Projet Chaos

Billard Carré avec Barre Centrale

Jun Nuo Chi, Nathan Dwek

Ecole Polytechnique de Bruxelles

8 janvier 2014

Introduction

Théorie du Chaos - But du Projet

- Système déterministe mais non prédictible à long terme
  - Possède des équations d'évolution déterministes

Introduction

Théorie du Chaos - But du Projet

- Système déterministe mais non prédictible à long terme
  - Possède des équations d'évolution déterministes
  - Sensible aux conditions initiales
  - Non linéaire (superposition non applicable)

Introduction

Théorie du Chaos - But du Projet

- Système déterministe mais non prédictible à long terme
  - Possède des équations d'évolution déterministes
  - Sensible aux conditions initiales
  - Non linéaire (superposition non applicable)
- Applications dans de nombreux domaines: météorologie, finance, mécanique . . .

Introduction

Théorie du Chaos - But du Projet

- Système déterministe mais non prédictible à long terme
  - Possède des équations d'évolution déterministes
  - Sensible aux conditions initiales
  - Non linéaire (superposition non applicable)
- Applications dans de nombreux domaines: météorologie, finance, mécanique . . .
- Etude du mouvement d'une balle dans un billard carré muni d'une barre centrale respirante en fonction des paramètres du système:

Introduction

Théorie du Chaos - But du Projet

- Système déterministe mais non prédictible à long terme
  - Possède des équations d'évolution déterministes
  - Sensible aux conditions initiales
  - Non linéaire (superposition non applicable)
- Applications dans de nombreux domaines: météorologie, finance, mécanique ...
- Etude du mouvement d'une balle dans un billard carré muni d'une barre centrale respirante en fonction des paramètres du système:
  - Orientation du billard: vertical ou horizontal

Introduction

Théorie du Chaos - But du Projet

- Système déterministe mais non prédictible à long terme
  - Possède des équations d'évolution déterministes
  - Sensible aux conditions initiales
  - Non linéaire (superposition non applicable)
- Applications dans de nombreux domaines: météorologie, finance, mécanique ...
- Etude du mouvement d'une balle dans un billard carré muni d'une barre centrale respirante en fonction des paramètres du système:
  - Orientation du billard: vertical ou horizontal
  - Paramètres de respiration de la barre: $l = l_0(1 + sin(\omega t))$

Introduction

Théorie du Chaos - But du Projet

- Système déterministe mais non prédictible à long terme
  - Possède des équations d'évolution déterministes
  - Sensible aux conditions initiales
  - Non linéaire (superposition non applicable)
- Applications dans de nombreux domaines: météorologie, finance, mécanique ...
- Etude du mouvement d'une balle dans un billard carré muni d'une barre centrale respirante en fonction des paramètres du système:
  - Orientation du billard: vertical ou horizontal
  - Paramètres de respiration de la barre: $l = l_0(1 + sin(\omega t))$
  - Conditions initiales de la balle: position et vitesse initiales

Modélisation

Modélisation du Mouvement et des Rebonds - Résolution Numérique

- Mouvement composé d'une suite de déplacement continus:

Modélisation

Modélisation du Mouvement et des Rebonds - Résolution Numérique

- Mouvement composé d'une suite de déplacement continus:

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{cases}$$

Modélisation

Modélisation du Mouvement et des Rebonds - Résolution Numérique

- Mouvement composé d'une suite de déplacement continus:

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{cases}$$

- Déplacement interrompu par un rebond qui définit les conditions initiales pour le déplacement suivant

Modélisation

Modélisation du Mouvement et des Rebonds - Résolution Numérique

- Mouvement composé d'une suite de déplacement continus:

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{cases}$$

- Déplacement interrompu par un rebond qui définit les conditions initiales pour le déplacement suivant
  - Rebond sur une paroi extérieure du billard:
    - $x = \pm\frac{L}{2}$ ou $y = \pm\frac{L}{2}$
    - Simple inversion de la vitesse selon une des coordonnées

Modélisation

Modélisation du Mouvement et des Rebonds - Résolution Numérique

- Mouvement composé d'une suite de déplacement continus:

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{cases}$$

- Déplacement interrompu par un rebond qui définit les conditions initiales pour le déplacement suivant
  - Rebond sur une paroi extérieure du billard:
    - $x = \pm\frac{L}{2}$ ou $y = \pm\frac{L}{2}$
    - Simple inversion de la vitesse selon une des coordonnées
  - Rebond sur la barre centrale:
    - $|x| \leq l_0(1 + sin(\omega t))$ et $y = 0$
    - Transfert de quantité de mouvement avec $m_{barre} >> m_{balle}$:

$$\begin{cases} \dot{x}^+ = C\dot{x}^- + (\text{sgn}(x^*))(1+C)cos(\omega t^*)\omega \\ \dot{y}^+ = -C\dot{y}^- \end{cases}$$

Modélisation

Considérations Théoriques

- Pas de transfert de quantité de mouvement en x $\rightleftharpoons$ y ou système $\rightleftharpoons$ y
  - Si $g = 0$: Conservation de $|\dot{y}|$
  - Si $g \neq 0$: Conservation de $y_{max} = \frac{\dot{y}^2}{2} + gy$
    - Zone $y > y_{max}$ inaccessible
    - Cas dégénéré $y_{max} \leq 0$: pas d'interaction avec la barre
    - Cas dégénéré $y_{max} >> \frac{L}{2}$: influence de la gravité négligeable
- Mouvements en x et en y quasi indépendants
- Identification des sources probables de chaos
  - Chaos en x $\Rightarrow$ chaos en y
  - Barre au repos $\Rightarrow$ mouvement en x régulier
  - Chaos en x $\overset{?}{\Leftrightarrow}$ chaos en y