שיטות הסתברותיות

תרגול מספר 1

מטרת תרגול זה הינה לתת לסטודנטים כלים בהם יוכלו להשתמש לחקירת תהליכים אקראיים (תהליכים שאנו לא יכולים לחזות את תוצאתם, או שאין בהם תבנית ברורה). הכלי הבסיסי הינו מודל מתמטי שיאפשר לנו לתאר ניסוי, אשר לו יש כמה תוצאות אפשריות. לתוצאות אלו מותאמים מספרים בין 0 ל־1 המתארים עד כמה אנחנו חושבים שתוצאות אלו יקרו בניסוי, עוד לפני שביצענו אותו. להלן המודל המתמטי במלואו:

- הגדרה. קבוצת התוצאות האפשריות של ניסוי נקראת **מרחב מדגם** ומסומנת באות האנגלית Ω (אומגה).
  דוגמא. בניסוי של הטלת מטבע; $\Omega = \{H, T\}$.
  דוגמא. בניסוי של זריקת קובייה; $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
  אך מה אם בניסוי שאנו חוקרים מעניינת אותנו יותר מתוצאה אפשרית אחת? למשל, שבזריקת קובייה יצא מספר זוגי? לשם כך אנו נאחד את קבוצת התוצאות שמעניינות אותנו לתת קבוצה, לה אנו קוראים מאורע.

- הגדרה. תת קבוצה $A \subseteq \Omega$ נקראת **מאורע**.
  דוגמא. בניסוי זריקת הקובייה, אם התוצאה שמעניינת אותנו היא שהמספר שיצא הינו זוגי, אנו יכולים להגדיר מאורע $A = \{2, 4, 6\}$.

- הגדרה. בהינתן מרחב מדגם Ω, פונקצייה P נקראת **פונקציית הסתברות** אם:

1. $P : 2^{\Omega} \to [0, 1]$ (תזכורת: 2^{Ω} הוא סימון אלטרנטיבי לקבוצת כל תתי הקבוצות של Ω)
2. $P(\Omega) = 1$
3. עבור כל שני מאורעות זרים $B, A \in 2^{\Omega}$, מתקיים: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

הגדרה. הזוג (Ω, P) נקרא **מרחב הסתברות**.

דוגמאות למרחבי הסתברות שכיחים:

1. מרחב הטלת מטבע.

$$\Omega = \{H, T\}$$
$$P(\{H\}) = P(\{T\}) = \tfrac{1}{2}$$

2. מרחב זריקת קובייה.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = \cdots = P(\{6\}) = \tfrac{1}{6}$$

3. מרחב זריקת שתי קוביות.

$$\Omega = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$$
$$P(\{(H, H)\}) = P(\{(H, T)\}) = P(\{(T, T)\}) = P(\{(T, T)\}) = \tfrac{1}{4}$$

הערה. שימו לב לתכונה מעניינת של מרחבי ההסתברות הנ"ל: לכל האיברים ב־Ω יש את אותה הסתברות!
הגדרה. **מרחב הסתברות אחיד** הוא מרחב הסתברות (Ω, P) בו לכל איבר $\omega \in \Omega$ מתקיים כי:

$$P(\{\omega\}) = \tfrac{1}{\Omega}.$$

משפט. במרחבי הסתברות אחידים, ההסתברות לכל מאורע A היא:

$$P(A) = \tfrac{|A|}{|\Omega|}$$

שימו לב שכדי לתאר פונקציית הסתברות במלואה, אין צורך להגדיר את ערכה עבור כל תת קבוצה של Ω. מספיק להגדיר את ערכה רק עבור המאורעות שמכילים איבר אחד בלבד. זאת משום שלפי התכונה השלישית של פונקציות הסתברות, לכל תת קבוצה $A \subseteq \Omega$ מתקיים כי:

$$P(A) = P(\bigcup_{s\in A} \{s\}) = \sum_{s\in A} P(\{s\})$$

מכך גם נובע המשפט הנ"ל, שכן, במרחבי הסתברות אחידים:

$$\sum_{s\in A} P(\{s\}) = \sum_{s\in A} \frac{1}{|\Omega|} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

תכונות של מרחבי הסתברות

1. $P(\emptyset) = 0$
2. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
3. $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
4. $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$
5. עקרון ההכלה וההדחה להסתברות.

$$A_1, A_2 \ldots A_n \in 2^{\Omega} :$$
$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) =$$
$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i\neq j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i\neq j\neq k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) \cdots (-1)^{n+1} \cdot P(A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_n)$$

תרגילים בהסתברות

שאלה 1: זורקים קובייה. מה היא ההסתברות שהמספר שיצא גדול או שווה 5?

פיתרון:

מרחב המדגם שלנו הוא $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, וזה מרחב הסתברות אחיד.
נסמן את המאורע המעניין ב־A, והרי ש: $A = \{5, 6\}$.
מכיוון שזה מרחב הסתברות אחיד, אז $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.
ולכן: $P(A) = \frac{2}{6}$.

שאלה 2: בוחרים באקראי 4 ספרות מתוך $\{0, 1, 2 \ldots 9\}$, עם חזרות, ורושמים אותם זה אחר זה. מה היא ההסתברות שהמספר 1 כן מופיע?

פיתרון:

מרחב מדגם מתאים לבעיה זו הוא $\Omega = \{0000, 0001, \ldots 9999\}$. גם מרחב הסתברות זה הוא אחיד, שכן בחרנו כל רביעייה כזה על ידי בחירות בלתי תלויות של ספרות.
מכיוון שמרחב הסתברות זה הוא אחיד, כדאי לנו לחשב את $|\Omega|$ כבר עכשיו. כל איבר ב Ω הוא רביעיה סדורה, וכל אלמנט ברביעייה הוא אחד מ־10 סוגי ספרות אפשריות.
לכן מספר האיברים ב Ω הינו $10 \times 10 \times 10 \times 10$, כלומר: $|\Omega| = 10^4$.
כעת נסמן את המאורע המעניין ב־A, הלוא היא קבוצת כל הרביעיות בהן המספר 1 כן מופיע. ניתן לחשב את $P(A)$ בשתי דרכים. בדרך הראשונה מחשבים את $|A|$. בדרך השנייה מחשבים את $|\bar{A}|$, ואז $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

פיתרון בדרך השנייה. הפירוש המילולי של $\bar{A}$ הוא "קבוצת כל הרביעיות שאינן מכילות 1ים". יש תשע ספרות שהן לא 1, ולכן $|\bar{A}| = 9^4$. מכך נובע כי $P(A) = 1 - \frac{9^4}{10^4}$.

פיתרון בדרך הראשונה. הקבוצה A היא קבוצת כל הוקטורים המכילים את הספרה 1. חלקם מכילים **בדיוק פעם אחת** את הספרה 1, אותם נאחד לקבוצה A_1. **חלקם מכילים בדיוק פעמיים** את הספרה 1, אותם נאחד לקבוצה A_2. **חלקם מכילים בדיוק 3 פעמים** את הספרה 1, אותם נאחד לקבוצה A_3. השאר מכילים את הרביעיות המכילות **בדיוק 4 פעמים** את הספרה 1 (למעשה, יש רק רביעייה אחת כזו), ואותם (אותו) נאחד לקבוצה A_4.
הגדרנו חלוקה זרה של A לקבוצות, כלומר $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$, ולכן: $|A| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4|$.
נחשב את $|A_1|$ באופן הבא: בכל וקטור ב־A_1 יש בדיוק ספרה אחת שהיא 1, והיא יכולה להופיע באחד מ־4 מקומות: 1___, _1__, __1_, ___1. שלושת הספרות האחרות הן שונות מ־1. לכן: $|A_1| = 4 \times 9^3$.
ב־A_2, יש $\binom{4}{2} = 6$ מקומות בהם יכולים להופיע שני אחדים: 11__, 1_1_, 1__1, _11_, _1_1, __11. בשאר המקומות יש ספרות שונות מ־1, ולכן $|A_2| = \binom{4}{2} \times 9^2$. באופן דומה, $|A_3| = \binom{4}{3}9^1$ וגם $|A_4| = \binom{4}{4} \times 9^0$.
לכן: $|A| = \binom{4}{1} \times 9^3 + \binom{4}{2} \times 9^2 + \binom{4}{3} \times 9^1 + \binom{4}{4}9^0 = 3439$.
ומכך נובע כי: $P(A) = \frac{3439}{10^4}$.

חזרה על קומבינטוריקה

שאלה 1: בכמה דרכים ניתן לסדר n איברים שונים? (דוגמא ל־n איברים שונים: $\{1, 2, \ldots, n\}$)

פיתרון:

כדי לסדר n איברים, אנחנו צריכים להחליט מי יהיה הראשון, מי יהיה השני וכו'. יש n בחירות אפשריות למי יהיה האיבר הראשון. לאחר מכן, לא ניתן לבחור אותו מחדש, ולכן יש רק $n-1$ בחירות אפשריות למי יהיה האיבר השני. באופן דומה, יש $n-2$ בחירות אפשריות למי יהיה האיבר השלישי, וכך הלאה עד שאנו נשארים עם בחירה אפשרית אחת לאיבר האחרון. בסך הכל:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 1 = n!$$

אפשרויות לסידור n האיברים.

שאלה 2: מקדם בינומי. כמה תתי קבוצות שונות בגודל k יש לקבוצה בגודל n? ($k \leq n$)

פיתרון:

נתחיל עם קבוצה ריקה, ונמלא אותה ע"י בחירות מתוך הקבוצה בגודל n עד שהיא תהיה בגודל k.
יש n בחירות אפשריות לאיבר הראשון, $n-1$ בחירות אפשריות לאיבר השני, וכך הלאה... אך בניגוד לשאלה הקודמת, אנו מפסיקים לבחור איברים חדשים ברגע שסיימנו לבחור k איברים שונים. מספר התוצאות השונות של התהליך המתואר הוא:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

עם זאת, יש לנו טעות ספירה: כל קבוצה אפשרית בגודל k ספרנו $k!$ פעמים. פעם אחת עבור כל סידור אפשרי שלה. לכן אנו מחלקים ב $k!$ ומקבלים את התשובה:

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

שאלה 3: מקדם מולטינומי. בכמה דרכים שונות ניתן לחלק n איברים שונים, ל־k אנשים, כך שהראשון מקבל x_1, השני מקבל x_2, השלישי מקבל x_3, ... וה־kי מקבל x_k? ($x_1 + x_2 \cdots + x_k = n$)

פיתרון:

ישנן שתי דרכים לפתור בעיה זו.
הדרך הראשונה. נבחר x_1 איברים לאדם הראשון ב $\binom{n}{x_1}$ דרכים. לאדם השני, אנו צריכים לבחור x_2 איברים מתוך קבוצה מצומצמת של $n - x_1$ איברים (כי האדם הראשון כבר קיבל את שלו), וזאת ניתן לעשות ב $\binom{n-x_1}{x_2}$ דרכים שונות. לאדם השלישי נשארו $n - x_1 - x_2$ איברים לבחור מהם ולכן יש לו $\binom{n-x_1-x_2}{x_3}$ בחירות אפשריות, וכך הלאה... בסך הכל, מספר הדרכים הוא:

$$\binom{n}{x_1} \times \binom{n-x_1}{x_2} \times \binom{n-x_1-x_2}{x_3} \times \cdots \binom{n-x_1-x_2\cdots-x_{k-1}}{x_k} =$$
$$\frac{n!}{x_1!(n-x_1)!} \times \frac{(n-x_1)!}{x_2!(n-x_1-x_2)!} \times \frac{(n-x_1-x_2)!}{x_3!(n-x_1-x_2-x_3)!} \cdots \times \frac{n-x_1-x_2\cdots-x_{k-1}}{x_k!(n-x_1-x_2\cdots-x_k)!} =$$
$$\frac{n!}{x_1!x_2!\cdots x_k!} = \binom{n}{x_1, x_2 \ldots x_k}$$

דרך שנייה. נסדר את n האיברים באחת מ־$n!$ האפשרויות. את x_1 האיברים הראשונים ניתן לאדם הראשון. את x_2 האיברים הבאים לאדם השני, וכך הלאה עד ל־x_k האיברים האחרונים, אותם ניתן לאדם ה־k.

לפי שיטה זו, כל חלוקה נספרת $x_1!$ פעמים יותר מדי כי כל סידור פנימי ל־ x_1 האיברים הראשונים גורם לספירה נוספת למרות שהחלוקה עודנה אותה חלוקה. באופן דומה, יש $x_2!$ ספירות מיותרות בגלל הסידורים הפנימיים של x_2 האיברים הבאים, וכך הלאה...

לכן יש לחלק ב $x_1!$, ב־$x_2!$, ... וב־ $x_k!$. אז מקבלים שהתשובה היא אכן $\frac{n!}{x_1!x_2!\cdots x_k!}$.

שאלה 4: מה מספר הפתרונות השלמים האי שליליים (גדולים או שווים 0) למשוואה: $x_1+x_2\cdots+x_k=n$?

פיתרון:

נרצה לקודד כל פיתרון באופן חח"ע ועל, כך שבמקום לספור את מספר הפתרונות, נספור את מספר הקידודים. הקידוד שבו נשתמש הוא כזה:

פיתרון למשוואה מוגדר ע"י n כדורים ו־$k-1$ חוצצים, הנמצאים בין הכדורים או בצדדים. לדוגמא:

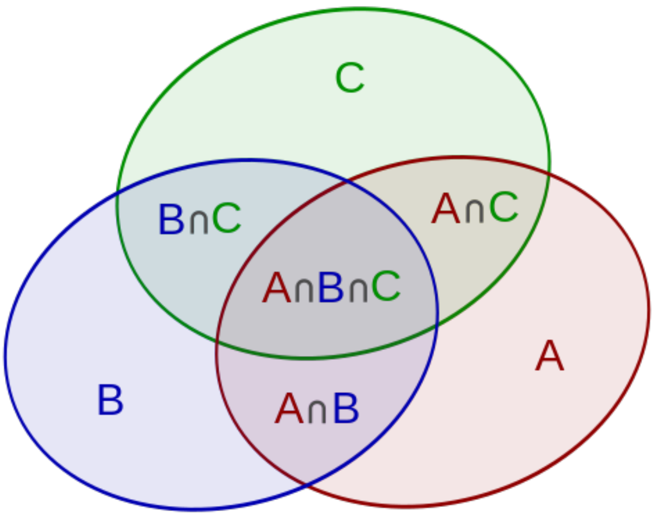
$$|\circ\circ\circ\cdots\circ||\circ|\circ\circ$$

מספר הכדורים לפני החוצץ הראשון מספקים לנו את הערך של x_1. מספר הכדורים לפני החוצץ השני ואחרי החוצץ הראשון מספקים לנו את ערך x_2. באופן כללי: x_i = מספר הכדורים לפני החוצץ ה־i.

ומה עם x_k? מכיוון שיש רק $k-1$ חוצצים אז x_k הוא מספר הכדורים שאחרי החוצץ ה־$k-1$.

את בעיית ספירת הקידודים נפתור כך: נתחיל עם $x+k-1$ כדורים. מתוכם נבחר קבוצה של $k-1$, נזרוק אותם ונשים חוצצים במקומם. כך נישאר עם $k-1$ חוצצים ו־n כדורים. לכן התשובה היא $\binom{n+k-1}{k-1}$.

שאלה 5: עקרון ההכלה וההדחה. עקרון ההכלה וההדחה מסייע לנו לחשב גדלים של קבוצות באופן הבא. נניח שנתונות קבוצות: $A_1,A_2\dots A_n$ וברצוננו לחשב את $|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|$. לדוגמא, אם $n=3$ וברצוננו לחשב את השטח שנמצא בשלושת המעגלים הללו:



אז ניתן לעשות זאת כך:

- נתחיל עם סכום הגדלים: $|A|+|B|+|C|$.
- נפחית את החלקים שנספרו פעמיים: $-(|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|)$.
- אולם, החיתוך $A\cap B\cap C$ לא באמת נספר פעמיים בצעד הראשון, אלא 3 פעמים. לאחר מכן החסרנו אותו 3 פעמים, ולכן יש להוסיף את $|A\cap B\cap C|$ עוד פעם אחת בדיוק.

כך אנו מקבלים: $|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$.

והנוסחא הכללית היא:

$$|A_1\cup A_2\cdots A_n|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{i\neq j}|A_i\cap A_j|\cdots(-1)^{n+1}|A_1\cap A_2\cdots\cap A_n|$$