

Chapitre 2 : SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES : MÉTHODES DIRECTES

1 Conditionnement

- Systèmes linéaires : généralités
- Rappel sur les normes
- Conditionnement d'un système linéaire
- Erreurs d'arrondi $\propto \kappa(A)$: exemple

2 Méthodes directes

- Définition et mauvaises méthodes directes
- Systèmes triangulaires
- Méthode d'élimination de Gauss
- Factorisation LU
- Factorisation LU : stabilité et pivotage

3 Applications

- Calcul de déterminant
- Inversion matricielle

SYSTÈMES LINÉAIRES : GÉNÉRALITÉS

PROBLÈME :

Soit un système d'équations linéaires (ou simplement un *système linéaire*) :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \quad \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

avec les **inconnues** x_j , les **coefficients** du système a_{ij} et les seconds membres b_i , $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

Sous forme matricielle on a :

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}. \quad (1)$$

- systèmes **réguliers** : $m = n$ (A carré) et $\text{rang}(A) = n$ (A inversible¹)
 \Rightarrow (ce chapitre & celui sur les **méthodes itératives**)
- systèmes **surdéterminés** de rang maximal : $m \geq n = \text{rang}(A)$
 \Rightarrow résolution au sens des moindres carrés (**chapitre correspondant**)
- systèmes **sous-déterminés** ($m \leq n$) ou de rang non maximal
 \Rightarrow ne seront pas vus

1. condition équivalente est $\det(A) \neq 0$

RAPPEL SUR LES NORMES

Une norme dans un espace vectoriel réel \mathbb{R}^n doit satisfaire :

- $\|\mathbf{v}\| > 0$, $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$
- $\|\lambda \mathbf{v}\| = |\lambda| \|\mathbf{v}\|$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$
- $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$, $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$

Pour toute norme vectorielle $\|\cdot\|$ la norme matricielle induite pour une matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (c.à.d. une matrice $m \times n$) est

$$\|A\| = \max_{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|};$$

on a en particulier

$$\|A\mathbf{v}\| \leq \|A\| \cdot \|\mathbf{v}\|.$$

Normes vectorielles :

$$\|\mathbf{v}\|_1 = \sum_{i=1}^n |v_i|$$

$$\|\mathbf{v}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^2 \right)^{1/2}$$

$$\|\mathbf{v}\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |v_i|$$

Normes matricielles induites :

$$\|A\|_1 = \max_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$$

$$\|A\|_2 = \left(\lambda_{\max}(A^T A) \right)^{1/2}$$

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1, \dots, m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

norme 1

norme euclidienne

norme sup

CONDITIONNEMENT D'UN SYSTÈME LINÉAIRE

Soit un système linéaire

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}. \quad (1)$$

Le conditionnement d'un problème est

$$\kappa = \sup \frac{\text{erreurs relatives résultat}}{\text{erreurs relatives données}},$$

avec les erreurs données $\rightarrow 0$.

Pour un système linéaire :

- données : A, \mathbf{b} (avec perturbations $A + \delta A, \mathbf{b} + \delta \mathbf{b}$)
- résultat : \mathbf{x} ($\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}$ pour le système perturbé)

CONDITIONNEMENT D'UN SYSTÈME LINÉAIRE

Soit un système linéaire

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}. \quad (1)$$

Le conditionnement d'un problème est

$$\kappa = \sup \frac{\text{erreurs relatives résultat}}{\text{erreurs relatives données}},$$

avec les erreurs données $\rightarrow 0$.

CAS 1 : perturbations $\delta\mathbf{b}$ de \mathbf{b}

Si $\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$ est la solution du système perturbé, on a aussi

$$A(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \delta\mathbf{b}$$

$$\Rightarrow A\delta\mathbf{x} = \delta\mathbf{b} \quad (\text{soustraction de (1)})$$

$$\Rightarrow \|\delta\mathbf{x}\| = \|A^{-1}\delta\mathbf{b}\| \leq \|A^{-1}\| \|\delta\mathbf{b}\| \quad (\text{norme matricielle})$$

et donc

$$\kappa = \sup_{\|\delta\mathbf{b}\|} \frac{\|\delta\mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}\|}{\|\delta\mathbf{b}\|/\|\mathbf{b}\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \|\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \frac{\|A^{-1}\| \|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|A^{-1}\| \|A\|$$

CONDITIONNEMENT D'UN SYSTÈME LINÉAIRE

Soit un système linéaire

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}. \quad (1)$$

Le conditionnement d'un problème est

$$\kappa = \sup \frac{\text{erreurs relatives résultat}}{\text{erreurs relatives données}},$$

avec les erreurs données $\rightarrow 0$.

CAS 2 : perturbations δA de A

Si $\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$ est la solution du système perturbé, on a aussi

$$(A + \delta A)(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{b}$$

$$\Rightarrow A\delta\mathbf{x} + \delta A \mathbf{x} + \underbrace{\delta A \delta\mathbf{x}}_{\text{second ordre}} = 0 \quad (\text{soustraction de (1)})$$

$$\Rightarrow \|\delta\mathbf{x}\| = \|A^{-1} \delta A \mathbf{x}\| \leq \|A^{-1}\| \|\delta A\| \|\mathbf{x}\| \quad (\text{norme matricielle})$$

et donc

$$\kappa = \sup_{\|\delta A\|} \frac{\|\delta\mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}\|}{\|\delta A\|/\|A\|} \leq \|A^{-1}\| \|A\|$$

CONDITIONNEMENT D'UN SYSTÈME LINÉAIRE

Soit un système linéaire

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}. \quad (1)$$

Le conditionnement d'un problème est

$$\kappa = \sup \frac{\text{erreurs relatives résultat}}{\text{erreurs relatives données}},$$

avec les erreurs données $\rightarrow 0$.

CONCLUSION : Les erreurs dans les données A , \mathbf{b} d'un système sont amplifiées par (au plus)

$$\kappa(A) := \|A^{-1}\| \|A\|.$$

$\kappa(A)$ est appelé le conditionnement de la matrice A .

OCTAVE : `cond` – évaluation du conditionnement ;

`norm` – évaluation des normes (y compris matricielles) ;

`inv` – inversion (y compris matricielle)

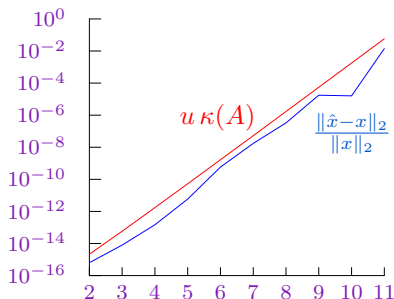
ERREURS D'ARRONDI $\propto \kappa(A)$: EXEMPLE

```
function hilb_cond
N = 10;
for n = 1:N
    % matrice de Hilbert
    A = hilb(n+1);
    % estimer conditionnement
    c(n) = cond(A);
    % vraie solution
    x0 = ones(n+1, 1);
    % a_{ij} > 0, x0_{i} > 0
    % => l'erreur relative
    % sur b ~ erreurs
    % d'arrondis (cf. TP2)
    b = A*x0;
    x = A\b; % résoudre
    r(n) = norm(x-x0)/norm(x0);
end
semilogy(2:N+1, c*eps/2, 'r')
hold on
semilogy(2:N+1, r, 'b')
```

matrice de Hilbert : $A = \left(\frac{1}{i+j-1} \right)_{ij}$

$$\text{ex : } A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}$$

Membres de l'inégalité ch.1, p.17
pour un algorithme stable (" \backslash ")



DÉFINITION ET MAUVAISES MÉTHODES

Une méthode de résolution est **directe** si en arithmétique exacte elle fournit la solution après un nombre fini d'opérations.

«MAUVAISES» MÉTHODES DIRECTES POUR SYSTÈMES LINÉAIRES

- méthode de Cramer :

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

où A_i est obtenue en remplaçant la i -ème colonne de A par le second membre \mathbf{b}

- ▶ coût : $n + 1$ déterminants de taille n & n divisions
- ▶ On apprend que pour évaluer un déterminant de taille n on calcule n déterminants de taille $n - 1$, effectue n multiplications et $n - 1$ additions
- ⇒ coût d'un déterminant est au moins $n! = n(n - 1) \cdots 1$ opérations (!)

- multiplication par l'inverse :

```
A = rand(1000);  
b = rand(1000,1);  
tic; x1 = A\b; toc  
tic; x1 = inv(A)*b; toc
```

Elapsed time is 0.1557 seconds.

Elapsed time is 0.3586 seconds.

inversion matricielle **2.3×** plus lente!

SYSTÈMES TRIANGULAIRES

EXEMPLE : système triangulaire inférieur

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = b_2 \\ \dots & \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ii}x_i & = b_i \\ \dots & \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 & = b_1/a_{11} \\ x_2 & = (b_2 - a_{21}x_1)/a_{22} \\ \dots & \\ x_i & = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j\right)/a_{ii} \\ \dots & \end{cases}$$

COÛT : n^2 flops (n divisions, $n(n-1)/2$ multiplications et autant de soustractions)

(flop = de l'anglais *floating point operation*, opération avec un réel)

EXISTENCE : Si $a_{ii} \neq 0$ pour tout i , la solution existe ;
si non, $\det(A) = a_{11}a_{22} \dots a_{nn} = 0$ et le système n'est pas régulier.

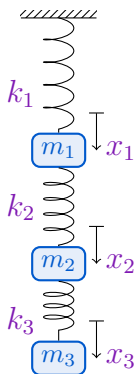
STABILITÉ : (sans démonstration) La méthode de résolution a la stabilité inverse ; plus précisément, si $\tilde{\mathbf{x}}$ est la solution calculée, il existe un δA triangulaire inférieure avec $|(\delta A)_{ij}| \leq n \cdot u \cdot |a_{ij}|$ tel que

$$(\delta A + A)\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{b}.$$

AUTRE CAS : la résolution d'un système triangulaire supérieur est semblable.

MÉTHODE D'ÉLIMINATION DE GAUSS

EXEMPLE : (système de l'Exemple 1 dans l'Introduction)



$$\left\{ \begin{array}{ccc|c} 2x_1 & -x_2 & & = 1 \\ -x_1 & +2x_2 & -x_3 & = 1 \\ & -x_2 & +x_3 & = 1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(ligne du pivot)} \\ +\frac{1}{2} \text{ (ligne 1)} \\ +0 \text{ (ligne 1)} \end{array}$$

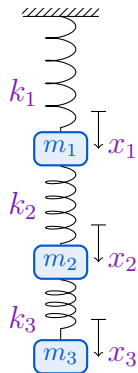
$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc|c} 2x_1 & -x_2 & & = 1 \\ & \frac{3}{2}x_2 & -x_3 & = \frac{3}{2} \\ & -x_2 & +x_3 & = 1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(ligne du pivot)} \\ +\frac{2}{3} \text{ (ligne 2)} \end{array}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc|c} 2x_1 & -x_2 & & = 1 \\ & \frac{3}{2}x_2 & -x_3 & = \frac{3}{2} \\ & & \frac{1}{3}x_3 & = 2 \end{array} \right.$$

\Rightarrow système triangulaire

MÉTHODE D'ÉLIMINATION : FORME MATRICIELLE

EXEMPLE : (système de l'Exemple 1 dans l'Introduction)



$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & -1 & 1 & \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{(ligne du pivot)} \\ +\frac{1}{2} \text{ (ligne 1)} \\ +0 \text{ (ligne 1)} \end{array}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & & \\ & \frac{3}{2} & -1 & \\ & -1 & 1 & \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{(ligne du pivot)} \\ +\frac{2}{3} \text{ (ligne 2)} \end{array}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & & \\ & \frac{3}{2} & -1 & \\ & & \frac{1}{3} & \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$$

\Rightarrow système triangulaire

MÉTHODE D'ÉLIMINATION : FORME MATRICIELLE

$$\left(\begin{array}{c|ccc} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ \hline a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ \vdots \\ b_n^{(1)} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{(ligne du pivot)} \\ -a_{21}^{(1)}/a_{11}^{(1)} \text{ (ligne 1)} \\ \vdots \\ -a_{n1}^{(1)}/a_{11}^{(1)} \text{ (ligne 1)} \end{array}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{c|ccc} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \hline & \vdots & & \vdots \\ & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(2)} \end{pmatrix} \Rightarrow \dots$$

$$n \times \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} 2(n-k)^2 + O(n^2)}_{= \frac{2n^3}{3} + O(n^2)}$$

→ $n - k$ flops

→ $2(n - k)^2$ flops

→ $2(n - k)$ flops

MÉTHODE D'ÉLIMINATION : FORME MATRICIELLE

$$\left(\begin{array}{c|ccc} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ \vdots \\ b_n^{(1)} \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{(ligne du pivot)} \\ -a_{21}^{(1)}/a_{11}^{(1)} \text{ (ligne 1)} \\ \vdots \\ -a_{n1}^{(1)}/a_{11}^{(1)} \text{ (ligne 1)} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{c|ccc} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & \vdots & & \vdots \\ & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(2)} \end{pmatrix} \Rightarrow \dots$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{c|ccc} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn}^{(n)} \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(n)} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{système triangulaire}$$

$$T : \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} 2(n-k)^2 + O(n^2)}_{= \frac{2n^3}{3} + O(n^2)}$$

MÉTHODE D'ÉLIMINATION : FORME MATRICIELLE

$$\left(\begin{array}{c|ccc} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ \vdots \\ b_n^{(1)} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{(ligne du pivot)} \\ -a_{21}^{(1)}/a_{11}^{(1)} \text{ (ligne 1)} \\ \vdots \\ -a_{n1}^{(1)}/a_{11}^{(1)} \text{ (ligne 1)} \end{array}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{c|ccc} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & \vdots & & \vdots \\ & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(2)} \end{pmatrix} \Rightarrow \dots$$

ALGORITHME :

pour $k = 1, \dots, n-1$

$$\ell_{ik} = a_{ik}^{(k)} / a_{kk}^{(k)}, \quad i = k+1, \dots, n$$

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - \ell_{ik} \cdot a_{kj}^{(k)}, \quad i, j = k+1, \dots, n$$

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - \ell_{ik} \cdot b_k^{(k)}, \quad i = k+1, \dots, n$$

résoudre le système triangulaire résultant

$$\text{Coût : } \sum_{k=1}^{n-1} 2(n-k)^2 + O(n^2) = \frac{2n^3}{3} + O(n^2)$$

$$\rightarrow n-k \text{ flops}$$

$$\rightarrow 2(n-k)^2 \text{ flops}$$

$$\rightarrow 2(n-k) \text{ flops}$$

MÉTHODE D'ÉLIMINATION : FORME MATRICIELLE

$$\left(\begin{array}{c|ccc} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ \vdots \\ b_n^{(1)} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{(ligne du pivot)} \\ -a_{21}^{(1)}/a_{11}^{(1)} \text{ (ligne 1)} \\ \vdots \\ -a_{n1}^{(1)}/a_{11}^{(1)} \text{ (ligne 1)} \end{array}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{c|ccc} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & \vdots & & \vdots \\ & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(2)} \end{pmatrix} \Rightarrow \dots$$

ALGORITHME :

pour $k = 1, \dots, n-1$

$$\ell_{ik} = a_{ik}^{(k)} / a_{kk}^{(k)}, \quad i = k+1, \dots, n$$

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - \ell_{ik} \cdot a_{kj}^{(k)}, \quad i, j = k+1, \dots, n$$

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - \ell_{ik} \cdot b_k^{(k)}, \quad i = k+1, \dots, n$$

résoudre le système triangulaire résultant

$$\text{CÔÛT : } \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} 2(n-k)^2 + \mathcal{O}(n^2)} = \frac{2n^3}{3} + \mathcal{O}(n^2)$$

→ $n-k$ flops

→ $2(n-k)^2$ flops

→ $2(n-k)$ flops

FACTORISATION LU : EXEMPLE

Reprenons l'exemple précédent et répétons l'élimination de Gauss en appliquant des transformations matricielles ...

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & \\ -1 & 2 & -1 \\ & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{(ligne du pivot)} \\ +\frac{1}{2} \text{ (ligne 1)} \\ +0 \text{ (ligne 1)} \end{array}$$

FACTORISATION LU : EXEMPLE

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & \\ -1 & 2 & -1 \\ & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{(ligne du pivot)} \\ +\frac{1}{2} \text{ (ligne 1)} \\ +0 \text{ (ligne 1)} \end{array}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & \\ \frac{1}{2} & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}}_{L_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & \\ -1 & 2 & -1 \\ & -1 & 1 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & \\ \frac{1}{2} & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}}_{L_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

FACTORISATION LU : EXEMPLE

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & \\ -1 & 2 & -1 \\ & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{(ligne du pivot)} \\ +\frac{1}{2} \text{ (ligne 1)} \\ +0 \text{ (ligne 1)} \end{array}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & \\ \frac{1}{2} & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}}_{L_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & \\ -1 & 2 & -1 \\ & -1 & 1 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & \\ \frac{1}{2} & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}}_{L_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & \\ & \frac{3}{2} & -1 \\ & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{L_1 A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}}_{L_1 \mathbf{b}} \begin{array}{l} \text{(ligne du pivot)} \\ +\frac{2}{3} \text{ (ligne 2)} \end{array}$$

FACTORISATION LU : EXEMPLE

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & \\ -1 & 2 & -1 \\ & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{(ligne du pivot)} \\ +\frac{1}{2} \text{ (ligne 1)} \\ +0 \text{ (ligne 1)} \end{array}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & \\ \frac{1}{2} & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}}_{L_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & \\ -1 & 2 & -1 \\ & -1 & 1 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & \\ \frac{1}{2} & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}}_{L_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & \\ & \frac{3}{2} & -1 \\ & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{L_1 A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}}_{L_1 \mathbf{b}} \begin{array}{l} \text{(ligne du pivot)} \\ +\frac{2}{3} \text{ (ligne 2)} \end{array}$$

et la seconde étape est similaire ...

FACTORISATION LU : EXEMPLE

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & \\ -1 & 2 & -1 \\ & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{(ligne du pivot)} \\ +\frac{1}{2} \text{ (ligne 1)} \\ +0 \text{ (ligne 1)} \end{array}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & \\ \frac{1}{2} & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}}_{L_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & \\ -1 & 2 & -1 \\ & -1 & 1 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & \\ \frac{1}{2} & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}}_{L_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & \\ & \frac{3}{2} & -1 \\ & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{L_1 A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}}_{L_1 \mathbf{b}} \begin{array}{l} \text{(ligne du pivot)} \\ +\frac{2}{3} \text{ (ligne 2)} \end{array}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}}_{L_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & \\ & \frac{3}{2} & -1 \\ & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{L_1 A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}}_{L_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}}_{L_1 \mathbf{b}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & \\ & \frac{3}{2} & -1 \\ & & \frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{L_2 L_1 A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 2 \end{pmatrix}}_{L_2 L_1 \mathbf{b}} \Rightarrow \text{système triangulaire}$$

FACTORISATION LU : EXEMPLE (SUITE)

On a donc un système triangulaire (U triangulaire supérieure par construction)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & \\ & \frac{3}{2} & -1 \\ & & \frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{U = L_2 L_1 A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 2 \end{pmatrix}}_{L_2 L_1 \mathbf{b}}$$

avec $L_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ \frac{1}{2} & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$, $L_2 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$.

Le système transformé est

$$U\mathbf{x} = L_2 L_1 \mathbf{b}$$

et le système initial

$$\underbrace{L_1^{-1} L_2^{-1} U}_A \mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Mais que valent L_1^{-1} , L_2^{-1} ? et leur produit $L = L_2^{-1} L_1^{-1}$?

FACTORISATION LU : EXEMPLE (SUITE)

PROPRIÉTÉ 1 : soient I_1, I_2 deux matrices identités et C une matrice rectangulaire ayant des dimensions compatibles ; alors

$$\begin{pmatrix} I_1 & \\ C & I_2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I_1 & \\ -C & I_2 \end{pmatrix}.$$

et donc $L_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & \\ -0 & & 1 \end{pmatrix}$, $L_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$.

PROPRIÉTÉ 2 : soient I une matrice identité, C une matrice carrée et \mathbf{v} un vecteur ayant tous des dimensions compatibles ; alors

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ \mathbf{v} & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ \mathbf{v} & C \end{pmatrix}$$

et donc $L = L_1^{-1}L_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & \\ -0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire

inférieure avec éléments diagonaux valant 1 (facile à construire à partir de L_i , $i = 1, 2$, et donc, à partir des facteurs qui multiplient les équations durant l'élimination).

FACTORISATION LU : EXEMPLE (SUITE)

CONCLUSION DE L'EXEMPLE : l'élimination de Gauss réduit le système initial

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

à un système triangulaire supérieur

$$\underbrace{L_2 L_1 A}_{U} \mathbf{x} = L_2 L_1 \mathbf{b}.$$

A partir des facteurs qui multiplient les équations durant l'élimination on peut construire $L = L_1^{-1} L_2^{-1}$ triangulaire inférieure telle que

$$LU = A;$$

pour notre exemple on obtient

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & & \\ -0 & -\frac{2}{3} & 1 & \end{pmatrix}}_L \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & \\ & \frac{3}{2} & -1 \\ & & \frac{1}{3} \end{pmatrix}}_U = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & \\ -1 & 2 & -1 \\ & -1 & 1 \end{pmatrix}}_A.$$

FACTORISATION LU : CAS GÉNÉRAL

De manière générale on procède aux transformations successives

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{pmatrix}}_A \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & \vdots & & \vdots \\ & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix}}_{L_1 A} \cdots \Rightarrow \cdots \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn}^{(n)} \end{pmatrix}}_{U = L_{n-1} \cdots L_1 A}$$

avec les transformations

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -a_{21}^{(1)}/a_{11}^{(1)} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -a_{n1}^{(1)}/a_{11}^{(1)} & & & 1 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & -a_{32}^{(2)}/a_{22}^{(2)} & 1 & \\ & \vdots & & \ddots \\ & -a_{n2}^{(2)}/a_{22}^{(2)} & & & 1 \end{pmatrix}, \dots$$

et donc

$$\boxed{A = LU}$$

$$\text{avec } L = L_1^{-1} \cdots L_{n-1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ a_{21}^{(1)}/a_{11}^{(1)} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1}^{(1)}/a_{11}^{(1)} & a_{n2}^{(2)}/a_{22}^{(2)} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

LU : ALGORITHME ET RÉOLUTION DE SYSTÈMES

ALGORITHME (ÉLIMINATION DE GAUSS) :

pour $k = 1, \dots, n - 1$

$$\ell_{ik} = a_{ik}^{(k)} / a_{kk}^{(k)}, \quad i = k + 1, \dots, n$$

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - \ell_{ik} \cdot a_{kj}^{(k)}, \quad i, j = k + 1, \dots, n$$

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - \ell_{ik} \cdot b_k^{(k)}, \quad i = k + 1, \dots, n \quad (*)$$

résoudre le système triangulaire supérieur correspondant **(**)**

se décompose en trois étapes (avec bien entendu $\ell_{ij} = u_{ji} = 0$ pour $j > i$, L et U étant triangulaires inférieure et supérieure, respectivement) :

FACTORISATION LU : ($L := (\ell_{ij})$, $U := (u_{ij})$)

pour $k = 1, \dots, n$

$$u_{kj} = a_{kj}^{(k)}, \quad j = k, \dots, n$$

$$\ell_{kk} = 1 \text{ et } \ell_{ik} = a_{ik}^{(k)} / a_{kk}^{(k)}, \quad i = k + 1, \dots, n$$

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - \ell_{ik} \cdot a_{kj}^{(k)}, \quad i, j = k + 1, \dots, n$$

RÉSOUTRE : le système triangulaire inférieur $L\mathbf{b}^{(n)} = \mathbf{b}$

équivalent à (*)

RÉSOUTRE : le système triangulaire supérieur $U\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(n)}$

équivalent à (**)

FACTORISATION LU : PROPRIÉTÉS

- Comme le transparent précédent le montre, la factorisation LU est **équivalente** à l'élimination de Gauss ; en particulier, son coût est aussi

$$\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2).$$

- Dans le cas de **plusieurs seconds membres \mathbf{b}** :
 - ▶ **factoriser** la matrice **une seule fois** (coût $\frac{2}{3}n^3$)
 - ▶ **répéter** les étapes de **résolution pour chaque second membre** (coût $2n^2$ par second membre)
- Si la factorisation $A = LU$ existe (avec U triangulaire supérieure et L triangulaire inférieure avec les éléments diagonaux valant 1), **elle est unique**
- La factorisation LU **n'existe pas toujours** pour les matrices régulières

$$\text{Ex. } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (A \text{ régulière car } \det(A) = -1)$$

- La factorisation LU **n'est pas stable**

Ex. voir transparent suivant

FACTORISATION LU : STABILITÉ

EXEMPLE :

$$\begin{pmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

la matrice est bien conditionnée : $\kappa(A) = 2.6180$

mais sa factorisation numérique est

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10^{20} & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 0 & \mathbf{1 \ominus 10^{20}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 0 & -10^{20} \end{pmatrix}$$

($1 \ominus 10^{20} = -10^{20}$ en double précision) et donc

$$LU = \begin{pmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

et la différence avec A dépasse largement u ; de même la solution obtenue par $U \backslash (L \backslash [1; 2])$ est $\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$, et la vraie solution (à 10^{-20} près) est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$.

SOLUTION : permuter première et deuxième lignes (pivotage des lignes);

la factorisation de $P_{12}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 10^{-20} & 1 \end{pmatrix}$ avec permutation $P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

est stable

FACTORISATION LU AVEC PIVOTAGE

PIVOTAGE PARTIEL DES LIGNES : on choisit d'éliminer (=choisir comme pivot) la ligne qui possède l'élément **maximal en valeur absolue** dans la colonne du pivot

MATRICE DE PERMUTATION ÉLÉMENTAIRE : pour les indices i et $j > i$ est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & 1 & \\ & & & \ddots & & \\ & & 1 & & 0 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \end{matrix}$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ i & j \end{matrix}$

- PA permute les lignes i et j de A (et donc $\det(PA) = -\det(A)$)
- AP permute les colonnes i et j de A (et donc $\det(AP) = -\det(A)$)
- $PP = I$ (deuxième permutation élémentaire annule la première)

FACTORISATION LU AVEC PIVOTAGE

PIVOTAGE PARTIEL DES LIGNES : on choisit d'éliminer (=choisir comme pivot) la ligne qui possède l'élément **maximal en valeur absolue** dans la colonne du pivot

EXEMPLE :
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}} \xrightarrow{\text{permuter } 1 \leftrightarrow 1} (P_1 \text{ est identité})$$

$$\xrightarrow{\text{éliminer}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{L_1 P_1 A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{L_1 P_1 \mathbf{b}} \text{ avec } L_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ -1 & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{permuter } 2 \leftrightarrow 3} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 & 2 \\ & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P_2 L_1 P_1 A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{P_2 L_1 P_1 \mathbf{b}} \text{ avec } P_2 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix}$$

$\xrightarrow{\text{éliminer}}$ même pas nécessaire (L_2 est identité);

on a alors

$$L_2 P_2 L_1 P_1 A = U.$$

FACTORISATION LU AVEC PIVOTAGE (SUITE)

PROPRIÉTÉ 3 : Soit P_i une matrice de permutation élémentaire pour les indices i et j et soit

$$L_k = \begin{pmatrix} I_1 & & \\ & 1 & \\ & \mathbf{v} & I_2 \end{pmatrix}$$

avec I_1 de dimensions $(k-1) \times (k-1)$ et \mathbf{v} , I_2 ayant les dimensions compatibles (si $k = 1$, le résultat reste valable avec I_1 «supprimée»).

Si $k < i, j$

$$P_i L_k P_i = \begin{pmatrix} I_1 & & \\ & 1 & \\ & \mathbf{w} & I_2 \end{pmatrix}$$

avec \mathbf{w} obtenu à partir de \mathbf{v} en permutant les composantes $i - k$ et $j - k$.

Pour l'exemple précédent

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ -1 & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P_2 L_1 P_2 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ -1 & & 1 \end{pmatrix}$$

FACTORISATION LU AVEC PIVOTAGE (SUITE)

PROPRIÉTÉ 3 : Soit P_i une matrice de permutation élémentaire pour les indices i et j et soit

$$L_k = \begin{pmatrix} I_1 & & \\ & 1 & \\ & \mathbf{v} & I_2 \end{pmatrix}$$

avec I_1 de dimensions $(k-1) \times (k-1)$ et \mathbf{v} , I_2 ayant les dimensions compatibles (si $k = 1$, le résultat reste valable avec I_1 «supprimée»).

Si $k < i, j$

$$P_i L_k P_i = \begin{pmatrix} I_1 & & \\ & 1 & \\ & \mathbf{w} & I_2 \end{pmatrix}$$

avec \mathbf{w} obtenu à partir de \mathbf{v} en permutant les composantes $i - k$ et $j - k$.

Et donc $L_2 P_2 L_1 P_1 A = U$ peut être mis sous forme (en utilisant $P_2 P_2 = I$)

$$L_2 \underbrace{P_2 L_1 P_2}_{L'_1} P_2 P_1 A = U;$$

on a alors, avec $L = L'^{-1}_1 L^{-1}_2$ triangulaire inférieure et $P = P_2 P_1$,

$$PA = LU.$$

FACTORISATION LU AVEC PIVOTAGE (SUITE)

De manière générale si on applique le pivotage on a

$$L_{n-1}P_{n-1}L_{n-2}\cdots P_2L_1P_1A = U$$

qu'on peut réécrire (avec $P_iP_i = I$) comme

$$\underbrace{L_{n-1}}_{L'_{n-1}} \underbrace{P_{n-1}L_{n-2}P_{n-1}}_{L'_{n-2}} \cdots \underbrace{P_{n-1}\cdots P_2L_1P_2\cdots P_{n-1}}_{L'_1} \underbrace{P_{n-1}\cdots P_2P_1}_P A = U$$

et donc (comme avant)

$$PA = L'_1{}^{-1} \cdots L'_{n-1}{}^{-1} U$$

ou encore

$$\boxed{PA = LU}$$

avec L triangulaire inférieure dont les éléments diagonaux valent 1, U triangulaire supérieure et P est une matrice de permutation.

FACTORISATION LU AVEC PIVOTAGE (SUITE)

- même nombre d'opérations (flops) que la factorisation LU, à savoir

$$\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2);$$

- la factorisation $PA = LU$ existe pour toute matrice régulière ;
- la factorisation $PA = LU$ est réputée stable en pratique ;

RÉSOLUTION DE SYSTÈME $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ AVEC $PA = LU$:

- 1 déterminer la factorisation $PA = LU$ ($\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$ flops)
- 2 permuter les éléments du second membre $\mathbf{b}_p = P\mathbf{b}$ (0 flops, au plus $n - 1$ permutations)
- 3 résoudre $L\mathbf{y} = \mathbf{b}_p$ ($n(n - 1)$ flops, car éléments diagonaux = 1)
- 4 résoudre $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ (n^2 flops)

CALCUL DU DÉTERMINANT DE A

Soit la factorisation $PA = LU$ avec :

- A une matrice $n \times n$
- U triangulaire supérieure avec éléments diagonaux $a_{kk}^{(k)}$, $k = 1, \dots, n$
 $\Rightarrow \det(U) = a_{11}^{(1)} \cdots a_{nn}^{(n)}$
- L triangulaire inférieure avec éléments diagonaux 1
 $\Rightarrow \det(L) = 1$
- $P = P_{n-1} \cdots P_1$ avec $\det(P_i) = \pm 1$ ($-$ si la permutation a effectivement eu lieu, $+$ si on n'a pas permuté)

RAPPEL : Pour deux matrices carrées B, C on a

$$\det(BC) = \det(B)\det(C)$$

On a donc $\det(P) = (-1)^p$ avec p le nombre de permutations effectuées et

$$\boxed{\det(A) = \det(U)/\det(P) = (-1)^p a_{11}^{(1)} \cdots a_{nn}^{(n)}}.$$

On ne résout donc pas un système en calculant des déterminants, on calcul un déterminant avec la factorisation LU (et donc, indirectement, en résolvant le système)

INVERSION MATRICIELLE

Soit une factorisation $PA = LU$ pour la matrice A .

Notez que si \mathbf{x}_i est la colonne i de A^{-1} , alors elle est la solution de

$$A\mathbf{x}_i = \mathbf{e}_i$$

avec \mathbf{e}_i le vecteur de la base canonique (sa composante i vaut 1 et les autres valent 0).

On peut calculer A^{-1} en

- ① calculant la factorisation $PA = LU$ de A ($\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$ flops)
- ② permutant (pour $i = 1, \dots, n$) $\mathbf{e}_{pi} = P\mathbf{e}_i$ (0 flops,
au plus $n(n-1)$ permutations)
- ③ résolvant (pour $i = 1, \dots, n$) $L\mathbf{y}_i = \mathbf{e}_{pi}$ ($n^3 + \mathcal{O}(n)$ flops)
- ④ résolvant (pour $i = 1, \dots, n$) $U\mathbf{x}_i = \mathbf{y}_i$ (n^3 flops)

Soit $\frac{8}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$ flops en tout.

NOTE : il est possible d'économiser des opérations lors de la première résolution (point 3) car \mathbf{e}_i et donc \mathbf{e}_{pi} ont presque tous leurs éléments valant 0. Le coût total peut donc être réduit à $2n^3 + \mathcal{O}(n^2)$ flops.