Projet Chaos

Billard Carré avec Barre Centrale

Jun Nuo Chi, Nathan Dwek

Ecole Polytechnique de Bruxelles

8 janvier 2014

- Système déterministe mais non prédictible à long terme
  - Possède des équations d'évolution déterministes

- Système déterministe mais non prédictible à long terme
  - Possède des équations d'évolution déterministes
  - Sensible aux conditions initiales
  - Non linéaire (superposition non applicable)

- Système déterministe mais non prédictible à long terme
  - Possède des équations d'évolution déterministes
  - Sensible aux conditions initiales
  - Non linéaire (superposition non applicable)
- Applications dans de nombreux domaines : météorologie, finance, mécanique ...

- Système déterministe mais non prédictible à long terme
  - Possède des équations d'évolution déterministes
  - Sensible aux conditions initiales
  - Non linéaire (superposition non applicable)
- Applications dans de nombreux domaines : météorologie, finance, mécanique ...
- Etude du mouvement d'une balle dans un billard carré muni d'une barre centrale respirante en fonction des paramètres du système :

- Système déterministe mais non prédictible à long terme
  - Possède des équations d'évolution déterministes
  - Sensible aux conditions initiales
  - Non linéaire (superposition non applicable)
- Applications dans de nombreux domaines : météorologie, finance, mécanique ...
- Etude du mouvement d'une balle dans un billard carré muni d'une barre centrale respirante en fonction des paramètres du système :
  - Orientation du billard : vertical ou horizontal
  - Paramètres de respiration de la barre : $l = l_0(1 + sin(\omega t))$
  - Conditions initiales de la balle : position et vitesse initiales

- Mouvement composé d'une suite de déplacements continus :

- Mouvement composé d'une suite de déplacements continus :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{cases}$$

- Mouvement composé d'une suite de déplacements continus :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{cases}$$

- Déplacement interrompu par un rebond qui définit les conditions initiales pour le déplacement suivant

- Mouvement composé d'une suite de déplacements continus :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{cases}$$

- Déplacement interrompu par un rebond qui définit les conditions initiales pour le déplacement suivant
  - Rebond sur une paroi extérieure du billard :
    - $x = \pm\frac{L}{2}$ ou $y = \pm\frac{L}{2}$
    - Simple inversion de la vitesse selon une des coordonnées

Modélisation

Modélisation du Mouvement et des Rebonds - Résolution Numérique

- Mouvement composé d'une suite de déplacements continus :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{cases}$$

- Déplacement interrompu par un rebond qui définit les conditions initiales pour le déplacement suivant
  - Rebond sur une paroi extérieure du billard :
    - $x = \pm\frac{L}{2}$ ou $y = \pm\frac{L}{2}$
    - Simple inversion de la vitesse selon une des coordonnées
  - Rebond sur la barre centrale :
    - $|x| \leq l_0(1 + sin(\omega t))$ et $y = 0$
    - Transfert de quantité de mouvement avec $m_{barre} >> m_{balle}$:

$$\begin{cases} \dot{x}^+ = \dot{x}^- + (\mathrm{sgn}(x))(1 + C)cos(\omega t)\omega \\ \dot{y}^+ = -C\dot{y}^- \end{cases}$$

- Pas de transfert de quantité de mouvement en x $\rightleftharpoons$ y ou système $\rightleftharpoons$ y
  - Si $g = 0$: Conservation de $|\dot{y}|$
  - Si $g \neq 0$: Conservation de $y_{max} = y + \frac{\dot{y}^2}{2g}$
    - Zone $y > y_{max}$ inaccessible

- Pas de transfert de quantité de mouvement en x $\rightleftharpoons$ y ou système $\rightleftharpoons$ y
  - Si $g = 0$: Conservation de $|\dot{y}|$
  - Si $g \neq 0$: Conservation de $y_{max} = y + \frac{\dot{y}^2}{2g}$
    - Zone $y > y_{max}$ inaccessible
    - Cas dégénéré $y_{max} \leq 0$: pas d'interaction avec la barre
    - Cas dégénéré $y_{max} \gg \frac{L}{2}$: influence de la gravité négligeable

- Pas de transfert de quantité de mouvement en x $\rightleftharpoons$ y ou système $\rightleftharpoons$ y
  - Si $g = 0$: Conservation de $|\dot{y}|$
  - Si $g \neq 0$: Conservation de $y_{max} = y + \frac{\dot{y}^2}{2g}$
    - Zone $y > y_{max}$ inaccessible
    - Cas dégénéré $y_{max} \leq 0$: pas d'interaction avec la barre
    - Cas dégénéré $y_{max} \gg \frac{L}{2}$: influence de la gravité négligeable
- Mouvements en x et en y quasi indépendants
- Identification des sources probables de chaos

- Pas de transfert de quantité de mouvement en x $\rightleftharpoons$ y ou système $\rightleftharpoons$ y
  - Si $g = 0$: Conservation de $|\dot{y}|$
  - Si $g \neq 0$: Conservation de $y_{max} = y + \frac{\dot{y}^2}{2g}$
    - Zone $y > y_{max}$ inaccessible
    - Cas dégénéré $y_{max} \leq 0$: pas d'interaction avec la barre
    - Cas dégénéré $y_{max} \gg \frac{L}{2}$: influence de la gravité négligeable
- Mouvements en x et en y quasi indépendants
- Identification des sources probables de chaos
  - Chaos en x $\Rightarrow$ chaos en y
  - Barre au repos $\Rightarrow$ mouvement en x régulier

- Pas de transfert de quantité de mouvement en x $\rightleftharpoons$ y ou système $\rightleftharpoons$ y
  - Si $g = 0$: Conservation de $|\dot{y}|$
  - Si $g \neq 0$: Conservation de $y_{max} = y + \frac{\dot{y}^2}{2g}$
    - Zone $y > y_{max}$ inaccessible
    - Cas dégénéré $y_{max} \leq 0$: pas d'interaction avec la barre
    - Cas dégénéré $y_{max} \gg \frac{L}{2}$: influence de la gravité négligeable
- Mouvements en x et en y quasi indépendants
- Identification des sources probables de chaos
  - Chaos en x $\Rightarrow$ chaos en y
  - Barre au repos $\Rightarrow$ mouvement en x régulier
  - Chaos en x $\overset{?}{\Leftrightarrow}$ chaos en y $\rightarrow$ A vérifier !

Barre Centrale au Repos

Observations

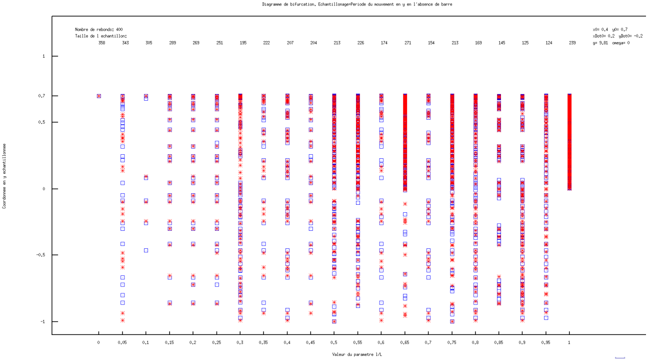
- Billard horizontal :
  - Mouvement régulier en x et en y comme attendu
  - Deux états échantillonables en y qui s'enchaînent de manière régulière

Barre Centrale au Repos

Observations

- Billard horizontal :
  - Mouvement régulier en x et en y comme attendu
  - Deux états échantillonables en y qui s'enchaînent de manière régulière
- Billard vertical :
  - Mouvement toujours régulier en x

- Billard horizontal :
  - Mouvement régulier en x et en y comme attendu
  - Deux états échantillonables en y qui s'enchaînent de manière régulière
- Billard vertical :
  - Mouvement toujours régulier en x
  - Mouvement en y :



- Mouvement formé d'une suite de trois "cycles" dont deux de longueur indépendante en y
  - Infinité d'états échantillonables

- Mouvement formé d'une suite de trois "cycles" dont deux de longueur indépendante en y
  - Infinité d'états échantillonables
  - Période potentielle = combili naturelle des longueurs de ces trois cycles
    - Vérifié par les simulations
    - Période peut être très longue $\Rightarrow$ indicateur de la transition vers le chaos
    - Mais une telle période ne semble pas toujours exister
    - Explication : "période irrationnelle"

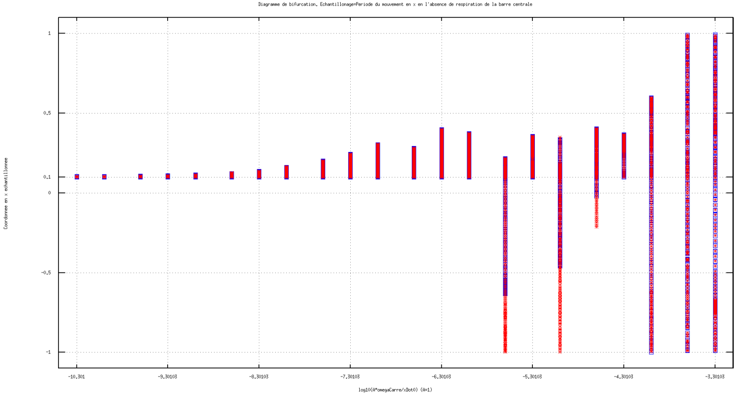
- Mouvement formé d'une suite de trois "cycles" dont deux de longueur indépendante en y
  - Infinité d'états échantillonables
  - Période potentielle = combili naturelle des longueurs de ces trois cycles
    - Vérifié par les simulations
    - Période peut être très longue $\Rightarrow$ indicateur de la transition vers le chaos
    - Mais une telle période ne semble pas toujours exister
    - Explication : "période irrationnelle"
- $l = L$: mouvement périodique dans un demi billard $\Rightarrow$ période différente
- Cas dégénéré $y_{max} \gg \frac{+L}{2}$ et $y_{max} < 0$ également vérifiés par les simulations

- Mouvement en x transitionne très rapidement vers le chaos
  - Paramètre représentatif : $\frac{l_0 \omega^2}{\dot{x}_0}$

Barre Centrale Respirante

Billard Horizontal

- Mouvement en x transitionne très rapidement vers le chaos
  - Paramètre représentatif : $\frac{l_0 \omega^2}{\dot{x}_0}$
  - Transition pour $\frac{l_0 \omega^2}{\dot{x}_0} \simeq 10^{-7}$



- Mouvement en y :
  - Théorie : Mouvement en x chaotique $\Rightarrow$ Mouvement en y chaotique
  - Observation : mouvement en x périodique $\Leftrightarrow l_0\omega^2 \ll \dot{x}_0$
    $\Rightarrow$ Se ramène au cas $g = 0, \omega = 0$
    $\Rightarrow$ Mouvement en y périodique

- Mouvement en y :
  - Théorie : Mouvement en x chaotique $\Rightarrow$ Mouvement en y chaotique
  - Observation : mouvement en x périodique $\Leftrightarrow l_0\omega^2 \ll \dot{x}_0$
    $\Rightarrow$ Se ramène au cas $g = 0, \omega = 0$
    $\Rightarrow$ Mouvement en y périodique
  - Mais toujours 2 états échantillonnables (quel que soit le mouvement en x)
    $\Rightarrow$ Pas apparent sur un diagramme de bifurcation ou section de poincaré
  - 2 états peuvent s'enchaîner de manière chaotique
    $\Rightarrow$ Vérification expérimentable possible par la coordonnée y en fonction du temps.

- Transition similaire du mouvement en x vers le chaos

- Transition similaire du mouvement en x vers le chaos
- Mouvement en y :
  - Théorie : Mouvement en x chaotique $\Rightarrow$ Mouvement en y chaotique
  - Observation : mouvement en x périodique $\Leftrightarrow l_0\omega^2 \ll \dot{x}_0$
    $\Rightarrow$ Se ramène au cas $g = 9.81, \omega = 0$ (Si $y_{max} > 0$)
    $\Rightarrow$ Conclusions de ce cas à réutiliser.

- Transition similaire du mouvement en x vers le chaos
- Mouvement en y :
  - Théorie : Mouvement en x chaotique $\Rightarrow$ Mouvement en y chaotique
  - Observation : mouvement en x périodique $\Leftrightarrow l_0\omega^2 \ll \dot{x}_0$
    $\Rightarrow$ Se ramène au cas $g = 9.81, \omega = 0$ (Si $y_{max} > 0$)
    $\Rightarrow$ Conclusions de ce cas à réutiliser.
- Cas dégénéré $y_{max} < 0$ vérifié par expérience (Mouvement périodique en x et en y)

Conclusion

- Barre toujours responsable du chaos
- Deux sortes de chaos relativement différentes en x et en y
  - Chaos en y assez binaire et dépend fortement du comportement en x
  - Conservation de y_{max} quoi qu'il arrive et notion de "déphasage" pour l'étude du mouvement en y

Conclusion

- Barre toujours responsable du chaos
- Deux sortes de chaos relativement différentes en x et en y
  - Chaos en y assez binaire et dépend fortement du comportement en x
  - Conservation de y_{max} quoi qu'il arrive et notion de "déphasage" pour l'étude du mouvement en y
  - Chaos en x présente une transition.
  - Pas de conservation de l'énergie cinétique pour l'étude du mouvement en x
- Utile d'étudier les lois de conservation du système pour prédire et expliquer le comportement du système et les cas dégénérés

Conclusion

- Barre toujours responsable du chaos
- Deux sortes de chaos relativement différentes en x et en y
  - Chaos en y assez binaire et dépend fortement du comportement en x
  - Conservation de y_{max} quoi qu'il arrive et notion de "déphasage" pour l'étude du mouvement en y
  - Chaos en x présente une transition.
  - Pas de conservation de l'énergie cinétique pour l'étude du mouvement en x
- Utile d'étudier les lois de conservation du système pour prédire et expliquer le comportement du système et les cas dégénérés

MERCI DE VOTRE ATTENTION