Chapitre 8 : Equations différentielles avec conditions initiales

Problème (scalaire) :

Soient un réel $T > 0$ et une fonction donnée $f(t, y) : [0, T] \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continue par rapport aux deux variables t et y (t sera appelé le *temps*) . On cherche à déterminer une fonction *scalaire* $y(t) \in C^1([0, T])$ qui satisfait (pour un réel y_0 donné)

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = f(t, y(t)), & t \in [0, T], \qquad \text{(équation différentielle)} \\ y(0) = y_0 . & \qquad \text{(condition initiale)} \end{cases} \tag{1}$$

Ce problème est un *problème de Cauchy.*

Si l'on intègre la première équation entre 0 et t, on obtient (avec $\int_0^t \frac{dy}{dt}(\tau)d\tau = y(t) - y(0)$)

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(\tau, y(\tau))d\tau ,$$

et, si $f(t, y)$ ne dépend pas de y , le problème est équivalent à l'intégration numérique d'une fonction sur l'intervalle $[0, t]$.

Systèmes d'équations différentielles

Problème (vectoriel) :

Soient un réel $T > 0$ et une fonction donnée $F(t, \mathbf{y}) : [0, T] \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ continue par rapport aux deux variables t et $\mathbf{y}$. On cherche à déterminer une fonction *vectorielle* $\mathbf{y}(t) \in \mathbf{C}^1([0, T])$ qui satisfait (pour un vecteur $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ donné)

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{y}}{dt}(t) = F(t, \mathbf{y}(t)), & t \in [0, T], \qquad \text{(système différentiel)} \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 . & \qquad \text{(condition initiale)} \end{cases}$$

Ce problème est un *problème de Cauchy vectoriel.*

Si l'on intègre la première équation entre 0 et t, on obtient

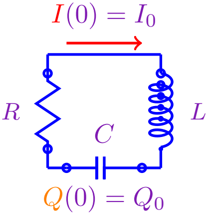
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0 + \int_0^t F(\tau, \mathbf{y}(\tau)) d\tau \ ;$$

rappelons que l'intégrale entre 0 et t d'un vecteur $\mathbf{v}(t) = (v_i(t))$ est un vecteur dont la composante i vaut $\int_0^t v_i(\tau) d\tau$.

Note : La formulation des problèmes scalaire et vectoriel est analogue, et cette analogie s'étend aussi aux méthodes numériques.

Equations d'ordre deux et plus

Exemple :



L'évolution d'un circuit RLC peut être décrit par une équation différentielle d'ordre 2 (avec $Q(t)$ comme fonction inconnue) :

$$\begin{cases} L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = 0 \\ Q(0) = Q_0\,, \qquad \frac{dQ}{dt}(0) = I_0 \end{cases}$$

ou, alternativement, en introduisant l'inconnue $I(t) = \frac{dQ}{dt}(t)$ de courant, par le système différentiel d'ordre 1 suivant

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} I \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L}I - \frac{1}{CL}Q \\ I \end{pmatrix} \\ Q(0) = Q_0\,, \qquad I(0) = I_0\,. \end{cases}$$

De manière générale, tout problème de Cauchy d'ordre n est équivalent à un problème de Cauchy vectoriel de dimension n et d'ordre 1.

En particulier, en considérant le cas $n = 2$ en toute généralité, on a

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dt^2} = f(t\,,\, y\,,\, \frac{dy}{dt}) \\ y(0) = y_0\,, \quad \frac{dy}{dt}(0) = y_0' \end{cases} \quad \overset{u\,=\,\frac{dy}{dt}}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t\,,\, y\,,\, u) \\ u \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} u(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0' \\ y_0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Existence, unicité

On dit que la fonction $f(t,y)$ est *lipschitzienne* en y s'il existe un réel ℓ tel que pour tout $t \in [0,T]$, y_1 et y_2 on a

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \;\leq\; \ell\,|y_1 - y_2|\,.$$

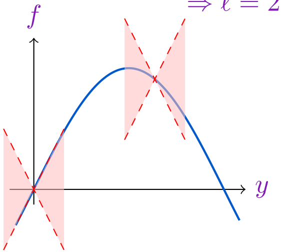
En particulier, si $\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)$ existe et, pour tout $t \in [0,T]$ et tout y, elle satisfait

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)\right| \;\leq\; \ell\,,$$

alors la fonction est lipschitzienne en y.

$f(t,y) = 2\sin(y)$

$\Rightarrow \ell = 2$



Théorème 1 : *Si la fonction $f(t,y)$ est continue et lipschitzienne en y, alors le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) \;=\; f(t,y(t))\,, & t \in [0,T]\,,\\ y(0) \;=\; y_0\,. \end{cases}$$

admet une et une seule solution.

Note : Dans ce qui suit nous admettrons que la fonction $f(t,y)$ est continue et lipschitzienne en y. Cela nous permettra, entre autres, de rechercher *la* solution du problème de Cauchy sans se demander si une telle solution existe.

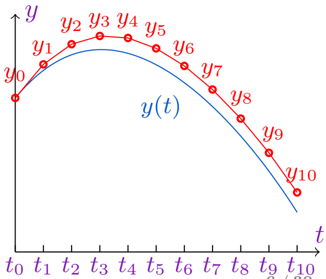
Problème (scalaire) :
On cherche à déterminer la solution approchée du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = f(t, y(t)), & t \in [0, T], \\ y(0) = y_0 . \end{cases} \tag{1}$$

La solution exacte $y(t)$ du problème satisfait l'équation intégrale

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(\tau, y(\tau)) d\tau .$$

Résolution numérique :
On se propose d'approcher la solution exacte $y(t)$ sur l'intervalle $[0, T]$ aux points $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = T$ par y_0 , y_1 , . . . , y_m .



Note : La distance entre deux points successifs

$$h_k = t_{k+1} - t_k$$

est le *pas de discrétisation* (aussi appelé *pas d'intégration*).

Méthode d'Euler progressive

Problème (scalaire) :
On cherche à déterminer la solution approchée du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = f(t, y(t)), & t \in [0, T], \\ y(0) = y_0 . \end{cases} \tag{1}$$

La solution exacte $y(t)$ du problème satisfait l'équation intégrale

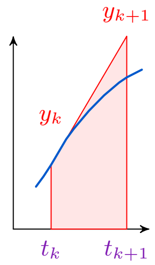
$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(\tau, y(\tau)) d\tau .$$

La méthode d'*Euler progressive* (ou *Euler explicite*) consiste à approcher la dérivée au point t_k par

$$f(t_k, y(t_k)) = \frac{dy}{dt}(t_k) \approx \frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{\underbrace{t_{k+1} - t_k}_{h_k}} .$$

En utilisant $y_k \approx y(t_k)$, $y_{k+1} \approx y(t_{k+1})$ et en isolant y_{k+1} on a

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + h_k f(t_k, y_k)} .$$



Problème (scalaire) :
On cherche à déterminer la solution approchée du problème de Cauchy

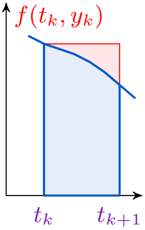
$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = f(t, y(t)), & t \in [0, T], \\ y(0) = y_0. \end{cases} \qquad (1)$$

La solution exacte $y(t)$ du problème satisfait l'équation intégrale

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(\tau, y(\tau)) d\tau.$$

Alternativement, on peut obtenir la méthode d'*Euler progressive* à partir de la formulation intégrale, en notant que cette dernière implique

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(\tau, y(\tau)) d\tau.$$



En utilisant l'approximation

$$f(\tau, y(\tau)) \approx f(t_k, y_k) = \text{const} \qquad \text{sur } [t_k, t_{k+1}],$$

on retrouve de nouveau

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + h_k f(t_k, y_k)}.$$

Méthode d'Euler rétrograde

Problème (scalaire) :
On cherche à déterminer la solution approchée du problème de Cauchy

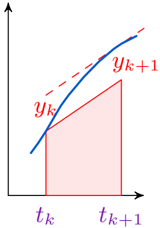
$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = f(t, y(t))\,, & t \in [0, T]\,, \\ y(0) = y_0\,. \end{cases} \tag{1}$$

La solution exacte $y(t)$ du problème satisfait l'équation intégrale

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(\tau, y(\tau))d\tau\,.$$

La méthode d'*Euler rétrograde* (ou *Euler implicite*) consiste à approcher la dérivée au point t_{k+1} par

$$f(t_{k+1}, y(t_{k+1})) = \frac{dy}{dt}(t_{k+1}) \approx \frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{\underbrace{t_{k+1} - t_k}_{h_k}}\,.$$



En utilisant $y_k \approx y(t_k)$, $y_{k+1} \approx y(t_{k+1})$ on a

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + h_k f(t_{k+1}, y_{k+1})}\,.$$

Méthode d'Euler rétrograde (suite)

Problème (scalaire) :
On cherche à déterminer la solution approchée du problème de Cauchy

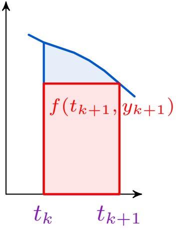
$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = f(t, y(t)), & t \in [0, T], \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{1}$$

La solution exacte $y(t)$ du problème satisfait l'équation intégrale

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(\tau, y(\tau)) d\tau .$$

Alternativement, on peut obtenir la méthode d'*Euler rétrograde* à partir de la formulation intégrale. En utilisant de nouveau

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(\tau, y(\tau)) d\tau .$$



ainsi que l'approximation

$$f(\tau, y(\tau)) \approx f(t_{k+1}, y_{k+1}) = \text{const} \qquad \text{sur } [t_k, t_{k+1}],$$

on retrouve

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + h_k f(t_{k+1}, y_{k+1})}.$$

Méthodes d'Euler : implicite vs. explicite

Euler progressive : $$y_{k+1} = y_k + h_k f(t_k, y_k)\,, \qquad (2)$$

Pour la méthode d'Euler progressive, il suffit de substituer la valeur y_k dans la formule (2) pour obtenir y_{k+1} :

pas 1 : $y_1 = y_0 + h_0 f(t_0, y_0)$

pas 2 : $y_2 = y_1 + h_1 f(t_1, y_1)$

$\ldots$

Il s'agit d'une méthode *explicite*.

Euler rétrograde : $$y_{k+1} = y_k + h_k f(t_{k+1}, y_{k+1})\,. \qquad (3)$$

Dans le cas d'Euler rétrograde, la formule de récurrence (3) ne donne pas directement la valeur y_{k+1} à partir de y_k ; pour l'obtenir, il faut résoudre une équation non linéaire définie par (3) par rapport à y_{k+1} :

pas 1 : résoudre $y_1 = y_0 + h_0 f(t_1, y_1)$ par rapport à y_1

pas 2 : résoudre $y_2 = y_1 + h_1 f(t_2, y_2)$ par rapport à y_2

$\ldots$

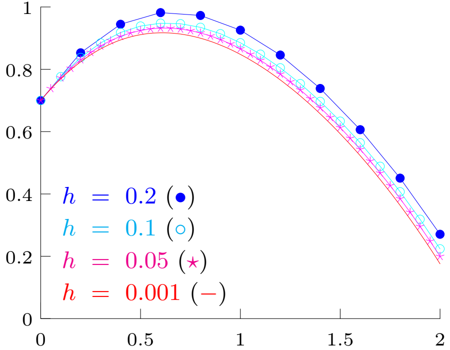
Il s'agit d'une méthode *implicite*.

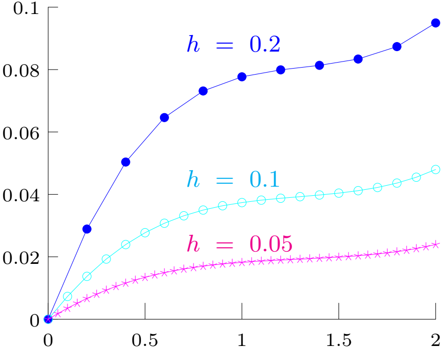
Méthodes d'Euler : convergence

Exemple : Considérons la résolution approchée du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = \cos(y) - t\,, & t \geq 0\,, \\ y(0) = 0.7\,, \end{cases}$$

par la méthode d'Euler progressive. La figure de gauche donne les solutions approchées pour $h = 0.2$, 0.1, 0.05 et 0.001 ; celle de droite contient l'estimation de l'erreur $|y_k - y(t_k)|$ (la solution approchée pour $h = 0.001$ fait office de solution exacte $y(t)$) .





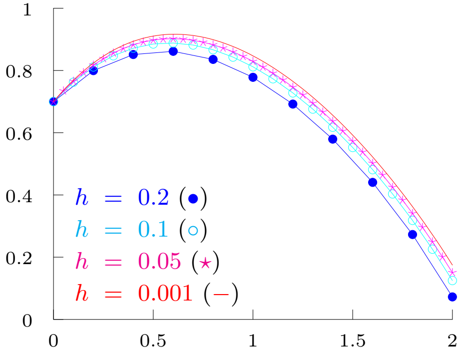
Observation : L'erreur $|y_k - y(t_k)|$ semble proportionnelle à h.

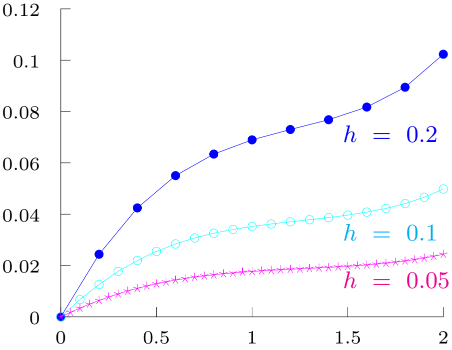
Méthodes d'Euler : convergence (suite)

Exemple : Considérons la résolution approchée du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = \cos(y) - t\,, & t \geq 0\,, \\ y(0) = 0.7\,, & \end{cases}$$

par la méthode d'Euler rétrograde. La figure de gauche donne les solutions approchées pour $h = 0.2$, 0.1, 0.05 et 0.001 ; celle de droite contient l'estimation de l'erreur $|y_k - y(t_k)|$ (la solution approchée pour $h = 0.001$ fait office de solution exacte $y(t)$) .





Observation : De nouveau, l'erreur $|y_k - y(t_k)|$ est proportionnelle à h.

Méthodes d'Euler : convergence (suite)

Le théorème suivant formalise les observations des exemples précédents.

Théorème 2 :
Soit $f(t,y)$ *une fonction continue et à dérivées partielles* $\frac{\partial f}{\partial t}$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *continues. Supposons de plus que cette fonction est lipschitzienne en* y *.*

Soit $y(t)$ *l'unique solution du problème de Cauchy* (1) *associé à* f*, et soit* y_k *la solution approchée au point* $t_k = hk$*, avec* $h = T/m$ *et* $k = 0, \dots m$ *, obtenue par la méthode d'Euler progressive ou rétrograde.*

Alors il existe une constante $C > 0$ *(indépendante de* h *mais qui peut dépendre de* T*) telle que*

$$\max_k |y_k - y(t_k)| \leq Ch .$$

Dit autrement, pour autant que les hypothèses du théorème soient satisfaites, la solution approchée y_k, $k = 0, \dots m$, converge vers la solution exacte $y(t)$ lorsque $h \to 0$.

Vocabulaire : La méthode de résolution d'une équation différentielle est d'*ordre n* si

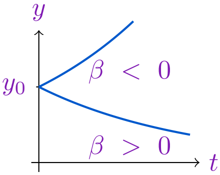
$$\max_k |y_k - y(t_k)| \leq Ch^n .$$

Les méthodes d'Euler sont donc des méthodes du premier ordre.

Stabilité : généralités

Considérons à présent le problème de Cauchy suivant (avec $T \to \infty$) :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) \;=\; -\beta\, y(t)\,, & t \;>\; 0\,, \\ y(0) \;=\; y_0\,. \end{cases} \tag{4}$$



La solution exacte du problème est

$$y(t) \;=\; y_0\, e^{-\beta t}\,;$$

elle tend vers zéro pour $\beta > 0$ et croît pour $\beta < 0$.

Une méthode de résolution est *absolument stable* (ou simplement *stable*) pour le problème de Cauchy (4) avec $\beta > 0$ si elle produit une séquence y_k, $k = 1, 2, \ldots$, d'approximations de $y(t_k)$ telle que

$$|y_k| \;\to\; 0 \quad \text{lorsque} \quad t_k \;\to\; \infty\,.$$

EULER PROGRESSIVE : STABILITÉ

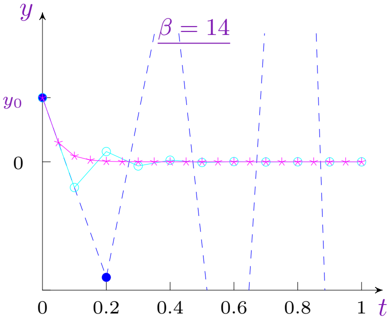
Considérons les pas de discrétisation h constants $\quad \Rightarrow \quad t_k = hk\,,\ k = 0, 1, 2\ldots$

EULER PROGRESSIVE : $y_{k+1} = y_k + h\,\underbrace{f(t_k, y_k)}_{-\beta y_k} = y_k(1 - h\beta)$

et donc

$$\boxed{y_k = y_0(1 - h\beta)^k}\,.$$

- $h\beta < 1$
  - $\Rightarrow \quad y_k = y_0|1 - h\beta|^k \to 0$
  - $\Rightarrow$ (stable, non oscillant)
- $1 \leq h\beta < 2$
  - $\Rightarrow \quad y_k = y_0|1 - h\beta|^k(-1)^k \to 0$
  - $\Rightarrow$ (stable, oscillant)
- $h\beta > 2$
  - $\Rightarrow \quad y_k = y_0|1 - h\beta|^k(-1)^k \to \infty$
  - $\Rightarrow$ (instable)



$h = 0.2$ ($\bullet$) ; $h = 0.1$ ($\circ$) ; $h = 0.05$ ($\star$)

CONCLUSION : Méthode d'Euler progressive est absolument stable si $h\beta < 2$.

Euler rétrograde : stabilité

Considérons les pas de discrétisation h constants $\Rightarrow \quad t_k = hk\,,\ k = 0, 1, 2\ldots$

Euler rétrograde : $y_{k+1} = y_k + h\,\underbrace{f(t_{k+1}, y_{k+1})}_{-\beta y_{k+1}}$

ce qui implique $y_{k+1}(1 + h\beta) = y_k$ et donc

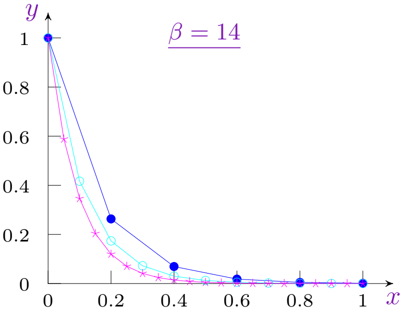
$$\boxed{y_k = y_0 \frac{1}{(1 + h\beta)^k}}\,.$$

En particulier, comme h et β sont positifs, on a

$$\frac{1}{1 + h\beta} < 1\,,$$

et donc $y_k \to 0$ pour tout $h > 0$.

Conclusion : Méthode d'Euler rétrograde est toujours absolument stable.



$h = 0.2$ ($\bullet$) ; $h = 0.1$ ($\circ$) ; $h = 0.05$ ($\star$)

Stabilité : problèmes non homogènes

La stabilité est étudiée par rapport au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = -\beta\, y(t)\,, & t > 0\,, \\ y(0) = y_0\,. \end{cases} \tag{4}$$

Est-il utile d'étudier la stabilité sur base d'un problème aussi simple ?

Généralisation 1 : Cas non homogène

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = -\beta\, y(t) + b\,, & t > 0\,, \\ y(0) = y_0\,. \end{cases}$$

Un changement de variable $\widetilde{y}(t) = y(t) - \frac{b}{\beta}$ permet de retrouver le problème de Cauchy de départ (avec une condition initiale modifiée).

De même, en résolvant le problème non homogène avec, par exemple, Euler progressive, on a

$$y_{k+1} = y_k + h(-\beta y_k + b)\,.$$

En utilisant un changement de variable similaire $\widetilde{y}_k = y_k - \frac{b}{\beta}$ on retrouve aussi le cas homogène

$$\widetilde{y}_{k+1} = \widetilde{y}_k(1 - h\beta)\,.$$

Conclusion : On retrouve la même récurrence (et donc la même analyse) que pour le cas homogène, et elle est indépendante de b.

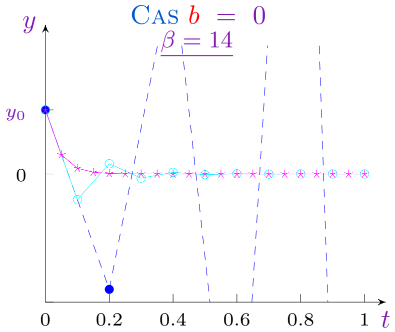
La stabilité est étudiée par rapport au problème de Cauchy :

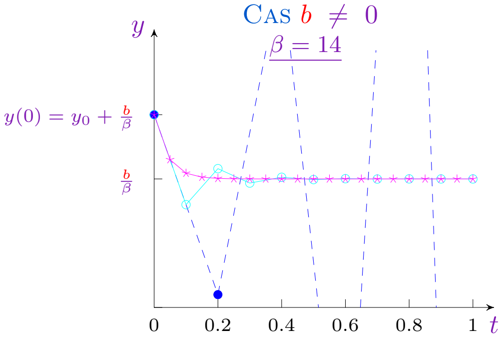
$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) \;=\; -\beta\, y(t)\,, & t \;>\; 0\,, \\ y(0) \;=\; y_0\,. \end{cases} \tag{4}$$

Est-il utile d'étudier la stabilité sur base d'un problème aussi simple ?

GÉNÉRALISATION 1 : Cas non homogène

EXEMPLE (suite)





$h = 0.2$ (●) ; $h = 0.1$ (○) ; $h = 0.05$ (⋆)

Stabilité : problèmes non linéaires

La stabilité est étudiée par rapport au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = -\beta\, y(t)\,, & t > 0\,, \\ y(0) = y_0\,. \end{cases} \tag{4}$$

Est-il utile d'étudier la stabilité sur base d'un problème aussi simple ?

Généralisation 2 : Cas non linéaire

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = f(t, y(t))\,, & t > 0\,, \\ y(0) = y_0\,. \end{cases}$$

A travers le développement de Taylor au voisinage de $(t_k\,, y_k)$

$$f(t,\, y) \approx\ f(t,\, y_k)\ +\ \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(t,\, y_k)}_{-\beta(t)}(y - y_k) =\ b(t)\ -\ \beta(t)\, y\,,$$

on retrouve, avec $b(t) = f(t,\, y_k) + \beta(t) y_k$, le cas non homogène sur l'intervalle où $\beta(t)$, $b(t)$ varient peu.

Conclusion : Si la fonction f est suffisamment régulière, l'analyse de la stabilité dans le cas non homogène s'applique localement.

Stabilité : problèmes non linéaires

La stabilité est étudiée par rapport au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = -\beta\, y(t)\,, & t > 0\,, \\ y(0) = y_0\,. \end{cases} \tag{4}$$

Est-il utile d'étudier la stabilité sur base d'un problème aussi simple ?

Généralisation 2 : Cas non linéaire

Exemple

Nous résolvons le problème de Cauchy

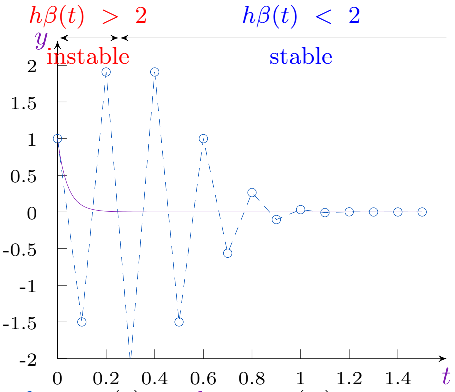
$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = -\frac{25}{t+1}\, y(t)\,, & t > 0\,, \\ y(0) = y_0\,. \end{cases}$$

avec la méthode d'Euler progressive de pas $h = 0.1\,.$

Dans ce cas $b = 0$ et $\beta(t) = \frac{25}{t+1}$.

La solution exacte est

$$y(t) = \frac{y_0}{(t+1)^{25}}\,.$$



$h = 0.1$ (○) ; sol. exacte (−) ;

Stabilité : systèmes

La stabilité est étudiée par rapport au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = -\beta\, y(t)\,, & t > 0\,, \\ y(0) = y_0\,. \end{cases} \tag{4}$$

Est-il utile d'étudier la stabilité sur base d'un problème aussi simple ?

Généralisation 3 : Cas des systèmes linéaires

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{y}}{dt}(t) = -A\,\mathbf{y}(t)\,, & t > 0\,, \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0\,. \end{cases}$$

Si A est diagonalisable, on décompose en modes propres via $A = P^{-1}\mathrm{diag}(\beta_i)P$ (avec β potentiellement complexe !) et, en utilisant $\mathbf{z} = P\mathbf{y}$, on aboutit à un système de n équations non homogènes découplées :

pour $i = 1, \ldots, n$ on a $\begin{cases} \frac{dz_i}{dt}(t) = -\beta_i z_i(t)\,, & t > 0\,, \\ z_i(0) = (P\mathbf{y}_0)_i\,. \end{cases}$

Conclusion (sol. exacte) : Dans le cas des systèmes linéaires le problème vectoriel peut être découplé en n problèmes scalaires, avec β_i les valeurs propres de A. La solution exacte est stable si $\mathrm{Re}(\beta_i) > 0$ pour toute valeur propre β_i de A.

Stabilité : systèmes

La stabilité est étudiée par rapport au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = -\beta\, y(t)\,, & t > 0\,, \\ y(0) = y_0\,. \end{cases} \tag{4}$$

Est-il utile d'étudier la stabilité sur base d'un problème aussi simple ?

Généralisation 3 : Cas des systèmes linéaires

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{y}}{dt}(t) = -A\,\mathbf{y}(t)\,, & t > 0\,, \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0\,. \end{cases}$$

Dans ce cas la méthode d'Euler progressive devient

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + h\,\underbrace{F(t_k, \mathbf{y}_k)}_{-A\mathbf{y}_k} = (I - hA)\mathbf{y}_k\,.$$

En utilisant de nouveau $A = P^{-1}\mathrm{diag}(\beta_i)P$ et $\mathbf{z}_k = P\mathbf{y}_k$ on obtient n relations de récurrence identiques au cas scalaire

$$(\mathbf{z}_{k+1})_i = (1 - h\beta_i)(\mathbf{z}_k)_i\,.$$

Conclusion (Euler progressive) : Dans le cas des systèmes linéaires la condition de stabilité $|1 - h\beta_i| < 1$ doit être vérifiée pour toute valeur propre β_i de A.

Stabilité : systèmes

La stabilité est étudiée par rapport au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = -\beta\, y(t)\,, & t > 0\,, \\ y(0) = y_0\,. \end{cases} \tag{4}$$

Est-il utile d'étudier la stabilité sur base d'un problème aussi simple ?

Généralisation 3 : Cas des systèmes linéaires

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{y}}{dt}(t) = -A\,\mathbf{y}(t)\,, & t > 0\,, \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0\,; \end{cases}$$

Dans ce cas la méthode d'Euler rétrograde devient

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + h\,\underbrace{F(t_{k+1}, \mathbf{y}_{k+1})}_{-A\mathbf{y}_{k+1}} = \mathbf{y}_k - hA\mathbf{y}_{k+1} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{y}_{k+1} = (I+hA)^{-1}\mathbf{y}_k\,.$$

Avec $A = P^{-1}\mathrm{diag}(\beta_i)P$ et $\mathbf{z}_k = P\mathbf{y}_k$ on obtient n relations de récurrence identiques au cas scalaire

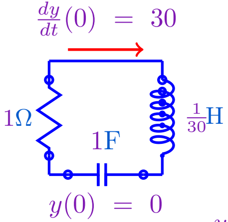
$$(\mathbf{z}_{k+1})_i = (\mathbf{z}_k)_i/(1+h\beta_i)\,.$$

Conclusion (Euler rétrograde) : Dans le cas des systèmes linéaires la condition de stabilité est vérifiée d'office par toute valeur propre β_i de A telle que $\mathrm{Re}(\beta_i) > 0$.

Stabilité : systèmes (suite)

Généralisation 3 : Cas des systèmes linéaires

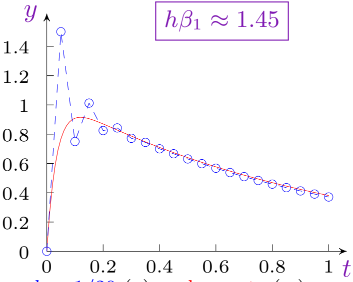
Exemple (Exemple 3 de la Motivation) : Circuit RLC



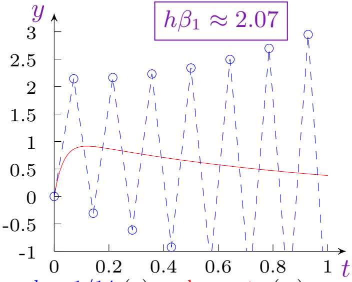
$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} I \\ Q \end{pmatrix}}_{\frac{d\mathbf{y}}{dt}(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} -30 & -30 \\ 1 & \end{pmatrix}}_{-A} \underbrace{\begin{pmatrix} I \\ Q \end{pmatrix}}_{\mathbf{y}(t)} \\ Q(0) = 0\,, \qquad I(0) = 30\,. \end{array} \right.$$

Les valeurs propres de A sont $\beta_1 \approx 29$ et $\beta_2 \approx 1$.

La méthode d'Euler progressive donne :



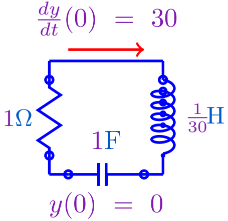
$h = 1/20$ (○) ; sol. exacte (−) ;



$h = 1/14$ (○) ; sol. exacte (−) ;

GÉNÉRALISATION 3 : Cas des systèmes linéaires

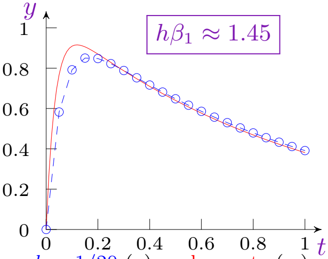
EXEMPLE (Exemple 3 de la Motivation) : Circuit RLC



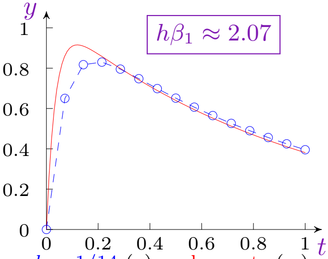
$$\left\{\begin{array}{l} \underbrace{\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} I \\ Q \end{pmatrix}}_{\frac{d\mathbf{y}}{dt}(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} -30 & -30 \\ 1 & \end{pmatrix}}_{-A} \underbrace{\begin{pmatrix} I \\ Q \end{pmatrix}}_{\mathbf{y}(t)} \\ Q(0) = 0\,, \qquad I(0) = 30\,. \end{array}\right.$$

Les valeurs propres de A sont $\beta_1 \approx 29$ et $\beta_2 \approx 1$.

La méthode d'Euler rétrograde donne :



$h = 1/20$ ($\circ$) ; sol. exacte ($-$) ;



$h = 1/14$ ($\circ$) ; sol. exacte ($-$) ;

Stabilité : systèmes (suite)

De manière générale, soit un problème de Cauchy vectoriel suivant :

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{y}}{dt}(t) = -A\,\mathbf{y}(t)\,, & t > 0\,, \\ y(0) = y_0\,, \end{cases}$$

dont la matrice réelle A d'ordre $n \times n$ possède n valeurs propres $\beta_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, n$.

La solution exacte peut s'écrire sous la forme (**sans démonstration**) :

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{c}_i\, p_i(t)\, e^{-\beta_i t}\,, \quad \mathbf{c}_i \in \mathbb{R}^n\,,$$

où le degré du polynôme $p_i(t)$ est strictement inférieur à la multiplicité de β_i.

Note : La solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre n a la même forme, avec le terme $p_i(t)$ polynomial nécessaire si la racine β_i du polynôme caractéristique est une racine multiple.

On notera (**sans démonstration**, mais par analogie avec le cas où A est diagonalisable) que :

- la solution exacte $\mathbf{y}(t)$ est bornée si $\mathrm{Re}(\beta_i) > 0$;
- Euler implicite est stable pour tout h ;
- Euler explicite est stable si $|1 - h\beta_i| < 1, \quad i = 1, \ldots, n$.

Méthode de Crank-Nicolson

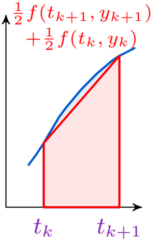
Rappelons que la solution exacte $y(t)$ satisfait (cf. page 8)

$$y(t_{k+1}) \;=\; y(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(\tau, y(\tau))d\tau \,.$$

La méthode de *Crank-Nicolson* s'obtient en approchant l'intégrale par la formule des trapèzes

$$\boxed{y_{k+1} \;=\; y_k + \frac{1}{2}h_k\left(f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1})\right)}\,,$$

où, comme avant, $h_k \;=\; t_{k+1} - t_k$.



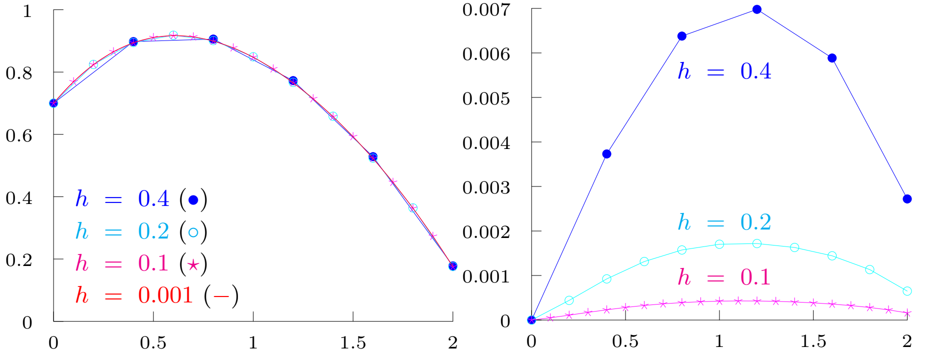
Notons que la méthode est :

- implicite (y_{k+1} se retrouve comme argument de f dans le membre de droite)
- du second ordre
- stable quel que soit le pas h_k (tout comme Euler rétrograde)

Exemple (suite) : Reprenons le problème de Cauchy

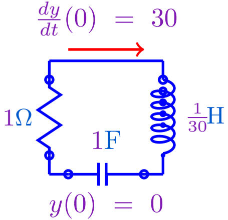
$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = \cos(y) - t\,, & t \geq 0\,, \\ y(0) = 0.7\,, \end{cases}$$

et résolvons-le par la méthode de Crank-Nicolson. La figure de gauche donne les solutions approchées pour $h = 0.4\,, 0.2\,, 0.1$ et 0.001 ; celle de droite contient l'estimation de l'erreur $|y_k - y(t_k)|$ (la solution approchée pour $h = 0.001$ fait office de solution exacte $y(t)$).



Observation : $|y_k - y(t_k)| \propto h^2$ et la méthode est en effet d'ordre 2.

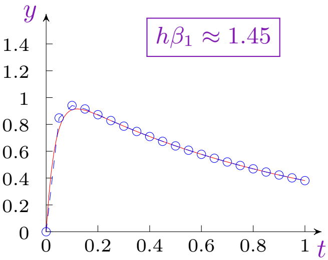
EXEMPLE (Exemple 3 de la Motivation) : Circuit RLC



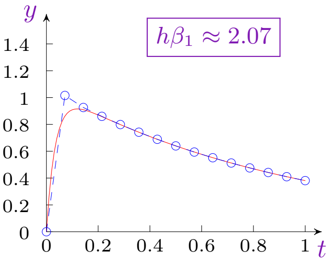
$$\begin{cases} \underbrace{\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} I \\ Q \end{pmatrix}}_{\frac{d\mathbf{y}}{dt}(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} -30 & -30 \\ 1 & \end{pmatrix}}_{-A} \underbrace{\begin{pmatrix} I \\ Q \end{pmatrix}}_{\mathbf{y}(t)} \\ Q(0) = 0\,, \qquad I(0) = 30\,. \end{cases}$$

Les valeurs propres de A sont $\beta_1 \approx 29$ et $\beta_2 \approx 1$.

La méthode de Crank-Nicolson donne :



$h = 1/20$ ($\circ$) ; sol. exacte ($-$) ;



$h = 1/14$ ($\circ$) ; sol. exacte ($-$) ;

Méthode de Heun

On obtient la méthode de *Heun* (ou de *Runge-Kutta* d'ordre 2) en rendant la méthode de Crank-Nicolson explicite sur base de la formule d'Euler progressive $y_{k+1} = y_k + h_k f(t_k, y_k)$

$$CN \ : \ y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2} h_k \big(f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, \underbrace{y_{k+1}}_{EP \ : \ y_k + h_k f(t_k, y_k)}) \big) ,$$

ce qui revient à

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2} h_k \big(f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_k + h_k f(t_k, y_k)) \big)} .$$

Notons que la méthode est :

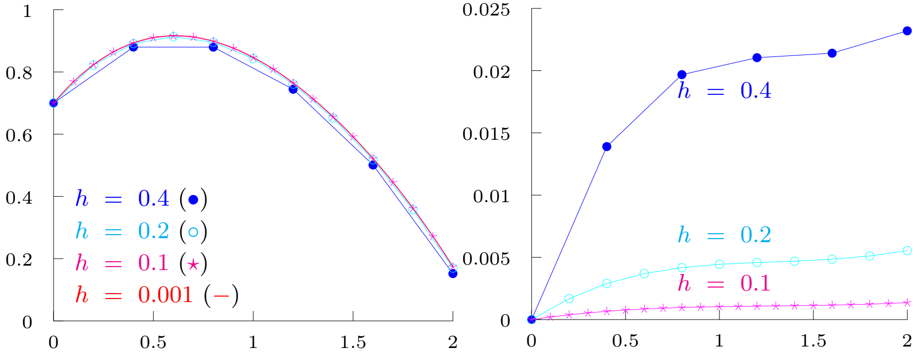
- explicite (par construction)
- du second ordre
- (notations de pp.15-16) stable si $h\beta < 2$ (tout comme Euler progressive)

Heun : ordre

Exemple (suite) : Reprenons le problème de Cauchy

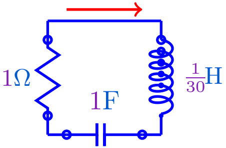
$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = \cos(y) - t\,, & t \geq 0\,, \\ y(0) = 0.7\,, \end{cases}$$

et résolvons-le par la méthode de Heun. La figure de gauche donne les solutions approchées pour $h = 0.4\,,\ 0.2\,,\ 0.1$ et 0.001 ; celle de droite contient l'estimation de l'erreur $|y_k - y(t_k)|$ (la solution approchée pour $h = 0.001$ fait office de solution exacte $y(t)$) .



Observation : $|y_k - y(t_k)| \propto h^2$ et la méthode est en effet d'ordre 2.

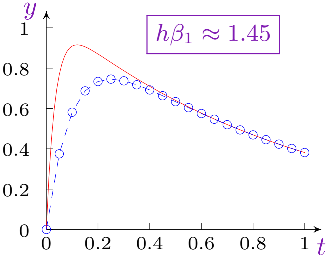
Exemple (Exemple 3 de la Motivation) : Circuit RLC



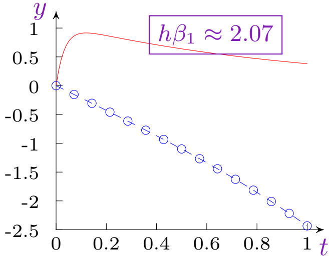
$$\begin{cases} \underbrace{\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} I \\ Q \end{pmatrix}}_{\frac{d\mathbf{y}}{dt}(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} -30 & -30 \\ 1 & \end{pmatrix}}_{-A} \underbrace{\begin{pmatrix} I \\ Q \end{pmatrix}}_{\mathbf{y}(t)} \\ Q(0) = 0, \quad I(0) = 30. \end{cases}$$

Les valeurs propres de A sont $\beta_1 \approx 29$ et $\beta_2 \approx 1$.

La méthode de Heun donne :



$h = 1/20$ (○) ; sol. exacte (−) ;



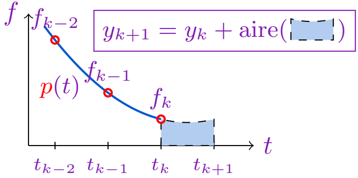
$h = 1/14$ (○) ; sol. exacte (−) ;

Méthodes multi-pas

Les méthodes d'Euler, de Crank-Nicolson et de Heun ont en commun le fait qu'elles ne relient que y_{k+1} et y_k ; une méthode *multi-pas* à $q+1$ pas permet de relier y_{k+1} à y_k, y_{k-1}, $\ldots$, y_{k-q} .

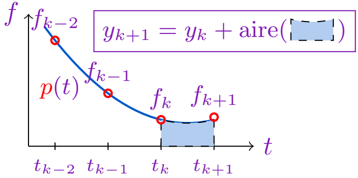
Méthodes d'Adams-Bashforth :

consistent à approcher $f(t, y(t))$ par un polynôme d'interpolation $p(t)$ passant par $f(y_k, t_k)$, $f(y_{k-1}, t_{k-1})$, $\ldots$, $f(y_{k-p}, t_{k-q})$.



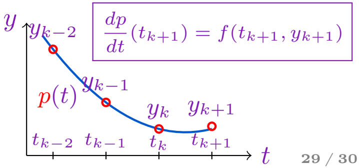
Méthodes d'Adams-Moulton :

consistent à approcher $f(t, y(t))$ par un polynôme d'interpolation $p(t)$ passant par $f(y_{k+1}, t_{k+1})$, $f(y_k, t_k)$, $\ldots$, $f(y_{k-q}, t_{k-q})$.



Méthodes BDF :

consistent à approcher $y(t)$ par un polynôme d'interpolation $p(t)$ passant par y_{k+1}, y_k, $\ldots$, y_{k-q} .

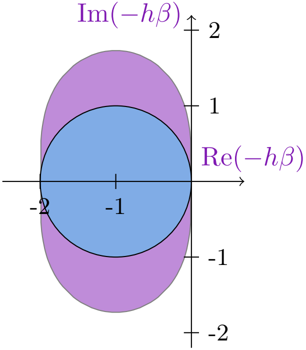


ANNEXE : RÉGIONS DE STABILITÉ

La *région de stabilité* pour une méthode est définie par

$$\{-h\beta \in \mathbb{C} \mid h\beta \text{ satisfait la condition de stabilité de la méthode } \}$$

Régions de stabilité des méthodes d'Euler progressive et de Heun :



Les régions de stabilité des méthodes d'Euler rétrograde et de Crank-Nicolson comprennent quant à elles l'ensemble du demi-plan gauche.