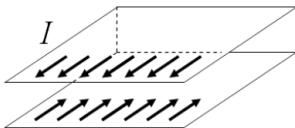


FIGURE E.5.3

### Exercice 5.5

Soit la plaque métallique en forme de U représentée à la figure E.5.4. On supposera que le courant  $I$  est établi de manière uniforme sur toute la largeur  $\ell$  de la plaque conductrice et que le champ magnétique est uniforme partout à l'intérieur du U. La distance entre les branches du U est  $h = 1\text{ cm}$ , la largeur de la plaque est  $\ell = 10\text{ cm}$  et la longueur du (demi) U est  $L = 1\text{ m}$ .

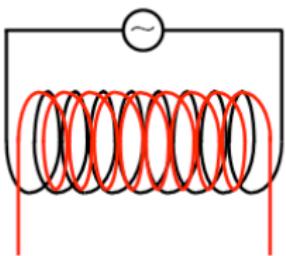


**FIGURE E.5.4 :**

- Calculez l'inductance statique de la plaque métallique. (Réponse :  $L = 0.13\text{ }\mu\text{H}$ )
- Supposons maintenant que la plaque est en matériau supraconducteur (résistivité nulle) et qu'elle est alimentée par une source de tension continue  $V$ . Exprimez l'énergie  $W_m$  fournie par la source au cours du temps. Exprimez ensuite  $W_m$  de manière analytique en fonction de la norme du champ magnétique  $B$  généré par la plaque.
- Supposons maintenant que la plaque est alimentée par une source de tension alternative  $V(t) = V_m \sin(\omega t)$ . Calculez l'énergie  $W_m$  fournie par la source au cours du temps.

### Exercice 5.6

Le schéma de la figure E.5.5 montre deux solénoïdes dont les spires sont entrelacées et sont de même surface  $S$ . L'un des solénoïdes comporte  $N_p = 110$  spires et est alimenté par une tension alternative  $V_p(t)$  à  $f = 50\text{ Hz}$  de  $V_{p,\text{eff}} = 220\text{ V}$ . Calculez la tension  $V_s(t)$  et sa valeur efficace  $V_{s,\text{eff}}$  générée aux bornes du second solénoïde comportant  $N_s = 10$  spires. Remarque : cet exercice illustre le principe du transformateur, l'un des composants que l'on retrouve dans un adaptateur secteur (dispositif utilisé pour recharger un PC portable ou un GSM, par exemple) (Réponse :  $V_{s,\text{eff}} = 20\text{ V}$ )

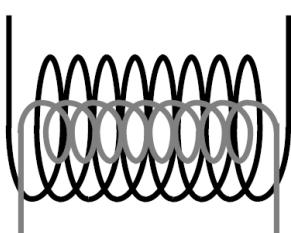


**FIGURE E.5.5 :**

### Exercice 5.7

Un solénoïde d'un petit diamètre  $d = 1\text{ cm}$ , représenté à la figure E.5.6, se trouve à l'intérieur d'un solénoïde de grand diamètre  $D = 3\text{ cm}$ . Le petit solénoïde comporte  $N_1 = 100$  spires alors que le grand en comporte  $N_2 = 200$ . On supposera les solénoïdes idéaux (pas de flux de fuite).

- Calculez le rapport de transformation si l'on considère ce dispositif comme un transformateur de tension alternative de  $50\text{ Hz}$  dont le primaire est constitué par le grand solénoïde. (Réponse :  $\frac{V_s}{V_p} = 0,056$ )
- Faites le même calcul en considérant le petit solénoïde comme constituant le primaire. (Réponse :  $\frac{V_s}{V_p} = 2$ )



**FIGURE E.5.6 :**

### Exercice 5.8

Le schéma de la figure E.5.7 montre le même câble coaxial qu'à la question 4.4. La configuration est toutefois différente dans la

mesure où le câble est fermé à son extrémité sur une résistance  $R$ .

- Calculez le champ magnétique en tout point à l'intérieur du câble pour un courant  $I$  donné et déduisez-en l'inductance  $L$  du câble. Vu les faibles dimensions transverses du câble, on négligera la contribution au champ du courant dans la résistance.
- En tenant compte du résultat de l'exercice précédent (a), faites un schéma de circuit équivalent du câble et calculez-en l'impédance pour toute résistance  $R$  (réponse analytique). Notez que cette approche de circuit équivalent n'est valable qu'à faible fréquence (à haute fréquence il s'agit d'un problème de propagation d'onde dans le câble), les calculs se feront donc au premier ordre en  $\omega$ . Calculez et interprétez physiquement les expressions de l'impédance du câble dans les cas limites d'une résistance infinie (câble ouvert) et d'une résistance nulle (câble fermé en court-circuit).

### Exercice 5.9

Le circuit  $RC$  de la figure E.5.8, alimenté par la source de tension  $V(t)$ , est parcouru par un courant alternatif  $I(t) = I_m \sin(\omega t)$ .

- Quelle est l'expression analytique de la tension  $V(t)$  qui est à l'origine de ce courant ?
- Calculez ensuite le rapport des amplitudes des tensions aux bornes de la résistance et de la source en fonction de  $\omega$ , soit  $\frac{V_{Rm}(\omega)}{V_{m}(\omega)}$ . En déduire la pulsation  $\omega_c$  à laquelle cette fonction vaut  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  fois sa valeur maximale (on appelle cette pulsation "pulsation de coupure").
- Tracez l'allure de cette fonction  $\frac{V_{Rm}(\omega)}{V_{m}(\omega)}$ , et en déduire si il s'agit d'un filtre passe-haut ou d'un filtre passe-bas. Vous reverrez en deuxième année le fonctionnement des filtres dans le cours de *Physique des technologies de l'information*. L'analyse y sera basée sur la notion de *phaseur*, un outil mathématique simplifiant la manipulation des amplitudes et déphasages des signaux harmoniques. Dans ce cadre-là, la fonction rencontrée ici est la *norme de la fonction de transfert du filtre RC à la résistance*.

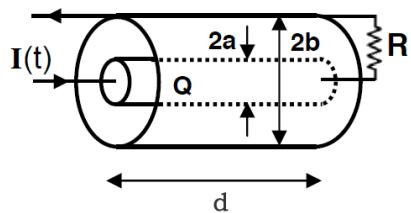


FIGURE E.5.7

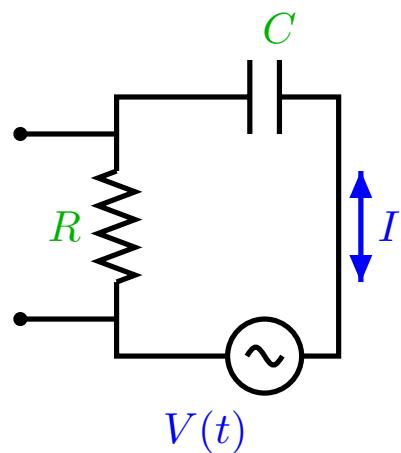


FIGURE E.5.8

## Récapitulatif des notions vues dans cette leçon

Indispensable	Nécessaire	Intéressant
<ul style="list-style-type: none"> <li>— application de la <i>loi de Lenz</i></li> <li>— notion d'inductance (5.1.4)</li> <li>— loi courant-tension d'un inducteur idéal (5.28)</li> <li>— valeurs efficaces, intérêt et expressions (5.63), (5.62)</li> <li>— inductance et réactance (sections 5.2.5, 5.2.4), 5.2.6)</li> <li>— déphasage induit par inductance et réactance</li> <li>— fonctionnement du transformateur (Sec. 5.2.2)</li> <li>— calcul du courant et de la tension en sortie d'un transformateur (5.54)</li> <li>— sens conventionnel de la tension aux bornes d'un circuit</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>— énergie d'un inducteur (5.24)</li> <li>— énergie d'un condensateur (Fig. 5.14)</li> <li>— évolution du courant dans un circuit <i>RL</i> (Fig. 5.9)</li> <li>— évolution du courant dans un circuit <i>RC</i> (Fig. 5.10)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>— interprétation de l'énergie stockée en termes d'inertie</li> <li>— filtrage passe-haut</li> <li>— filtrage passe-bas</li> </ul>

# Exercices du volume I

## Préparation aux séances d'exercices du volume I

### À préparer avant de venir au TP

#### Exercice A

Soit une plaque infinie selon les directions  $x$  et  $y$ , avançant à la vitesse  $v$  selon l'axe  $x$  et plongée dans un champ électromagnétique uniforme caractérisé par  $\vec{E} = \vec{0}$  et  $\vec{B} = B_0 \hat{1}_z$ . Déterminez la valeur absolue de l'électromotance entre deux points séparés d'une distance  $d$  sur la plaque si

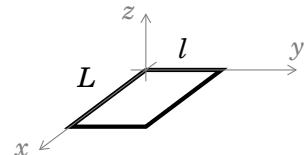
- a) les points sont séparés de la distance  $d$  selon l'axe  $x$ ;
- b) les points sont séparés de la distance  $d$  selon l'axe  $y$ .

Application numérique :  $B = 4 \text{ T}$ ,  $v = 0.1 \text{ m s}^{-1}$  et  $d = 2 \text{ m}$ .

### À préparer avant de venir au TP

#### Exercice B

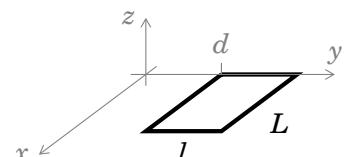
La spire rectangulaire ci-contre, de longueur  $L$  et de largeur  $l$ , est immobile dans un champ magnétique uniforme variable  $\vec{B}(\vec{x}, t) = \lambda t \hat{1}_z$ , où  $\lambda$  est une constante indépendante du temps. Calculez la valeur absolue de la circulation du champ électrique le long de la spire.

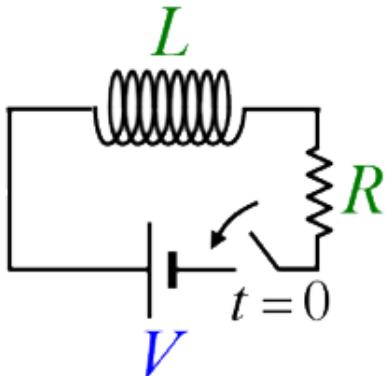


### À préparer avant de venir au TP

#### Exercice C

La spire rectangulaire ci-contre, de longueur  $L$  et de largeur  $l$ , est immobile dans un champ magnétique variable et non-uniforme  $\vec{B}(\vec{x}, t) = \lambda t \frac{x}{y} \hat{1}_z$ , où  $\lambda$  est une constante indépendante du temps. Calculez la valeur absolue de la circulation du champ électrique le long de la spire.





### À préparer avant de venir au TP

#### Exercice D

Soit le schéma électrique ci-contre.

- Indiquez, à l'aide de signes + et -, l'electromotance apparaissant aux bornes de la bobine par effet d'autogénération après  $t = 0$ .
- Indiquez le sens du courant circulant dans la maille.
- Indiquez les tensions  $V$ ,  $V_R$  et  $V_L$  à l'aide de flèches allant toujours du potentiel le plus bas vers le potentiel le plus haut, et en déduire la loi des mailles associée à ce circuit.
- En utilisant la loi des mailles, écrivez l'équation différentielle du circuit, la fonction inconnue étant le courant.

### À préparer avant de venir au TP

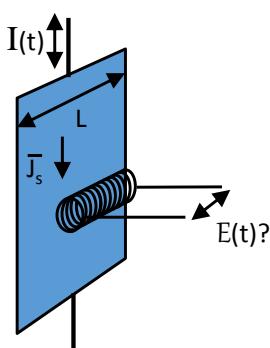
#### Exercice E

On applique à un condensateur une tension  $V(t) = V_m \sin(2\pi f t + \varphi)$  avec  $V_m = 4 \text{ V}$ ,  $f = 2000 \text{ Hz}$  et  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ . La surface des plaques est  $S = 3 \text{ cm}^2$  et l'écart entre celles-ci est  $e = 1 \text{ mm}$ . Déterminez l'amplitude du courant et de la densité de courant de déplacement associée au champ électrique variable entre les plaques du condensateur (on considérera l'axe  $x$  comme étant perpendiculaire aux plaques).

## Exercices complémentaires du volume I

### Exercice I.1

Le schéma de la figure E.I.1 montre un solénoïde placé devant une plaque véhiculant un courant alternatif,  $I(t) = I_m \cos(\omega t)$ , de densité de surface  $J_s$  uniforme sur toute sa largeur  $L = 20 \text{ cm}$ . Le solénoïde est placé avec son axe perpendiculaire à la direction du courant et parallèle à la plaque à une distance  $d = 2 \text{ cm}$  de celle-ci. Il a des dimensions très inférieures à celles de la plaque (supposée d'extension infinie), en particulier, il a un rayon  $R = 0.5 \text{ cm}$  et comporte un nombre de spires  $N = 150$ . Sachant que le courant oscille avec une amplitude  $I_m = 0.5 \text{ A}$  et une pulsation  $\omega = 628 \text{ Hz}$ , calculez l'expression de l'electromotance  $\mathcal{E}(t)$  générée aux bornes du solénoïde ainsi que sa valeur efficace  $\mathcal{E}_{eff}(t)$ .



**FIGURE E.I.1 :**

# **Physique générale II**

Partie IV

## **Annexes**

---

**Pascal Kockaert**

Auteur : **Marc Haelterman**

Revu par **Pascal Kockaert**

---

IRCI 1 & IRAR 2  
**PHYS-H-1002**

Année académique 2025–2026



# Théorème du rotationnel par discrétisation triangulaire

Annexe



## A.1 Introduction

La discrétisation de surfaces par des triangles est la plus élémentaire. Elle fait apparaître naturellement un système d'axes pour chaque triangle et présente l'avantage que les triangles peuvent épouser toutes les courbes régulières avec une erreur aussi petite que désirée sur l'orientation des tangentes à ces courbes.

### A.1.1 Définition des triangles et des tangentes à leurs côtés

Pour le calcul sur un triangle, on choisit de se placer dans un plan  $Oxy$  immergé dans un espace  $Oxyz$ , avec l'axe  $z$  orthogonal au plan. Le triangle est défini par ses 3 sommets que nous notons  $P_0, P_1$  et  $P_2$ . Les arêtes

$$\vec{a}_1 = \overrightarrow{P_0P_1}, \quad (\text{A.1})$$

$$\vec{a}_2 = \overrightarrow{P_0P_2}, \quad (\text{A.2})$$

forment une base non orthogonale et non normée. La numérotation est choisie pour que le repère  $Oa_1a_2$  soit de même orientation — chiralité — que les axes  $Oxy$ . Cela veut dire que les produit mixtes  $\vec{l}_z \cdot (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2)$  et  $\vec{l}_z \cdot (\vec{l}_x \times \vec{l}_y)$  sont de même signe.

### A.1.2 Intégrale d'un vecteur variant linéairement sur une droite

On considère un côté quelconque, que l'on fera ensuite correspondre à  $P_0P_1$  ou  $P_1P_2$  ou  $P_2P_0$ . On intègre sur ce segment le champ linéarisé  $\vec{L}(\vec{r})$  défini aux deux sommets, notés  $A, B$ , et liés à la position par

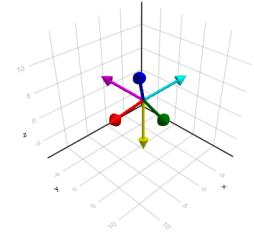
$$\vec{r} = \vec{r}_A + \lambda(\vec{r}_B - \vec{r}_A). \quad (\text{A.3})$$

Le vecteur  $\vec{r}$  est intérieur au segment si

$$0 \leq \lambda \leq 1. \quad (\text{A.4})$$

La fonction vectorielle  $\vec{L}(\vec{r})$  étant linéaire,

$$\vec{L}(\vec{r}) = \vec{L}(\vec{r}_A) + \lambda \left[ \vec{L}(\vec{r}_B) - \vec{L}(\vec{r}_A) \right]. \quad (\text{A.5})$$



**FIGURE A.1 :** Exemple de triangle défini par trois points. Les arêtes  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$  sont représentées respectivement en rouge et bleu. Les vecteurs qui leur sont respectivement orthogonaux sont notés  $\vec{b}_2, \vec{b}_1$  en jaune et en cyan.

Tenant compte de

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \lambda} d\lambda = (\vec{r}_B - \vec{r}_A) d\lambda = \vec{e}_{AB} d\lambda, \quad (\text{A.6})$$

la circulation de la fonction vectorielle  $\vec{L}$  sur le segment  $AB$  est donnée par

$$\int \vec{L} d\vec{r} = \int_0^1 \vec{L}(\vec{r}) \vec{e}_{AB} d\lambda, \quad (\text{A.7})$$

$$= \vec{e}_{AB} \left[ \vec{L}(\vec{r}_A) \int_0^1 d\lambda + \vec{L}(\vec{e}_{AB}) \int_0^1 \lambda d\lambda \right]$$

$$= \vec{e}_{AB} \left[ \vec{L}(\vec{r}_A) + \frac{1}{2} \vec{L}(\vec{r}_B - \vec{r}_A) \right]$$

$$= \frac{1}{2} [\vec{L}(\vec{r}_A) + \vec{L}(\vec{r}_B)] (\vec{r}_B - \vec{r}_A), \quad (\text{A.8})$$

soit la valeur moyenne du champ aux deux extrémités du segment multipliée par le vecteur associé à ce segment.

### A.1.3 Circulation d'un champ sur un triangle

On intègre la circulation dans le sens 012, ce qui donne les arêtes définies par

$$\overrightarrow{P_0P_1} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0 = \vec{a}_1, \quad (\text{A.9})$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{a}_2 - \vec{a}_1, \quad (\text{A.10})$$

$$\overrightarrow{P_2P_0} = \vec{r}_0 - \vec{r}_2 = -\vec{a}_2. \quad (\text{A.11})$$

La circulation  $\mathcal{C}$  sur le triangle 0120 est donc

$$\begin{aligned} \mathcal{C} = \oint_{0120} \vec{L} d\vec{r} &= \int_{01} \vec{L} d\vec{r} + \int_{12} \vec{L} d\vec{r} + \int_{20} \vec{L} d\vec{r} \\ &= \frac{1}{2} (\vec{L}_0 + \vec{L}_1) \vec{a}_1 + \frac{1}{2} (\vec{L}_1 + \vec{L}_2) (\vec{a}_2 - \vec{a}_1) + \frac{1}{2} (\vec{L}_0 + \vec{L}_2) (-\vec{a}_2) \\ &= -\frac{1}{2} (\vec{L}_2 - \vec{L}_0) \vec{a}_1 + \frac{1}{2} (\vec{L}_1 - \vec{L}_0) \vec{a}_2. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

### A.1.4 Champ linéaire en coordonnées cartésiennes

Le champ  $\vec{L}(\vec{r})$  étant linéaire, il peut se mettre sous une forme linéaire par rapport aux coordonnées du plan  $Oxy$  dans lequel se trouve le triangle. Soit

$$\vec{L}(\vec{r}) = \vec{L}(\vec{r}_0) + \vec{\alpha}(x - x_0) + \vec{\beta}(y - y_0), \quad (\text{A.13})$$

avec les vecteurs  $\vec{\alpha}$  et  $\vec{\beta}$  constants et à déterminer. On constate que

$$\frac{\partial \vec{L}}{\partial x} = \vec{\alpha}, \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{\partial \vec{L}}{\partial y} = \vec{\beta}, \quad (\text{A.15})$$

ce qui peut servir à déterminer ces constantes.

La circulation prend la forme

$$\begin{aligned}
 2\mathcal{C} &= -[\vec{\alpha}(x_2 - x_0) + \vec{\beta}(y_2 - y_0)] \vec{a}_1 + [\vec{\alpha}(x_1 - x_0) + \vec{\beta}(y_1 - y_0)] \vec{a}_2 \\
 &= -[\vec{\alpha}a_{2,x} + \vec{\beta}a_{2,y}] \vec{a}_1 + (\vec{\alpha}a_{1,x} + \vec{\beta}a_{1,y}) \vec{a}_2 \\
 &= -\vec{\alpha}\vec{a}_1 a_{2,x} - \vec{\beta}\vec{a}_1 a_{2,y} + \vec{\alpha}\vec{a}_2 a_{1,x} + \vec{\beta}\vec{a}_2 a_{1,y} \\
 &= -\alpha_x a_{1,x} a_{2,x} - \alpha_y a_{1,y} a_{2,x} - \beta_x a_{1,x} a_{2,y} - \beta_y a_{1,y} a_{2,y} \\
 &\quad + \alpha_x a_{2,x} a_{1,x} + \alpha_y a_{2,y} a_{1,x} + \beta_x a_{2,x} a_{1,y} + \beta_y a_{2,y} a_{1,y} \\
 &= (\alpha_y - \beta_x)(a_{2,y} a_{1,x} - a_{1,y} a_{2,x})
 \end{aligned} \tag{A.16}$$

Dans cette dernière expression, on identifie la composante en  $z$  du produit vectoriel  $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2$ , dont l'amplitude correspond à la surface du parallélogramme sous-tendu par les vecteurs  $\vec{a}_1$  et  $\vec{a}_2$ . La surface du parallélogramme correspond elle-même à deux fois la surface orientée  $\vec{S}$  du triangle sur lequel on calcule la circulation. On peut donc noter

$$2\mathcal{C} = 2\vec{S} \cdot \vec{1}_z (\alpha_y - \beta_x). \tag{A.17}$$

Finalement, en notant que  $\alpha_y = \partial L_y / \partial x$  et que  $\beta_x = \partial L_x / \partial y$ , on peut écrire

$$\mathcal{C} = \vec{S} \cdot \vec{1}_z \left( \frac{\partial L_y}{\partial x} - \frac{\partial L_x}{\partial y} \right), \tag{A.18}$$

on peut donner une forme indépendante du choix des axes à cette expression en la notant

$$\mathcal{C} = \vec{S} \cdot \overline{\text{rot}} \vec{L}, \tag{A.19}$$

où on peut montrer que l'opérateur rotationnel ( $\overline{\text{rot}}$ ) est indépendant du choix de repère. Il peut être vu comme produit vectoriel de l'opérateur gradient par le champ  $\vec{L}$ .

## A.2 Circulation et flux d'un ensemble d'éléments triangulaires

Si on découpe une surface en triangles, on constate que la surface orientée totale est la somme des surfaces de chaque élément. Par ailleurs, les circulations sur les arêtes communes à deux triangles voisins sont de signes opposés. La circulation sur le contour d'un ensemble de triangles voisins équivaut donc à la somme des circulations de tous les triangles. Ces propriétés sont valables quelle que soit la taille des triangles.

## A.3 Champ vectoriel non linéaire différentiable

En tout point où le champ vectoriel est différentiable, on peut le remplacer par sa différentielle qui est linéaire.

Pour calculer la circulation d'un champ avec la précision désirée, on peut donc diviser la surface en triangles suffisamment petits pour que l'erreur commise en remplaçant le champ par sa différentielle soit inférieure à l'erreur souhaitée. D'un point de vue théorique, on peut faire tendre ce nombre de triangles vers l'infini.

Comme la différentielle  $\vec{L}$  d'un champ vectoriel  $\vec{F}$  est sa meilleure approximation linéaire, on doit avoir dans les notations qui précédent

$$\frac{\partial \vec{L}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial x}, \quad (\text{A.20})$$

et une expression similaire pour la composante  $y$ .

Pour chaque triangle infinitésimal considéré, l'égalité (A.19) est valable sur une surface triangulaire notée  $d\vec{S}$ . La circulation élémentaire  $d\mathcal{C}$  sur le contour délimitant cette surface infinitésimale orientée est donnée par

$$d\mathcal{C} = d\vec{S} \cdot \overline{\text{rot}} \vec{F}. \quad (\text{A.21})$$

### A.3.1 Théorème du rotationnel de Stokes

On en déduit que la circulation totale sur un volume triangulable, pour lequel la différentielle existe sur chacun des triangles infinitésimaux est donnée par

$$\mathcal{C} = \oint_{\partial S} \vec{F} d\vec{l} = \int_S \overline{\text{rot}} \vec{F} d\vec{S}, \quad (\text{A.22})$$

où la notation  $\partial S$  désigne le contour (aussi appelé bord) de la surface  $S$ . L'orientation du contour et celle de la surface orientée sont liées par la définition du produit vectoriel. Pour ce faire, on choisit une orientation de la surface sur un des triangles. Cette orientation est fixée par la normale  $\vec{n}$ . Elle définit le sens de parcours pour le calcul de la circulation sur ce triangle. Si les sommets de ce triangle sont notés  $ABC$ , partant de  $A$ , on circule dans le sens  $ABC$  si  $\vec{n}(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) > 0$ , et dans le sens  $ACB$  sinon. Pour le triangle voisin de côté  $ABD$ , on choisit la normale de sorte que lors du calcul de la circulation, le segment  $AB$  soit parcouru dans le sens opposé à celui du triangle  $ABC$ . En pratique, cela revient à considérer que la normale de deux triangles voisins pointe du même côté de la surface définie par ces deux triangles. Cette règle s'appliquant de proche en proche, elle permet de définir le sens de la circulation sur le contour de la surface.

# Théorème de la divergence par discrétisation tétraédrale



## B.1 Introduction

La discrétisation par parallélépipèdes rectangles est très utile comme première approche, mais elle se heurte à un problème majeur : les normales sont toutes orientées verticalement ou horizontalement. La discrétisation tétraédrale est la plus élémentaire. Elle fait apparaître naturellement un système d'axes pour chaque tétraèdre et présente l'avantage que les tétraèdres peuvent épouser toutes les surfaces régulières avec une erreur aussi petite que désirée sur l'orientation des normales aux surfaces.

### B.1.1 Logique de la démonstration

On suppose que le champ  $\vec{F}$  étudié est suffisamment régulier sur le domaine considéré pour qu'il existe un maillage sur lequel on peut remplacer  $\vec{F}$  pour chaque élément du maillage par une approximation linéaire  $\vec{L}$  valable sur tout l'élément.

## B.2 Intégrale d'un champ linéaire sur la surface d'un tétraèdre

On procède surface par surface.

### B.2.1 Définition des surfaces et de leurs normales extérieures

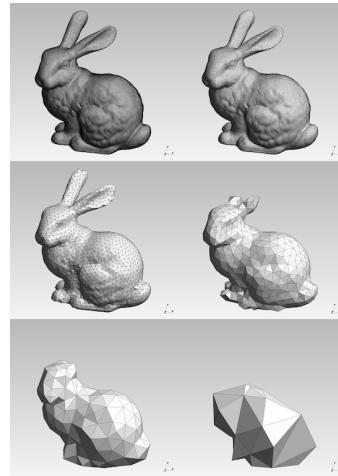
Le tétraèdre est défini par ses 4 sommets que nous notons  $P_0$ ,  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$ . Les arêtes

$$\vec{a}_1 = \overrightarrow{P_0P_1}, \quad (\text{B.1})$$

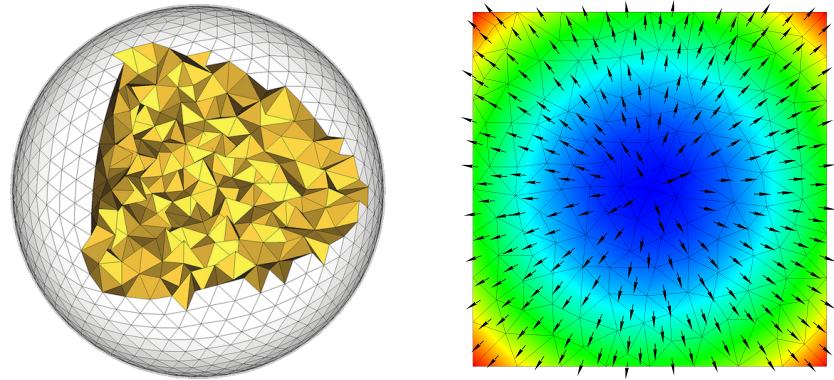
$$\vec{a}_2 = \overrightarrow{P_0P_2}, \quad (\text{B.2})$$

$$\vec{a}_3 = \overrightarrow{P_0P_3}, \quad (\text{B.3})$$

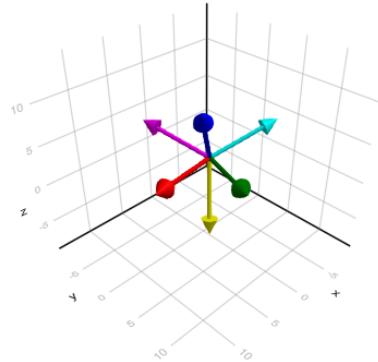
forment une base non orthogonale et non normée. La numérotation est choisie pour que le repère  $Oa_1a_2a_3$  soit de même orientation — chiralité — que les axes  $Oxyz$  utilisés pour définir le produit vectoriel  $\vec{1}_z = \vec{1}_x \times \vec{1}_y$ . Cela veut dire que leur *produit mixte* est positif :  $\vec{a}_3 \cdot (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) > 0$ .



**FIGURE B.1** – Exemple de triangulation de surface, extensible à une décomposition du volume en tétraèdres.



**FIGURE B.2** – Exemple de découpage en volumes tétraédraux et exemple de champ vectoriel sur un domaine triangulérisé.



**FIGURE B.3** – Exemple de tétraèdre défini par quatre points. Les arêtes  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  sont représentées respectivement en rouge, vert et bleu. Les vecteurs orthogonaux sortant  $\vec{S}_1, \vec{S}_2, \vec{S}_3$  sont respectivement jaune, cyan et magenta.

### B.2.2 Base des vecteurs normaux

On définit les trois vecteurs normaux

$$\vec{b}_1 = \vec{a}_2 \times \vec{a}_3, \quad (\text{B.4})$$

$$\vec{b}_2 = \vec{a}_3 \times \vec{a}_1, \quad (\text{B.5})$$

$$\vec{b}_3 = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2, \quad (\text{B.6})$$

On constate que ces vecteurs pointent vers l'intérieur du tétraèdre. Les normales extérieures sont donc de directions opposées aux vecteurs  $\vec{b}_i$ . Notons également que la norme des vecteurs  $\vec{b}_i$  correspond à la surface du parallélogramme construit sur les vecteurs  $\vec{a}_j$  et  $\vec{a}_k$ , où  $(i, j, k) \in \{(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)\}$ . La surface d'une face du tétraèdre est un triangle dont l'aire vaut la moitié de la surface du parallélogramme correspondant. On en déduit que les produits  $S_i \vec{n}_i = \vec{S}_i$  s'écrivent

$$\vec{S}_1 = S_1 \vec{n}_1 = -\frac{1}{2} \vec{a}_2 \times \vec{a}_3 = -\frac{1}{2} \vec{b}_1, \quad (\text{B.7})$$

$$\vec{S}_2 = S_2 \vec{n}_2 = -\frac{1}{2} \vec{a}_3 \times \vec{a}_1 = -\frac{1}{2} \vec{b}_2, \quad (\text{B.8})$$

$$\vec{S}_3 = S_3 \vec{n}_3 = -\frac{1}{2} \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = -\frac{1}{2} \vec{b}_3, \quad (\text{B.9})$$

### B.2.3 Surface opposée au sommet zéro

Par analogie avec ce qui précède, on peut noter  $\vec{S}_0 = S_0 \vec{n}_0$  le produit de la surface opposée à  $P_0$  par la normale extérieure à cette surface

$$\vec{S}_0 = S_0 \vec{n}_0 = \frac{1}{2} \overrightarrow{P_1 P_2} \times \overrightarrow{P_1 P_3}, \quad (\text{B.10})$$

$$= \frac{1}{2} (\vec{a}_2 - \vec{a}_1) \times (\vec{a}_3 - \vec{a}_1) \quad (\text{B.11})$$

$$= \frac{1}{2} (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3 - \vec{a}_2 \times \vec{a}_1 - \vec{a}_1 \times \vec{a}_3) \quad (\text{B.12})$$

$$= -\vec{S}_1 - \vec{S}_2 - \vec{S}_3, \quad (\text{B.13})$$

qui montre que

$$\vec{S}_0 + \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3 = 0. \quad (\text{B.14})$$

### B.2.4 Intégrale d'un vecteur variant linéairement sur une surface triangulaire

On considère un triangle quelconque, que l'on fera ensuite correspondre à  $P_0 P_2 P_1$  ou  $P_0 P_1 P_3$  ou  $P_0 P_3 P_2$  ou  $P_1 P_2 P_3$ . On intègre sur ce triangle le champ linéarisé  $\vec{L}(\vec{r})$  défini aux trois sommets, notés  $A, B, C$ , et liés à la position par

$$\vec{r} = \vec{r}_A + \lambda_1 (\vec{r}_B - \vec{r}_A) + \lambda_2 (\vec{r}_C - \vec{r}_A). \quad (\text{B.15})$$

Le vecteur  $\vec{r}$  est intérieur au triangle si

$$\lambda_1 \geq 0, \quad (\text{B.16})$$

$$\lambda_2 \geq 0, \quad (\text{B.17})$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 \leq 1. \quad (\text{B.18})$$

La fonction vectorielle  $\vec{L}(\vec{r})$  étant linéaire,

$$\vec{L}(\vec{r}) = \vec{L}(\vec{r}_A) + \lambda_1 [\vec{L}(\vec{r}_B) - \vec{L}(\vec{r}_A)] + \lambda_2 [\vec{L}(\vec{r}_C) - \vec{L}(\vec{r}_A)] \quad (\text{B.19})$$

Tenant compte de

$$dS = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \lambda_1} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \lambda_2} \right| d\lambda_1 d\lambda_2 = |(\vec{r}_B - \vec{r}_A) \times (\vec{r}_C - \vec{r}_A)| d\lambda_1 d\lambda_2 = 2S_{ABC} d\lambda_1 d\lambda_2, \quad (\text{B.20})$$

la valeur moyenne de la fonction vectorielle  $\vec{L}$  sur la surface  $ABC$  est donnée par

$$\begin{aligned} \frac{1}{S_{ABC}} \iint \vec{L} dS &= 2 \int_0^1 d\lambda_1 \int_0^{1-\lambda_1} d\lambda_2 \vec{L}(\vec{r}), \\ &= 2\vec{L}(\vec{r}_A) \int_0^1 d\lambda_1 \int_0^{1-\lambda_1} d\lambda_2 \\ &\quad + 2(\vec{L}(\vec{r}_B) - \vec{L}(\vec{r}_A)) \int_0^1 \lambda_1 d\lambda_1 \int_0^{1-\lambda_1} d\lambda_2 \\ &\quad + 2(\vec{L}(\vec{r}_C) - \vec{L}(\vec{r}_A)) \int_0^1 d\lambda_2 \int_0^{1-\lambda_1} \lambda_2 d\lambda_2 \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Les intégrales doubles polynomiales se calculent facilement comme suit,

$$\begin{aligned} \int_0^1 d\lambda_1 \int_0^{1-\lambda_1} d\lambda_2 &= \int_0^1 d\lambda_1 [\lambda_2]_0^{1-\lambda_1} \\ &= \int_0^1 (1 - \lambda_1) d\lambda_1 \\ &= \left[ \lambda_1 - \frac{\lambda_1^2}{2} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \lambda_1 d\lambda_1 \int_0^{1-\lambda_1} d\lambda_2 &= \int_0^1 \lambda_1 (1 - \lambda_1) d\lambda_1 \\ &= \left[ \frac{\lambda_1^2}{2} - \frac{\lambda_1^3}{3} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{6}, \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 d\lambda_1 \int_0^{1-\lambda_1} \lambda_2 d\lambda_2 &= \int_0^1 d\lambda_1 \left[ \frac{\lambda_2^2}{2} \right]_0^{1-\lambda_1} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \lambda_1 (1 - \lambda_1)^2 d\lambda_1 \\ &= -\frac{1}{6} [(1 - \lambda_1)^3]_0^1 \\ &= \frac{1}{6}, \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

Ceci permet de calculer

$$\begin{aligned} \frac{1}{S_{ABC}} \iint \vec{L} dS &= \vec{L}(\vec{r}_A) + \frac{1}{3} (\vec{L}(\vec{r}_B) - \vec{L}(\vec{r}_A)) + \frac{1}{3} (\vec{L}(\vec{r}_C) - \vec{L}(\vec{r}_A)) \\ &= \frac{1}{3} [\vec{L}(\vec{r}_A) + \vec{L}(\vec{r}_B) + \vec{L}(\vec{r}_C)], \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

résultat très simple qui montre que la valeur moyenne d'une fonction (vectorielle) linéaire sur un triangle correspond à la moyenne des valeurs aux sommets du triangle.

### B.2.5 Intégrale du flux d'un champ variant linéairement sur une surface triangulaire

Le triangle  $ABC$  étant une surface plane, il possède une seule normale sur toute son étendue. On peut donc calculer le flux traversant cette surface en projetant le résultat de  $\iint \vec{L} dS$  sur la normale à cette surface. Par convention, on choisit le flux sortant du tétraèdre considéré, ce qui signifie que la normale à la surface est choisie externe au tétraèdre.

Par exemple, pour le triangle  $ABC \equiv P_0P_2P_1$ , on a  $\vec{r}_B - \vec{r}_A = \vec{r}_2 - \vec{r}_0 = \vec{a}_2$  et  $\vec{r}_C - \vec{r}_A = \vec{r}_1 - \vec{r}_0 = \vec{a}_1$ .

La normale  $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2$  est intérieure au tétraèdre et donc  $\vec{a}_2 \times \vec{a}_1 = 2\vec{S}_3$  est extérieure.

On constate donc que pour la face  $i = 3$  du tétraèdre, on obtient

$$\Phi_3 = \iint_{P_0P_2P_1} \vec{L} \cdot \vec{n}_3 dS = \frac{1}{3} [\vec{L}(\vec{r}_{P_0}) + \vec{L}(\vec{r}_{P_1}) + \vec{L}(\vec{r}_{P_2})] \vec{S}_3. \quad (\text{B.26})$$

Il en est de mêmes pour toutes les faces du tétraèdre, on obtient

$$\Phi_i = \iint_{A_iB_iC_i} \vec{L} \cdot \vec{n}_i dS = \frac{1}{3} [\vec{L}(\vec{r}_{A_i}) + \vec{L}(\vec{r}_{B_i}) + \vec{L}(\vec{r}_{C_i})] \vec{S}_i; \quad \forall i \in \{0, 1, 2, 3\}. \quad (\text{B.27})$$

### B.2.6 Flux total sortant d'un tétraèdre

Le flux total du champ  $\vec{L}$  sortant du tétraèdre est donné par

$$\Phi_{tot} = \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 \quad (\text{B.28})$$

$$= \frac{\vec{L}(\vec{r}_0)}{3} [\vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3] \quad (\text{B.29})$$

$$+ \frac{\vec{L}(\vec{r}_1)}{3} [\vec{S}_0 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3] \quad (\text{B.30})$$

$$+ \frac{\vec{L}(\vec{r}_2)}{3} [\vec{S}_0 + \vec{S}_1 + \vec{S}_3] \quad (\text{B.31})$$

$$+ \frac{\vec{L}(\vec{r}_3)}{3} [\vec{S}_0 + \vec{S}_1 + \vec{S}_2] \quad (\text{B.32})$$

$$= \frac{\vec{L}(\vec{r}_0)}{3} [\vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3] - \frac{\vec{L}(\vec{r}_1)}{3} \vec{S}_1 - \frac{\vec{L}(\vec{r}_2)}{3} \vec{S}_2 - \frac{\vec{L}(\vec{r}_3)}{3} \vec{S}_3$$

$$= -\frac{1}{3} \left[ \frac{\vec{L}(\vec{r}_1 - \vec{r}_0)}{3} \vec{S}_1 + \frac{\vec{L}(\vec{r}_2 - \vec{r}_0)}{3} \vec{S}_2 + \frac{\vec{L}(\vec{r}_3 - \vec{r}_0)}{3} \vec{S}_3 \right] \quad (\text{B.33})$$

$$= -\frac{1}{3} [\vec{L}(\vec{a}_1) \vec{S}_1 + \vec{L}(\vec{a}_2) \vec{S}_2 + \vec{L}(\vec{a}_3) \vec{S}_3] \quad (\text{B.34})$$

$$= \frac{1}{6} [\vec{b}_1 \vec{L}(\vec{a}_1) + \vec{b}_2 \vec{L}(\vec{a}_2) + \vec{b}_3 \vec{L}(\vec{a}_3)] \quad (\text{B.35})$$

### B.3 Intégration du gradient d'un champ linéaire sur un tétraèdre

Pour la notion de gradient, on peut se référer à la section C.1 p. IV.13.

On applique (C.45) au champ linéaire  $\vec{L}$ , ce qui donne

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{L} = \vec{c}_1 \frac{\partial \vec{L}}{\partial_{\parallel} \vec{a}_1} + \vec{c}_2 \frac{\partial \vec{L}}{\partial_{\parallel} \vec{a}_2} + \vec{c}_3 \frac{\partial \vec{L}}{\partial_{\parallel} \vec{a}_3}, \quad (\text{B.36})$$

On veut intégrer ce gradient sur le volume du tétraèdre et comparer au flux total.

#### B.3.1 Volume d'un tétraèdre

Comme précédemment, on écrit

$$\vec{r} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3. \quad (\text{B.37})$$

Le volume du tétraèdre est défini par la zone

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0, \quad (\text{B.38})$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \leq 1. \quad (\text{B.39})$$

Le volume compris dans cette zone est donné par

$$V = \int_0^1 [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3] d\lambda_1 \int_0^{1-\lambda_2} d\lambda_2 \int_0^{1-\lambda_2-\lambda_3} d\lambda_3, \quad (\text{B.40})$$

car

$$dV = \left[ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \lambda_1}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial \lambda_2}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial \lambda_3} \right] \quad (\text{B.41})$$

$$= [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3], \quad (\text{B.42})$$

$$(\text{B.43})$$

où les crochets à trois arguments indiquent le produit mixte. Les vecteurs  $\vec{a}_i$  étant constants sur tout le tétraèdre, on peut sortir le produit mixte de l'intégrale de volume. Il vient

$$V = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3] \int_0^1 d\lambda_1 \int_0^{1-\lambda_1} d\lambda_2 (1 - \lambda_1 - \lambda_2), \quad (\text{B.44})$$

$$= [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3] \int_0^1 d\lambda_1 [(1 - \lambda_1)\lambda_2 - \lambda_2^2/2]_0^{1-\lambda_1}, \quad (\text{B.45})$$

$$= [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3] \int_0^1 d\lambda_1 (1 - \lambda_1)^2/2 = [(\lambda_1 - 1)^3/6]_0^1, \quad (\text{B.46})$$

$$= \frac{[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3]}{6}, \quad (\text{B.47})$$

soit un sixième du volume du parallélépipède sous-tendu par les vecteurs  $\vec{a}_i$ .

**FIGURE B.4 :** On retrouve ce résultat par construction géométrique.



### B.3.2 Lien entre intégrale de volume et intégrale de surface

On peut utiliser le volume du tétraèdre pour lier la base des vecteurs  $\vec{c}_i$  aux vecteurs  $\vec{S}_i$ . On a

$$\vec{c}_i = \frac{\vec{b}_i}{[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3]} = \frac{1}{6V} \vec{b}_i \quad (\text{B.48})$$

qui permet d'écrire

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{L} dV = \frac{V}{6V} \left[ \vec{b}_1 \frac{\partial \vec{L}}{\partial \parallel \vec{a}_1} + \vec{b}_2 \frac{\partial \vec{L}}{\partial \parallel \vec{a}_2} + \vec{b}_3 \frac{\partial \vec{L}}{\partial \parallel \vec{a}_3} \right] = \Phi_{tot} = \oint_S \vec{L} d\vec{S}, \quad (\text{B.49})$$

qui démontre le théorème d'Ostrogradski-Gauss sur un volume tétraédral suffisamment petit pour que le champ  $\vec{F}$  puisse y être remplacé par son approximation linéaire  $\vec{L}$ .

En groupant les tétraèdres voisins d'un découpage de l'espace, les intégrales de volume s'additionnent, conduisant à une intégrale sur les deux volumes. Les intégrales sur les surfaces s'annulent à l'intersection, conduisant à une intégrale de surface portant sur l'extérieur du volume uniquement.

Combinant les volumes de proche en proche, on en déduit que le théorème est valable sur le volume global.





# Gradient et opérateur nabla

## C.1 Gradient, dérivée selon un vecteur, dérivée directionnelle et dérivée partielle

### C.1.1 Préambule sur les notations

Il existe une blague dans laquelle on demande à un mathématicien<sup>a</sup> comment faire un œuf à la coque. Il répond qu'il faut prendre une casserole vide, y ajouter de l'eau, poser l'œuf et porter à ébullition le temps voulu. On demande ensuite à la même personne comment faire un œuf à la coque avec une casserole remplie d'eau. Le mathématicien répond naturellement qu'on vide la casserole pour se ramener au problème précédent.

On pourrait transposer cette blague au cas des fonctions dépendant d'un vecteur. Ce cas est important en physique, car les champs, comme le champ gravitationnel ou le champ électrique, sont des grandeurs définies en tout point de l'espace. La position dans l'espace est souvent notée  $\vec{r}$  par les physiciens, indépendamment de tout repère de référence. L'absence d'un repère de référence est importante car on veut exprimer les lois de la physique indépendamment du repère choisi. Si on demande à un mathématicien comment traiter le cas d'une fonction dépendant d'un vecteur, il répondra naturellement qu'il suffit de choisir une base de l'espace considéré pour convertir la fonction en une fonction des coordonnées dans cette base, c'est-à-dire une fonction multivariable. Comme pour la cuisson d'un œuf à la coque, cette solution fonctionne, mais elle n'est pas tout à fait satisfaisante pour le physicien<sup>b</sup> qui aimerait faire ses calculs sans avoir à choisir une base. Malheureusement, si on travaille avec des fonctions multivariées, comme  $f(x, y, z)$ , celles-ci dépendent du choix du repère. Le physicien préférerait que la fonction soit  $g(\vec{r})$ , où  $\vec{r}$  désigne la position, indépendamment du repère choisi. Si l'on choisit une base  $Oxyz$ , on peut écrire  $g(\vec{r}) = g(x\vec{1}_x + y\vec{1}_y + z\vec{1}_z) = f(x, y, z)$ . Il y a une correspondance bien définie entre  $g$  et  $f$ , mais ces fonctions ne sont pas les mêmes.

Les physiciens n'hésitent toutefois pas à écrire bien souvent  $f(\vec{r}) = f(x, y, z)$  comptant sur leur intuition pour savoir quand  $f$  désigne une fonction d'un vecteur et quand  $f$  désigne une fonction de trois variables scalaires. Les informaticiens sont plus rigoureux

<sup>a</sup> Cela aurait pu être une mathématicienne.

<sup>b</sup> ni pour une physicienne, d'ailleurs

*et les informaticiens aussi, d'ailleurs c*

que les physiciens<sup>c</sup> car ils ne peuvent pas compter sur l'intuition du compilateur. Ils définiront par exemple

```
function f(x::Number,y::Number,z::Number)
    2*x^2-y+z
end

function g(r::Vector)
    2*r[1]^2-r[2]+r[3]
end
```

On constate que les informaticiens doivent extraire explicitement les composantes du vecteur en utilisant les opérateurs [1], [2] et [3]. On pourrait définir  $g$  au départ de  $f$ , sans connaître la fonction  $f$ , avec le code suivant.

```
function g(r::Vector)
    f(r[1],r[2],r[3]) # Pour un mathématicien, on définit un isomorphisme
end
```

Dans la mesure où les types des arguments sont différents (un vecteur ou 3 composantes scalaires), il est même possible de surcharger la fonction.

```
function f(r::Vector)
    f(r[1],r[2],r[3]) # Risque de confusion pour le programmeur
end
```

Dans le language julia<sup>1</sup> utilisé ici pour coder les exemples, on peut simplifier la définition précédente en écrivant

```
function f(r::Vector)
    f(r...)
end
```

L'opérateur «...» réalise pour le compilateur ce que l'intuition fait pour le physicien : décomposer le vecteur en composantes. Pour le physicien, cette opération n'est pas anodine, puisque le vecteur peut-être exprimé sans choisir de base, alors que les composantes sont propres à un choix de repère.

À force d'utilisation, l'intuition se construit et on apprend quand utiliser une représentation ou l'autre. La définition du type d'objet se fait en informatique via l'utilisation du suffixe « Vector » et en physique via l'usage d'une flèche, de sorte que  $\vec{r} \equiv r :: \text{Vector}$ .

Pour écrire les lois de la physique, on évite de se référer à un repère. Ceci nous assure que les lois sont les mêmes dans tout l'espace. On verra que la théorie de la relativité nous impose toutefois une certaine prudence dans le choix de la représentation de l'espace. Nous y reviendrons.

---

1. <https://julialang.org/>

On préfère donc écrire  $f(\vec{r})$  lorsque c'est possible.

### C.1.2 Dérivées selon un vecteur, directionnelle et partielle

On a l'habitude d'utiliser les dérivées partielles pour désigner la dérivée selon une des coordonnées, par exemple en écrivant

$$\frac{\partial f}{\partial x}. \quad (\text{C.1})$$

Si  $f$  est définie par  $f(x, y, z)$  et  $\vec{r} = x\vec{1}_x + y\vec{1}_y + z\vec{1}_z$ , cela revient à prendre la dérivée directionnelle dans la direction  $\vec{1}_x$ , comme on le montrera ci-dessous. À nouveau, la dérivée partielle est prise dans un repère particulier, tandis que la dérivée directionnelle peut être définie indépendamment du choix d'un repère. Pour distinguer les deux concepts, nous utiliserons les notations suivantes

$$\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \eta, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\eta}, \quad (\text{C.2})$$

$$\frac{\partial g(\vec{r})}{\partial \vec{r} \parallel \vec{1}_x} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{g(\vec{r}_0 + \eta \vec{1}_x) - g(\vec{r}_0)}{\eta}, \quad (\text{C.3})$$

où la première dérivée est une dérivée partielle par rapport à la première variable et la seconde est une dérivée directionnelle dans la direction  $\vec{1}_x$ . La notation  $\frac{\partial g(\vec{r})}{\partial \vec{r} \parallel \vec{1}_x}$  montre bien qu'on dérive par rapport à  $\vec{r}$  qui varie parallèlement à  $\vec{1}_x$ , mais elle est un peu lourde. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la variable par rapport à laquelle on dérive, on pourra simplement noter

$$\frac{\partial g}{\partial \parallel \vec{a}} = \frac{\partial g(\vec{r})}{\partial \vec{r} \parallel \vec{a}}. \quad (\text{C.4})$$

Comme

$$\frac{\partial h(\vec{r} + \lambda \vec{a})}{\partial \lambda} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{h(\vec{r}_0 + (\lambda + \eta) \vec{a}) - h(\vec{r}_0 + \lambda \vec{a})}{\eta}, \quad (\text{C.5})$$

$$\left. \frac{\partial h(\vec{r} + \lambda \vec{a})}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{h(\vec{r}_0 + \eta \vec{a}) - h(\vec{r}_0)}{\eta}, \quad (\text{C.6})$$

en supposant la dérivée continue en  $\lambda = 0$ . En l'absence de continuité, on peut notamment être confrontés à des résultats qui dépendent du trajet suivi, comme c'est le cas, par exemple pour l'altitude d'une voiture sur un échangeur d'autoroute, ce qui est illustré à la figure C.1.

On constate que (C.6) a la même forme que (C.3) et donc que

$$\frac{\partial g(\vec{r})}{\partial \parallel \vec{a}} = \left. \frac{\partial g(\vec{r} + \lambda \vec{a})}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0}, \quad (\text{C.7})$$

ce qui permet un calcul simple des dérivées directionnelles, en l'absence de discontinuités.

**FIGURE C.1 :** Deux voitures se rendant à la même coordonnée géographique (latitude, longitude) peuvent ne pas arriver à la même altitude si elles suivent des chemins différents. C'est le comportement souhaité sur un échangeur routier, et plus généralement pour les ponts et les tunnels.



**Dérivée selon un vecteur** Notons que rien ne nécessite dans notre définition que  $\vec{a}$  soit un vecteur unitaire. S'il ne l'est pas, on parle plutôt de dérivée selon le vecteur  $\vec{a}$ . S'il l'est, on peut parler de dérivée directionnelle dans la direction  $\vec{a} = \vec{1}_a$ .

### Lien entre dérivée partielle et dérivée directionnelle

Comme on peut construire  $\vec{r}$  au départ des composantes  $x, y, z$  dans une base  $Oxyz$  donnée, on peut voir  $\vec{r}$  comme une fonction à 3 variables. Notons cette fonction  $\vec{R}(x, y, z)$  pour éviter toute ambiguïté. Cette fonction utilise les coordonnées dans une base particulière et est donc propre à cette base. Elle peut s'écrire

$$\vec{R}(x, y, z) = x\vec{1}_x + y\vec{1}_y + z\vec{1}_z. \quad (\text{C.8})$$

On a donc

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial x} = \vec{1}_x, \quad (\text{C.9})$$

et des expressions équivalentes pour  $y$  et  $z$ .

Lions maintenant les fonctions  $f$  et  $g$  par

$$f(x, y, z) = g(\vec{R}(x, y, z)), \quad (\text{C.10})$$

qui s'écrit également  $f = g \circ \vec{R}$ .

Calculons la dérivée directionnelle de  $g$  par rapport à  $\vec{1}_x$

$$\frac{\partial g}{\partial \parallel \vec{1}_x} = \left. \frac{\partial g(\vec{r} + \lambda \vec{1}_x)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0}, \quad (\text{C.11})$$

$$= \left. \frac{\partial g[(x + \lambda)\vec{1}_x + y\vec{1}_y + z\vec{1}_z]}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0}, \quad (\text{C.12})$$

$$= \left. \frac{\partial f(x + \lambda, y, z)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0}, \quad (\text{C.13})$$

$$= \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}, \quad (\text{C.14})$$

en supposant que la dérivée  $\frac{\partial g(\vec{r} + \lambda \vec{1}_x)}{\partial \lambda}$  est continue en  $\lambda = 0$ .

Dans ce cas, on a

$$\frac{\partial g}{\partial \parallel \vec{1}_x} = \frac{\partial g \circ \vec{R}}{\partial x}, \quad (\text{C.15})$$

et des expressions similaires en  $y$  et  $z$ .

**Paramétrisations alternatives de l'espace** La description d'un point de l'espace peut-être définie au moyen d'autres fonctions. Par exemple, on pourrait utiliser la fonction  $\vec{R}_s(R, \theta, \varphi)$  pour décrire la position d'un point en coordonnées sphériques. On aurait

$$\vec{R}_s(R, \theta, \varphi) = R\vec{1}_R = R \cos \theta \cos \varphi \vec{1}_x + R \cos \theta \sin \varphi \vec{1}_y + R \sin \theta \vec{1}_z. \quad (\text{C.16})$$

En chaque point  $P_0$  tel que  $\overrightarrow{OP}_0 = \vec{R}_s(R_0, \theta_0, \varphi_0)$ , on aurait

$$\vec{a}_R = \frac{\partial \vec{R}_s}{\partial R} = \cos \theta_0 \cos \varphi_0 \vec{1}_x + \cos \theta_0 \sin \varphi_0 \vec{1}_y + \sin \theta_0 \vec{1}_z, \quad (\text{C.17})$$

$$\vec{a}_\theta = \frac{\partial \vec{R}_s}{\partial \theta} = -R \sin \theta_0 \cos \varphi_0 \vec{1}_x - R \sin \theta_0 \sin \varphi_0 \vec{1}_y + R \cos \theta_0 \vec{1}_z, \quad (\text{C.18})$$

$$\vec{a}_\varphi = \frac{\partial \vec{R}_s}{\partial \varphi} = -R \cos \theta_0 \sin \varphi_0 \vec{1}_x + R \cos \theta_0 \cos \varphi_0 \vec{1}_y. \quad (\text{C.19})$$

Les vecteurs *non normés*  $\vec{a}_R, \vec{a}_\theta, \vec{a}_\varphi$  peuvent être utilisés pour associer une dérivée directionnelle à une dérivée partielle selon, respectivement,  $R, \theta$  ou  $\varphi$ . Pour d'autres paramétrisations, les directions peuvent aussi être *non orthogonales*. Ici,  $\vec{a}_R \perp \vec{a}_\theta \perp \vec{a}_\varphi \perp \vec{a}_R$  et  $|\vec{a}_R| = 1, |\vec{a}_\theta| = R, |\vec{a}_\varphi| = R \cos \theta_0$ .

### C.1.3 Gradient

#### Première approche

Les règles de dérivation pour la composition de fonctions d'une seule variable nous donnent

$$\frac{du(v(x))}{dx} = \frac{dv(x)}{dx} \frac{du(v)}{dv}. \quad (\text{C.20})$$

Si on écrit une expression similaire dans le cas vectoriel, sans faire attention au sens des expressions à ce stade, on obtient

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} = \frac{\partial g(\vec{R}(x, y, z))}{\partial x} = \frac{\partial \vec{R}(x, y, z)}{\partial x} \frac{dg(\vec{r})}{d\vec{r}} = \vec{1}_x \frac{dg(\vec{r})}{d\vec{r}}. \quad (\text{C.21})$$

Pour que le résultat soit un scalaire, comme attendu, il est nécessaire que  $dg(\vec{r})/d\vec{r}$  soit un vecteur. Nous l'appellerons « gradient » de la fonction  $g$ .

À ce stade, rien ne garantit que le gradient existe. D'un point de vue mathématique, cela veut dire que nous ne savons pas s'il est possible de calculer cet objet et si deux manières de le calculer conduisent à une même résultat (existence et unicité). Nous allons donc montrer qu'il est possible de le calculer.

*Ces notations peuvent sembler lourdes. Néanmoins, si on veut comprendre la nuance entre les différents points de vue, il est indispensable de les utiliser. Si on simplifie les notations pour écrire  $\partial_x f = \partial_x g = \partial_x \vec{R} \nabla g = \vec{1}_x \nabla g$ , on crée une confusion qui bloque la compréhension. Pour s'autoriser à écrire ce genre de choses il faut un certain degré de pratique sans quoi on se trompe facilement au moment d'effectuer un calcul détaillé car on ne sais plus ce que sont  $f, g, \vec{r}, \vec{R}$ , etc.*

**Calcul de l'opérateur gradient dans un repère fixe orthonormé** En utilisant le lien entre dérivée directionnelle et dérivée partielle, on peut écrire

$$\frac{\partial g(\vec{R}(x, y, z))}{\partial x} = \frac{\partial g(\vec{r})}{\partial_{\parallel} \vec{1}_x} = \vec{1}_x \cdot \frac{d}{d\vec{r}} g. \quad (\text{C.22})$$

On peut procéder de la même manière pour les trois directions  $x, y, z$  d'un repère orthonormé, ce qui conduit à

$$\frac{\partial g}{\partial_{\parallel} \vec{1}_x} = \vec{1}_x \cdot \frac{d}{d\vec{r}} g, \quad (\text{C.23})$$

$$\frac{\partial g}{\partial_{\parallel} \vec{1}_y} = \vec{1}_y \cdot \frac{d}{d\vec{r}} g, \quad (\text{C.24})$$

$$\frac{\partial g}{\partial_{\parallel} \vec{1}_z} = \vec{1}_z \cdot \frac{d}{d\vec{r}} g. \quad (\text{C.25})$$

Connaissant les trois projections de ce vecteur sur les axes, on en déduit directement que

$$\frac{d}{dr}g = \left( \vec{I}_x \frac{\partial}{\partial_{\parallel} \vec{I}_x} + \vec{I}_y \frac{\partial}{\partial_{\parallel} \vec{I}_y} + \vec{I}_z \frac{\partial}{\partial_{\parallel} \vec{I}_z} \right) g. \quad (\text{C.26})$$

La fonction  $g$  étant quelconque, on peut écrire une égalité entre opérateurs

$$\frac{d \cdot}{dr} = \vec{I}_x \frac{\partial \cdot}{\partial_{\parallel} \vec{I}_x} + \vec{I}_y \frac{\partial \cdot}{\partial_{\parallel} \vec{I}_y} + \vec{I}_z \frac{\partial \cdot}{\partial_{\parallel} \vec{I}_z}. \quad (\text{C.27})$$

**Opérateur nabla** Lorsque l'on préfère travailler avec la fonction  $f$ , on peut de manière équivalente définir un opérateur.

On écrit

$$\vec{\nabla}f = \vec{I}_x \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{I}_y \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{I}_z \frac{\partial f}{\partial z}. \quad (\text{C.28})$$

Malgré l'analogie entre  $\frac{d}{dr}$  et  $\nabla$ , nous verrons que ces deux objets ne se comportent pas de la même manière quand on change de repère. Pour voir cela, nous allons nous intéresser à la représentation du gradient dans un système de coordonnées le plus général possible, avec des axes non orthogonaux et non normés.

### Gradient pour le calcul de la dérivée directionnelle

En généralisant l'expression obtenue pour la direction  $\vec{I}_x$ , on peut écrire

$$\frac{\partial g(\vec{r})}{\partial_{\parallel} \vec{a}} = \frac{\partial g(\vec{r} + \lambda \vec{a})}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} = \vec{a} \cdot \frac{d}{dr}g. \quad (\text{C.29})$$

**Gradient dans un repère non orthogonal et non normé** Le gradient ayant trois composantes, on conçoit qu'il faut partir de trois dérivées directionnelles dans des directions linéairement indépendantes pour le définir. On choisit une base  $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$

$$\frac{\partial}{\partial_{\parallel} \vec{a}_1} g(\vec{r}) = \vec{a}_1 \cdot \frac{d}{dr}g(\vec{r}), \quad (\text{C.30})$$

$$\frac{\partial}{\partial_{\parallel} \vec{a}_2} g(\vec{r}) = \vec{a}_2 \cdot \frac{d}{dr}g(\vec{r}), \quad (\text{C.31})$$

$$\frac{\partial}{\partial_{\parallel} \vec{a}_3} g(\vec{r}) = \vec{a}_3 \cdot \frac{d}{dr}g(\vec{r}). \quad (\text{C.32})$$

**Base conjuguée** Lorsque l'on travaille avec des coordonnées non orthogonales, il est plus simple d'introduire une base conjuguée de la première. L'utilisation du mot « conjugué » laisse penser que la base conjuguée de la conjuguée est la base originale et nous verrons qu'il en est bien ainsi<sup>a</sup>.

On définit la base conjuguée  $c$  de  $a$  en imposant que

$$\vec{c}_1 \cdot \vec{a}_1 = \vec{c}_2 \cdot \vec{a}_2 = \vec{c}_3 \cdot \vec{a}_3 = 1, \quad (\text{C.33})$$

$$\vec{c}_1 \cdot \vec{a}_2 = \vec{c}_2 \cdot \vec{a}_3 = \vec{c}_3 \cdot \vec{a}_1 = 0, \quad (\text{C.34})$$

$$\vec{c}_1 \cdot \vec{a}_3 = \vec{c}_2 \cdot \vec{a}_1 = \vec{c}_3 \cdot \vec{a}_2 = 0, \quad (\text{C.35})$$

La symétrie des relations (C.33–C.35) a entre  $a$  et  $c$  montre que la base conjuguée de  $a$  est  $c$  si  $c$  est la conjuguée de  $a$ .

qui s'écrit sous forme condensée

$$\vec{c}_i \cdot \vec{a}_j = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}, \quad (\text{C.36})$$

qui se note généralement en définissant le symbole *delta de Kronecker*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}, \quad (\text{C.37})$$

Une manière de calculer les vecteurs de cette base est la suivante,

$$\vec{c}_1 = \frac{\vec{a}_2 \times \vec{a}_3}{\vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)}, \quad (\text{C.38})$$

$$\vec{c}_2 = \frac{\vec{a}_3 \times \vec{a}_1}{\vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)}, \quad (\text{C.39})$$

$$\vec{c}_3 = \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{\vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)}. \quad (\text{C.40})$$

**Représentation d'un vecteur sur les deux bases** Un vecteur quelconque  $\vec{q}$  peut se représenter dans la base des vecteurs  $\vec{a}_i$  ou dans celle des  $\vec{c}_i$ , ou dans toute autre base. Calculons les composantes  $q_i^c$  du vecteur  $\vec{q}$  dans la base des  $c_i$ . On a

$$\vec{q} = q_1^c \vec{c}_1 + q_2^c \vec{c}_2 + q_3^c \vec{c}_3, \quad (\text{C.41})$$

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{q} = q_1^c \vec{a}_1 \cdot \vec{c}_1 + q_2^c \vec{a}_1 \cdot \vec{c}_2 + q_3^c \vec{a}_1 \cdot \vec{c}_3 = q_1^c, \quad (\text{C.42})$$

$$\vec{a}_2 \cdot \vec{q} = q_2^c, \quad (\text{C.43})$$

$$\vec{a}_3 \cdot \vec{q} = q_3^c. \quad (\text{C.44})$$

En comparant les équations (C.30)–(C.32) et (C.42)–(C.44) on déduit que les composantes de  $\frac{d}{dr}$  sur la base conjuguée sont données par les dérivées directionnelles, ce qui conduit à une généralisation de (C.27),

$$\frac{d}{dr} = \vec{c}_1 \frac{\partial}{\partial_{\parallel} \vec{a}_1} + \vec{c}_2 \frac{\partial}{\partial_{\parallel} \vec{a}_2} + \vec{c}_3 \frac{\partial}{\partial_{\parallel} \vec{a}_3}, \quad (\text{C.45})$$

valable sur n'importe quelle base de vecteurs, même si elle est non orthogonale ou non normée. Le prix à payer pour cette généralité est de devoir utiliser deux bases.

**Opérateur nabla en base quelconque** Au départ des équations (C.45), on peut calculer la forme de l'opérateur  $\nabla$  pour une paramétrisation donnée de l'espace. Cette paramétrisation induit une base locale dans laquelle on calcule  $\frac{d}{dr}$  dont on déduit  $\nabla$ .

Alors que le gradient est défini indépendamment de toute paramétrisation de l'espace, ce n'est pas le cas de l'opérateur  $\nabla$ . L'utilisation de ce dernier nécessite une certaine intuition pour savoir comment l'utiliser.

### C.1.4 Interprétation du gradient

La relation

$$\frac{\partial}{\partial_{\parallel} \vec{a}} = \vec{a} \cdot \vec{\nabla} f, \quad (\text{C.46})$$

montre que la fonction ne varie pas dans la direction orthogonale à  $\vec{\nabla} f$  et qu'elle possède sa plus forte variation lorsque  $\vec{a} \parallel \vec{\nabla} f$ . Le gradient d'une fonction indique donc la direction de plus grande pente. Les courbes de niveau sont orthogonales à ce gradient.

## C.2 Calcul de nabla pour différentes paramétrisations

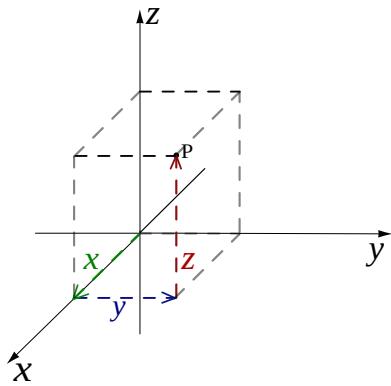
### Coordonnées cartésiennes

Dans cette paramétrisation, on utilise l'abscisse  $x$ , l'ordonnée  $y$  et l'élévation  $z$  comme représenté à la figure C.2.

### Paramétrisation

$$\vec{R}(x, y, z) = x \vec{1}_x + y \vec{1}_y + z \vec{1}_z. \quad (\text{C.47})$$

**FIGURE C.2 :** Paramétrisation de l'espace en coordonnées cartésiennes (rectangulaires). Un point  $P$  est localisé au moyen de l'abscisse  $x$ , de l'ordonnée  $y$  et de l'élévation  $z$ .



### Base induite par la paramétrisation

$$\vec{a}_1 = \frac{\partial \vec{R}}{\partial x} = \vec{1}_x, \quad (\text{C.48})$$

$$\vec{a}_2 = \frac{\partial \vec{R}}{\partial y} = \vec{1}_y, \quad (\text{C.49})$$

$$\vec{a}_3 = \frac{\partial \vec{R}}{\partial z} = \vec{1}_z. \quad (\text{C.50})$$

On constate que la base induite par la paramétrisation est la base fixe du repère  $Oxyz$ .

### Base conjuguée

$$\vec{c}_1 = \vec{1}_x = \vec{a}_1, \quad (\text{C.51})$$

$$\vec{c}_2 = \vec{1}_y = \vec{a}_2, \quad (\text{C.52})$$

$$\vec{c}_3 = \vec{1}_z = \vec{a}_3. \quad (\text{C.53})$$

Comme on pouvait s'y attendre, les trois bases sont confondues dans le cas des coordonnées rectangulaires.

**Opérateur gradient** La définition générale conduit à

$$\frac{d}{d\vec{r}} = \vec{1}_x \frac{\partial}{\partial_{\parallel} \vec{1}_x} + \vec{1}_y \frac{\partial}{\partial_{\parallel} \vec{1}_y} + \vec{1}_z \frac{\partial}{\partial_{\parallel} \vec{1}_z}. \quad (\text{C.54})$$

**Opérateur nabla** On retrouve naturellement la définition précédente

$$\vec{\nabla} = \vec{1}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{1}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{1}_z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (\text{C.55})$$

**Opérateur divergence** En utilisant la définition de l'opérateur divergence  $\operatorname{div} \bar{F} = \overrightarrow{\operatorname{grad}} \cdot \bar{F}$ , on obtient pour un champ  $\bar{F} = F_x \vec{1}_x + F_y \vec{1}_y + F_z \vec{1}_z$ ,

$$\operatorname{div} \bar{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (\text{C.56})$$

**Opérateur rotationnel** En utilisant la définition de l'opérateur rotationnel  $\overrightarrow{\operatorname{rot}} \bar{F} = \overrightarrow{\operatorname{grad}} \times \bar{F}$ , on obtient pour un champ  $\bar{F} = F_x \vec{1}_x + F_y \vec{1}_y + F_z \vec{1}_z$ ,

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \bar{F} = \sum_{ijk} \bar{1}_i \epsilon_{ijk} \partial_j F_k = \bar{1}_x \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \bar{1}_y \left( \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \bar{1}_z \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right), \quad (\text{C.57})$$

où  $\epsilon_{ijk}$  est l'*epsilon de Levi-Civita*.

### Coordonnées cylindriques

Dans ce système de coordonnées, on mesure la distance  $\rho$  depuis l'origine dans le plan  $Oxy$ , l'angle  $\theta$  depuis l'axe  $Ox$  et l'élévation depuis  $Oxy$  comme représenté à la figure C.3.

### Paramétrisation

$$\vec{R}_c(\rho, \theta, z) = \rho \cos \theta \vec{1}_x + \rho \sin \theta \vec{1}_y + z \vec{1}_z. \quad (\text{C.58})$$

**Base induite par la paramétrisation** On obtient

$$\vec{a}_1 = \frac{\partial \vec{R}_c}{\partial \rho} = \cos \theta \vec{1}_x + \sin \theta \vec{1}_y = \vec{1}_\rho, \quad (\text{C.59})$$

$$\vec{a}_2 = \frac{\partial \vec{R}_c}{\partial \theta} = -\rho \sin \theta \vec{1}_x + \rho \cos \theta \vec{1}_y = \rho \vec{1}_\theta, \quad (\text{C.60})$$

$$\vec{a}_3 = \frac{\partial \vec{R}_c}{\partial z} = \vec{1}_z, \quad (\text{C.61})$$

où l'on a identifié le repère mobile (variant en chaque point)  $\vec{1}_\rho, \vec{1}_\theta, \vec{1}_z$ .

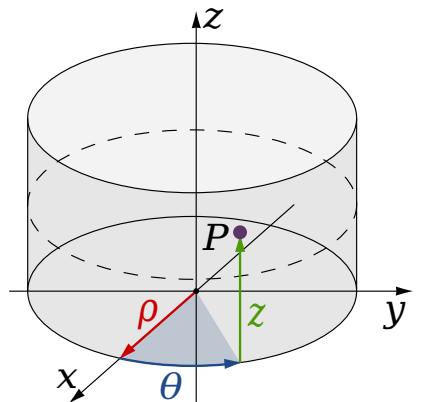
**Base conjuguée** Le produit mixte de la base  $a$  vaut  $\rho$ . La base conjuguée correspond à

$$\vec{c}_1 = \rho (\vec{1}_\theta \times \vec{1}_z) / \rho = \vec{1}_\rho = \vec{a}_1; \quad (\text{C.62})$$

$$\vec{c}_2 = (\vec{1}_z \times \vec{1}_\rho) / \rho = \frac{1}{\rho} \vec{1}_\theta = \frac{1}{\rho^2} \vec{a}_2; \quad (\text{C.63})$$

$$\vec{c}_3 = \rho (\vec{1}_\rho \times \vec{1}_\theta) / \rho = \vec{1}_z = \vec{a}_3. \quad (\text{C.64})$$

**FIGURE C.3 :** Paramétrisation de l'espace en coordonnées cylindriques. Un point  $P$  est localisé au moyen du rayon  $\rho$ , de l'angle  $\theta$  et de l'élévation  $z$ .



### Opérateur gradient

$$\frac{d}{d\vec{r}} = \vec{1}_\rho \frac{\partial}{\partial_{\parallel} \vec{a}_1} + \vec{1}_\theta \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial_{\parallel} \vec{a}_2} + \vec{1}_z \frac{\partial}{\partial_{\parallel} \vec{a}_3} \quad (\text{C.65})$$

$$= \vec{1}_\rho \frac{\partial}{\partial_{\parallel} \vec{1}_\rho} + \vec{1}_\theta \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial_{\parallel} \rho \vec{1}_\theta} + \vec{1}_z \frac{\partial}{\partial_{\parallel} \vec{1}_z} \quad (\text{C.66})$$

$$= \vec{1}_\rho \frac{\partial}{\partial_{\parallel} \vec{1}_\rho} + \vec{1}_\theta \frac{\partial}{\partial_{\parallel} \vec{1}_\theta} + \vec{1}_z \frac{\partial}{\partial_{\parallel} \vec{1}_z}. \quad (\text{C.67})$$

**Opérateur nabla** On repart de (C.65), ce qui fournit

$$\vec{\nabla} = \vec{1}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \vec{1}_\theta \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{1}_z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (\text{C.68})$$

**Opérateur divergence** Nous allons calculer la divergence d'un champ  $\bar{F} = F_1 \bar{a}_1 + F_2 \bar{a}_2 + F_3 \bar{a}_3$ , qui s'écrit dans la base orthonormée  $\bar{F} = F_\rho \vec{1}_\rho + F_\theta \vec{1}_\theta + F_z \vec{1}_z$ . En particulier, on constate que  $F_2 \rho = F_\theta$ . Pour calculer la divergence, on utilise le fait que  $\partial \cdot / \partial \bar{a}_i = \partial \cdot / \partial u_i$ , où  $u_1 = \rho$ ,  $u_2 = \theta$ ,  $u_3 = z$ ,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \bar{F} &= \sum_{i=1}^3 \bar{c}_i \frac{\partial}{\partial \bar{a}_i} \sum_{j=1}^3 F_j \bar{a}_j \\ &= \sum_{i,j} \bar{c}_i \bar{a}_j \frac{\partial F_j}{\partial u_i} + \sum_{i,j} \bar{c}_i F_j \frac{\partial \bar{a}_j}{\partial u_i} \\ &= \sum_{i,j} \delta_{ij} \frac{\partial F_j}{\partial u_i} + \sum_{i,j} \bar{c}_i F_j \frac{\partial \bar{a}_j}{\partial u_i} \\ &= \sum_i \frac{\partial F_i}{\partial u_i} + \sum_{i,j} \bar{c}_i F_j \frac{\partial \bar{a}_j}{\partial u_i}, \end{aligned} \quad (\text{C.69})$$

qui montre la nécessité de connaître les dérivées  $\partial \bar{a}_j / \partial u_i$ . Si la base des vecteurs  $\bar{a}_i$  était fixe, les dérivées partielles  $\partial_i \bar{a}_j$  seraient nulles, comme c'était le cas pour les coordonnées cartésiennes. Ici, non seulement le champ varie d'un point à l'autre, mais en plus la base dans laquelle le champ est décrit varie également. En se référant aux valeurs de  $\bar{a}_i$  calculées ci-dessus, on a

$$\begin{aligned} \partial_\rho \vec{1}_\rho &= 0, & \partial_\theta \vec{1}_\rho &= \vec{1}_\theta, & \partial_z \vec{1}_\rho &= 0, \\ \partial_\rho (\rho \vec{1}_\theta) &= \vec{1}_\theta, & \partial_\theta (\rho \vec{1}_\theta) &= -\rho \vec{1}_\rho, & \partial_z (\rho \vec{1}_\theta) &= 0, \\ \partial_\rho \vec{1}_z &= 0, & \partial_\theta \vec{1}_z &= 0, & \partial_z \vec{1}_z &= 0, \end{aligned} \quad (\text{C.70})$$

qui conduit à

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \bar{F} &= \frac{\partial F_\rho}{\partial \rho} + \frac{\partial F_\theta / \rho}{\partial \theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z} + \bar{c}_1 F_2 \cdot \vec{1}_\theta + \bar{c}_2 F_1 \cdot \vec{1}_\theta + \bar{c}_2 (-\rho) \vec{1}_\rho \\ &= \frac{\partial F_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho} F_\rho. \end{aligned} \quad (\text{C.71})$$

Cette dernière expression est souvent présentée sous la forme plus compacte et ne faisant apparaître que des termes différentiels

$$\operatorname{div} \bar{F} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho F_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z}. \quad (\text{C.72})$$

**Opérateur rotationnel** En utilisant la définition de l'opérateur rotationnel  $\overline{\text{rot}} \bar{F} = \overrightarrow{\text{grad}} \times \bar{F}$ , on obtient pour un champ  $\bar{F} = F_1 \bar{a}_1 + F_2 \bar{a}_2 + F_3 \bar{a}_3$ ,

$$\overline{\text{rot}} \bar{F} = \sum_{i,j} \bar{c}_i \frac{\partial}{\partial \bar{a}_i} \times (F_j \bar{a}_j) \quad (\text{C.73})$$

$$= \sum_{i,j} \bar{c}_i \times \bar{a}_j \frac{\partial F_j}{\partial u_i} + \sum_{i,j} F_j \bar{c}_i \times \frac{\partial \bar{a}_j}{\partial u_i}. \quad (\text{C.74})$$

En utilisant les dérivées partielles des vecteurs de la base cylindrique calculées en (C.70) et la correspondance des composantes dans les bases  $\bar{a}_i$  et la base orthonormée, on obtient

$$\overline{\text{rot}} \bar{F} = \left( \frac{1}{\rho} \partial_\theta F_z - \partial_z F_\theta \right) \bar{1}_\rho + (\partial_z F_\rho - \partial_\rho F_z) \bar{1}_\theta + \frac{1}{\rho} (\partial_\rho (\rho F_\theta) - \partial_\theta F_\rho) \bar{1}_z. \quad (\text{C.75})$$

### Coordonnées sphériques

Dans ce système de coordonnées, on mesure la distance  $R$  depuis l'origine, l'angle  $\varphi$  depuis l'axe  $Ox$  dans le plan  $Oxy$  et l'angle  $\theta$  depuis  $Oz$  comme représenté à la figure C.4. Il est également courant de noter la distance  $r$  ou  $\rho$ .

**FIGURE C.4 :** Paramétrisation de l'espace en coordonnées sphériques. Un point  $P$  est localisé au moyen de la distance  $R$ , de l'angle polaire  $\theta$  et de l'angle azimutal  $\varphi$ .

### Paramétrisation

$$\vec{R}_s(R, \theta, \varphi) = R \vec{1}_R = R \sin \theta \cos \varphi \vec{1}_x + R \sin \theta \sin \varphi \vec{1}_y + R \cos \theta \vec{1}_z \quad (\text{C.76})$$

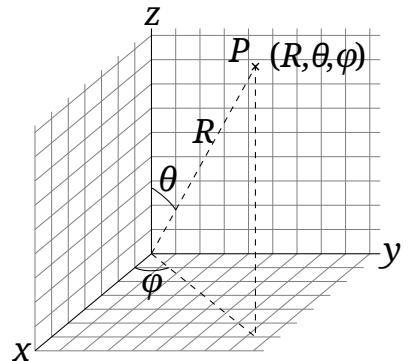
### Base induite par la paramétrisation

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 &= \frac{\partial \vec{R}_s}{\partial R} = \sin \theta \cos \varphi \vec{1}_x + \sin \theta \sin \varphi \vec{1}_y + \cos \theta \vec{1}_z \\ &= \vec{1}_R, \end{aligned} \quad (\text{C.77})$$

$$\begin{aligned} \vec{a}_2 &= \frac{\partial \vec{R}_s}{\partial \theta} = R \cos \theta \cos \varphi \vec{1}_x + R \cos \theta \sin \varphi \vec{1}_y - R \sin \theta \vec{1}_z \\ &= R \vec{1}_\theta, \end{aligned} \quad (\text{C.78})$$

$$\begin{aligned} \vec{a}_3 &= \frac{\partial \vec{R}_s}{\partial \varphi} = -R \sin \theta \sin \varphi \vec{1}_x + R \sin \theta \cos \varphi \vec{1}_y \\ &= R \sin \theta \vec{1}_\varphi, \end{aligned} \quad (\text{C.79})$$

où l'on a identifié le repère mobile (variant en chaque point)  $\vec{1}_R, \vec{1}_\theta, \vec{1}_\varphi$ .



**Base conjuguée** Le produit mixte de la base  $a$  vaut  $R^2 \sin \theta$ . La base conjuguée correspond à

$$\vec{c}_1 = R^2 \sin \theta (\vec{1}_\theta \times \vec{1}_\varphi) / (R^2 \sin \theta) = \vec{1}_R = \vec{a}_1; \quad (\text{C.80})$$

$$\vec{c}_2 = R \sin \theta (\vec{1}_\varphi \times \vec{1}_R) / (R^2 \sin \theta) = \frac{1}{R} \vec{1}_\theta = \frac{1}{R^2} \vec{a}_2; \quad (\text{C.81})$$

$$\vec{c}_3 = R (\vec{1}_R \times \vec{1}_\theta) / (R^2 \sin \theta) = \frac{1}{R \sin \theta} \vec{1}_\varphi = \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \vec{a}_3. \quad (\text{C.82})$$

**Opérateur gradient** L'expression générale se particularise à

$$\frac{d}{d\vec{r}} = \vec{1}_R \frac{\partial}{\partial_{\parallel} \vec{a}_1} + \vec{1}_{\theta} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial_{\parallel} \vec{a}_2} + \vec{1}_{\varphi} \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial_{\parallel} \vec{a}_3} \quad (\text{C.83})$$

$$= \vec{1}_R \frac{\partial}{\partial_{\parallel} \vec{1}_R} + \vec{1}_{\theta} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial_{\parallel} R \vec{1}_{\theta}} + \vec{1}_{\varphi} \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial_{\parallel} R \sin \theta \vec{1}_{\varphi}}$$

$$= \vec{1}_R \frac{\partial}{\partial_{\parallel} \vec{1}_R} + \vec{1}_{\theta} \frac{\partial}{\partial_{\parallel} \vec{1}_{\theta}} + \vec{1}_{\varphi} \frac{\partial}{\partial_{\parallel} \vec{1}_{\varphi}}, \quad (\text{C.84})$$

qui montre de manière intéressante via (C.84) que ce qui importe est de choisir des directions. Si ces trois directions sont orthonormées, la base conjuguée et la base initiale sont les mêmes et le gradient se calcule facilement dans cette base. Le fait que les vecteurs de base changent d'un point à un autre ne modifie pas le résultat puisque le gradient est indépendant du choix du repère dans lequel on le calcule.

**Opérateur nabla** On repart de (C.83), ce qui fournit

$$\vec{\nabla} = \vec{1}_R \frac{\partial}{\partial R} + \vec{1}_{\theta} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{1}_{\varphi} \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (\text{C.85})$$

**Opérateur divergence** En suivant la démarche de la section C.2, on obtient l'expression de la divergence

$$\operatorname{div} \bar{F} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial R^2 F_R}{\partial R} + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \sin \theta F_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial F_{\varphi}}{\partial \varphi}. \quad (\text{C.86})$$

**Opérateur rotationnel** Par analogie avec ce qui précède, on trouve

$$\begin{aligned} \overline{\operatorname{rot}} \bar{F} &= \frac{1}{R \sin \theta} \left( \frac{\partial \sin \theta F_{\varphi}}{\partial \theta} - \frac{\partial F_{\theta}}{\partial \varphi} \right) \bar{1}_R + \left( \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial F_R}{\partial \varphi} - \frac{1}{R} \frac{\partial R F_{\varphi}}{\partial R} \right) \bar{1}_{\theta} \\ &\quad + \frac{1}{R} \left( \frac{\partial R F_{\theta}}{\partial R} - \frac{\partial F_R}{\partial \theta} \right) \bar{1}_{\varphi}. \end{aligned} \quad (\text{C.87})$$

# Loi de corrélation de Faraday

D  
Annexe

## D.1 Introduction

La loi d'induction de Faraday est reprise dans tous les ouvrages introductifs de l'électromagnétisme et ces notes de cours ne font pas exception.

Néanmoins, s'il y a induction dans la loi de Faraday, c'est sans doute l'induction dans l'erreur.

En effet, le point de vue relativiste montre bien que les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  forment un être hybride, mi-électrique, mi-magnétique, en un mot « électromagnétique ». On ne peut donc pas à proprement parler d'induction d'un champ électrique par un champ magnétique dont les sources sont en mouvement. La réalité relativiste, est que l'être hybride est vu comme un champ magnétique depuis le repère de ses sources. Par contre, dans un repère qui évolue par rapport au repère de ses sources, ce champ est perçu comme un champ électrique dont l'intensité vaut  $\vec{v} \times \vec{B}$ .

Le champ magnétique n'induit donc pas le champ électrique, puisque ce sont deux composantes d'un même champ. En physique relativiste on utilise une seule lettre pour désigner ce champ. Malheureusement, en physique non relativiste, on en utilise deux... La raison en est qu'on essaie d'identifier les objets physiques que l'on observe à des objets mathématiques que l'on connaît. L'association entre un vecteur et une vitesse ou une force fonctionne bien et est suffisante. Par contre, le champ électromagnétique se comporte partiellement comme un vecteur ( $\vec{E}$ ) et partiellement comme un pseudo-vecteur ( $\vec{B}$ ). Leurs composantes sont toutefois liées entre elles.

L'équation de Faraday est souvent écrite sous la Forme

$$\overline{\text{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (\text{D.1})$$

mais il vaudrait mieux l'écrire systématiquement sous la forme

$$\overline{\text{rot}}\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \bar{0}. \quad (\text{D.2})$$

Ce faisant, on comprend mieux que cette équation est une condition de compatibilité qui lie les différentes composantes du champ électromagnétique. Ce sont en effet les sources  $\rho$  et  $\vec{J}$  qui génèrent le champ et non une partie du champ qui en génère une autre.

**FIGURE D.1 :** Représentation imagée d'un être hybride ayant à la fois des caractéristiques du champ électrique et d'autres caractéristiques du champ magnétique.



Imaginons un instant qu'on note le champ magnétique sous une forme un peu particulière, dans laquelle la composante selon  $z$  serait appelée  $Z$ , de sorte qu'on ait :

$$\bar{B} = (B_x \bar{1}_x + B_y \bar{1}_y) + Z \bar{1}_z. \quad (\text{D.3})$$

On pourrait noter

$$\bar{F} = B_x \bar{1}_x + B_y \bar{1}_y, \quad (\text{D.4})$$

ce qui permettrait de réécrire la loi de Gauss magnétique sous la forme

$$\operatorname{div} \bar{F} = -\frac{\partial Z}{\partial z}, \quad (\text{D.5})$$

laissant peut-être penser que le champ  $Z$  génère le champ  $\bar{F}$  par ses variations selon  $z$ . Il n'en est rien puisque cette impression résulte de la notation utilisée. Il en est de même pour le champ électromagnétique dont les deux parties portent un nom différent.

Ayez ceci à l'esprit lorsque vous raisonnez sur la loi d'*induction* de Faraday et pensez qu'il s'agit plutôt d'une loi de compatibilité ou de corrélation entre composantes d'un champ.

## D.2 Équations de Jefimenko

Pour étayer ce qui vient d'être dit, on peut réécrire les équations de Maxwell sous une forme qui fait bien apparaître la dépendance des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  en les sources, et l'indépendance mutuelle de  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ .

### D.2.1 Présentation des équations de Jefimenko

L'expression qui suit fait appel à la notion de champ retardé. Comme une perturbation électromagnétique se propage à la vitesse  $c$ , une modification de la distribution des charges ou de la densité de courant se répercute en un point après un délai correspondant à  $R/c$  où  $R$  est la distance entre le point de la source et le point d'observation.

Les équations sont données par

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \rho(\vec{r}', t_r) + \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \frac{1}{c} \frac{\partial \rho(\vec{r}', t_r)}{\partial t} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{J}(\vec{r}', t_r)}{\partial t} \right] dV', \quad (\text{D.6})$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[ \vec{J}(\vec{r}', t_r) \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{J}(\vec{r}', t_r)}{\partial t} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right] dV', \quad (\text{D.7})$$

où l'expression  $t_r$  désigne le temps retardé

$$t_r = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}. \quad (\text{D.8})$$

### D.2.2 Analyse des équations de Jefimenko

L'équation (D.6) montre que dans le cas de l'électrostatique, où  $\vec{J}$  est nul et les charges immobiles, un champ électrique est créé

par l'action du premier terme de cette équation, conformément à la *loi de Coulomb*. Dans ce cas, (D.7) indique qu'il n'y pas de champ  $\vec{B}$ . Dans le cas de la magnétostatique pour laquelle les courants sont établis et la neutralité des conducteurs est assurée, on n'observe pas de champ électrique, tandis que (D.7) prédit l'existence d'un champ magnétique, ce qui correspond à la *loi de Biot–Savart*.

Ces équations montrent également que les champs de l'*electrostatique* et de la *magnétostatique* décroissent en  $1/R^2$ . Bien que jamais nulle, leur influence à grande distance disparaît assez vite au contraire des derniers termes de (D.6) et (D.7). Ces derniers termes, expliquent notamment que si une charge électrique accélère — ou ralentit, ce qui correspond à une accélération négative et peut être sous-entendu dans l'expression précédente — elle engendre une radiation qui décroît en  $1/R$  [15, t. I, chap. 28].

En conclusion, dans le régime électrostatique et magnétostatique, les sources peuvent produire un champ  $\vec{E}$  ou un champ  $\vec{B}$ . La connaissance de  $\vec{E}$  ne nous informe pas sur  $\vec{B}$  et inversement. De manière contrastée, une radiation n'est produite que si la distribution de courant varie au cours du temps (courants non stationnaires). Dans ce cas, les deux composantes du champ électromagnétique sont créées en même temps et la connaissance des propriétés de l'une des composantes permet de calculer l'autre composante. Le retard étant le même pour chacune des composantes, elles évoluent ensemble sans interagir l'une avec l'autre, dans l'hypothèse où ces champs se propagent dans un espace vide. On ne peut pas dire que les variations du champ magnétique induisent un champ électrique et que les variations du champ électrique induisent un champ magnétique. On peut par contre dire qu'à grande distance des sources ces variations doivent être corrélées.



# E

Annexe

## Unités

Grandeur physique	Unité	Définition dans le SI
Champ électrique	Volt par mètre (V/m)	$1 \text{ V/m} = \frac{1\text{N}}{1\text{C}} = \frac{1\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{C}\cdot\text{s}^2}$
Champ magnétique	Tesla (T)	$1 \text{ T} = \frac{1\text{N}}{1\text{A}\cdot\text{m}} = \frac{1\text{kg}}{\text{C}\cdot\text{s}}$
Potentiel électrique	Volt (V)	$1 \text{ V} = \frac{1\text{W}}{1\text{A}} = \frac{1\text{kg}\cdot\text{m}^2}{\text{C}\cdot\text{s}^3}$
Électromotance		
Charge électrique	Coulomb (C)	$1 \text{ C} = 1 \text{ A}\cdot\text{s}$
Courant électrique	Ampère (A)	$1 \text{ A} = \frac{1\text{C}}{1\text{s}}$
Inductance	Henry (H)	$1 \text{ H} = \frac{1\text{Wb}}{1\text{A}} = \frac{1\text{kg}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2\cdot\text{s}^2}$
Capacité électrique	Farad (F)	$1 \text{ F} = \frac{1\text{C}}{1\text{V}} = \frac{1\text{C}^2\cdot\text{s}^2}{\text{kg}\cdot\text{m}^2}$
Flux magnétique	Weber (Wb)	$1 \text{ Wb} = \frac{1\text{V}\cdot\text{s}}{1} = \frac{1\text{kg}\cdot\text{m}^2}{\text{C}\cdot\text{s}^2}$
Résistance électrique	Ohm ( $\Omega$ )	$1 \text{ } \Omega = \frac{1\text{V}}{1\text{A}} = \frac{1\text{kg}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2\cdot\text{s}}$

**TABLE E.1** – Principales unités de l'électromagnétisme et leur définition dans le SI.

# Acronyms

**EDO** équation différentielle ordinaire I.133

**f.é.m.** force électromotrice vii, *glossaire* : force électromotrice

**f.é.m.i.** force électromotrice induite I.70

**MRU** mouvement rectiligne uniforme *glossaire* : mouvement rectiligne uniforme

**MRUA** mouvement rectiligne uniformément accéléré *glossaire* : mouvement rectiligne uniformément accéléré

**OLA** oscillateur linéaire amorti *glossaire* : oscillateur linéaire amorti

**OLAF** oscillateur linéaire amorti forcé I.148, *glossaire* : oscillateur linéaire amorti forcé

**OSUP** onde sphérique unidirectionnelle paraxiale *glossaire* : onde sphérique unidirectionnelle paraxiale

**é.é.m.** électromotance électromagnétique I.111, I.112, I.114, I.117, I.119–I.121, I.123, I.124, I.134–I.139, I.141, I.142, I.145–I.148, I.152–I.155, *glossaire* : électromotance électromagnétique

**é.é.m.i.** électromotance électromagnétique induite I.133, *glossaire* : électromotance électromagnétique induite

Ce glossaire est en construction. Vous pouvez le compléter à titre individuel ou en groupe.

# Glossaire

**champ** En physique, un « champ » désigne une grandeur définie en chaque point de l'espace. Elle se distingue de concepts globaux, comme le volume qui possède une seule valeur pour une zone délimitée de l'espace. La température de l'air, par exemple, peut être définie en chaque point d'une pièce ce qui permet de parler de champ de température. Indiquer qu'une grandeur est un champ, signifie qu'on peut lui associer une fonction variant en fonction du point  $P$  d'observation. Différentes notations sont possibles pour désigner la température, par exemple :  $T(P)$ , assez abstraite et ne nécessitant pas de repère de référence ;  $T(\bar{OP})$ , similaire à la précédente, mais indiquant que la position du point  $P$  est évaluée au départ de l'origine  $O$ . La grandeur la plus courante pour paramétriser l'espace est le vecteur  $\vec{r}$ , ou parfois le vecteur  $\vec{x}$ . Un certain nombre de raisonnements peuvent être construits sans utiliser de coordonnées pour  $\vec{r}$ , mais la plupart du temps, ce vecteur doit être défini dans une base. Les bases les plus fréquentes sont la base cartésienne  $\vec{r} = \vec{R}_r(x, y, z)$ , la base cylindrique  $\vec{r} = \vec{R}_c(\rho, \theta, z)$  et la base sphérique  $\vec{r} = \vec{R}_s(R, \theta, \varphi)$ . Le choix de la base est en général lié aux symétries du problème. I.4, I.26, I.38, I.45

**champ magnétique** Quantité vectorielle définie en chaque point de l'espace, représentée par le pseudo-vecteur  $\vec{B}$ , qui décrit la force magnétique exercée sur une charge en mouvement ou sur des matériaux magnétiques. L'unité de champ magnétique est le Tesla (T) I.21, I.55

**champ électrique** Quantité vectorielle définie en chaque point de l'espace, représentée par le vecteur  $\vec{E}$ , qui décrit la force électrique exercée sur une charge électrique. Son unité est le Volt par mètre (V/m) I.21, I.55

**champ électromagnétique** Quantité physique décrite par un vecteur  $\vec{E}$  qui en constitue la composante électrique et un pseudo-vecteur  $\vec{B}$  qui est la partie magnétique. Selon le principe de relativité, les composantes  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont modifiées lorsqu'ils sont observés depuis un repère en mouvement. Les *équations de Maxwell* décrivent le comportement spatio-temporel du champ électromagnétique pour une distribution de densité volumique de courant  $\vec{J}$  et une distribution de densité volumique de charge  $\rho$  données et vérifiant  $\partial\rho/\partial t + \text{div } \vec{J} = 0$ . La *force de Lorentz* permet de calculer l'influence du champ sur une particule chargée. I.133

**charge** Voir *charge électrique* I.21, I.55, I.97, I.101

**charge électrique** Propriété des particules à l'origine de forces qui cause des forces électriques lorsqu'elles sont placées dans un champ électrique. Les charges sont à l'origine du champ et elles subissent son action. Il existe deux types de charges : positives et négatives. Les charges de même signe se repoussent, tandis que les charges de signes opposés s'attirent. L'unité de charge électrique est le Coulomb (C). iii, I.45

**circulation** Notion associée à un champ de vecteurs  $\vec{F}$  et une courbe orientée  $\gamma$ . Elle correspond à l'intégration dans le sens de parcours défini pour la courbe du champ projeté sur la direction de l'élément d'arc  $d\vec{r}$  en chaque point de cette courbe :  $\mathcal{C} = \int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r}$ . I.21–I.23, I.25, I.26, I.29, I.45, I.55, I.76

**condensateur** Dispositif formé de deux conducteurs présentant des surfaces étendues et rapprochées, mais n'étant pas en contact. Il permet d'accumuler des charges de signes opposés sur les deux surfaces voisines, l'attraction coulombienne entre les charges de chacune des surfaces compensant la répulsion coulombienne au sein des charges de même signe sur chacune des deux surfaces. Le condensateur se caractérise par sa capacité à emmagasiner des charges qui se mesure en Farads de symbole « F » et correspondant à 1C/V. Notez qu'un conducteur isolé est aussi doté d'une capacité propre qui reflète sa propension à stocker des charges. I.97, I.133

**contour orienté** Un contour orienté est un contour parcouru dans un sens précis. Pour ce faire, on définit le sens de la tangente  $\vec{t}$  en un point et on choisit ensuite le sens de la tangente aux autres points de sorte que la tangente varie de manière continue quand on se déplace sur le contour. Il faut noter qu'un contour en une ou plusieurs parties qui forme le bord d'une surface orientée peut hériter son orientation de cette surface. En effet, connaissant la normale  $\vec{n}$  en un point  $P$  dans un voisinage du contour, on choisit le sens de la tangente en un point  $Q$  du contour de sorte que  $\vec{n} \cdot (\overrightarrow{PQ} \times \vec{t}) > 0$ . L'orientation du contour dépend donc de la définition du *produit vectoriel* vii, I.26, I.30, I.46, I.51, I.78–I.80, I.83, I.88, I.97–I.99, I.112, I.137

**courant** Le courant est le flux associé à une densité volumique de courant. Très souvent, on considère un conducteur filiforme parcouru par un courant. Dans ce cas, le courant correspond à l'intégrale de la densité volumique de courant sur une surface limitée par le contour externe du fil. I.21, I.97

**delta de Kronecker** Symbole à deux indices qui vaut un lorsque ces indices sont identiques et zéro sinon. On le note généralement  $\delta_{ij}$ . I.12, IV.19

**densité surfacique de charge** Rigoureusement, « densité surfacique de charge électrique ». I.107

**divergence** I.42, I.44, I.97

**dérivation en cascade** I.1, I.21

**dérivée** I.1, I.21

**dérivée directionnelle** I.1, I.21

**dérivée partielle** I.1, I.21

**epsilon de Levi-Civita** Symbole à trois indices, prenant chacun des valeurs comprises entre 1 et 3 inclus. Ce symbole vaut : 1 lorsque les indices sont une permutation cyclique des valeurs (1,2,3), donc explicitement, (1,2,3), (2,3,1) et (3,1,2) ; -1 lorsque les indices sont une permutation cyclique de (3,2,1), donc explicitement, (3,2,1), (2,1,3) et (1,3,2) ; et 0 dans les autres cas, donc lorsqu'un des indices apparaît deux fois. On le note généralement  $\epsilon_{ijk}$  I.39, IV.21

**flux** I.21, I.45, I.55

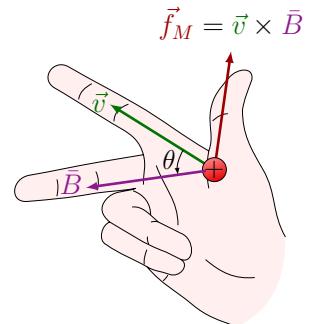
**force coulombienne** v, I.58

**force de Laplace** Force qui agit sur un élément de courant placé dans un champ magnétique constant. Si l'élément de courant s'écrit  $I d\vec{l}$ , et que le champ d'induction magnétique est noté  $\vec{B}$ , la force de Laplace est donnée par  $d\vec{F}_L = I d\vec{l} \times \vec{B}$  où l'opérateur  $\times$  désigne le *produit vectoriel*. Dans le repère de me Pour un produit vectoriel dextrogyre, les vecteurs sont orientés comme sur la figure G.1. La force totale s'obtient en intégrant l'élément de force  $d\vec{F}$  sur le contour parcouru par le courant. v, I.55

**force de Lorentz** Force qui agit sur une charge plongée dans un champ électromagnétique. Si la charge est animée d'une vitesse  $\vec{v}$  dans le référentiel de référence et que le champ électromagnétique y est décrit par  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ , la force de Lorenz est donnée par  $\vec{f}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ . La partie magnétique de la force est parfois appelée *force de Laplace* iii, v, I.48, I.61, I.63, I.71, I.72, I.86

**force répulsive** Force qui conduit à ce que deux objets se repoussent I.119

**force électromotrice** Circulation de la force par unité de charge agissant sur les charges mobiles et qui, au contraire de la *force coulombienne*, permet de séparer des charges de signes opposés. La force électromotrice peut venir d'un système chimique, comme une batterie ou une pile, de l'effet photovoltaïque, ou d'un champ électromagnétique, comme dans l'induction électromagnétique. Contrairement à ce que la dénomination pourrait laisser penser, la force électromotrice n'est pas une force, mais une circulation. C'est pourquoi il est conseillé d'utiliser un vocabulaire plus moderne, en parlant d'*electromotance* ou *tension de source*. Pour une charge mobile plongée dans un champ électromagnétique, la force s'appliquant est la *force de Lorentz*. Dans ce cas particulier,  $\mathcal{E} = \oint_C \vec{F}_L / q d\vec{l} = \oint_C (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) d\vec{l}$  vii, x, I.56, I.58, I.59



**FIGURE G.1 :** En repère dextrogyre, le produit vectoriel  $\vec{f}_M = \vec{v} \times \vec{B}$  est associé à la règle de la main droite comme représenté.

**gradient** Il s'agit d'un opérateur qui indique la direction de plus grande pente d'une fonction. Le gradient est décrit en détails dans le volume I, à l'annexe C.1 et présenté dans la section 1.2 p. I.3 I.10, I.15, I.25, I.26, I.29, I.44, I.45, I.55

**indice de réfraction** Nombre réel ou complexe caractérisant les propriétés optiques d'un matériau transparent, à une longueur d'onde donnée. La partie réelle  $n$  de cet indice est liée à la vitesse de propagation de l'onde dans le milieu via la relation  $v = c/n$ , où  $c$  est la *vitesse de la lumière* dans le vide et  $v$  la vitesse dans le milieu transparent. Il s'agit également du rapport entre la longueur d'onde dans le vide et celle dans le milieu transparent. La partie imaginaire de l'indice de réfraction est liée à l'atténuation par unité de longueur parcourue dans ce milieu. ix, x

**intégrale de contour** I.1, I.21, I.55

**intégrale de surface** I.1, I.21, I.55

**intégrale de volume** I.1, I.21

**linéaire** Une fonction linéaire, un champ linéaire ou une application linéaire, sont des objets mathématiques ou des systèmes physiques pour lesquels la sortie est proportionnelle à l'entrée. De manière plus rigoureuse, partons d'une fonction scalaire à une variable,  $f(x)$ . Cette fonction est linéaire si  $f(\alpha x) = \alpha f(x), \forall x, \forall \alpha$ , où  $\alpha$  est un nombre réel ou complexe (scalaire). Par calcul de la dérivée de  $f$ , on peut montrer que  $f$  est de la forme  $f = ax$ , où  $a$  est une constante et en déduire que  $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ , où  $\beta$  est également un scalaire.

Pour les fonctions vectorielles sur  $V$ , la linéarité se définit sur la base de cette dernière propriété généralisée. En conservant la même définition pour  $\alpha$  et  $\beta$ , on dit que  $\bar{F}(\bar{v})$  est une fonction linéaire (de son argument  $\bar{v}$ ) si

$$\bar{F}(\alpha \bar{v}_1 + \beta \bar{v}_2) = \alpha \bar{F}(\bar{v}_1) + \beta \bar{F}(\bar{v}_2), \forall \bar{v}_1, \bar{v}_2 \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

I.27–I.29, I.38

**loi d'Ampère** Loi liant la présence d'un courant continu stationnaire à l'existence d'un champ magnétique statique I.21, I.45, I.97, I.98

**loi d'Ohm**  $V = IR$  I.141, I.147, I.148

**loi d'Ørsted** Loi permettant de déterminer l'élément de champ magnétique créé par un élément de courant. Le champ magnétique s'enroule autour de l'élément, dans un plan perpendiculaire. Pour une orientation dextrogyre des repères, le sens de l'enroulement est donné à la figure G.2. Le champ magnétique est proportionnel au courant et décroît avec le carré de la distance. Par intégration sur la longueur du fil, on obtient la *loi de Biot–Savart*. vii

**loi de Biot-Savart** Loi permettant de calculer le champ magnétique induit par un courant en régime établi au sein d'un fil conducteur supposé infiniment mince. Pour une orientation dextrogyre des repères, le sens de l'enroulement est donné à la figure G.2. Lorsqu'on limite l'intégration à un élément de courbe infinitésimal, on obtient la *loi d'Ørsted*. vi, I.21, I.45, I.97, I.105, I.109, IV.27

**loi de Coulomb** Loi donnant la force qui s'exerce entre des particules chargées et immobiles IV.27

**loi de Faraday** Loi liant la présence d'un champ électrique irrotationnel à une variation de champ d'induction magnétique. Sous forme intégrale et sous l'hypothèse que le courant circule dans les fils minces en mouvement lent, elle prend la forme  $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$ , où  $\mathcal{E}$  désigne la *force électromotrice* (*f.e.m.*) dans le circuit électrique et  $\Phi_B$  désigne le flux magnétique au travers d'une surface s'appuyant sur le contour. Les règles de *contour orienté* et *surface orientée* sont à utiliser pour que le signe des grandeurs soit bien défini. I.46, I.112, I.114, I.133, I.134

**loi de Gauss** Loi liant la présence de charges statiques à l'existence d'un champ électrique statique I.21, I.45, I.46, I.97

**loi de Lenz** I.112–I.115, I.117, I.121, I.122, I.131, I.133, I.170

**longitudinalement** Dans le sens de la longueur. Lorsqu'on parle d'un objet animé d'une vitesse, la direction longitudinale est celle de la propagation. I.62

**macroscopique** Qui se voit à l'œil nu. Plus généralement, qui est d'une échelle perceptible par nos sens (vue, toucher). L'œil humain voit typiquement des objets d'une taille supérieure ou égale à  $100\mu\text{m}$  I.2, I.3, I.39

**magnétostatique** Étude des propriétés du champ magnétique résultant d'une distribution de courants constants I.21, I.97, IV.27

**mésoscopique** Qualifie une échelle d'analyse des phénomènes inférieure à l'échelle macroscopique, mais suffisamment grande pour que les lignes, surfaces ou volumes étudiés contiennent un nombre important d'objets microscopiques (ou nanoscopiques). Les objets physiques peuvent désigner des atomes, molécules, longueurs d'onde, etc I.3, I.39

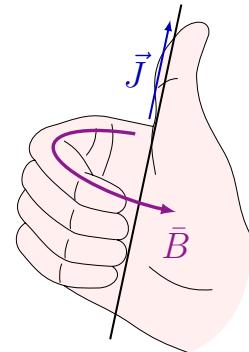
**nombre complexe** I.133

**notion de force** I.55

**oscillateur linéaire amorti forcé** I.148

**permittivité du vide**  $\epsilon_0$  I.107

**potentiel** I.25, I.55, I.133



**FIGURE G.2 :** En repère dextrogyre, le produit  $\vec{B} = \vec{J} \times \vec{r}$  est associé à la règle de la main droite comme représenté.

**produit mixte** Le produit mixte est noté  $[\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}] = \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})$ . Ce produit est invariant pour une permutation cyclique des trois vecteurs et il change de signe si on permute deux des vecteurs. La valeur absolue du produit mixte correspond au volume sous-tendu par les trois vecteurs. Le signe de ce produit peut également être utilisé pour orienter un volume. Le produit mixte est un *pseudo-scalaire* puisqu'il dépend de l'orientation dextrogyre ou lévogyre liée au *produit vectoriel*. Lorsqu'on représente les vecteurs dans un repère orthonormé, par exemple  $\bar{1}_x, \bar{1}_y, \bar{1}_z$ , le produit mixte se calcule par le déterminant formé des composantes des vecteurs  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  intervenant dans le produit mixte :

$$[\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}] = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}.$$

I.8, I.9, I.29, I.39, IV.5

**produit scalaire** Opération mathématique associant à deux vecteurs d'un espace tridimensionnel un scalaire dont la valeur dépend de l'angle entre les vecteurs et de l'amplitude de ces vecteurs. La restriction à un espace tridimensionnel n'est pas indispensable mais constitue le cas le plus fréquemment rencontré en physique. Le produit vectoriel est noté  $\bar{a} \cdot \bar{b} = c$ . Ce produit peut se calculer au départ de l'angle  $\theta$  entre les vecteurs  $\bar{a}$  et  $\bar{b}$ . Il vaut  $ab \cos \theta$  I.1, I.21

**produit vectoriel** Opération mathématique associant à deux vecteurs d'un espace tridimensionnel un troisième vecteur qui est orthogonal au plan des deux premiers vecteurs. La norme du vecteur résultant correspond à l'aire du parallélogramme sous-tendu par les deux vecteurs. La direction du vecteur résultant est choisie pour que les vecteurs forment un trièdre d'orientation dextrogyre ou lévogyre en fonction d'un choix arbitraire, mais devant être posé de manière cohérente pour l'ensemble d'un raisonnement. Le produit vectoriel est noté  $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{c}$ . Il implique que le vecteur  $\bar{c}$  est orthogonal aux vecteurs  $\bar{a}$  et  $\bar{b}$  et donc au plan sous-tendu par ces vecteurs. Sa norme vaut  $ab \sin \theta$ , où  $\theta$  est l'angle orienté de  $\bar{a}$  vers  $\bar{b}$ . Si pour amener le vecteur  $\bar{a}$  sur le vecteur  $\bar{b}$  par la rotation de moindre amplitude possible on tourne dans le sens des aiguilles d'une montre, alors le vecteur  $\bar{c}$  plonge dans l'horloge si le repère est dextrogyre et il en sort si le repère est lévogyre. L'orientation dextrogyre est choisie dans ces notes et illustrée à la figure G.3 iv, v, viii, I.1, I.21

**FIGURE G.3 :** Illustration de l'orientation du produit vectoriel dextrogyre : le vecteur résultant pointe vers le bas, si le mouvement du premier vers le second vecteur correspond au sens des aiguilles d'une montre.



**relativité galiléenne** Principe selon lequel les lois de la physique sont indépendantes de la vitesse du repère dans lequel ont fait une expérience, pour autant que cette vitesse soit constante. L'exemple type de repère en mouvement est un bateau. Si on laisse tomber un objet du haut du mât, celui-ci tombe à la

verticale par rapport au bateau et arrivera donc exactement au pied du mât. Avant l'énoncé de ce principe par Galilée, ce n'était pas évident. L'autre hypothèse était que le mouvement serait vertical par rapport au quai d'où l'on observe le bateau. Dans ce cas, l'objet serait tombé à une certaine distance du mât. I.80, I.84, I.85

**repère dextrogyre** I.21, I.30

**repère levogyre** I.21, I.30

**rotationnel** En anglais, le rotationnel est appelé « curl ». I.30, I.44, I.55, I.97

**réactance** I.161

**référentiel inertiel** I.63

**régime établi** I.63

**résistance** I.133, I.161

**surface orientée** Il s'agit d'une surface possédant deux côtés. C'est le cas général de la plupart des surfaces. Certaines surfaces, comme celle des anneaux de Moëbius ne sont toutefois pas orientables. On oriente la surface en définissant le sens de la normale à cette surface de sorte que cette normale varie de manière continue quand on se déplace sur la surface vii, I.1, I.21, I.30, I.38, I.46, I.49, I.51, I.55, I.97, I.98

**tension de source** La tension de source désigne l'*électromotance* d'une source électrochimique. Cette appellation est recommandée par la Commission électrotechnique internationale. v, I.58, I.59, I.63, I.70

**théorème circulation-rotationnel de Stokes** I.32, I.35, I.36, I.46, I.49, I.55, I.60, I.78, I.83, I.85, I.97

**théorème flux-divergence d'Ostrogradski-Gauss** I.49, I.51, I.55, I.60, I.82, I.83, I.97, I.102

**travail** I.55

**uniforme** Une grandeur physique est uniforme si elle ne varie pas avec la position. En général, une grandeur est supposée uniforme dans une zone de l'espace. Par exemple, on supposera qu'une vitre est faite d'un matériau uniforme. Cela veut dire, pour le chimiste que la composition chimique est partout la même. Pour l'opticien, cela veut dire que l'*indice de réfraction* est partout le même. D'un point de vue mathématique, une grandeur uniforme ne dépend pas des variables d'espace. Pour reprendre l'exemple de l'indice de réfraction, un indice quelconque s'écrirait  $n(x, y, z)$  dans le système d'axes *Oxyz*. Si l'indice est uniforme,  $\partial n / \partial x = \partial n / \partial y = \partial n / \partial z = 0$ . Il faut noter qu'une grandeur uniforme n'est pas nécessairement constante. Par exemple une vitre qui chaufferait par moment et refroidirait à d'autres moments pourrait avoir un indice de réfraction qui varie dans le temps, tout en

restant uniforme. On aurait donc  $n(x, y, z; t)$ , avec les dérivées spatiales nulles, mais  $\partial n / \partial t \neq 0$ . I.1, I.64

### valeurs efficaces I.161

**vitesse de la lumière** La vitesse de la lumière dans le vide, communément appelée « vitesse de la lumière » désigne la vitesse de toute onde électro-magnétique qui évolue en dehors d'un milieu matériel. Dans le vide, la permittivité est donnée par  $\epsilon_0$  et la perméabilité vaut  $\mu_0$ . Ces deux grandeurs se combinent pour donner la *célérité* d'une onde dans le vide, valant  $c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$ . Cette valeur est une des constantes de base de la physique qui permet de relier la notion de longueur (mètre) à celle de temps (seconde) ou de fréquence (Hertz). Dans la plupart des applications, on utilise la valeur proche de  $c = 300\,000 \text{ km/s} = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ . La vitesse de la lumière dans un milieu optique transparent dépend de la partie réelle de son *indice de réfraction* vi, I.48

### électromagnétisme I.97

**électromotance** L'électromotance est le nom moderne de la *force électromotrice*. En effet, l'électromotance a les mêmes unités que le potentiel électrique et ne constitue pas une force. L'électromotance désigne la circulation des forces non électrostatiques agissant sur une particule portant une charge électrique, rapportée à cette charge. Si la résultante de ces forces se note  $\vec{F}_{nes}$ , la circulation de la force sur une courbe  $C$  s'écrit  $\mathcal{E}_F = \int_C \vec{F}_{nes} \cdot d\vec{\ell}$ . Cette circulation a les dimensions d'un travail (force multipliée par déplacement). Si cette particule porte une charge  $q$ , l'électromotance est donc donnée par  $\mathcal{E} = \frac{1}{q} \int_C \vec{F}_{nes} \cdot d\vec{\ell}$ . v, ix, x, I.56, I.58–I.60, I.70, I.75, I.76, I.78–I.80, I.84, I.87–I.89, I.96, I.109, I.112, I.121, I.124, I.139, I.147, I.165

**électromotance électromagnétique** L'électromotance électromagnétique est une forme d'*électromotance* d'origine électromagnétique. Elle correspond à la circulation de la partie non conservative du champ électrique (partie rotationnelle, absente en électrostatique). I.111

**électromotance électromagnétique induite** L'électromotance électromagnétique induite est une forme d'*électromotance* électromagnétique qui résulte de la mise en mouvement de charges (courant) générant un champ magnétique induit, lui-même corrélé par la loi de Faraday à un champ électrique non conservatif. La circulation de ce champ électrique non conservatif induit par le courant est appelée « *électromotance électromagnétique induite* ». Pour une inductance, cette électromotance s'oppose à la variation du courant et est à ce titre également appellée « *contre-électromotance* ». I.133

**électrostatique** Étude des propriétés du champ électrique résultant d'une distribution de charges fixes I.21, I.97, I.104, IV.27

**élément de surface** I.1, I.21

**élément de volume** I.1, I.21

**équations de Maxwell** Ensemble d'équations locales formant la base de l'électromagnétisme. Ces quatre équations contiennent les lois d'Ampère-Maxwell, Faraday, Gauss et Gauss magnétiques, qui permettent de dériver les lois de Coulomb, Biot-Savart, Ørsted et Lenz. En notant  $\rho$  le champ de densité volumique de charge et  $\vec{J}$  le champ vectoriel de densité volumique de courant, les équations de Maxwell microscopiques appliquées au champ électromagnétique ( $\vec{E}, \vec{B}$ ) sont

$$\begin{aligned}\overline{\text{rot}}\vec{B} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \mu_0 \vec{J}, \\ \text{div } \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \\ \text{div } \vec{B} &= 0, \\ \overline{\text{rot}}\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0,\end{aligned}$$

où  $\mu_0$  et  $\varepsilon_0$  sont respectivement la perméabilité et la permittivité du vide. iii, I.47, I.60, I.97, I.109, I.133



# Crédits des illustrations

1.1	Marco Livesu. Documentation de cinolib. <a href="https://github.com/mlivesu/cinolib/tree/master/examples/snapshots">https://github.com/mlivesu/cinolib/tree/master/examples/snapshots</a>	I.2
1.2	Marco Livesu. Documentation de cinolib. <a href="https://github.com/mlivesu/cinolib/tree/master/examples/snapshots">https://github.com/mlivesu/cinolib/tree/master/examples/snapshots</a>	I.2
1.3	Marco Livesu. Documentation de cinolib. <a href="https://github.com/mlivesu/cinolib/tree/master/examples/snapshots">https://github.com/mlivesu/cinolib/tree/master/examples/snapshots</a>	I.3
1.4	Door SteHanRo - Eigen werk, CC BY-SA 4.0, <a href="https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=49925080">https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=49925080</a>	I.3
1.5	Pascal Kockaert, biosphère de Montréal, Québec, 2024	I.3
1.6	Julien Minet, Nobohan, OpenStreetMap . . . . .	I.4
1.7	Pascal Kockaert, 2024 . . . . .	I.4
1.8	Julien Minet, Nobohan, OpenStreetMap . . . . .	I.4
1.9	Image générée par IA, copilot, DALL-E. . . . .	I.5
2.1	Image générée par IA, DALL-E, août 2024. . . . .	I.21
2.2	Images générées par IA (DALL-E) le 20 août 2024 . .	I.22
2.3	Image générée par IA, DALL-E, août 2024. . . . .	I.22
2.4	Photo de Brennan Tolman sur pexels. . . . .	I.24
2.5	Image générée par IA, DALL-E, août 2024. . . . .	I.24
2.6	Photo de Isi Parente sur Pexels . . . . .	I.26
2.7	Images générées par IA (DALL-E) le 20 août 2024 . .	I.26
2.8	Images générées par IA (DALL-E) le 19 juillet 2024 .	I.26
2.11	Escalier impossible de Penrose. Source : Wikipedia. Fichier libre de droits. . . . .	I.33
2.12	Escalier impossible de Penrose modifié. Source : Wikipedia, modifié. . . . .	I.35
2.14	Images générées par IA (DALL-E) le 20 août 2024 . .	I.37
3.1	Photo by Wolfgang Wendefuer, pexels.com . . . . .	I.57
3.2	Photo by Arthur A, pexels.com . . . . .	I.58
3.3	Izaak Neuteling, Inspired by Eugene Khutoryansky, tikz.net (December 2021) CC-BY SA 4.0 . . . . .	I.60
3.6	Wikimedia common. Auteur inconnu. . . . .	I.62
3.12	Wikimedia commons. Jérémie Günter-Heinz, Dalton terror (Walibi), 2012. . . . .	I.71
3.13	Wikimedia commons. Projet Gutenberg eText 13013. Libre de droits. . . . .	I.72
4.1	Wikimedia Common. Illustration libre de droits. . .	I.97
4.4	Adaptations d'un graphique de Izaak Neuteling sur Tikz.net . . . . .	I.100
4.9	« La trahison des dénominations. », Pascal Kockaert, 22 octobre 2024. . . . .	I.106
4.11	Adaptations d'un graphique de Izaak Neuteling sur Tikz.net . . . . .	I.107
4.12	Adaptations d'un graphique de Izaak Neuteling sur Tikz.net . . . . .	I.108

4.13	Wikimedia Common. Illustration libre de droits. . . . .	I.110
4.14	Boilly, Julien Léopold. Wikimedia Common. Illustration libre de droits. . . . .	I.110
4.15	Wikimedia Common. Illustration libre de droits. . . . .	I.110
4.16	Wikimedia Common. Illustration libre de droits. . . . .	I.111
4.17	Wikimedia Common. Illustration libre de droits. . . . .	I.111
4.35	Image sous licence CC BY-NC 4.0, femto-physique.fr	I.123
5.1	Image générée par copilot-Designer. . . . .	I.133
5.2	Wikimedia Commons. Illustration libre de droits. . . . .	I.134
5.22	René Terp, pexels.com . . . . .	I.149
5.23	Pascal Kockaert, juillet 2025. . . . .	I.149
5.25	Wikimedia commons. Illustration libre de droits, publiée en 1914 et reprise de « The New Student's Reference Work », vol.4, p. 1893. . . . .	I.150
5.26	Wikimedia commons. Illustration libre de droits, publiée en 1920, reprise dans Edison and Music. . . . .	I.151
6.1	(a) Louis Charles Desnos (1725–1805), Wikimedia Commons, Creative Commons 3.0, recadrée ; (b) Richie Bendall, Wikimedia Commons, Creative Common 4.0 Itl ; (c) Photo de Polverini Lian sur Pexels ; (d) Photo de Dušan Cvetanović sur Pexels . . . . .	II.1
6.2	(a) Photo de Skylar Kang sur Pexels ; (b) Photo de Adriaan Greyling sur Pexels ; (c) Photo de Thgustavo Santana sur Pexels ; (d) Photo de Hammad Khalid sur Pexels. . . . .	II.2
6.16	Photo de jasmin chew sur Pexels . . . . .	II.13
6.25	(a) Photo de Monstera Production sur Pexels ; (b) Photo de Polverini Lian sur Pexels ; (c) Photo de Skylar Kang sur Pexels ; (d) Photo de jasmin chew sur Pexels . . . . .	II.21
7.6	Photo de jasmin chew sur Pexels . . . . .	II.41
7.7	Photo de Monstera Production sur Pexels . . . . .	II.41
7.8	Photo de Magicbowls sur Pexels . . . . .	II.41
8.33	Photo de'Alexandre Saraiva Carniato sur Pexels. . . . .	II.87
9.16	Heinrich Hertz par R. Krewaldt (1894), Wikimedia common, Public domain . . . . .	II.116
10.17	Version modifiée d'une image de Izaak Neutelings sur Tikz.net . . . . .	II.139
10.18	Version modifiée d'une image de Izaak Neutelings sur Tikz.net . . . . .	II.140
10.19	Image de Izaak Neutelings sur Tikz.net . . . . .	II.141
11.1	Wikimedia common. Auteur inconnu. . . . .	III.2
11.5	Bengt Nyman from Vaxholm, Sweden, CC BY-SA 2, Wikimedia common . . . . .	III.6
11.6	École polytechnique (France), CC BY-SA 2.0, Wikimedia common . . . . .	III.6
12.13	Wikimedia Common. Auteur inconnu. Libre de droits par extinction des droits de reproduction. . . . .	III.42
12.25	Photo de Timothy Yiadom sur pexels. . . . .	III.56
13.1	Izaak Neuteling, Tikz.net . . . . .	III.72

13.2 Adaptation d'un graphique de Izaak Neuteling sur Tikz.net . . . . .	III.73
13.8 Izaak Neuteling, Tikz.net . . . . .	III.83
13.9 Adaptations d'un graphique de Izaak Neuteling sur Tikz.net . . . . .	III.84
13.11 Adaptations d'un graphique de Izaak Neuteling sur Tikz.net . . . . .	III.84
13.10 Adaptations d'un graphique de Izaak Neuteling sur Tikz.net . . . . .	III.85
14.1 Wikimedia common, auteurs inconnus, domaine public.	III.96
14.2 Adaptation d'un graphique de Izaak Neuteling sur Tikz.net . . . . .	III.97
14.3 Adaptation d'un graphique de Izaak Neuteling sur Tikz.net . . . . .	III.99
14.4 Adaptation d'un graphique de Izaak Neuteling sur Tikz.net . . . . .	III.101
14.5 Adaptation d'un graphique de Izaak Neuteling sur Tikz.net . . . . .	III.102
14.6 Adaptation d'un graphique de Izaak Neuteling sur Tikz.net . . . . .	III.103
14.7 Adaptation d'un graphique de Izaak Neuteling sur Tikz.net . . . . .	III.104
14.9 Adaptation d'un graphique de Izaak Neuteling sur Tikz.net . . . . .	III.106
14.10 Adaptations d'un graphique de Izaak Neuteling sur Tikz.net . . . . .	III.110
15.1 Adaptation d'un graphique de Izaak Neuteling sur Tikz.net . . . . .	III.124
15.2 Wikimedia commons. Photographie de F. Langhans, bibliothèque ETH, domaine public. . . . .	III.129
15.3 Graphique de Izaak Neuteling sur Tikz.net . . . . .	III.132
15.4 Graphique de Izaak Neuteling sur Tikz.net . . . . .	III.133
15.5 Modification d'un graphique de Izaak Neuteling sur Tikz.net . . . . .	III.133
B.1 Documentation de Gmsh. . . . .	IV.6
B.2 Marco Livesu, documentation de Cinolib. . . . .	IV.6
C.1 Photo de mhtoori.com sur Pexels. . . . .	IV.15
C.2 Cronholm144, Wikimedia Commons. Illustration libre de droits. . . . .	IV.20
C.3 Inductiveload, Wikimedia Commons. Illustration libre de droits. Modifiée. . . . .	IV.21
C.4 Andeggs, Wikimedia Commons. Illustration libre de droits. . . . .	IV.23
D.1 Image générée par l'IA DALL.E 3 . . . . .	IV.25
G.3 Généré par IA, Copilot, DALLE. . . . .	viii
Les licences Creative Common (CC) sont décrites sur le site creativecommons.org. Les conditions de partage des images prove- nant du site Pexels sont décrites sur <a href="https://www.pexels.com/">https://www.pexels.com/</a> .	



# Bibliographie

- [1] E. Hairer and G. Wanner, editors. *Analysis by Its History*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York, NY, 2008.
- [2] Wikipedia. Coordonnées orthogonales — Wikipedia, the free encyclopedia. <http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Coordonn%C3%A9es%20orthogonales&oldid=212406736>, 2024. [Online ; accessed 05-September-2024].
- [3] Álvaro Suárez, Arturo C. Martí, Kristina Zuza, and Jenaro Guisasola. Electromagnetic field presented in introductory physics textbooks and consequences for its teaching. *Phys. Rev. Phys. Educ. Res.*, 19(2) :020113, August 2023. Publisher : American Physical Society.
- [4] Ruth W. Chabay and Bruce A. Sherwood. *Matter and Interactions*. Wiley, 2020.
- [5] Thomas A. Moore. *Six ideas that shaped physics : UnitE – Electric and Magnetic Fields are Unified*. McGraw Hill, 4 edition, 2022.
- [6] Andrew Zangwill. *Modern Electrodynamics*. Cambridge University Press, 2012.
- [7] Eric Mazur. *Principles and Practice of Physics*. Pearson, 2nd edition edition, 2022.
- [8] Anupam Garg. *Classical Electrodynamics in a Nutshell*. Princeton University Press, 2012.
- [9] Toshio Hyodo. Maxwell's displacement current and the magnetic field between capacitor electrodes. *European Journal of Physics*, 43(6) :065202, September 2022. Publisher : IOP Publishing.
- [10] BIPM. Mise en pratique for the definition of the metre in the si. Technical report, 2019. <https://www.bipm.org/documents/20126/41489670/SI-App2-metre.pdf>.
- [11] Óscar Alejos and José María Muñoz. The classical doppler effect revisited by the mathematical description of the phase function, 2024.
- [12] M. N. Polyanskiy. Refractive index database. <http://refractiveindex.info>, 2008–2024. [Online ; accessed 21-November-2024].
- [13] Achin Sen. How galileo could have derived the special theory of relativity. *American Journal of Physics*, 62(2) :157–162, 02 1994.

- [14] Carl G. Adler. Does mass really depend on velocity, dad? *American Journal of Physics*, 55(8) :739–743, August 1987.
- [15] Richard A. Feynman, B. Leighton Robert, and Matthew Sands. *The Feynman Lectures on Physics Set : The New Millennium Edition*. Basic Books, new millennium edition, 2011.

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>i</b>
<b>Préambule</b>	<b>iii</b>
<b>I Électromagnétisme</b>	<b>i</b>
<b>1 Physique mésoscopique : gradient</b>	<b>I.1</b>
1.1 Découpage d'un objet en petits volumes . . . . .	I.2
1.1.1 Décompositions triangulaires et tétraédrale .	I.2
1.1.2 Association de grandeurs à chaque élément de surface ou volume . . . . .	I.2
1.1.3 Le maillage : un outil pour les architectes . .	I.3
1.2 Courbes de niveau, potentiel et gradient . . . . .	I.3
1.2.1 Courbes de niveau, altitude et potentiel . . . .	I.4
1.2.2 Courbes de niveau et gradient . . . . .	I.6
1.2.3 Utilisation du vecteur de plus grande pente .	I.9
1.2.4 Détermination de la pente dans une direction choisie . . . . .	I.10
1.2.5 Opérateur gradient et dérivées directionnelles	I.10
1.2.6 Opérateur gradient en trois dimensions . . . .	I.12
1.2.7 Opérateur gradient dans des axes orthonormés	I.13
1.2.8 Gradient, dérivées partielles et opérateur nabla	I.13
1.2.9 Approche classique . . . . .	I.13
1.2.10 Gradient et potentiel . . . . .	I.14
1.3 Le coin des assistant·es . . . . .	I.15
1.4 Questions théoriques . . . . .	I.16
1.5 Exercices . . . . .	I.17
Notions indispensables, nécessaires, intéressantes . . . .	I.19
<b>2 Flux et circulation</b>	<b>I.21</b>
2.1 Entraînement, circulation et rotationnel . . . . .	I.21
2.1.1 Circulation . . . . .	I.22
2.1.2 Exemple d'application de la circulation : le tir à la corde . . . . .	I.24
2.1.3 Circulation et potentiel . . . . .	I.25
2.1.4 Entraînement et champ tourbillonnaire . . . .	I.26
2.1.5 Circulation et rotationnel . . . . .	I.26
2.1.6 Circulation et opérateur gradient . . . . .	I.28
2.1.7 Circulation sur un ensemble de triangles . .	I.31
2.1.8 Potentiel global et pseudo-potentiel local . .	I.34
2.2 Flux, conservation et divergence . . . . .	I.36
2.2.1 Flux et lois de conservation . . . . .	I.37
2.2.2 Flux, frontière et orientation . . . . .	I.37

2.2.3	Flux sur un tétraèdre . . . . .	I.38
2.2.4	Flux au travers d'un ensemble de tétraèdres . .	I.42
2.2.5	Synthèse . . . . .	I.44
2.3	Équations de Maxwell . . . . .	I.45
2.3.1	Équations de Maxwell statiques . . . . .	I.45
2.3.2	Équations de Maxwell dynamiques . . . . .	I.47
2.4	Le coin des assistant·es . . . . .	I.49
2.5	Questions théoriques . . . . .	I.50
2.6	Exercices . . . . .	I.51
	Notions indispensables, nécessaires, intéressantes . . . . .	I.53
<b>3</b>	<b>Loi de Faraday</b>	<b>I.55</b>
3.1	Électromotance . . . . .	I.56
3.1.1	Forces et masse . . . . .	I.56
3.1.2	Forces et charge . . . . .	I.58
3.1.3	Extension de la notion de champ électrique . .	I.60
3.2	Électromotance électromagnétique . . . . .	I.61
3.3	Force de Lorentz, électromotance et relativité . . . .	I.61
3.3.1	Conducteur en mouvement dans un champ fixe	I.61
3.3.2	Conducteur fixe dans un champ en mouvement	I.63
3.4	Transformation galiléenne du champ électromagnétique . . . . .	I.65
3.4.1	Transformation galiléenne de l'équation de Maxwell-Faraday . . . . .	I.66
3.4.2	Transformation galiléenne de l'équation d'Ampère-Maxwell . . . . .	I.68
3.4.3	Champ électrique induit par un déplacement .	I.69
3.4.4	Travail à l'origine de l'électromotance électromagnétique . . . . .	I.70
3.4.5	La dynamo : invention . . . . .	I.72
3.4.6	La dynamo : fonctionnement . . . . .	I.72
3.5	Champ électrique non electrostatique . . . . .	I.73
3.5.1	Potentiel vecteur . . . . .	I.73
3.5.2	Équation de Maxwell pour les potentiels . .	I.73
3.6	Loi de Faraday sur des cas simples . . . . .	I.75
3.6.1	Point de départ . . . . .	I.76
3.6.2	Champ homogène sur une spire en mouvement	I.76
3.6.3	Champ inhomogène sur une spire en mouvement : électromotance . . . . .	I.77
3.6.4	Champ inhomogène sur une spire en mouvement : flux magnétique . . . . .	I.78
3.6.5	Interprétation . . . . .	I.78
3.7	Lois intégrales de Faraday . . . . .	I.80
3.7.1	Variation du flux au travers d'une surface déformable en mouvement . . . . .	I.80
3.7.2	Hypothèses conduisant à la loi de Faraday .	I.84
3.7.3	Lois de Faraday pour des vitesses non relativistes . . . . .	I.85
3.7.4	Le disque générateur de courant de Faraday .	I.86
3.8	Le coin des assistant·es . . . . .	I.89

3.9 Questions théoriques . . . . .	I.91
3.10 Exercices . . . . .	I.92
Notions indispensables, nécessaires, intéressantes . . . . .	I.96
<b>4 Ampère, Maxwell &amp; Lenz</b>	<b>I.97</b>
4.1 Loi d'Ampère et courants de déplacement . . . . .	I.97
4.1.1 Problématique de la loi d'Ampère . . . . .	I.98
4.1.2 Loi de conservation de la charge . . . . .	I.101
4.1.3 Courant de déplacement . . . . .	I.103
4.1.4 Loi d'Ampère-Maxwell électromagnétique . . .	I.106
4.1.5 Illustration : charge du condensateur . . . . .	I.107
4.1.6 Interprétation de l'exemple du condensateur .	I.108
4.2 Équations de Maxwell microscopiques . . . . .	I.109
4.2.1 Loi de Faraday . . . . .	I.110
4.2.2 Loi d'Ampère-Maxwell . . . . .	I.110
4.2.3 Loi de Gauss pour le champ électrique . . . . .	I.111
4.2.4 Loi de Gauss pour le champ magnétique . . . .	I.111
4.3 Loi de Lenz . . . . .	I.111
4.3.1 Opposition du champ induit . . . . .	I.112
4.3.2 Analyse en termes de forces . . . . .	I.113
4.3.3 Conservation de l'énergie . . . . .	I.114
4.3.4 Causalité . . . . .	I.114
4.4 Champ magnétique dans la matière . . . . .	I.115
4.4.1 Diamagnétisme . . . . .	I.115
4.5 Application du phénomène d'induction . . . . .	I.119
4.5.1 Le microphone . . . . .	I.119
4.5.2 Le haut-parleur . . . . .	I.120
4.5.3 La tête de lecture magnétique . . . . .	I.120
4.5.4 Les courants de Foucault . . . . .	I.120
4.5.5 Le générateur de tension alternative . . . . .	I.123
4.6 Le coin des assistant·es . . . . .	I.125
4.7 Questions théoriques . . . . .	I.126
4.8 Exercices . . . . .	I.127
Notions indispensables, nécessaires, intéressantes . . . . .	I.131
<b>5 Dynamique des circuits électriques</b>	<b>I.133</b>
5.1 L'auto-induction . . . . .	I.133
5.1.1 Introduction . . . . .	I.134
5.1.2 Illustration . . . . .	I.134
5.1.3 Sens de mesure des circulations et courants .	I.135
5.1.4 Inductance . . . . .	I.136
5.1.5 Inductance d'un solénoïde idéalisé . . . . .	I.138
5.1.6 Impédance quasi-statique . . . . .	I.139
5.1.7 Circuit RL . . . . .	I.139
5.1.8 Décharge d'un inducteur . . . . .	I.141
5.1.9 Énergie stockée dans l'inducteur . . . . .	I.142
5.1.10 Énergie du champ magnétique . . . . .	I.144
5.1.11 Loi courant-tension de l'inducteur . . . . .	I.145
5.1.12 Tension sinusoïdale . . . . .	I.147
5.1.13 Convention graphique . . . . .	I.148

5.2	Courants alternatifs . . . . .	I.149
5.2.1	Introduction . . . . .	I.149
5.2.2	Le transformateur . . . . .	I.151
5.2.3	Circuits primaire et secondaire à spires multiples . . . . .	I.154
5.2.4	Résistances en courant alternatif . . . . .	I.155
5.2.5	Inducteurs en courant alternatif . . . . .	I.158
5.2.6	Condensateurs en courant alternatif . . . . .	I.162
5.3	Le coin des assistant·es . . . . .	I.165
5.4	Questions théoriques . . . . .	I.166
5.5	Exercices . . . . .	I.167
	Notions indispensables, nécessaires, intéressantes . . . . .	I.170
	<b>Exercices (vol I)</b>	<b>I.E.1</b>
	Préparation aux séances d'exercices (vol I) . . . . .	I.E.1
	Exercices complémentaires (vol I) . . . . .	I.E.2
	<b>II Oscillations &amp; ondes</b>	<b>i</b>
	<b>6 Oscillateurs harmoniques et amortis</b>	<b>II.1</b>
6.1	L'oscillateur harmonique . . . . .	II.2
6.1.1	Le mouvement de rotation . . . . .	II.2
6.1.2	Mouvement harmonique . . . . .	II.3
6.1.3	Oscillateur harmonique naturel . . . . .	II.4
6.1.4	Potentiel harmonique . . . . .	II.7
6.1.5	Universalité de l'oscillateur harmonique . . .	II.9
6.2	L'oscillateur linéaire amorti . . . . .	II.17
6.2.1	Équation de l'oscillateur linéaire amorti . . .	II.17
6.2.2	Solution générale . . . . .	II.19
6.2.3	Exemple d'oscillateur linéaire amorti : le circuit RLC . . . . .	II.20
6.3	Oscillations forcées . . . . .	II.21
6.4	Les phaseurs . . . . .	II.23
6.4.1	Représentation complexe du mouvement harmonique . . . . .	II.23
6.4.2	Déphasages et phaseurs . . . . .	II.24
6.4.3	Équations des phaseurs . . . . .	II.25
6.5	Le coin des assistant·es . . . . .	II.29
6.6	Questions théoriques . . . . .	II.30
6.7	Exercices . . . . .	II.31
	Notions indispensables, nécessaires, intéressantes . . . . .	II.33
	<b>7 Oscillateur linéaire amorti forcé</b>	<b>II.35</b>
7.1	L'Oscillateur linéaire amorti forcé . . . . .	II.35
7.1.1	Solution harmonique, équation du phaseur .	II.36
7.1.2	Résonance . . . . .	II.37
7.1.3	Le circuit RLC . . . . .	II.42
7.1.4	Phaseurs et impédances . . . . .	II.44
7.2	Le coin des assistant·es . . . . .	II.50
7.3	Questions théoriques . . . . .	II.51

7.4 Exercices . . . . .	II.52
Notions indispensables, nécessaires, intéressantes . . . . .	II.57
<b>8 Ondes de corde et de compression</b>	<b>II.59</b>
8.1 Ondes de corde . . . . .	II.59
8.1.1 Modélisation des forces et du mouvement en un point d'une corde . . . . .	II.59
8.1.2 Modélisation des Cordes . . . . .	II.61
8.1.3 Modèle de la corde continue . . . . .	II.64
8.1.4 Solutions de l'équation des cordes . . . . .	II.66
8.1.5 Interprétation physique des solutions . . . . .	II.70
8.2 Ondes de compression . . . . .	II.76
8.2.1 Ondes dans les milieux cristallins . . . . .	II.76
8.2.2 Ondes dans les milieux amorphes . . . . .	II.80
8.3 Le coin des assistant·es . . . . .	II.88
8.4 Questions théoriques . . . . .	II.91
8.5 Exercices . . . . .	II.92
Notions indispensables, nécessaires, intéressantes . . . . .	II.94
<b>9 Ondes électromagnétiques</b>	<b>II.95</b>
9.1 Équation d'onde électromagnétique . . . . .	II.95
9.1.1 Combinaison des équations de Maxwell en conservant le champ électrique . . . . .	II.96
9.1.2 Combinaison des équations de Maxwell en conservant le champ magnétique . . . . .	II.97
9.1.3 Analyse des équations obtenues . . . . .	II.97
9.2 Interprétation physique . . . . .	II.97
9.2.1 Champ proche . . . . .	II.98
9.2.2 Champ distant . . . . .	II.98
9.2.3 Simplification due aux symétries . . . . .	II.98
9.2.4 Équation d'onde unidimensionnelle . . . . .	II.99
9.2.5 Vitesse de propagation . . . . .	II.99
9.2.6 Évolution de la propagation . . . . .	II.99
9.2.7 Approche scalaire . . . . .	II.100
9.2.8 Forme de l'onde propagative . . . . .	II.100
9.3 Équation d'onde scalaire à une dimension . . . . .	II.101
9.3.1 Équation unidimensionnelle en composantes .	II.101
9.3.2 Séparation des composantes . . . . .	II.102
9.3.3 Limitations de l'approche scalaire . . . . .	II.103
9.4 Ondes harmoniques . . . . .	II.103
9.4.1 Hypothèses des ondes planes . . . . .	II.103
9.4.2 Excitation harmonique . . . . .	II.103
9.4.3 Propagation d'une onde harmonique . . . . .	II.104
9.4.4 Nombre d'onde . . . . .	II.104
9.4.5 Propriétés générales des ondes harmoniques .	II.105
9.4.6 Vitesse de l'onde harmonique . . . . .	II.105
9.5 Polarisation . . . . .	II.106
9.5.1 Polarisation rectiligne . . . . .	II.106
9.5.2 Caractère transverse des ondes planes dans le vide . . . . .	II.107

9.5.3	Polarisation elliptique . . . . .	II.107
9.5.4	Polarisation circulaire . . . . .	II.108
9.6	Onde plane d'orientation quelconque . . . . .	II.108
9.6.1	Front d'onde . . . . .	II.108
9.6.2	Rotation du repère . . . . .	II.109
9.6.3	Vecteur d'onde . . . . .	II.110
9.7	Équations de Maxwell harmoniques . . . . .	II.110
9.7.1	Notations . . . . .	II.111
9.7.2	Opérateurs différentiels appliqués à une onde plane . . . . .	II.111
9.7.3	Équations de Maxwell pour des sources harmoniques . . . . .	II.112
9.7.4	Équation d'onde en l'absence de source . . . . .	II.115
9.8	Lien champs électrique & magnétique . . . . .	II.115
9.8.1	Orientation du trièdre vecteur d'onde, champ électrique, champ magnétique . . . . .	II.115
9.9	Le coin des assistant·es . . . . .	II.118
9.10	Exercices . . . . .	II.120
	Notions indispensables, nécessaires, intéressantes . . . . .	II.121
<b>10</b>	<b>Ondes stationnaires, battement, Doppler</b>	<b>II.123</b>
10.1	Ondes stationnaires . . . . .	II.123
10.1.1	Problèmes aux conditions aux limites . . . . .	II.123
10.1.2	Onde stationnaire . . . . .	II.126
10.1.3	Amplification et résonance . . . . .	II.127
10.1.4	Oscillations propres . . . . .	II.128
10.2	Composition de fréquences & battement . . . . .	II.132
10.2.1	Signal de battement temporel . . . . .	II.132
10.2.2	Propagation d'une onde de battement . . . . .	II.134
10.3	Effet Doppler . . . . .	II.135
10.3.1	Détecteur en mouvement . . . . .	II.136
10.3.2	Source en mouvement . . . . .	II.138
10.4	Le coin des assistant·es . . . . .	II.142
10.5	Questions théoriques . . . . .	II.146
10.6	Exercices . . . . .	II.147
	Notions indispensables, nécessaires, intéressantes . . . . .	II.152
	<b>Exercices (vol II)</b>	<b>II.E.1</b>
	Préparation aux séances d'exercices (vol II) . . . . .	II.E.1
	Exercices complémentaires (vol II) . . . . .	II.E.4

**III Ondes & relativité**

i

<b>11</b>	<b>Modèle de Lorentz, susceptibilité et dispersion</b>	<b>III.1</b>
11.1	Dispersion pour les différentes ondes . . . . .	III.1
11.2	Densité de courant de charge liée . . . . .	III.2
11.2.1	Milieu diélectrique . . . . .	III.2
11.2.2	Densité de courant . . . . .	III.3
11.3	Modèle de Lorentz . . . . .	III.4
11.3.1	Mouvement harmonique du nuage électronique	III.4

11.3.2 Modèle de l'oscillateur harmonique amorti forcé	III.6
11.3.3 Équations de Maxwell harmoniques couplées à un oscillateur . . . . .	III.6
11.3.4 Relation de dispersion . . . . .	III.7
11.4 Relation de dispersion . . . . .	III.8
11.4.1 Susceptibilité, permittivité et indice de réfraction . . . . .	III.8
11.4.2 Indice de réfraction . . . . .	III.9
11.4.3 Courant, champ de polarisation et champ de déplacement . . . . .	III.9
11.4.4 Interprétation de la susceptibilité complexe . . . . .	III.11
11.5 Battement et vitesse de groupe . . . . .	III.14
11.5.1 Battement de deux ondes de même amplitude	III.15
11.5.2 Vitesse de phase et vitesse de groupe . . . . .	III.16
11.5.3 Généralité des notions en lien avec la relation de dispersion . . . . .	III.17
11.6 Paquet d'ondes et dispersion . . . . .	III.17
11.6.1 Profil spatio-temporel d'un paquet d'ondes . . . . .	III.18
11.6.2 Vitesse d'un paquet d'onde . . . . .	III.18
11.6.3 Dispersion non linéaire . . . . .	III.19
11.6.4 Les fibres optiques . . . . .	III.20
11.7 Le coin des assistant·es . . . . .	III.21
11.8 Questions théoriques . . . . .	III.23
11.9 Exercices . . . . .	III.24
Notions indispensables, nécessaires, intéressantes . . . . .	III.26
<b>12 Interférence, réfraction et lentilles</b>	<b>III.27</b>
12.1 Phénomènes d'interférence . . . . .	III.27
12.1.1 Interférences d'ondes planes . . . . .	III.28
12.1.2 Figure d'interférence, intensité lumineuse . . . . .	III.30
12.1.3 Onde sphérique . . . . .	III.33
12.1.4 Expérience de Young . . . . .	III.37
12.1.5 Description mathématique . . . . .	III.39
12.2 Réfraction . . . . .	III.41
12.2.1 Loi de la réfraction de Snell-Descartes . . . . .	III.41
12.3 Lentilles . . . . .	III.44
12.3.1 Optique géométrique versus optique ondulatoire	III.45
12.3.2 Lame de verre d'épaisseur constante . . . . .	III.45
12.3.3 Lame de verre d'épaisseur variable . . . . .	III.46
12.3.4 Onde sphérique convergente . . . . .	III.48
12.3.5 Lentille convergente . . . . .	III.49
12.3.6 Lentilles divergentes . . . . .	III.51
12.3.7 Formes de lentilles rencontrées en pratique . . . . .	III.51
12.3.8 Formation d'images . . . . .	III.51
12.4 Ondes transmises et réfléchies : coefficients de Fresnel	III.56
12.4.1 Hypothèses . . . . .	III.56
12.4.2 Information recherchée . . . . .	III.57
12.4.3 Continuité du champ électrique à une interface	III.57
12.4.4 Continuité du champ magnétique à une interface . . . . .	III.58

12.4.5 Calcul des coefficients de réflexion et transmission pour une onde transverse électrique . . . . .	III.58
12.4.6 Coefficients de réflexion et transmission pour une onde transverse magnétique . . . . .	III.60
12.4.7 Polarisation lumineuse et coefficients de réflexion . . . . .	III.60
12.5 Le coin des assistant·es . . . . .	III.62
12.6 Questions théoriques . . . . .	III.64
12.7 Exercices . . . . .	III.65
Notions indispensables, nécessaires, intéressantes . . . . .	III.69
<b>13 La relativité restreinte</b>	<b>III.71</b>
13.1 La relativité Galiléenne . . . . .	III.71
13.1.1 Formule d'addition des vitesses . . . . .	III.73
13.2 De Galilée à Lorentz . . . . .	III.74
13.2.1 Deux trains et une mouche . . . . .	III.74
13.2.2 Événements . . . . .	III.74
13.2.3 Hypothèses . . . . .	III.75
13.2.4 Analyse depuis le train bleu . . . . .	III.76
13.2.5 Analyse depuis le train rouge . . . . .	III.77
13.2.6 Comparaison des résultats obtenus dans les deux repères . . . . .	III.77
13.2.7 Analyse depuis le repère de la mouche . . . . .	III.79
13.2.8 Composition des vitesses . . . . .	III.80
13.2.9 Discussion : dans quel univers vivons-nous ? .	III.81
13.2.10 Étude du coefficient de dilatation . . . . .	III.81
13.3 Transformation de l'espace-temps . . . . .	III.82
13.3.1 Notations usuelles des repères . . . . .	III.83
13.3.2 Représentation de l'espace-temps . . . . .	III.83
13.3.3 Ligne d'univers et événement . . . . .	III.84
13.3.4 Invariant des transformations espace-temps de Lorentz . . . . .	III.85
13.4 Le coin des assistant·es . . . . .	III.87
13.5 Questions théoriques . . . . .	III.89
13.6 Exercices . . . . .	III.90
Notions indispensables, nécessaires, intéressantes . . . . .	III.91
<b>14 Cinématique relativiste</b>	<b>III.93</b>
14.1 Ondes et relativité . . . . .	III.93
14.1.1 Onde matérielle et relativité . . . . .	III.93
14.1.2 Onde électromagnétique et relativité . . . . .	III.94
14.1.3 Incohérence des ondes électromagnétiques avec la relativité galiléenne . . . . .	III.94
14.1.4 Mathématiques, versus physique . . . . .	III.95
14.1.5 Hypothèse des équations de Maxwell incomplètes . . . . .	III.95
14.1.6 Hypothèse de l'existence d'un milieu matériel : l'éther . . . . .	III.95
14.1.7 Défauts principaux de l'hypothèse de l'éther .	III.96
14.1.8 Rejet expérimental de l'hypothèse de l'éther .	III.96

14.2 Temps propre et longueur propre . . . . .	III.97
14.2.1 Graduation des axes . . . . .	III.98
14.3 Particularités de la relativité . . . . .	III.101
14.3.1 Dilatation du temps . . . . .	III.101
14.3.2 Calcul d'un intervalle de temps entre événements . . . . .	III.101
14.3.3 Vérification expérimentale de la dilatation du temps . . . . .	III.102
14.3.4 Contraction des longueurs . . . . .	III.103
14.4 Loi de composition des vitesses . . . . .	III.105
14.5 Vecteurs de l'espace-temps . . . . .	III.106
14.5.1 Quadrivecteur . . . . .	III.106
14.5.2 Transformation de Lorentz . . . . .	III.106
14.5.3 Pseudo-produit scalaire . . . . .	III.107
14.5.4 Construire un quadrivecteur . . . . .	III.109
14.5.5 Effet Doppler relativiste . . . . .	III.109
14.6 Vitesse spatio-temporelle . . . . .	III.110
14.6.1 Définition intrinsèque . . . . .	III.110
14.6.2 Composition des vitesses au départ des quadritess . . . . .	III.111
14.6.3 Cohérence de la définition du quadrivecteur vitesse . . . . .	III.112
14.7 Le coin des assistant·es . . . . .	III.113
14.8 Questions théoriques . . . . .	III.116
14.9 Exercices . . . . .	III.117
Notions indispensables, nécessaires, intéressantes . . . . .	III.119
<b>15 Dynamique relativiste</b>	<b>III.121</b>
15.1 Incompatibilité de la mécanique classique avec la relativité . . . . .	III.121
15.1.1 Choc élastique classique de deux particules .	III.121
15.2 Énergie et impulsion . . . . .	III.123
15.2.1 Quadrivecteur impulsion . . . . .	III.124
15.2.2 Partie spatiale du quadrivecteur impulsion .	III.124
15.2.3 Une masse variable? . . . . .	III.125
15.2.4 Invariant scalaire lié au quadrivecteur impulsion . . . . .	III.125
15.2.5 Partie temporelle du quadrivecteur impulsion	III.126
15.2.6 Équivalence masse-énergie . . . . .	III.127
15.2.7 Le photon, particule sans masse . . . . .	III.129
15.2.8 Puissance et force . . . . .	III.130
15.3 Force de Lorentz et relativité restreinte . . . . .	III.131
15.3.1 Problème du champ induit . . . . .	III.132
15.4 Autres quadrivecteurs . . . . .	III.135
15.5 Le coin des assistant·es . . . . .	III.136
15.6 Questions théoriques . . . . .	III.137
15.7 Exercices . . . . .	III.138
Notions indispensables, nécessaires, intéressantes . . . . .	III.139

<b>Exercices (vol III)</b>	<b>III.E.1</b>
Préparation aux séances d'exercices (vol III) . . . . .	III.E.1
<b>IV Annexes</b>	<b>i</b>
<b>A Rotationnel sur maillage triangulaire</b>	<b>IV.1</b>
A.1 Introduction . . . . .	IV.1
A.1.1 Définition des triangles et des tangentes à leurs côtés . . . . .	IV.1
A.1.2 Intégrale d'un vecteur variant linéairement sur une droite . . . . .	IV.1
A.1.3 Circulation d'un champ sur un triangle . . . . .	IV.2
A.1.4 Champ linéaire en coordonnées cartésiennes .	IV.2
A.2 Circulation & flux sur des triangles . . . . .	IV.3
A.3 Champ vectoriel non linéaire différentiable . . . . .	IV.3
A.3.1 Théorème du rotationnel de Stokes . . . . .	IV.4
<b>B Divergence sur maillage tétraédral</b>	<b>IV.5</b>
B.1 Introduction . . . . .	IV.5
B.1.1 Logique de la démonstration . . . . .	IV.5
B.2 Champ linéaire intégré sur un tétraèdre . . . . .	IV.5
B.2.1 Définition des surfaces et de leurs normales extérieures . . . . .	IV.5
B.2.2 Base des vecteurs normaux . . . . .	IV.7
B.2.3 Surface opposée au sommet zéro . . . . .	IV.7
B.2.4 Intégrale d'un vecteur variant linéairement sur une surface triangulaire . . . . .	IV.7
B.2.5 Intégrale du flux d'un champ variant linéairement sur une surface triangulaire . . . . .	IV.9
B.2.6 Flux total sortant d'un tétraèdre . . . . .	IV.9
B.3 Gradient champ linéaire sur un tétraèdre . . . . .	IV.10
B.3.1 Volume d'un tétraèdre . . . . .	IV.10
B.3.2 Lien entre intégrale de volume et intégrale de surface . . . . .	IV.11
<b>C Gradient</b>	<b>IV.13</b>
C.1 Gradient et dérivée unidirectionnelle . . . . .	IV.13
C.1.1 Préambule sur les notations . . . . .	IV.13
C.1.2 Dérivées selon un vecteur, directionnelle et partielle . . . . .	IV.15
C.1.3 Gradient . . . . .	IV.17
C.1.4 Interprétation du gradient . . . . .	IV.20
C.2 Calcul de nabla . . . . .	IV.20
<b>D Loi de corrélation de Faraday</b>	<b>IV.25</b>
D.1 Introduction . . . . .	IV.25
D.2 Équations de Jefimenko . . . . .	IV.26
D.2.1 Présentation des équations de Jefimenko . . .	IV.26
D.2.2 Analyse des équations de Jefimenko . . . . .	IV.26

TABLE DES MATIÈRES	xxix
<b>E Unités</b>	<b>IV.29</b>
<b>V Exercices</b>	<b>i</b>
<b>Solutions (vol I)</b>	<b>I.S.1</b>
Solutions des exercices intégrés aux leçons . . . . .	I.S.1
Solutions des exercices complémentaires . . . . .	I.S.40
<b>Solutions (vol II)</b>	<b>II.S.1</b>
Solutions des exercices intégrés aux leçons . . . . .	II.S.1
Solutions des exercices complémentaires . . . . .	II.S.41
<b>Solutions (vol III)</b>	<b>III.S.1</b>
Solutions des exercices intégrés aux leçons . . . . .	III.S.1
Solutions des exercices complémentaires . . . . .	III.S.34
<b>Listes, index et glossaire</b>	<b>i</b>
<b>Acronymes</b>	<b>i</b>
<b>Glossaire</b>	<b>iii</b>
<b>Notations</b>	<b>xiii</b>
<b>Crédits des illustrations</b>	<b>xiii</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>xvii</b>
<b>Table des matières</b>	<b>xix</b>
<b>Colophon</b>	<b>xxxi</b>





Ce syllabus a été réalisé en utilisant la suite logicielle libre L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X.

La mise en page spécifique est rendue possible grâce à l'extension « sidenotesplus ».

La police utilisée est New Century pour le texte et Fourier pour les expressions mathématiques. Les titres sont réalisés en Vera Sans.

L'orthographe a été vérifiée à l'aide de L<sup>T</sup>E<sub>X</sub>.

La présente version date du 11 janvier 2026.

[git] : main @ db1490e•1.9.9-34-gdb1490e (2026-01-11)•Pascal.Kockaert@ulb.be





Troisième de couverture

**Quatrième de couverture**