Projet Chaos

Billard Carré avec Barre Centrale

Jun Nuo Chi, Nathan Dwek

Ecole Polytechnique de Bruxelles

8 janvier 2014

Introduction

Théorie du Chaos - But du Projet

- Système déterministe mais non prédictible à long terme
  - Possède des équations d'évolution déterministes

Introduction

Théorie du Chaos - But du Projet

- Système déterministe mais non prédictible à long terme
  - Possède des équations d'évolution déterministes
  - Sensible aux conditions initiales
  - Non linéaire (superposition non applicable)

- Système déterministe mais non prédictible à long terme
  - Possède des équations d'évolution déterministes
  - Sensible aux conditions initiales
  - Non linéaire (superposition non applicable)
- Applications dans de nombreux domaines : météorologie, finance, mécanique . . .

- Système déterministe mais non prédictible à long terme
  - Possède des équations d'évolution déterministes
  - Sensible aux conditions initiales
  - Non linéaire (superposition non applicable)
- Applications dans de nombreux domaines : météorologie, finance, mécanique ...
- Etude du mouvement d'une balle dans un billard carré muni d'une barre centrale respirante en fonction des paramètres du système :

- Système déterministe mais non prédictible à long terme
  - Possède des équations d'évolution déterministes
  - Sensible aux conditions initiales
  - Non linéaire (superposition non applicable)
- Applications dans de nombreux domaines : météorologie, finance, mécanique ...
- Etude du mouvement d'une balle dans un billard carré muni d'une barre centrale respirante en fonction des paramètres du système :
  - Orientation du billard : vertical ou horizontal
  - Paramètres de respiration de la barre : $l = l_0(1 + sin(\omega t))$
  - Conditions initiales de la balle : position et vitesse initiales

- Mouvement composé d'une suite de déplacement continus :

- Mouvement composé d'une suite de déplacement continus :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{cases}$$

- Mouvement composé d'une suite de déplacement continus :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{cases}$$

- Déplacement interrompu par un rebond qui définit les conditions initiales pour le déplacement suivant

- Mouvement composé d'une suite de déplacement continus :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{cases}$$

- Déplacement interrompu par un rebond qui définit les conditions initiales pour le déplacement suivant
  - Rebond sur une paroi extérieure du billard :
    - $x = \pm\frac{L}{2}$ ou $y = \pm\frac{L}{2}$
    - Simple inversion de la vitesse selon une des coordonnées

- Mouvement composé d'une suite de déplacement continus :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{cases}$$

- Déplacement interrompu par un rebond qui définit les conditions initiales pour le déplacement suivant
  - Rebond sur une paroi extérieure du billard :
    - $x = \pm\frac{L}{2}$ ou $y = \pm\frac{L}{2}$
    - Simple inversion de la vitesse selon une des coordonnées
  - Rebond sur la barre centrale :
    - $|x| \leq l_0(1 + sin(\omega t))$ et $y = 0$
    - Transfert de quantité de mouvement avec $m_{barre} >> m_{balle}$:

$$\begin{cases} \dot{x}^+ = C\dot{x}^- + (\text{sgn}(x))(1 + C)cos(\omega t)\omega \\ \dot{y}^+ = -C\dot{y}^- \end{cases}$$

- Pas de transfert de quantité de mouvement en x $\rightleftharpoons$ y ou système $\rightleftharpoons$ y
  - Si $g = 0$: Conservation de $|\dot{y}|$
  - Si $g \neq 0$: Conservation de $y_{max} = \frac{\dot{y}^2}{2} + gy$
    - Zone $y > y_{max}$ inaccessible

- Pas de transfert de quantité de mouvement en x $\rightleftharpoons$ y ou système $\rightleftharpoons$ y
  - Si $g = 0$: Conservation de $|\dot{y}|$
  - Si $g \neq 0$: Conservation de $y_{max} = \frac{\dot{y}^2}{2} + gy$
    - Zone $y > y_{max}$ inaccessible
    - Cas dégénéré $y_{max} \leq 0$: pas d'interaction avec la barre
    - Cas dégénéré $y_{max} \gg \frac{L}{2}$: influence de la gravité négligeable

- Pas de transfert de quantité de mouvement en x $\rightleftharpoons$ y ou système $\rightleftharpoons$ y
  - Si $g = 0$: Conservation de $|\dot{y}|$
  - Si $g \neq 0$: Conservation de $y_{max} = \frac{\dot{y}^2}{2} + gy$
    - Zone $y > y_{max}$ inaccessible
    - Cas dégénéré $y_{max} \leq 0$: pas d'interaction avec la barre
    - Cas dégénéré $y_{max} \gg \frac{L}{2}$: influence de la gravité négligeable
- Mouvements en x et en y quasi indépendants
- Identification des sources probables de chaos

- Pas de transfert de quantité de mouvement en x $\rightleftharpoons$ y ou système $\rightleftharpoons$ y
  - Si $g = 0$: Conservation de $|\dot{y}|$
  - Si $g \neq 0$: Conservation de $y_{max} = \frac{\dot{y}^2}{2} + gy$
    - Zone $y > y_{max}$ inaccessible
    - Cas dégénéré $y_{max} \leq 0$: pas d'interaction avec la barre
    - Cas dégénéré $y_{max} \gg \frac{L}{2}$: influence de la gravité négligeable
- Mouvements en x et en y quasi indépendants
- Identification des sources probables de chaos
  - Chaos en x $\Rightarrow$ chaos en y
  - Barre au repos $\Rightarrow$ mouvement en x régulier

- Pas de transfert de quantité de mouvement en x $\rightleftharpoons$ y ou système $\rightleftharpoons$ y
  - Si $g = 0$: Conservation de $|\dot{y}|$
  - Si $g \neq 0$: Conservation de $y_{max} = \frac{\dot{y}^2}{2} + gy$
    - Zone $y > y_{max}$ inaccessible
    - Cas dégénéré $y_{max} \leq 0$: pas d'interaction avec la barre
    - Cas dégénéré $y_{max} \gg \frac{L}{2}$: influence de la gravité négligeable
- Mouvements en x et en y quasi indépendants
- Identification des sources probables de chaos
  - Chaos en x $\Rightarrow$ chaos en y
  - Barre au repos $\Rightarrow$ mouvement en x régulier
  - Chaos en x $\overset{?}{\Leftrightarrow}$ chaos en y $\rightarrow$ A vérifier !

Barre Centrale au Repos
Observations

- Billard horizontal :
  - Mouvement régulier en x et en y comme attendu
  - Deux états échantillonables en y qui s'enchaînent de manière régulière

Barre Centrale au Repos

Observations

- Billard horizontal :
  - Mouvement régulier en x et en y comme attendu
  - Deux états échantillonables en y qui s'enchaînent de manière régulière
- Billard vertical :
  - Mouvement toujours régulier en x
  - Mouvement en y :

Barre Centrale au Repos

Observations

- Billard horizontal :
  - Mouvement régulier en x et en y comme attendu
  - Deux états échantillonables en y qui s'enchaînent de manière régulière
- Billard vertical :
  - Mouvement toujours régulier en x
  - Mouvement en y :

bifYG981W0.png

- Mouvement formé d'une suite de trois "cycles" dont deux de longueur indépendante en y
  - Infinité d'états échantillonables
  - Période potentielle = combili naturelle des longueurs de ces trois cycles
    - Vérifié par les simulations
    - Période peut être très longue $\Rightarrow$ indicateur de la transition vers le chaos
    - Mais une telle période ne semble pas toujours exister
    - Explication : "période irrationnelle"
- $l = L$: mouvement périodique dans un demi billard $\Rightarrow$ période différente
- Cas dégénéré $y_{max} \gg \frac{+L}{2}$ et $y_{max} < 0$ également vérifiés par les simulations

- Mouvement en x transitionne très rapidement vers le chaos
    - Paramètre représentatif : $\frac{l_0 \omega^2}{\dot{x}_0}$
    - Transition pour $\frac{l_0 \omega^2}{\dot{x}_0} \simeq 10^{-7}$
- Mouvement en y
    - Théorie : Mouvement en x chaotique $\Rightarrow$ Mouvement en y chaotique
    - Mouvement en x périodique $\Leftrightarrow l_0 \omega^2 \ll \dot{x}_0$
      $\Rightarrow$ Se ramène au cas $g = 0, \omega = 0$
      $\Rightarrow$ Mouvement en y périodique