

# Projet Chaos

## Billard Carré avec Barre Centrale

Jun Nuo Chi, Nathan Dwek

Ecole Polytechnique de Bruxelles

8 janvier 2014

# Introduction

## Théorie du Chaos - But du Projet

Projet Chaos

J. Chi, N. Dwek

- ▶ Système déterministe mais non prédictible à long terme
  - ▶ Possède des équations d'évolution déterministes

Introduction

Modélisation

Barre Centrale au  
Repos

Barre Centrale  
Respirante

Conclusion

# Introduction

## Théorie du Chaos - But du Projet

Projet Chaos

J. Chi, N. Dwek

- ▶ Système déterministe mais non prédictible à long terme
  - ▶ Possède des équations d'évolution déterministes
  - ▶ Sensible aux conditions initiales
  - ▶ Non linéaire (superposition non applicable)

Introduction

Modélisation

Barre Centrale au  
Repos

Barre Centrale  
Respirante

Conclusion

# Introduction

## Théorie du Chaos - But du Projet

Projet Chaos

J. Chi, N. Dwek

- ▶ Système déterministe mais non prédictible à long terme
  - ▶ Possède des équations d'évolution déterministes
  - ▶ Sensible aux conditions initiales
  - ▶ Non linéaire (superposition non applicable)
- ▶ Applications dans de nombreux domaines: météorologie, finance, mécanique . . .

Introduction

Modélisation

Barre Centrale au Repos

Barre Centrale Respirante

Conclusion

# Introduction

## Théorie du Chaos - But du Projet

Projet Chaos

J. Chi, N. Dwek

- ▶ Système déterministe mais non prédictible à long terme
  - ▶ Possède des équations d'évolution déterministes
  - ▶ Sensible aux conditions initiales
  - ▶ Non linéaire (superposition non applicable)
- ▶ Applications dans de nombreux domaines: météorologie, finance, mécanique . . .
- ▶ Etude du mouvement d'une balle dans un billard carré muni d'une barre centrale respirante en fonction des paramètres du système:

Introduction

Modélisation

Barre Centrale au Repos

Barre Centrale Respirante

Conclusion

# Introduction

## Théorie du Chaos - But du Projet

Projet Chaos

J. Chi, N. Dwek

Introduction

Modélisation

Barre Centrale au  
Repos

Barre Centrale  
Respirante

Conclusion

- ▶ Système déterministe mais non prédictible à long terme
  - ▶ Possède des équations d'évolution déterministes
  - ▶ Sensible aux conditions initiales
  - ▶ Non linéaire (superposition non applicable)
- ▶ Applications dans de nombreux domaines: météorologie, finance, mécanique . . .
- ▶ Etude du mouvement d'une balle dans un billard carré muni d'une barre centrale respirante en fonction des paramètres du système:
  - ▶ Orientation du billard: vertical ou horizontal

- ▶ Système déterministe mais non prédictible à long terme
  - ▶ Possède des équations d'évolution déterministes
  - ▶ Sensible aux conditions initiales
  - ▶ Non linéaire (superposition non applicable)
- ▶ Applications dans de nombreux domaines: météorologie, finance, mécanique ...
- ▶ Etude du mouvement d'une balle dans un billard carré muni d'une barre centrale respirante en fonction des paramètres du système:
  - ▶ Orientation du billard: vertical ou horizontal
  - ▶ Paramètres de respiration de la barre:  
$$l = l_0(1 + \sin(\omega t))$$

- ▶ Système déterministe mais non prédictible à long terme
  - ▶ Possède des équations d'évolution déterministes
  - ▶ Sensible aux conditions initiales
  - ▶ Non linéaire (superposition non applicable)
- ▶ Applications dans de nombreux domaines: météorologie, finance, mécanique . . .
- ▶ Etude du mouvement d'une balle dans un billard carré muni d'une barre centrale respirante en fonction des paramètres du système:
  - ▶ Orientation du billard: vertical ou horizontal
  - ▶ Paramètres de respiration de la barre:  
 $I = I_0(1 + \sin(\omega t))$
  - ▶ Conditions initiales de la balle: position et vitesse initiales



# Modélisation

## Modélisation du Mouvement et des Rebonds - Résolution Numérique

Projet Chaos

J. Chi, N. Dwek

- Mouvement composé d'une suite de déplacement continus:

Introduction

Modélisation

Barre Centrale au Repos

Barre Centrale Respirante

Conclusion

- Mouvement composé d'une suite de déplacement continus:

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{cases}$$

- Mouvement composé d'une suite de déplacement continus:

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{cases}$$

- Déplacement interrompu par un rebond qui définit les conditions initiales pour le déplacement suivant

- ▶ Mouvement composé d'une suite de déplacement continus:

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{cases}$$

- ▶ Déplacement interrompu par un rebond qui définit les conditions initiales pour le déplacement suivant
  - ▶ Rebond sur une paroi extérieure du billard:
    - ▶  $x = \pm \frac{L}{2}$  ou  $y = \pm \frac{L}{2}$
    - ▶ Simple inversion de la vitesse selon une des coordonnées

- ▶ Mouvement composé d'une suite de déplacement continus:

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{cases}$$

- ▶ Déplacement interrompu par un rebond qui définit les conditions initiales pour le déplacement suivant

- ▶ Rebond sur une paroi extérieure du billard:

- ▶  $x = \pm \frac{L}{2}$  ou  $y = \pm \frac{L}{2}$
    - ▶ Simple inversion de la vitesse selon une des coordonnées

- ▶ Rebond sur la barre centrale:

- ▶  $|x| \leq l_0(1 + \sin(\omega t))$  et  $y = 0$
    - ▶ Transfert de quantité de mouvement avec  $m_{\text{barre}} \gg m_{\text{balle}}$ :

$$\begin{cases} \dot{x}^+ = C\dot{x}^- + (\text{sgn}(x))(1 + C)\cos(\omega t)\omega \\ \dot{y}^+ = -C\dot{y}^- \end{cases}$$

- ▶ Pas de transfert de quantité de mouvement en  $x \Rightarrow y$  ou système  $\Rightarrow y$ 
  - ▶ Si  $g = 0$ : Conservation de  $|\dot{y}|$
  - ▶ Si  $g \neq 0$ : Conservation de  $y_{max} = \frac{\dot{y}^2}{2} + gy$ 
    - ▶ Zone  $y > y_{max}$  inaccessible
    - ▶ Cas dégénéré  $y_{max} \leq 0$ : pas d'interaction avec la barre
    - ▶ Cas dégénéré  $y_{max} \gg \frac{L}{2}$ : influence de la gravité négligeable
- ▶ Mouvements en  $x$  et en  $y$  quasi indépendants
- ▶ Identification des sources probables de chaos
  - ▶ Chaos en  $x \Rightarrow$  chaos en  $y$
  - ▶ Barre au repos  $\Rightarrow$  mouvement en  $x$  régulier
  - ▶ Chaos en  $x \overset{?}{\Leftrightarrow}$  chaos en  $y \rightarrow$  A vérifier!

# Barre Centrale au Repos

## Observations

Projet Chaos

J. Chi, N. Dwek

Introduction

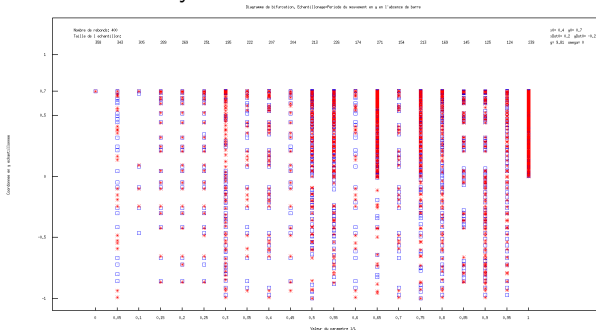
Modélisation

Barre Centrale au Repos

Barre Centrale Respirante

Conclusion

- ▶ Billard horizontal:
  - ▶ Mouvement régulier en x et en y comme attendu
  - ▶ Deux états échantillonnables en y qui s'enchaînent de manière régulière
- ▶ Billard vertical:
  - ▶ Mouvement toujours régulier en x
  - ▶ Mouvement en y:



# Barre Centrale au Repos

Interprétation dans le Cas Billard Vertical

Projet Chaos

J. Chi, N. Dwek

Introduction

Modélisation

**Barre Centrale au  
Repos**

Barre Centrale  
Respirante

Conclusion





Introduction

Modélisation

Barre Centrale au  
Repos

Barre Centrale  
Respirante

Conclusion