Manuel

de Mathématiques

5^{e}D - 5^{e}F

Mont

Collège Simone Veil

Nathalie Daval

année

2023-2024

Ce manuel est composé de l'ensemble des activités, cours et exercices pour les classes de 5^{e}D et 5^{e}F du collège Simone Veil de Montpellier que j'ai à ma charge durant l'année 2023-2024.

Il a été écrit en LaTeX à l'aide notamment des classes « ProfMaquette » et « ProfCollege » de **Christophe Poulain**.
Une partie des exercices est issue du « Manuel Sesamath, 5^{e} » et du « Cahier Sesamath, 5^{e} », éditions génération 5 et Magnard-Sesamath.
Si vous y voyez des erreurs ou des coquilles, même minimes, vous pouvez me les signaler à cette adresse : nathalie.daval@ac-montpellier.fr. Je remercie à ce propos *Jean-Félix Navarro* qui a effectué une relecture attentive du livret précédent, *Sébastien Lozano* pour son aide précieuse en LaTeX et *Christophe Poulain* pour ses packages sans cesse mis à jour et les améliorations au fil de l'eau.

La progression est dite spiralée, c'est-à-dire que chaque « chapitre » est décomposé en plusieurs séquences conçues pour durer une semaine en moyenne, ce qui permet de revoir les notions plusieurs fois dans l'année. La page suivante propose une programmation possible sur les cinq périodes (P1, P2, P3, P4 et P5) de l'année 2023-2024.

Chaque séquence du présent manuel est composée de la manière suivante :

- **Connaissances** et **compétences** : les connaissances et compétences évaluées au cycle 4 définies par le programme en vigueur à compter de la rentrée de l'année scolaire 2020.
- Débat : un petit texte culturel illustré permettant d'échanger sur un thème en rapport au chapitre. Un morceau d'histoire, de l'étymologie, du vocabulaire, une curiosité mathématique… le tout agrémenté d'une courte vidéo de vulgarisation scientifique.
- Activité d'approche : une activité à faire en classe, permettant de découvrir la notion de la séquence et de construire la trace écrite.
- Trace écrite : l'essentiel du cours à connaître et à maîtriser.
- Fiche d'exercices : une série d'exercices suivant les connaissances et compétences à acquérir ainsi que leur corrigé dans la version « prof ».

  L'icône de plume signifie que l'exercice se fait directement sur la fiche alors que tous les autres exercices doivent être faits sur le cahier. L'icône du petit monstre pixélisé signifie quant à lui que l'exercice est un peu plus difficile que les autres.
- Activité récréative : une activité ludique liée à la séquence, une énigme ou un problème à résoudre.

En fin de manuel se trouvent les VIDEOS DE TRAVAIL données aux élèves, pour chaque notion. Elles sont composées de capsules issues sur site d'*Yvan Monka* : m@ths et tiques et d'un line vers des exercices en ligne du site MathALÉA à faire pour réviser pour les évaluations.

Le corrigé des activités (d'approche et récréative) se trouve également en fin de manuel pour la version « prof » de ce manuel.

PROGRAMMATION

Nombres & calculs — **Espace & géométrie** — **Organisation, gestion de données** — **Grandeurs & mesures**

Période	Séquence
Période 1	1 Enchaînement d'opérations
	2 Angles particuliers
	3 En route vers la programmation
	4 Les nombres relatifs
	Semaine de rattrapage des séquences 1 à 4
	5 Repérage dans le plan
	6 Effectifs, fréquences et moyenne
Période 2	7 Multiples et diviseurs
	8 Somme des angles d'un triangle
	Semaine de rattrapage des séquences 5 à 8
	9 Horaires et durées
	10 Comparaison et égalité de fractions
	11 La symétrie centrale
	12 Notions de probabilités
Période 3	*Semaine de rattrapage des séquences 9 à 12*
	13 Expressions littérales
	14 Reconnaître des solides
	15 Aires et périmètres
	16 Calculs avec des nombres relatifs
Période 4	*Semaine de rattrapage des séquences 13 à 16*
	17 L'inégalité triangulaire
	18 Le ratio
	19 Les nombres premiers
	20 Le parallélogramme
	Semaine de rattrapage des séquences 17 à 20
Période 5	21 Volume du pavé, du prisme et du cylindre
	22 Calculs avec des fractions
	23 Représenter le pavé et le cylindre
	24 La proportionnalité
	Semaine de rattrapage des séquences 21 à 24
	25 Distributivité simple et égalités
	26 Hauteurs et médiatrices du triangle
	27 L'aire du parallélogramme
	28 Propriétés des symétries

SOMMAIRE

NOMBRES ET CALCULS

S01 Enchaînement d'opérations 5
S04 Les nombres relatifs 23
S07 Multiples et diviseurs 41
S10 Comparaison et égalité de fractions 59
S13 Expressions littérales 77
S16 Calculs avec des nombres relatifs 95
S19 Les nombres premiers 113
S22 Calculs avec des fractions 131
S25 Distributivité simple et égalités 149

GÉOMÉTRIE

S02 Angles particuliers 11
S05 Repérage dans le plan 29
S08 Somme des angles d'un triangle 47
S11 La symétrie centrale 65
S14 Reconnaître des solides 83
S17 L'inégalité triangulaire 101
S20 Le parallélogramme 119
S23 Représenter les solides 137
S26 Hauteurs et médiatrices du triangle 155

ORGANISATION ET GESTION DE DONNÉES

S06 Effectifs, fréquences et moyenne 35
S12 Notions de probabilités 71
S18 Le ratio 107
S24 La proportionnalité 131

GRANDEURS ET MESURES

S09 Horaires et durées 53
S15 Aires et périmètres 89
S21 Volume du pavé, du prisme et du cylindre 125
S27 L'aire du parallélogramme 161
S28 Propriétés des symétries 167

ALGORITHMES ET PROGRAMMATION

S03 En route vers la programmation 17

Pour préparer les évaluations 172

Nombres
& Calculs

Séquence **1**

Enchaînement d’opérations

Connaissances :

- Utiliser diverses représentations d’un même nombre.
- Nombres décimaux positifs.
- Sommes, différences, produits, quotients de nombres décimaux.

Compétences :

- Comparer, ranger, encadrer des nombres décimaux.
- Calculer avec des nombres décimaux.
- Vérifier la vraisemblance d’un résultat, notamment en estimant son ordre de grandeur.

Débat : un peu d’histoire

Le système de numération que nous employons actuellement et qui nous semble si naturel est le fruit d’une longue évolution des concepts mathématiques. En effet, un nombre est une entité abstraite qui peut surprendre : on a déjà vu **un** élève, **un** animal donné, on sait ce qu’est **un** jour, mais qu’est-ce que **un** ? C’est une entité qui, prise seule, n’a pas vraiment de sens. De nombreuses civilisations ont imaginé des systèmes de numération plus ou moins compliqués, plus ou moins pratiques : des systèmes utilisant des bases différentes, des systèmes utilisant le principe additif… jusqu’à notre système de numération positionnel de base dix maintenant utilisé de manière universelle.

19⓪1①7②8③

Notation décimale de Simon Stevin représentant le nombre 19,178 au 16e siècle.

Vidéo : **Histoire de la virgule**, chaîne Youtube de *Maths 28*.

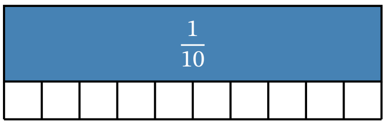
Activité d'approche

Construction et repérage d'une droite graduée

Objectifs : comprendre et utiliser le principe de construction d'une graduation en dixièmes et en centièmes ; savoir situer des nombres décimaux sous différentes écritures ; ordonner, encadrer, intercaler des nombres décimaux.

Construction d'une droite graduée

1. Tracer au stylo une droite la plus longue possible sur la bande de papier fournie.
2. Placer à gauche sur cette droite le repère de l'origine, inscrire la valeur 0 en dessous.
3. Grâce à la petite bande de couleur « $\frac{1}{10}$ », qui correspond à un dixième d'une unité, placer le nombre 1.



4. Placer ensuite les nombres 2 et 3, toujours en dessous de la droite.

Placer des nombres décimaux sur la droite graduée

5. Sur la droite graduée, placer au crayon à papier et au-dessus les nombres suivants :

   $\frac{8}{10}$ $\quad$ $0,3$ $\quad$ cinq dixièmes $\quad$ $\frac{23}{10}$ $\quad$ $1,7$ $\quad$ $2+\frac{1}{10}$ $\quad$ douze dixièmes

6. Trouver un moyen pour placer $\frac{143}{100}$ sur la droite graduée.
7. Placer au crayon les nombres suivants : $\quad$ $\frac{255}{100}$ $\quad$ $0,23$ $\quad$ cent-six centièmes $\quad$ $1+\frac{9}{10}+\frac{8}{100}$

Ordonner, encadrer, intercaler des nombres décimaux

8. Écrire dans l'ordre croissant les nombres inscrits sur la droite graduée.

   ....

   ....

9. Encadrer chacun des nombres suivants par deux nombres entiers consécutifs.

   .... $< \frac{8}{10} <$ .... $\qquad$ .... < cinq dixièmes < .... $\qquad$ .... $< 1,7 <$ ....

   .... $< 0,3 <$ .... $\qquad$ .... $< \frac{23}{10} <$ .... $\qquad$ .... $< 2+\frac{1}{10} <$ ....

10. Encadrer chacun des nombres suivants par deux nombres décimaux séparés d'un dixième.

   ...... < douze dixièmes ≤ ...... $\qquad$ .... $< \frac{255}{100} <$ .... $\qquad$ .... < 106 centièmes < ....

   .... $< \frac{143}{100} <$ .... $\qquad$ .... $< 0,23 <$ .... $\qquad$ .... $< 1+\frac{9}{10}+\frac{8}{100} <$ ....

11. Intercaler un nombre vérifiant chacune des inégalités.

   cinq dixièmes < .... $< \frac{8}{10}$ $\qquad$ $2 <$ .... $< 2+\frac{1}{10}$ $\qquad$ $0,23 <$ .... $< 0,3$

Source : « Apprentissages numériques et résolution de problèmes au CM2 », Ermel, Hatier 2001.

Trace écrite

1 Rappels sur les nombres décimaux

Définition

Une **fraction décimale** est une fraction dont le dénominateur est 1, 10, 100, 1 000…
Un **nombre décimal** est un nombre qui peut s'écrire sous forme d'une fraction décimale.

Un nombre a une seule valeur numérique mais a plusieurs écritures.

Exemple

Voilà plusieurs écritures du nombre seize et quatre-vingt-deux centièmes :

$$\begin{aligned}16,82 &= 16 + \frac{82}{100} = \frac{1\,682}{100}\\ &= 1\times 10 + 6\times 1 + 8\times\frac{1}{10} + 2\times\frac{1}{100}\\ &= 1\times 10 + 6\times 1 + 8\times 0,1 + 2\times 0,01\end{aligned}$$

2 Priorités dans les calculs

Définition

- Lorsqu'on effectue l'addition de deux **termes**, le résultat est une **somme**.
- Lorsqu'on effectue la soustraction de deux **termes**, le résultat est une **différence**.
- Lorsqu'on effectue la multiplication de deux **facteurs**, le résultat est un **produit**.
- Lorsqu'on effectue la division d'un **dividende** par un **diviseur**, le résultat est un **quotient**.

$$\begin{array}{ccccc} 12 & + & 3 & = & 15\\ \nwarrow & & \nearrow & & \uparrow\\ & \text{termes} & & & \text{somme}\end{array} \quad\Bigg|\quad \begin{array}{ccccc} 12 & - & 3 & = & 9\\ \nwarrow & & \nearrow & & \uparrow\\ & \text{termes} & & & \text{différence}\end{array} \quad\Bigg|\quad \begin{array}{ccccc} 12 & \times & 3 & = & 36\\ \nwarrow & & \nearrow & & \uparrow\\ & \text{facteurs} & & & \text{produit}\end{array} \quad\Bigg|\quad \begin{array}{ccccccc} 12 & \div & 3 & = & \frac{12}{3} & = & 4\\ \uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow\\ \text{dividende} & & \text{diviseur} & & & & \text{quotient}\end{array}$$

Méthode : Priorités opératoires

Dans un calcul, on effectue dans l'ordre :

- les calculs entre parenthèses, en commençant par les plus intérieures ;
- les multiplications et les divisions, de gauche à droite ;
- les additions et soustractions, de gauche à droite.

Exemple

Calculer la valeur de A :
$A = 8\times 5 + 3\times((15-9)\times 2)$

$A = 8\times 5 + 3\times((15-9)\div 2)$
$A = 8\times 5 + 3\times(6\div 2)$
$A = 8\times 5 + 3\times 3$
$A = 40 + 9$
$A = 49$

Une expression qui figure au numérateur et/ou au dénominateur d'un quotient est considérée comme une expression entre parenthèses :

$$\begin{aligned}\frac{8+4}{3,5+2,5} &= (8+4)\div(3,5+2,5)\\ &= 12\div 6 = 2\end{aligned}$$

Fiche d'exercices

1 Associer chaque nombre de la colonne de gauche à un nombre de la colonne de droite.

143 dixièmes •	• 143
1 430 millièmes •	• 14 300
1 430 dixièmes •	• 1,43
143 millièmes •	• 0,014 3
143 dix-millièmes •	• 0,143
143 centaines •	• 14,3

2 Exprimer les nombres suivants sous formes décimale et fractionnaire.

$A = 7 + \dfrac{3}{10} + \dfrac{6}{100}$ $\qquad$ $B = 2 + \dfrac{7}{10} + \dfrac{23}{100}$

3 Aider Badr Eddine à classer dans l'ordre croissant l'ensemble de ces lettres afin de trouver le mot mystère.

$\mathrm{O} = 65{,}165$ $\qquad$ $\mathrm{R} = \dfrac{655}{10}$

$\mathrm{A} = \dfrac{6\,503}{100}$ $\qquad$ $\mathrm{T} = 56 + \dfrac{6}{100}$

$\mathrm{H} = 50 + 6 + \dfrac{65}{1\,000}$ $\qquad$ $\mathrm{G} = \dfrac{651}{10} + \dfrac{3}{100}$

$\mathrm{Y} = 56 + \dfrac{5}{100}$ $\qquad$ P = 56 unités et 6 millièmes

$\mathrm{E} = (6 \times 10) + (5 \times 1) + (6 \times 0,1)$

4 Traduire par une expression mathématique les phrases en français suivantes.

1. La somme de 7 et du produit de 2 par 3.
2. Le produit de 7 et de la somme de 2 et de 3.
3. Le quotient de la différence entre 7 et 2 par 3.
4. La différence de la somme de 7 et de 2 et du produit de 3 par 1.

5 Traduire les expressions suivantes en français.

1. $12 - 5 \times 3$
2. $12 \times (5 + 3)$
3. $(12 - 5) \div 3$
4. $12 + \dfrac{5}{3}$

6 Adem propose les programmes ci-dessous.
Traduire l'enchaînement d'opérations de cess programmes à l'aide d'une expression puis les calculer.

Programme 1	Programme 2
1. Prendre 7	1. Prendre 6
2. Ajouter 2	2. Multiplier par 7
3. Multiplier par 3	3. Diviser par 3
4. Soustraire 3	4. Soustraire 4

7 Calculer, en donnant les étapes intermédiaires :

1. $24 - 19 + 5$
2. $45 \div 5 \times 8$
3. $24 + 3 \times 7$
4. $60 - 14 + 5 \times 3 + 2$
5. $37 - 12 \times 2 + 5$
6. $18 - [4 \times (5 - 3) + 2]$

8 Calculer les nombres suivants :

1. $\dfrac{18}{3} + 6$
2. $18 + \dfrac{6}{3}$
3. $\dfrac{18 + 6}{3}$
4. $\dfrac{18}{\frac{6}{3}}$
5. $\dfrac{18}{6 + 3}$
6. $\dfrac{\frac{18}{6}}{3}$

9 On considère les calculs suivants faits par Firdaws :

A. $50 - 10 \div 2 = 20$
B. $24 - 8 + 2 = 14$
C. $8 + 2 \times 3 = 30$
D. $10 + 8 - 6 = 12$
E. $100 \div 2 \times 5 = 10$
F. $5 \times 6 \div 3 = 10$

1. Retrouver les calculs qui sont justes.
2. Corriger les calculs faux.

10 Compléter les calculs suivants pour que chaque égalité soit vraie.

1. Avec les signes $+$, $-$ ou $\times$:
   - 3 .... 3 .... 3 .... 3 = 6
   - 3 .... 3 .... 3 .... 3 = 81
2. Avec les signes $+$, $-$ ou $\times$ et des parenthèses :
   - .... 3 .... 3 .... 3 .... 3 .... = 9
   - .... 3 .... 3 .... 3 .... 3 .... = 27
3. Avec les signes $+$, $-$, $\times$ ou $\div$ et des parenthèses :
   - .... 3 .... 3 .... 3 .... 3 .... = 1
   - .... 3 .... 3 .... 3 .... 3 .... = 12

Nombres en cases

Nombres croisés

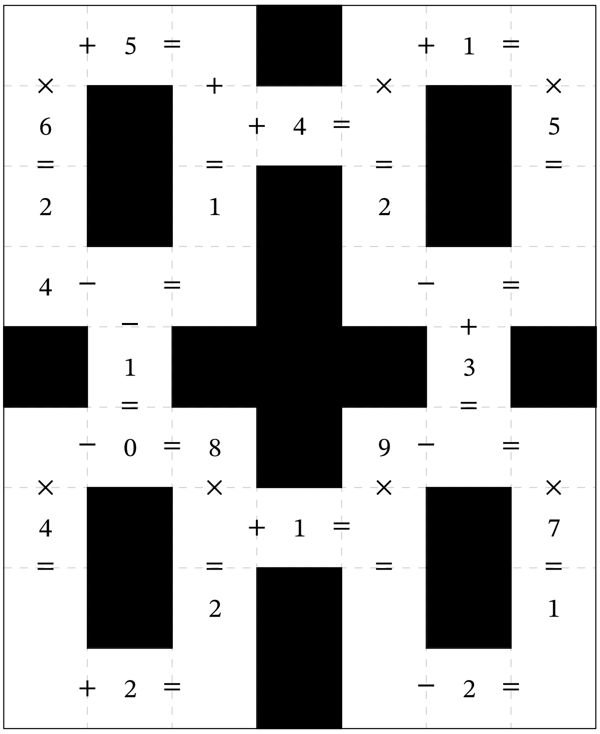
Compléter les tableaux suivants pour que les égalités soient vraies pour chaque ligne et chaque colonne.
Dans le premier tableau, il suffit de faire les calculs de tête puis d'indique la réponse dans la case grisée.
Dans le deuxième tableau, il faut retrouver les nombres manquants sachant que chacun des nombres de 1 à 9 est utilisé une et une seule fois.

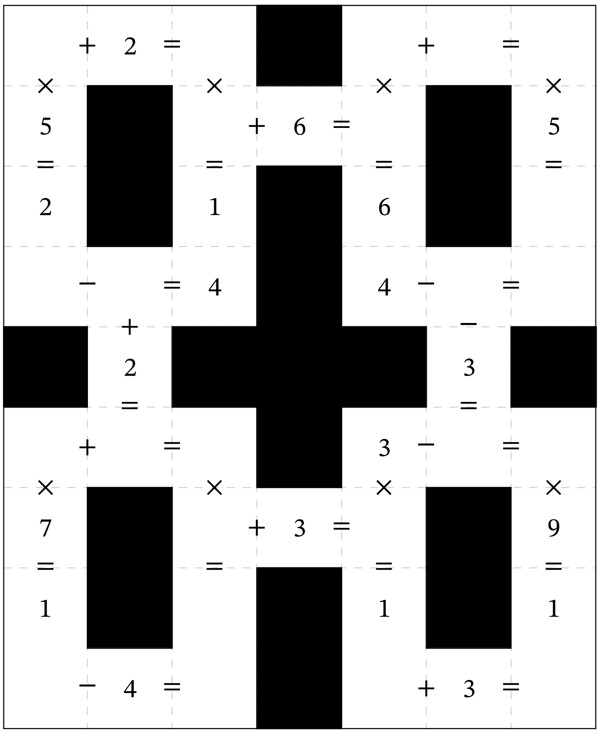
5	+	1	×	7	
×		−		+	
6	×	4	×	9	
+		−		×	
3	+	2	×	8	

	−	4	×		1
×		+		+	
5	×		+		12
+		×		×	
	×		−	8	10
48		10		58	

Le garam

Le Garam est un jeu de logique mathématique à base d'opérations simples.
Remplir chaque case avec un seul chiffre de sorte que chaque ligne et chaque colonne forment une opération correcte.
Le résultat d'une opération verticale est un nombre à deux chiffres si deux cases suivent le symbole égal.





Séquence 2

Angles particuliers

Connaissances :

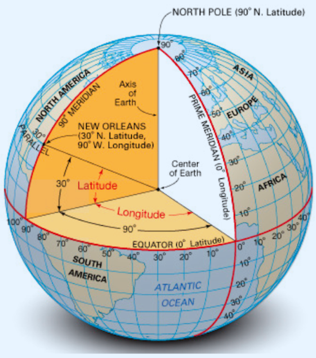
- Caractérisation angulaire du parallélisme : angles alternes-internes, angles correspondants.

Débat : angles et coordonnées géographiques

Tout point à la surface de la Terre est déterminé par ses coordonnées géographiques (la latitude et la longitude) et par son altitude (élévation par rapport au niveau de la mer).

- La **latitude** d'un point sur la Terre est la mesure de l'angle que forment le plan de l'équateur et la demi-droite joignant le centre de la Terre à ce point.
- La **longitude** d'un point est l'angle que fait le demi-plan passant par le méridien de ce point avec le plan du méridien de Greenwich.

Le collège Simone Veil se trouve à une latitude de 43,62 degrés Nord et 3,85 degrés Est.



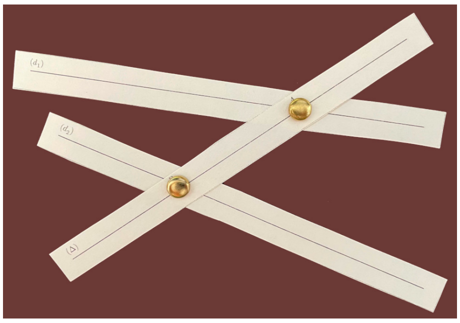
Vidéo : **Les fondamentaux : latitude et longitude**, chaîne YouTube *La Classe d'Histoire*.

Activité d'approche

Couples d'angles

Objectifs : faire découvrir la notion d'angles-internes et d'angles correspondants.

Introduction



En utilisant les trois bandelettes modélisant trois droites (d_1), (d_2) et Δ reliées entre elles par des attaches parisiennes, combien d'angles peut-on observer ? ....

Angles alternes-internes

1. Prendre deux jetons, les placer sur deux angles vérifiant les conditions suivantes :
   - les deux angles n'ont pas le même sommet ;
   - ils sont situés de part et d'autre de la droite (Δ) ;
   - ils sont situés « entre » les droites (d_1) et (d_2).

   Quelle est la mesure en degrés de chacun de ces deux angles ? ....
2. Combien y a-t-il de telles paires d'angles ? ....

   Les angles ainsi construits sont dit alternes-internes.
3. Placer les bandelettes de telle sorte que les droites (d_1) et (d_2) soient parallèles, repérer deux angles alternes-internes par deux jetons puis donner la mesure de chacun de ces deux angles. ....
4. En observant les résultats de la classe, quelle conjecture peut-on faire ?

   ....

Angles correspondants

5. Prendre deux jetons, les placer sur deux angles vérifiant les conditions suivantes :
   - les deux angles n'ont pas le même sommet ;
   - ils sont situés du même côté que la droite (Δ) ;
   - l'un est situé « entre » les droites (d_1) et (d_2), l'autre à l'extérieur.

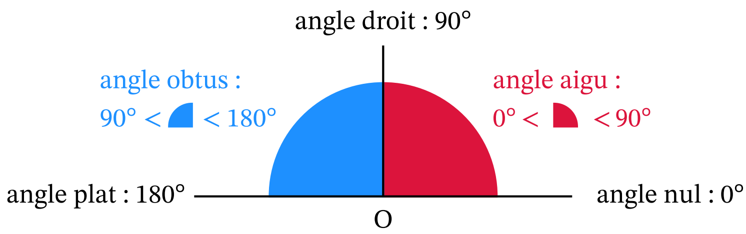
   Quelle est la mesure en degrés de chacun de ces deux angles ? ....
6. Combien y a-t-il de telles paires d'angles ? ....

   Les angles ainsi construits sont dit correspondants.
7. Placer les bandelettes de telle sorte que les droites (d_1) et (d_2) soient parallèles, repérer deux angles alternes-internes par deux jetons puis donner la mesure de chacun de ces deux angles. ....
8. En observant les résultats de la classe, quelle conjecture peut-on faire ?

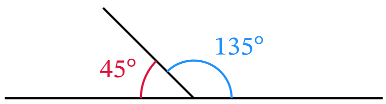
   ....

Trace écrite

1 Mesure d'angles particuliers : rappels

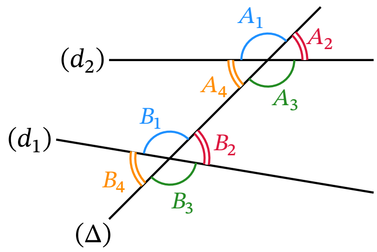


Dans cette configuration, la somme des deux angles mesure 180°, on dit que ces angles sont supplémentaires.



2 Angles alternes-internes et correspondants

Lorsque deux droites sont coupées par une droite sécante (Δ), on obtient huit angles.
Dans la suite du cours, on se place dans cette configuration.



Définition

Deux angles sont **alternes-internes** s'ils n'ont pas le même sommet, qu'ils sont situés de part et d'autre de la sécante (Δ) et qu'ils se situent « entre » les droites (d_1) et (d_2).

Exemple

Sur la figure, il y a deux couples d'angles alternes-internes : A_4 et B_2 ; A_3 et B_1.

Définition

Deux angles sont **correspondants** s'ils n'ont pas le même sommet, qu'ils sont situés du même côté de la sécante (Δ), l'un entre les deux droites (d_1) et (d_2) et l'autre à l'extérieur.

Exemple

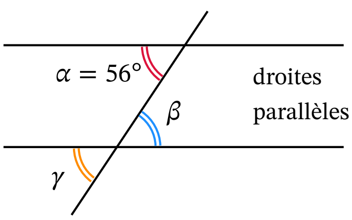
Sur la figure, il existe quatre couples d'angles correspondants : A_1 et B_1 ; A_2 et B_2 ; A_3 et B_3 ; A_4 et B_4.

3 Et si les droites sont parallèles ?

Propriété

- Si les deux droites (d_1) et (d_2) sont parallèles, alors les angles alternes-internes et les angles correspondants sont égaux deux à deux.
- Si deux angles alternes-internes ou deux angles correspondants sont égaux, alors les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles.

Exemple



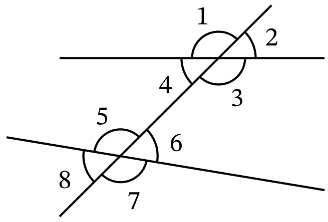
Mesures de β et γ, sachant que les droites sont parallèles :

- α et β sont des angles alternes-internes, ils ont donc même mesure.
  D'où : $\beta = \alpha = 56°$.
- α et γ sont des angles correspondants, ils ont donc même mesure.
  D'où : $\gamma = \alpha = 56°$.

Fiche d'exercices

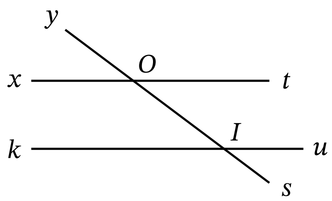
1 Au regard de la figure, que peut-on dire des angles :

1. 1 et 5 ?
2. 2 et 6 ?
3. 4 et 6 ?
4. 3 et 7 ?
5. 3 et 5 ?
6. 4 et 8 ?

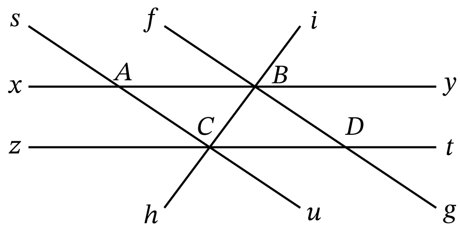


2 Dans la configuration suivante, citer :

1. la sécante ;
2. deux angles correspondants ;
3. deux angles alternes-internes.

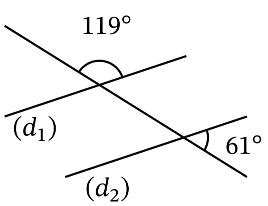


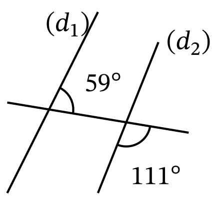
3 Sur cette figure, les droites (xy) et (zt), ainsi que les droites (su) et (fg), sont parallèles.
Compléter le tableau suivant lorsque c'est possible.



angle	$\widehat{yBg}$	$\widehat{zCi}$	$\widehat{fBi}$	$\widehat{uCi}$
alterne-interne				
correspondant				

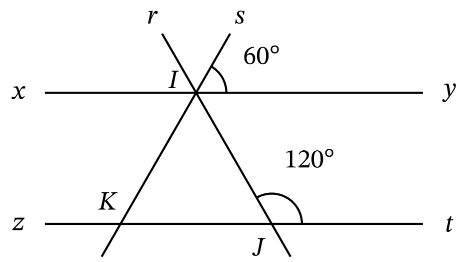
4 Batoul pense que l'une des deux paires de droites (d_1) et (d_2) est parallèle. A-t-elle raison ? Justifier





5 Dans la figure ci-dessous, on sait que les droites (xy) et (tz) sont parallèles et on connaît la mesure de deux angles. En utilisant les données de la figure :

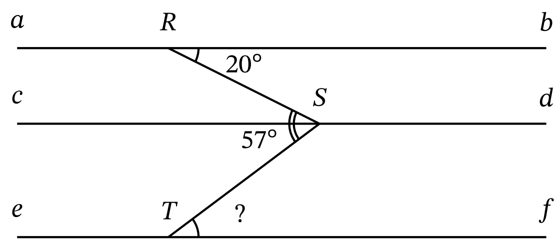
1. Donner la mesure en degrés d'un maximum d'angles de la figure.
2. En déduire la nature du triangle IJK ?



6 Sur la figure ci-dessous :

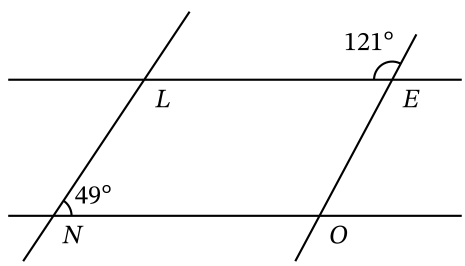
- les droites (ab), (cd) et (ef) sont parallèles ;
- R est un point de (ab), S un point de (cd) et T un point de (ef) tels que $\widehat{bRS} = 20°$ et $\widehat{RST} = 57°$.

Calculer la mesure de l'angle $\widehat{STf}$.



7 Léon possède un champ en forme de quadrilatère $LEON$ dont les côtés (LE) et (ON) sont parallèles. Il prend la mesure de deux angles et se demande si son quadrilatère peut être un parallélogramme.

1. Écrire sur le schéma ci-dessous la mesure de tous les angles existants.
2. Les droites (LN) et (EO) sont-elles parallèles ?
3. Quelle est alors la nature du quadrilatère $LEON$?

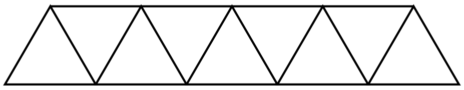


Activité récréative

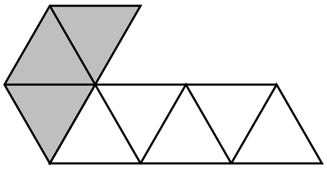
Le flexagone

Construction du flexagone

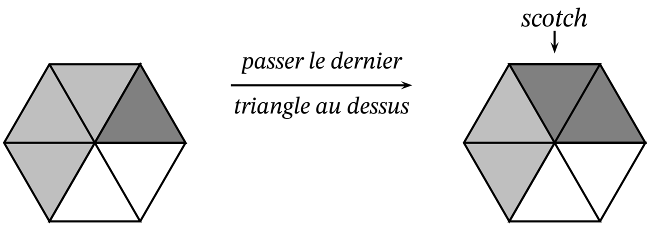
1. Reproduire, puis découper la figure ci-dessous, composée de 9 triangles équilatéraux de côté 5 cm.



2. Marquer le pli vallée au niveau de l'arête commune entre le 3e et le 4e triangle, puis replier vers le haut les trois premiers triangles.

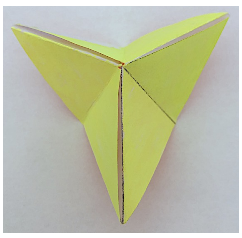
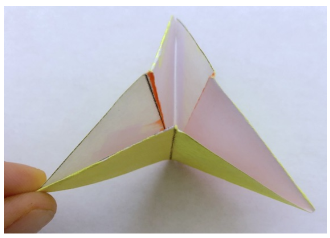


3. Marquer le pli montagne au niveau de l'arête commune entre le 6e et le 7e triangle, puis replier vers le haut les trois derniers triangles en faisant passer le dernier triangle sur le premier triangle. Enfin, mettre un morceau de ruban adhésif pour maintenir le premier et le dernier triangle ensemble.



Utilisation du flexagone

1. On obtient un hexagone, ou plus précisément un hexaflexagone. Dessiner ou colorier les deux faces obtenues.
2. Marquer tous les plis dans les deux sens.
3. Plier une arête sur deux en alternant les plis vallée et montagne de telle sorte que les soufflets soient en plis montagne, puis ouvrir : on obtient, de manière magique, une troisième face que l'on peut à son tour colorier.

4. En réitérant le pliage, on obtient successivement les trois faces, une à une.

Pour aller plus loin

- Un article, paru dan le magasine « Pour la science » et écrit par *Jean-Paul Delahaye*, explique que l'on peut faire des flexagones avec autant de faces que l'on souhaite : « Flexagones »
- Il existe également des sites spécialisés, comme Flexagone.net qui propose de multiples modèles décorés à imprimer

Algorithmes
& programmation

Séquence 3

En route vers la programmation

Connaissances :

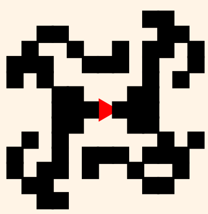
- Notions d'algorithme et de programme.
- Notion de variable informatique.
- Déclenchement d'une action par un événement.
- Séquences d'instructions, boucles, instructions conditionnelles.

Compétences :

- Écrire, mettre au point (tester, corriger) et exécuter un programme en réponse à un problème donné.

Débat : la fourmi de Langton, que se passe-t-il ensuite ?

La **fourmi de Langton**, du nom de son inventeur scientifique américain *Christopher Langton*, est un petit programme informatique inventé vers la fin des années 1980.
Il consiste en un automate qui se déplace dans un quadrillage suivant des règles simples. Il modélise le fait qu'un ensemble de comportements élémentaires peut donner lieu à un comportement complexe.



Vidéo : **La fourmi de Langton**, chaîne YouTube *Science étonnante*.

Activité d'approche

La fourmi de Langton

Objectifs : suivre un algorithme de déplacement ; se repérer dans le plan dans un repérage relatif.

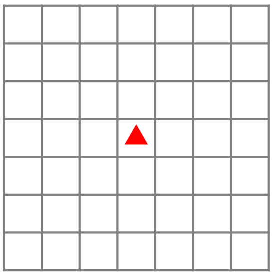
Les règles du jeu

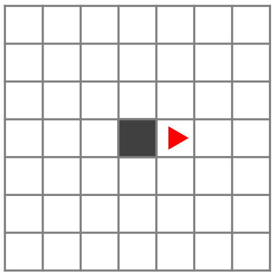
La fourmi de Langton est un automate qui se déplace dans un quadrillage suivant les règles suivantes :

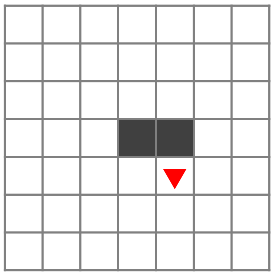
- au départ, toutes les cases sont de la même couleur, ici blanches ;
- si la fourmi est sur une case blanche, elle tourne de 90° vers la droite, change la couleur de la case en noir et avance d'une case ;
- si la fourmi est sur une case noire, elle tourne de 90° vers la gauche, change la couleur de la case en blanc et avance d'une case.

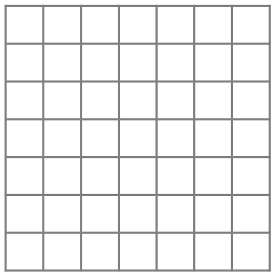
À vous de jouer !

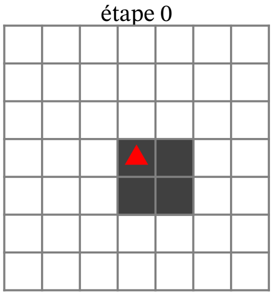
Compléter dans les quadrillages ci-dessous les quinze premières étapes du déplacement de la fourni.

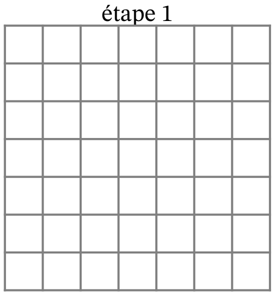

étape 0

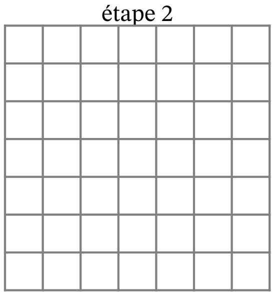

étape 1

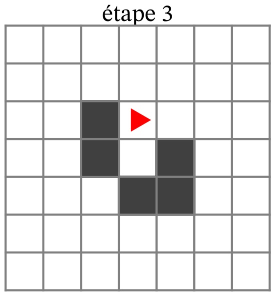

étape 2

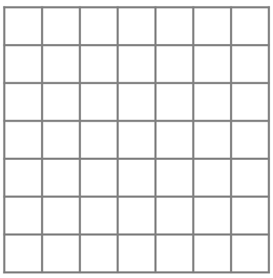

étape 3

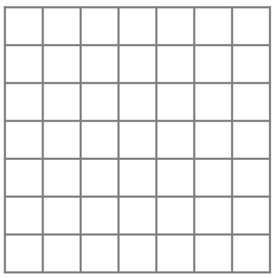

étape 4

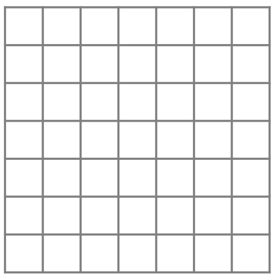

étape 5

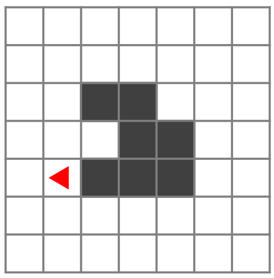

étape 6

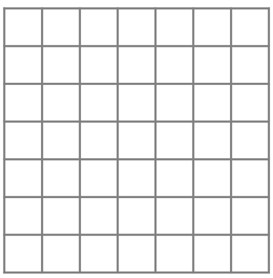

étape 7

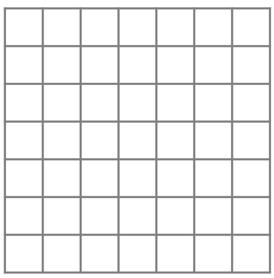

étape 8

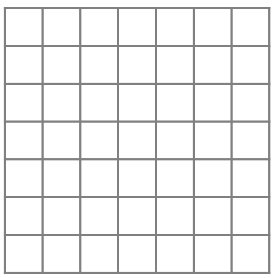

étape 9

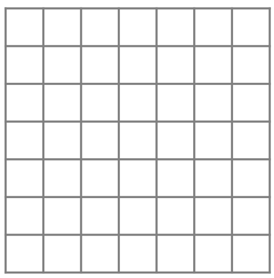

étape 10


étape 11


étape 12


étape 13


étape 14


étape 15

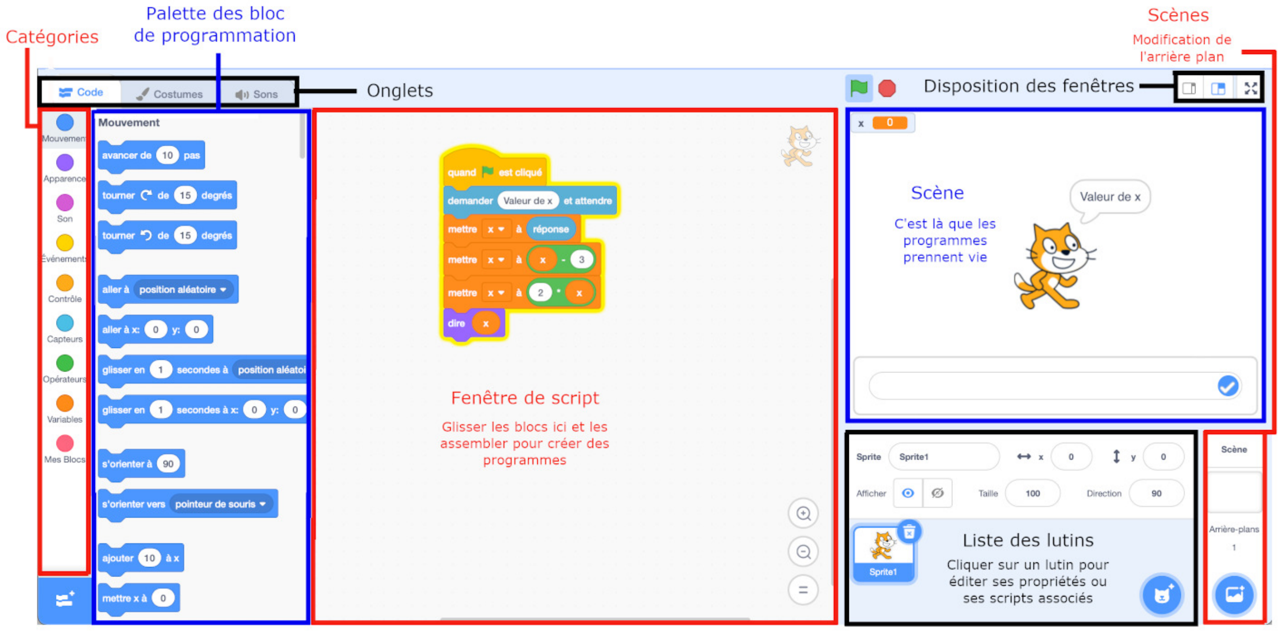
Trace écrite

1 Algorithmes et langages de programmation

Définition

Un **algorithme** est une liste ordonnée et logique d'instructions permettant de réaliser une tâche de manière automatisée.

Un algorithme peut-être traduit, grâce à un langage de programmation, en un programme exécutable par un ordinateur. Ce langage peut être formel, textuel, visuel... Actuellement, le logiciel utilisé au collège est Scratch, développé par le MIT. Les programmes sont créés grâce à une succession de blocs, chacun ayant une fonction.



2 Se déplacer

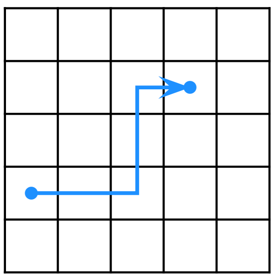
Méthode : Langages de déplacement

Pour se déplacer dans le plan, il existe principalement deux langages de déplacement :

- le langage **absolu** composé de mots de vocabulaire du type : « haut », « bas », « droite » et « gauche ». Le déplacement se fait comme si on se plaçait en vue du dessus ;
- le langage **relatif** composé de mots de vocabulaire du type : « avancer », « tourner à droite » et « tourner à gauche ». C'est ici le point de vue de l'observateur qui est adopté.

Exemple

Coder ce déplacement :



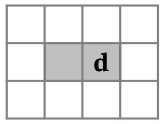
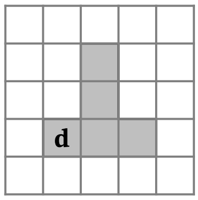
Langage absolu :	**Langage relatif :**
droite	avancer
droite	avancer
haut	tourner à gauche
haut	avancer
droite	avancer
	tourner à droite
	avancer

Fiche d'exercices

1 Un programme permet à un robot de se déplacer sur les cases d'un quadrillage.
Chaque case atteinte est colorée en gris. Au début d'un programme, toutes les cases sont blanches, le robot se positionne sur une case de départ indiquée par un « **d** » et la colore aussitôt en gris.
Le robot se déplace suivant un programme grâce à un langage absolu dont le vocabulaire est

« S (south); E (east); N (north); W (west) ».

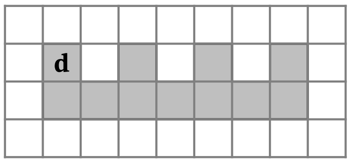
On a ci-contre des exemples de programmes.

1W	Le robot avance de 1 case vers l'ouest.	
2E 1W 2N	Le robot avance de 2 cases vers l'est, puis de 1 case vers l'ouest, puis de 2 cases vers le nord.	

1. Voici un programme : 1W 2N 2E 4S 2W

   On souhaite dessiner le motif obtenu avec ce programme. Sur votre copie, réaliser ce motif en utilisant des carreaux, comme dans les exemples précédents. On marquera un « **d** » sur la case de départ.

2. On fait fonctionner un programme qui dessine le motif ci-contre :

   (a) Proposer un programme permettant de dessiner ce motif.

   (b) Comment pourrait-on faire évoluer l'écriture de ce programme afin qu'il soit plus compact ?

2 Tracer les figures obtenues lorsque l'on exécute les programmes suivants avec scratch. Pour chaque cas, donner la nature de la figure obtenue. *On représentera l'unité (un pas)par 1 mm sur le cahier.*

Programme 1

```
quand [drapeau] est cliqué
stylo en position d'écriture
répéter 4 fois
    tourner ↻ de 90 degré(s)
    avancer de 50 pas
```

Programme 2

```
quand [drapeau] est cliqué
stylo en position d'écriture
répéter 3 fois
    avancer de 40 pas
    tourner ↺ de 120 degré(s)
```

Programme 3

```
quand [drapeau] est cliqué
stylo en position d'écriture
répéter 2 fois
    avancer de 20 pas
    tourner ↻ de 90 degré(s)
    avancer de 80 pas
    tourner ↻ de 90 degré(s)
```

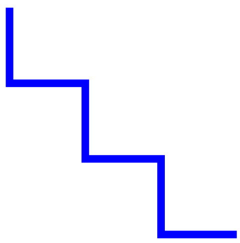
Programme 4

```
quand [drapeau] est cliqué
stylo en position d'écriture
répéter 2 fois
    avancer de 30 pas
    tourner ↻ de 50 degré(s)
    avancer de 30 pas
    tourner ↻ de 130 degré(s)
```

3 En utilisant les instructions ci-dessous, écrire un programme permettant de tracer les pointillés.


```
stylo en position d'écriture
avancer de 10 pas
relever le stylo
quand [drapeau] est cliqué
répéter ( ) fois
```

4 Proposer un programme permettant de dessiner les marches d'un escalier comme ci-dessous.
Chaque segment de la marche doit mesurer 100 pas.



Activité récréative

Le jeu des dominogrammes

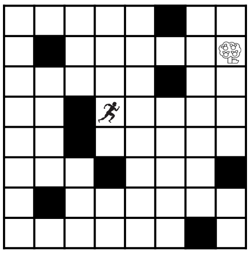
But du jeu

En groupe, faire une chaîne fermée avec les huit cartes de domino.

Règle du jeu

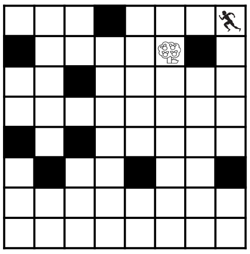
Chaque domino est basé sur *Les douze travaux d'Hercule*, et notamment le travail n°11 dans lequel Hercule doit dérober les pommes d'or du jardin d'Hespérides. Le côté gauche comporte un quadrillage avec des cases noirs que l'on ne peut pas traverser, le personnage d'Hercule (orienté) et le pommier du jardin d'Hespérides. Le côté droit comporte un programme de déplacement d'Hercule. L'objectif est d'associer un programme d'un domino avec un quadrillage d'un autre domino. Les huit dominos doivent créer une chaîne fermée.

Jeu niveau 1



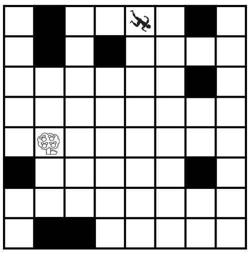
✈

- Démarre
- Avance de 3
- Tourne à droite
- Avance de 1
- Tourne à gauche
- Avance de 1
- Prends les pommes



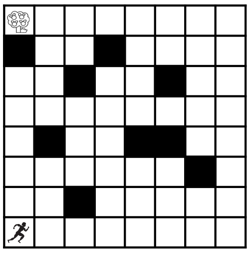
✷

- Démarre
- Avance de 2
- Tourne à gauche
- Tourne à gauche
- Tourne à gauche
- Tourne à gauche
- Avance de 2
- Prends les pommes



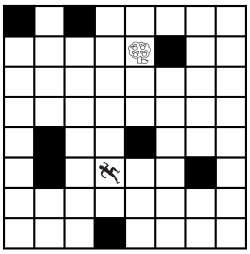
✪

- Démarre
- Avance de 2
- Tourne à gauche
- Avance de 1
- Prends les pommes



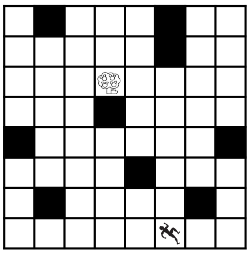
✔

- Démarre
- Avance de 3
- Tourne à gauche
- Tourne à droite
- Avance de 2
- Tourne à gauche
- Avance de 2
- Prends les pommes



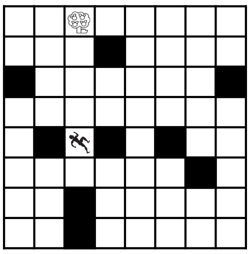
■

- Démarre
- Tourne à droite
- Avance de 4
- Tourne à gauche
- Avance de 3
- Tourne à gauche
- Avance de 1
- Prends les pommes



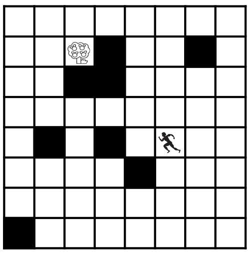
✦

- Démarre
- Avance de 6
- Tourne à droite
- Avance de 3
- Tourne à droite
- Avance de 2
- Tourne à gauche
- Prends les pommes



▲

- Démarre
- Avance de 1
- Tourne à gauche
- Avance de 2
- Tourne à droite
- Avance de 2
- Avance de 1
- Prends les pommes



✙

- Démarre
- Avance de 7
- Tourne à gauche
- Avance de 7
- Tourne à gauche
- Avance de 7
- Prends les pommes

Lorsque le groupe a réussi la mission, passer au niveau supérieur avec une autre série de dominos comportant des boucles de répétition.

Nombres
& Calculs

Séquence 4

Les nombres relatifs

Connaissances :

- Nombres décimaux négatifs, notion d'opposé.

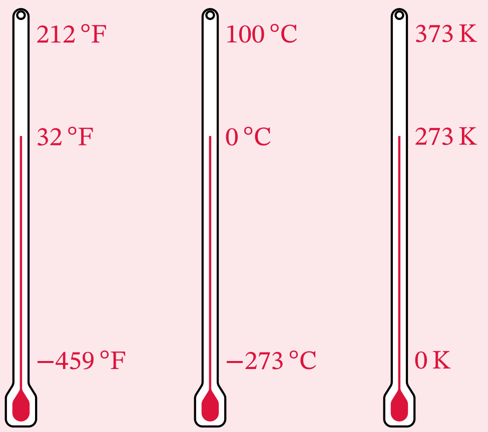
Compétences :

- Comparer, ranger, encadrer des nombres en écriture décimale.
- Se repérer sur une droite graduée.

Débat : les unités de mesure de température

Il existe trois échelles principales de température :

- l'échelle Farenheit, créée en 1724 par le scientifique allemand **Gabriel Farenheit** et dont la température de 96 °F correspond à la température du corps humain ;
- l'échelle Celsius, créée en 1741 par le physicien suédois **Anders Celsius** dans laquelle 0 °C correspond au point de fusion de l'eau et 100 °C à son point d'ébullition ;
- l'échelle de Kelvin, créée à la fin du XIXe siècle par **Lord Kelvin** pour laquelle le point 0 K correspond au zéro absolu, c'est-à-dire à la plus basse température existante.



Vidéo : **Celsius et Farenheit**, chaîne YouTube *Ma deuxième école*, épisode de la série *Culture G*.

Activité d'approche

Carrés magiques

Objectifs : résoudre un problème avec des nombres; montrer que, pour résoudre un problème, il est parfois nécessaire d'inventer de nouveaux nombres, des nombres.

Les règles du jeu

Un carré magique est un tableau carré tel que la somme pour chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale soit la même.

	2	7	6	→ 15
	9	5	1	→ 15
	4	3	8	→ 15
↙	↓	↓	↓	↘
15	15	15	15	15

À vous de jouer !

Compléter les carrés suivants pour les rendre magiques en commençant par déterminer la somme commune.

Somme = - - - - - - - -

8		
	5	
4		2

Somme = - - - - - - - -

18		24
	15	
		12

Somme = - - - - - - - -

2	7	
	3	
		4

Somme = - - - - - - - -

	1	4
	7	
10		

Source : « Une introduction des nombres relatifs en 5e », PLOT 45, APMEP 2014.

Trace écrite

1 Nombres relatifs

Définition

Un **nombre relatif** est un nombre positif (+) ou négatif (−). Le nombre sans son signe correspond à sa distance à l'origine 0.

Exemple

Les étages d'un immeuble sont repérés par rapport à un niveau 0 : le rez-de-chaussée. Les étages au-dessus sont les étages positifs et les étages en dessous (cave, garages) sont les étages négatifs.

Exemple

Le signe de $+3$ est $+$ et sa distance à l'origine 0 est 3.
Le signe de $-7,5$ est $-$ et sa distance à l'origine 0 est 7,5.

Définition

L'**opposé** d'un nombre relatif est le nombre de signe contraire et de même distance à 0.

Exemple

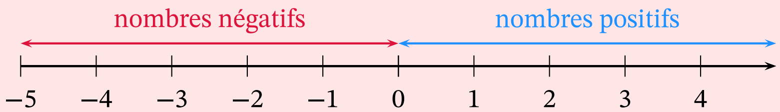
L'opposé de -3 est $+3$ et l'opposé de $+2,68$ est $-2,68$.
L'opposé de 0 rest 0.

De manière usuelle, on omet le signe « + » devant les nombres positifs.

2 Droite graduée et comparaison

Définition

Sur une droite graduée, on repère chaque point par un nombre : son abscisse.
D'un côté de l'origine 0, on place les nombres négatifs et de l'autre les nombres positifs.



Exemple

L'abscisse de A est -3, on note A(-3); l'abscisse de B est 0, l'abscisse de C est $+4$.

Propriété

- Deux nombres relatifs négatifs sont rangés dans l'ordre inverse de leur distance à zéro.
- Un nombre relatif négatif est inférieur à un nombre relatif positif.
- Deux nombres relatifs positifs sont rangés dans l'ordre de leur distance à zéro.

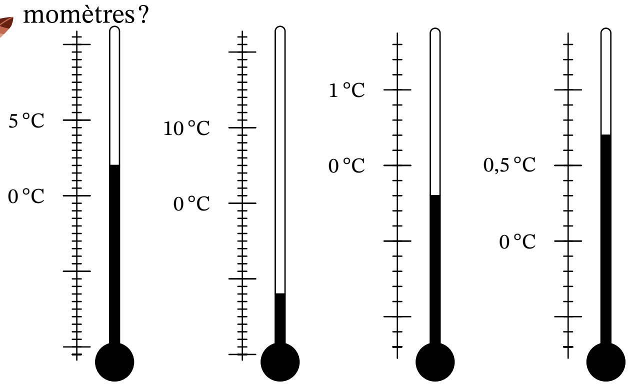
Exemple

$-4 < -2$ car $4 > 2$; $-4 < 2$ car $-4 < 0$ et $2 > 0$; $+4 > +2$ car $4 > 2$.

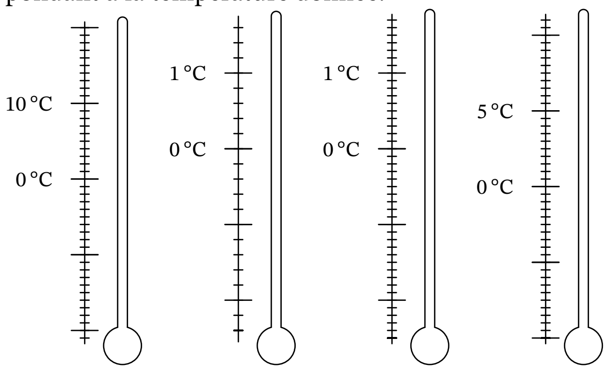
Les nombres négatifs sont rangés « dans le sens inverse » des nombres positifs.

Fiche d'exercices

1 Quelle est la température indiquée par chacun des thermomètres ?



2 Colorier les thermomètres jusqu'à la graduation correspondant à la température donnée.



-11 $\qquad$ $-1,2$ $\qquad$ $-0,5$ $\qquad$ 6

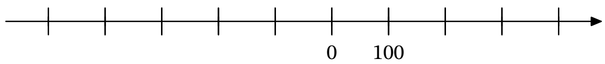
3 Entourer en bleu les nombres positifs et en rouge les nombres négatifs.

12	$+\pi$	$-\dfrac{12}{13}$	-17	0,001
$-54,2$	$\dfrac{1}{10}$	$-0,14$	$\dfrac{3}{7}$	100,01
12,6	$-1,18$	-3^2	$+0,1$	0

4 Compléter le tableau suivant :

Nombre	2,5		0	-5		7,1
Opposé		$-2,7$			1	

5 Reproduire l'axe chronologique ci-dessous puis placer le plus précisément possible ces évènements :



- T : temple de Jérusalem est détruit en 70 après J.-C.
- J : Jules César naît en 100 avant J.-C.
- C : Constantin crée Constantinople en 324
- A : Alexandre le Grand meurt en 324 avant J.-C.

6 Construire une droite graduée dont l'origine est au milieu du cahier et l'unité vaut 1 cm puis répondre aux questions suivantes.

1. Sur la droite graduée, placer les points :
   A(+8), B(−2), C(+3), D(−5) et E(+2).
2. En examinant la position des points A, B, C, D et E sur cette droite graduée, comparer :

   $+2$ et -2 $\qquad$ $+2$ et -5 $\qquad$ $+3$ et $+8$

   -2 et -5 $\qquad$ $+8$ et -2 $\qquad$ -5 et $+3$
3. Ranger dans l'ordre croissant : $+8; -2; 3; -5; +2$.

7 Compléter par <, > ou =.

1. $+5,34$ .... $+3,54$
2. $0,05$ 1
3. $-8,51$ .... $-8,5$
4. $11,9$ .... $+11,9$
5. $3,14$ .... $-1,732$
6. $-9,27$ .... $-9,272$
7. $+8,64$ .... $-8,64$
8. $-19,2$ .... $+9,2$
9. $-14,39$ .... $+14,4$
10. $-0,99$ .... $-0,909$

8 Ranger dans l'ordre croissant et simplifier.

1. $+3$; -7 ; -8 ; $+7$; $+14$; $+8$; -9
2. $+5,0$; $+2,7$; $-2,6$; $-3,1$; $+7,1$; $-8,3$; $-0,2$
3. $-10,6$; $+14,52$; $-8,31$; $-3,8$; $+4,2$; $+14,6$; $-8,3$

9 Chasser l'intrus dans chacun des cas suivants.

1. $-9,84 < -9,72 < -9,67 < -9,78 < -9,18$
2. $+1,5 < +1,51 < +1,499 < +1,54 < +1,55$
3. $-1\,002 > -1\,220 > -1\,022 > -1\,202 > -1\,222$

10 Donner tous les entiers relatifs compris entre :

1. $-2,3$ et $+5,7$.
2. -20 et $-14,8$.

Activité récréative

Nombres croisés

Compléter cette grille de nombres croisés à l'aide de chiffres et de signes « + » ou « − » grâce aux indications données.

	a	b	c	d	e	f
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Horizontalement

1. Valeur du plus grand chiffre.

   Opposé de l'entier compris entre $-12,2$ et $-13,9$.

   Les nombres négatifs sont précédés de ce signe.

2. Résultat du calcul $8 \times 20 - (12 + 28)$.

   Nombre entier compris entre $-1,8$ et $-0,2$.

3. Opposé de l'opposé de $+8$.

   Nombre entier supérieur à $73,01$ et inférieur $74,99$.

4. Sur une droite graduée de 3 en 3, je suis placé à trois graduations à gauche de l'origine.
   Signe de l'opposé d'un nombre positif.

5. Nombre entier le plus proche $-1,4$.

   Nombre entier inférieur à $-15,154$ et supérieur à $-16,98$.

6. Diviseur commun à 12 ; 24 et 33.

   Mon chiffre des centaines est le double de mon chiffre des dizaines qui est lui-même le double de mon chiffre des unités.

Verticalement

a. Résultat du calcul $9 \times (100 + 2)$.

   Nombre relatif inférieur à zéro et se trouvant à 5 unités du nombre $+2$.

b. J'ai la même distance à zéro que le nombre -2.

   Nombre opposé de la moitié de 2.

c. Le chiffre des unités est l'abscisse de l'origine et le chiffre des dizaines est le premier nombre entier positif non nul.

   Opposé de l'entier compris entre $-9,12$ et $-8,93$.

   Nombre relatif se situant après zéro et se trouvant à 11 unités du nombre -7.

d. Distance à zéro de l'opposé de $-\dfrac{33}{11}$.

   Opposé de $-42 \div 6$.

   Nombre négatif se trouvant à deux unités de l'origine.

e. Nombre se trouvant à 8 unités de -12.

   Distance à zéro de $+\dfrac{22}{2}$.

f. Opposé de $+1$.

   Nombre entier le plus proche et supérieur à $-6,98$.

Espace & géométrie

Séquence **5**

Repérage dans le plan

Connaissances :

- Abscisse, ordonnée.

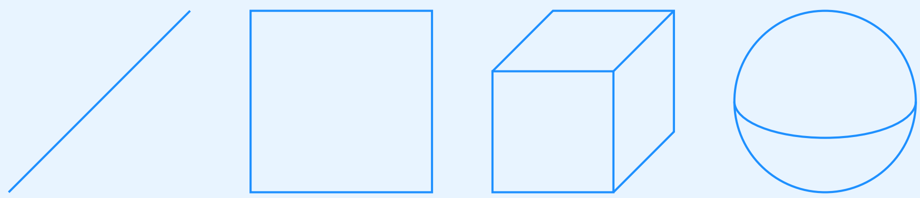
Compétences :

- (Se) repérer dans le plan muni d'un repère orthogonal.

Débat : repère, ou repaire ?

Ces deux mots ont la même origine, le nom latin *rapatrirare*, « rentrer chez soi, rentrer dans sa patrie ».
Repaire a assez vite pris le sens de « gîte d'animaux sauvages ». Au moyen-âge, l'écriture du nom n'était pas encore stabilisée et s'écrivait également **repère**, que l'on rattacha à tort au nom latin *reperire*, « retrouver ». Finalement, repère se spécialise pour désigner une marque permettant de retrouver quelque chose.

Revenons aux mathématiques, comment se repérer, selon le type d'objet où l'on se trouve :



Sur une droite ? Sur un plan ? Dans l'espace ? Sur une sphère ?

Vidéo : **C'est quoi un peu en 4D (et 1D) ?**, chaîne YouTube *Trash Bandicoot*.

Activité d'approche

Dessin gradué

Objectifs : créer un dessin en utilisant un repérage particulier.

Les règles du jeu

Pour découvrir le dessin, placer les points A, B, C… selon les indications du tableau ci-dessous (exemple : le point A est sur la première ligne et son abscisse est 8). Une fois les points placés, les relier en suivant les instructions données.

À vous de jouer !

Ligne	Point	Abs.
(1)	A	8
(1)	B	9
(1)	C	12
(2)	D	17
(2)	E	18
(2)	F	19
(2)	G	20
(2)	H	21
(2)	I	22
(2)	J	23
(3)	K	57

Ligne	Point	Abs.
(3)	L	58
(3)	M	59
(3)	N	63
(3)	O	64
(4)	P	23
(4)	Q	24
(4)	R	25
(4)	S	28
(4)	T	29
(5)	U	22
(5)	V	24

Ligne	Point	Abs.
(5)	W	26
(6)	X	36
(6)	Y	44
(7)	Z	6
(7)	A'	14
(7)	B'	18
(7)	C'	22
(8)	D'	15
(8)	E'	18
(8)	F'	27
(9)	G'	103

Ligne	Point	Abs.
(9)	H'	107
(9)	I'	108
(10)	J'	2
(10)	K'	4
(10)	L'	16
(11)	M'	50
(11)	N'	80
(12)	O'	32
(12)	P'	44
(13)	Q'	0,1
(13)	R'	0,2

Ligne	Point	Abs.
(13)	S'	0,3
(13)	T'	0,5
(13)	U'	0,6
(13)	V'	0,7
(13)	W'	0,8
(13)	X'	0,9
(14)	Y'	−15
(14)	Z'	−14
(14)	A"	−11
(14)	B"	−7
(14)	C"	−6

Tracer les lignes brisées suivantes :

FELMPKDACOTWVY

C'P'C"B"V'O'W'X'B'XA'

GB

HJNI

ST

QRUC'

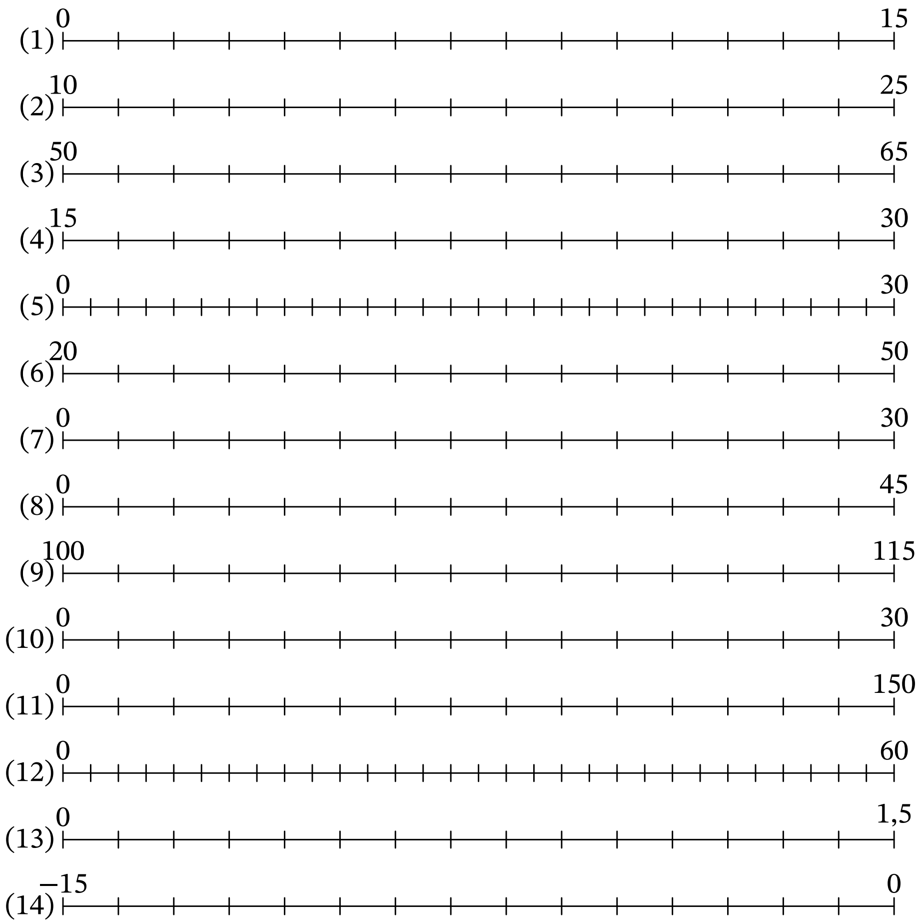
D'E'L'N'U'T'

F'I'H'

U'V'

B"A"S'M'G'K'R'Z'Y'Q'J'ZK

ZG'



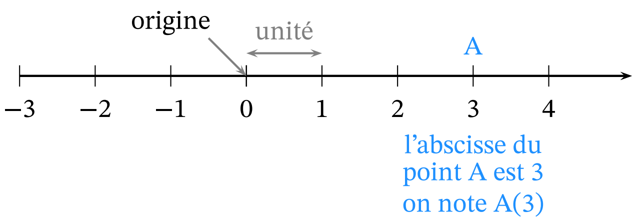
Activité inspirée de la brochure APMEP n°169 : « Jeux 7 ».

Trace écrite

1 La droite graduée (rappels)

Définition

Pour graduer une droite, il faut choisir une **origine** qui correspond au « 0 » et une **unité** qui sera reportée de manière régulière.
Sur une droite graduée, un point est repéré par son **abscisse**.



2 Repérer un point dans un repère du plan

Définition

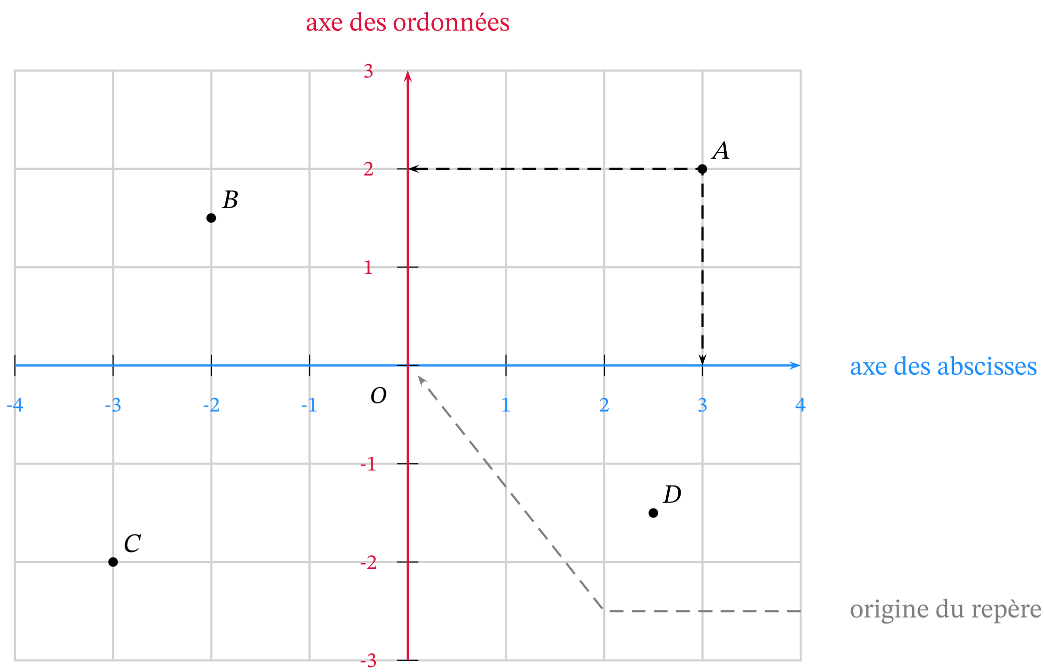
Un **repère orthogonal** est constitué de deux axes gradués perpendiculaires et sécants en O.

- O est l'**origine** du repère ;
- la droite horizontale est l'**axe des abscisses** ;
- la droite verticale est l'**axe des ordonnées**.

Propriété

Dans un repère, un point M est repéré par un couple $(x; y)$ appelé coordonnées du point M.
x est l'**abscisse** du point et y est l'**ordonnée**.

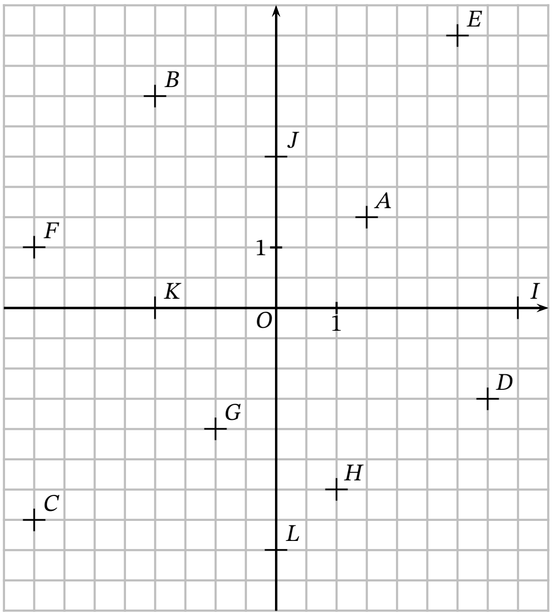
Exemple



Les coordonnées des points O, A, B, C et D sont :
$O(0\,;0)$ $A(3\,;2)$ $B(-2\,;1,5)$ $C(-3\,;-2)$ $D(2,5\,;-1,5)$

Fiche d'exercices

1 Lire puis écrire les coordonnées des points A à L.



2 On considère les points de coordonnées :

$M(-9\,;-5)$ $N(-4\,;0)$ $O'(2,5\,;7)$ $P(5\,;3)$

$Q(-1\,;-1)$ $R(2\,;-3)$ $S(5\,;-2)$ $T(-6,5\,;-2)$

$U(-1\,;-4)$ $V(2\,;0)$ $W(-6,5\,;4)$ $X(-9\,,0)$

$Y(-4\,;-5)$ $Z(-6,5\,;-1)$

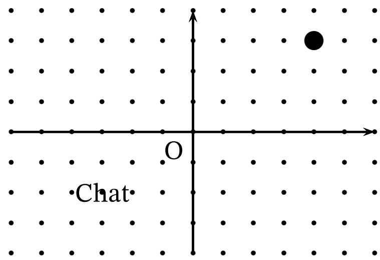
1. Créer un repère orthogonal en prenant 1 cm pour une unité qui puisse contenir tous les points.
2. Placer les points dans le repère.
3. Relier dans l'ordre les points suivants :
   - $W-X-M-Y-N-W-O'-P-S-Y$.
   - $U-Q-V-R$ • $X-N-P$.
   - Tracer le cercle de centre T passant par Z.

   Tobi reconnaît un dessin familier. Quel est-il ?

3 Dans un repère orthogonal d'origine O et d'unité 1 cm.

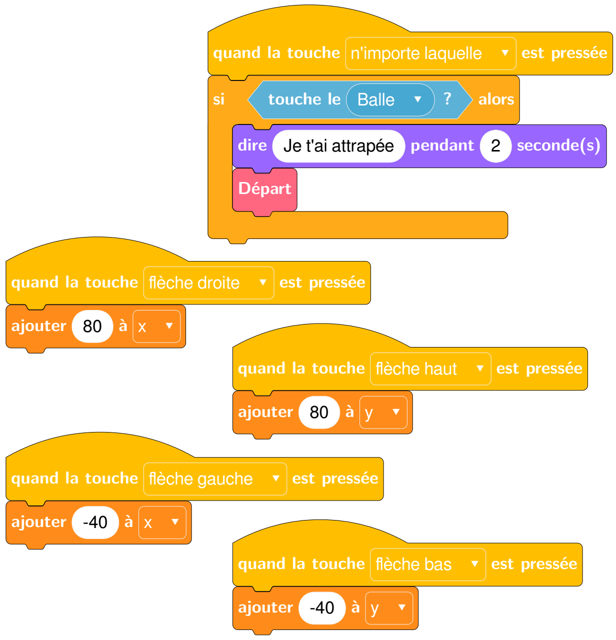
1. Placer le point A de coordonnées $(3,5\,;1,5)$.
2. Placer le point B symétrique du point A par rapport à l'axe des abscisses. Quelles sont ses coordonnées ?
3. Placer le point C symétrique de B par rapport à l'axe des ordonnées. Quelles sont ses coordonnées ?
4. Placer le point D symétrique de C par rapport à l'axe des abscisses. Quelles sont ses coordonnées ?
5. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

4 L'image suivante représente la position obtenue au déclenchement du bloc « Départ » d'un programme.
L'arrière-plan est constitué de points espacés de 40 unités. Le chat a pour coordonnées $(-120\,;-80)$.
Le but du jeu est de positionner le chat sur la balle représentée par le petit disque.



1. Quelles sont les coordonnées du centre de la balle représentée dans cette position ?
2. Dans cette question, le chat est dans la position obtenue au déclenchement du bloc départ.

   Voici le script du lutin « chat » qui se déplace.



   (a) Expliquer pourquoi le chat ne revient pas à sa position de départ si le joueur appuie sur la touche → puis sur la touche ←.

   (b) Le joueur appuie sur la succession de touches suivante : → → ↑ ← ↓. Quelles sont les coordonnées x et y du chat après ce déplacement ?.

   (c) Parmi les propositions ci-dessous, laquelle permet au chat d'atteindre la balle ?

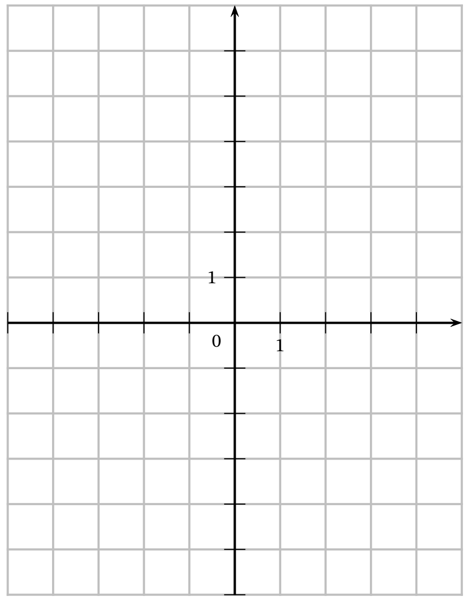
déplacement 1	déplacement 2	déplacement 3
→→→→→→→↑↑↑↑↑	→→→↑↑↑→↓←	↑→↑→↑→→↓↓

3. Que se passe-t-il quand le chat atteint la balle ?

Activité récréative

De curieux dessins

Dessin



1. Placer ces points dans le repérage ci-contre.

A(−3 ;2)	G(0 ;6)	M(1 ;−2)	S(1 ;−1)
B(−3 ;−5)	H(−4 ;2)	N(1 ;−5)	T(1 ;1)
C(3 ;−5)	I(−4 ;1)	O(−2 ;0)	U(2 ;1)
D(3 ;2)	J(0 ;5)	P(−2 ;2)	V(2 ;−1)
E(4 ;1)	K(−1 ;−5)	Q(−1 ;2)	
F(4 ;2)	L(−1 ;−2)	R(−1 ;0)	

2. Relier les points suivants :

   ABCDEFGHIJD

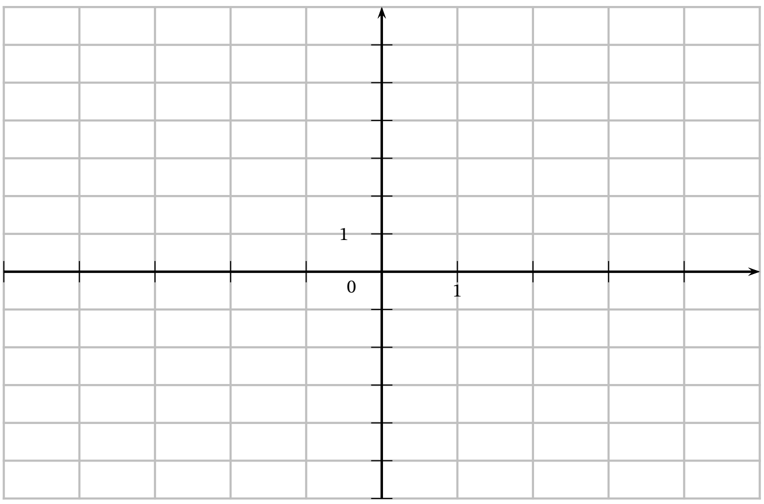
   KLMN

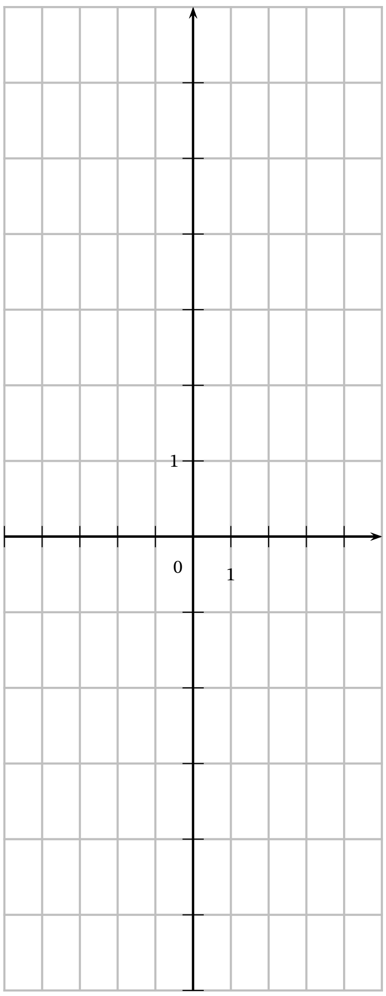
   OPQRO

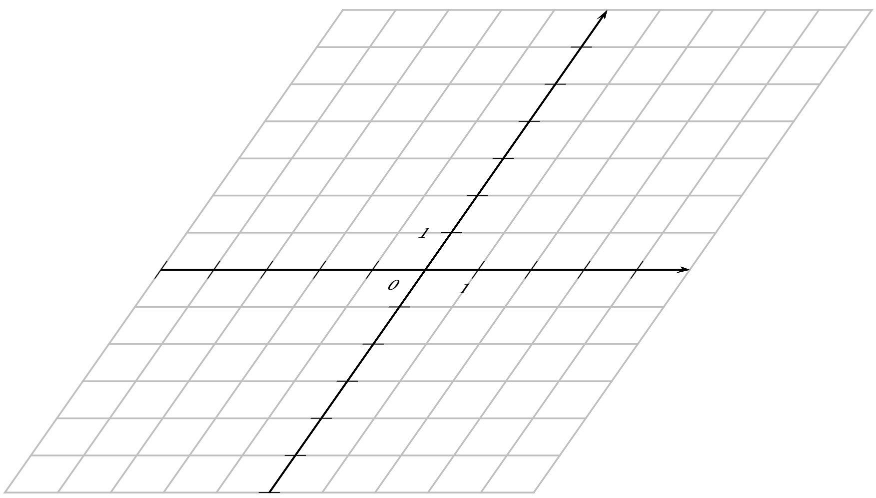
   STUVS

Déformations

Tracer le dessin dans les repères suivants : que se passe-t-il ?







Organisation &
gestion de données

Séquence **6**

Effectifs, fréquences et moyenne

Connaissances :

- Effectifs, fréquences.
- Indicateur de position : moyenne.

Compétences :

- Calculer des effectifs, des fréquences.
- Calculer et interpréter des indicateurs de position
- Recueillir des données, les organiser.
- Lire et interpréter des données sous forme de données brutes, de tableau, de diagramme (diagramme en bâtons, diagramme circulaire, histogramme).
- Utiliser un tableur-grapheur pour présenter des données sous la forme d'un tableau ou d'un diagramme.

Débat : les statistiques

Les premiers textes écrits retrouvés sur les **statistiques** étaient des recensements de bétail. On attribue souvent l'introduction du terme **statistique** au professeur *Achenwall*, qui aurait, en 1746, créé le mot *Statistik*, dérivé de l'allemand *Staatskunde*.
Même si cette branche des mathématiques est récente, elle fait partie des notions les plus utilisées actuellement et les plus gros consommateurs de statistiques sont les assureurs (risques d'accidents, de maladie des assurés), les médecins (épidémiologie), les démographes (populations et leur dynamique), les économistes (emploi, conjoncture économique), les météorologues...

quartiles *mode* *histogramme* *médiane* *écart-type* *moyenne* *fréquence* *maximum* *minimum*

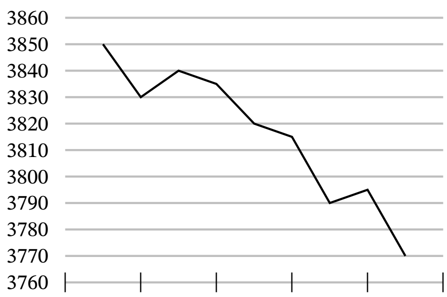
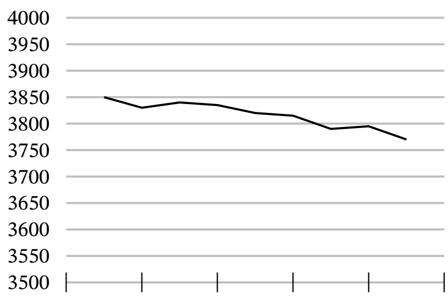
Vidéo : **Chocolat, corrélation et moustache de chat**, chaîne YouTube *La statistique expliquée à mon chat*.

Activité d'approche

Ce que veulent nous faire croire les statistiques

Objectifs : avoir un regard critique envers les chiffres et les informations que l'on nous donne.

Pourquoi étudier les statistiques ? Entre autres pour savoir démêler le vrai du faux dans les publicités, les journaux…
Pour chaque ligne du tableau suivant, discuter de ce que vous pouvez déduire immédiatement des données brutes que l'on vous donne, puis étudier ce que l'on pourrait ajouter dans la colonne de droite.
Cela change-t-il votre opinion ?

	Ce qu'on vous dit	Ce qu'on oublie de vous dire
1	Au loto, 100 % des gagnants ont tenté leur chance.	Le pourcentage de gagnants par rapport au nombre total de joueurs.
2	M. Truc a largement remporté les élections avec 60 % des suffrages.	Le taux d'abstention a été de 50 %.
4	En 1995, au Brésil, 16 % des enfants étaient au travail et au Guatemala : 15,9 %.	Le Brésil compte 170 millions d'habitants et le Guatemala 12,7 millions d'habitants.
5	La température annuelle moyenne de Moscou est de 5 degrés. Que prendrez-vous dans vos valises ?	Quel mois partez-vous ?
6	Il y a en France environ 200 000 licenciés à la Fédération française de tir à l'arc. En Chine, il y en a 1 500 000. C'est un sport beaucoup plus pratiqué en Chine qu'en France.	La France compte 60 000 000 habitants et la Chine 1 200 000 000 habitants.
7	C'est un vendredi noir à la Bourse ! Forte chute des valeurs ! 	Et si on prenait une autre échelle ? 

Conclusion : ....

....

....

Trace écrite

1 Effectifs et fréquences

On demande aux élèves d'une classe de 5^{e} quel est son loisir principal et combien de temps il passe à le pratiquer. On obtient les résultats suivants arrondis à l'heure près :

Judo 6	Gym 4	Hand-ball 5	Foot 4	Tennis 2	Karaté 2	Foot 1
Gym 10	Hand-ball 5	Natation 2	Lego 3	Badminton 14	Volley 8	Danse 2
Taekwondo 7	Lecture 3	Rugby 2	Danse 2	Courir 6	Taekwondo 6	Musique 7
Jeux 3	Piano 4	Vidéos 10	Dessiner 10	Lecture 20	Jeux 26	Athlé 10

Définition

- L'**effectif** d'une donnée est le nombre de fois qu'elle apparaît ; la somme des effectifs s'appelle l'**effectif total**.
- La **fréquence** d'une donnée est le quotient de l'effectif de cette donnée par l'effectif total. Elle s'exprime par un nombre décimal compris entre 0 et 1 ou en pourcentage.

Exemple

Tableau des effectifs et des fréquences en pourcentages.

Durée(h)	1	2	3	4	5	6	7	8	10	14	20	26	Total
Effectif	1	6	3	3	2	3	2	1	4	1	1	1	28
Fréquence (%)	3,6	21,4	10,7	10,7	7,1	10,7	7,1	3,6	14,3	3,6	3,6	3,6	100

On peut également faire un regroupement par classes, ce qui rend l'étude moins précise, mais ce qui permet d'avoir une vision plus globale.

Exemple

Tableau des effectifs par classes d'amplitude 5 heures.

Durée(h)	[0 ; 5[	[5 ; 10[	[10 ; 15[	[15 ; 20[	[20 ; 25[	[25 ; 30[
Effectif	13	8	5	0	1	1
Fréquence (%)	46,4	28,6	17,9	0	3,6	3,6

2 Moyenne arithmétique

Définition

La **moyenne** d'une série est égale au quotient de la somme des données par l'effectif total.

Méthode : Calcul d'une moyenne pondérée

Pour obtenir la somme des données dans le cas où les données sont pondérées (effectif $\neq 1$) :

- on multiplie chaque effectif par sa donnée, puis on fait la somme ;
- lorsque les données sont présentées par classes, on choisit le centre de la classe comme donnée que l'on multiplie par l'effectif, puis on fait la somme.

Puis on divise cette somme par l'effectif total.

Exemple

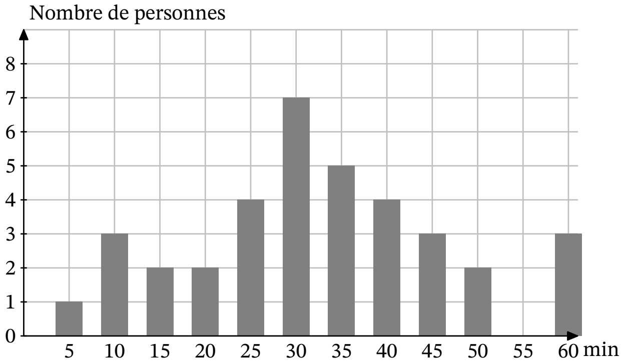
Quel est le temps moyen passé sur le loisir principal de la classe de 5^{e} ?
Faire le calcul avec le tableau simple ($\overline{m}$) et le tableau par classes ($\overline{m_c}$).

$$\overline{m_c} = \frac{15 \times 2,5 + 9 \times 7,5 + 1 \times 12,5 + 0 \times 17,5 + 0 \times 22,5 + 1 \times 27,5}{26} = \frac{145}{26} \approx 5,6.$$

$$\overline{m} = \frac{1 \times 1 + 6 \times 2 + 3 \times 3 + 3 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times 6 + 2 \times 7 + 1 \times 8 + 3 \times 10 + 1 \times 14 + 1 \times 30}{26} = \frac{158}{26} \approx 6,1.$$

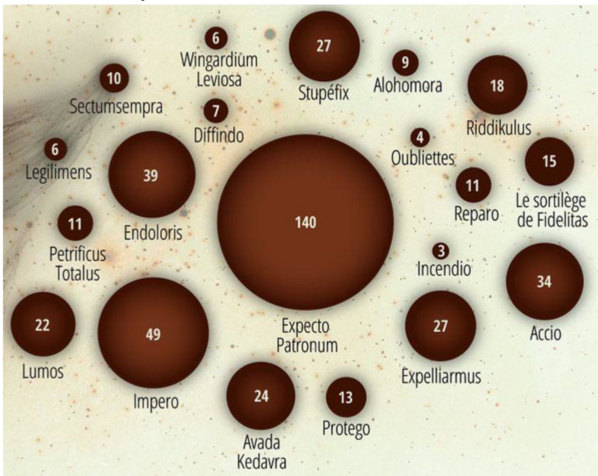
Fiche d'exercices

1 Le diagramme en bâtons ci-dessous représente le temps de trajet journalier en minutes de 36 personnes travaillant dans l'entreprise Kadubol.



1. (a) Construire le tableau d'effectifs et de fréquences récapitulant toutes ces valeurs.
   (b) Calculer la moyenne
2. (a) Construire le tableau des effectifs en les regroupant par classes d'amplitude 15 minutes en commençant par la classe [5 ; 20 [.
   (b) Calculer la moyenne en utilisant la répartition par classes. Le résultat obtenu est-il le même que lors du calcul précédent ? Pourquoi ?

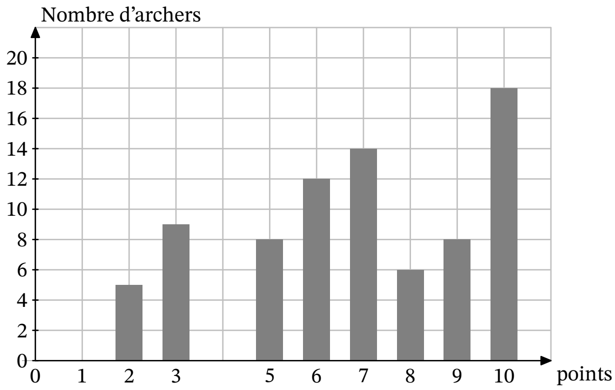
2 L'infographie suivante donne le nombre de fois que des sortilèges de magie apparaissent dans les sept livres de la série *Harry Potter*.



Source : Harry Potter, les nombres d'or de la saga, Le Figaro 2017

1. Comment sont représentées les données dans cette infographie ?
2. Représenter les données dans un tableau en notant uniquement les sortilèges cités plus de 20 fois.
3. Construire un diagramme en bâtons pour les valeurs de ce tableau.

3 Quatre-vingts archers d'un club de tir à l'arc A ont participé à un championnat. Le nombre de points obtenus par chaque archer du club est donné par le diagramme ci-dessous.



1. (a) Combien d'archers ont gagné exactement six points lors de ce championnat ?
   (b) Combien d'archers ont gagné trois points ou plus lors de ce championnat ?
2. Le club de tir à l'arc B a aussi participé à ce championnat. Voici quelques données :
   - Le score moyen des archers lors du championnat est 7 points.
   - Le score moyen des dix meilleurs archers lors du championnat est 9,9 points.

   (a) Comparer les résultats des deux clubs selon leurs scores moyens.
   (b) Comparer les résultats des deux clubs selon les scores de leurs dix meilleurs archers.

4 Le tableau suivant résume les résultats obtenus par une classe lors d'une évaluation.

N	3	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	17	18
E	1	2	1	3	3	5	6	4	2	1	2	2	1

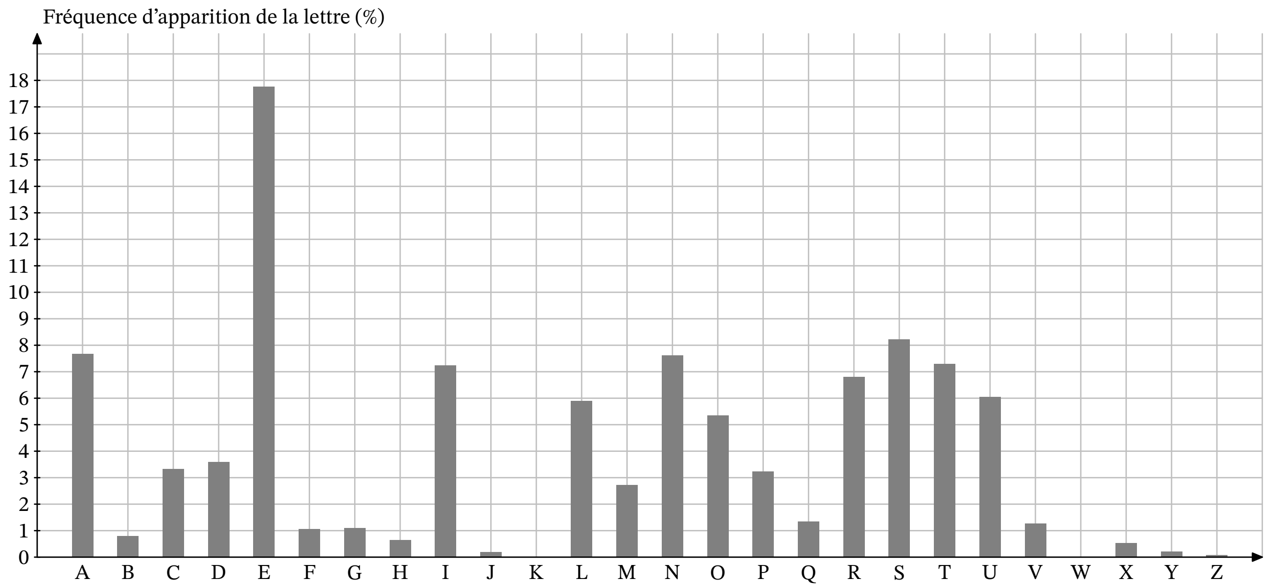
1. Combien y a-t-il d'élèves dans cette classe ?
2. Compléter le tableau par les fréquences.
3. Quel est le pourcentage d'élèves ayant obtenu une note inférieure ou égale à 8 ?
4. Déterminer la moyenne de la série de notes.
5. Cette évaluation était la quatrième de la période.
   Toutes les évaluations ont le même coefficient et jusqu'alors Bastien avait 9 de moyenne ; après ce devoir, il a 9,5 de moyenne. Quelle note a-t-il obtenue à ce devoir ?

Activité récréative

Cryptographie

La cryptographie est l'ensemble des techniques permettant de protéger une communication au moyen d'un code graphique secret. Parmi elles, on retrouve la méthode de substitution monoalphabétique : les lettres du texte à coder sont remplacées par d'autres lettres tel que deux lettres différentes sont codées de façons différentes et que la même lettre est toujours codée de la même façon.

Le savant arabe *Al-Kindi* (Abu Yūsuf Ya'qūb ibn'Ishāq as-Sabbāh al-Kindī) met au point, au 9e siècle, une technique appelée analyse des fréquences afin de déchiffrer les messages secrets. Elle repose sur la comparaison entre les fréquences d'apparition des lettres dans un message crypté à partir d'une langue connue avec la fréquence d'apparition moyenne des lettres dans cette langue.
En français, par exemple, on a la répartition suivante représentée par un diagramme en bâtons, basée sur l'analyse de milliers de romans.



Ainsi, il y a des chances que la lettre la plus fréquente du message crypté soit la traduction de la lettre E, très fréquente en français. Les lettres très peu fréquentes ou absentes dans un message auront tendance à être les traductions de K ou W, par exemple.

Calculer la fréquence de chaque lettre du message codé ci-dessous (on pourra représenter les résultats dans un tableau). En observant les correspondances entre le diagramme en bâton et votre tableau, décoder le message.

BKSMAMZCZMTFY KF OKATOCFZ ZHKY CYZIAMKIYKUKFZ AK UKYYCLK
ATOK RTIY CRKP BHCFADM IF XCY OKAMYMB RKHY SC YTSIZMTF
BMFCSK OCFY AKZZK CAZMRMZK UCZDKUCZMGIK VHCRT

Pour retrouver la correspondance de chaque lettre, on pourra tout d'abord retrouver la lettre la plus fréquente qui correspond à un E, puis chercher les mots courts de 2 lettres par exemple.

Spoiler : l'un des mots du message décrypté est « message ».

Nombres
& Calculs

Séquence **7**

Multiples et diviseurs

Connaissances :

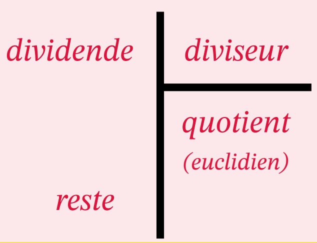
- Multiples et diviseurs.
- Critères de divisibilité par 2, 3, 5, 9.
- Division euclidienne.

Compétences :

- Déterminer si un entier est ou n'est pas multiple ou diviseur d'un autre entier.
- Utiliser un critère de divisibilité par 2, 3, 5, 9, 10.
- Modéliser et résoudre des problèmes mettant en jeu la divisibilité.

Débat : la division euclidienne

Le nom de **division euclidienne** est un hommage rendu à *Euclide* (300 av. J.-C.), mathématicien grec qui en explique le principe par soustractions successives dans son œuvre *Les éléments*. Mais elle apparaît très tôt dans l'histoire des mathématiques, par exemple dans les mathématiques égyptiennes, babyloniennes et chinoises.



Vidéo : **Critères de divisibilité**, chaîne YouTube *Rapémathiques* d'*A'Rieka*.

Activité d'approche

Les multiplications incomplètes

Objectifs : calculer mentalement des multiplications et des divisions ; résoudre un problème de calcul mental ; compléter un tableau à double entrée.

Compléter ces tables de multiplication dont on a effacé le contenu de certaines cases. Les nombres sont tous strictement positifs, il ne peut pas y avoir deux fois le même nombre sur une même colonne ou une même ligne.

Piste verte

×		
		24
	25	30

×		7
		21
4	8	

×	6	
	24	32
	36	

×	3	
		18
5		45

Piste bleue

×	2		
		9	
	8		
	16		56

×	2		
4		16	
			35
	18		45

×		7	
	12		32
			64
		63	72

Piste rouge

×		3	
	21		
		18	
		6	4

×			7
2			
	72	54	
	40		35

×			
	18		15
		64	
		32	

Piste noire

×			10
	20	8	
	35		70
			100

×			
		45	
	28		
	44		99

×		13	
		65	
	42		49
	72		84

Trace écrite

1 Multiples et diviseurs

Rappel : effectuer une division euclidienne d'un **dividende** a par un **diviseur** b, c'est trouver deux entiers appelés **quotient** q et **reste** r tels que $a = b \times q + r$ où $r < b$.
Dans l'exemple ci-contre, on peut écrire : $123 = 5 \times 24 + 3$.

dividende

$$\begin{array}{r|l} 1\ 2\ 3 & 5 \longleftarrow \text{diviseur} \\ \cline{2-2} -\ 1\ 0 & 2\ 4 \longleftarrow \text{quotient} \\ \cline{1-1} 2\ 3 & \\ -\ 2\ 0 & \\ \cline{1-1} 3 & \longleftarrow \text{reste} \end{array}$$

Définition

a et b sont deux nombres entiers. Lorsque le reste de la division de a par b est égal à 0, on dit que a est un **multiple** de b, ou que b est un **diviseur** de a, ou que a est **divisible** par b.

Exemple

- 15 est multiple de 3 car $15 = 3 \times 5 + 0$, on peut aussi dire que 3 est un diviseur de 15, ou que 15 est divisible par 3.
- 17 n'est pas un multiple de 3 car $17 = 3 \times 5 + 2$.
- Les diviseurs de 24 sont 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 et 24.
- Il y a une infinité de multiples de 18, comme par exemple 18 ; 36 ; 54 ; 180...

2 Critères de divisibilité

Propriété

- un nombre est divisible par 2 s'il se termine par 0 ; 2 ; 4 ; 6 ou 8 ;
- un nombre est divisible par 5 s'il se termine par 0 ou 5 ;
- un nombre est divisible par 10 s'il se termine par 0 ;
- un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est un multiple de 3 ;
- un nombre est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est un multiple de 9.

Exemple

- $2 + 5 + 2 = 9$ est multiple de 3 donc, 252 est divisible par 3.
  $2 + 5 + 3 = 10$ n'est pas multiple de 3 donc, 253 n'est pas divisible par 3.
- $5 + 2 + 3 + 6 + 2 = 18$ est multiple de 9 donc, 52 362 est divisible par 9, et donc par 3.
  $5 + 2 + 3 + 6 + 3 = 19$ n'est pas multiple de 9 donc, 52 363 n'est pas divisible par 9.

Remarque : pour savoir si un nombre est divisible par 3, on peut calculer la somme des chiffres du nombre obtenu jusqu'à ce que l'on trouve un seul chiffre.
pour 563 387 981, on calcule : $5 + 6 + 3 + 3 + 8 + 7 + 9 + 8 + 1 = 50$.
Puis on calcule $5 + 0 = 5$. 5 n'est pas divisible par 3 donc, 563 387 981 n'est pas divisible par 3.

Fiche d'exercices

1 Effectuer les divisions euclidiennes suivantes :
307 par 7 et 13 758 par 25.

2 Résoudre les problèmes suivants :

1. 6 798 supporters d'un club de rugby doivent faire un déplacement en car pour soutenir leur équipe. Chaque car dispose de 55 places.
   Combien de cars faut-il réserver ?
2. Des stylos sont conditionnés par boîte de 40. Imane a 2 647 stylos.
   Combien lui en manque-t-il pour avoir des boîtes entièrement remplies ?
3. Trois amis participent à une chasse au trésor et trouvent 1 419 pièces en chocolat.
   Si le partage est équitable, combien de pièces en chocolat auront-ils chacun ?
   Julie arrive et leur rappelle que c'est elle qui leur a prêté sa boussole. Elle exige donc d'avoir la même part que chacun des trois autres plus les pièces restantes. Combien de pièces recevra-t-elle ?

3 Trouver tous les diviseurs des nombres suivants :

1. 14
2. 40
3. 48
4. 2 037

4 Écrire :

1. La liste des dix premiers multiples de 6.
2. Cinq multiples de 11.
3. Tous les multiples de 13 inférieurs à 80.
4. Le plus grand multiple de 12 inférieur à 75.
5. Le plus grand multiple de 36 inférieur à 100.
6. Le plus petit multiple de 9 supérieur à 1 200.
7. Le plus petit multiple de 14 supérieur à 710 ?
8. Le plus petit et le plus grand diviseur de 199.

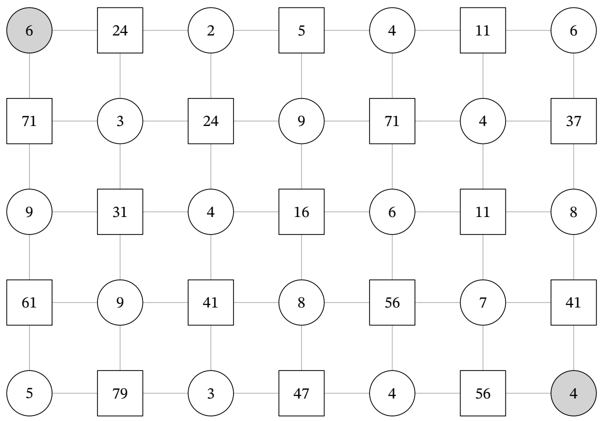
5 Je suis un nombre impair à deux chiffres sans 2 dans mon écriture. Je ne suis pas divisible par 5 mais je suis un multiple de 9.
Qui suis-je ?

6 Les nombres 30 ; 27 ; 246 ; 325 ; 4 238 et 6 139 sont-ils divisibles par 2 ? par 3 ? par 5 ? par 9 ?

7 Relier les deux cases grisées en suivant un chemin constitué uniquement de multiples de 6.

	516	679	611	538	901	851
741	750	776	504	762	624	553
334	864	432	612	812	816	642
885	809	808	777	436	577	

8 Colorier un chemin qui permet de relier les deux cases grisées en suivant les lignes sachant que le nombre inscrit dans un carré vers lequel on se déplace doit être multiple du nombre inscrit dans le disque d'où l'on vient et que le nombre inscrit dans un disque vers lequel on se déplace doit être diviseur du nombre inscrit dans le carré d'où l'on vient.



9 Répondre par vrai ou faux en justifiant.

1. Tout nombre divisible par 3 est divisible par 9.
2. Tout nombre divisible par 9 est divisible par 3.
3. Tout nombre divisible par 2 et 3 est divisible par 5.
4. Tout nombre dont le chiffre des unités est 2 est divisible par 2.
5. Tout nombre dont le chiffre des unités est 3 est divisible par 3.

Activité récréative

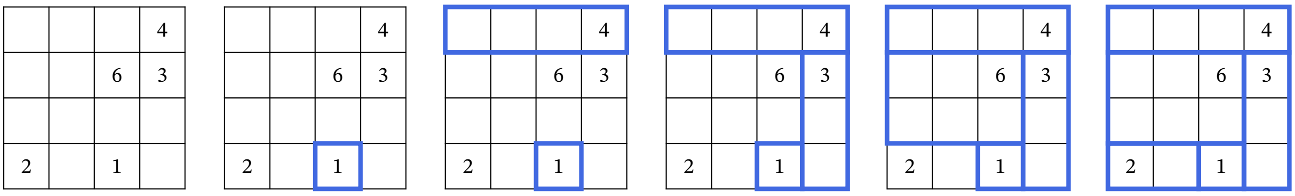
Shikaku

Le **Shikaku** est un casse-tête japonais. Son nom vient du Japonais et signifie « diviser en carrés ».
Le but de ce jeu est de diviser une grille donnée en plusieurs rectangles.

Règle du jeu

- Paver la grille à l'aide de rectangles.
- Chaque rectangle doit contenir un nombre et un seul.
- Le nombre contenu dans un rectangle indique combien de cases le constituent.

Exemple



grille d'origine — un rectangle à 1 case est forcément un carré de côté 1 — un rectangle à 4 cases est un carré de côté 2 ou un rectangle de côtés 1 et 4 — un rectangle à 3 cases est un rectangle de côtés 1 et 3 — un rectangle à 6 cases est un rectangle de côtés 2 et 3 ou de côtés 1 et 6 — un rectangle à 2 cases est un rectangle de côtés 1 et 2

Let's go !!!

2	2	4	
2	3		
			3

3			4	
		2		
			4	
	2	2	2	
2		4		

4	5			3	
		3			
			6		
				4	
			2	2	
2		5			

						2
			6	2	2	2
	2		4			
6		3				
	3				4	
			4		2	2
	2			3		

2								
2		6			3	2	4	
			2				2	
			2		2			
5		6			2	3	4	
	7		3					
							6	
				9				
	3			4			2	

Espace &
géométrie

Séquence **8**

Somme des angles d'un triangle

Connaissances :

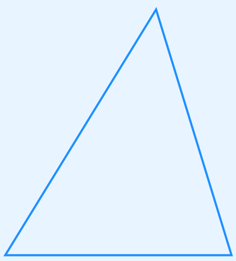
- Somme des angles d'un triangle.

Compétences :

- Mener des raisonnements et s'initier à la démonstration en utilisant les propriétés d'une figure.

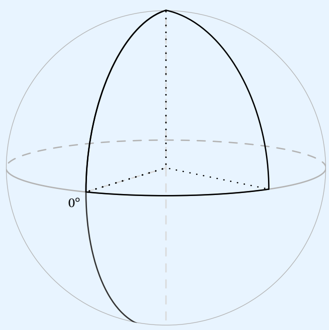
Débat : géométrie euclidienne VS géométrie sphérique

« Un ours part de sa caverne et parcourt 10 km vers le sud, puis 10 km vers l'est et enfin 10 km vers le nord. Il se retrouve alors juste devant l'entrée de sa caverne. Quelle est la couleur de l'ours ? »
La **géométrie sphérique** n'a pas les même propriétés que la **géométrie euclidienne** utilisée au collège et au lycée. Cette dernière est la géométrie initiée par *Euclide*, mathématicien grec né vers 330 av. J.-C., il est connu pour avoir recensé une grande partie des mathématiques de l'époque dans ses *Éléments* : une série de treize livres utilisée pendant près de 2 000 ans qui fut l'ouvrage le plus édité au monde après la Bible.



Un triangle « sphérique » $\Longrightarrow$

$\Longleftarrow$ Un triangle « plat »



Vidéo : **Calculer la mesure du troisième angle d'un triangle**, chaîne YouTube *Rapémathiques* d'*A'Rieka*.

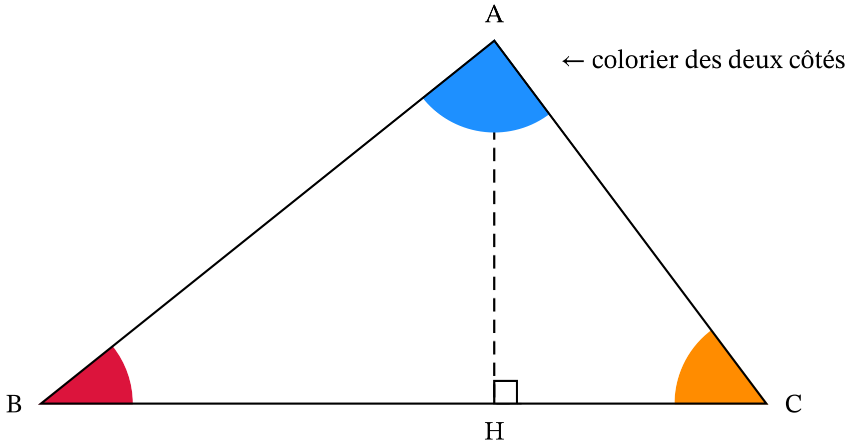
Activité d'approche

Des angles mouvants

Objectifs : faire découvrir la propriété de la somme des angles d'un triangle.

Construction du triangle

1. Sur une feuille, tracer un triangle ABC quelconque puis le découper.
2. Colorier les trois angles de trois couleurs différentes des deux côtés du triangle (une couleur par angle).



3. Tracer la hauteur issue du sommet A et nommer le pied de cette hauteur H.
4. Plier le triangle ABC de manière à placer le point A sur le point H.
5. Plier le triangle ABC de manière à placer le point B sur le point H.
6. Plier le triangle ABC de manière à placer le point C sur le point H.

Observations

7. Que forment les trois angles obtenus en H ?

 ----

8. Formuler cette observation en utilisant les angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.

 ----

9. Formuler cette observation par une phrase simple et générale sans utiliser le nom des angles.

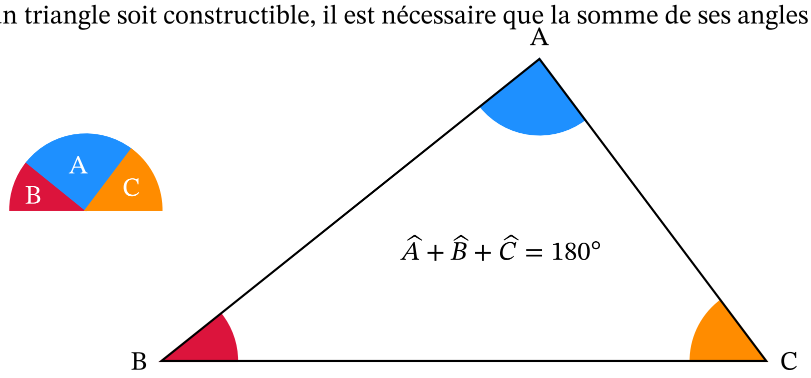
Trace écrite

1 Somme des angles dans un triangle

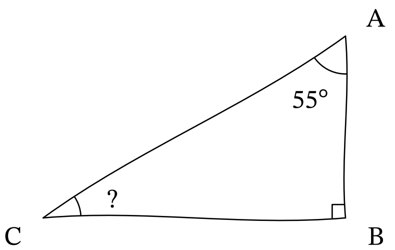
Propriété

Dans un triangle, la somme de la mesure de ses trois angles est égale à 180°.

Par conséquent, pour qu'un triangle soit constructible, il est nécessaire que la somme de ses angles fasse 180°.



Exemple

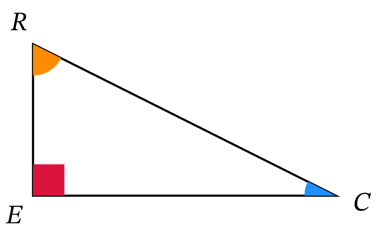


Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{BCA}$?

D'après le codage, l'angle $\widehat{ABC}$ est droit, donc $\widehat{ABC}=90°$.

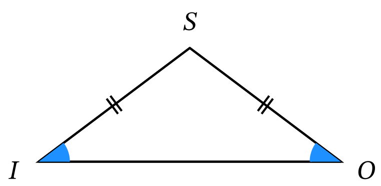
$$\begin{aligned}\widehat{CBA}+\widehat{BAC}+\widehat{ACB}&=180°\\90°+55°+\widehat{ACB}&=180°\\145°+\widehat{ACB}&=180°\\\widehat{ACB}&=180°-145°\\\widehat{ACB}&=35°\end{aligned}$$

2 Triangles particuliers



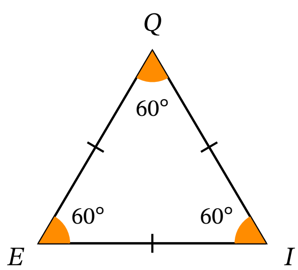
Triangle rectangle

La somme des deux angles aigus est égale à 90°.



Triangle isocèle

Les angles de la base ont la même mesure. Si le triangle est isocèle et rectangle, les angles de la base mesurent 45°.



Triangle équilatéral

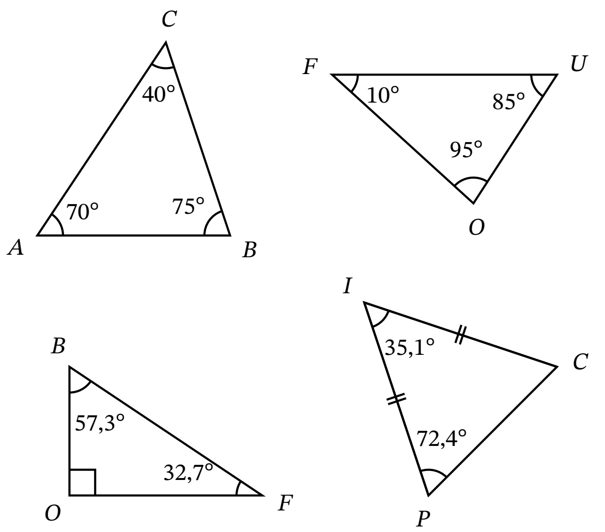
Tous les angles mesurent 60°.

Fiche d'exercices

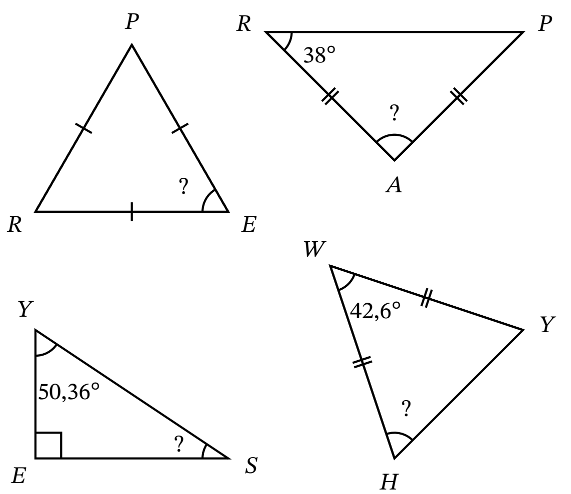
1 Pour chaque cas, calculer la mesure de l'angle manquant dans le triangle *RIM*.

$\widehat{RIM}$	$\widehat{IMR}$	$\widehat{MRI}$
124°	18°	
71°		29°
	98,1°	59,6°
49,5°		113°

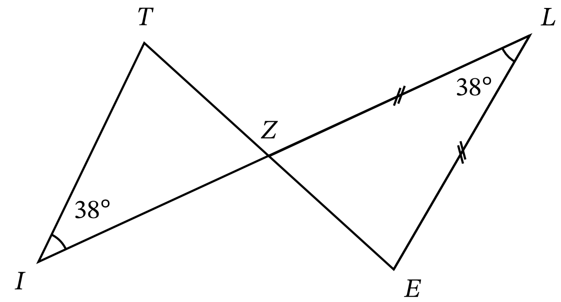
2 Les figures suivantes ne sont pas en vraie grandeur. Pour chacune d'elles, indiquer si elles sont constructibles ou non en justifiant la réponse.



3 Calculer, pour chaque triangle, la mesure de l'angle marqué d'un point d'interrogation.

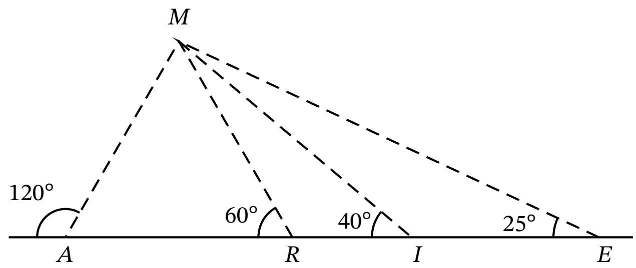


4 On considère le polygone croisé *ITZEL* suivant :

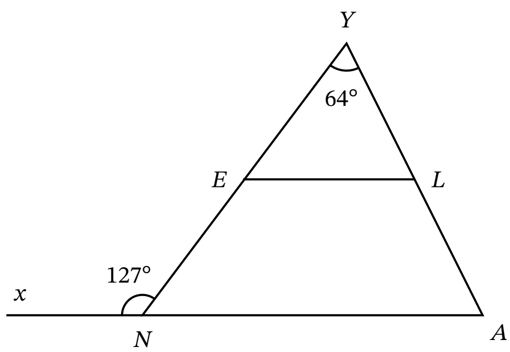


1. Démontrer que les droites (*TI*) et (*LE*) sont parallèles entre elles.
2. Démontrer que les angles $\widehat{LEZ}$ et $\widehat{LZE}$ ont la même mesure. La calculer.
3. Quelle est la nature du triangle *ZTI* ? Justifier.

5 Dans la figure ci-dessous, les points *A*, *R*, *I* et *E* sont alignés. Des mesures d'angle sont indiquées.
Vrai ou faux : le triangle *MAE* est rectangle en *M*.



6 Sachant que les droites (*EL*) et (*NA*) sont parallèles, calculer la mesure de chacun des angles du quadrilatère *NELA* en justifiant oralement et inscrite la valeur de ces angles sur le dessin.

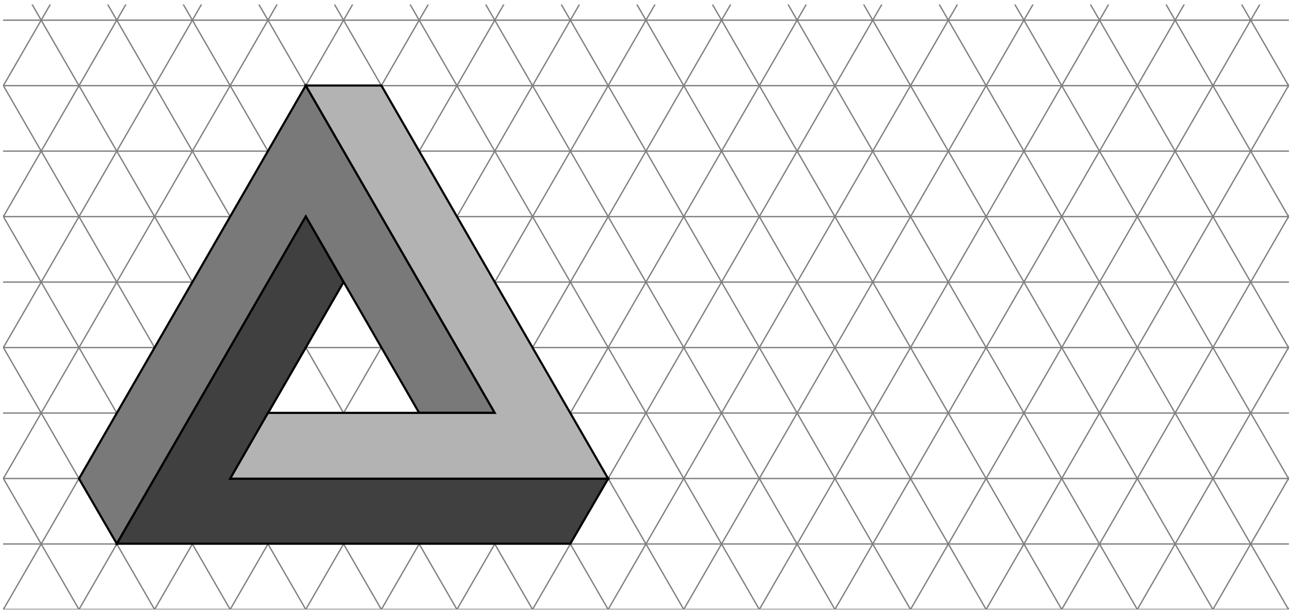


Le triangle de Penrose

Le triangle de Penrose, kesako ?

Le **triangle de Penrose**, aussi appelé tripoutre ou tribarre est un triangle impossible à construire physiquement en 3D mais facilement modélisable en 2D. Il a été conçu par le physicien et mathématicien britannique *Roger Penrose* (né à Colchester en 1931) dans les années 1950.

1. Observer le triangle de Penrose et en particulier ses angles sur ce quadrillage à maille triangulaire (aussi appelé isométrique en raison de l'égalité de longueur de tous ses côtés). Pourquoi est-il impossible à construire ?
2. Le reproduire sur le quadrillage juste à droite puis le colorier.



Et dans la vraie vie ?

⇛ Le jeu **Monument Valley** est un jeu de réflexion en perspective isométrique qui se passe dans un décor composé de structures aux formes géométriques impossibles basées sur ce triangle.

⇛ **An impossible triangle sculpture in Perth** : in 1997, a new landmark has been created for Perth, in a unique collaboration between a leading WA artist Brian McKay and architect Ahmad Abas. Destined to become a bold icon for Perth, the « Impossible Triangle » has been erected in Claisebrook Square, East Perth. The sculpture is 13.5 meters height and the design striations on the polished aluminium reflects both sunlight and artificial lighting. The view of the triangle depends on where it is observed from.

Source : https://im-possible.info/english/

Grandeurs
& mesures

Séquence **9**

Horaires et durées

Connaissances :

- Connaître les horaire et durées et les relations qui les lient.

Compétences :

- Mener des calculs impliquant des grandeurs mesurables, exprimer les résultats dans des les unités adaptées.
- Exprimer et vérifier la cohérence des résultats du point de vue des unités.

Débat : Instruments anciens de mesure de temps et de durée

De tous temps on a voulu mesurer le **temps** et la **durée**, ci-dessous figurent quelques instruments utilisés dans des époques plus ou moins lointaines.

Cadran solaire
1 500 av. J.-C.
Heures du jour

Clepsydre
1 600 av. J.-C.
Durées longues (heures)

Sablier
IX^{e} siècle
Durées courtes (minutes)

Vidéo : **Remettons les pendules à l'heure**, chaîne YouTube *C'est pas sorcier*.

Activité d'approche

Le temps qui passe

Objectifs : donner un ordre de grandeur dans le domaine des durées.

Les règles du jeu

Pour chacune des douze situations numérotées A à L ci-dessous :

- trouver un ordre de grandeur de la durée (seconde, minute, heure, jour, mois, année ou siècle) ;
- identifier la couleur correspondante dans le tableau suivant :

Durée	seconde	minute	heure	jour	mois	année	siècle
Couleur	blanc	beige	noir	jaune	marron	rouge	bleu

- colorier les cases avec le numéro de la situation de la couleur identifiée.

À vous de jouer !

A. Temps mis par la lumière du soleil pour aller jusqu'à la Terre.

B. Durée de chacune des quatre saisons.

C. Record du monde du 100 m.

D. Temps de cuisson d'un œuf à la coque.

E. Intervalle entre deux battements de cœur consécutifs.

F. Durée d'un cycle complet de lune.

G. Durée d'un weekend.

H. Durée d'un film.

I. Temps mis par la Terre pour faire le tour de son étoile : le Soleil.

J. Âge maximum atteint par un humain.

K. Durée d'une grossesse.

L. Durée d'un entraînement de sport.

C	C	C	C	C	C	C	H	H	H	H	C	C	C	C	C	C	C
C	C	C	C	C	H	H	K	K	K	K	H	H	C	C	C	C	C
C	C	C	C	H	K	K	K	E	E	K	K	K	H	C	C	C	C
C	C	C	H	K	K	K	E	E	E	E	K	K	K	H	C	C	C
C	C	H	K	K	K	H	H	H	H	H	H	K	K	K	H	C	C
C	C	H	K	K	H	H	H	H	H	H	H	H	K	K	H	C	C
C	C	H	K	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	K	H	C	C
C	C	H	K	H	H	E	E	A	A	E	E	H	H	K	H	C	C
C	C	H	H	A	A	E	H	A	A	H	E	A	A	H	H	C	C
C	H	D	H	A	A	E	H	A	A	H	E	A	A	H	D	H	C
C	H	D	H	H	A	A	A	A	A	A	A	A	H	H	D	H	C
C	C	H	H	D	H	H	A	A	A	A	H	H	D	H	H	C	C
C	C	C	H	D	H	H	H	H	H	H	H	H	D	H	C	C	C
C	C	C	C	H	D	H	H	H	H	H	H	D	H	C	C	C	C
C	C	C	C	C	H	D	D	D	D	D	D	H	C	C	C	C	C
C	C	L	L	L	I	H	H	H	H	H	H	I	L	L	L	C	C
C	L	I	I	I	I	J	J	I	I	J	J	I	I	I	I	L	C
L	I	L	L	I	I	G	G	I	I	G	G	I	I	L	L	I	L
C	L	E	E	L	J	G	G	J	J	G	G	J	L	E	E	L	C
L	E	E	E	E	L	J	J	J	J	J	J	L	E	E	E	E	L
L	E	E	E	E	L	J	J	J	J	J	J	L	E	E	E	E	L
L	E	E	E	L	J	J	J	J	J	J	J	J	L	E	E	E	L
C	L	L	L	J	J	J	J	J	J	J	J	J	J	L	L	L	C
C	C	C	L	J	J	J	L	L	L	L	J	J	J	L	C	C	C
C	C	C	L	J	J	J	L	C	C	L	J	J	J	L	C	C	C
C	C	C	L	J	J	J	L	C	C	L	J	J	J	L	C	C	C
C	C	L	B	B	B	B	L	C	C	L	F	F	F	F	L	C	C
C	L	B	B	B	B	B	L	C	C	L	F	F	F	F	F	L	C
C	L	L	L	L	L	L	L	C	C	L	L	L	L	L	L	L	C

1 Unités de temps

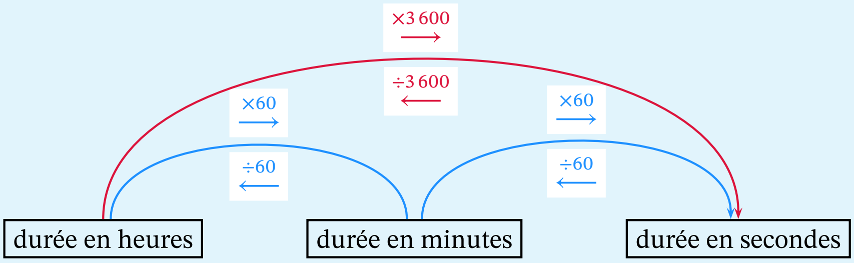
Selon les situations, on indique les durées en années, mois, jours, heures, minutes, ou secondes :
1 siècle = 100 ans ; 1 an = 12 mois = 365/366 jours ; 1 jour = 24 heures ; 1 heure = 60 minutes = 3 600 secondes…
Pour mesurer le temps ou une durée, on peut utiliser un cadran solaire, un sablier, une montre, un chronomètre…

2 Conversion de durées

La seconde (s) est l'unité du système SI permettant de caractériser une durée. Contrairement aux autres unités, elle ne suit pas un système décimal, mais hexadécimal (de base 60).

Méthode : Convertir des durées

Pour convertir des heures en minutes ou des minutes en secondes ou inversement, on peut utiliser le schéma suivant :



Exemple

- Convertir 170 minutes en heures et minutes.
- Convertir 1 h 25 min 36 s en secondes.

- $170 = 2 \times 60 + 50$, donc 170 min = 2 h 50 min.
- 1 h 25 min 36 s = 3 600 s + 25 × 60 s + 36 s
  1 h 25 min 36 s = 5 136 s.

Pour effectuer des additions ou soustractions de durées, on peut effectuer une opération en colonne (un peu périlleuse) ou procéder de proche en proche.

Exemple

- Un train part de Montpellier à 8 h 48 min. La durée du trajet pour se rendre à Paris est de 3 h 20 min.
  À quelle heure arrivera-t-il à Paris ?

$$\begin{array}{ccccc} & 8 & \text{h} & 4 & 8 \\ + & 3 & \text{h} & 2 & 0 \\ \hline 1 & \cancel{1} & \text{h} & \cancel{6} & 8 \\ & & & & \\ 1 & 2 & \text{h} & 0 & 8 \end{array}$$

On aligne les heures sous les heures, les minutes sous les minutes puis on additionne terme à terme.

Si le nombre de minutes est supérieur à 60, on soustrait 60 minutes et on ajoute 1 heure.

- Un automobiliste part de Perpignan à 8 h 35 min et arrive à Montpellier à 10 h 20 min.
  Quelle est la durée de son trajet ?

  $8\text{ h }35\text{ min} \xrightarrow{+25\text{ min}} 9\text{ h }00\text{ min} \xrightarrow{+1\text{ h}} 10\text{ h }00\text{ min} \xrightarrow{+20\text{ min}} 10\text{ h }20\text{ min.}$

  La durée totale du trajet est de 1 h 45 min

Remarque : attention à l'aspect hexadécimal de cette grandeur.

- Lorsqu'on lit 1,5 h, cela correspond à 1 h et 0,5 h, c'est-à-dire 1 h 30 min ($0,5 \times 60$ min = 30 min).
- Inversement, 2 h 15 min ne correspond pas à 2,15 h mais à 2,25 h (15 min = $\frac{15}{60}$h = 0,25 h).

Fiche d'exercices

1 Malak part à 7 h 38 min pour prendre le bus direction le collège Simone Veil.
Elle met 6 minutes pour aller jusqu'à l'arrêt de bus, puis le trajet en bus dure 16 minutes et enfin il lui reste 4 minutes à pied.
À quelle heure arrivera-t-elle au collège ?

2 Hugoline part du collège à pied à 17 h 04 min.
Elle prévoit 15 min 30 s pour le trajet, 05 min pour acheter un pain au chocolat et 07 min pour dire au revoir aux copines (et copains !).
À quelle heure arrivera-t-elle chez elle ?

3 Safae part en promenade à 9 h 20 min.
Elle rentre à 12 h 15 min, ne s'étant arrêtée pour se reposer que lors de trois pauses de 05 min chacune.
Pendant combien de temps a-t-elle marché ?

4 Convertir les durées données ci-dessous en minutes.

1. 1 h 56 min.
2. 2 j 25 min.
3. 1 j 20 h 03 min.

5 Convertir les durées données ci-dessous en heures et minutes.

1. 156 min.
2. 296 min.
3. 1 603 min.

6 Convertir les durées données ci-dessous en heures et minutes.

1. 1,5 h.
2. 2,25 h.
3. 0,3 h.

7 Convertir les durées données ci-dessous en heures décimales.

1. 6 h 30 min.
2. 2 h 45 min.
3. 8 h 33 min.

8 Effectuer les calculs suivants :

1. 3 h 45 min + 5 h 13 min
2. 5 h 38 min + 9 h 43 min
3. 11 h 28 min − 7 h 22 min
4. 15 h 35 min − 9 h 49 min

9 Dans une usine, une machine met 05 min 26 s pour fabriquer une pièce.

1. Combien de temps met-elle pour fabriquer 5 pièces ?
2. Combien de temps met-elle pour en fabriquer 10 ?
3. Combien de temps met-elle pour en fabriquer 20 ?
4. Combien de temps met-elle pour en fabriquer 100 ?
5. Combien la machine aura-t-elle fabriqué de pièces si elle fonctionne 8 h sans s'arrêter ?
6. Une nouvelle machine, qui vient d'arriver, met deux fois moins de temps pour fabriquer la même pièce. Quel temps met-elle pour fabriquer la pièce ?

10 Résolution de problème : des robinets qui coulent.
On dispose de deux robinets.

- Le premier est capable de remplir un réservoir d'eau de 24 L en 1 minute.
- Le second peut remplir ce même réservoir en 2 minutes.

En ouvrant les deux robinets au même moment, combien de temps faudrait-il pour remplir un jacuzzi avec 1 080 L d'eau ?

a. 15 min.
b. 67,5 min.
c. 135 min.
d. 30 min.

L'horloge de Mengenlehreuhr

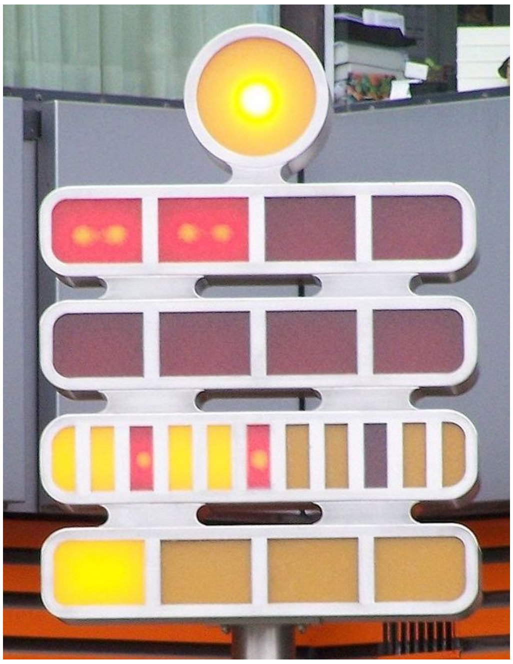
Présentation

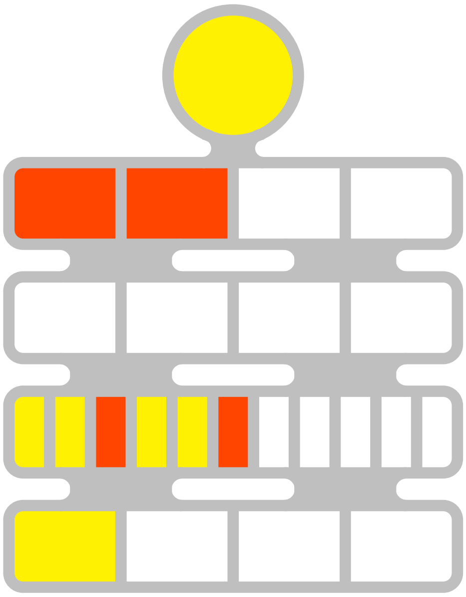
La **Mengenlehreuhr** (en allemand « Horloge de la théorie du jeu ») ou **Berlin-Uhr** (« Horloge de Berlin ») est la première horloge publique au monde qui indique l'heure au moyen de champs lumineux colorés, ce qui lui a valu d'entrer dans le livre Guinness des records lors de son installation le 17 juin 1975.

Source : wikipedia

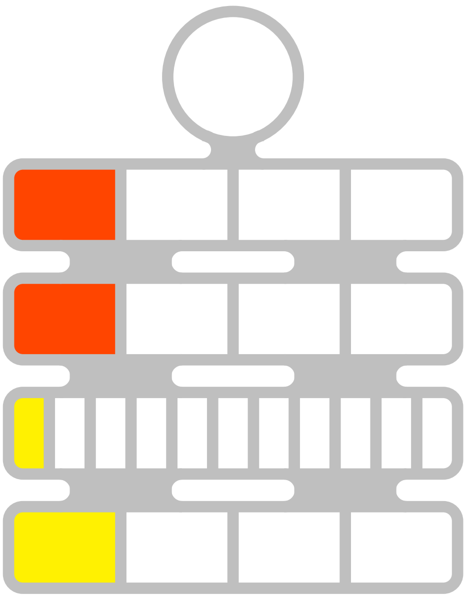
recherche

À partir des images suivantes représentant l'horloge à différents moments de la journée, déterminer le fonctionnement de l'horloge. Par groupe, vous construirez une affiche récapitulant vos recherches.

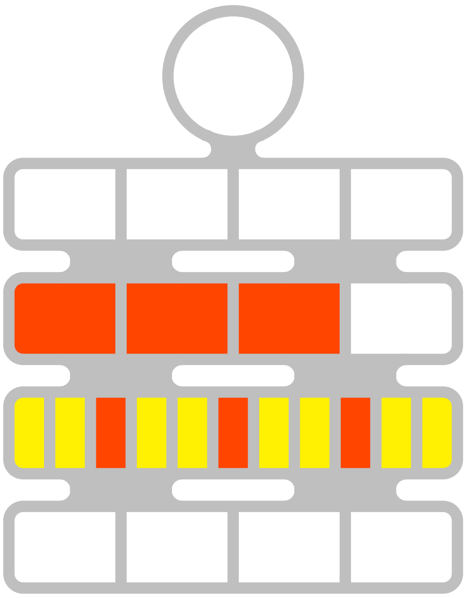




Il est 10h31



Il est 6h06



Il est 3h55

Nombres
& Calculs

Séquence **10**

Comparaison et égalité de fractions

Connaissances :

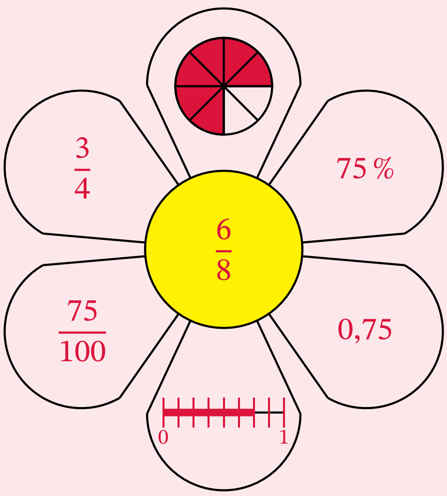
- Fractions, nombres rationnels.
- Égalité de fractions.
- Ordre sur les nombres rationnels.

Compétences :

- Comparer, ranger, encadrer des nombres fractionnaires.
- Repérer et placer un nombre rationnel sur une droite graduée.

Débat : les fractions, ces nombres rompus !

Tout nombre peut s'écrire de différentes façons : ils ont des habillages différents mais ont la même valeur. La façon dont on les écrit permet de pouvoir les comparer. Par exemple, la **fraction** $\frac{6}{8}$ possède (entre autres) les représentations suivantes :



Vidéo : **Les fractions**, chaîne Youtube *Petits contes mathématiques*.

Activité d'approche

Des briques et des fractions

Objectifs : utiliser des fractions pour exprimer une proportion ; produire des fractions égales, ranger des fractions.

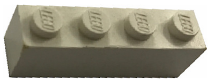
Les Lego®

On choisit la brique de Lego® classique u ci-contre que l'on prend comme unité et les onze briques a à k.

On considère que le volume d'une brique est proportionnel au nombre de « boutons » présents sur le dessus.

u : 

a :  b :  c :  d : 

e :  f :  g :  h : 

i :  j :  k : 

Les fractions

1. Compléter les égalités suivantes à l'aide de nombres fractionnaires :

$a =$ .... u $b =$ .... u $c =$ .... u $d =$ .... u $e =$ .... u $f =$ .... u

$g =$ .... u $h =$ .... u $i =$ .... u $j =$ .... u $k =$ .... u

2. Compléter les égalités suivantes à l'aide de fractions dont le dénominateur est 8 :

$a = \frac{\text{......}}{8}u$ $b = \frac{\text{......}}{8}u$ $c = \frac{\text{......}}{8}u$ $d = \frac{\text{......}}{8}u$ $e = \frac{\text{......}}{8}u$ $f = \frac{\text{......}}{8}u$

$g = \frac{\text{......}}{8}u$ $h = \frac{\text{......}}{8}u$ $i = \frac{\text{......}}{8}u$ $j = \frac{\text{......}}{8}u$ $k = \frac{\text{......}}{8}u$

3. Classer les Lego® dans l'ordre croissant de leur volume :

....

....

Trace écrite

1 Égalité de fractions

Propriété

On ne change pas la valeur d'une fraction en multipliant ou en divisant le numérateur et le dénominateur par un même nombre relatif non nul.

$$\frac{b}{c} = \frac{b \times a}{c \times a} = \frac{ba}{ca}. \quad \text{On a aussi} \quad a \times \frac{b}{c} = \frac{a \times b}{c} = \frac{ab}{c}$$

Démonstration :

$(a \times c) \times \frac{b}{c} = a \times \left(c \times \frac{b}{c}\right)$ *associativité de la multiplication*

$(a \times c) \times \frac{b}{c} = a \times b$ *$\frac{b}{c}$ est le nombre qui, multiplié par c donne b donc $c \times \frac{b}{c} = b$*

donc, $\frac{b}{c} = \frac{a \times b}{a \times c}$ *puisque $\frac{a \times b}{a \times c}$ est le nombre qui, multiplié par $a \times c$ donne $a \times b$*

Exemple

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 2}{2 \times 2} = \frac{2}{4} = \frac{2 \times 2}{4 \times 2} = \frac{4}{8} \ldots \quad ; \quad 7 \times \frac{3}{5} = \frac{7 \times 3}{5} = \frac{21}{5}$$

Remarque : la propriété permet de **simplifier** des fractions, ce qui signifie écrire une fraction qui lui est égale, mais avec un numérateur et un dénominateur plus petits.

Exemple

Pour simplifier $\frac{150}{180}$, on peut diviser le numérateur et le dénominateur par 10 : $\frac{150}{180} = \frac{150 \div 10}{180 \div 10} = \frac{15}{18}$

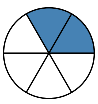
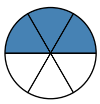
puis les diviser encore par 3 : $\frac{15}{18} = \frac{15 \div 3}{18 \div 3} = \frac{5}{6}$.

2 Comparaison de fractions

Méthode : Comparer des fractions

Pour comparer deux fractions ayant le même dénominateur, il suffit de comparer les numérateurs : la fraction ayant le plus grand numérateur est la plus grande.

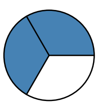
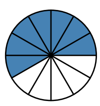
Exemple

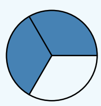
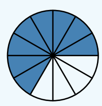
Comparer $\frac{2}{6}$ et $\frac{3}{6}$:  et 

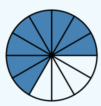
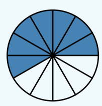
$2 < 3$ donc $\frac{2}{6} < \frac{3}{6}$

Pour comparer deux fractions de dénominateurs multiples, on modifie l'écriture de l'une des fractions pour qu'elle ait le même dénominateur que l'autre.

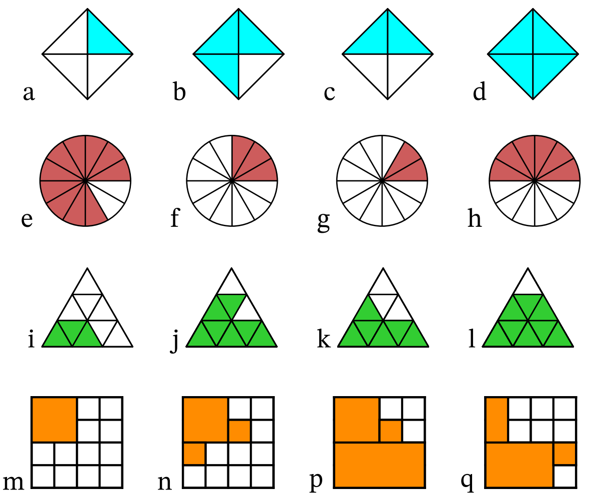
Exemple

Comparer $\frac{2}{3}$ et $\frac{7}{12}$:  et 

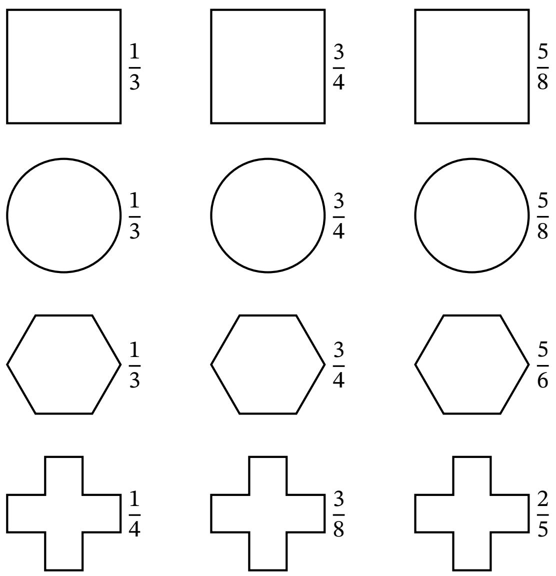
$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{8}{12}$:  = 

$\frac{8}{12} > \frac{7}{12}$ donc, $\frac{2}{3} > \frac{7}{12}$:  > 

1 Écrire la fraction qui représente la partie colorée de chaque figure puis la simplifier si possible.



2 Dans chaque figure, colorier la fraction donnée.



3 Compléter les fractions suivantes :

1. $\frac{1}{2} = \frac{\ldots}{14} = \frac{8}{\ldots} = \frac{\ldots}{50} = \frac{16}{\ldots} = \frac{64}{\ldots}$

2. $\frac{4}{5} = \frac{\ldots}{15} = \frac{8}{\ldots} = \frac{\ldots}{50} = \frac{16}{\ldots} = \frac{64}{\ldots}$

3. $\frac{11}{7} = \frac{\ldots}{14} = \frac{88}{\ldots} = \frac{\ldots}{49} = \frac{121}{\ldots} = \frac{550}{\ldots}$

4 Simplifier au maximum ces fractions.

1. $\frac{6}{10}$ 3. $\frac{16}{28}$ 5. $\frac{88}{33}$ 7. $\frac{15}{75}$

2. $\frac{18}{16}$ 4. $\frac{30}{48}$ 6. $\frac{55}{30}$ 8. $\frac{108}{117}$

5 Entourer d'une même couleur les nombres égaux.

$\frac{5}{4}$ $\frac{54}{45}$ $\frac{28}{42}$ $\frac{12}{15}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{9}{81}$ $\frac{4}{6}$

$\frac{50}{40}$ $\frac{27}{54}$ $\frac{4}{36}$ $\frac{36}{72}$ $\frac{1}{9}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{6}{5}$

6 Compléter avec le signe = ou ≠.

1. $\frac{3+5}{7+5}$ ...... $\frac{3}{7}$ 4. $\frac{33}{77}$ ...... $\frac{3}{7}$ 7. $\frac{3}{7}$ ...... $\frac{30}{70}$

2. $\frac{3\times 5}{7\times 5}$ ...... $\frac{3}{7}$ 5. $\frac{7}{3}$ ...... $\frac{3}{7}$ 8. $\frac{3}{3}$ ...... $\frac{7}{7}$

3. $\frac{3\times 7}{7\times 3}$ ...... $\frac{3}{7}$ 6. $\frac{3}{7}$ ...... $3,7$ 9. 3 ...... $\frac{21}{7}$

7 Comparer les fractions suivantes :

1. $\frac{1}{9}$ ...... $\frac{1}{3}$ 4. $\frac{7}{19}$ ...... $\frac{7}{20}$ 7. $\frac{81}{91}$ ...... $\frac{81}{90}$

2. $\frac{4}{9}$ ...... $\frac{12}{9}$ 5. $\frac{2}{3}$ ...... $\frac{4}{6}$ 8. $\frac{17}{10}$ ...... $0,7$

3. $\frac{18}{17}$ ...... 1 6. $\frac{18}{13}$ ...... $\frac{15}{13}$ 9. $\frac{2}{3}$ ...... $\frac{1}{4}$

8 Résoudre les deux problèmes suivants.

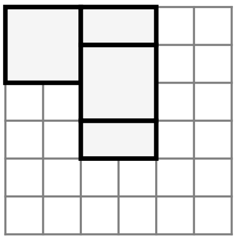
1. La collecte : 20 € ont été collectés par 3 élèves lors de la vente de gâteaux. Jim en a collecté le quart, Paul trois huitièmes et Jane le reste. Sachant qu'une part de gâteau coûtait 50 centimes, combien de parts de gâteaux ont-ils vendues chacun ?
2. Économies : Je dépense quatre septièmes de mes économies pour acheter un manteau et le tiers du reste pour une paire de chaussettes. J'ai maintenant 9,52 €. Combien avais-je d'économies au départ ?

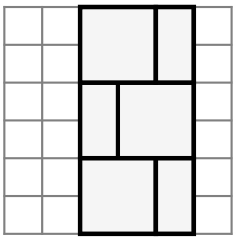
Mini-combis

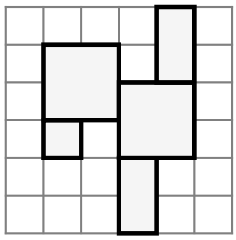
Le mini-combis est un jeu constitué d'un plateau carré de côté 6 et de trois types de pièces (un carré de côté 1, un carré de côté 2 et un rectangle de côtés 1 et 2).

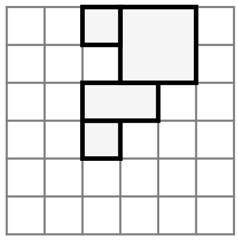
Des fractions à trouver

Pour chaque plateau, déterminer la fraction du plateau qui est recouverte, à l'aide d'une fraction la plus simple possible.



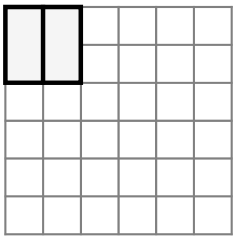




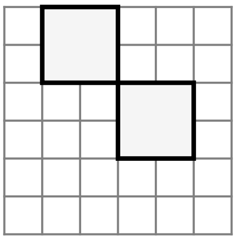


Des pièces à placer

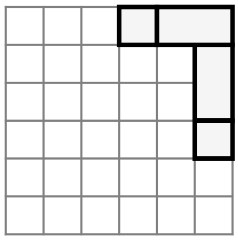
Pour chaque plateau, placer un minimum de pièces pour que l'ensemble des pièces placées représente la fraction indiquée.



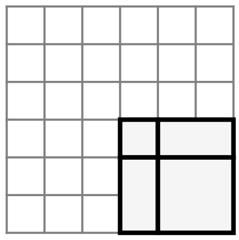
$\frac{1}{6}$



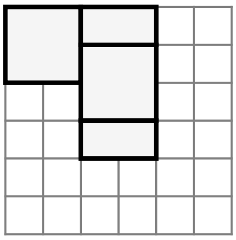
$\frac{2}{3}$



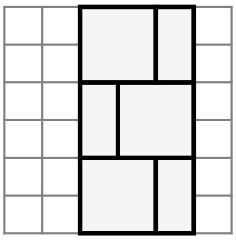
$\frac{5}{6}$



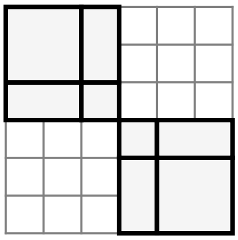
$\frac{7}{12}$



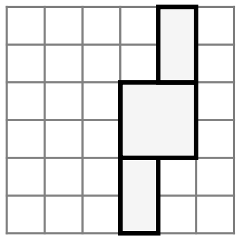
$\frac{11}{18}$



$\frac{5}{9}$



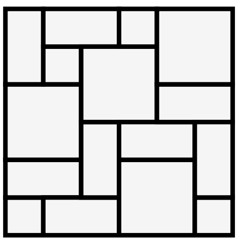
$\frac{13}{18}$



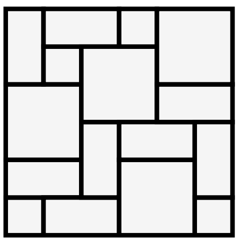
$\frac{1}{3}$

Des fractions d'une solution

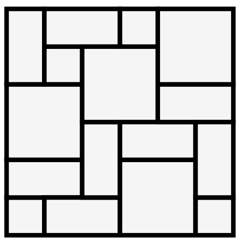
Pour chaque plateau, colorier une zone correspondant à la fraction indiquée en choisissant un minimum de pièces entières.



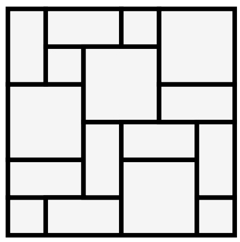
$\frac{1}{2}$



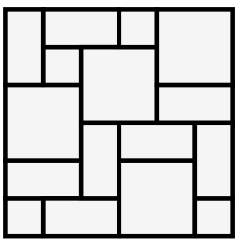
$\frac{1}{3}$



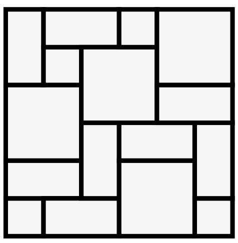
$\frac{1}{4}$



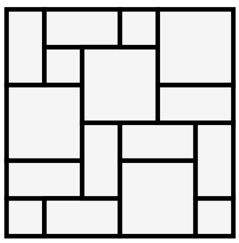
$\frac{2}{3}$



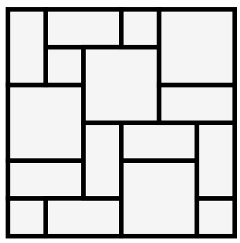
$\frac{7}{9}$



$\frac{7}{12}$



$\frac{11}{18}$



$\frac{17}{36}$

Combis et mini-combis, Dossier n°3101, Jeux 5 APMEP.

Espace &
géométrie

Séquence 11

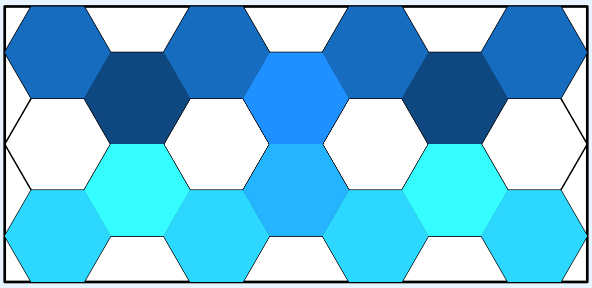
La symétrie centrale

Compétences :

- Comprendre l'effet d'une symétrie centrale.

Débat : les pavages

Un **pavage du plan** est un ensemble de portions du plan qui, lorsqu'on les met les unes à côté des autres, forment le plan tout entier, sans recouvrement. Par exemple, lorsque l'on pose du carrelage, on effectue un pavage de la pièce. Ce carrelage peut être de forme carrée, rectangulaire, hexagonale…



Vidéo : **Pavages interactifs**, site Internet *Mathématiques magiques* de *Thérèse Eveilleau*.

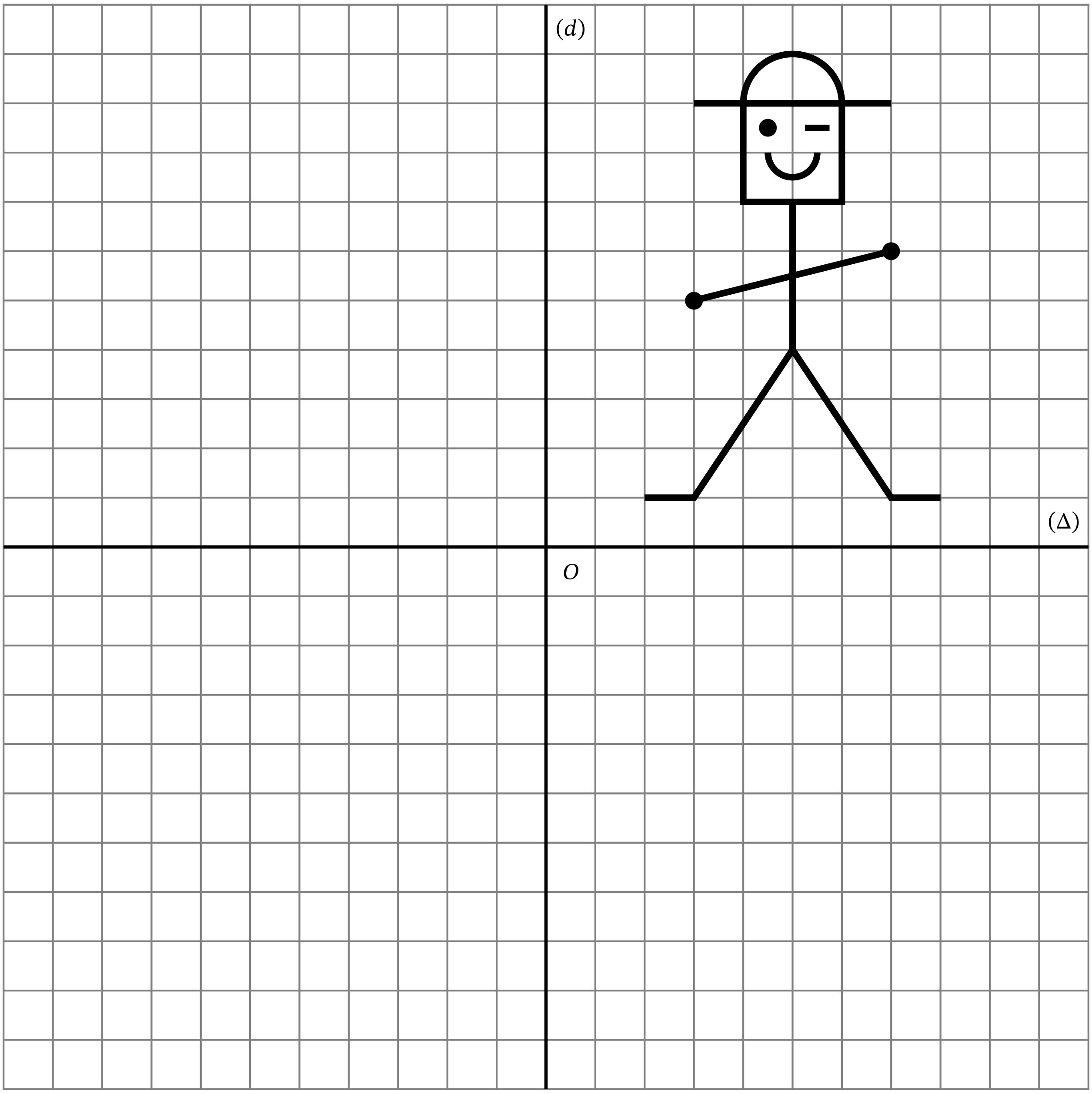
Activité d'approche

Le bonhomme inversé

Objectifs : transformer une figure par symétrie axiale ; observer l'effet de deux symétries axiales.

Construire sur le quadrillage ci-dessous les bonhommes demandés.

1. Construire en vert le symétrique du bonhomme par rapport à la droite (d).
2. Construire en rouge le symétrique du bonhomme vert par rapport à la droite (Δ).
3. Reproduire sur du papier calque le bonhomme noir et le point O.
4. En s'aidant du calque, sans le plier, trouver comment passer du bonhomme noir au bonhomme rouge.
5. Sans utiliser les bonhommes noir et rouge ni les droites (d) et (Δ), construire en bleu l'image du bonhomme vert par la symétrie centrale de centre O.



Source : « À la découverte de la symétrie centrale », Nathalie Bernard, IREM de Lille.

Trace écrite

1 La symétrie centrale

Définition

Le point M' est l'image du point M par la **symétrie de centre** O lorsque le point O est le milieu du segment $[MM']$.

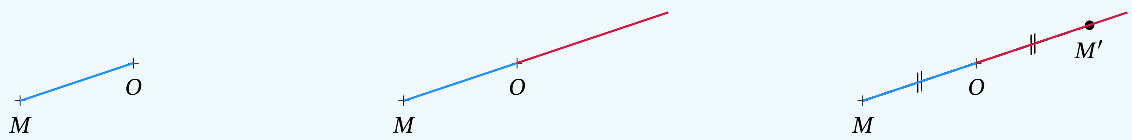
Méthode : Construction par symétrie centrale

Pour construire le symétrique d'un point M par la symétrie centrale de centre O :

- tracer la demi-droite $[MO)$;
- reporter la longueur MO de l'autre côté du point O ;
- placer le point M' symétrique de M par rapport à O.

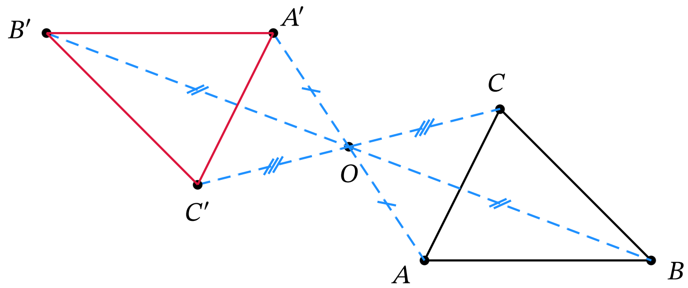
Exemple

Tracer le point M', symétrique du point M par rapport à O.



Remarque : transformer une figure par symétrie centrale de centre O revient à lui faire faire un demi-tour autour de ce point.

Pour tracer la figure symétrique d'une figure par la symétrie centrale de centre O, il faut construire le symétrique de chacun des points qui la compose puis relier les points entre eux.



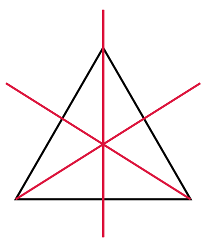
2 Centre de symétrie

Définition

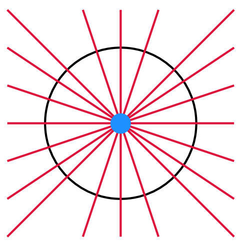
Si une figure F est transformée en elle-même par la symétrie centrale de centre O, alors O est le **centre de symétrie** de la figure F.

Exemple

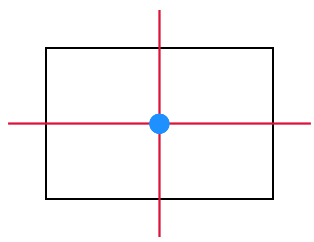
Si une figure possède un centre de symétrie, alors il est unique.



3 axes de symétrie
0 centre de symétrie



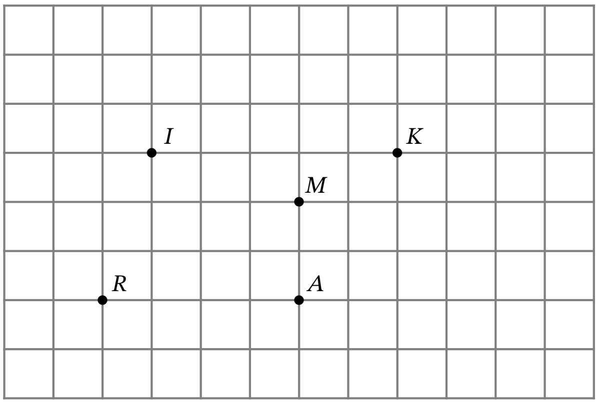
∞ axes de symétrie
1 centre de symétrie



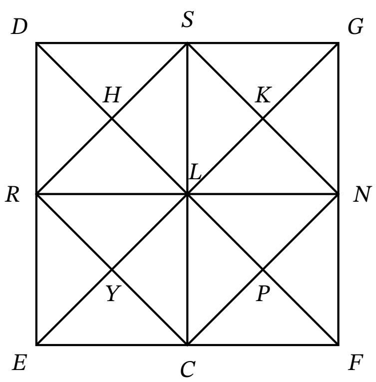
2 axes de symétrie
1 centre de symétrie

Fiche d'exercices

1 Construire les points I', K', R' et A' symétriques respectifs de I, K, R et A par rapport au point M.

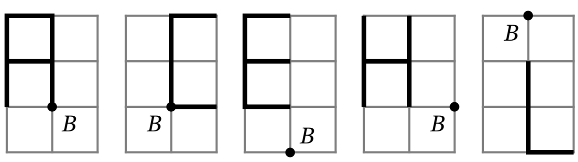


2 Sur la figure ci-dessous, $DEFG$ est un rectangle de centre L. Les points R, C, N et S sont les milieux respectifs des côtés $[DE]$, $[EF]$, $[FG]$ et $[GD]$.

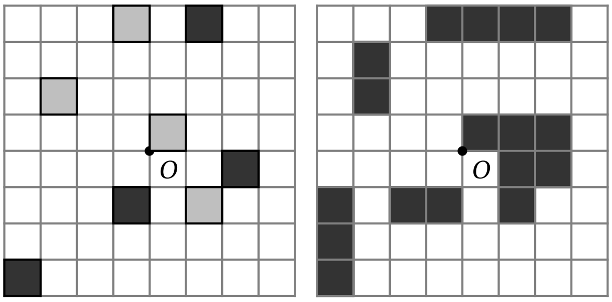


1. Colorier en jaune le triangle DHS.
2. Colorier en rouge le symétrique du triangle DHS par rapport à (RN).
3. Colorier en orange le symétrique du triangle DHS par rapport à (SC)
4. Colorier en bleu le symétrique du triangle DHS par rapport à H.
5. Colorier en vert le symétrique du triangle DHS par rapport à L.

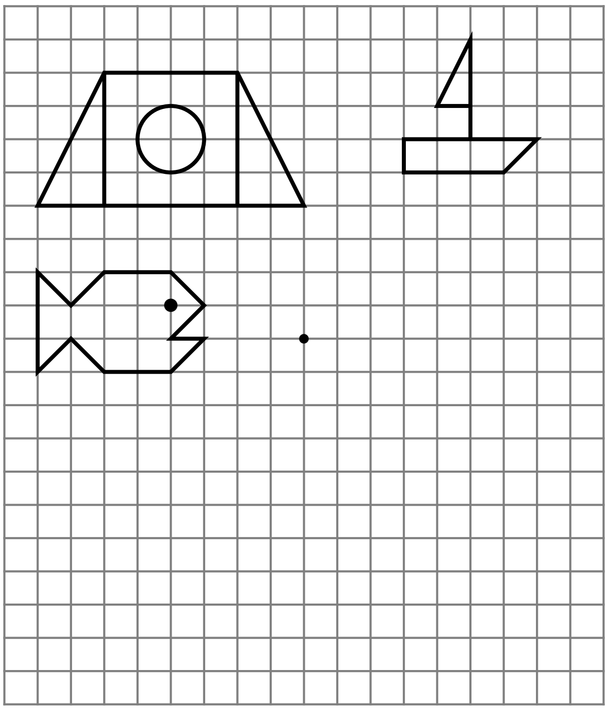
3 Dans chaque cas, reproduire la lettre sur le cahier et construire son symétrique par rapport au point B.



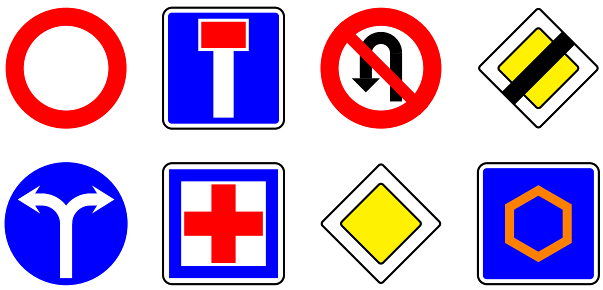
4 Colorier le minimum de cases pour que chacune des figures ci-dessous admette le point O pour centre de symétrie.



5 Tracer la figure symétrique de toutes les figures par rapport au point O.



6 Pour chacun de ces panneaux de signalisation, tracer le ou les axes et/ou centre de symétrie.



Activité récréative

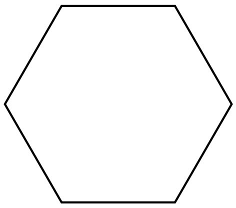
Le tapis mendiant

Kesako ?

Un patchwork est une technique décorative de couture qui consiste à assembler des morceaux de tissus pour réaliser des objets divers, comme par exemple des taies d'oreillers ou des couvre-lits.
On s'intéresse ici aux couvre-lits de Cilaos, (ville de la Réunion), plus communément appelés « tapi mendian ».
Le motif de base de ce tapis est un hexagone, et pour le réaliser, on assemble sept hexagones pour former une rosace, puis, on coud les rosaces entre elles.

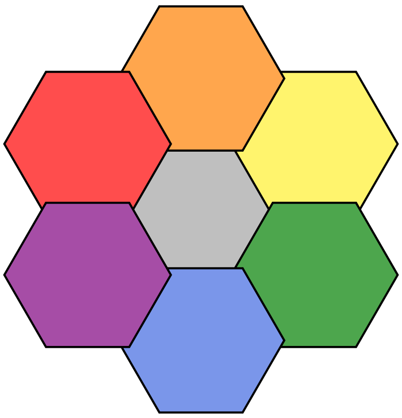
Construction d'un hexagone régulier

1. Qu'est-ce qu'un hexagone régulier ?
2. Combien d'axe(s) et de centre de symétrie possède-t-il ?
3. Construire le plus précisément un hexagone régulier.



Construction d'une rosace

1. Construire une rosace, dont le diamètre du cercle circonscrit au motif de base est de 6 cm.
2. Décorer la rosace (couleurs, dessins, textes,motifs...), puis la découper.
3. Combien d'axe(s) et de centre de symétrie possède-t-elle (avant décoration et après décoration) ?



Construction du « tapi mendian »

Assembler toutes les rosaces de la classe afin de créer un tapis mendiant.

Activité inspirée de « Les patchworks de Cilaos : enseignement et ethnogéométrie au collège », IREM de la Réunion

Organisation & gestion de données

Séquence 12

Notions de probabilités

Connaissances :

- Vocabulaire des probabilités.
- Notion de probabilités.

Compétences :

- Aborder les questions relatives au hasard à partir de problèmes simples.
- Calculer des probabilités dans des cas simples.

Débat : histoire des probabilités

C'est en cherchant à résoudre des problèmes posés par les jeux de hasard que les mathématiciens donnent naissance aux **probabilités**. Lors de fouilles archéologiques, on a trouvé des indices montrant que les jeux de hasard se pratiquaient déjà 5 000 ans av. J.-C. (on utilisait des osselets). Les premiers dés connus ont été mis à jour à *Tepe Gawra*, au nord de l'Irak, et datent du troisième millénaire av. J.-C. Le jeu de cartes était également pratiqué dans divers pays depuis des époques reculées. Les cartes actuelles apparaissent en France au XIVe siècle et leur utilisation donne très vite lieu à des jeux d'argent. On attribue souvent la réelle naissance à la fin du XVIIe siècle ce qui en fait une branche des mathématiques relativement récente.

Robin de l'île par **Dobritz**.

Vidéo : **Les probabilités**, chaîne YouTube *Rapémathiques*, par *A'Rieka*.

Activité d'approche

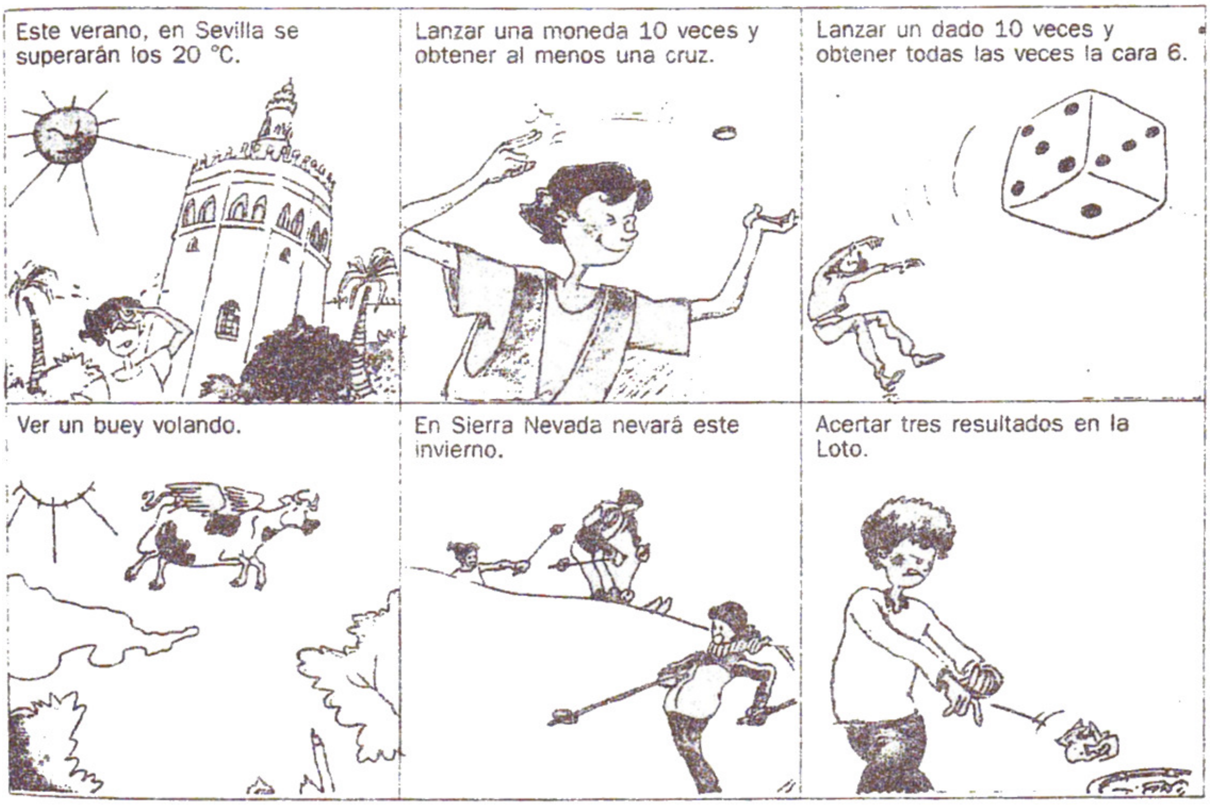
Imposible, probable o seguro ?

Objectifs : placer un événement sur une échelle de probabilité.

Traduction

Traduire en français les six vignettes de cette illustration.

Asigna una de estas etiquetas IMPOSIBLE | POCO PROBABLE | BASTANTE PROBABLE | SEGURO a cada uno de los siguientes sucesos.



- Vignette 1 : ....
- Vignette 2 : ....
- Vignette 3 : ....
- Vignette 4 : ....
- Vignette 5 : ....
- Vignette 6 : ....

Exploitation

Classer ces vignettes sur l'échelle ci-dessous en indiquant le numéro de la vignette en dessous de l'échelle.

imposible — poco probable — bastante probable — seguro →

Source : « Une initiation aux probabilités par le jeu », IREM de Rouen.

Trace écrite

1 Vocabulaire des probabilités

Définition

On appelle **expérience aléatoire** une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat de façon certaine.

Exemple

Lancer une pièce de monnaie est une expérience aléatoire dont le résultat est soit « pile », soit « face ».

Définition

- Chaque résultat possible et prévisible d'une expérience aléatoire est appelé une **issue**.
- L'ensemble formé par les issues est appelé **univers**, souvent noté Ω.
- Un **événement** de l'expérience aléatoire est une partie quelconque de l'univers.

Exemple

- Lancer d'une pièce de monnaie : $\Omega = \{ \text{pile} ; \text{face} \}$.
- Lancer d'un dé à six faces : $\Omega = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 \}$.
- « Obtenir un numéro pair » est un événement que l'on peut noter $A = \{ 2 ; 4 ; 6 \}$.

2 Calcul de probabilités

La probabilité P d'un événement est « la chance » qu'il se produise.

Définition

On dit qu'il y a **équiprobabilité** lorsque toutes les issues ont la même probabilité ;
dans ce cas, on a $P = \dfrac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$.

Remarque : dans un exercice, pour signifier que l'on est dans une situation d'équiprobabilité, on a des expressions du type : « on lance un dé **non pipé** » ; « dans une urne, les boules sont **indiscernables** au toucher » ; « on rencontre **au hasard** une personne parmi… ».

Exemple

On tire une carte dans un jeu non truqué de 52 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir une tête ?
Le jeu est non truqué, il y a donc équiprobabilité. Les issues possibles sont le valet, la dame et le roi de pique, de carreau, de trèfle et de cœur ce qui fait 4×3 cartes donc, $P = \dfrac{12}{52}$.

Propriété

Un probabilité est toujours comprise entre 0 et 1. Si elle est égale à 0, on dit que l'événement est **impossible** et si elle est égale à 1, l'événement est **certain**.

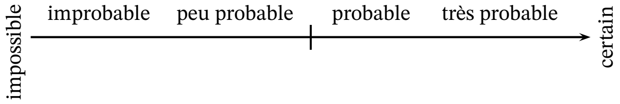
Exemple

On lance un dé classique équilibré à six faces. Quelle est la probabilité d'obtenir un 9 ? d'obtenir un nombre entier ?
Nous sommes dans une situation d'équiprobabilité.

- On ne peut pas obtenir un 9 avec un dé à 6 faces donc, $P = \dfrac{0}{6} = 0$.
- Tous les nombres obtenus sont entiers donc, $P = \dfrac{6}{6} = 1$.

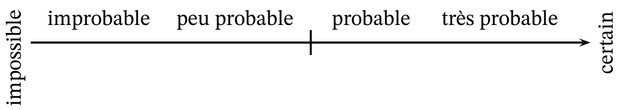
Fiche d'exercices

1 Pour chacun des événements suivants, indiquer s'il relève du hasard et si oui, le placer sur l'échelle ci-dessous.



1. Obtenir pile au jeu de pile ou face ....
2. La fête nationale aura lieu le 14 juillet ....
3. Un élève aura des baskets demain ....
4. Obtenir 6 avec un dé à six faces ....
5. Trouver la bonne combinaison au loto ....
6. Demain il fera beau ....

2 Une roue de loterie est partagée en huit secteurs identiques numérotés de 1 à 8. Calculer la probabilité de chaque événement et les placer sur l'échelle.



1. « Obtenir 2 : ....
2. « Obtenir un multiple de 2 : ....
3. « Obtenir un nombre supérieur à 4 : ....
4. « Obtenir un nombre positif : ....
5. « Obtenir un nombre impair : ....
6. « Obtenir un multiple de 13 : ....

3 Roudayna tire une carte dans un jeu ordinaire de cinquante-deux cartes.

1. Donner les probabilités qu'elle obtienne les événements suivants : « Obtenir un carreau » ; « Obtenir un valet » et « Obtenir un valet de carreau ».
2. Calculer la probabilité de ne pas obtenir de carreau.

4 On dispose d'un dé à six faces numérotées de 1 à 6 et d'un dé à quatre faces avec des sommets numérotés de 1 à 4, parfaitement équilibrés. On lance les deux dés.

1. Avec quel dé la probabilité d'obtenir un 3 est-elle la plus grande ?
2. Avec quel dé la probabilité d'obtenir un multiple de 3 est-elle la plus grande ?

5 On écrit sur les faces d'un dé équilibré à six faces, chacune des lettres du mot : NOTOUS. On lance le dé et on regarde la lettre inscrite sur la face supérieure.

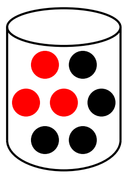
1. Quelles sont les issues de cette expérience ?
2. Déterminer la probabilité des évènements suivants :
   (a) E_1 : « On obtient la lettre O. »
   (b) E_2 : « On obtient une consonne. »
   (c) E_3 : « On obtient une lettre du mot KIWI. »
   (d) E_4 : « On obtient une lettre du mot CAGOUS. »
3. Graduer un axe et y placer les probabilités des évènements précédents.

6 Trois personnes, Ali, Ben et Charles, ont chacune un sac contenant des billes. Chacune tire au hasard une bille de son sac dont le contenu est le suivant :

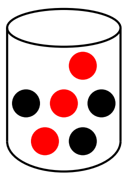
Sac d'Ali	Sac de Ben	Sac de Charles
10 billes rouges 30 billes noires	97 billes rouges 3 billes noires	5 billes rouges

Laquelle de ces trois personnes a-t-elle la plus grande probabilité de tirer une bille rouge ? Justifier.

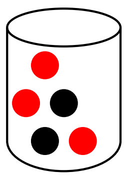
7 Dans les sac suivants, il y a déjà des billes noires et des billes rouges.
Est-il possible d'ajouter un certain nombre (de ton choix) de billes bleues, de façon à satisfaire les indications données en dessous de chaque sac ?



Cas n°1 :
La probabilité d'extraire une bille bleue est $\frac{5}{12}$.



Cas n°2 :
La probabilité d'extraire une bille bleue est $\frac{2}{5}$.



Cas n°3 :
La probabilité d'extraire une bille rouge ou bleue est $\frac{3}{4}$.

Activité récréative

Vers la loi des grands nombres…

1. Compléter le tableau suivant :

Numéro sur la face visible du dé	1	2	3	4	5	6
Probabilité d'obtenir cette face (fraction)						
Probabilité d'obtenir cette face (décimal)						

Que remarque-t-on ? --

Le travail s'effectue maintenant en binôme, vous avez à votre disposition un dé classique à six faces.

2. Lancer 10 fois le dé et noter les résultats obtenus dans le tableau suivant :

Numéro sur la face visible du dé	1	2	3	4	5	6
Nombre de fois où cette face est obtenue						
Probabilité d'obtenir cette face (fraction)						
Probabilité d'obtenir cette face (décimal)						

Que remarque-t-on ? --

3. Lancer 100 fois le dé et noter les résultats obtenus dans le tableau suivant :

Numéro sur la face visible du dé	1	2	3	4	5	6
Nombre de fois où cette face est obtenue						
Probabilité d'obtenir cette face (fraction)						
Probabilité d'obtenir cette face (décimal)						

Que remarque-t-on ? --

4. Répertorier les résultats de la classe entière et noter les résultats obtenus dans le tableau suivant :

Numéro sur la face visible du dé	1	2	3	4	5	6
Nombre de fois où cette face est obtenue						
Probabilité d'obtenir cette face (fraction)						
Probabilité d'obtenir cette face (décimal)						

Que remarque-t-on ? --

Nombres
& Calculs

Séquence 13

Expressions littérales

Connaissances :

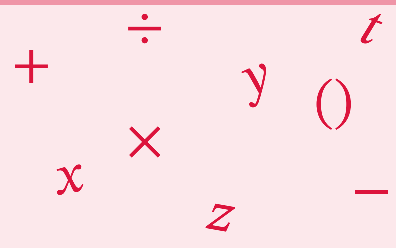
- Notion d'inconnue.

Compétences :

- Utiliser le calcul littéral pour traduire une propriété générale, pour démontrer un résultat général, pour valider ou réfuter une conjecture, pour modéliser une situation.

Débat : petits contes mathématiques

Les vidéos des **Petits contes mathématiques** ont été créés par *Universciences* : c'est une série pédagogique qui retrace l'histoire des maths à travers la découverte d'une notion, d'une formule, d'une conjecture ou d'une équation. Le récit est rythmé par des illustrations animées et la légèreté du ton dédramatise le sujet pour tous ceux qui ne seraient pas des « matheux ».



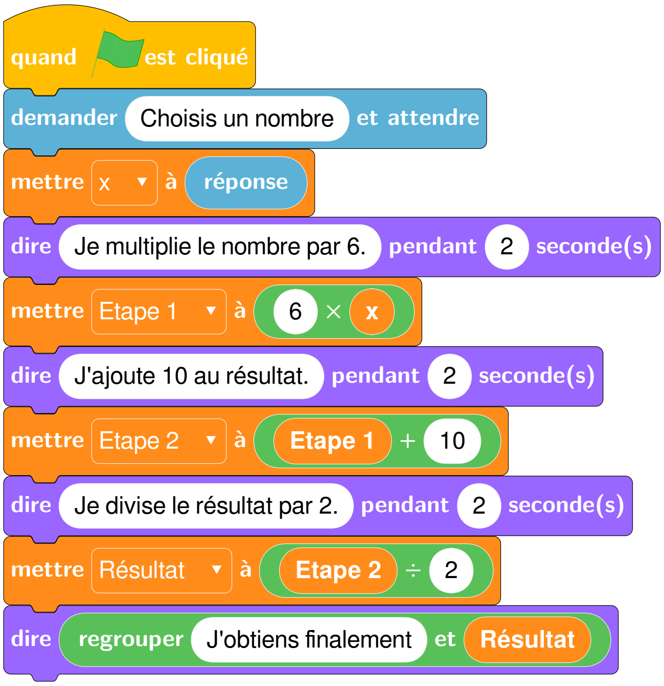
Vidéo : **Le** *x*, site Internet *Le blob*, épisode de la série *Petits contes mathématiques*.

Activité d'approche

Des variables aux inconnues

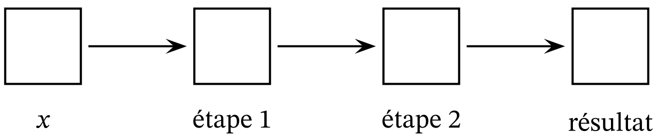
Objectifs : voir l'effet des variables dans un programme de calcul créé avec Scratch ; produire une expression littérale.

On considère le programme de calcul ci-dessous dans lequel x, Etape 1, Etape 2 et Résultat sont quatre variables.

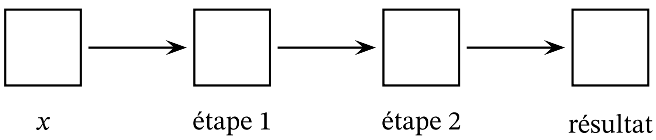


1. Yasmina a fait fonctionner ce programme en choisissant le nombre 5.

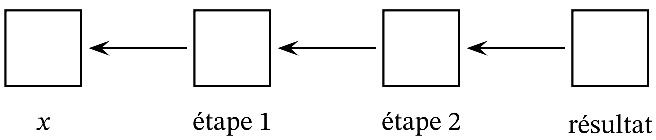
   Vérifier que ce qui est dit à la fin est : « J'obtiens finalement 20 ». Pour cela, remplir le diagramme suivant :



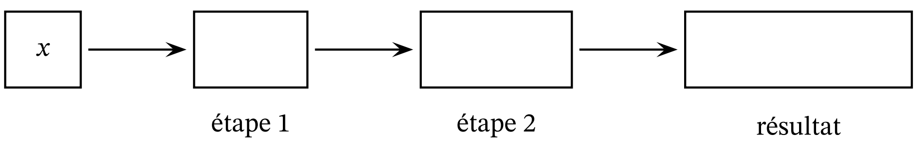
2. Que dit le programme si Maissa le fait fonctionner en choisissant au départ le nombre 7 ?



3. Firdaws fait fonctionner le programme, et ce qui est dit à la fin est : « J'obtiens finalement 8 ». Quel nombre a-t-elle choisi au départ ?



4. Si l'on appelle x le nombre choisi au départ, écrire en fonction de x l'expression obtenue à la fin du programme.



Source : cette activité est une adaptation du DNB 2017 de Pondichery.

Trace écrite

1 Expressions littérales

Définition

Une **expression littérale** est une succession d'opérations où apparaissent des lettres représentant des nombres. On parle aussi d'**expression algébrique**.

Exemple

$4 \times x + 3$; $2 \times a - 89$; $y - 3 \times z + t - 4$.

2 Produire une expression littérale

On utilise notamment des expressions littérales pour produire des formules générales, qui pourront être utilisées quelle que soit la valeur des variables.

Exemple

- Matéo a quatre ans de plus que Noé.
  En appelant « x » l'âge de Noé, l'âge de Matéo peut s'écrire « $x + 4$ ».
- Un rectangle a pour largeur ℓ et pour longueur L.
  Son périmètre peut s'exprimer ainsi : $\mathcal{P} = 2 \times (\ell + L)$.
  Son aire peut s'exprimer ainsi : $\mathcal{A} = \ell \times L$.

Remarque : la circonférence d'un disque s'écrit $2\pi R$ où :

- π est une lettre grecque qui désigne le nombre 3,14…, qui est fixe ;
- R est une lettre qui désigne le rayon du disque, ce nombre est variable et dépend du disque.

3 Simplifier d'une expression littérale

Pour simplifier une expression littérale, on peut supprimer le signe « $\times$ » devant une lettre, une parenthèse ou entre deux lettres.

Propriété

- On utilise la notation $2a$ pour $a + a$ ou $a \times 2$ ou encore $2 \times a$. On dit « deux a ».
- On utilise la notation ab pour $a \times b$. On dit « ab ».
- On utilise la notation a^2 pour $a \times a$. On dit « a au carré ».
- On utilise la notation a^3 pour $a \times a \times a$. On dit « a au cube ».

On écrit une expression comportant un nombre et une « lettre » avec le nombre précédé de la « lettre ».

Exemple

Simplifier les expressions :
$A = 5 \times y - 2 \times x = 5y - 2x$
$B = x \times x \times x + 7 \times y \times y = x^3 + 7y^2$.
$C = x \times 3 = 3x$, est préférable à $C = x3$.
Par commutativité de la multiplication, $x \times 3 = 3 \times x = 3x$.

Fiche d'exercices

1 Si x représente un nombre, comment peut-on écrire les expressions suivantes :

1. Le double de x.
2. Le tiers de x.
3. La somme de x et de 13.
4. La différence de x et de 7.
5. Le triple de la somme de 2 et de x.
6. Le tiers de la différence de 16 et x.

2 Si on note z l'âge en années de Zahra aujourd'hui, comment peut-on noter :

1. L'âge qu'elle aura dans deux ans ?
2. Le triple de l'âge qu'elle avait il y a quatre ans ?
3. La moitié de l'âge qu'elle aura dans cinq ans ?
4. Son année de naissance si on est en 2024 ?

3 Recopier les expressions suivantes en supprimant les signes $\times$ s'ils ne sont pas nécessaires.

- $A = 9 \times n =$ ------------------------------------
- $B = x \times 3 =$ ------------------------------------
- $C = 12 \times (a - 3) =$ ------------------------------
- $D = 2 \times a(2 \times 8) =$ ------------------------------
- $E = n \times x =$ ------------------------------------
- $F = 2 \times \pi \times R =$ ------------------------------

4 Simplifier les expressions suivantes :

- $A = a \times a =$ ------------------------------------
- $B = b \times b \times b =$ ------------------------------
- $C = c \times c \times 3 =$ ------------------------------
- $D = 9 + d \times d \times d =$ ----------------------------
- $E = a \times a \times b \times 3 =$ --------------------------
- $F = x \times x \times x - 2 \times y \times y =$ --------------------
- $G = (a + b) \times (a + b) =$ ------------------------
- $H = (x + y)(x + y)(x + y) =$ --------------------

5 Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse.

	vrai	Faux
1/ $x \times x = 2x$	☐	☐
2/ $x + x = 2x$	☐	☐
3/ $x \times x = x^2$	☐	☐
4/ $x + x = x^2$	☐	☐
5/ $x + 2 = 2x$	☐	☐
6/ $x + 2 = x^2$	☐	☐

6 Voici un programme :

> 1. Choisis un nombre
> 2. Retire-lui 5
> 3. Multiplie le résultat par 3

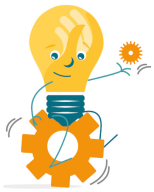
1. Faire fonctionner le programme avec trois nombres de son choix supérieurs ou égaux à 5.
2. Quel nombre faut-il choisir pour obtenir 6 ?
3. Soit x le nombre de départ, donner l'expression finale en fonction de x.

7 Résoudre les défis suivants.

1. (a) Choisir deux nombres consécutifs, calculer leur somme et comparer avec les résultats de la classe.
   (b) Quelle conjecture peut-on émettre ?
2. On choisit un entier n.
   (a) Comment s'écrit le nombre suivant n ?
   (b) Donner l'expression de la somme de deux nombres consécutifs en fonction de n.
   (c) Démontrer la conjecture.
3. Montrer que la somme de trois nombres consécutifs est multiple de 3.

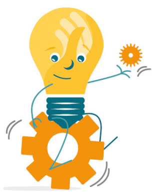
Activité récréative

Défis !!!



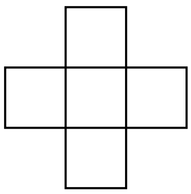
Défi 1

Nihad et Adam ont choisi un nombre (entier positif).
Nihad le multiplie par 5 et ajoute 35.
Adam le multiplie par 2 et ajoute 146.
Ils trouvent le même nombre à la fin.
Quel nombre ont-ils choisi ?

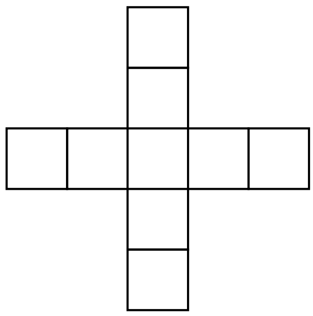


Défi 2

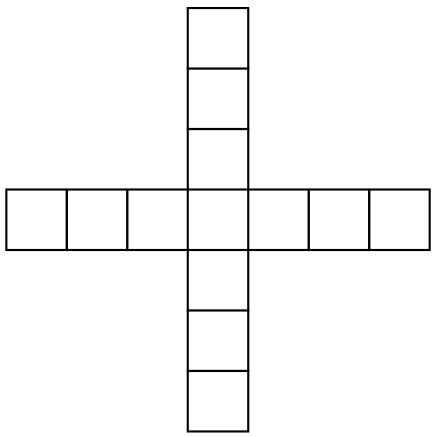
Avec des petits carrés tous identiques, on construit un pattern selon le modèle évolutif ci-dessous :



Rang 1



Rang 2



Rang 3

1. Dessiner l'élément du rang suivant et expliquer la règle.
2. Déterminer le nombre de petits carrés des éléments du rang 5, du rang 10, du rang 17.
3. Déterminer le nombre de petits carrés de l'élément du rang 100 et donner un moyen de calculer rapidement le nombre de petits carrés d'un élément à n'importe quel rang.
4. Existe-t-il un élément qui contient 532 petits carrés ? Un élément qui contient 813 petits carrés ?

Source : « La résolution de problèmes mathématiques au collège », MENJS, 2021

Espace & géométrie

Séquence 14

Reconnaître des solides

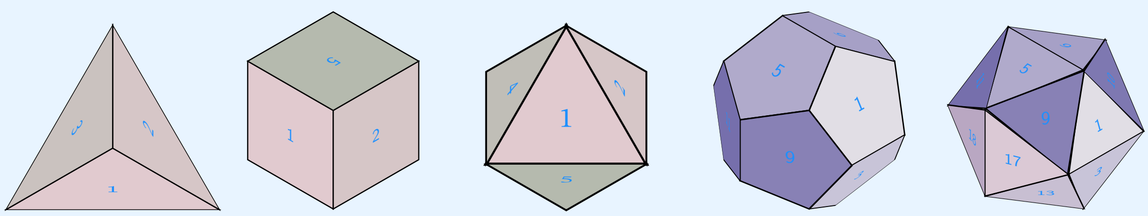
Connaissances :

- Reconnaître des solides : pavé droit, cube, prisme, cylindre, pyramide, cône et boule.

Débat : les solides de Platon

Parmi les solides de l'espace, il en est une sorte qui a été étudiée par le philosophe grec **Platon** $(-425; -348)$: les polyèdres réguliers et convexes. Ce dernier associe chacun des quatre éléments physiques avec un solide régulier.

- la **Terre** est associée au *cube* : ces petits solides font de la poussière lorsqu'ils sont émiettés et se cassent lorsqu'on s'en saisit ;
- l'**air** est associé à l'*octaèdre* : ses composants minuscules sont si doux qu'on peut à peine les sentir ;
- l'**eau** est associée à l'*icosaèdre* : elle s'échappe de la main lorsqu'on la saisit comme si elle était constituée de petites boules minuscules ;
- le **feu** est associé au *tétraèdre* car la chaleur du feu semble pointue comme un poignard ;
- le *dodécaèdre* est mis en correspondance avec le **tout**, parce que c'est le solide qui ressemble le plus à la sphère.



Vidéo : **Les 5 solides de Platon**, chaîne YouTube *Micmaths* de *Mickaël Launay*.

Activité d'approche

Les polydrons

Objectifs : construire des solides fermés ; trier des solides selon leur forme.

Les Polydrons sont des polygones en plastique dur qui peuvent se fixer entre eux à l'aide de charnières.

Ce matériel permet de construire facilement des polyèdres et des patrons.

Construction de solides

1. Citer les différentes formes de Polydrons en précisant leur nature exacte.

---

2. Construire un premier solide, donner son nom si possible et le dessiner.

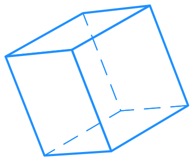
3. Construire d'autres solides en essayant de varier les formes.

Classement des solides

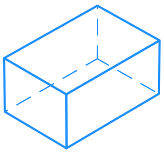
1. En regroupant tous les solides de la classe, déterminer un classement commun, discuter des choix.
2. Citer les classes choisies en expliquant leurs caractéristiques.

Trace écrite

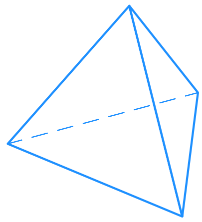
Les polyèdres

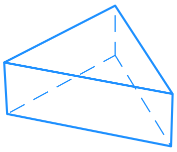


Cube : cas particulier du pavé droit lorsque toutes les faces sont carrées



Parallélépipède ou pavé : du grec *parallelos*, parallèle et *epidon*, surface. Cas particulier du prisme droit lorsque la base est un rectangle





Prisme : du grec *prismatos*, scié. Deux bases polygonales, des faces latérales qui sont des parallélogrammes, rectangles si le prisme est droit

Pyramide : une base polygonale, un sommet, des faces latérales triangulaires, qui sont isocèles et superposables si la pyramide est régulière

prismes

pyramides

Les solides du collège

cylindres

cônes

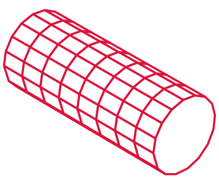
boules

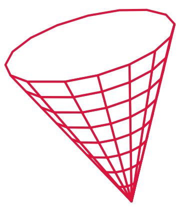
Les solides non polyédriques

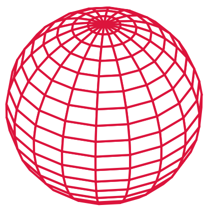
Cylindre : du grec *kulindros*, rouleau. Deux bases en forme de disques, une surface latérale

Cône : du grec *kônos*, pomme de pain. Une base en forme de disque, une surface latérale, un sommet

La **sphère** : du grec *sphaîra*, corps rond, est la surface extérieure de la **boule**







Fiche d'exercices

1 On considère les catégories de solides suivants que l'on peut trouver dans la vie courante :

A. Différentes boites parallélépipédiques et cubiques.

B. Des prismes droits à bases triangulaires (Toblerone) ou octogonales.

C. Une pyramide à base carrée tronquée (boite de fromage de chèvre).

D. Des cylindres (boîtes de conserve diverses, boîte de camembert, rouleau de papier d'aluminium).

E. Des cônes.

F. Des boules (balles, ballons).

G. D'autres emballages (formes ovales, anneaux, boîtes en forme de cœur...).

1. Classer ces sept catégories selon leur caractère polyédrique ou non
2. Pourquoi, en cours de maths, faut-il s'intéresser uniquement aux formes des boites d'emballages ?
3. Quelle est la particularité du rouleau de papier d'aluminium ?
4. Des classes ont proposé les classements suivants :

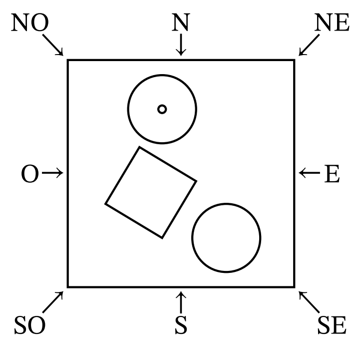
5^e1	5^e2
A, B et C	A, B et D
F	C et E
G	F et G

   Quels ont pu être leurs critères de classement ?

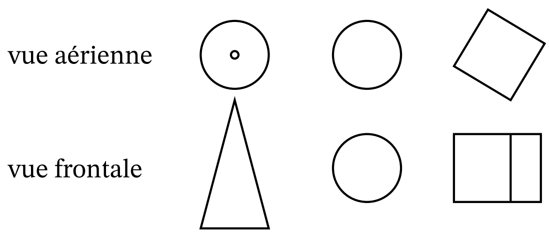
5. On propose la définition suivante pour déterminer un polyèdre : « solide qui ne roule pas » et pour un non polyèdre : « solide qui roule ».
   Ces définition vous paraissent-elles pertinentes ?

2 On dispose de trois objets sur une table : un cône, un cube et une sphère. On a également des représentations de ces solides selon des points de vue différents.

Vue de la table du dessus :

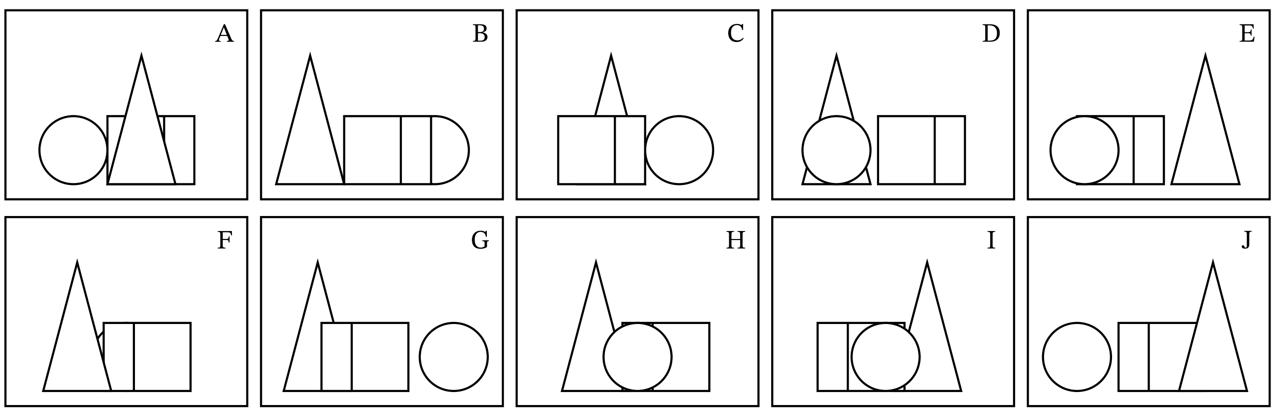


Solides en vue du dessus et de face :



Les images ci-dessous représentent des vues, selon divers axes de visée. Déterminer le point de vue de chaque image (attention, certaines images correspondent à aucune configuration !).

N	NE	E	SE	S	SO	O	NO



Activité récréative

La relation d'Euler

Leonhard Euler, né le 15 avril 1707 à Bâle (Suisse) et mort à 76 ans le 7 septembre 1783 à Saint-Pétersbourg (Empire russe), est un mathématicien et physicien suisse.

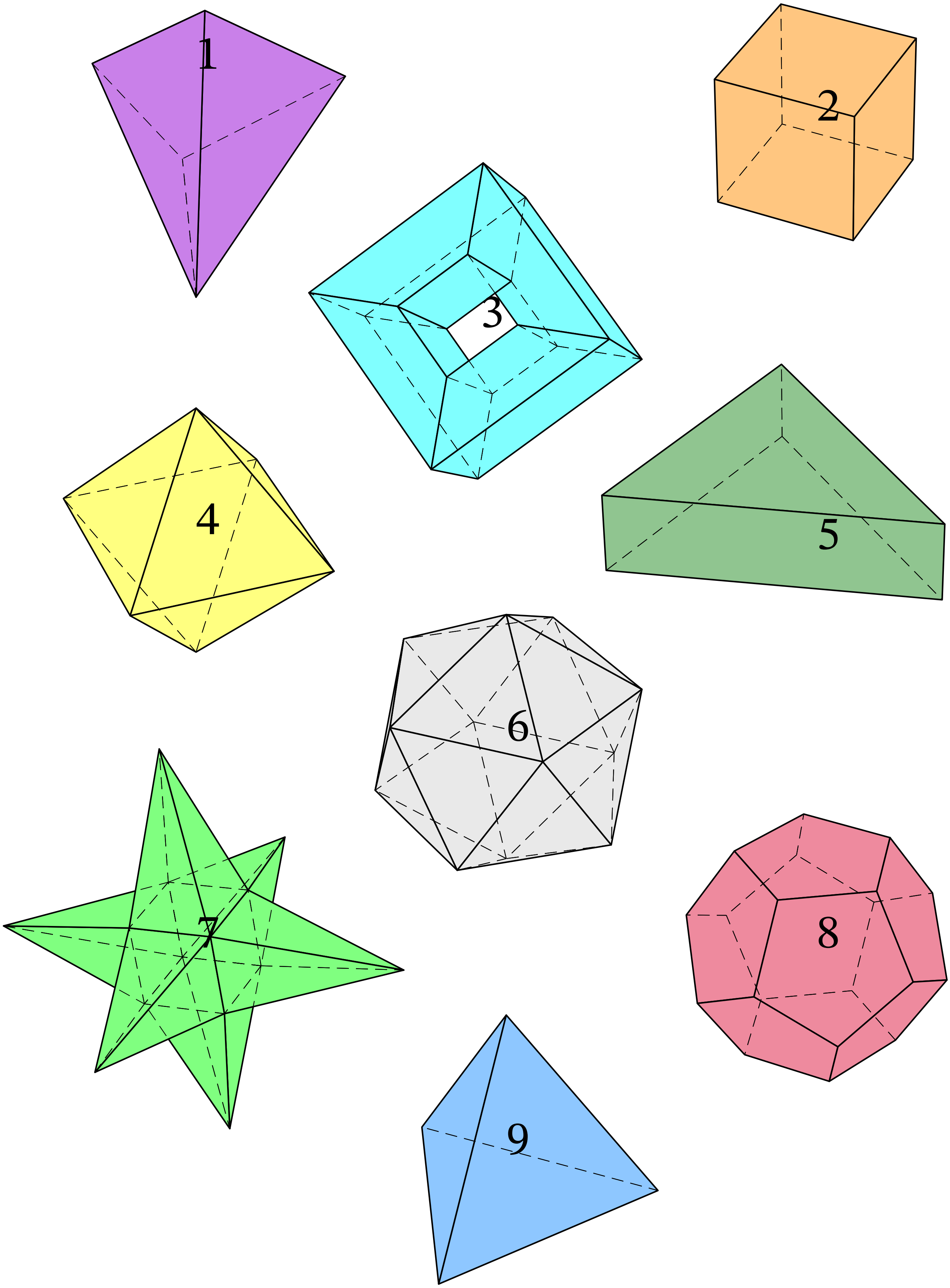
On a reproduit page suivante une représentation en perspective cavalière de neuf solides. Pour chacun de ces solides, effectuer les actions suivantes à l'aide du tableau ci-dessous :

- retrouver son nom dans le tableau (indiquer le numéro n);
- trouver le nombre de faces F;
- trouver le nombre de sommets S;
- trouver le nombre d'arrêtes A;
- calculer la valeur de $F+S-A$, que remarque-t-on ?
- dire si le solide est régulier, c'est-à-dire si toutes ses faces sont identiques et régulières, et tous les angles du solide sont identiques;
- dire si le solide est convexe, c'est-à-dire s'il n'a pas de « creux » ou de trou;
- enfin, dire s'il s'agit d'un solide de Platon (polyèdre régulier et convexe).

Nom du solide	n	F	S	A	$F+S-A$	est-il régulier ?	est-il convexe ?	solide de Platon ?
Tétraèdre								
Polyèdre étoilé								
Octaèdre								
Pyramide								
Icosaèdre								
Prisme								
Cube								
Beignoïde								
Dodécaèdre								

Source : d'après une activité parue dans la revue « Envol » n°129, octobre-novembre-décembre 2004.

Les solides



Grandeurs
& mesures

Séquence **15**

Aires et périmètres

Compétences :

- Mener des calculs impliquant des grandeurs mesurables, exprimer les résultats dans les unités adaptées.
- Vérifier la cohérence des résultats des unités.
- Effectuer des conversions d'unités.

Débat : Haïku

Un **haïku** est un petit poème traditionnel japonais, de forme très concise (dix-sept syllabes en trois vers : 5-7-5 ou 7-5-5 ou 5-5-7). *Richard Cauche* est enseignant de mathématiques et membre de l'IREM de Paris. Il nous fait partager ces haïkus mathématiques sur le périmètre et l'aire du disque :

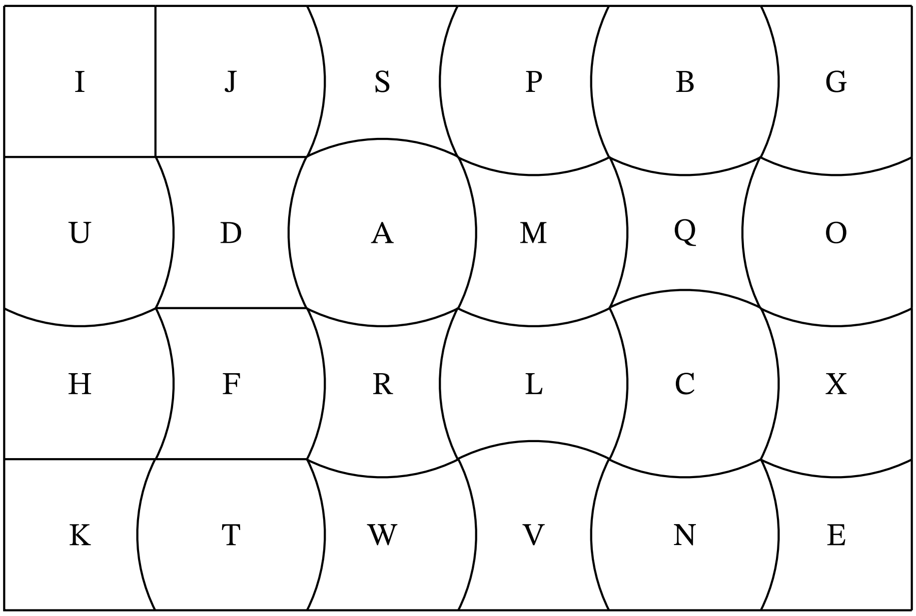
Vidéo 1 : **Archimède et le nombre** π, chaîne YouTube *m@ths et tiques*, Yvan Monka.
Vidéo 2 : **Les aires**, chaîne YouTube *Rapématiques*, A'Rieka.

Activité d'approche

Le curvica

Objectifs : différencier périmètre et aire ; comparer des périmètres et des aires sans utiliser la mesure.

Le curvica est un jeu-puzzle de 24 pièces inventé par **Jean Fromentin** en 1982 afin de travailler sur les notions de périmètre, d'aire et de symétrie, entre autres ! À partir d'un carré, on obtient une pièce du puzzle curvica en « creusant », en « bombant »ou en laissant droits les côtés. Les arcs produits sont tous identiques.



1. On s'intéresse uniquement aux pièces A, B, C, D, E et F que l'on pourra colorier.
   (a) Classer ces six pièces du plus petit au plus grand périmètre. ....
   (b) Classer ces six pièces de la plus petite à la plus grande aire. ....
   (c) Quelles sont les deux pièces qui ont la même aire et le même périmètre ? ....
   (d) Trouver deux pièces qui ont le même périmètre, mais des aires différentes. ....
2. On s'intéresse maintenant à toutes les pièces.
   (a) Y a-t-il une unique pièce d'aire minimale ? ....
   (b) Y a-t-il une unique pièce de périmètre minimum ? ....
   (c) Y a-t-il une unique pièce d'aire maximale ? ....
   (d) Y a-t-il une unique pièce de périmètre maximum ? ....
   (e) Y a-t-il une ou des pièces de même aire que la carré I ? ....
   (f) Y a-t-il une ou des pièces de même périmètre que la carré I ? ....

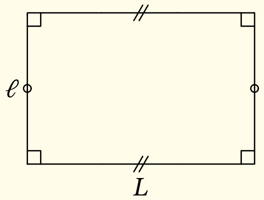
Source : d'après « Curvica - activités mathématiques ludiques », Yves Martin, IREM de la Réunion.

Trace écrite

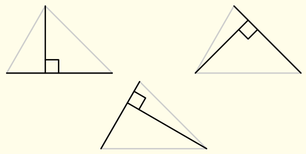
1 Périmètres et aires usuelles

- Le périmètre d'un polygone est la somme des longueurs des segments qui le compose ;
- la circonférence d'un cercle de rayon r se calcule grâce à la formule $p = 2 \times \pi \times r$.

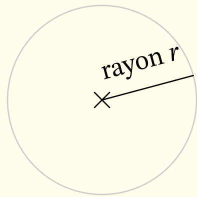
Pour les aires, on a les formules suivantes :



Aire d'un rectangle :
$L \times \ell$



Aire d'un triangle :
$\dfrac{\text{côté} \times \text{hauteur relative à ce côté}}{2}$



Aire d'un disque :
$\pi \times r \times r$

Exemple

Aire d'un rectangle de longueur 0,3 dm et de largeur 0,2 dm :

$0{,}3\,\text{dm} \times 0{,}2\,\text{dm} = 0{,}06\,\text{dm}^2$

Exemple

Aire d'un triangle de base 28 mm et de hauteur relative 13 mm :

$\dfrac{28\,\text{mm} \times 13\,\text{mm}}{2} = 182\,\text{mm}^2$

Exemple

Aire et périmètre d'un disque de rayon 1,2 cm :

$\mathcal{A} = \pi \times (1{,}2\,\text{cm})^2 \approx 4{,}52\,\text{cm}^2$.

$\mathcal{P} = 2 \times \pi \times 1{,}2\,\text{cm} \approx 7{,}54\,\text{cm}$

Remarque : pour calculer l'aire d'une figure complexe, il suffit de la « découper » en figures usuelles et d'additionner ou de soustraire les aires qui la constituent.

2 Conversions

On peut mesurer une longueur grâce au mètre (m) et ses multiples et sous-multiples :

×10 ×10 ×10 ×10 ×10 ×10

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
		7	3	2	1	

Exemple

0,073 21 km = 0,732 1 hm = 7,321 dam = 73,21 m = 732,1 dm = 7 321 cm = 73 210 mm.

L'aire est une grandeur composée, correspondant au produit de deux longueurs. Chaque unité d'aire dans le tableau comporte donc deux colonnes. Pour désigner une aire, on utilise le mètre carré (m^2) et ses multiples et sous-multiples.
Pour les mesures agraires, on utilise l'are (a) qui équivaut à 100 m^2 et l'hectare (ha) qui vaut 100 ares.

×100 ×100 ×100 ×100 ×100 ×100

km^2		hm^2		dam^2		m^2		dm^2		cm^2		mm^2	
			ha		a								
			3	7	0	1							

Exemple

$0{,}037\,01\,\text{km}^2 = 3{,}701\,\text{hm}^2 = 3{,}701\,\text{ha} = 370{,}1\,\text{dam}^2 = 37\,010\,\text{m}^2 = 370{,}1\,\text{a} = 3\,701\,000\,\text{dm}^2 \ldots$

Fiche d'exercices

1 Effectuer les conversions de longueurs suivantes :

1. 1 275 m = ... cm
2. 32,5 dm = ... dam
3. 345 697,34 cm = ... km
4. 2,5 km = ... m

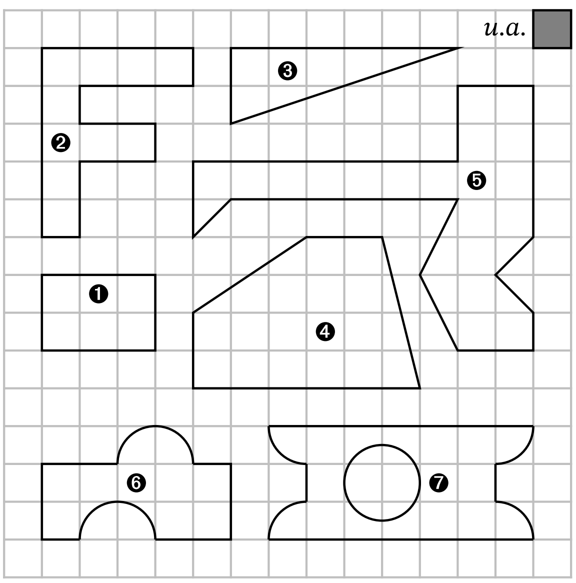
2 Effectuer les conversions d'aires suivantes :

1. 32,5 dm^2 = ... dam^2
2. 345 697,34 cm^2 = ... m^2
3. 0,003 m^2 = ... mm^2
4. 2,5 km^2 = ... m^2

3 Donner une unité de mesure usuelle pour chacun des objets suivants :

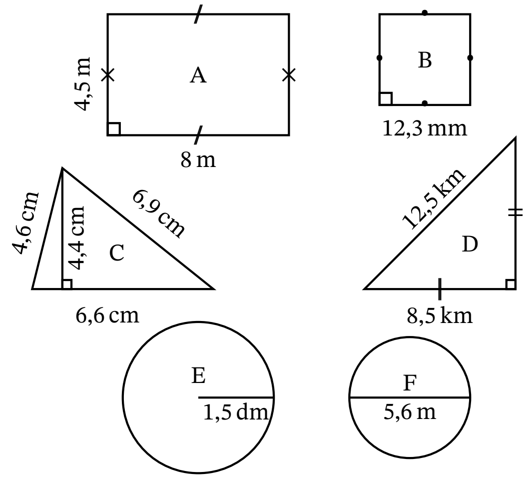
1. Longueur d'une piste d'athlétisme : ....
2. Surface d'un jardin : ....
3. Longueur d'une fourmi : ....
4. Surface d'une feuille : ....
5. Largeur d'une chambre : ....
6. Rayon d'une planète : ....

4 Sachant que l'unité d'aire est le carreau (*u.a.*), déterminer l'aire de chaque surface suivante.



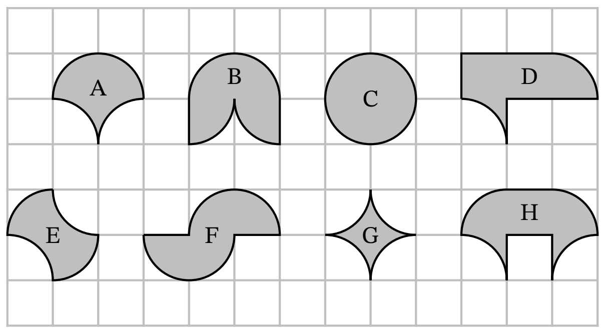
5
1. Quelle est l'aire d'un carré de périmètre 32 cm ?
2. Quel est le périmètre d'un rectangle de largeur 6 m et d'aire 48 m^2 ?

6 Calculer l'aire et le périmètre de ces figures.



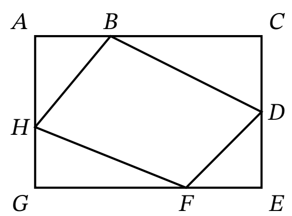
7 L'unité d'aire est le carré.

1. On peut regrouper les surfaces ci-dessous par deux ou par trois sauf une, laquelle ?
2. Calculer alors l'aire de chaque surface.



8 Dans cette figure, on a :

$AB = 9$ cm
$BC = 21$ cm
$CD = 11$ cm
$DE = 9$ cm
$EF = 11$ cm
$GH = 7$ cm



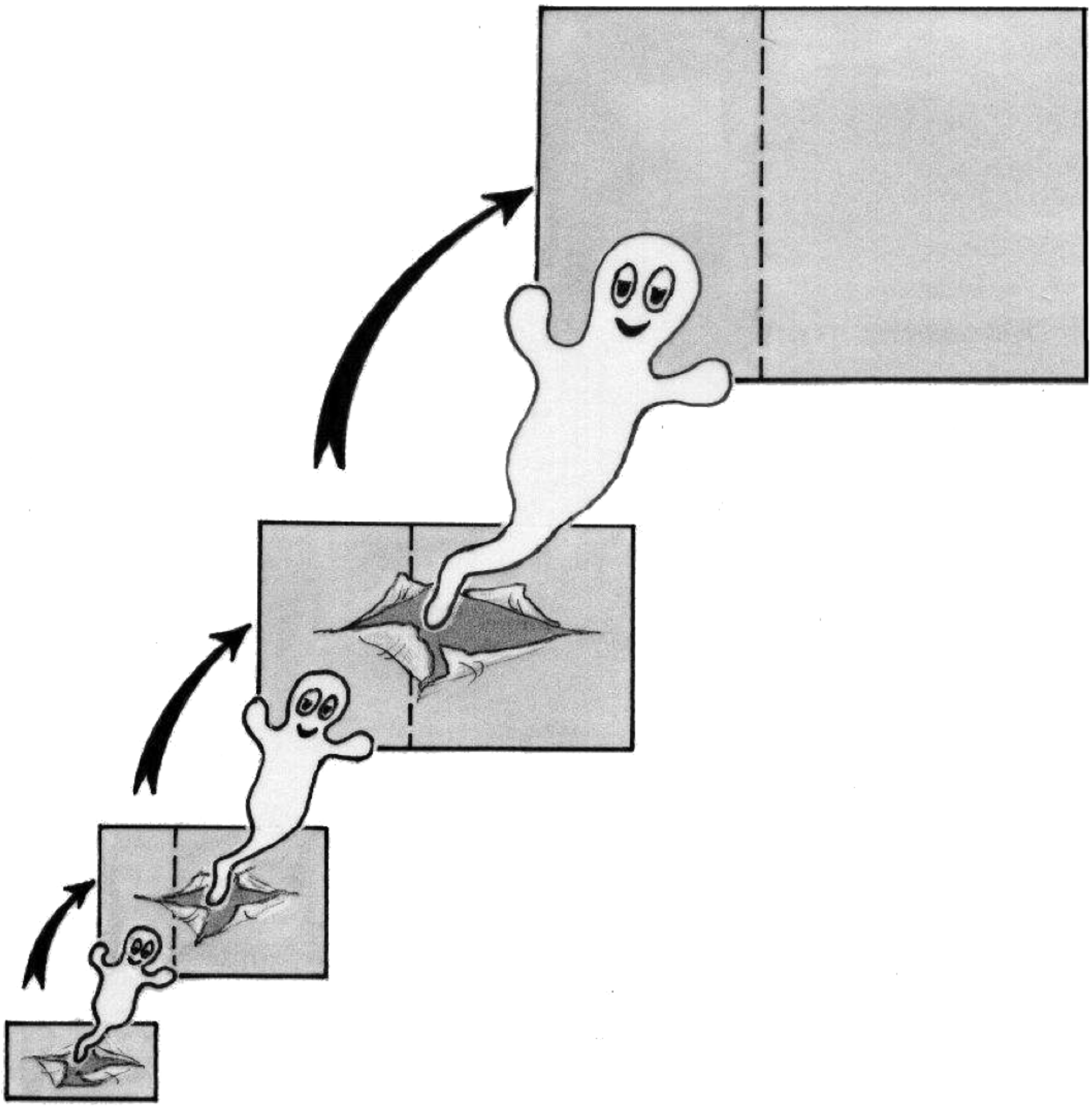
1. Calculer le périmètre du rectangle $ACEG$.
2. Calculer l'aire du quadrilatère $BDFH$.

Activité récréative

Tel père, tel fils

C'est l'histoire d'un petit rectangle de dimensions 2 mm × 3 mm.
Chaque jour, il s'agrandit pour devenir un rectangle plus grand : sa nouvelle largeur est égale à son ancienne longueur ; sa nouvelle longueur est égale à la somme de ses deux anciennes dimensions.

Au bout de combien de jours son aire dépassera-t-elle 1,5 m^2 ?



Par groupes, vous effectuerez les recherches, puis rendrez une fiche récapitulative où figureront votre raisonnement, la modélisation et les calculs effectués.

D'après « La résolution de problèmes mathématiques au collège », MENJS, 2021.

Nombres
& Calculs

Séquence **16**

Calculs avec des nombres relatifs

Connaissances :

- Somme et différence de nombres décimaux.

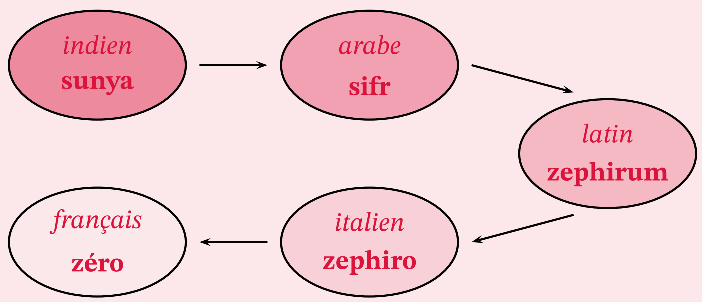
Compétences :

- Calculer avec des nombres décimaux relatifs.

Débat : Brahmagupta et l'invention du 0

Brahmagupta est un mathématicien indien né en 598. Dans l'un de ses ouvrages, le *Brahma Sphuta Siddhanta*, il présente les règles d'arithmétique qui concernant les nombres positifs (qu'il appelle les biens) et les nombres négatifs (qu'il appelle les dettes) par des calculs de pertes et de profits. Il définit ainsi le zéro comme la différence d'un nombre par lui-même. Par exemple, voilà comment il exprime les opérations usuelles :

- zéro soustrait d'une dette est une dette ;
- zéro soustrait d'un bien est un bien ;
- zéro soustrait de zéro est zéro ;
- une dette soustraite de zéro est un bien ;
- un bien soustrait de zéro est une dette.



Vidéo : **Addition et soustraction de nombres relatifs**, site Internet *Rapémathiques*, d'A'Rieka.

Activité d'approche

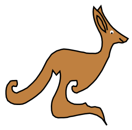
La pêche mystérieuse

Objectifs : effectuer des additions et des soustractions avec des nombres entiers relatifs.

Sept amis jouent à la fête foraine au jeu de la pêche mystérieuse, ils gagnent ou il perdent des points selon les objets qu'ils « pêchent ». Voilà les points qu'ils peuvent gagner :

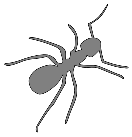
Billy
+150 points

Birdy
+100 points

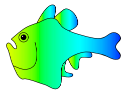


Skippy
+50 points

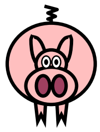
Cependant, certains objets font perdre des points :



Antas
-25 points

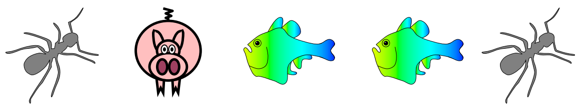
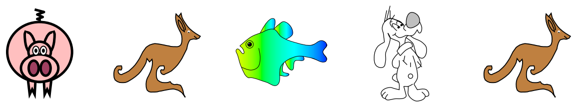
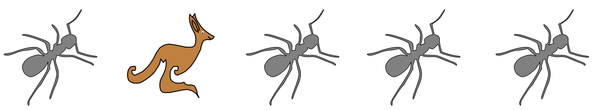
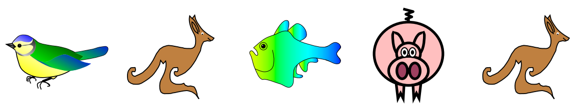
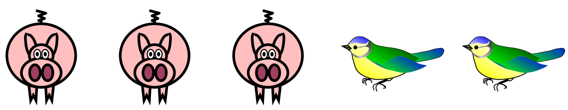


Fishas
-75 points



Pigas
-125 points

Compléter le tableau suivant des gains et des pertes. En déduire le total, puis le classement.

Pêche	Gains	Pertes	Total
Lojain 			
Nihal 			
Lorette 			
Lina 			
Milan 			
Marwa 			
Roxane 			

Classement : --

Trace écrite

1 Additionner deux nombres relatifs

Méthode : Somme de deux nombres relatifs

- La somme de deux nombres relatifs ayant **le même signe** s'obtient en ajoutant les distances à 0 et en mettant le même signe que les nombres.
- La somme de deux nombres relatifs n'ayant **pas le même signe** s'obtient en calculant la différence entre les distances à 0 et en mettant le signe du terme ayant la plus grande distance à 0.

Exemple

Nombres de même signe :
$A = (+3) + (+7) = 3 + 7$
$B = (-12) + (-5)$

• Le signe devant 3 et 7 est $+$
on additionne 3 et 7 et on met le signe $+$: $A = +10$.
On peut écrire $A = +(3 + 7) = +10 = 10$.
• Le signe devant 12 et 5 est $-$
on additionne 12 et 5 et on met le signe $-$: $B = -17$.
On peut écrire $B = -(12 + 5) = -17$.

Nombres de signes différents :
$C = (-7) + (+3) = (-7) + 3$
$D = (+12) + (-5) = 12 + (-5)$

• Le signe devant 7 est $-$ et celui devant 3 est $+$
on effectue la différence entre 3 et 7 et
on met le signe $-$: $C = -(7 - 3) = -4$.
• Le signe devant 12 est $+$ et celui devant 5 est $-$
on effectue la différence entre 5 et 12 et
on met le signe $+$: $D = +(12 - 5) = +7 = 7$.

Propriété

La somme de deux nombres opposés vaut 0.

Exemple

$E = (+2\,022) + (-2\,022) = (-2\,022) + (+2\,022) = 2\,022 - 2\,022 = 0$.

2 Soustraire deux nombres relatifs

Propriété

Soustraire un nombre revient à ajouter son opposé : $a - b = a + (-b)$.

Exemple

$F = (+15,3) - (-5,1) = (+15,3) + (+5,1) = +(15,3 + 5,1) = +20,4 = 20,4$
$G = (+2,4) - (+1,3) = (+2,4) + (-1,3) = +(2,4 - 1,3) = +1,1 = 1,1$

Méthode : Simplification d'expressions

Pour **simplifier** les écritures dans les opérations :

1. on transforme chaque soustraction en addition de l'opposé ;
2. on écrit l'expression en enlevant les parenthèses et les signes $+$ devant les nombres ;
3. on peut éventuellement regrouper les termes de même signe afin de les calculer ensemble.

Exemple

On souhaite simplifier l'expression $H = (+1,2) + (+3,4) + (-1,5) - (+2,7) - (-5,7)$.

1. $H = (+1,2) + (+3,4) + (-1,5) + (-2,7) + (+5,7)$
2. $H = 1,2 + 3,4 - 1,5 - 2,7 + 5,7$
3. $H = (1,2 + 3,4 + 5,7) - (1,5 + 2,7) = 10,3 - 4,2 = 6,1$.

Fiche d'exercices

1 Effectuer les calculs suivants :

A $= (-12) + (-15) =$ ....

B $= (-20) + (+18) =$ ....

C $= (+21,5) + (-21,5) =$ ....

D $= (+10) + (-13) =$ ....

E $= (-3,5) + (+16) =$ ....

F $= (+13) + (+7) =$ ....

2 Pour chaque cas, transformer la soustraction en addition puis effectuer le calcul.

A $= (-12) - (+15) =$ ....

B $= (-45) - (-41) =$ ....

C $= (+32) - (+27) =$ ....

D $= (-2) - (+2,7) =$ ....

E $= (-1,4) - (-2,3) =$ ....

3 Effectuer les calculs suivants en simplifiant.

A $= (+12) + (-11) + (+25) + (-17)$

B $= (-2,1) + (-9) + (+6,4) + (-8,3)$

C $= (+14) + (-7) + (+2) + (-3,75) + (-5,25)$

D $= (+13,5) + (-8,1) + (-6,9) + (-5,5)$

4 Pour chaque expression, regrouper astucieusement puis calculer.

A $= -14 + 5 - 2$

B $= -2 - 23 + 33$

C $= 18 - 7 + 9 - 18 - 9 + 7$

D $= 6,4 + 11,5 - 3,4 + 0,5$

E $= 13,36 + 4 + 6 - 3,36$

5 Dans le monde entier, les heures locales sont fixées par rapport à l'heure universelle (UT). Paris est à UT, New York est à UT -6 h et New Delhi est à UT $+4$ h 30 min.

1. Cyrine, qui est à Montpellier, appelle à New York à 20 h et téléphone pendant trois quarts d'heure. Quelle heure est-il à New York à la fin de l'appel ?
2. Après ce coup de téléphone, Cyrine peut-elle raisonnablement appeler à New Delhi ?

6 Dans un QCM de dix questions, une réponse juste rapporte 4 points, une absence de réponse 0 point et une mauvaise réponse enlève 3 points.

1. Bilel a 2 bonnes réponses et 8 mauvaises. Quelle est sa note ?
2. Quelle est la plus mauvaise note qu'il est possible d'obtenir à ce QCM ? La meilleure note ?
3. Jasmine a obtenu 14 points. Donner une combinaison possible pour obtenir ce résultat.

7 Voici un programme de calcul :

1. Choisir un nombre
2. Ajouter -3
3. Retirer $-1,5$
4. Donner l'opposé du résultat

1. Appliquer ce programme au nombre $-2,5$ puis 0.
2. Quel nombre faut-il choisir pour obtenir 6 ?
3. Soit x le nombre de départ, donner l'expression finale en fonction de x.

8 Compléter les pyramides suivantes sachant que chaque nombre est la somme des nombres se trouvant dans les deux cases juste en dessous.

-7			
-4			
8			
-1			

-3			
-5			
-7			
6			

-5			
-5			
3			
$-1,5$			

$-5,2$			
	$-3,1$		
7,2			
6,3			

Activité récréative

Décryptage

Décrypter les codes suivants utilisé par l'agent Zérozérossette sachant que chaque symbole correspond à un nombre entier relatif et que la somme de chaque ligne et de chaque colonne est indiquée en bout de celle-ci.

❄	+	❄	+	✈	=	16
+		+		+		
♣	+	♣	+	♣	=	9
+		+		+		
✈	+	✔	+	♣	=	18
=		=		=		
14		17		12		

❄ =	✈ =
♣ =	✔ =

❄	+	❄	+	❄	=	−3
+		+		+		
✈	+	♣	+	❄	=	−3
+		+		+		
✔	+	✔	+	♣	=	6
=		=		=		
6		0		−6		

❄ =	✈ =
♣ =	✔ =

❄	+	✈	+	✈	+	❄	=	2
+		+		+		+		
✈	+	✈	+	✈	+	♣	=	9
+		+		+		+		
✈	+	♣	+	✔	+	✄	=	−7
=		=		=		=		
3		7		−1		−5		

❄ =	✈ =	♣ =
✄ =	✔ =	

✔	+	✔	+	♣	+	♣	=	−158
+		+		+		+		
✈	+	✔	+	✄	+	✄	=	−19
+		+		+		+		
❄	+	✔	+	✈	+	✔	=	−86
=		=		=		=		
−32		−162		−37		−32		

❄ =	✈ =	♣ =
✄ =	✔ =	

Espace &
géométrie

Séquence 17

L'inégalité triangulaire

Connaissances :

- Triangle : inégalité triangulaire.

Compétences :

- Mettre en œuvre ou écrire un protocole de construction d'une figure géométrique.

Débat : des instruments de navigation astronomique anciens

De tous temps, les hommes ont cherché à se repérer. Avant l'avènement de l'électronique et des GPS, de multiples instruments ont pu exister, par exemple :

Astrolabe :
représentation plane de la sphère céleste
Antiquité

Boussole :
indique le nord magnétique
XIII^{e}

Octant :
mesure la hauteur des corps célestes (45°)
XVIII^{e}

Sextant :
mesure la hauteur des corps célestes (60°)
XVIII^{e}

Vidéo : **Du kamal au GPS 1** et **Du kamal au GPS 2**, chaîne Youtube du *Musée national de la marine*.

Activité d'approche

Avec des allumettes

Objectifs : construire des triangles sous contraintes.

Devant vous, vous avez dix allumettes. Pour chacune des questions suivantes, faire la construction si elle est possible avec des allumettes puis faire un dessin pour schématiser la situation.

1. (a) Aligner quatre allumettes en les plaçant les unes à côté des autres.

   (b) À partir de ce segment de longueur 4 allumettes, construire un triangle dont les deux autres côtés ont pour longueur trois allumettes.

   (c) En utilisant les dix allumettes, construire un triangle différent du précédent dont un des côtés a pour longueur quatre allumettes. Quelles sont les longueurs de ses côtés ?

2. En utilisant les dix allumettes, est-il possible de construire un triangle dont un des côtés a pour longueur six allumettes ? sept allumettes ? Expliquer.

3. En utilisant les dix allumettes, peut-on construire un triangle dont un côté a pour longueur cinq allumettes ? Que constate-t-on dans ce cas ?

4. On veut maintenant construire un triangle de périmètre 12 allumettes dont les côtés ont pour longueur un nombre entier d'allumettes. Donner toutes les solutions possibles ainsi que la nature des triangles.

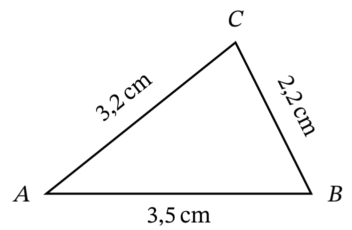
Trace écrite

1 L'inégalité triangulaire

Propriété

Dans un triangle, la longueur d'un côté est toujours inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés. S'il y a égalité, alors les trois points sont alignés et le triangle est « plat ».

Exemple



Dans le triangle ABC, on a :

- $AC = 3{,}2\,\text{cm}$ et $AB + BC = 5{,}7\,\text{cm}$ donc $AC \leq AB + BC$;
- $CB = 2{,}2\,\text{cm}$ et $CA + AB = 6{,}7\,\text{cm}$ donc $CB \leq CA + AB$;
- $BA = 3{,}5\,\text{cm}$ et $BC + CA = 5{,}4\,\text{cm}$ donc $BA \leq BC + CA$.

Remarque : dans la pratique, on vérifie seulement que la longueur du plus grand côté est plus grande que la somme des longueurs des deux autres côtés.

2 Construction de triangles

Pour construire un triangle, il faut au minimum trois données :

- soit trois longueurs ;
- soit deux longueurs et l'angle compris entre les segments correspondants aux longueurs données ;
- soit une longueur et les deux angles adjacents au segment correspondant à la longueur donnée ;
- si on a trois angles, on pourra construire un triangle mais il ne sera pas unique : tous les triangles seront semblables (des agrandissements ou des réductions du même triangle).

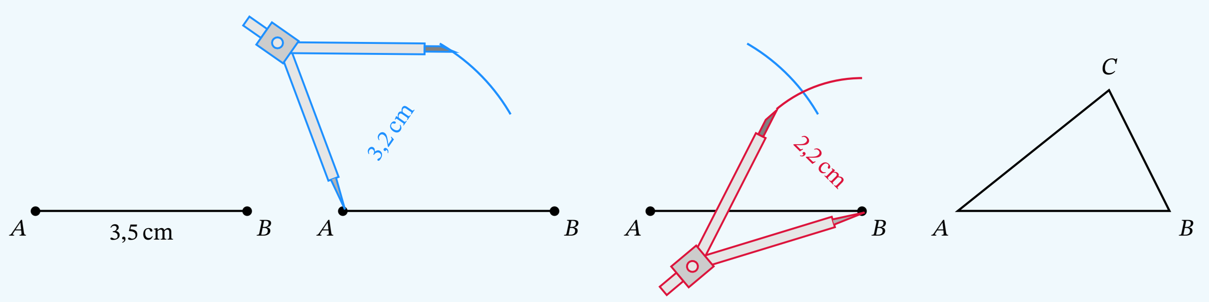
Méthode : Construire un triangle connaissant trois longueurs

Pour construire un triangle ABC dont on connaît les longueurs des trois côtés :

- on trace à la règle graduée l'un des côtés (en général le plus grand), par exemple $[AB]$;
- on trace un arc de cercle de centre A et de rayon AC ;
- on trace un arc de cercle de centre B et de rayon BC ;
- le point C se situe à l'intersection des deux arcs de cercle.

Exemple

Tracer le triangle ABC tel que : $AB = 3{,}5\,\text{cm}$; $BC = 2{,}2\,\text{cm}$; $CA = 3{,}2\,\text{cm}$.



tracer le segment [AB] de longueur 3,5 cm

tracer un arc de cercle de centre A et de rayon 3,2 cm

tracer un arc de cercle de centre A et de rayon 2,2 cm

Placer le point C, intersection des deux arcs de cercle

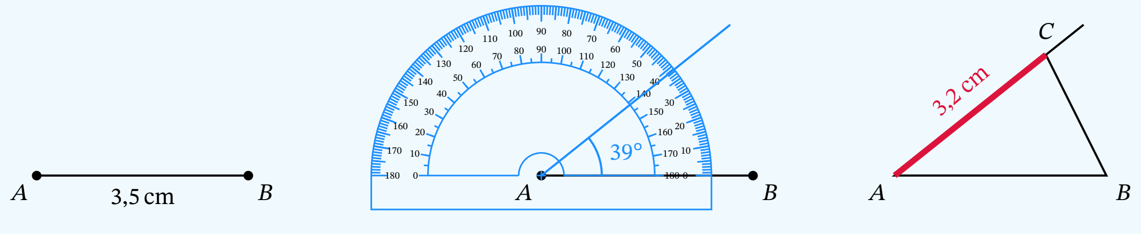
Méthode : Construire un triangle connaissant deux longueurs et un angle

Pour construire un triangle ABC dont on connaît la longueur de deux côtés ainsi que l'angle entre ces cotés :

- on trace à la règle graduée l'un des côtés donnés, par exemple $[AB]$;
- on trace au rapporteur l'angle donné à partir du segment tracé ;
- on trace à la règle graduée le deuxième segment de longueur donnée le long du support de l'angle tracé juste avant ;
- le point C se trouve à l'extrémité de ce segment.

Exemple

Tracer le triangle ABC tel que : $AB = 3{,}5\,\text{cm}$; $\widehat{BAC} = 39°$ et $CA = 3{,}2\,\text{cm}$.



tracer le segment $[AB]$ *de longueur 3,5 cm*

tracer la demi-droite d'origine A faisant un angle de 39° avec le segment $[AB]$

placer le point C sur cette demi-droite tel que $AC = 3{,}5\,\text{cm}$

Remarque : dans toute construction d'un triangle ABC, on a deux choix de construction pour C, d'un côté ou de l'autre du segment $[AB]$.

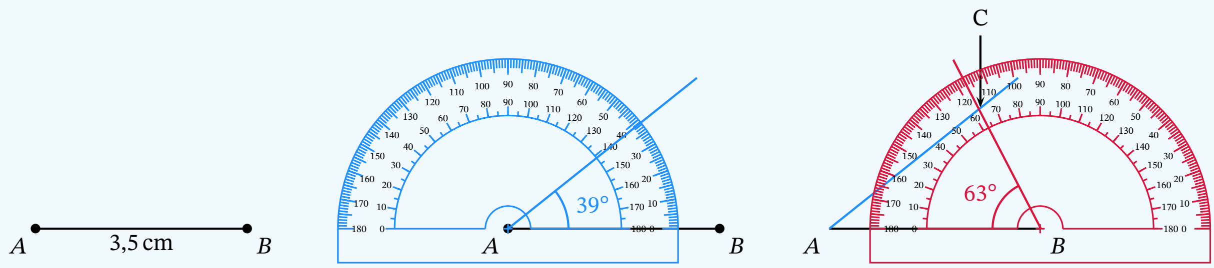
Méthode : Construire un triangle connaissant une longueur et deux angles

Pour construire un triangle ABC dont on connaît la longueur d'un côté ainsi que ses deux angles adjacents :

- on trace à la règle graduée le côté donné, par exemple $[AB]$;
- on trace au rapporteur les deux angles donnés à partir du segment tracé ;
- les deux demi-droites tracées grâce au rapporteur se coupent au point C.

Exemple

Tracer le triangle ABC tel que : $AB = 3{,}5\,\text{cm}$, $\widehat{BAC} = 39°$ et $\widehat{ABC} = 63°$



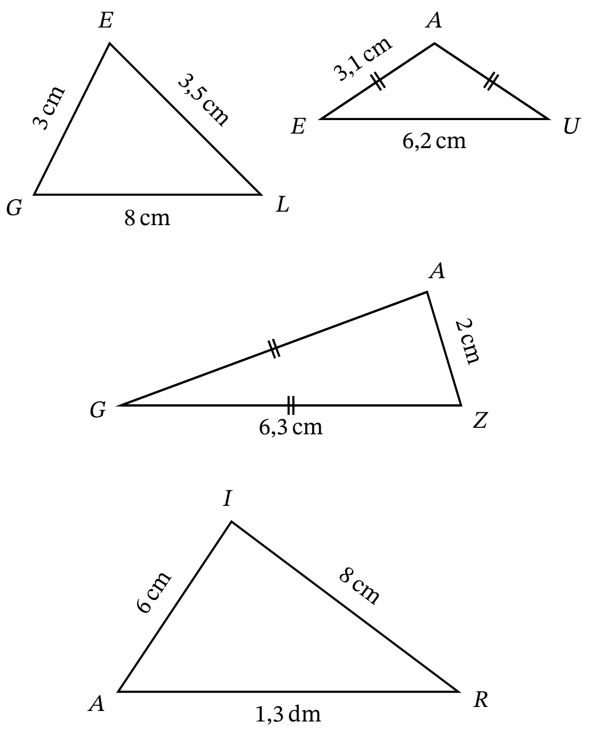
tracer le segment $[AB]$ *de longueur 3,5 cm*

tracer la demi-droite d'origine A faisant un angle de 39° avec le segment $[AB]$

tracer la demi-droite d'origine B faisant un angle de 63° avec le segment $[BA]$*. Placer le point C à l'intersection des deux demi-droites*

Fiche d'exercices

1 Ces triangles sont-ils constructibles (ils ne sont pas tracés en vraie grandeur) ?



2 Choisir trois nombres du tableau (chacun une fois) correspondant aux longueurs des côtés d'un triangle :

1. non constructible ;
2. quelconque ;
3. isocèle ;
4. de périmètre 13 cm.

8 cm	5 cm	12 cm	2 cm
10 cm	12 cm	15 cm	10 cm
9 cm	3 cm	5 cm	7 cm

3 Le périmètre d'un triangle non aplati est de 18 cm. Ce triangle peut-il avoir un côté...

1. de 7 cm ?
2. de 4 cm ?
3. de 11 cm ?
4. de 9 cm ?

Justifier en donnant un exemple lorsque cela est possible ou en le prouvant dans le cas contraire.

4 Construire en vraie grandeur les deux triangles NOM et EDF suivants tels que :

1. $MN = 4{,}5$ cm, $MO = 7$ cm et $\widehat{NMO} = 48°$.
2. $\widehat{FDE} = 45°$, $DE = 8$ cm et $\widehat{FED} = 28°$.

5 Après avoir effectué les calculs nécessaires, tracer chacun des triangles suivants en vraie grandeur.

1. EFG tel que $EF = 7{,}5$ cm, $\widehat{EFG} = 49°$ et $\widehat{EGF} = 72°$.
2. RST isocèle en S de périmètre 13 cm et $ST = 4$ cm.
3. OCI isocèle en I tel que $CO = 7$ cm et $\widehat{CIO} = 100°$.

6 Mohamed-Amine a trouvé un triangle sympa dont tous les angles ont pour mesure un entier pair : 44°, 66° et 70°.

1. Trouver un autre exemple de triangle dont les mesures d'angles sont paires.
2. En poursuivant ses recherches, elle a trouvé un triangle dont les mesures sont des multiples de trois : 45°, 51°et 84°. Trouve un autre exemple de triangle dont les mesures d'angles sont des multiples de trois.
3. Continuer les recherches en trouvant un triangle dont les mesures d'angles sont des multiples de quatre.
4. Cela est-il possible avec tous les nombres entiers ?

7 Rayan veut tracer un triangle tel que son périmètre mesure 16 cm et deux de ses angles mesurent 64° et 46°.

1. Calculer la mesure de son troisième angle.
2. Tracer un segment $[DE]$ mesurant 16 cm et placer le point A tel que $\widehat{ADE} = 32°$ et $\widehat{AED} = 23°$ qui sont les angles moitié de 64° et 46°.
3. Placer un point B sur le segment $[DE]$ à égale distance de A et de D, puis un point C sur le segment $[DE]$ à égale distance de A et E.
4. Quelle est la nature des triangles ABD et ACE ?
5. Calculer la mesure des angles de ABD et de ACE.
6. Démontrer que le périmètre du triangle ABC vaut bien 16 cm.
7. Montrer que $\widehat{ABC} = 46°$ et $\widehat{ACB} = 64°$ puis conclure.

Activité récréative

Le tangram

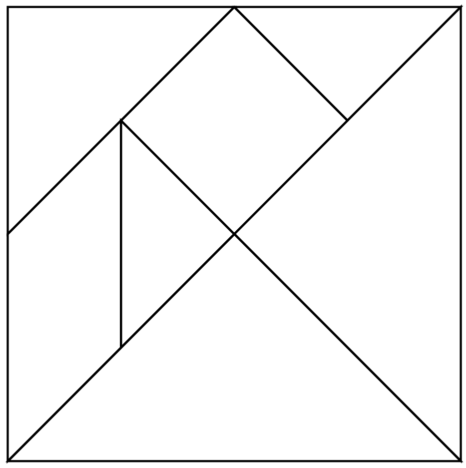
Histoire

Le jeu de tangram, appelé en chinois « qi qiao ban », prononcé *tzi tchiao pan*, « les sept plaques de l'habileté », semble avoir été inventé au début du XIXe siècle en Chine.

Ce jeu viendrait d'une légende qui dit qu'un empereur chinois du XVIe siècle du nom de *Tan*, fit tomber un carreau de faïence qui se brisa en 7 morceaux. Il n'arriva jamais à rassembler les morceaux pour reconstituer le carreau mais l'homme s'aperçut qu'avec les 7 pièces il était possible de créer de formes multiples.

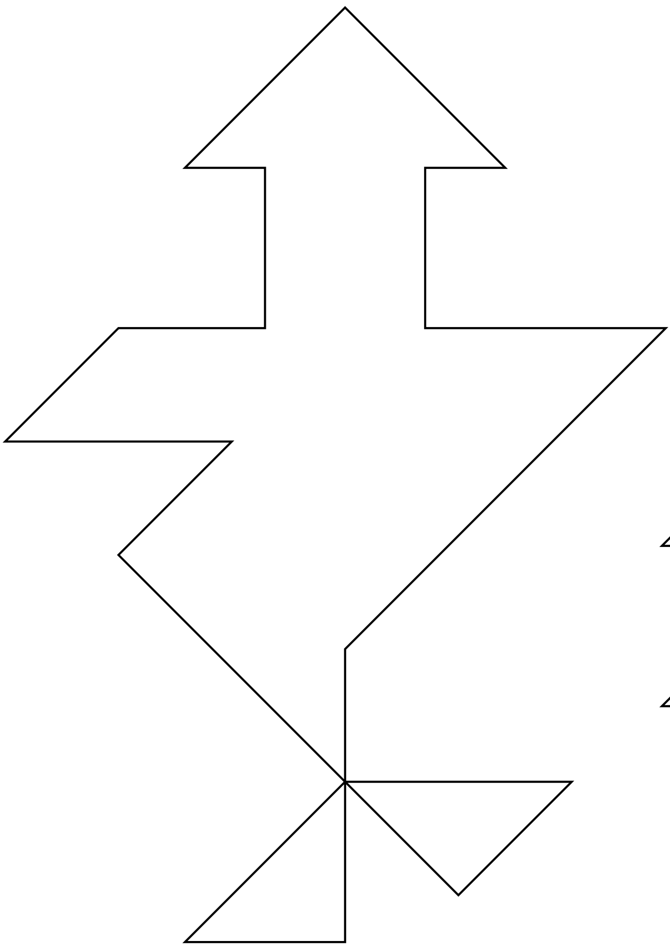
Le tangram carré

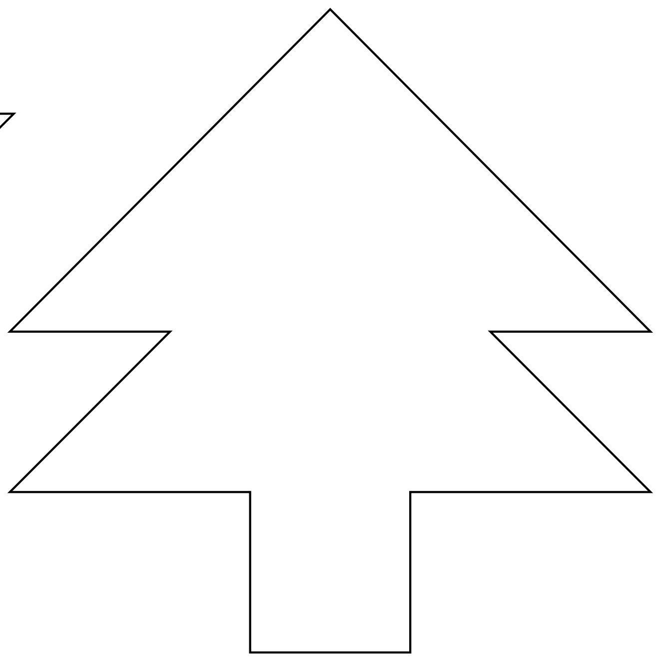
Voilà le tangram.
Donner la mesure de tous les angles présents sur la figure.
Matériel autorisé : équerre et compas.



Puzzles

Le bonhomme et le sapin sont deux formes constituées des sept pièces du tangram. Tracer le contour des formes à l'intérieur.
Matériel autorisé : règle non graduée et rapporteur.





Organisation &
gestion de données

Séquence **18**

Le ratio

Connaissances :

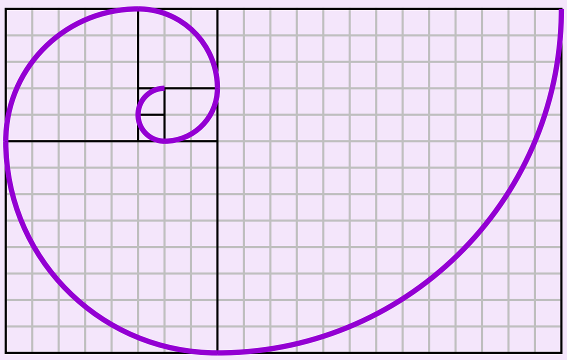
- Notion de ratio.

Compétences :

- Partager une quantité (par exemple une somme d'argent) en deux ou trois parts selon un ratio donné.

Débat : d'où vient le ratio ?

Ratio vient de l'anglais **ratio** que l'on traduit par proportion qui lui-même vient du latin **ratio** qui signifie calcul ou compte. Ce vocabulaire est plutôt utilisé dans le monde anglo-saxon.
On le retrouve pour la première fois dans *Les éléments*, d'*Euclide*, soit il y a environ 2 300 ans !

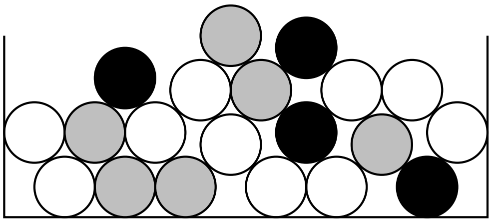


Vidéo : **Quel est le point commun entre un ananas, des lapins et la tour de Pise ?**, chaîne *Unisciel*.

Activité d'approche

Représenter des ratios

Objectifs : calculer un ratio ; partager une quantité en deux ou trois parts selon un ratio donné.



Dans cette boite, il y a 4 balles noires pour 6 balles grises.
On dit que la quantité de balles noires et grises est dans le ratio de 4 : 6 (on lit « 4 pour 6 ») ou encore 2 : 3 (« 2 pour 3 »).
Inversement, le ratio des balles grises et noires est de 6 : 4.

1. (a) Quel est le ratio des balles noires et blanches ? Simplifier éventuellement ce ratio.

   (b) Quel est le ratio des balles grises et blanches ? Simplifier éventuellement ce ratio.

   (c) Comment pourrait-on écrire le ratio de balles noires, grises et blanches ?

   (d) Quelle fraction du total des balles représente les balles noires ? Les balles grises ? Les balles blanches ?

   ---

2. Dans cette question, on garde les mêmes ratios que dans les questions précédentes.

   (a) Si le bac contenait 40 balles, combien aurait-on de balles noires ? grises ? blanches ?

   Quelle fraction du total des balles représente chaque sorte de balles ?

   (b) Si le bac contenait 10 balles, combien aurait-on de balles noires ? grises ? blanches ?

   Quelle fraction du total des balles représente chaque sorte de balles ?

   (c) Si le bac contenait 130 balles, combien aurait-on de balles noires ? grises ? blanches ?

   Quelle fraction du total des balles représente chaque sorte de balles ?

   ---

3. On souhaite partager 21 balles roses et violettes dans le ratio 3 : 4. Combien aura-t-on de balles roses et violettes ?

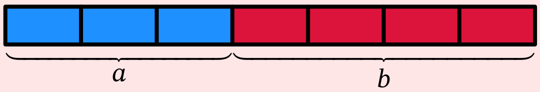
   ---

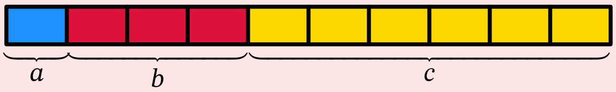
4. On partage 48 balles bleues, blanches et rouges dans le ratio 1 : 2 : 3. Combien a-t-on de balles de chaque couleur ?

Trace écrite

1 Définition du ratio

Définition

- On dit que **deux nombres** a et b sont, par exemple, dans le **ratio** $3:4$ si $\dfrac{a}{3} = \dfrac{b}{4}$.
  On parle de ratio « trois pour quatre ».
  On peut le modéliser ainsi :
  

- On dit que **trois nombres** a, b et c sont, par exemple, dans le **ratio** $1:3:6$ si $\dfrac{a}{1} = \dfrac{b}{3} = \dfrac{c}{6}$.
  On parle de ratio « un pour trois pour six ».
  On peut le modéliser ainsi :
  

Exemple

Sara et Nathanael se partagent des cookies dans un ratio $3:4$, cela veut dire que, à chaque fois que Sara a 3 cookies, Nathanael en a 4 si bien que le nombre de cookies que possède Sara divisé par 3 est toujours égal au nombre de cookies que possède Nathanael divisé par 4.

Remarque : attention à ne pas confondre les notations $3:4$; $3 \div 4$ et $\dfrac{3}{4}$, la première désigne un ratio, la deuxième une division et la troisième une fraction.
Dans l'exemple, Sara possède $\dfrac{3}{7}$ des cookies et Nathanael $\dfrac{4}{7}$.
Chacune de ces fractions permet de comparer une partie à la totalité, ce ne sont pas des ratios.

2 Méthode de partage suivant un ratio

Méthode : Partager suivant un ratio

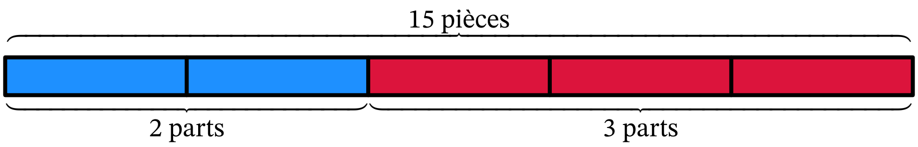
Pour partager une quantité suivant un ratio :

1. on calcule le nombre de parts égales à distribuer en additionnant les nombres du ratio ;
2. on divise la quantité par le nombre de parts à distribuer ce qui nous donne la quantité par part ;
3. on distribue les parts selon le ratio.

Exemple

On souhaite partager 15 pièces d'or entre les deux pirates Sambra et Piébo suivant le ratio $2:3$.
Combien vont-ils avoir de pièces d'or chacun ?

- Les 15 pièces d'or sont partagées en 5 parts égales (2 parts pour Sambra et 3 parts pour Piébo).
- 15 pièces d'or $\div\ 5 = 3$ pièces d'or donc, une part vaut 3 pièces d'or.
- Sambra a 2 parts, soit 2×3 pièces d'or $= 6$ pièces d'or
  Piébo a 3 parts, soit 3×3 pièces d'or $= 9$ pièces d'or.



Fiche d'exercices

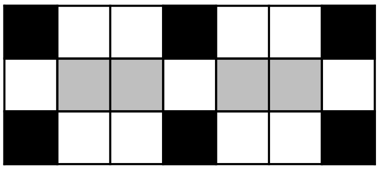
1 Simplifier les ratios suivants.

1. 35 : 20 2. 49 : 70 3. 18 : 24

2 Ratios et bonbons.

1. Un paquet de bonbons contient 13 bonbons à la fraise et 8 au citron. Dans quel ratio sont les bonbons à la fraise et les bonbons au citron ?
2. Un paquet de bonbons contient 28 bonbons à la fraise, 18 au citron et 14 au cola. Dans quel ratio sont les bonbons à la fraise, les bonbons au citron et les bonbons au cola ?

3 Utiliser le dessin ci-dessous pour répondre aux questions.



1. Quel est le ratio carrés gris - total de carré ?
2. Que peut représenter le ratio 4 : 6 ?
3. Selon quel ratio sont représentés les carrés noirs et les carrés blancs ?

4 Utiliser ce tableau des matchs perdus ou gagnés d'un collège pour répondre aux questions.

	matchs gagnés	matchs perdus
Rugby	9	6
Judo	12	8
Handball	10	5

1. Quels sports ont un ratio équivalent gains-pertes ?
2. Pour le handball :
   (a) Quel est le ratio gains-matchs joués ?
   (b) Quelle est la fraction de matchs gagnés ?

5 Dans une assemblée, le ratio hommes-femmes est de 50 : 45.
Si cinq femmes entrent, le ratio sera-t-il de 50 : 50 ?

6 Des ratios « doubles ».

1. Quelle quantité d'huile et de vinaigre utilise-t-on dans une vinaigrette de 500 L réalisée dans le ratio 3 : 1 ?
2. Deux amis ont joué au loto et leur mise s'est faite selon le ratio 3 : 5. Ils gagnent 64 €. Quelle est la somme d'argent qui revient à chacun d'eux ?

7 Des ratios « triples ».

1. Une recette de biscuits sablés commence par la fabrication d'un « sable » réalisé avec de la farine, du beurre et du sucre dans le ratio 10 : 6 : 5. Une pâte homogène est ensuite fabriquée avec ce sable et un peu de lait.
   Quelles masses de farine, de beurre et de sucre doit-on prendre pour créer un « sable » de 630 g ?
2. Pour récompenser leurs enfants Clémentine, Myrtille et Prune, qui les ont beaucoup aidés, M. et Mme Potager leur donnent un peu d'argent. Ils leur distribuent 120 € selon le ratio 3 : 4 : 5 parce qu'ils n'ont pas aidé autant les uns que les autres.
   Combien chacun va-t-il recevoir ?

8 Les macarons.

1. Comment partager 48 macarons entre Yasmine et Juliette dans le ratio 5 : 11 ?
2. Yasmine, Juliette et Antoine se partagent des macarons dans le ratio 4 : 3 : 2. Juliette en a 9, combien en ont Kawtar et Talita ?
3. Juliette et Antoine ont réalisé un certain nombre de macarons dans le ratio 5 : 8. Sachant qu'Antoine, plus expérimentée, a fait 66 macarons de plus que Juliette, combien Antoine en a préparé ?

9 Les triangles.

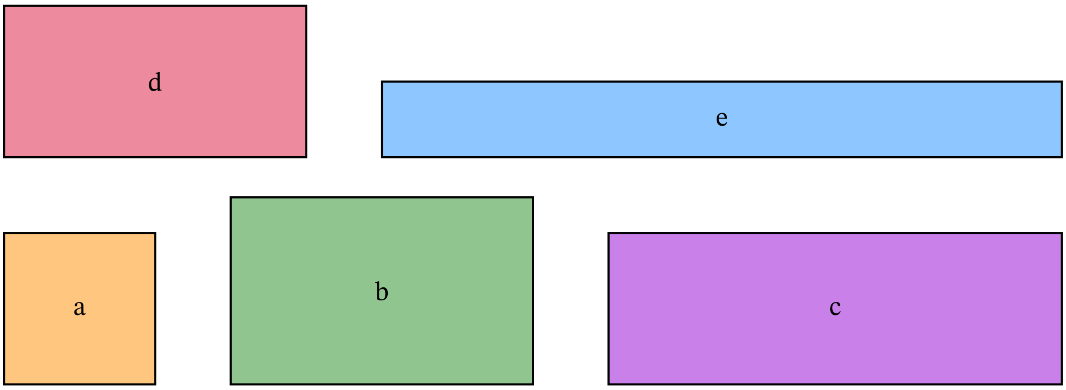
1. Dans quel ratio sont les trois angles d'un triangle équilatéral ?
2. Dans quel ratio sont les trois angles d'un triangle rectangle isocèle ?
3. Quelle est la nature d'un triangle dont les angles sont dans le ratio 1 : 2 : 3 ?

D'après « Les ratios au collège », académie de Bordeaux et « La résolution de problèmes mathématiques au collège », MENJS, 2021.

Activité récréative

The golden ratio

1. Among the following rectangles, circle the one you think is the most attractive and well-balanced.



2. Measure each rectangle's length and width, and compare the ratio of length to width for each rectangle above :

Rectangle	a	b	c	d	e
Length (ℓ) in cm					
Width (w) in cm					
$\ell \div w$					

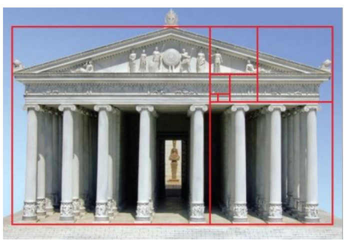
3. Draw a segment 10 cm long then make a small mark on it 6,18 cm along.
   Divide the length of the whole line by the length of the long section just made.
   Divide the length of the long section by the length of the short section. What ratios do you get ?

4. Unscramble the words to find out the various names of this ratio.

TEH	_ _ _	HET	_ _ _
DEOGNL	_ _ _ _ _ _	NODLEG	_ _ _ _ _ _
TAIRO	_ _ _ _ _	NOOPOITRRP	_ _ _ _ _ _ _ _ _ _
ETH	_ _ _	HTE	_ _ _
DIINVE	_ _ _ _ _ _	DEONLG	_ _ _ _ _ _
TINPOORPRO	_ _ _ _ _ _ _ _ _ _	NEBRUM	_ _ _ _ _ _

5. This number named golden ratio is $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Calculate is value with your calculator : ....

A golden rectangle has a length to width ratio called the golden ratio, which is approximately 1.618. It is used often in art and architecture. For example, the front of the Parthenon, a temple in Athens, Greece fits into a golden rectangle.



Nombres
& Calculs

Séquence **19**

Les nombres premiers

Connaissances :

- Définition d'un nombre premier.
- Liste des nombres premiers inférieurs ou égaux à 30.

Compétences :

- Décomposer un nombre entier en produit de facteurs premiers.
- Simplifier une fraction pour la rendre irréductible.

Débat : la cryptologie

La **cryptologie** est un art ancien et une science nouvelle : un art ancien car Jules César l'utilisait déjà ; une science nouvelle parce que ce n'est un thème de recherche scientifique que depuis les années 1970. Ce mot vient du grec *krypton* - caché et *logos* - science et signifie science du secret. Elle englobe la **cryptographie** (l'écriture secrète) et la **cryptanalyse** (l'analyse de cette dernière). Actuellement, on utilise en cryptographie des méthodes basées sur la difficulté de trouver la décomposition d'un nombre en produit de facteurs premiers.

Les nombres premiers, site Internet *Le blob*, épisode de la série *Petits contes mathématiques*.

Activité d'approche

Le crible d'Ératosthène

Objectifs : On considère le tableau des nombres entiers de 1 à 100 ci-dessous.

On considère le tableau des nombres entiers de 1 à 100 ci-dessous.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Recherche des nombres premiers jusqu'à 100

1. Barrer le nombre 1.
2. Entourer le nombre 2, premier nombre non barré après 1, puis barrer tous les multiples de 2 plus grands que 2.
3. Entourer le nombre 3, premier nombre non barré après 2, puis barrer tous les multiples de 3 plus grands que 3.
4. Entourer le nombre 5, premier nombre non barré après 3, puis barrer tous les multiples de 5 plus grands que 5.
5. Continuer ainsi de suite jusqu'à 10 puis entourer les nombres restants.

Conclusion

Ératosthène $(-276; -194)$ était un mathématicien, géographe, philosophe, astronome, poète grec. Cet algorithme qu'il a établi porte son nom et permet de trouver tous les **nombres premiers** (des nombres entiers divisibles uniquement par 1 et eux-même) inférieurs à un certain nombre n, ici 100.

Lister tous les nombres entourés dans le tableau : ce sont les nombres premiers inférieurs à 100.

Trace écrite

1 Nombres premiers

Définition

Un entier naturel est un **nombre premier** s'il admet comme seuls diviseurs 1 et lui-même.

Propriété

Les nombres premiers inférieurs à 30 sont 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 et 29.

Exemple

- 23 est un nombre premier car il est dans la liste des nombres premiers (divisible uniquement par 1 et 23).
- 49 est divisible par 1 et par 49, mais aussi par 7. Donc, 49 n'est pas un nombre premier.

2 Décomposition en produit de facteurs premiers

Propriété

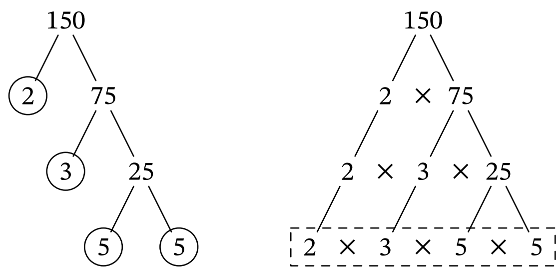
Tout nombre entier admet une décomposition en produit de facteurs premiers, unique à l'ordre des facteurs près.

Pour déterminer cette décomposition, on teste si le nombre est divisible par les nombres premiers successifs, éventuellement plusieurs fois. Sur la calculatrice, on peut utiliser la fonction « *Décomp* ».

Exemple

Voilà quelques exemples de représentations de la décomposition de 150 en produit de facteurs premiers.

150	2
75	3
25	5
5	5
1	



$150 = 2 \times 3 \times 5 \times 5$,
ou $150 = 2 \times 3 \times 5^2$.

3 Simplifier une fraction

Méthode : Rendre une fraction irréductible

Pour simplifier une fraction, c'est-à-dire écrire une fraction égale mais avec des nombres plus petits au numérateur et au dénominateur, on procède de la façon suivante :

1. on décompose le numérateur en produit de facteurs premiers ;
2. on décompose le dénominateur en produit de facteurs premiers ;
3. on simplifie par tout nombre commun au numérateur et au dénominateur.

Exemple

Simplifier la fraction $\frac{90}{84}$.

90	2
45	3
15	3
5	5
1	

150	2
75	3
25	5
5	5
1	

$$\frac{90}{84} = \frac{2 \times 3^2 \times 5}{2^2 \times 3 \times 7} = \frac{\cancel{2} \times \cancel{3} \times 3 \times 5}{\cancel{2} \times 2 \times \cancel{3} \times 7} = \frac{3 \times 5}{2 \times 7} = \frac{15}{14}$$

Fiche d'exercices

1 Les nombres suivants sont-ils des nombres premiers ? Justifier.

1. 0
2. 1
3. 11
4. 23
5. 35
6. 36
7. 38
8. 51
9. 99

2 Décomposer les nombres suivants en produits de facteurs premiers.

1. 12
2. 18
3. 28
4. 48
5. 210
6. 442
7. 2 048
8. 30 375
9. 100 000

3 Simplification de fractions.

1. (a) Décomposer les nombres 90 et 75 en produit de facteurs premiers.
   (b) Simplifier la fraction $\dfrac{90}{75}$
   (c) Simplifier la fraction $\dfrac{75}{90}$. Que remarque-t-on ?
2. (a) Décomposer les nombres 242 et 165 en produit de facteurs premiers.
   (b) Simplifier la fraction $\dfrac{242}{165}$
   (c) Simplifier la fraction $\dfrac{165}{242}$

4 Simplifier les fractions suivantes :

1. $\dfrac{5}{15}$
2. $\dfrac{12}{23}$
3. $\dfrac{15}{35}$
4. $\dfrac{20}{90}$
5. $\dfrac{57}{98}$
6. $\dfrac{125}{45}$

5 Voici les diviseurs de trois nombres :

42	1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 7 ; 14 ; 21 ; 42
56	1 ; 2 ; 4 ; 7 ; 8 ; 14 ; 28 ; 56
60	1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 10 ; 12 ; 15 ; 20 ; 30 ; 60

À l'aide de cette liste, simplifier au maximum chaque fraction.

1. $\dfrac{42}{56}$
2. $\dfrac{56}{60}$
3. $\dfrac{60}{42}$
4. $\dfrac{56}{42}$
5. $\dfrac{60}{56}$
6. $\dfrac{42}{60}$

6 Une conjecture est un résultat que l'on pense vrai, mais qui n'a pas encore été démontré. La conjecture de Goldbach dit que tout nombre pair strictement supérieur à 2 peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers. Par exemple, $8 = 3 + 5$; $40 = 23 + 17$.

1. Trouver deux telles sommes pour 28.
2. Trouver deux telles sommes pour 42.
3. Trouver deux telles sommes pour 52.

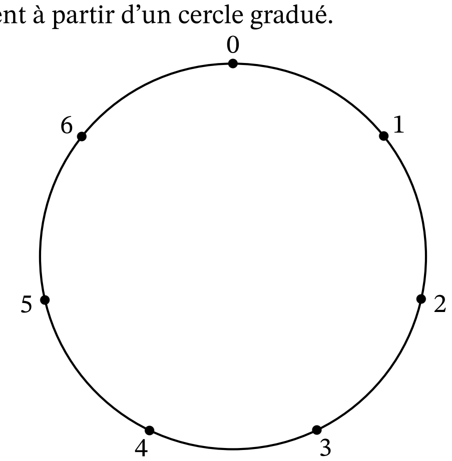
7 On considère un nombre entier naturel n.
On note S la somme de tous ses diviseurs stricts (c'est-à-dire ses diviseurs autres que lui-même).

- n est dit parfait lorsque $S = n$.
- n est dit déficient lorsque $S < n$.
- n est dit abondant lorsque $S > n$.

Par exemple, 8 a comme diviseurs stricts 1 ; 2 et 4.
$S = 1 + 2 + 4 = 7 < 8$. Donc, 8 est déficient.

1. Vérifier que 28 et 496 sont des nombre parfait.
2. Trouver le plus petit nombre déficient, le plus petit nombre parfait et le plus petit nombre abondant.
3. Quelle est la nature des nombres 7 ; 11 et 29 ?
4. Quelle est la nature d'un nombre premier ?

8 Les chrysodes traduisent des propriétés relatives à la division euclidienne et aux nombres premiers. Ils s'obtiennent à partir d'un cercle gradué.



1. Choisir un nombre de 1 à 6. Le multiplier par 3, puis calculer le reste de la division par 7. Tracer le corde d'extrémités le point correspondant au nombre choisi et le point correspondant au reste obtenu.
2. À partir de ce reste, recommencer plusieurs fois. Que constate-t-on ?

Le Juniper Green

Ce jeu mathématique se joue à deux. Il a été créé par *Richard Porteous*, enseignant à l'école de Juniper Green.

Règles du jeu

Deux joueurs jouent sur une grille de N nombres suivant les règles suivantes :

- Règle 1 : le premier joueur choisit un nombre pair entre 1 et N et le barre sur la grille.
- Règle 2 : chacun son tour, les deux joueurs choisissent un nombre parmi les multiples ou les diviseurs du nombre choisi précédemment par son adversaire et inférieur à N puis le barre.
- Règle 3 : un nombre ne peut être joué qu'une seule fois.

Le joueur qui ne peut plus jouer a perdu.

Avec des grilles de 20 nombres

En binôme, jouer quelques parties sur une grille de 20 nombres. Sous la grille, noter la suite de nombres obtenue.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20

Trouver une suite minimale : ....

Trouver une suite maximale : ....

Avec des grilles de 100 nombres

Jouer avec ces grilles de 100 nombres.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Espace &
géométrie

Séquence **20**

Le parallélogramme

Connaissances :

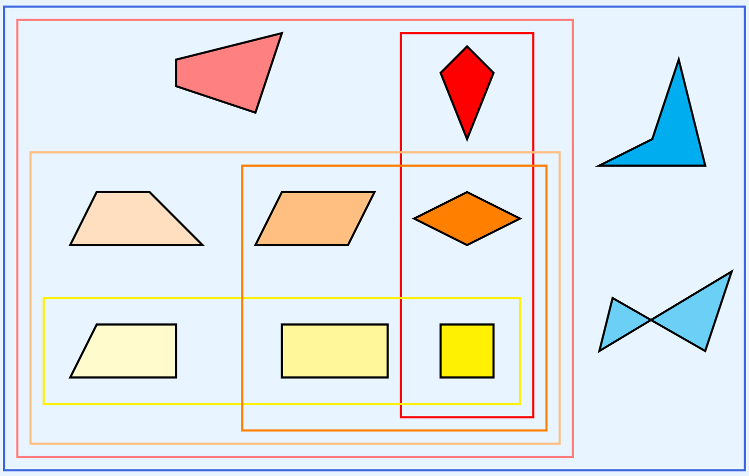
- Parallélogramme (une définition et une propriété caractéristique).

Compétences :

- Mettre en oeuvre ou écrire un protocole de construction d'une figure géométrique.

Débat : vocabulaire des quadrilatères

Le mot **quadrilatère** provient du latin : *quatuor*, quatre, et *latus*, côté. Il existe un mot équivalent d'origine grecque : **tétrapleure** de *tèssera*, quatre, et *pleura*, côté ou **tétragone**, de *gônia*, angle.
Comme pour les triangles, les quadrilatères peuvent être particuliers selon qu'ils ont certaines propriétés : parmi ceux-ci, on peut trouver par exemple la famille des trapèzes, des parallélogrammes, des rectangles, des losanges, des carrés ou encore des cerfs-volants.



Vidéo : **Pourquoi « mathématiques » ?**, site Internet *m@ths-et-tiques* de *Yvan Monka*.

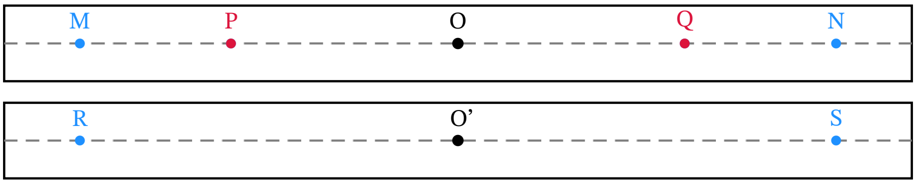
Activité d'approche

Les bandelettes

Objectifs : connaître et reconnaître des figures à quatre côtés ; donner des propriétés de quadrilatères.

Présentation des bandelettes

Sur les bandelettes représentées ci-dessous, le point O est le milieu des segments [MN] et [PQ] et le point O' est le milieu du segment [RS]. De plus, on a OM = OR.



Construction de quadrilatères

1. On considère un squelette obtenu en faisant se croiser les deux bandelettes aux points O et O' en plaçant une attache parisienne à travers ces deux points. On s'intéresse aux quadrilatères MRNS tracés à partir de ce squelette.

   (a) En plaçant le squelette sur votre feuille, placer les points M, N, R et S puis tracer le quadrilatère MRNS.
   À quelle famille semble appartenir ce quadrilatère ?

   (b) Que représentent les segments [MN] et [RS] pour ce quadrilatère ?

   (c) Démontrer alors la proposition faite dans la question (a) :

   (d) Citer d'autres propriétés sur ce quadrilatère particulier.

   (e) Trouver un cas particulier à cette configuration.

2. On s'intéresse maintenant aux quadrilatères PRQS tracés à partir de ce même squelette.

   (a) En plaçant le squelette sur votre feuille, placer les points P, Q, R et S puis tracer le quadrilatère PRQS.
   À quelle famille semble appartenir ce quadrilatère ?

   (b) Que représentent les segments [PQ] et [RS] pour ce quadrilatère ?

   (c) Conjecturer trois propriétés concernant votre quadrilatère :

   (d) Trouver un cas particulier à cette configuration.

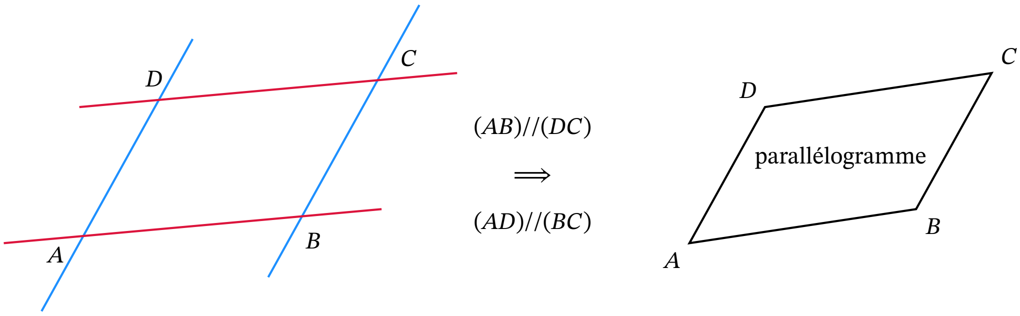
Source : inspirée du site de Dominique Pernoux.

Trace écrite

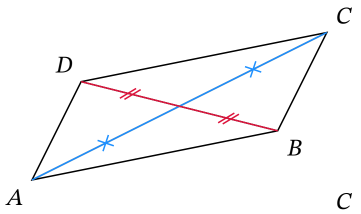
1 Définition et propriétés

Définition

Un **parallélogramme** est un quadrilatère dont les côtés sont deux à deux parallèles.

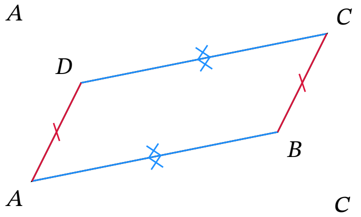


Autres caractéristiques d'un parallélogramme :



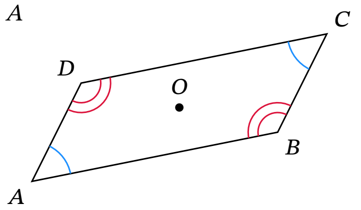
Propriété

Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu alors c'est un parallélogramme.



Propriété

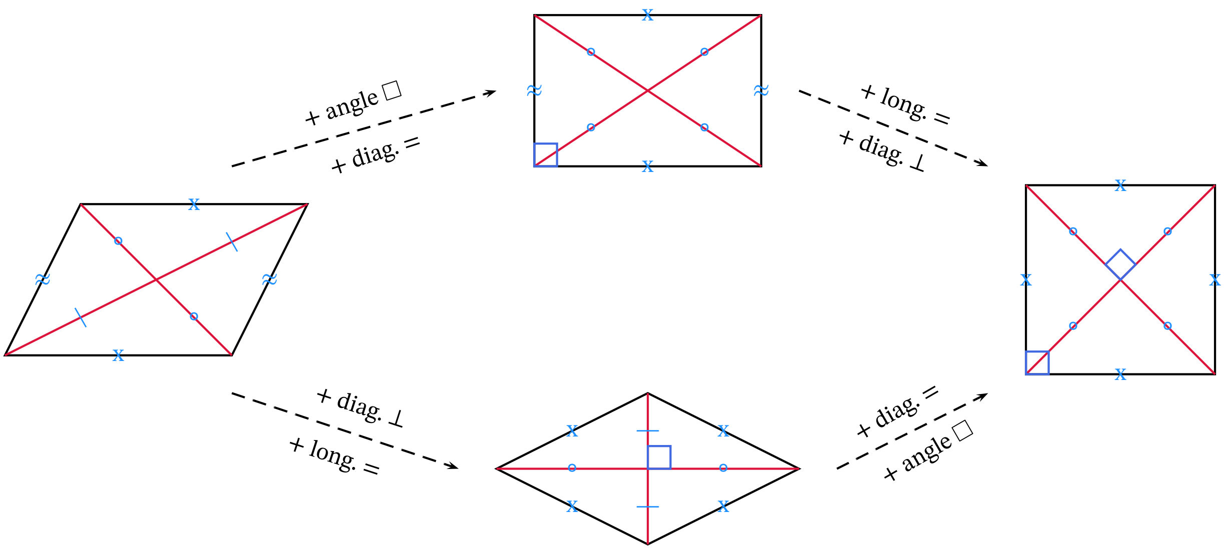
Si un quadrilatère a ses côtés opposés de la même longueur deux à deux alors c'est un parallélogramme.



Propriété

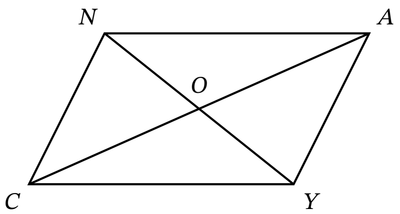
Un parallélogramme possède son centre O comme centre de symétrie. Les angles opposés sont égaux.

2 Parallélogrammes particuliers



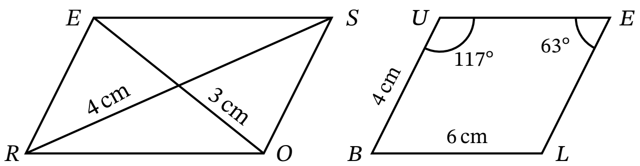
Fiche d'exercices

1 On considère le parallélogramme $CYAN$ suivant :

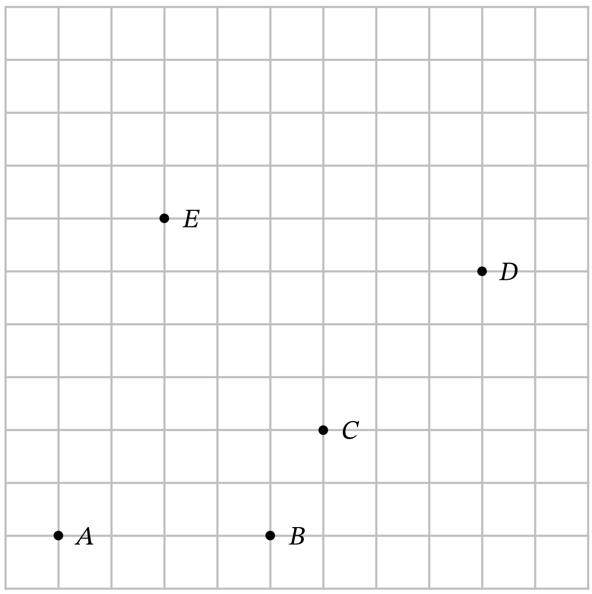


Coder un maximum d'informations sur la figure.

2 Dans les parallélogrammes $ROSE$ et $BLEU$ suivants, compléter toutes les mesures possibles.



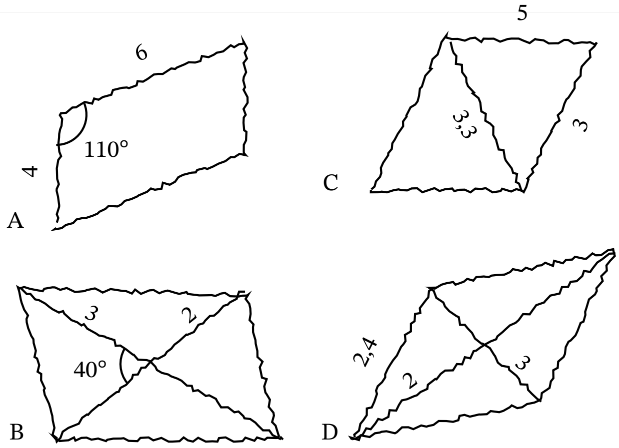
3 Construire sur ce quadrillage les parallélogrammes suivants : $ABCF$, $BCDG$, $CDHE$ et $BIEC$.



4 Construire les parallélogrammes $ABCD$ et $EFGH$.

1. $AB = 5$ cm ; $AD = 3{,}5$ cm et $BD = 7$ cm.
2. $EF = 2$ cm ; $EH = 4{,}5$ cm et $EG = 3{,}5$ cm.

5 Construire en vraie grandeur les parallélogrammes schématisés ci-dessous (les longueurs sont en cm).



6 Construire en vraie grandeur :

1. Un parallélogramme $VERT$ tel que $VT = 5$ cm ; $\widehat{ERT} = 125°$ et $VE = 4$ cm.
2. Un parallélogramme $GRIS$ de centre O tel que $GR = 6$ cm ; $SO = 3$ cm et $IO = 4$ cm.
3. Un parallélogramme $NOIR$ tel que $NI = 62$ mm ; $\widehat{NIR} = 40°$ et $\widehat{RNI} = 30°$.

7 Tracer, puis démontrer…

1. Tracer le cercle (C_1) de centre O de rayon 3,5 cm.
2. Placer deux points N et P sur (C_1) tels que [NP] soit un diamètre de (C_1).
3. Construire le cercle (C_2) de centre O de rayon 5 cm.
4. Placer deux autres points Q et R sur (C_2), non alignés avec N et P tels que $[QR]$ soit un diamètre de (C_2).
5. Démontrer que le quadrilatère $NQPR$ est un parallélogramme.
6. Calculer les longueurs NP et QR. Justifier.

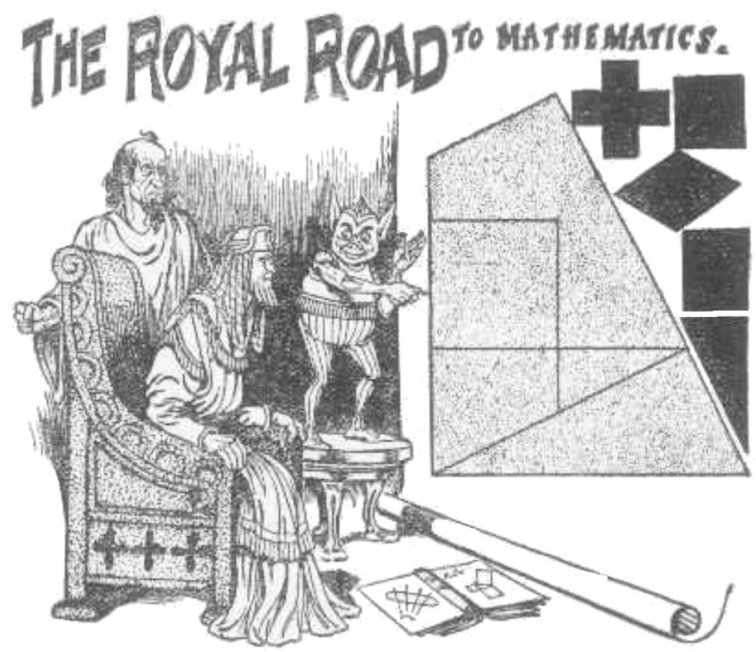
8 Tracer, puis démontrer… bis !

1. Tracer un triangle équilatéral ABC de côté 5 cm.
2. À l'extérieur du triangle et de telle sorte que les figures ne se recouvrent pas, placer les points D et E tels que $ABDE$ soit un rectangle avec $AD = 7$ cm.
3. Placer les points F et G tels que $ACFG$ soit un losange avec $\widehat{ACF} = 150°$.
4. Donner la mesure des angles $\widehat{CAG}$ et $\widehat{BAG}$.
5. Que peut-on en déduire pour les points G, A et E ?

Activité récréative

Les puzzles de Sam Loyd

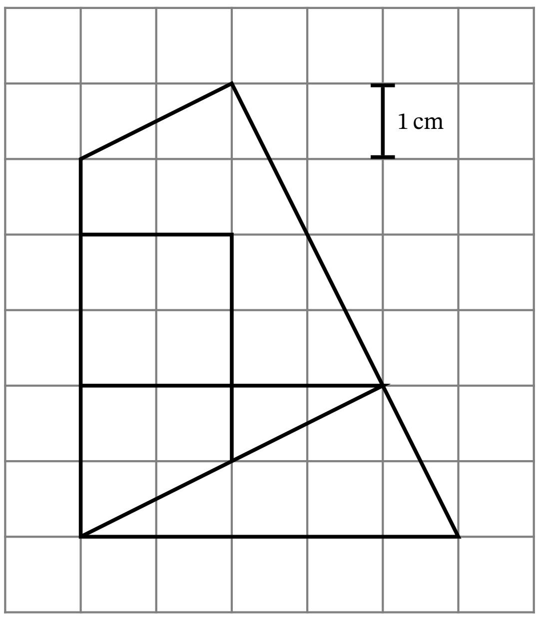
Sam Loyd (1841-1911) était un mathématicien américain adepte de casse-têtes mathématiques et d'échec. Il est à l'origine de milliers de casse-têtes publiés notamment dans des journaux. On considère l'énigme **The royal road to mathematics**, issu du « Sam Loyd's cyclopedia of 5000 puzzles tricks and conundrums with answers », page 60.



"My learned friend has discoursed upon the six geometrical forms, the traprapezium, the square, greek cross, parallelogram or diamond, rectangle and triangle. The trapezium, he has told us is a geometrical form with four sides, no two of which are parallel. The shape was originated many years ago as the mainsail for a catamaran, the five other geometrical shapes will readily be recognized as the flags or ensigns of ancient yachts. The most interesting part of the whole business is that I can mark off the trapjezium into five parts, which form six wonderful puzzles. Cut these five pieces out of paper and it will be no easy task to rearrange them to form the trapezium. Then utilize all five of the pieces so as to form a perfect square! They will also fit together to make a greek cross. If properly placed they will make a perfect parallelogram, or a rectangle, or a right angled triangle.

Composition du trapezium

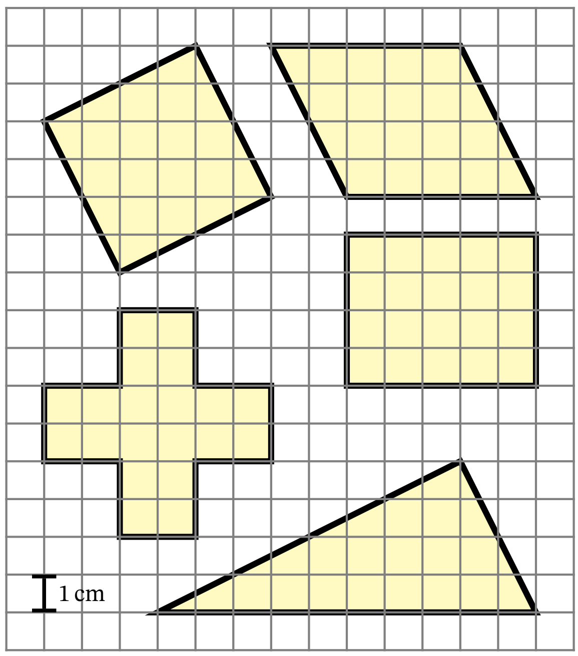
On considère le quadrilatère de Sam Loyd construit sur le quadrillage suivant :



1. L'auteur appelle cette figure « trapezium » que l'on peut traduire par trapèze. Qu'en pensez-vous ? Dans le texte, comme définit-il cette figure ?
2. De quoi est composé ce trapezium ?

Résolution des puzzles

Sam Loyd propose, à partir des pièces du trapézium, de reconstituer le carré, la croix grecque, le parallélogramme, le rectangle et le triangle rectangle.



3. Reproduire le trapezium puis le découper.
4. Avec les pièces du puzzle, reconstituer chacune des figures ci-dessus.

Grandeurs
& mesures

Séquence **21**

Volume du pavé, du prisme et du cylindre

Connaissances :

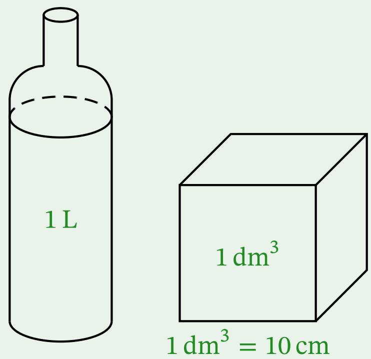
- Volume d'un prisme, d'un cylindre.
- Correspondance entre volume et contenance : $1\,\text{L} = 1\,\text{dm}^3$ et $1\,000\,\text{L} = 1\,\text{m}^3$.

Compétences :

- Vérifier le cohérence des résultats au niveau des unités.
- Effectuer des conversions d'unités de volumes.

Débat : $1\,\text{L} = 1\,\text{dm}^3$

Cette correspondance est à connaître. Pourtant, elle ne paraît pas si naturelle que cela : elle signifie que l'eau contenue dans une bouteille d'un litre remplirait exactement un cube de 1 dm de côté.



Vidéo : **Les volumes**, chaîne *Rapémathiques* d'A'Rieka.

Activité d'approche

Séquence 21 : Des pavés cachés

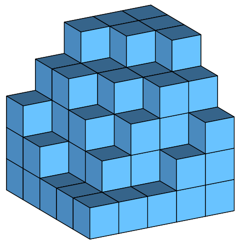
Objectifs : calculer le volume d'un pavé droit, d'un assemblage de solides; résoudre un problème dans le domaine des grandeurs et mesures. Matériel à disposition : des cubes à emboîter, des briques types kapla ou Lego, des boites, des morceaux de sucres.

On me voit assez bien !

Ma petite sœur empile des cubes les uns sur les autres, tous de même forme.

Voici sa construction.

Combien a-t-elle empilé de cubes ?



On me voit un peu moins !

Mon grand-père veut construire la même jardinière que sur la photo ci-contre.

De combien de briques aura-t-il besoin ?

On ne me voit plpas du tout !

L'entreprise Sucromania fabrique du sucre en morceaux. Elle souhaite conditionner ses morceaux dans un emballage parallélépipédique de 280 mm de long, 140 mm de large et 70 mm de hauteur.

Sachant qu'un sucre a la forme d'un pavé droit de 14 mm de long, 14 mm de large et 10 mm de hauteur, combien de sucres peut-elle mettre au maximum afin d'optimiser son emballage ?

Source : d'après « La résolution de problèmes mathématiques au collège, MENJS, p.136

Trace écrite

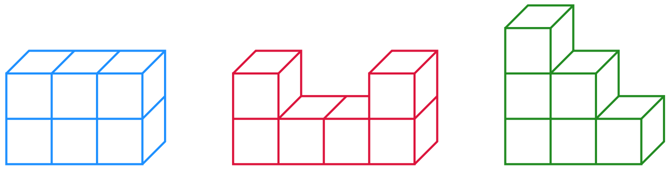
1 Volume par dénombrement

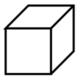
Définition

Le **volume** est une grandeur physique qui mesure l'espace occupé par celui-ci.

Exemple

Ces trois objets n'ont pas la même forme mais occupent la même quantité d'espace, ils ont donc le même volume.



Si l'unité de volume est un cube  le volume de ces trois solides est de 6 unités de volume.

Il existe deux unités en dimension 3 : les unités de volumes en « cube » et les unités de capacité en « litre ».

Définition

- Lorsque l'unité de volume est un cube de 1 m d'arête, cela représente 1 m^3.
- Le **litre** (L) est une unité de capacité valant 1 dm^3. On a alors 1 L $=$ 1 dm^3 et 1 000 L $=$ 1 m^3.

Pour effectuer un changement d'unité de volume, on reprend les mêmes préfixes que pour les changements de longueur, et on impose pour chacun d'eux trois colonnes au tableau.

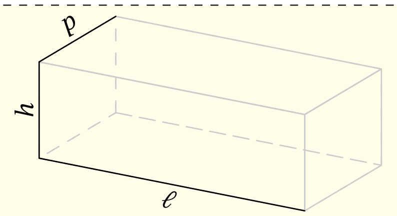
$\times 1\,000$ $\times 1\,000$ $\times 1\,000$ $\times 1\,000$ $\times 1\,000$ $\times 1\,000$

km^3			hm^3			dam^3			m^3			dm^3			cm^3			mm^3		
												hL	daL	L	dL	cL	mL			
											3	9	6	2	1					

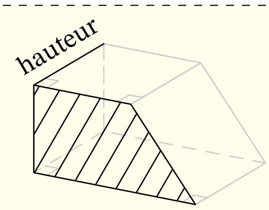
Exemple

0,003 962 1 dam^3 $=$ 3,962 1 m^3 $=$ 3 962,1 dm^3 $=$ 3 962,1 L $=$ 3 962 100 cm^3.

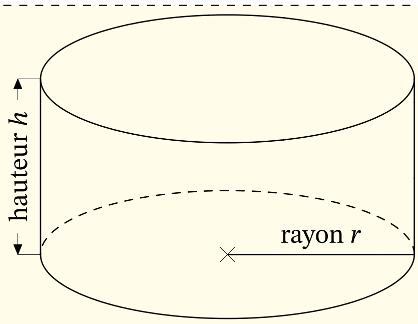
2 Volumes classiques



Volume d'un pavé droit : $\ell \times h \times p$



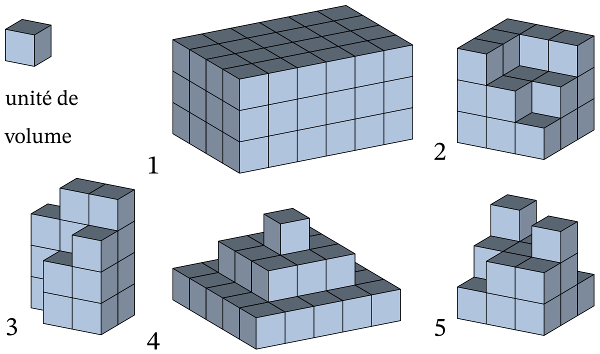
Volume d'un prisme droit :
Aire de la base $\times$ hauteur



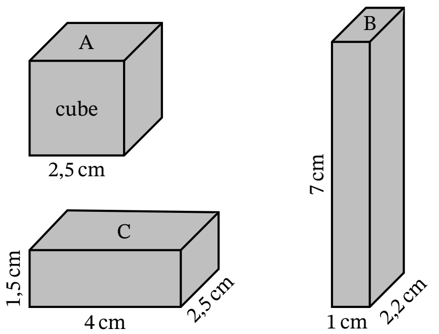
Volume d'un cylindre de révolution :
$\pi \times r^2 \times h$

Fiche d'exercices

1 Donner le volume de chaque solide en unités de volume (les volumes sont supposés pleins).



2 Classer ces pavés du plus petit au plus grand volume.



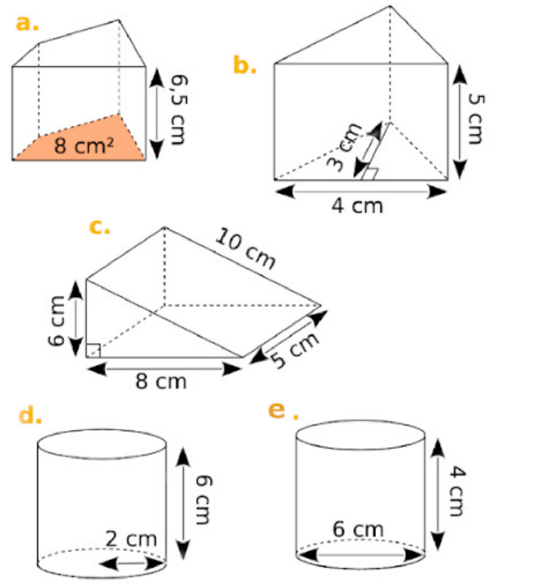
3 Associer à chaque mesure l'objet qui lui correspond.

16 L	•	•	Maison
1 hm^3	•	•	Cartable
10 mm^3	•	•	Baignoire
600 m^3	•	•	Mer Méditerranée
3 700 000 km^3	•	•	Bille
1 cm^3	•	•	Empire State Building
160 L	•	•	Grain de riz

4 Effectuer les conversions de volumes et capacités :

1. 1 dm^3 = ... mm^3
2. 200 mm^3 = ... cm^3
3. 1 542 km^3 = ... dam^3
4. 1 L = ... L
5. 1,53 daL = ... cL
6. 1 hL = ... cm^3
7. 131,2 L = ... m^3
8. 35,635 cm^3 = ... L

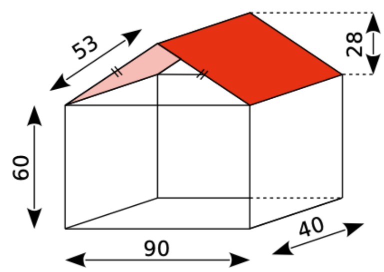
5 Dans chacune des figures suivantes, colorier une base en jaune, repasser une hauteur en rouge puis calculer le volume.



6 Pour un chantier, un maçon doit construire quatre colonnes en béton de forme cylindrique, de 50 cm de rayon et de 4 m de hauteur.

1. Quel est le volume total des colonnes ?
2. Pour 1 m^3 de béton, il faut 400 kg de ciment, 460 L de sable, 780 L de gravillons et 200 L d'eau.
   Donner la quantité de ciment, de sable, de gravillons et d'eau nécessaire pour les quatre colonnes.

7 Voici la représentation en perspective cavalière d'une maison de poupée dont les longueurs sont exprimées en centimètres.



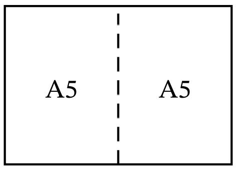
1. Calculer la surface de bois nécessaire pour réaliser le modèle de la maison.
2. Sachant que le contre-plaqué choisi coûte 28,90 € le m^2, calculer le montant de sa dépense.
3. Calculer, au dm^3 près, le volume de la maison.

Activité récréative

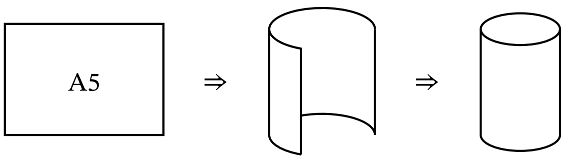
Format A5 et cylindres

Chacuneonstruction de cylindres

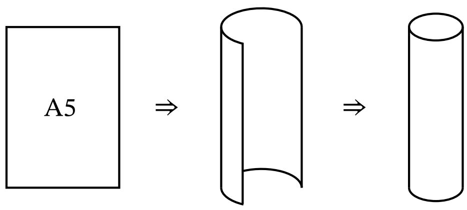
1. Découper une feuille au format A4 suivant sa médiane la plus courte afin d'obtenir deux feuilles au format A5.



2. Rouler la première feuille dans le sens de la longueur pour former un premier cylindre A.



3. Rouler la deuxième feuille dans le sens de la largeur pour former un deuxième cylindre B.



4. Selon vous, ces cylindres ont-il le même volume ? Si non, quel est celui qui semble avoir le volume le plus grand ?

Calcul du volume

5. Rappeler les dimensions d'une feuille au format A4. En déduire les dimensions d'une feuille au format A5.

6. Premier cylindre.
   (a) Donner la mesure de la hauteur du cylindre.
   (b) Que vaut le périmètre du disque de base du cylindre ? En déduire son rayon.
   (c) Calculer alors le volume du premier cylindre.

7. Deuxième cylindre.
   (a) Donner la mesure de la hauteur du cylindre.
   (b) Que vaut le périmètre du disque de base du cylindre ? En déduire son rayon.
   (c) Calculer alors le volume du deuxième cylindre.

8. Conclusion :

Nombres
& Calculs

Séquence 22

Calculs avec des fractions

Connaissances :

- Somme, différence de deux nombres rationnels.

Compétences :

- Calculer avec des fractions.
- Effectuer des calculs et des comparaisons pour traiter des problèmes.

Débat : l'œil d'Oudjat, ou œil d'Horus

Dans la mythologie égyptienne, on trouve une histoire liée aux fractions : *Seth*, dieu de la violence et incarnation du mal, aurait arraché l'**œil** à **Horus**. *Seth* l'aurait partagé en six morceaux et les aurait répandu à travers l'Égypte. *Thot*, dieu magicien, aurait reconstitué l'œil, symbole du bien contre le mal. On dit que chacune de ses parties symbolise une fraction de numérateur 1 et de dénominateurs 2, 4, 8, 16, 32 et 64 et qu'il accordera le 64e manquant à tout scribe recherchant et acceptant sa protection.

Vidéo : **Addition et soustraction de fractions**, chaîne YouTube *Rapémathiques*, d'A'Rieka.

Activité d'approche

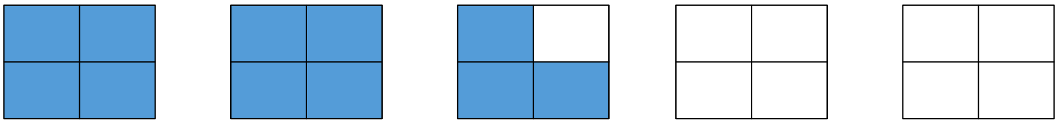
Décomposer une fraction

Objectifs : représenter des fractions ; écrire une fraction sous la forme de la somme ou de la différence d'un entier et d'une fraction inférieure à 1.

Des toasts en entrée

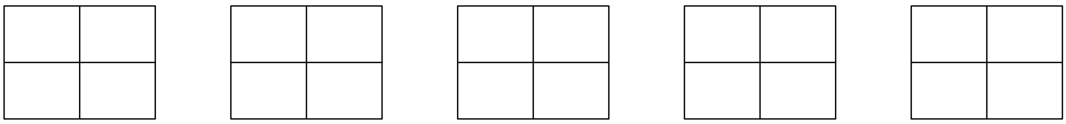
Pour faire des toasts à ses amis, Clara coupe des tranches de pain de mie en quatre, avant de les garnir.

Narmin mange onze de ces petits toasts. Elle a mangé 11 fois $\frac{1}{4}$ de grande tranche, donc $\frac{11}{4}$ de grande tranche.



Ce qui fait 2 tranches et $\frac{3}{4}$ de tranche, ou 3 tranches moins $\frac{1}{4}$ de tranche. On écrit : $\frac{11}{4} = 2 + \frac{3}{4} = 3 - \frac{1}{4}$.

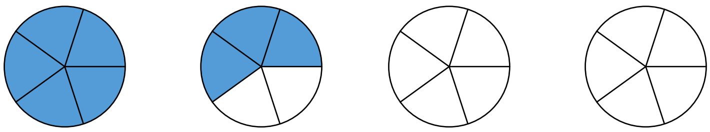
Aboubaker, lui, a mangé 17 petits toasts. Colorier ce que cela représente ci-dessous.



Compléter l'égalité : $\frac{17}{4} = \dots + \frac{\dots}{\dots} = \dots - \frac{\dots}{\dots}$

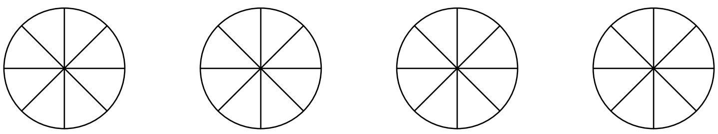
Des « flam » en plat principal

Pour poursuivre, Clara propose à ses amis de manger des flammekueches (flam).



Proportion de flam mangée : $\frac{\dots}{\dots} = \dots + \frac{\dots}{\dots} = \dots - \frac{\dots}{\dots}$

Colorier $\frac{13}{8}$ de flam :



Compléter l'égalité : $\frac{13}{8} = \dots + \frac{\dots}{\dots} = \dots - \frac{\dots}{\dots}$

Des éclairs en dessert

Narmin a mangé $\frac{73}{9}$ de mini-éclairs au chocolat, trouver une manière de décomposer cette fraction en la somme et la différence d'un nombre entier et d'une fraction inférieure à 1.

Source : Inspiré de « Écrire une fraction sous la forme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1 », académie de Poitiers.

Trace écrite

1 Décomposer une fraction

Méthode : Décomposer une fraction

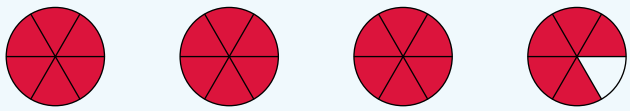
Pour décomposer une fraction en somme ou différence d'un entier et d'une fraction inférieure à 1, on peut effectuer la division euclidienne du numérateur par le dénominateur.

- Pour une somme, le quotient nous donne le nombre entier et la fraction inférieure à 1 s'obtient en prenant comme numérateur le reste et comme dénominateur le diviseur.
- Pour une différence, il suffit de prendre l'entier suivant le quotient et de choisir la fraction complémentaire à 1.

Exemple

Décomposer $\dfrac{23}{6}$.

$$\begin{array}{r|l} 23 & 6 \\ \hline 5 & 3 \end{array}$$



$$\frac{23}{6} = 3 + \frac{5}{6} = 4 - \frac{1}{6}$$

2 Additionner et soustraire des fractions

Méthode : même dénominateur

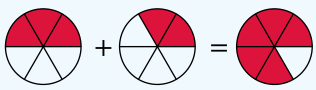
Pour additionner ou soustraire deux fractions ayant le même dénominateur, il suffit d'additionner ou de soustraire les numérateurs tout en gardant le même dénominateur :

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \quad \text{et} \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

Exemple

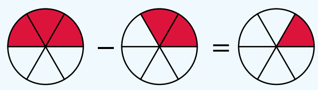
Additionner $\dfrac{3}{6}$ et $\dfrac{2}{6}$.

$$\frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$$



Soustraire $\dfrac{2}{6}$ de $\dfrac{3}{6}$.

$$\frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6}$$



Méthode : dénominateurs multiples

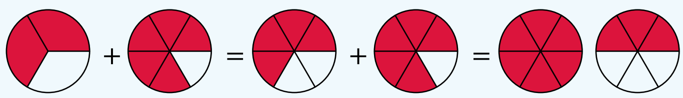
Pour additionner ou soustraire deux fractions ayant des dénominateurs multiples, on transforme l'écriture d'une fraction pour qu'elle ait le même dénominateur que l'autre.

Exemple

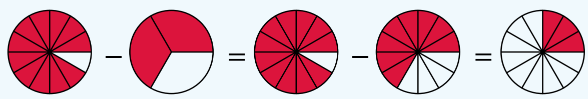
Additionner $\dfrac{2}{3}$ et $\dfrac{5}{6}$.

Soustraire $\dfrac{2}{3}$ de $\dfrac{11}{12}$.

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{6} = \frac{2\times 2}{2\times 3} + \frac{5}{6} = \frac{4}{6} + \frac{5}{6} = \frac{9}{6}$$



$$\frac{11}{12} - \frac{2}{3} = \frac{11}{12} - \frac{4\times 2}{4\times 3} = \frac{11}{12} - \frac{8}{12} = \frac{3}{12}$$



Remarque : cela revient à dire que pour additionner ou soustraire des parts, il faut auparavant qu'elles soient égales, et donc partager les parts les plus grandes de manière à ce qu'elles aient la même taille que les parts les plus petites.

Fiche d'exercices

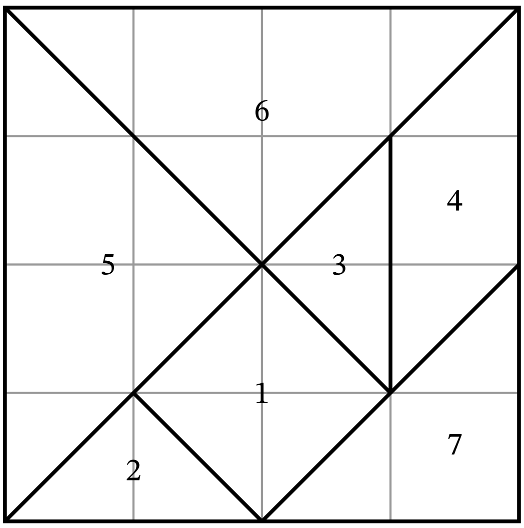
1 Écrire chaque fraction sous la forme de la somme d'un nombre entier et d'une fraction inférieure à 1 en faisant le calcul mentalement. En déduire une écriture comme la soustraction d'un entier et d'une fraction.

1. $\frac{7}{2}$
2. $\frac{9}{8}$
3. $\frac{1}{3}$
4. $\frac{5}{3}$
5. $\frac{11}{4}$
6. $\frac{13}{4}$

2 Écrire chaque fraction sous la forme de la somme d'un nombre entier et d'une fraction inférieure à 1 en posant la division euclidienne. En déduire une écriture comme la soustraction d'un entier et d'une fraction.

1. $\frac{27}{2}$
2. $\frac{92}{8}$
3. $\frac{13}{3}$
4. $\frac{53}{3}$
5. $\frac{121}{5}$
6. $\frac{127}{4}$

3 Dans cet exercice, l'unité est le carré suivant (le tangram), constitué de sept pièces.



1. Quelle fraction du tangram représente chacune des pièces de 1 à 7 ?
2. Avec quelles pièces du tangram (deux minimum) peut-on faire la fraction $\frac{1}{8}$?
3. Avec quelles pièces (deux minimum) peut-on faire la fraction $\frac{3}{16}$? Donner trois possibilités.
4. Avec quelles pièces (deux minimum) peut-on faire la fraction $\frac{1}{4}$? Donner quatre possibilités.

4 Effectuer les calculs suivants puis simplifier.

1. $\frac{2}{3}+\frac{7}{3}$
2. $\frac{6}{7}-\frac{3}{7}$
3. $\frac{3}{13}-\frac{8}{13}$
4. $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{5}{2}$
5. $\frac{12}{7}+\frac{2}{7}-\frac{9}{7}$
6. $\frac{8}{10}-\frac{302}{10}+\frac{78}{10}$

5 Répondre aux petits défis suivants :

1. Combien faut-il ajouter à $\frac{2}{3}$ pour obtenir 1 ?
2. Combien faut-il soustraire à $\frac{15}{4}$ pour obtenir 3 ?
3. Combien faut-il ajouter à $\frac{13}{10}$ pour obtenir 2 ?
4. Combien faut-il soustraire à $\frac{52}{17}$ pour obtenir 3 ?

6 Effectuer les calculs suivants, puis simplifier.

1. $\frac{2}{3}+\frac{7}{6}$
2. $\frac{6}{7}-\frac{3}{14}$
3. $\frac{38}{13}-\frac{3}{39}$
4. $\frac{18}{46}+\frac{28}{23}$
5. $\frac{8}{3}-\frac{2}{6}-\frac{4}{12}$
6. $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}$
7. $\frac{3}{4}-4-\frac{5}{16}$
8. $\frac{12}{49}+2-\frac{9}{7}$

7 Un adulte passe en moyenne 25 % de son temps à travailler, $\frac{1}{3}$ à dormir, $\frac{1}{12}$ à gérer le quotidien et $\frac{3}{36}$ à manger.

1. Sur une journée de 24 heures, combien de temps un adulte passe-t-il sur chacune de ces activités ?
2. Quelle pourcentage de son temps lui reste-t-il pour ses loisirs ?

8 Pour chaque figure, exprimer la partie coloriée à l'aide d'une fraction de la surface du grand carré.

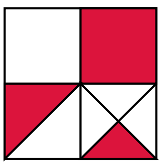


figure 1

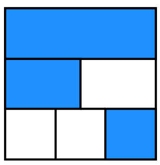


figure 2

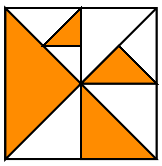


figure 3

Activité récréative

Sudofractions

		2						

- Calculer la somme ou la différence proposée dans chaque case de la grille ci-dessous.
- Simplifier la fraction si possible.
- Choisir le numérateur de la fraction obtenue et le reporter dans la case correspondante de la grille vierge de sudoku ci-contre.
- Compléter la grille selon les règles du Sudoku.

Par exemple, $\frac{9}{6} - \frac{5}{6} = \frac{4}{6} = \frac{\mathbf{2}}{3}$ *donc, la troisième case de la ligne du haut comporte un 2.*

$\frac{1}{13}+\frac{5}{13}$	$\frac{1}{7}+\frac{4}{7}$	$\frac{9}{6}-\frac{5}{6}$		$\frac{4}{3}+\frac{4}{3}$	$\frac{8}{4}-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}+\frac{6}{2}$		$\frac{15}{14}-\frac{7}{14}$
$\frac{2}{3}+\frac{5}{3}$	$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}$		$\frac{5}{9}-\frac{1}{9}$			$\frac{5}{7}-\frac{2}{7}$		
		$\frac{5}{3}+\frac{3}{3}$	$\frac{5}{6}-\frac{1}{3}$					$\frac{5}{2}+1$
$\frac{12}{7}-\frac{4}{7}$	$1-\frac{1}{3}$			$\frac{1}{5}+\frac{1}{10}$				$\frac{3}{7}+\frac{3}{7}$
$1+\frac{2}{3}$			$\frac{5}{9}-\frac{1}{3}$				$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$	
			$\frac{14}{9}-\frac{2}{3}$			$\frac{4}{3}+\frac{1}{3}$	$\frac{5}{2}-\frac{1}{2}$	
	$1-\frac{1}{9}$	$\frac{3}{8}+\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}-\frac{1}{4}$	$\frac{11}{3}-\frac{9}{3}$		$\frac{6}{2}+\frac{12}{4}$	$\frac{3}{6}+\frac{5}{6}$	
$\frac{12}{11}-\frac{10}{11}$	$\frac{7}{2}-\frac{25}{8}$		$1-\frac{1}{7}$		$\frac{9}{7}-\frac{1}{7}$		$\frac{2}{7}+1$	
$2+\frac{5}{2}$				$\frac{1}{7}+\frac{3}{7}$				

Espace &
géométrie

Séquence 23

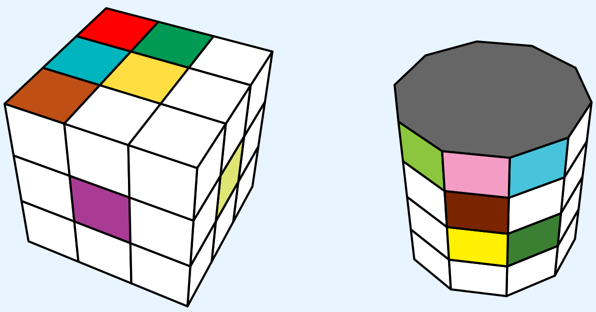
Représenter le pavé et le cylindre

Compétences :

- Construire et mettre en relation des représentations des solides suivants : pavé droit et cylindre (perspective cavalière, patrons).
- Utiliser un logiciel de géométrie dynamique pour représenter des solides.

Débat : la perspective

La **perspective cavalière** est un outil qui permet de représenter sur une feuille de papier des objets en volume sans point de fuite.
Cette représentation était utilisée pour la conception des fortifications militaires. Le « cavalier » était un promontoire de terre situé en arrière des fortifications et qui permettait de voir par-dessus la ligne des ouvrages de défense, et donc de voir les ouvrages des assaillants et ainsi d'anticiper leurs plans offensifs. D'autres perspectives sont utilisées notamment pour les arts : le perspective par **point de fuite** et la **perspective isométrique** par exemple.



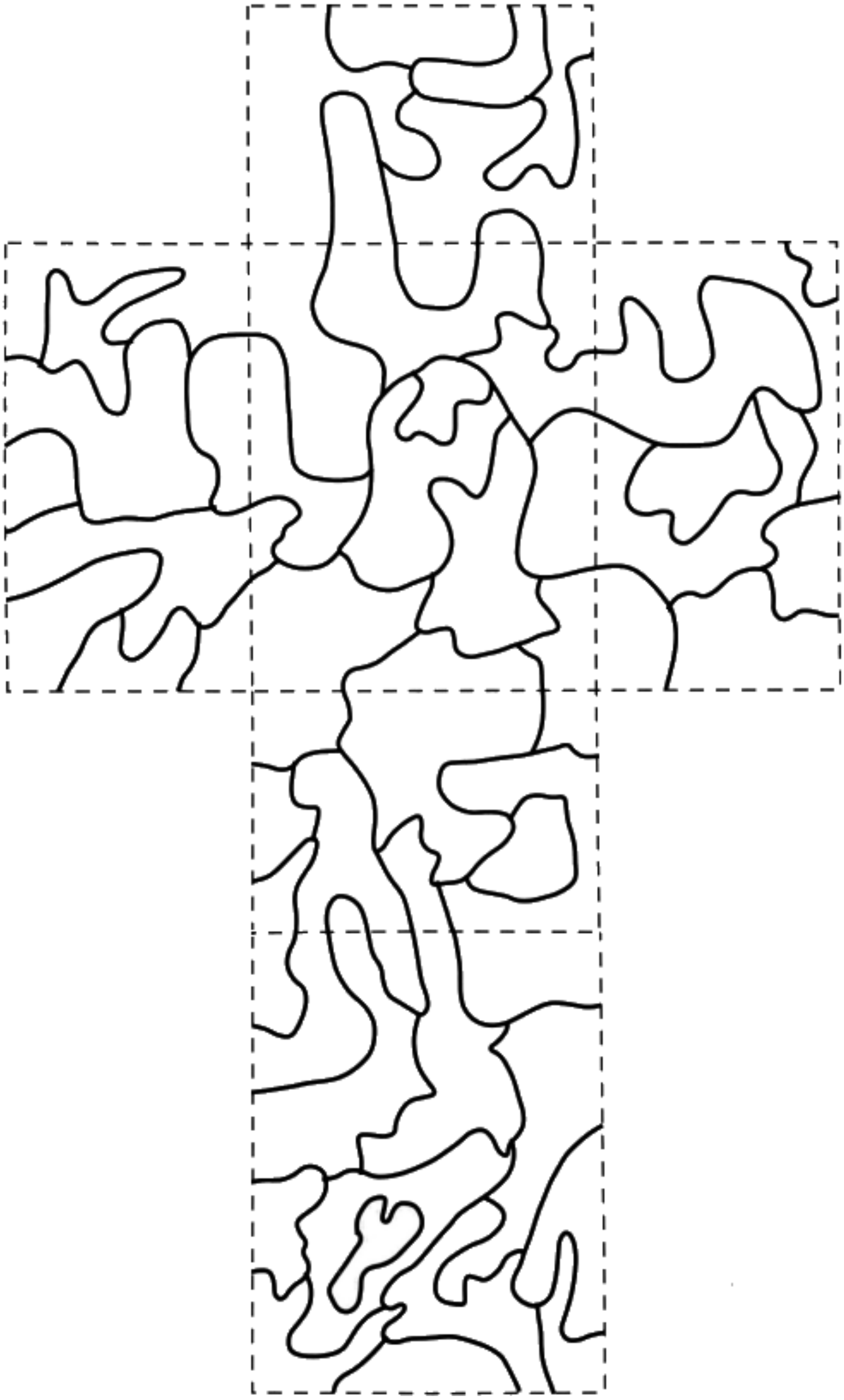
Vidéo : **Comment dessiner des illusions d'optique 3D**, chaîne YouTube *Simple drawing tutorial*.

Activité d'approche

Patron à colorier

Objectifs : résoudre un problème d'optimisation ; travailler sur les propriétés du patron du pavé droit.

Avec le moins de couleurs possible, colorier le pavé droit dont voici un patron sachant que deux zones voisines ne doivent pas être de la même couleur.



Source : « Jeux 5 - Brochure APMEP n°117 ».

Trace écrite

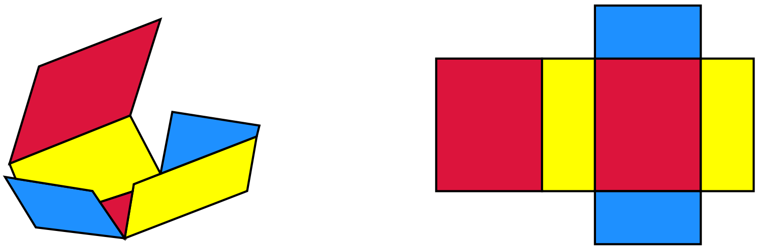
1 Définitions

Définition

- La représentation en **perspective cavalière** d'un solide de l'espace est une technique de dessin permettant de représenter un solide sur une surface à deux dimensions en respectant le parallélisme.
- Le **patron** d'un solide est une surface plane d'un seul tenant qui, par pliage, permet de reconstituer le solide sans recouvrement de ses faces.
- Si le solide n'est pas un polyèdre, on parle de **développement**.

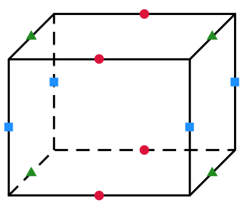
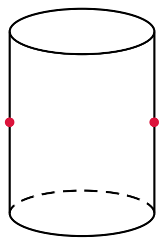
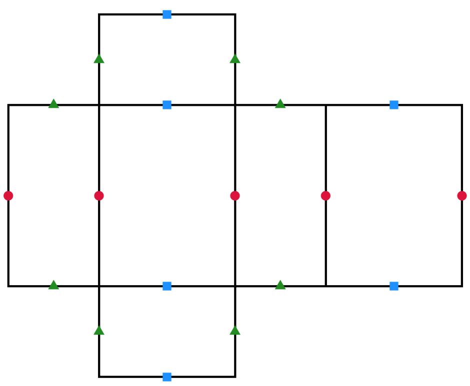
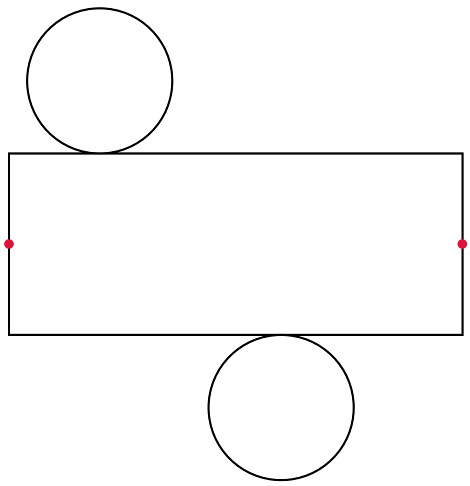
Un patron se dessine en dépliant mentalement le solide.

Exemple



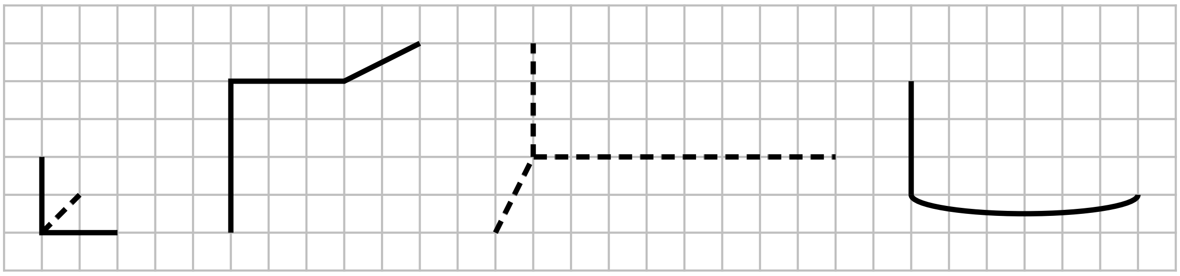
Le patron ou le développement d'un solide n'est pas unique, il dépend de la manière dont on le déplie.

2 Représentations graphiques

	Pavé (droit)	Cylindre (de révolution)
Perspective cavalière		
Patron ou développement		

Fiche d'exercices

1 Terminer la représentation en perspective cavalière des trois pavés et du cylindre suivants :

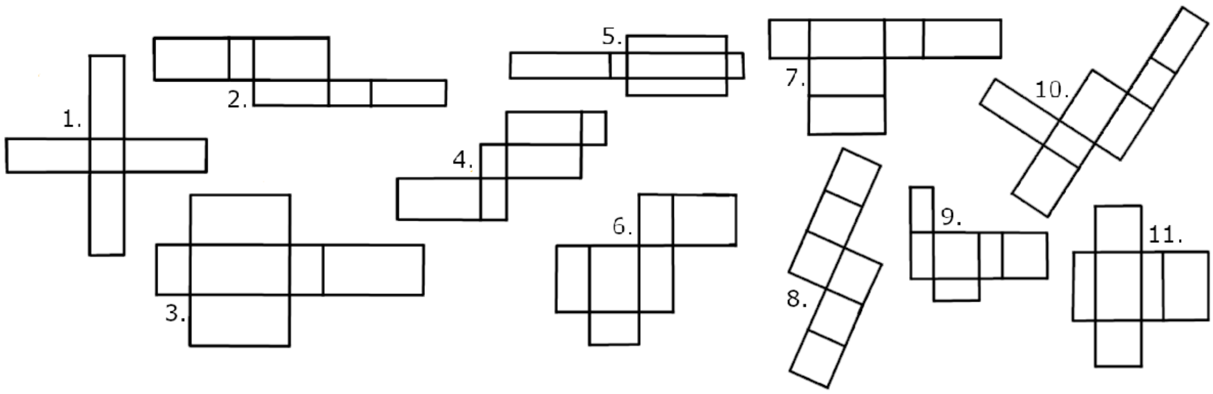


2 Tracer un maximum de patrons différents du cube (c'est-à-dire non superposables).

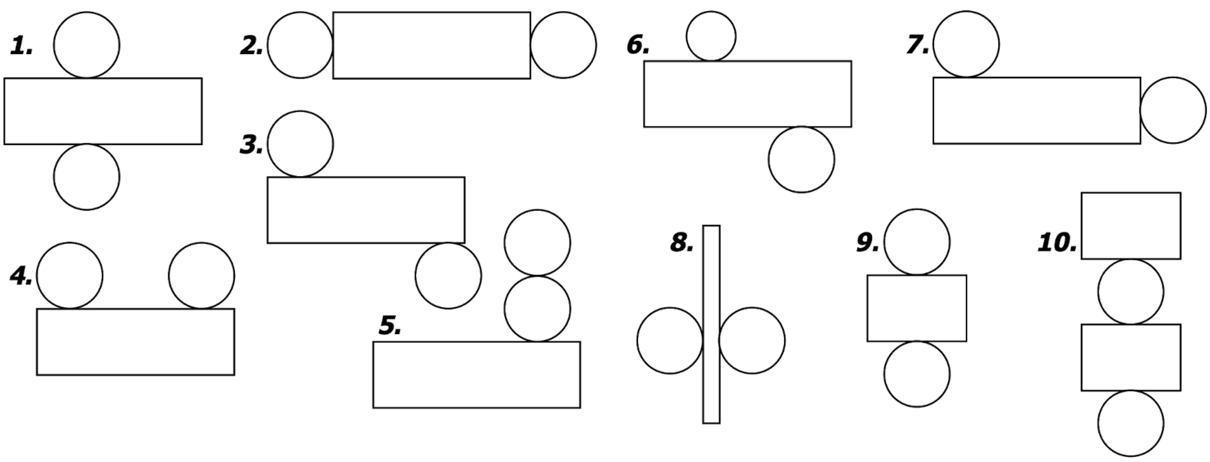
3 Construire en vraie grandeur un patron des solides suivants :

1. Pavé droit de mesures 5 cm ; 4 cm et 2 cm.
2. Cylindre de révolution de hauteur 8 cm dont le diamètre de la base vaut 2 cm.
3. Cylindre de révolution de hauteur 2 cm dont le rayon de la base vaut 2,5 cm.

4 Parmi tous ces patrons, quels sont ceux qui permettent de construire un pavé ?



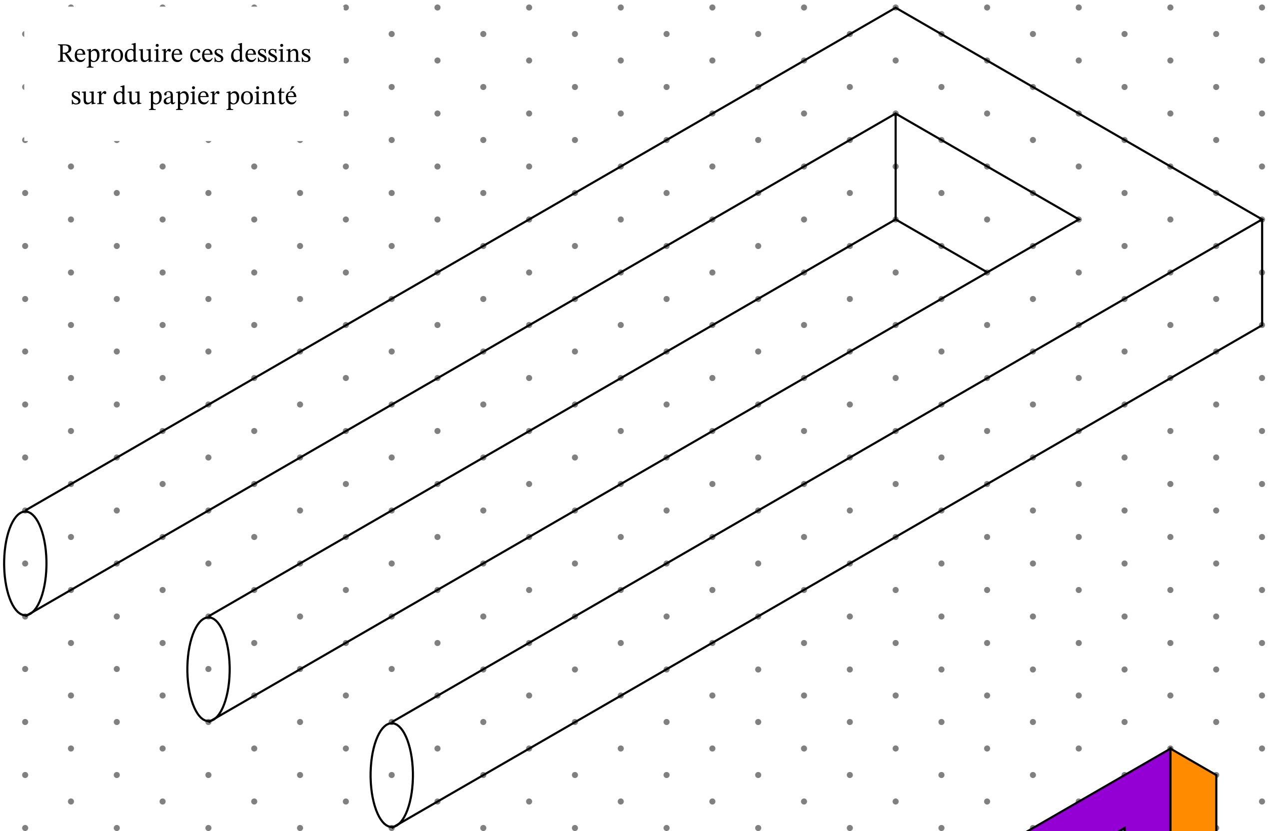
5 Parmi tous ces développements, quels sont ceux qui permettent de construire un cylindre ?

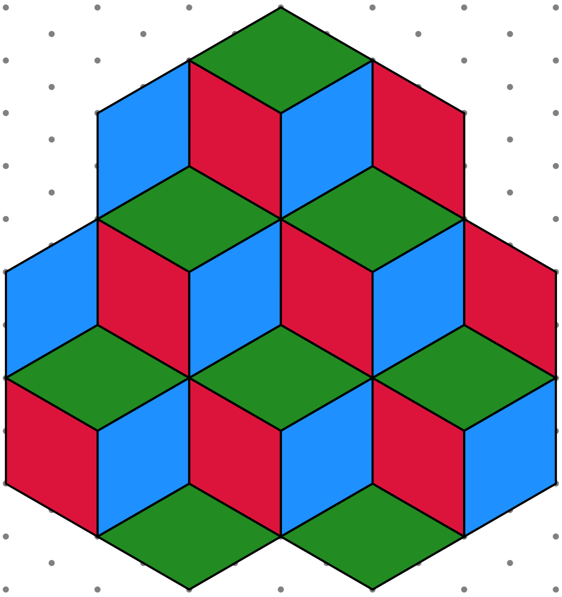


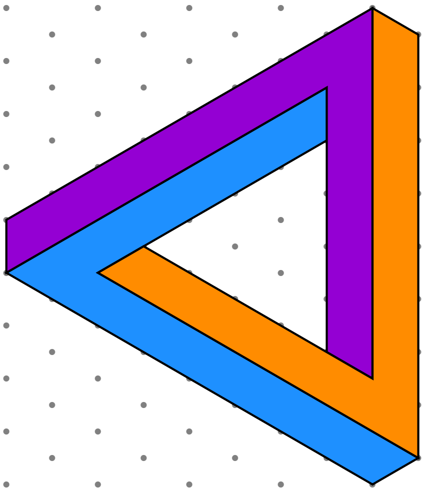
Activité récréative

Des dessins magiques

Reproduire ces dessins sur du papier pointé







Organisation &
gestion de données

Séquence 24

La proportionnalité

Connaissances :

- Coefficient de proportionnalité.

Compétences :

- Reconnaître une situation de proportionnalité ou de non-proportionnalité.
- Résoudre des problèmes utilisant la proportionnalité (pourcentages, échelles, agrandissement réduction).

Débat : ces affreux pourcentages !

La notion de **pourcentage** est très importante dans la vie courante mais c'est un concept relativement mal compris ou mal utilisé, et on trouve régulièrement des erreurs dans les médias. Ces deux vidéos montrent des exemples de pourcentages erronés dans des journaux d'information.

%

Vidéos : **Facture d'électricité** et **Appliquer un pourcentage**, chaîne Youtube *Rapémathiques* d'A'Rieka.

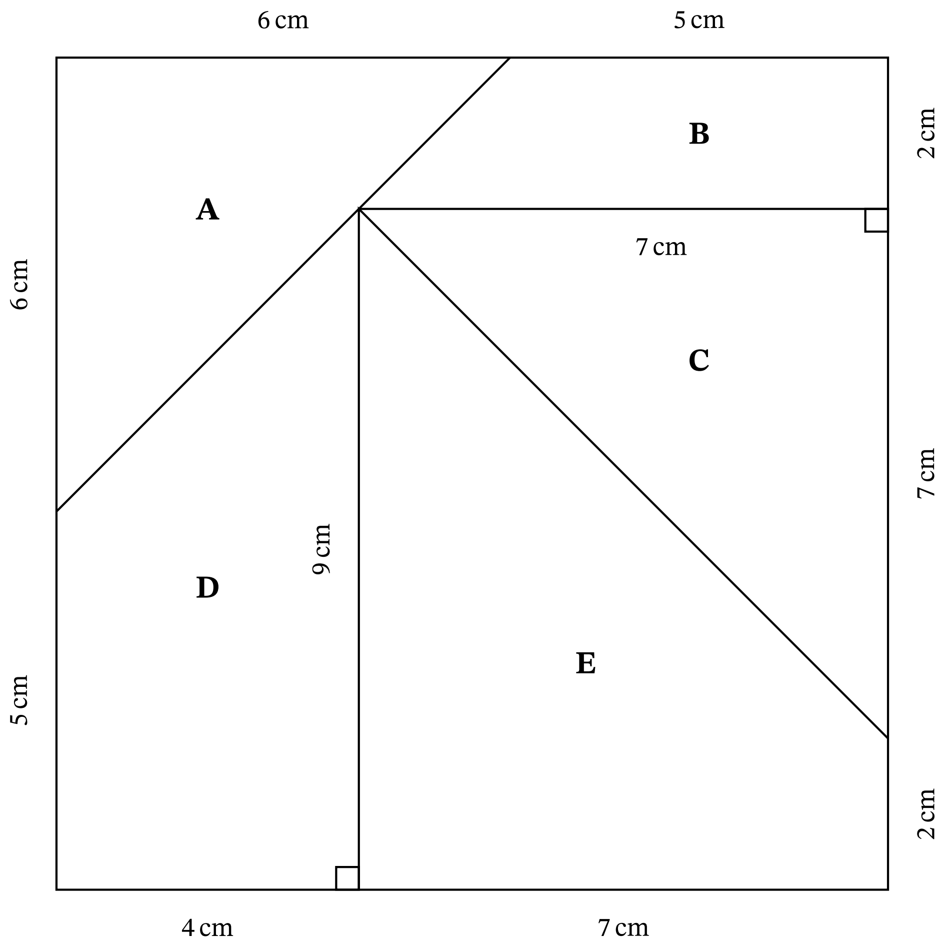
Activité d'approche

Le puzzle de Brousseau

Objectifs : mettre en œuvre un ou des moyens pour résoudre un problème d'agrandissement ; reproduire une figure géométrique en respectant des mesures ; rendre compte d'un travail en groupe.

Présentation du puzzle

Ci-dessous se trouve un puzzle carré composé de cinq pièces A, B, C, D et E dont les mesures sont indiquées sur la figure.



Travail demandé

Par groupes, vous allez devoir refaire le même puzzle mais en plus grand : il faudra s'accorder sur la procédure à adopter pour agrandir les éléments du puzzle, se répartir la construction des pièces en faisant les calculs individuellement puis assembler les morceaux pour reconstituer le puzzle agrandi.

Le compte-rendu de vos recherches sera présenté sous la forme d'une affiche par groupe.

C'est parti... le segment de 4 cm devra mesurer 5 cm sur votre puzzle agrandi.

Trace écrite

1 Procédures de proportionnalité (rappels)

Si 4 stylos coûtent 10 €
combien coûtent 12 stylos ?

Linéarité additive
12 stylos = 4 stylos + 4 stylos + 4 stylos
coûtent 10 € +10 € + 10 € = 30 €

Linéarité multiplicative
12 stylos = 3×4 stylos
coûtent 3 × 10 € = 30 €

Passage par l'unité
1 stylo coûte 4 fois moins cher : 10 € ÷ 4 = 2,50 €
12 stylos coûtent 12 fois plus cher : 12 × 2,50 € = 30 €

Coefficient de proportionnalité
coefficient de proportionnalité : 10 ÷ 4 = 2, 5
12 stylos coûtent 30 € : 12 × $\boxed{2{,}5}$ = 30

2 Pourcentages

Définition

Le **pourcentage** est le nombre qui aurait été proportionnellement obtenu si la quantité avait été de 100.

Propriété

Appliquer un taux de t % à une quantité revient à calculer $\frac{t}{100}$ de cette quantité.

Exemple

Une promotion sur un jus de fruits indique que la contenance est de 1 L + 20 %.
Calcul de l'augmentation : $\frac{20}{100} \times 1\text{ L} = 0{,}2\text{ L}$.
Calcul de la nouvelle contenance : 1 L + 0,2 L = 1,2 L.

Certains taux sont des pourcentages de référence :

pourcentage	opération	facteur	vocabulaire	exemple avec un prix de 80 €
50 %	÷2	$\frac{1}{2}$	la moitié	40 €
25 %	÷4	$\frac{1}{4}$	le quart	20 €
20 %	÷5	$\frac{1}{5}$	le vingtième	16 €
10 %	÷10	$\frac{1}{10}$	le dixième	8 €
1 %	÷100	$\frac{1}{100}$	le centième	0,80 €

3 Échelles

Définition

L'**échelle** d'une carte est le coefficient de proportionnalité entre la mesure réelle et sa mesure sur la carte, ces deux mesures étant exprimées dans la même unité.

Exemple

Une carte au 1/2 000 signifie que 1 cm sur la carte représente 2 000 cm en réalité, soit 20 m. On note aussi 1 :2 000.

Distance sur la carte en cm	1	2	10
Distance dans la réalité en m	20	40	200

×20

Fiche d'exercices

1 Ces situations sont-elles proportionnelles ?
Justifier par un contre-exemple ou une preuve.

1. Taille en mètre en fonction de l'âge ?
2. Périmètre du carré en fonction de son côté ?
3. Aire du carré en fonction de son côté ?
4. Distance parcourue à vélo à vitesse constante en fonction du temps.

2 Compléter les tableaux de proportionnalité suivants du prix d'un objet selon la quantité.

× … (Objets → Prix) ; × … (Prix → Objets)

Objets	1	12	8	
Prix (€)			24	75

× … (Objets → Prix) ; ÷5 (Prix → Objets)

Objets				60
Prix (€)	3	10	26	

3 Léon a pesé ses beignets et a trouvé que deux beignets pèsent 300 g et trois beignets pèsent 450 g .

1. Combien pèsent cinq beignets ?
2. Combien pèsent six beignets ?
3. Combien pèsent quatorze beignets ?

4

1. Un cycliste roule à la vitesse moyenne de 24 km/h. Combien de temps va-t-il mettre pour effectuer son circuit de 36 km ?
2. Un cycliste roule pendant 2 h et parcourt 34 km. Quelle a été sa vitesse moyenne ?

5 Un robinet qui fuit laisse échapper de façon continue trois litres d'eau en deux heures.

1. Quelle quantité d'eau se sera écoulée au bout d'une demi-journée ?
2. Quel temps s'est écoulé pour laisser s'échapper 51 L ?
3. L'eau est facturée 0,00 € le litre.
   Quel sera le montant de la facture au bout d'un an ?

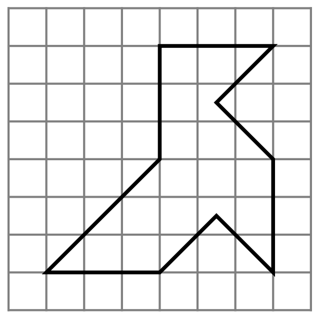
6 Au collège de Yuhithan, le foyer prend en charge 25 % du prix des voyages scolaires alors que dans celui d'Emmanuel, le foyer donne 54 € pour un voyage de 180 € et l'aide est proportionnelle au coût du voyage.

1. Si Yuhithan participe à un voyage qui coûte 230 €, quel montant est pris en charge par son foyer ?
2. En proportion, dans quel collège le foyer participe-t-il le plus au financement des voyages ?

7 Selene fait pour ses amis deux verres contenant des boissons au sirop.

1. Le premier verre a une contenance de 20 cL et il y a 3,5 % de sirop. Combien cela fait-il de sirop ?
2. Le deuxième verre contient 10 cL de boisson dont 5 % de sirop. Combien cela fait-il de sirop ?
3. Sachant qu'au départ, il y avait 15 mL de sirop, combien lui reste-t-il de sirop après ces deux verres ?

8 Reproduire sur le cahier la cocotte à l'échelle 1:2 puis à l'échelle 2:1.



9 Trois poules pondent dix œufs en deux heures.

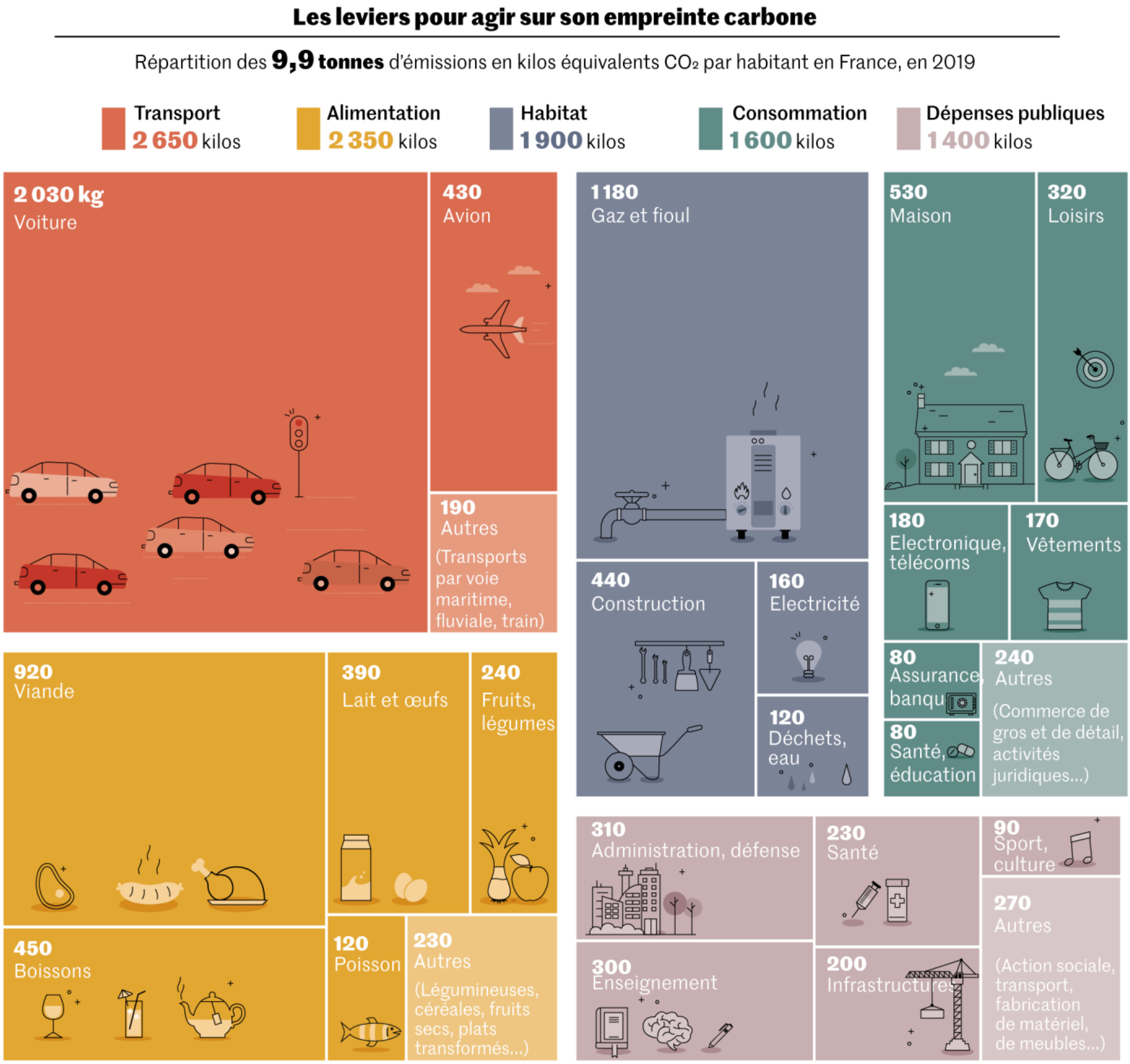
1. Combien de poules faudrait-il pour pondre cinq œufs en vingt minutes ?
2. Combien de temps mettraient neuf poules pour pondre vingt œufs ?

Activité récréative

Empreinte carbone

Une infographie

Voici un extrait d'un document paru dans le quotidien *Le Monde* (infographie d'Hélène Pasquier), élaboré à partir de l'Ademe, et intitulé « Rapport des inégalités du monde 2022 », d'après le ministère de la transition écologique et le Haut conseil pour le climat.



Tâche proposée

En groupe, trouver une méthode pour vérifier si cette infographie est bien réalisée, en expliquant la méthode.
Récapituler les recherches sur une affiche.

Source : d'après une idée de Claire Lommé sur son site Pierre carrée.

Nombres
& Calculs

Séquence **25**

Distributivité simple et égalités

Connaissances :

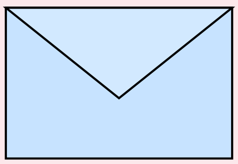
- Propriétés de distributivité simple.

Compétences :

- Développer, factoriser, réduire des expressions littérales dans des cas très simples.

Débat : polysémie du facteur

La **polysémie** est la caractéristique d'un mot ou d'une expression qui a plusieurs sens ou significations différentes. En mathématiques, on utilise régulièrement des mots qui n'ont pas forcément le même sens qu'en français par exemple.
Le mot **facteur** ne déroge pas à cette règle : étymologiquement, il vient du latin *factir*, celui qui fait. Le facteur que nous utilisons en mathématiques désigne un terme d'un produit, et le facteur que nous connaissons le mieux est certainement la personne distribuant le courrier. À l'origine, le facteur est un fabriquant d'instruments de musique. Enfin, le terme facteur s'utilise aussi en économie ou en biologie pour mentionner un élément important qui concourt à un résultat.



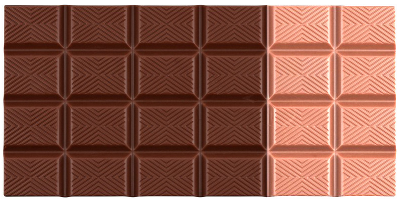
Vidéo : **Comprendre la simple distributivité**, chaîne YouTube de *Jean-Yves Labouche*.

Activité d'approche

Je veux du chocolat !

Objectifs : découvrir la distributivité simple pour réduire une expression littérale de la forme $ax + bx$ où a et b sont des nombres décimaux.

Un chocolatier expérimente une nouvelle tablette de chocolat pour son magasin : celle-ci est composée de rangées de chocolat dont le cacao vient de côte d'ivoire (CI) et d'un tout nouveau chocolat du Brésil (BR), un peu plus clair. Sa tablette représentée ci-dessous est composée de 64 g de chocolat CI et de 32 g de chocolat BR.



1. Il fait un premier test sur 20 tablettes de chocolat qu'il distribue à ses amis pour la tester.

   Combien a-t-il besoin de chocolat en tout : trouver deux manières de calculer la masse des 20 tablettes et écrire les deux calculs *(aide : on peut utiliser des parenthèses dans l'un des calculs)*.

   Calcul 1 : --

   Calcul 2 : --

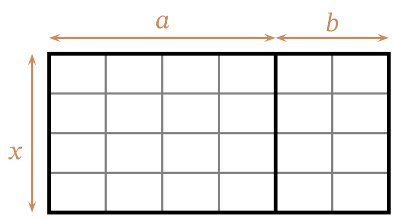
2. Ses amis trouvent qu'il n'y a pas de chocolat BR, ils proposent donc un deuxième test sur 35 tablettes de chocolat, mais en utilisant cette fois-ci 56 g de chocolat CI et 40 g de chocolat BR.

   Combien a-t-il besoin de chocolat en tout ?

   Calcul 1 : --

   Calcul 2 : --

3. Pour pouvoir effectuer ses calculs plus rapidement, il décide de trouver une formule littérale qui lui permette de calculer le nombre de carreaux de chocolat dont il aura besoin.
   On note :

   - a le nombre de rangées de chocolat CI ;
   - b le nombre de rangées de chocolat BR ;
   - x le nombre de lignes de chocolat.

   (a) Donner deux expressions littérales permettant de calculer le nombre total de carreaux de chocolat.

   Calcul 1 : --

   Calcul 2 : --

   (b) Sachant que le nombre de carreaux est le même dans les deux expressions, écrire l'égalité qui résulte de ces deux calculs.

Trace écrite

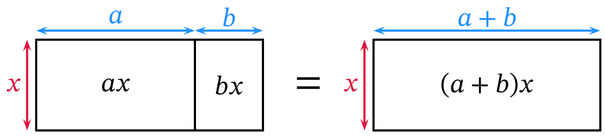
1 Réduire une expression littérale

Propriété

Soit x une variable et a et b des nombres décimaux,

$$a \times x + b \times x = (a+b) \times x \quad \text{ou} \quad ax + bx = (a+b)x$$
$$a \times x - b \times x = (a-b) \times x \quad \text{ou} \quad ax - bx = (a-b)x$$

On dit qu'on a réduit l'expression littérale.



Exemple

- $8 \times x + 3 \times x = (8+3) \times x = 11 \times x = 11x$.
- $12n - 7n = (12-7)n = 5n = 5n$.

2 Utiliser la distributivité pour calculer

Ces différentes formes nous permettent de d'effectuer des calculs plus facilement.

factoriser

(on a enlevé les parenthèses)
transformer une somme en produit

$$ax+bx = (a+b)x$$

transformer un produit en somme
(on a mis les parenthèses)

développer

Exemple

- $57 \times 28 - 57 \times 18 = 57 \times (28 - 18) = 57 \times 10 = 570$.
- $13 \times 102 = 13 \times (100+2) = 13 \times 100 + 13 \times 2 = 1\ 300 + 26 = 1\ 326$.

3 Tester une égalité

Lorsque l'on choisit une certaine valeur pour chaque lettre d'une expression littérale, on peut en calculer la valeur.

Exemple

Calculer $4 \times x + 3 \times y$ pour $x = 5$ et $y = 0$:
$4 \times x + 3 \times y = 4 \times 5 + 3 \times 0 = 20 + 0 = 20$.

Tester une égalité entre deux expressions signifie remplacer les lettres de ces expressions par des valeurs et regarder si les deux membres donnent le même résultat, ou pas !

Exemple

Tester l'égalité $2x + 1 = 5x - 5$ pour $x = 3$ et $x = 2$.

Pour $x = 3$, on a :

- $2x + 1 = 2 \times 3 + 1 = 7$.
- $5x - 5 = 5 \times 3 - 5 = 10$.

Les deux membres de l'égalité ne sont pas égaux, donc l'égalité n'est pas vraie pour $x = 3$.

Pour $x = 2$, on a :

- $2x + 1 = 2 \times 2 + 1 = 5$.
- $5x - 5 = 5 \times 2 - 5 = 5$.

Les deux membres de l'égalité sont égaux, donc l'égalité est vraie pour $x = 2$.

Fiche d'exercices

1 Réduire chacune des expressions suivantes.

1. $6 \times x + 6,1 \times x =$ ....
2. $3,2g + 4,3g =$ ....
3. $8p - 4p =$ ....
4. $6 \times a + 5 \times a - 7 \times a =$ ....
5. $5,8n - 2,8n + 5,3n - 1,1n =$ ....

2 Entourer le facteur commun de chaque expression, la réduire puis calculer mentalement.

1. $83 \times 72 + 83 \times 28 =$ ....
2. $36 \times 25 - 36 \times 5 =$ ....
3. $98 \times 26 + 98 \times 4 =$ ....
4. $16 \times 44 - 6 \times 44 =$ ....

3 On considère l'expression suivante :
$A = 97 \times 27 + 3 \times 27$

1. En respectant les priorités opératoires, effectuer le calcul de A sans calculatrice.
2. Factoriser A puis calculer sa valeur toujours sans calculatrice. Que constate-t-on ?
3. Calculer sans calculatrice $B = 47 \times 1\,215 - 47 \times 215$.

4 Développer chaque expression puis calculer.

1. $5 \times (3 + 9)$
2. $3 \times (10 + 7)$
3. $(11 - 5) \times 7$
4. $2 \times (13 - 4)$

5 Parmi les deux méthodes suivantes pour calculer 33×103, quelle est la plus rapide ?

1. Poser le calcul en colonnes.
2. Décomposer le nombre 103 comme la somme de deux nombres simples, puis développer l'expression $33 \times (\ldots + \ldots)$ obtenue. Que remarque-t-on ?

6 On a : $197 \times 17 = 3\,349$ et $197 \times 4 = 788$.
Calculer les nombres suivants en proposant une décomposition qui utilise les égalités ci-dessus.

1. 197×21
2. 197×13
3. 197×34

7 L'égalité $5x = 2x + 15$ est-elle vérifiée :

1. Pour $x = 4$.
2. Pour $x = 5$.

8

1. Montrer que l'égalité $2x^2 = 6x$ est vraie pour $x = 3$.
2. Peut-on trouver un autre nombre pour lequel l'égalité précédente est vérifiée ?

9 Déterminer si l'égalité $3y = 4x - 3$ est vérifiée :

1. pour $y = 3$ et $x = 3$.
2. pour $y = 2$ et $x = 4$.

10 Dans les trois tours de magie suivants, on demande à une personne d'effectuer des calculs mentalement.
Chercher comment il est possible de retrouver le nombre pensé à partir du résultat.

Tour 1

1. Choisir un nombre
2. Ajouter 1
3. Doubler le résultat
4. Retrancher 2
5. Donner son résultat

Tour 2

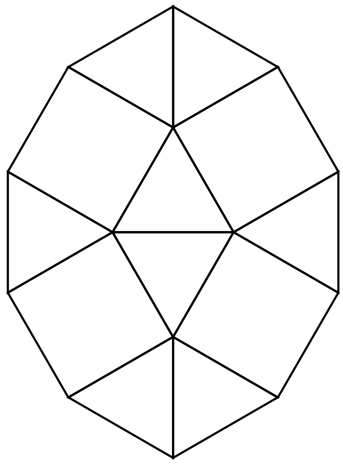
1. Choisir un nombre
2. Ajouter 1
3. Doubler le résultat
4. Ajouter 1
5. Retrancher le nombre pensé
6. Donner son résultat

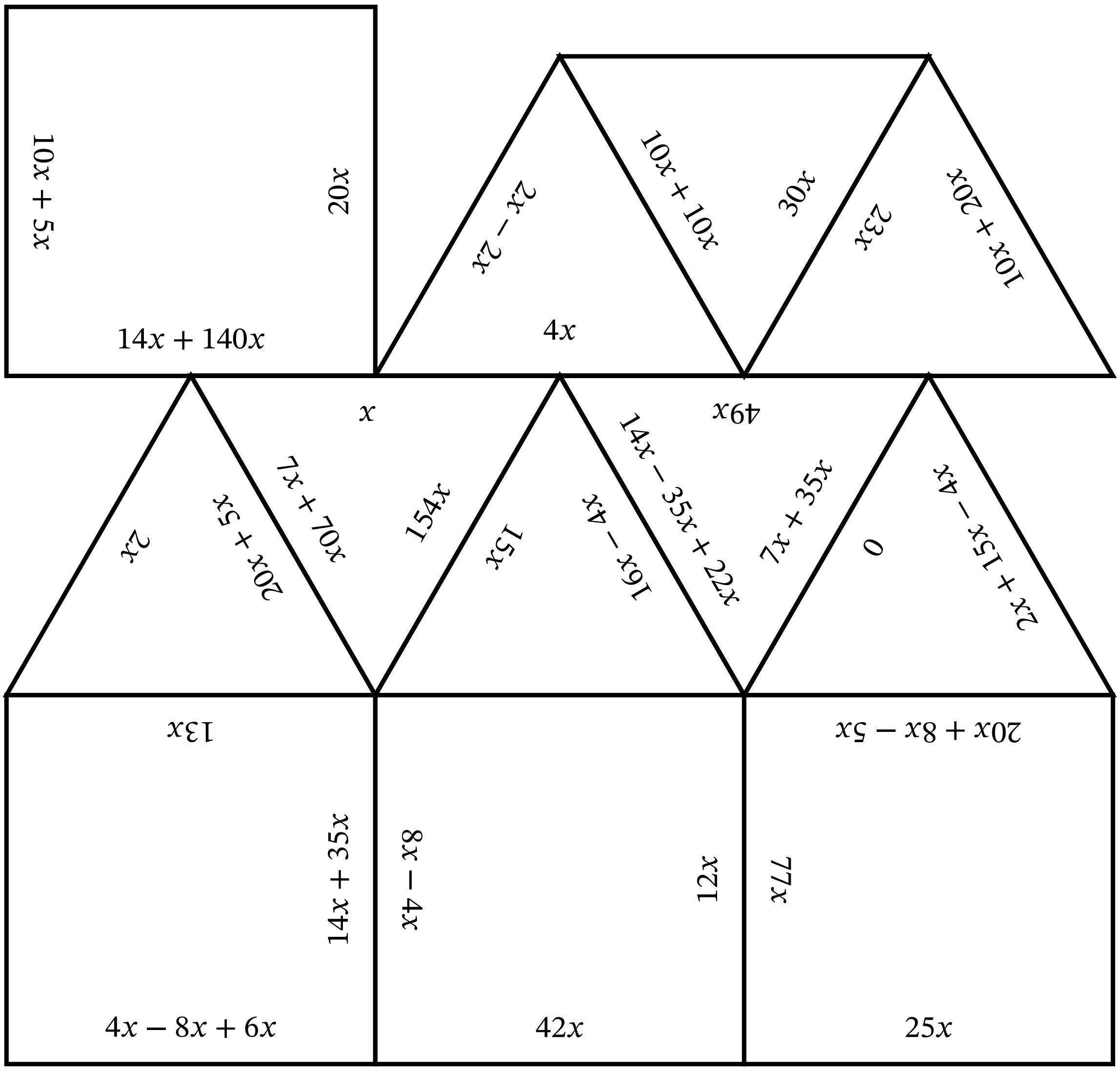
Tour 3

1. Choisir un nombre
2. Enlever 1
3. Doubler le résultat
4. Enlever 1
5. Ajouter au résultat le nombre pensé
6. Donner son résultat

Un diamant littéral

Découper les douze pièces du puzzle et les assembler de telle sorte que les expressions face à face soient égales.
Coller le puzzle sur votre cahier.
La forme à obtenir est celle ci-contre.





Source : inspiré de monclasseurdemaths.fr

Espace &
géométrie

Séquence 26

Hauteurs et médiatrices du triangle

Connaissances :

- Triangle : hauteurs et médiatrices.

Débat : mot valise

Un **mot-valise** est un mot formé par l'accolement du début d'un mot et la fin d'un autre mot. À l'heure actuelle, on invente régulièrement des mots-valises : *Brexit* pour Britain et exit, *Twictée* pour Twitter et dictée, *pourriel* pour poubelle et courriel...
Les maths n'échappent par à la règle et le mot *médiatrice* est un mot-valise qui vient de médiane (dans un triangle, droite joignant un sommet au milieu du côté opposé) et bissectrice (droite coupant un angle en deux angles égaux). Il a été formé en 1923, donc très récemment.

Vidéo : **Les mots-valises**, chaîne YouTube *Image et communication*, épisode d'*Au pied de la lettre*.

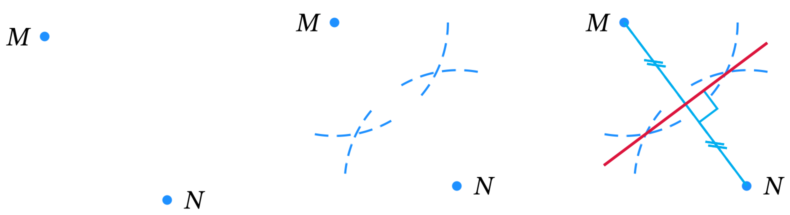
Activité d'approche

Des droites concourantes

Objectifs : tracer les médiatrices d'un triangle ; démontrer que les médiatrices d'un triangle sont concourantes.

Construction de médiatrices

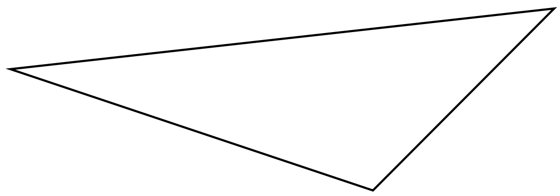
1. Expliquer à l'oral la construction de la médiatrice d'un segment d'après les schémas suivants :

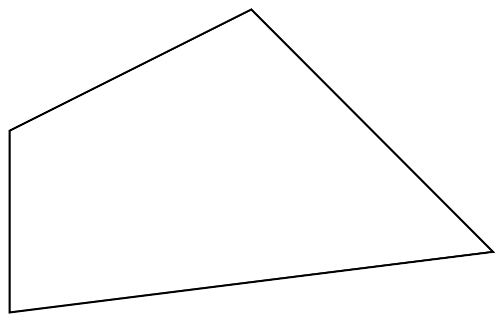


2. Donner une définition de la médiatrice d'un segment :

3. Donner une propriété de la médiatrice d'un segment :

4. Tracer la médiatrice de tous les côtés de ces deux polygones.





5. Pour quel polygone les médiatrices sont-elles concourantes ?

Démonstration

6. Sur une feuille, tracer un triangle ABC puis tracer la médiatrice de $[AB]$ et la médiatrice de $[BC]$.
   Placer O, point d'intersection de ces deux médiatrices.
7. O se situe sur la médiatrice de $[AB]$. Comparer les longueurs OA et OB :
8. O se situe sur la médiatrice de $[BC]$. Comparer les longueurs OB et OC :
9. En déduire une relation entre OA et OC :
10. Que peut-on dire du point O par rapport à $[CA]$?
11. Tracer le cercle de centre O passant par A. Que remarque-t-on ?
12. Conclure :

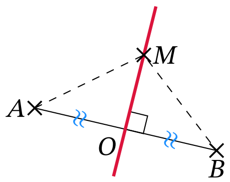
Trace écrite

1 Médiatrices d'un triangle

Définition

Les **médiatrices** d'un triangle sont les médiatrices des côtés du triangle, c'est-à-dire les trois droites perpendiculaires aux côtés qui passent par leur milieu.

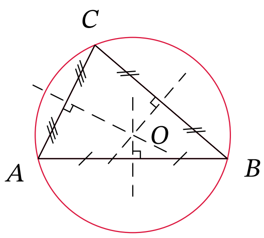
Pour tracer la médiatrice du segment $[AB]$ au compas, on choisit un écartement au compas et on trace deux arcs de cercle à partir de A et de B de part et d'autre du segment $[AB]$. Puis on trace la droite passant par les deux points formés par l'intersection des arcs de cercle.



Propriété

Si un point appartient à la médiatrice d'un segment, alors il est équidistant des extrémités de ce segment.

Ici, M appartient à la médiatrice de $[AB]$.
Donc $MA = MB$.



Propriété

Dans un triangle, les trois médiatrices sont concourantes en un point qui est le centre du cercle circonscrit au triangle.

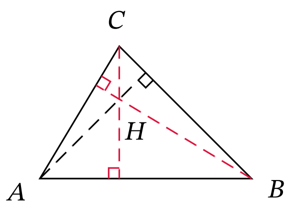
Ici, les médiatrices à $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$ se coupent en O qui est le centre du cercle passant par les trois sommets A, B et C.

2 Hauteurs d'un triangle

Définition

Les **hauteurs** d'un triangle sont les hauteurs relatives aux sommets du triangle, c'est-à-dire les trois droites perpendiculaires aux côtés qui passent par le sommet opposé.

Pour tracer la hauteur dans un triangle issue d'un sommet, on trace la droite passant par ce sommet et perpendiculaire au côté opposé.



Propriété

Dans un triangle, les trois hauteurs sont concourantes en un point appelé orthocentre du triangle.

Ici, H est le point de concours de la hauteur issue de C et de celle issue de B.
Donc, $[AH]$ est la hauteur issue de A.

Fiche d'exercices

1 Suivre le programme suivant en codant les éléments construits :

1. Construire un triangle CJR quelconque.
2. Tracer en rouge la médiatrice du segment $[JR]$ à l'aide du compas et d'une règle graduée.
3. Tracer en noir la médiatrice du segment $[CJ]$ à la règle graduée et à l'équerre.
4. Construire la médiatrice (d) du segment $[CR]$ avec seulement une équerre (non graduée).

2 Dans chaque cas, construire le triangle puis son cercle circonscrit de centre O.

1. Triangle SKI tel que :
   $SI = 8\,\text{cm}$; $\widehat{KSI} = 65°$et $\widehat{KIS} = 45°$.
2. Triangle GYM tel que :
   $GM = 4\,\text{cm}$; $GY = 5\,\text{cm}$ et $\widehat{YGM} = 103°$.
3. Triangle TIR tel que :
   TIR est isocèle en T ; $TI = 8\,\text{cm}$ et $IR = 5{,}5\,\text{cm}$.
4. Triangle VTC tel que :
   VTC est un triangle équilatéral de côté 4 cm.

3 Construction de hauteurs.

1. Construire un triangle BLE puis tracer :
   - en bleu, la hauteur issue du sommet E ;
   - en noir, la hauteur issue du sommet B ;
   - en rouge, la hauteur relative à $[BE]$.
2. Quelle remarque peut-on faire ?

4 Tracer les hauteurs dans les cas suivants :

1. Un triangle ONE ayant trois angles aigus, quelle remarque peut-on faire sur l'orthocentre ?
2. Un triangle TWO tel que l'angle $\widehat{TWO}$ soit obtus, quelle remarque peut-on faire sur l'orthocentre ?
3. Un triangle TRE rectangle en R, quelle remarque peut-on faire sur l'orthocentre ?

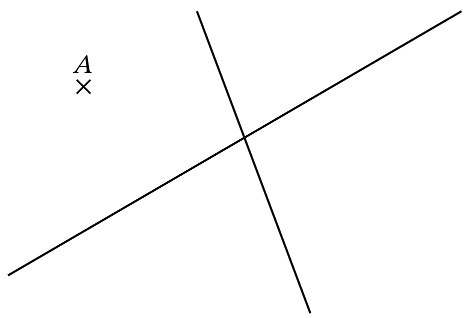
5

1. Tracer un triangle YES quelconque.
2. Placer :
   - le milieu O du côté $[ES]$;
   - le milieu U du côté $[YS]$;
   - le milieu I du côté $[YE]$.
3. Tracer le triangle OUI puis ses hauteurs.
4. Placer le point T orthocentre du triangle OUI.
5. Trace le cercle de centre T et de rayon $[TY]$.
6. Quelle conjecture peut-on écrire ?

6

1. Tracer un triangle BAC rectangle en A.
2. Placer un point M à l'extérieur du triangle ABC.
3. La droite perpendiculaire à (AB) passant par M coupe $[AB]$ en I et la droite perpendiculaire à $[AC]$ passant par M coupe $[AC]$ en J.
4. Placer le point P sur la demi-droite $[MI)$ tel que I soit le milieu de $[MP]$ et le point Q sur la demi-droite $[MJ)$ tel que J soit le milieu de $[MQ]$.
5. Que représente le point A pour le triangle MQP ? Justifier.

7 Lorette avait tracé un triangle AVU au crayon et les médiatrices de deux des côtés au stylo. Son voisin Bilel a effacé le triangle mais a laissé le point A et les deux médiatrices. Reconstruire le triangle de Rose.



Activité récréative

La droite d'Euler

Ouvrir Geogebra et choisir l'onglet **Géométrie**.

Construction de la figure

	Instructions	Outil GeoGebra	Action
1.	Construction du **triangle** ABC		
	Tracer un triangle ABC	polygone	cliquer en trois points quelconques du plan
2.	Construction des trois **hauteurs** et de l'orthocentre H		
	Tracer les hauteurs du triangle	droites perpendiculaires	sélectionner pour chaque hauteur le sommet et son côté opposé
	Placer l'orthocentre	intersection entre deux objets	sélectionner deux hauteurs parmi les trois
	Renommer l'orthocentre en H	clic droit propriétés	nom du point : H
	Effacer les hauteurs	clic droit	décocher « afficher l'objet »
3.	Construction des trois **médiatrices** et du centre du cercle circonscrit O		
	Tracer les médiatrices du triangle	médiatrices	choisir pour chaque médiatrice deux sommets du triangle
	Placer le centre du cercle circonscrit	…	…
	Renommer le centre en O	…	…
	Tracer le cercle circonscrit	cercle (centre-point)	choisir le centre O et le sommet A
	Effacer les médiatrices	…	…
4.	Construction des trois **médianes** et du centre de gravité G. *La médiane d'un côté du triangle est la droite passant par le milieu du côté et le sommet opposé.* *Le point de concours des médianes s'appelle le centre de gravité.*		
	Tracer les médianes du triangle	milieu ou centre	pour chaque médiane, sélectionner deux sommets du triangle
		droite passant par deux points	sélectionner un sommet et le milieu du côté opposé
	Placer le centre de gravité	…	…
	Renommer le centre en G	…	…
	Effacer les médianes et les milieux	…	…

Constatations

5. H, O et G peuvent-ils être confondus ? Dans quels cas ?

----

6. Dans le cas où aucun point n'est confondu, que peut-on conjecturer sur l'alignement des points H, O et G ?

----

7. Peut-on conjecturer l'existence d'une relation de longueur entre OH et OG ?

Grandeurs
& mesures

Séquence 27

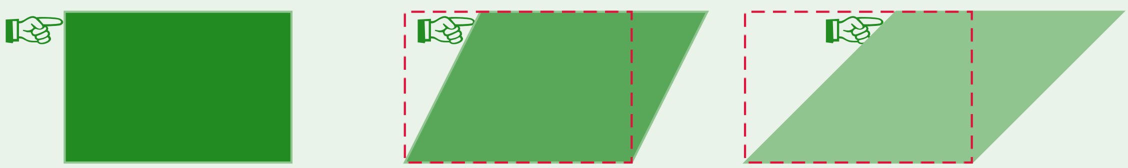
L'aire du parallélogramme

Connaissances :

- Aire du parallélogramme (obtenue à partir de celle du rectangle par découpage et recollement).

Débat : des aires en images

Le parallélogramme peut être vu comme un rectangle que l'on aurait « étiré » par un coin, son **aire** correspond donc à l'aire un rectangle.



Vidéo : **Aire de figures simples**, chaîne YouTube de *Science silencieuse*.

Activité d'approche

Aire d'un parallélogramme

Objectifs : calculer l'aire d'un rectangle ; déterminer la formule de l'aire d'un parallélogramme.

Pour cette activité, il faut se munir d'une paire de ciseau et de colle.

1. Sur le cahier, tracer une droite horizontale sur toute la largeur de la page en laissant 4 cm au dessus puis dessiner un rectangle de 5 cm sur 3 cm sur la ligne comme ceci :

2. Découper les trois rectangles tracés en bas de page dont une longueur est en gras (la base).

   Ils mesurent tous 5 cm par 3 cm.
3. Transformer les trois rectangles en trois parallélogrammes en donnant un seul coup de ciseaux en ligne droite en partant de la base (côté en gras) et en coupant le bord supérieur.
4. Coller les deux morceaux obtenus côte à côte sur le cahier en apposant le côté gras sur la droite tracée.

   Quelle est la nature de chaque quadrilatère obtenu ?
5. Que peut-on dire de l'aire des quatre quadrilatères obtenus ?
6. À partir de la formule de l'aire du rectangle, déterminer comment calculer l'aire d'un parallélogramme.

Source : Inspiré de « Aire des parallélogrammes », Groupe d'Enseignement Mathématique, Belgique.

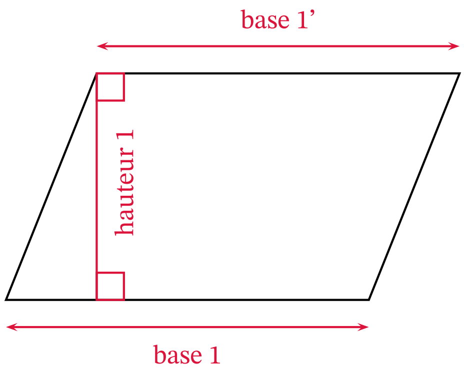
Trace écrite

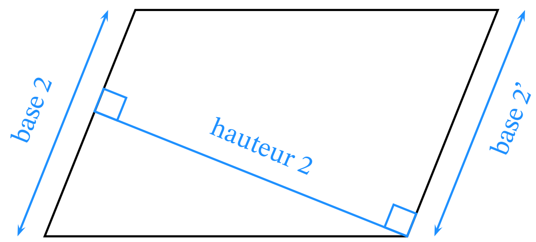
1 Hauteur d'un parallélogramme

Définition

On considère l'un des côtés parallèles d'un parallélogramme que l'on prend comme **base**. Une **hauteur** du parallélogramme associée à cette base est un segment perpendiculaire à la base situé entre les deux côtés parallèles.

Remarque : il y a donc quatre bases possibles pour un parallélogramme, deux à deux parallèles et deux hauteurs associées chacune à une paire de parallèles.





2 Aire du parallélogramme

Propriété

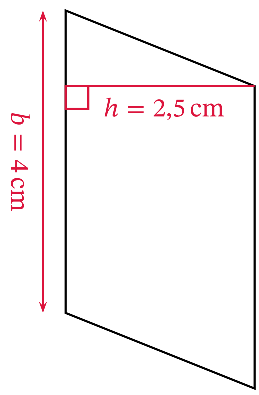
L'aire du parallélogramme se calcule grâce à la formule :

$$\mathcal{A} = \text{base} \times \text{hauteur} = b \times h$$

Remarque : attention à ne pas confondre avec l'aire du rectangle qui est longueur $\times$ largeur.

Exemple

Déterminer l'aire du parallélogramme suivant :

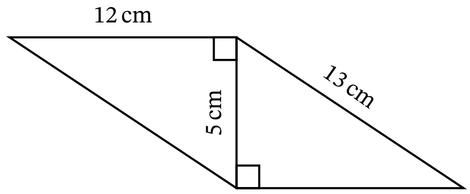


- On définit une base ;
- on trace une hauteur relative à cette base ;
- on mesure la base ;
- on mesure la hauteur ;
- on applique la formule :
  $\mathcal{A} = b \times h$
  $\mathcal{A} = 4\,\text{cm} \times 2{,}5\,\text{cm}$
  $\mathcal{A} = 10\,\text{cm}^2$.

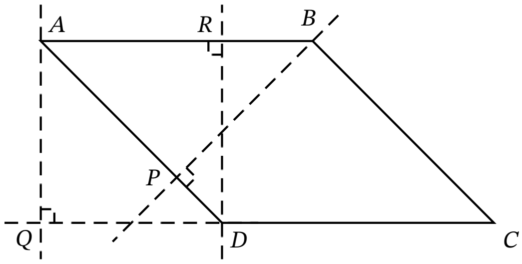
Fiche d'exercices

1 Calculer l'aire puis le périmètre :

1. d'un rectangle de longueur 30 m et de largeur 20 m ;
2. d'un carré de côté 6 cm ;
3. du parallélogramme suivant :

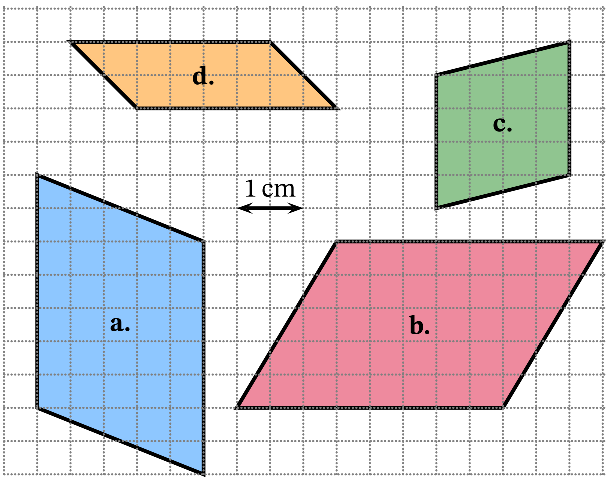


2 Observer le parallélogramme *ABCD* puis compléter les phrases ci-dessous.

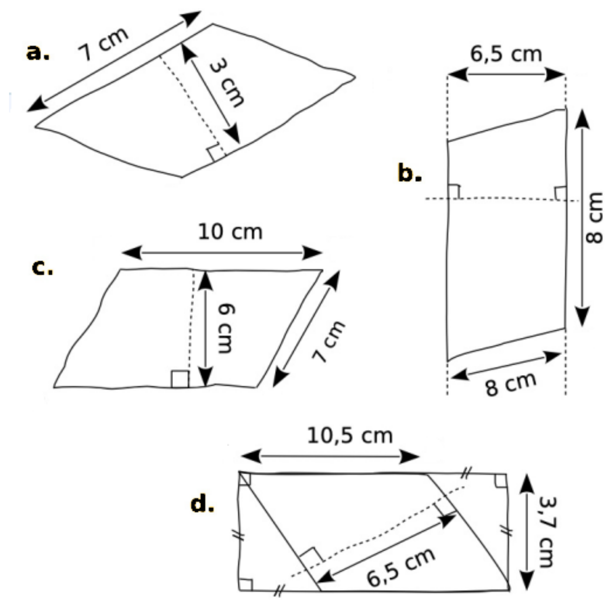


1. Une hauteur relative au côté [*DC*] est ....
2. La droite (*BP*) est une hauteur relative à ....
3. La perpendiculaire à (*AB*) passant par *R* est une hauteur relative à ....
4. La droite (*AQ*) est une hauteur relative à ....
5. Le quadrilatère *ARDQ* est un ....

3 Pour chaque parallélogramme, tracer une hauteur puis déterminer son aire.



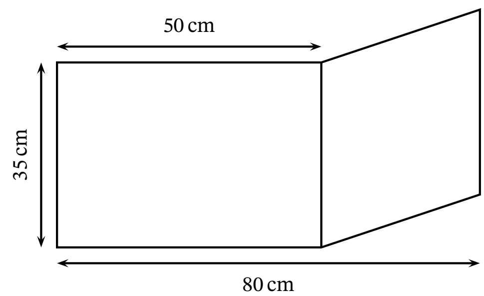
4 Déterminer l'aire de chacun des parallélogrammes suivants.



5 Déterminer la longueur inconnue.

1. Parallélogramme de base 8 cm et d'aire 24 cm^2.
   Calculer la hauteur.
2. Parallélogramme de hauteur 30 cm et d'aire 2,1 dm^2.
   Calculer la mesure de la base relative à cette hauteur.

6 Un menuisier doit découper une planche selon le plan suivant :

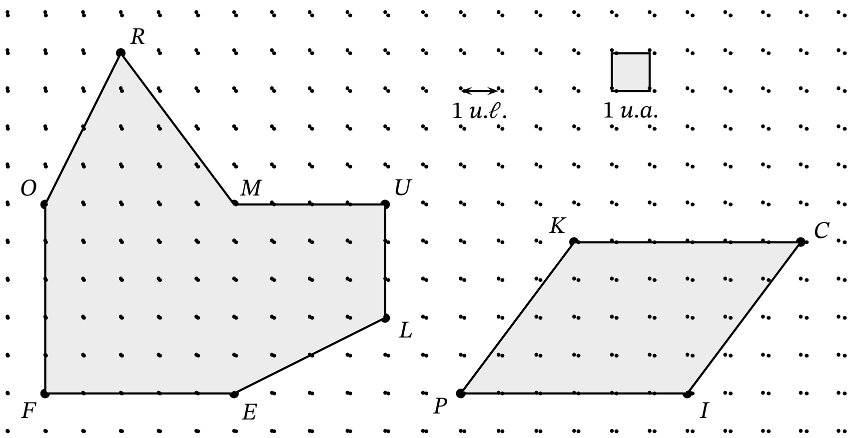


1. Calculer l'aire de la planche.
2. Le menuisier doit faire deux ouvertures dans cette planche :
   - une ouverture rectangulaire de 40 cm sur 15 cm ;
   - une ouverture en parallélogramme de base 20 cm et de hauteur 13 cm.

   Calculer la nouvelle aire de la planche.

La formule de Pick

On travaille dans un réseau pointé à maille carrée. On note $u.\ell.$ l'unité de longueur et $u.a.$ l'unité d'aire.
On appelle polygone de Pick, un polygone non aplati construit sur un tel réseau et dont chacun des sommets est un point du réseau. On considère les figures *FORMULE* et *PICK* suivantes :



Avec les formules classiques

1. Calculer l'aire du parallélogramme *PICK* en unité d'aire.

----

2. Calculer l'aire du polygone *FORMULE*, en unité d'aire en détaillant les étapes du raisonnement.

----

avec la formule de Pick

La formule de Pick permet de calculer l'aire $\mathcal{A}$ d'un polygone de Pick, à partir du nombre i de points du réseau strictement intérieurs à ce polygone et du nombre b de points du réseau sur le bord du polygone : $\boxed{\mathcal{A} = i + \frac{b}{2} - 1}$.

3. Appliquer cette formule au parallélogramme *PICK*.

   $i =$ ------------ $b =$ ------------ donc, $\mathcal{A} =$ ------------

4. Appliquer cette formule au polygone *FORMULE*.

   $i =$ ------------ $b =$ ------------ donc, $\mathcal{A} =$ ------------

5. Appliquer la formule de Pick aux trois polygones de Pick *MOFE*, *MOR* et *MULE*.
   Vérifier que la somme des résultats obtenus est égale à l'aire totale de la figure.

Grandeurs
& mesures

Séquence 28

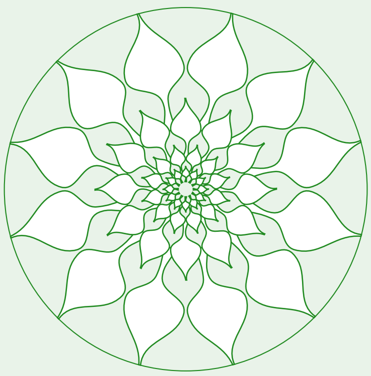
Propriétés des symétries

Compétences :

- Comprendre l'effet d'une symétrie (axiale et centrale) sur une figure.
- Mobiliser les connaissances des transformations au programme pour déterminer des grandeurs géométriques.
- Mener des raisonnements et s'initier à la démonstration en utilisant des transformations.

Débat : les mandalas

Mandala est un terme sanskrit qui signifie *cercle*. Il désigne plus largement un objet support à la méditation et à la concentration composé de cercles ; de symétries et de formes diverses.



Vidéo : **Tibet sand painting of Mandala**, chaîne YouTube *Tibet travel*.

Activité d'approche

Propriétés des symétries

Objectifs : observer l'effet d'une symétrie centrale ou d'une symétrie axiale sur les longueurs, les angles, le parallélisme et l'alignement; utiliser un logiciel de géométrie dynamique.

Ouvrir Geogebra et choisir l'onglet **Géométrie**.

Symétrie axiale

1	Construction de la **figure** et de l'**axe de symétrie**		
	Tracer un quadrilatère $ABCD$	polygone	*cliquer en quatre points du plan*
	Placer un point E sur la droite (AB)	point sur objet	*cliquer quelque part sur la droite (AB)*
	Tracer la parallèle à (BC) passant par D	parallèle	*cliquer sur le segment $[BC]$ puis sur D*
	Tracer une droite (FG)	droite	*cliquer en deux points du plan*
2	Construction de la figure **symétrique par rapport à l'axe** (FG)		
	Tracer la figure symétrique	symétrie axiale	*sélectionner successivement chaque élément de la figure, puis la droite (FG)*
3	Faire apparaître différentes **mesures**		
	Mesurer la longueur du segment $[AD]$	distance	*cliquer sur le segment $[AD]$*
	Mesurer l'angle $\widehat{ABC}$	angle	*cliquer sur les trois points de l'angle*

1. Observer ce qu'il se passe lorsque l'on déplace un point du quadrilatère $ABCD$ ou de l'axe de symétrie.
2. Comparer la longueur du segment $[AD]$ et celle du segment $[A'D']$: ....
3. Comparer la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ et celle de l'angle $\widehat{A'B'C'}$: ....
4. Où se situe le point E' ? ....
5. Les deux droites parallèles entre elles dans la figure d'origine le restent-elles dans la figure symétrique? ......

Symétrie centrale

1	Construction de la **figure** et du **centre de symétrie**		
	Tracer un pentagone $ABCDE$	polygone	*cliquer en cinq points du plan*
	Placer un point F sur la droite (AB)	point sur objet	*cliquer quelque part sur la droite (AB)*
	Tracer la parallèle à (CD) passant par E	parallèle	*cliquer sur le segment $[CD]$ puis sur E*
	Placer un point (G)	point	*cliquer en un point du plan*
2	Construction de la figure **symétrique par rapport au centre** G		
	Tracer la figure symétrique	symétrie centrale	*sélectionner successivement chaque élément de la figure, puis le point G*
3	Faire apparaître différentes **mesures**		
	Mesurer la longueur du segment $[BC]$	distance	*cliquer sur le segment $[BC]$*
	Mesurer l'angle $\widehat{CDE}$	angle	*cliquer sur les trois points de l'angle*

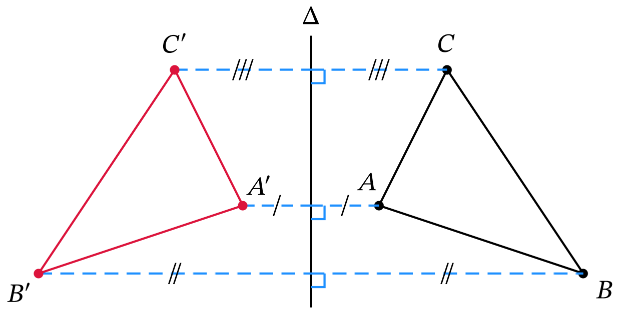
6. Observer ce qu'il se passe lorsque l'on déplace un point du pentagone $ABCDE$ ou le point G.
7. Comparer la longueur du segment $[BC]$ et celle du segment $[B'C']$: ....
8. Comparer la mesure de l'angle $\widehat{CDE}$ et celle de l'angle $\widehat{C'D'E'}$: ....
9. Où se situe le point F' ? ....
10. Les deux droites parallèles entre elles dans la figure d'origine restent-elles parallèles dans la figure symétrique?

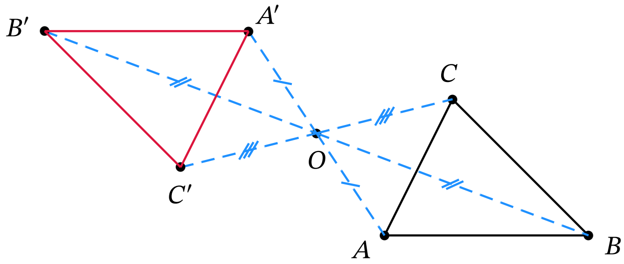
Trace écrite

1 Rappels sur les symétries

Définition

- M' est l'image du point M par la **symétrie d'axe** Δ signifie que la droite Δ est la médiatrice du segment $[MM']$.
- M' est l'image du point M par la **symétrie de centre** O signifie que O est le milieu du segment $[MM']$.





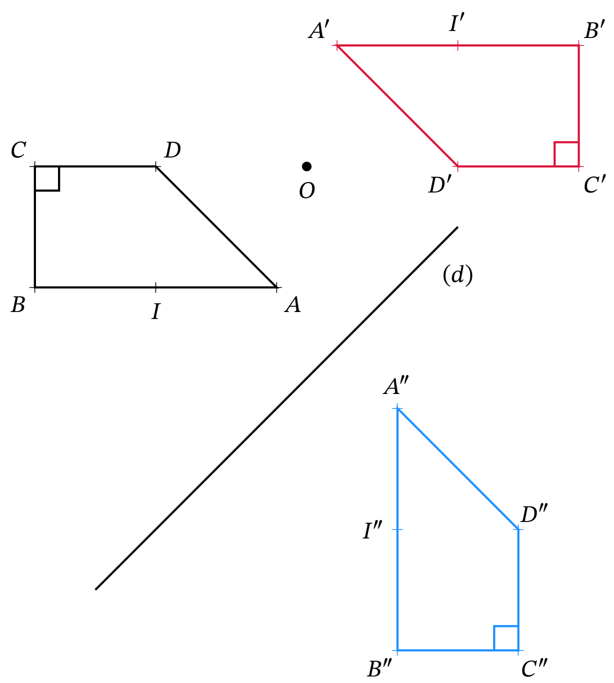
2 Propriétés des symétries

Propriété

La symétrie axiale et la symétrie centrale **conservent** les longueurs, les angles, l'alignement et le parallélisme (ce sont des isométries).

Exemple

On considère la figure $A'B'C'D'$ symétrique de $ABCD$ par rapport au point O et la figure $A''B''C''D''$ symétrique de $ABCD$ par rapport à la droite (d).



Propriétés conservées :

- L'alignement :

  $I \in [AB]$ donc : $\begin{cases} I' \in [A'B'] \\ I'' \in [A''B''] \end{cases}$

- le parallélisme :

  $(AB)//(CD)$ donc : $\begin{cases} (A'B')//(C'D') \\ (A''B'')//(C''D'') \end{cases}$

- Les longueurs :

  $A'B' = AB$ et $A''B'' = AB$

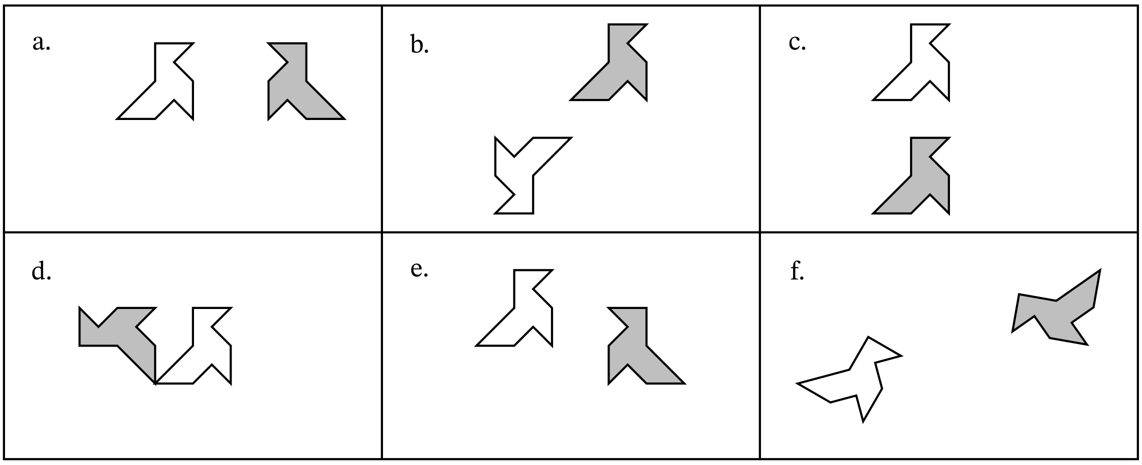
  $IA = IB$ donc $\begin{cases} I'A' = I'B' \\ I''A'' = I''B'' \end{cases}$

- Les angles :

  $(BC) \perp (CD)$ donc $\begin{cases} (B'C') \perp (C'D') \\ (B''C'') \perp (C''D'') \end{cases}$

Fiche d'exercices

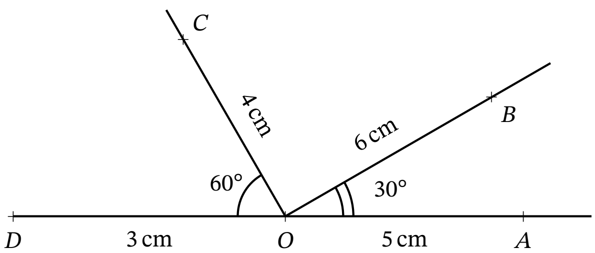
1 Pour chacune des figures suivantes, dire s'il s'agit ou pas d'une symétrie (axiale ou centrale). Si oui, tracer l'axe ou le centre de symétrie.



2 Soit ABC un triangle isocèle en A tel que $BC = 3$ cm et $BA = 4$ cm.

1. Construire le triangle ABC.
2. Construire le symétrique de ABC par apport à A (D est le symétrique de B et E celui de C).
3. Construire le milieu I de $[BC]$ et J celui de $[DE]$.
4. Démontrer que les trois points J, A et I sont alignés. Que représente la droite (IJ) pour les segments $[BC]$ et $[DE]$?

3 Le dessin ci-dessous n'est pas à taille réelle. Les points D, O et A sont alignés.



1. Reproduire en vraie grandeur ce dessin.
2. Construire les points E et F, symétriques respectifs de B et C par rapport à O.
   Julie affirme que l'angle $\widehat{BOF}$ mesure 60° et l'angle $\widehat{COE}$ mesure 90°. À-t-elle raison ? Si oui, justifier ; sinon, corriger son affirmation.

4 Programme de construction :

- Tracer un triangle MOP tel que : $OM = 2{,}5$ cm ; $OP = 3$ cm et $\widehat{POM} = 70°$.
- Tracer la droite (d) perpendiculaire à la droite (OP) passant par le point P.
- Tracer le symétrique du triangle MOP par rapport à la droite (d) : on notera M' le symétrique de M par rapport à la droite (d), O' celui de O.

1. Quelle devrait-être la mesure de PO' ? Vérifier.
2. Quelle devrait-être la mesure de $M'O'$? Vérifier.
3. Quelle devrait-être la mesure de $\widehat{PO'M'}$? Vérifier.

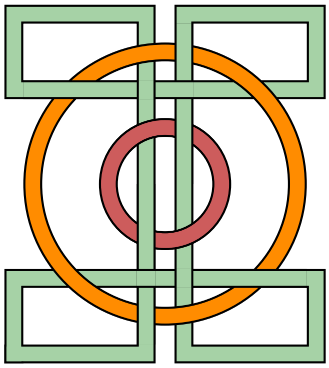
5 Un quadrilatère $ABCD$ est appelé isocerfvolant en A si l'angle $\widehat{BAD}$ est droit et si la droite (AC) est un axe de symétrie.

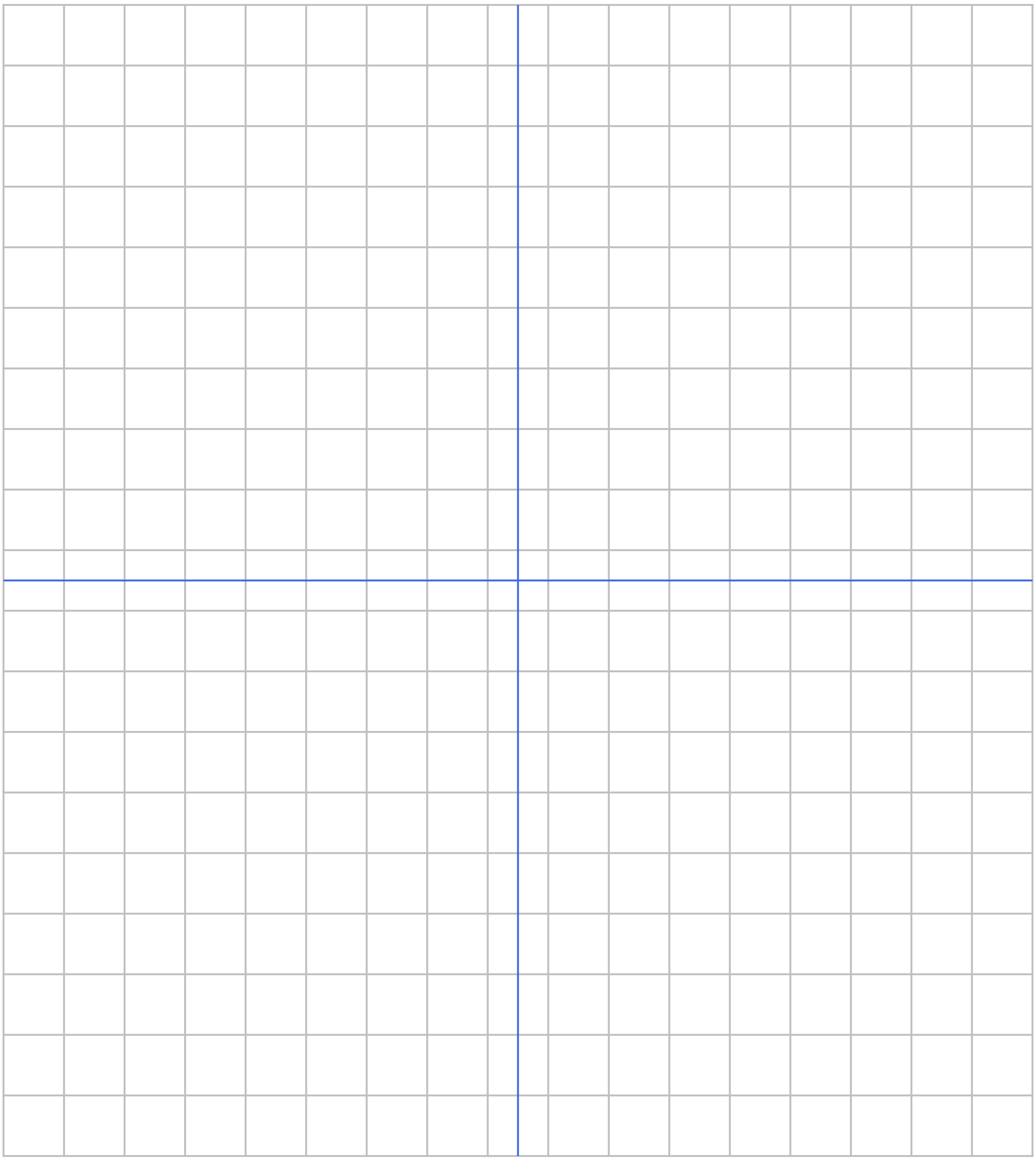
1. (a) Construire un quadrilatère ABCD qui soit un isocerfvolant en A.
   (b) Construire un quadrilatère qui admette un axe de symétrie et qui ne soit pas un isocerfvolant.
2. (a) Dans un isocerfvolant, montrer que $\widehat{DAC} = \widehat{BAC}$
   (b) En déduire la mesure de l'angle $\widehat{DAC}$
   (c) Quelle est la position relative de (BD) et (AC) ?
3. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier les réponses.

Entrelacs chinois

Dans le rectangle quadrillé ci-dessous, les axes de symétrie ont été tracés en bleu, ils se coupent au point O. Le but est de reproduire l'entrelacs ci-contre, formé de trois rubans entrelacés, sachant que :

- l'épaisseur de ces rubans est de 1 carreau ;
- les dimensions de la figure complète sont de 17 carreaux sur 19 carreaux ;
- tous les segments sont portés par des lignes du quadrillages ;
- les cercles ont pour centre commun le point O ;
- les extrémités de leurs diamètres verticaux sont sur des lignes horizontales ;
- cette figure admet un centre de symétrie mais pas d'axe de symétrie.





Pour préparer les évaluations

S01 : Enchaînement d'opérations

Calculer avec des priorités	Traduire une expression	Test avec MathALEA

S02 : Angles particuliers

Angles alternes-internes	Angles correspondants	Test avec MathALEA

S03 : En route vers la programmation

Prise en main de Scratch	Utiliser une boucle	Test avec MathALEA

S04 : Nombres relatfis

Droite graduée	Comparer des nombres	Test avec MathALEA

S05 : Repérage dans le plan

Droite graduée	Repère gradué	Test avec MathALEA

S06 : Effectifs, fréquences et moyenne

Calculer des fréquences	Calculer une moyenne	Test avec MathALEA

S07 : Multiples et diviseurs

Multiples et diviseurs	Critères de divisibilité	Test avec MathALEA

S08 : Somme des angles d'un triangle

La règle des 180°	Démontrer	Test avec MathALEA

S09 : Horaires et durées

Convertir et calculer des durées	Les heures décimales	Test avec MathALEA

S10 : Comparaison et égalité de fractions

Fractions égales	Simplifier une fraction	Test avec MathALEA

S11 : La symétrie centrale

Symétrie sur feuille unie	Symétrie sur quadrillage	Test avec MathALEA

S12 : Notions de probabilités

Problème de hasard	Calculer un probabilité	Test avec MathALEA

S13 : Expressions littérales

Traduire une expression	Simplifier une expression	Test avec MathALEA

S14 : Reconnaître des solides

Prismes et pyramides	Décrire le pavé droit	Test avec MathALEA

S15 : Périmètre et aire

Aire d'une figure	Aire d'un disque	Test avec MathALEA

S16 : Calculs avec des nombres relatifs

Sommes et différences	Calculs avec parenthèses	Test avec MathALEA

S17 : L'inégalité triangulaire

Triangle constructible	Triangle non constructible	Test avec MathALEA

S18 : Le ratio

Partager suivant un ratio	Utiliser les ratios	Test avec MathALEA

S19 : Nombres premiers

Nombre premier	Simplifier une fraction	Test avec MathALEA

S20 : Le parallélogramme

Parallélogramme et côtés	Parallélogramme et angles	Test avec MathALEA

S21 : Volume du pavé, du prisme et du cylindre

Volume du prisme	Volume du cylindre	Test avec MathALEA

S22 : Calculs avec des fractions

Additionner et soustraire (1)	Additionner et soustraire (2)	Test avec MathALEA

S23 : Représenter le pavé et le cylindre

Patron du pavé droit	Patron du cylindre	Test avec MathALEA

S24 : Proportionnalité

Utiliser une échelle	Appliquer un pourcentage	Test avec MathALEA

S25 : Distributivité simple et égalités

Distributivité et calculs	Tester une égalité	Test avec MathALEA

S26 : Hauteurs et médiatrices d'un triangle

Médiatrice et hauteur	Cercle circonscrit	Test avec MathALEA

S27 : L'aire du parallélogramme

Aire du parallélogramme	Aire composée	Test avec MathALEA

S28 : Propriétés des symétries

Propriété de conservation	Centre et axe de symétrie	Test avec MathALEA