

ANALYSE NUMÉRIQUE

Travaux Pratiques 2025 – 2026

Séance 3

1. Calculez le conditionnement du système linéaire

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

avec les données suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}; \quad (1)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1000 & & & \\ 1 & 1 & -1000 & & \\ & 1 & 1 & -1000 & \\ & & 1 & 1 & -1000 \\ & & & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 999 \\ 998 \\ 998 \\ 998 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad (2)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1000 & & & \\ 1 & 1 & -1000 & & \\ & 1 & 1 & -1000 & \\ & & 1 & 1 & -1000 \\ -1000 & & & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 999 \\ 998 \\ 998 \\ 998 \\ 998 \end{pmatrix}; \quad (3)$$

les trois systèmes ont comme solution un vecteur constant. Avec quelle précision doivent-ils être résolus par une méthode qui a la stabilité directe ?

2. Ecrivez un programme Octave pour calculer la factorisation LU d'une matrice ; expliquez comment ce programme peut être utilisé pour résoudre un système linéaire régulier. Testez votre programme avec les systèmes (1-3) ; utilisez l'instruction `\` pour la résolution des systèmes triangulaires. La résolution des systèmes (1-3) basée sur la factorisation LU permet-elle d'atteindre la précision voulue ?

3. Pour ceux des systèmes (1-3) pour lesquels l'algorithme de l'exercice 2 ne permet pas d'obtenir la précision d'une méthode stable employez la résolution basée sur la factorisation $PA = LU$ (utilisez l'instruction `lu` d'Octave pour déterminer cette factorisation et l'instruction `\` pour la résolution des systèmes triangulaires) et vérifiez que l'erreur relative sur la solution est satisfaisante.