

Projet Chaos

Billard Carré avec Barre Centrale

Jun Nuo Chi, Nathan Dwek

Ecole Polytechnique de Bruxelles

8 janvier 2014



Introduction

Théorie du Chaos - But du Projet

- ▶ Système déterministe mais non prédictible à long terme
 - ▶ Possède des équations d'évolution déterministes



Introduction

Théorie du Chaos - But du Projet

- ▶ Système déterministe mais non prédictible à long terme
 - ▶ Possède des équations d'évolution déterministes
 - ▶ Sensible aux conditions initiales
 - ▶ Non linéaire (superposition non applicable)



Introduction

Théorie du Chaos - But du Projet

- ▶ Système déterministe mais non prédictible à long terme
 - ▶ Possède des équations d'évolution déterministes
 - ▶ Sensible aux conditions initiales
 - ▶ Non linéaire (superposition non applicable)
- ▶ Applications dans de nombreux domaines : météorologie, finance, mécanique . . .



Introduction

Théorie du Chaos - But du Projet

- ▶ Système déterministe mais non prédictible à long terme
 - ▶ Possède des équations d'évolution déterministes
 - ▶ Sensible aux conditions initiales
 - ▶ Non linéaire (superposition non applicable)
- ▶ Applications dans de nombreux domaines : météorologie, finance, mécanique . . .
- ▶ Etude du mouvement d'une balle dans un billard carré muni d'une barre centrale respirante en fonction des paramètres du système :



Introduction

Théorie du Chaos - But du Projet

- ▶ Système déterministe mais non prédictible à long terme
 - ▶ Possède des équations d'évolution déterministes
 - ▶ Sensible aux conditions initiales
 - ▶ Non linéaire (superposition non applicable)
- ▶ Applications dans de nombreux domaines : météorologie, finance, mécanique ...
- ▶ Etude du mouvement d'une balle dans un billard carré muni d'une barre centrale respirante en fonction des paramètres du système :
 - ▶ Orientation du billard : vertical ou horizontal
 - ▶ Paramètres de respiration de la barre : $l = l_0(1 + \sin(\omega t))$
 - ▶ Conditions initiales de la balle : position et vitesse initiales



- Mouvement composé d'une suite de déplacement continus :



- Mouvement composé d'une suite de déplacement continus :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{cases}$$



Modélisation

Modélisation du Mouvement et des Rebonds - Résolution Numérique

- Mouvement composé d'une suite de déplacement continus :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{cases}$$

- Déplacement interrompu par un rebond qui définit les conditions initiales pour le déplacement suivant



- ▶ Mouvement composé d'une suite de déplacement continus :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{cases}$$

- ▶ Déplacement interrompu par un rebond qui définit les conditions initiales pour le déplacement suivant
 - ▶ Rebond sur une paroi extérieure du billard :
 - ▶ $x = \pm \frac{L}{2}$ ou $y = \pm \frac{L}{2}$
 - ▶ Simple inversion de la vitesse selon une des coordonnées



- ▶ Mouvement composé d'une suite de déplacement continus :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{cases}$$

- ▶ Déplacement interrompu par un rebond qui définit les conditions initiales pour le déplacement suivant
 - ▶ Rebond sur une paroi extérieure du billard :
 - ▶ $x = \pm \frac{l}{2}$ ou $y = \pm \frac{l}{2}$
 - ▶ Simple inversion de la vitesse selon une des coordonnées
 - ▶ Rebond sur la barre centrale :
 - ▶ $|x| \leq l_0(1 + \sin(\omega t))$ et $y = 0$
 - ▶ Transfert de quantité de mouvement avec $m_{\text{barre}} \gg m_{\text{balle}}$:

$$\begin{cases} \dot{x}^+ = C\dot{x}^- + (\text{sgn}(x))(1 + C)\cos(\omega t)\omega \\ \dot{y}^+ = -C\dot{y}^- \end{cases}$$



- ▶ Pas de transfert de quantité de mouvement en $x \rightleftharpoons y$ ou système $\rightleftharpoons y$
 - ▶ Si $g = 0$: Conservation de $|\dot{y}|$
 - ▶ Si $g \neq 0$: Conservation de $y_{max} = \frac{\dot{y}^2}{2} + gy$
 - ▶ Zone $y > y_{max}$ inaccessible



- ▶ Pas de transfert de quantité de mouvement en $x \rightleftharpoons y$ ou système $\rightleftharpoons y$
 - ▶ Si $g = 0$: Conservation de $|\dot{y}|$
 - ▶ Si $g \neq 0$: Conservation de $y_{max} = \frac{\dot{y}^2}{2} + gy$
 - ▶ Zone $y > y_{max}$ inaccessible
 - ▶ Cas dégénéré $y_{max} \leq 0$: pas d'interaction avec la barre
 - ▶ Cas dégénéré $y_{max} \gg \frac{L}{2}$: influence de la gravité négligeable



- ▶ Pas de transfert de quantité de mouvement en $x \rightleftharpoons y$ ou système $\rightleftharpoons y$
 - ▶ Si $g = 0$: Conservation de $|\dot{y}|$
 - ▶ Si $g \neq 0$: Conservation de $y_{max} = \frac{\dot{y}^2}{2} + gy$
 - ▶ Zone $y > y_{max}$ inaccessible
 - ▶ Cas dégénéré $y_{max} \leq 0$: pas d'interaction avec la barre
 - ▶ Cas dégénéré $y_{max} \gg \frac{L}{2}$: influence de la gravité négligeable
- ▶ Mouvements en x et en y quasi indépendants
- ▶ Identification des sources probables de chaos



- ▶ Pas de transfert de quantité de mouvement en $x \rightleftharpoons y$ ou système $\rightleftharpoons y$
 - ▶ Si $g = 0$: Conservation de $|\dot{y}|$
 - ▶ Si $g \neq 0$: Conservation de $y_{max} = \frac{\dot{y}^2}{2} + gy$
 - ▶ Zone $y > y_{max}$ inaccessible
 - ▶ Cas dégénéré $y_{max} \leq 0$: pas d'interaction avec la barre
 - ▶ Cas dégénéré $y_{max} \gg \frac{L}{2}$: influence de la gravité négligeable
- ▶ Mouvements en x et en y quasi indépendants
- ▶ Identification des sources probables de chaos
 - ▶ Chaos en $x \Rightarrow$ chaos en y
 - ▶ Barre au repos \Rightarrow mouvement en x régulier



- ▶ Pas de transfert de quantité de mouvement en $x \rightleftharpoons y$ ou système $\Rightarrow y$
 - ▶ Si $g = 0$: Conservation de $|\dot{y}|$
 - ▶ Si $g \neq 0$: Conservation de $y_{max} = \frac{\dot{y}^2}{2} + gy$
 - ▶ Zone $y > y_{max}$ inaccessible
 - ▶ Cas dégénéré $y_{max} \leq 0$: pas d'interaction avec la barre
 - ▶ Cas dégénéré $y_{max} \gg \frac{L}{2}$: influence de la gravité négligeable
- ▶ Mouvements en x et en y quasi indépendants
- ▶ Identification des sources probables de chaos
 - ▶ Chaos en $x \Rightarrow$ chaos en y
 - ▶ Barre au repos \Rightarrow mouvement en x régulier
 - ▶ Chaos en $x \overset{?}{\rightleftharpoons}$ chaos en $y \rightarrow$ A vérifier !



Barre Centrale au Repos

Observations

- ▶ Billard horizontal :
 - ▶ Mouvement régulier en x et en y comme attendu
 - ▶ Deux états échantillonnables en y qui s'enchaînent de manière régulière



Barre Centrale au Repos

Observations

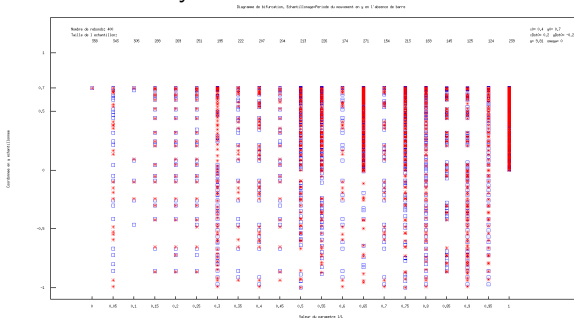
- ▶ Billard horizontal :
 - ▶ Mouvement régulier en x et en y comme attendu
 - ▶ Deux états échantillonnables en y qui s'enchaînent de manière régulière
- ▶ Billard vertical :
 - ▶ Mouvement toujours régulier en x
 - ▶ Mouvement en y :



Barre Centrale au Repos

Observations

- ▶ Billard horizontal :
 - ▶ Mouvement régulier en x et en y comme attendu
 - ▶ Deux états échantillonnables en y qui s'enchaînent de manière régulière
- ▶ Billard vertical :
 - ▶ Mouvement toujours régulier en x
 - ▶ Mouvement en y :



Barre Centrale au Repos

Interprétation dans le Cas Billard Vertical

- ▶ Mouvement formé d'une suite de trois "cycles" dont deux de longueur indépendante en y
 - ▶ Infinité d'états échantillonnables
 - ▶ Période potentielle = combili naturelle des longueurs de ces trois cycles
 - ▶ Vérifié par les simulations
 - ▶ Période peut être très longue \Rightarrow indicateur de la transition vers le chaos
 - ▶ Mais une telle période ne semble pas toujours exister
 - ▶ Explication : "période irrationnelle"
- ▶ $l = L$: mouvement périodique dans un demi billard \Rightarrow période différente
- ▶ Cas dégénéré $y_{max} \gg \frac{\pm L}{2}$ et $y_{max} < 0$ également vérifiés par les simulations



Barre Centrale Respirante

Billard Horizontal

- ▶ Mouvement en x transitionne très rapidement vers le chaos
 - ▶ Paramètre représentatif : $\frac{l_0 \omega^2}{\dot{x}_0}$
 - ▶ Transition pour $\frac{l_0 \omega^2}{\dot{x}_0} \simeq 10^{-7}$
- ▶ Mouvement en y :
 - ▶ Théorie : Mouvement en x chaotique \Rightarrow Mouvement en y chaotique
 - ▶ Observation : mouvement en x périodique $\Leftrightarrow l_0 \omega^2 \ll \dot{x}_0$
 - \Rightarrow Se ramène au cas $g = 0, \omega = 0$
 - \Rightarrow Mouvement en y périodique
 - ▶ Mais toujours 2 états échantillonnables (quel que soit le mouvement en x)
 - \Rightarrow Pas apparent sur un diagramme de bifurcation ou section de poincaré
 - ▶ 2 états peuvent s'enchaîner de manière chaotique
 - \Rightarrow Vérification expérimentable possible par la coordonnée y en fonction du temps.



Barre Centrale Respirante

Billard Vertical

- ▶ Transition similaire du mouvement en x vers le chaos
- ▶ Mouvement en y
 - ▶ Théorie : Mouvement en x chaotique \Rightarrow Mouvement en y chaotique
 - ▶ Observation : mouvement en x périodique $\Leftrightarrow l_0 \omega^2 \ll \dot{x}_0$
 - \Rightarrow Se ramène au cas $g = 9.81, \omega = 0$
 - \Rightarrow Conclusions de ce cas à réutiliser.



