

Titre

Jun Nuo Chi, Nathan Dwek

19 décembre 2013

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Théorie du Chaos	1
1.2	Présentation du Projet et Démarche Adoptée	1
2	Modélisation du Mouvement et Considérations Théoriques	2
2.1	Modélisation du Mouvement	2
2.1.1	Equations du Mouvement	2
2.1.2	Conditions de Rebond	3
2.1.3	Calcul des Nouvelles Conditions Initiales après Rebond	3
2.2	Considérations Théoriques	4
3	Barre Centrale au Repos	5
3.1	Billard Horizontal	5
3.2	Billard Vertical	7
4	Barre Centrale Respirante	13
4.1	Billard Horizontal	13
5	Conclusion	14

Résumé

Chapitre 1

Introduction

1.1 Théorie du Chaos

La théorie du chaos est un domaine des mathématiques qui étudie les systèmes dynamiques déterministes mais non prédictibles à long terme. Ces systèmes sont caractérisés par leur sensibilité aux conditions initiales. En effet une petite variation des conditions initiales provoque de grandes différences sur l'état final du système. D'où la métaphore introduite par Lorentz : "le battement d'ailes d'un papillon au Brésil provoque-t-il une tornade au Texas ?" (REF ??). Cette théorie ne s'applique pas qu'en mathématique puisque le comportement chaotique se rencontre dans de nombreux domaines comme la météorologie, la physique, la finance, et, comme nous allons le voir, la mécanique.

1.2 Présentation du Projet et Démarche Adoptée

Le projet de mécanique de cette année consiste en l'étude du mouvement d'une balle et des paramètres pouvant altérer le caractère périodique ou non de celui-ci. Le mouvement étudié est celui d'une balle à l'intérieur d'un billard carré au centre duquel se trouve une barre horizontale dont la longueur peut varier suivant la loi $l = l_0(1 + \sin(\omega t))$. De plus ce billard sera positionné soit verticalement soit horizontalement, ce qui revient donc à considérer le problème avec ou sans gravité.

Pour étudier les différents cas, une modélisation du problème a été faite sur Octave. Celle-ci sera expliquée en détail au chapitre 2, et il sera possible par la même occasion d'émettre des prédictions sur le comportement du système avant de passer aux simulations proprement dites. Ensuite les résultats obtenus dans les différentes situations considérées, ainsi que l'influence des paramètres du système et des conditions initiales de la balle sur ceux-ci seront examinés et interprétés, ce qui nous mènera à la conclusion XXXXX.

Chapitre 2

Modélisation du Mouvement et Considérations Théoriques

2.1 Modélisation du Mouvement

2.1.1 Equations du Mouvement

Le mouvement global est constitué d'une suite de déplacement continus pour lesquels les équations sont :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{cases} \quad (2.1)$$

munies des conditions initiales $x_0, \dot{x}_0, y_0, \dot{y}_0$.¹

Une première simulation a été faite en utilisant les fonctions d'intégration numérique fournies par octave. Celles-ci sont uniquement capables de résoudre des systèmes d'équations différentielles du premier ordre, et il faut donc ramener le système 2.1 à un système du premier ordre. On obtient alors :

$$\begin{cases} \dot{x} = m \\ \dot{m} = 0 \\ \dot{y} = n \\ \dot{n} = -g \end{cases} \quad (2.2)$$

Ceci, accompagné d'une modélisation adéquate des rebonds qui fera l'objet de la section suivante, permet de simuler le mouvement en utilisant octave. Cependant, pour des raisons liées à octave et à la manière dont la fonction ode45 est implémentée pour ce langage, cette manière de faire est apparue peu idéale pour faire des échantillonnages précis. Etant donné la faible complexité des équations résolues du mouvement (équations du second degré maximum), une autre modélisation² a été produite à partir de celles-ci afin de pouvoir mieux contrôler l'échantillonnage du mouvement.

1. Dans le cas du billard horizontal, ce système reste valide en posant logiquement $g=0$

2. Fournissant heureusement les mêmes résultats

Dans les deux cas, la modélisation du mouvement entier se fait par la répétition de trois étapes qui permettent de modéliser un unique rebond :

1. Trouver t^* le temps du prochain rebond, et de quel “type” de rebond il s’agit (barre centrale, paroi horizontale, paroi verticale) ;
2. Calculer, pour les instants désirés entre t_0 et t^* , l’état de la balle (x, \dot{x}, y, \dot{y}) ;¹
3. Calculer les nouvelles conditions initiales pour le rebond suivant, c’est à dire l’état de la balle en $t'_0 = t^* + \epsilon$.

2.1.2 Conditions de Rebond

Les conditions de rebond de la balle sur les parois extérieure du billard sont :

$$x = \pm \frac{L}{2} \text{ ou } y = \pm \frac{L}{2}$$

La condition de rebond de la balle sur la barre centrale est :

$$\begin{cases} |x| \leq l_0(1 + \sin(\omega t)) \\ y = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

Cette condition est également valable dans le cas où la barre centrale est au repos. Dans ce cas, $\omega = 0$.

2.1.3 Calcul des Nouvelles Conditions Initiales après Rebond

Pour les parois extérieure du billard et pour la barre centrale lorsqu’elle est au repos, il est très aisé de calculer les nouvelles vitesses initiales (la position est inchangée lors du rebond). En effet ces parois sont rectilignes, immobiles et soit verticales, soit horizontales. Dès lors, lorsque la balle touche une paroi horizontale (resp. verticale), sa vitesse en x (resp. y) est inchangée et la nouvelle vitesse en y (resp. x) est l’opposée de l’ancienne vitesse en y (resp. x).

Si on introduit un coefficient de restitution $C \leq 1$, la norme de la nouvelle vitesse initiale est multipliée par C . Si ce coefficient est isotrope, ce qui signifie que la balle dissipe autant d’énergie selon la direction tangentielle à la paroi que sur la direction normale, alors les nouvelles vitesses initiales selon x et y sont toutes les deux multipliées par C , et on a, pour un rebond sur une paroi horizontale par exemple :

$$\begin{cases} \dot{x}^+ = C\dot{x}^- \\ \dot{y}^+ = -C\dot{y}^- \end{cases} \quad (2.4)$$

Lorsque la barre centrale respire, il faut calculer les nouvelles vitesses initiales en tenant compte de la conservation de la quantité de mouvement. Si l’on fait l’approximation que la masse de la balle est négligeable devant la masse de la barre centrale, on obtient :

$$\begin{cases} \dot{x}^+ = C\dot{x}^- + (\text{sgn}(x^*)) (1 + C) \cos(\omega t^*) \omega \\ \dot{y}^+ = -C\dot{y}^- \end{cases} \quad (2.5)$$

1. Dans le cas d’une intégration numérique avec ode45, l’étape 1 n’est pas faite explicitement. A la place, après chaque calcul de l’état de la balle pour un instant désiré, la fonction ode45 vérifie si elle ne s’est pas rapprochée suffisamment d’une condition de rebond, et raffine l’approximation de t^* si besoin est.

Il faut être prudent car lorsque la barre respire, sa vitesse de déplacement réelle change de signe selon qu'on se trouve dans la moitié gauche ou droite du billard, ce qui explique pourquoi le signe de x apparaît dans le calcul de la nouvelle vitesse en x dans l'équation 2.5.

2.2 Considérations Théoriques

Comme on l'a remarqué dans la section 2.1.3, tous les parois sur lesquelles la balle peut rebondir sont rectilignes et soit horizontales, soit verticales. Ceci se traduit dans les systèmes 2.4 et 2.5 par une indépendance totale des équations en x et en y . Comme de plus les équations du mouvement 2.1 en x et en y sont elles aussi indépendantes, on pourrait conclure à l'indépendance totale des mouvements globaux en x et en y . Cependant, ce n'est pas tout à fait le cas à cause de la condition de rebond 2.3. On constate

Pas de Convertisseurs x/y donc toujours des zones interdites, meme quand $\omega \neq 0$ lien x/y

Situation barre centrale au repos billard horizontal "similaire" à barre centrale respirante vertical ?

Chapitre 3

Barre Centrale au Repos

3.1 Billard Horizontal

Comme annoncé dans le chapitre précédent, voici tout d'abord un diagramme de bifurcation de la position en x de la balle :

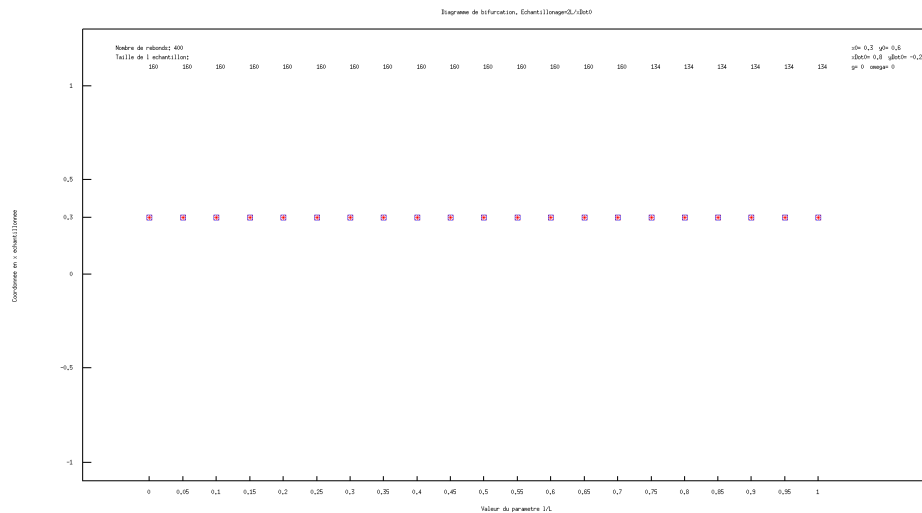


FIGURE 3.1 – Superposition de deux diagrammes de bifurcation de la position en x de la balle en fonction de la longueur relative de la barre centrale pour des conditions initiales infiniment proches. Cas $g=0$.

Comme attendu, le mouvement en x de la balle apparaît parfaitement périodique. Lorsqu'on s'intéresse au mouvement en y pour vérifier si l'hypothèse émise plus haut est valide, On constate que la position en y de la balle suit une évolution parfaitement périodique, mais on assiste à un doublement de la période.

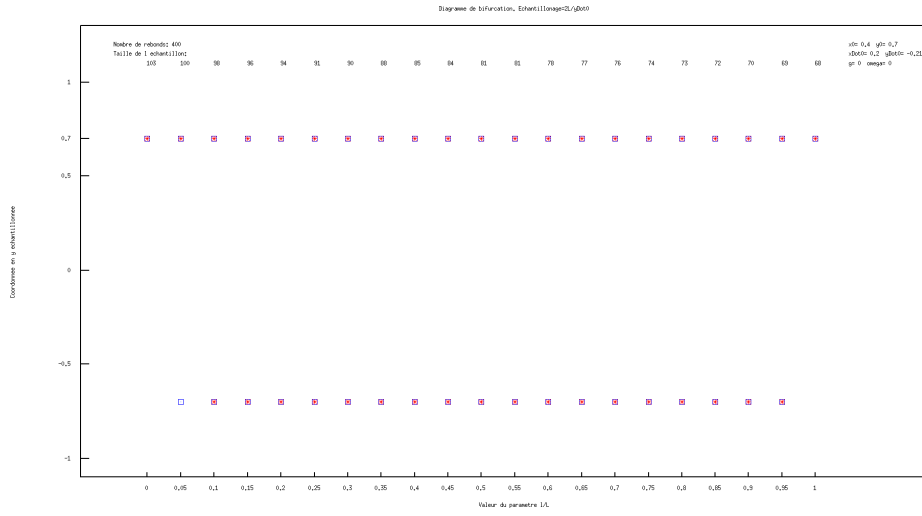


FIGURE 3.2 – Superposition de deux diagrammes de bifurcation de la position en y de la balle en fonction de la longueur relative de la barre centrale pour des conditions initiales infiniment proches. Cas $g=0$.

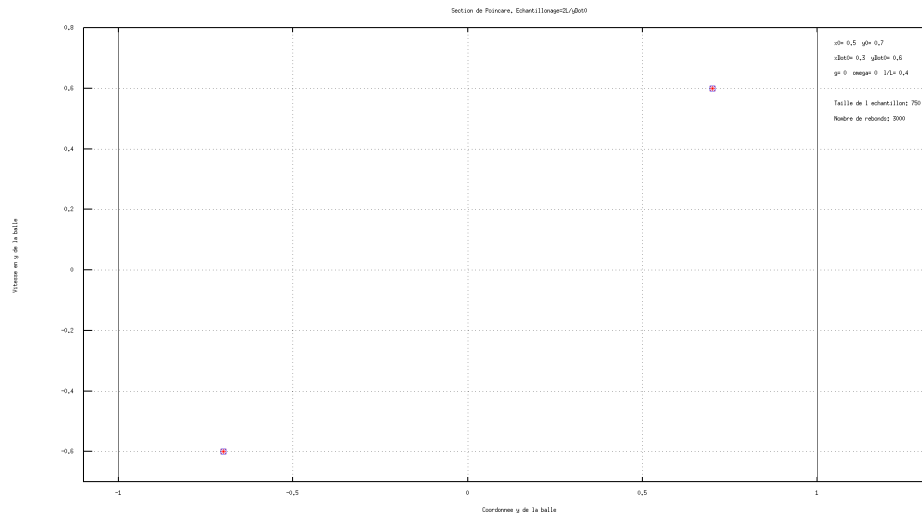


FIGURE 3.3 – Superposition de deux sections de Poincaré en y pour des conditions initiales infiniment proches.

Celui-ci peut s'expliquer très facilement : en effet, à chaque passage par $y=0$ (la position en hauteur de la barre) de la balle, celle-ci peut ou non, selon sa position en x à cet instant, toucher la barre et rebondir. De plus, en l'absence de gravité, lorsque la balle rebondit sur la barre, que ce soit par le haut ou par le bas, elle subit simplement un déphasage d'une demi période par rapport au mouvement qu'elle aurait eu en l'absence de barre. Dès lors, les deux seuls états échantillonnables de la balle correspondent à une accumulation d'un nombre pair ou impair de demi-périodes de déphasage.

3.2 Billard Vertical

Rajouter la gravité n’affecte pas le mouvement en x, celui-ci reste donc parfaitement régulier comme dans le cas précédent. Cependant, à première vue, un diagramme de bifurcation de la position en y montre que le mouvement selon cette coordonnée semble transitionner très rapidement vers le chaos : Remarquons tout d’abord que ce graphe reste cohérent puisqu’il montre que

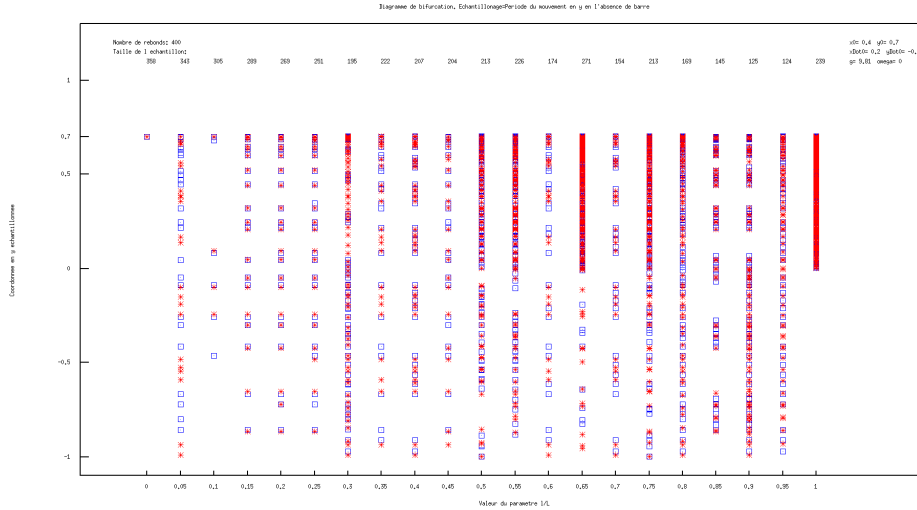


FIGURE 3.4 – Superposition de deux diagrammes de bifurcation de la position en y de la balle en fonction de la longueur relative de la barre centrale pour des conditions initiales infiniment proches. Cas $g=9.81$.

le mouvement semble parfaitement périodique pour $l/L = 0$. Pour $l/L = 1$, on a une succession continue de points, avec superposition parfaite des deux conditions initiales, ce qui signifie que le mouvement est également périodique mais avec une période différente de la période d’échantillonnage, ce qui est logique puisque la balle n’évolue alors que dans un demi billard. Pour les autres valeurs non dégénérées de l/L , le mouvement apparaît chaotique.

Ceci contredit l’hypothèse présentée au chapitre précédent, selon laquelle un mouvement périodique en x impliquait forcément un mouvement périodique en y, et que nous avons réussi à vérifier dans le cas sans gravité. Il était alors aisé de faire concorder cette intuition avec les observations, puisque le mouvement en y de la balle était uniquement constitué de périodes complètes et de demi périodes complètes. Ces deux périodes n’étant pas indépendantes, le nombre d’états échantillonnables était donc fini et se limitait à deux. Dans le cas présent, le mouvement en y de la balle est plus complexe puisqu’il est constitué de trois différents types de périodes : une période “complète” correspondant à un cycle accompli sans toucher la barre, et deux périodes plus courtes correspondant à un cycle accompli en touchant la barre respectivement par le dessus ou le dessous.

Il est tout de suite possible de distinguer le cas où $\frac{\dot{y}_0^2}{2} + gh_0 \leq 0$ ¹ (premier mouvement en bleu sur la figure 3.5) puisque la balle ne peut alors jamais toucher

1. Le zéro des énergies potentielles est placé en $y = 0$

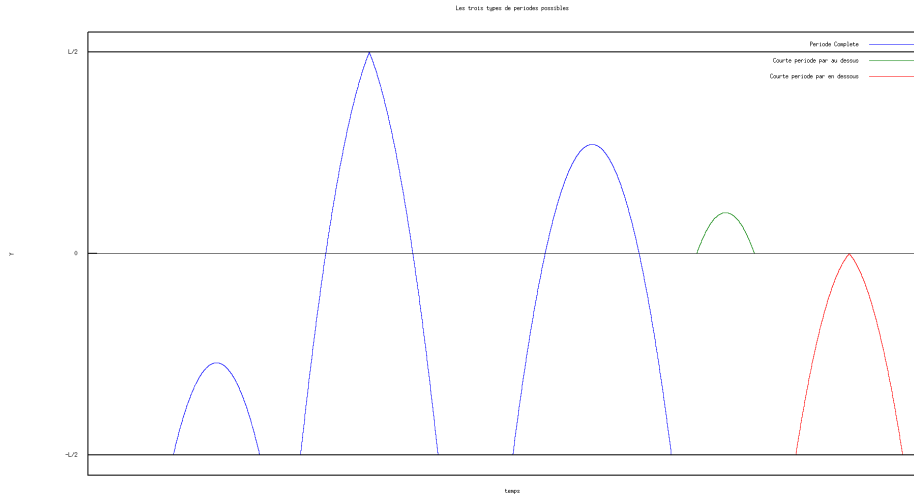


FIGURE 3.5 – Les trois types de périodes possibles en Y, selon les interactions de la balle avec la barre centrale. Notons que la période “complète” peut être une des trois périodes présentées en bleu sur ce graphique selon l’énergie initiale de la balle.

la barre centrale et le mouvement redevient alors périodique, quelle que soit la valeur des autres paramètres. Lorsque $\frac{y_0^2}{2} + gh_0 \geq 0$, le problème peut aussi se

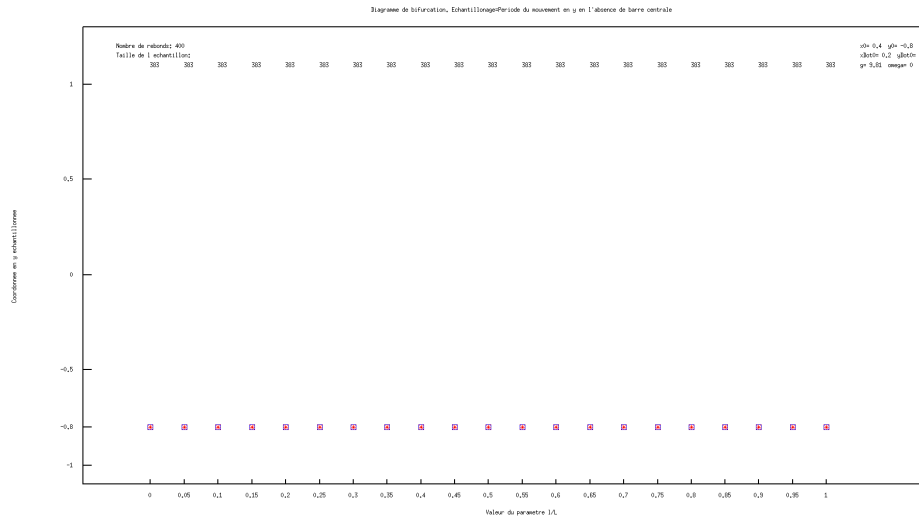


FIGURE 3.6 – Diagramme de Bifurcation en y en fonction de la longueur relative de la barre centrale. Cas $g=9.81$ avec $\frac{y_0^2}{2} + gh_0 \leq 0$. On remarque que le mouvement redevient logiquement périodique.

simplifier en remarquant que la période la plus longue est la somme des deux périodes plus courtes. Mais il existe donc toujours deux périodes indépendantes, ce qui signifie que le nombre d’états échantillonnables en utilisant la période

longue uniquement est infini, ce qui explique l'allure du graphe obtenu.

Si le mouvement reste malgré tout périodique, sa période serait donc forcément une combinaison linéaire entière des trois périodes élémentaires présentées plus haut. Dès lors, il suffit de trouver les coefficients de cette combili pour valider

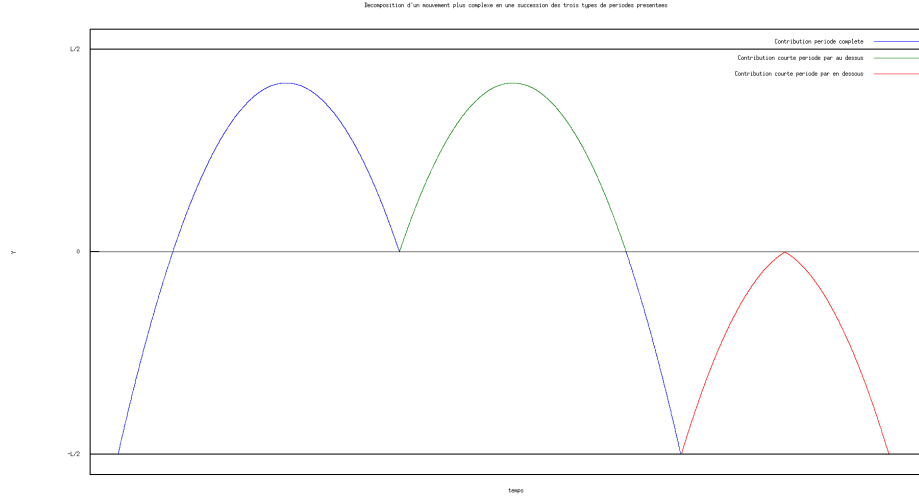


FIGURE 3.7 – Décomposition d'un mouvement plus complexe en une succession des trois périodes-types de base

l'hypothèse émise au chapitre précédent. Ceci a été fait pour plusieurs conditions initiales différentes, triviales ou moins triviales.

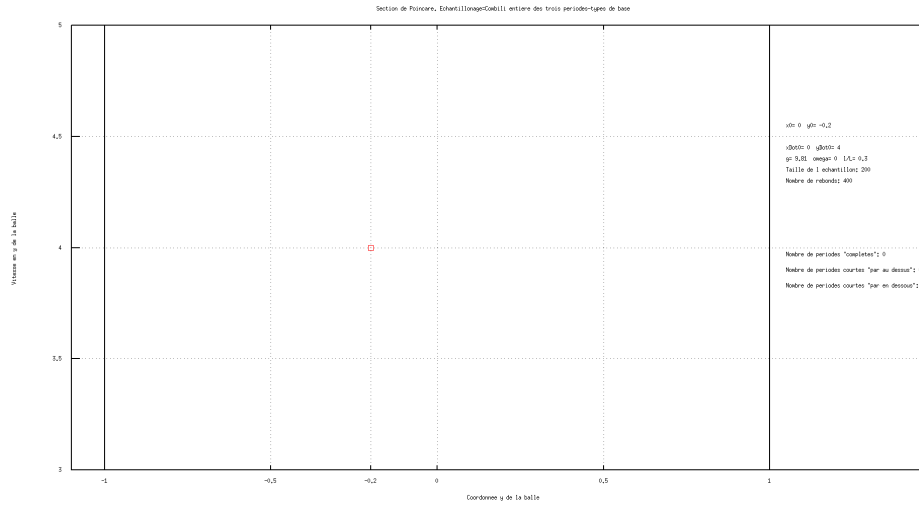


FIGURE 3.8 – Section de Poincaré montrant le résultat de la recherche d'une période pour le mouvement en y par combinaison linéaire des trois périodes de base. Ici, la solution est triviale puisque $x_0 = 0$ et $\dot{x}_0 = 0$, ce qui signifie que la balle rebondit uniquement entre la paroi inférieure et la barre centrale.

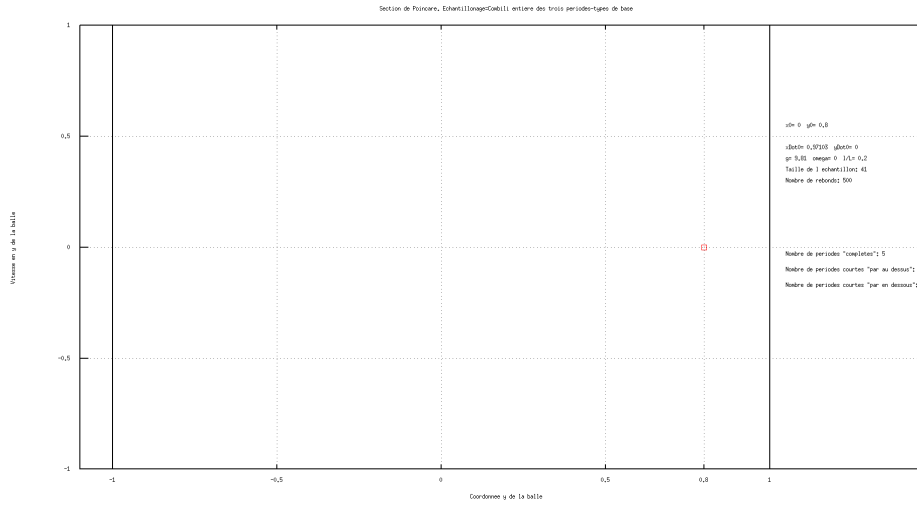


FIGURE 3.9 – Section de Poincaré montrant le résultat de la recherche d’une période pour le mouvement en y par combinaison linéaire des trois périodes de base. Cas non trivial.

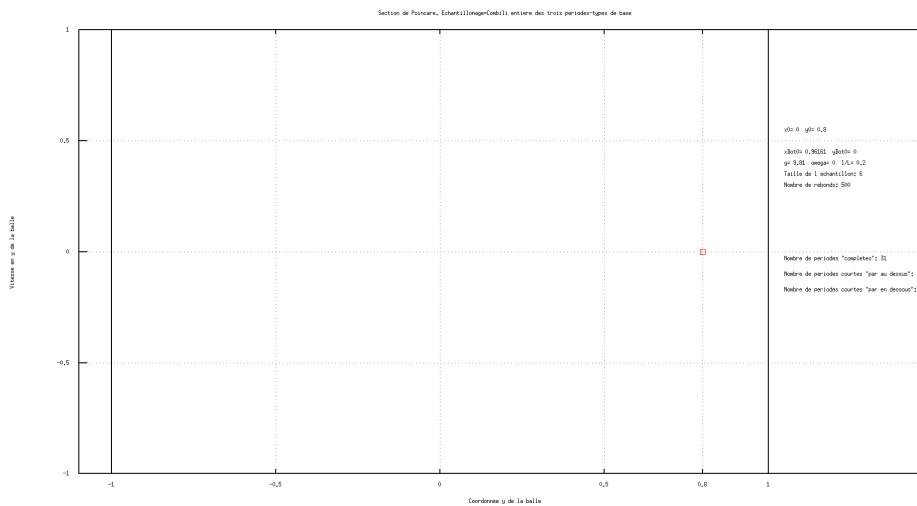


FIGURE 3.10 – Section de Poincaré montrant le résultat de la recherche d’une période pour le mouvement en y par combinaison linéaire des trois périodes de base. Cas non trivial.

Cependant, il existe des conditions initiales pour lesquelles cette recherche n’a pas abouti. L’algorithme de recherche utilisé se limite à des périodes constituées d’entre zéro et trente cycles complets, d’entre zéro et trente cycles courts “par au dessus” et d’entre zéro et un cycle court “par en dessous”¹. Dès lors, il se pourrait que le mouvement en y soit malgré tout régulier mais de période trop longue par rapport aux périodes que cette recherche est capable de tester.

1. Puisque comme on l’a vu page 8, une période longue correspond à la somme des deux périodes plus courtes

Le mouvement présente cependant tous les indicateurs d'un mouvement chaotique : sensibilité aux conditions initiales et section de Poincaré très étalée. De plus, le fait que même lorsqu'elle existe, la période soit beaucoup plus longue que la période de base du système sans la barre centrale est aussi un indice de la transition vers le chaos. Il faut cependant être prudent car même les mouve-

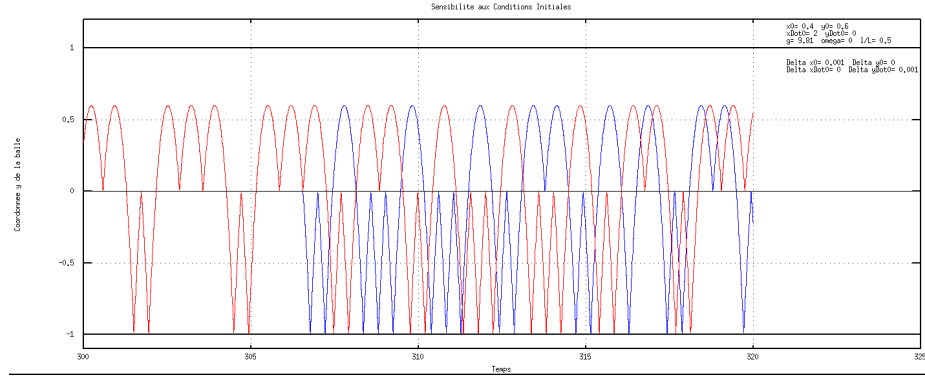


FIGURE 3.11 – Sensibilité du mouvement en Y aux différences de conditions initiales d'ordre 10^{-3} . Cas $g=9.81$.

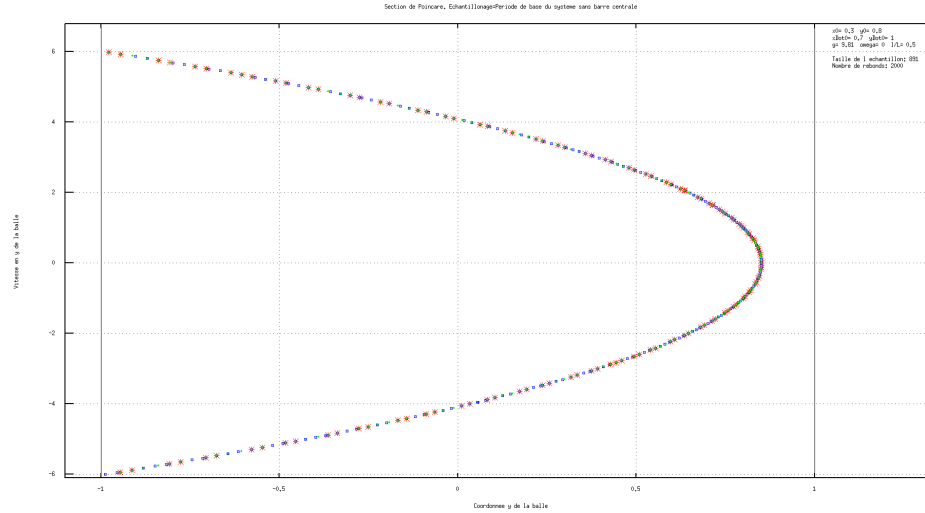


FIGURE 3.12 – Superposition de trois sections de Poincaré en y pour des conditions initiales infiniment proches.

ments étudiés précédemment et dont on sait maintenant qu'ils sont périodiques présentaient aussi une sensibilité aux conditions initiales. De plus avant d'interpréter le graphe 3.12 il faut le mettre en comparaison avec ceux qu'on aurait obtenu sur des mouvements réguliers de très longue période en utilisant la période de base du système.

La différence entre les deux sections de Poincaré apparaît quand même assez clairement et on constate donc qu'il existe bien des conditions initiales pour

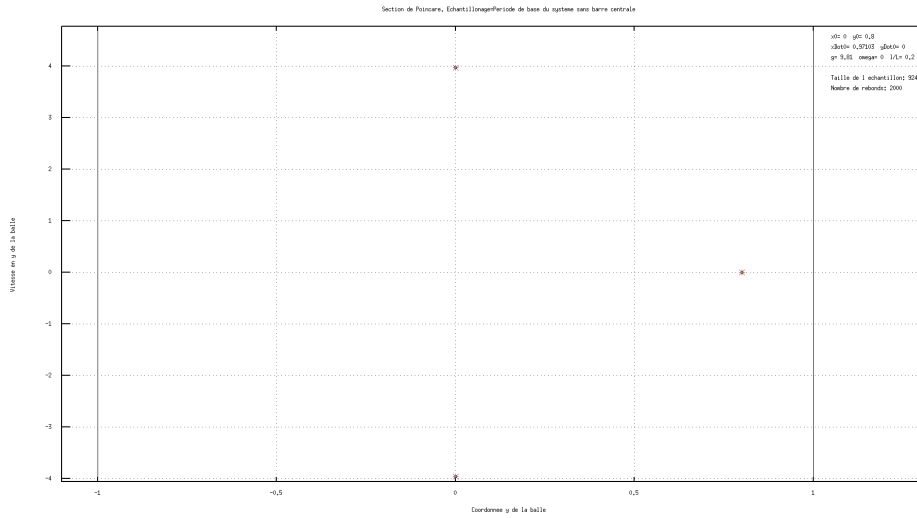


FIGURE 3.13 – Superposition de trois sections de Poincaré en y d'un mouvement périodique pour des conditions initiales infiniment proches. Ces sections sont faites non plus avec la période connue du mouvement mais bien avec la période de base du système sans la barre centrale afin de montrer l'allure d'une section de Poincaré avec la mauvaise période sur un mouvement périodique mais de période très longue. Le mouvement est le même qu'à la figure 3.10

lesquelles le mouvement en y devient chaotique dans le cas du billard vertical avec barre centrale fixe. Ceci peut s'expliquer par le fait qu'il n'existe pas forcément un rapport rationnel entre le temps qu'il faut à la balle pour accomplir un cycle en x et le temps qu'il faut à la balle pour accomplir un cycle en y . En effet si ce rapport existait, après le PPCM des deux temps, la balle reviendrait exactement au même état (position et vitesse) et recommencerait donc le même mouvement, ainsi que les mêmes interactions avec la barre centrale (puisque celle-ci est fixe), ce qui signifie que le mouvement est alors totalement périodique. On voit donc ici de nouveau apparaître l'influence du mouvement en x sur la périodicité du mouvement en y .

Chapitre 4

Barre Centrale Respirante

4.1 Billard Horizontal

Comme annoncé au chapitre 2, voici de nouveau pour commencer un diagramme de bifurcation en x du mouvement en fonction cette fois-ci de la valeur de ω . A priori, on peut choisir n'importe quelle valeur non triviale de l/L , puisque le mouvement en x était apparu toujours parfaitement périodique dans la section 3.1.

Cette fois-ci, le mouvement n'apparaît plus du tout périodique.

Chapitre 5

Conclusion