Manuel

de Mathématiques

5e

Montpellier

Collège Simone Veil

Nathalie Daval

année

2021-2022

Ce manuel est composé de l'ensemble des activités, cours, exercices pour les classes de 5e du collège Simone Veil de Montpellier que j'ai à ma charge durant l'année 2021-2022.

Il a été écrit en LaTeX avec la classe sesamanuel distribuée librement par l'association sesamath. Si vous y voyez des erreurs ou des coquilles, même minimes, vous pouvez me les signaler à cette adresse : nathalie.daval@ac-montpellier.fr Je remercie à ce propos Jean-Félix Navarro qui a effectué une relecture attentive de ce livret.

La progression est dite spiralée, c'est-à-dire que chaque « chapitre » est décomposé en plusieurs courtes séquences conçues pour durer une semaine en moyenne, ce qui permet de revoir les notions plusieurs fois dans l'année. La page suivante propose une programmation possible sur les cinq périodes (P1, P2, P3, P4 et P5) de l'année 2021-2022. Chaque séquence du présent manuel est composée de la manière suivante :

— **Connaissances et compétences associées** : les connaissances et compétences associées au cycle 4 définies par le programme en vigueur à compter de la rentrée de l'année scolaire 2018-2019.

— **Débat** : un petit texte culturel illustré permettant d'échanger sur un thème en rapport au chapitre. Un morceau d'histoire, de l'étymologie, du vocabulaire, une curiosité mathématique... le tout agrémenté d'une courte vidéo de vulgarisation scientifique.

— **Cahier de compétences** : les pages correspondant au chapitre dans le cahier MYRIADE. Chaque élève pourra, s'il le souhaite, travailler en autonomie en classe ou à la maison sur ce cahier.

— **Activité d'approche** : une activité à faire en classe permettant de découvrir une notion du chapitre.

— **Trace écrite** : l'essentiel du cours à connaître.

— **Entraînement** : les exercices à faire en priorité.

— **Récréation, énigmes** : une activité ludique liée au chapitre.

En complément de ce manuel, nous travaillerons sur le *Cahier de compétence - maths, collection Myriade* de chez Bordas de manière plus individuelle comme outil d'entraînement, de réinvestissement, d'approfondissement, d'évaluation. Mais surtout, en cas de période de confinement total ou partiel, il permettra une meilleure continuité pédagogique en plus des heures de classes virtuelles.

	Grandeurs & mesures	Nombres & calculs	Espace & géométrie	Organisation & gestion de données
	Semaine de rentrée			
P1		Nombres et calculs 1 Enchaînement d'opérations		
P1			Figures et configurations 1 Les angles	
P1	Grandeurs mesurables 1 Aires et périmètres			
P1		Nombres et calculs 2 Nombres relatifs		
P1			Représenter l'espace 1 Repérage et déplacements	
P1				Statistiques et probabilités 1 Interpréter, représenter des données
	Semaine de rattrapage			
P2	Grandeurs mesurables 2 Horaires et durées			
P2		Calcul littéral 1 Expressions littérales		
P2			Figures et configurations 2 Somme des angles d'un triangle	
P2				Statistiques et probabilités 2 Probabilités
P2		Arithmétique 1 Multiples et diviseurs		
P2			Transformations 1 La symétrie centrale	
P3	Grandeurs mesurables 3 Calcul d'aires			
P3		Nombres et calculs 3 Comparaison et égalité de fractions		
P3			Figures et configurations 3 Inégalité triangulaire	
P3				Proportionnalité 1 Proportionnalité
P3		Calcul littéral 2 Distributivité		
P3			Représenter l'espace 2 Reconnaître des solides	
	Semaine de rattrapage			
P4	Grandeurs mesurables 4 Volumes et capacités			
P4		Nombres et calculs 4 Somme et différence de nombres relatifs		
P4			Figures et configurations 4 Le parallélogramme	
P4				Statistiques et probabilités 3 Traiter des données
P4		Arithmétique 2 Les nombres premiers		
P4			Représenter l'espace 3 Représenter les solides	
	Semaine de rattrapage			
P5	Grandeurs mesurables 5 L'aire du parallélogramme			
P5		Nombres et calculs 5 Somme et différence de fractions		
P5			Figures et configurations 5 Les droites du triangle	
P5				Proportionnalité 2 Le ratio
P5		Calcul littéral 3 Introduction aux équations		
P5	Transformations 2 Transformations et grandeurs			

Sommaire

NOMBRES ET CALCULS

GÉOMÉTRIE

ORGANISATION ET GESTION DE DONNÉES

GRANDEURS ET MESURES

NOMBRES & CALCULS

1

Enchaînement d'opérations

Connaissances ♡ et compétences ♢ du cycle 4

- ♡ Nombres décimaux positifs.
- ♡ Sommes, différences, produits, quotients de nombres décimaux.
- ♡ et ♢ Utiliser diverses représentations d'un même nombre.
- ♢ Comparer, ranger, encadrer des nombres décimaux.
- ♢ Calculer avec des nombres décimaux.

Débat : un peu d'histoire

Le système de numération que nous employons actuellement et qui nous semble si naturel est le fruit d'une longue évolution des concepts mathématiques. En effet, un nombre est une entité abstraite qui peut surprendre : on a déjà vu **un** élève, **un** animal donné, on sait ce qu'est **un** jour, mais qu'est-ce que **un** ? C'est une entité qui, prise seule, n'a pas vraiment de sens. De nombreuses civilisations ont imaginé des systèmes de numération plus ou moins compliqués, plus ou moins pratiques : des systèmes utilisant des bases différentes, des systèmes utilisant le principe additif… jusqu'à notre système de numération positionnel de base dix maintenant utilisé de manière universelle.

19⓪1①7②8③

Notation décimale de Simon Stevin représentant le nombre 19,178.

Vidéo : **Histoire de la virgule**, chaîne Youtube de *Maths 28*.

Cahier de compétences : chapitre 1, exercices 1 à 38.

Activité d'approche

Construction et repérage d'une droite graduée

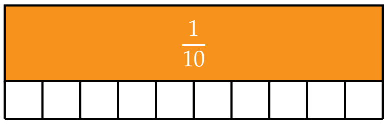
Objectifs : comprendre et utiliser le principe de construction d'une graduation en dixièmes et en centièmes ; savoir situer des nombres décimaux sous différentes écritures ; ordonner, encadrer, intercaler des nombres décimaux.

Partie 1 : construction d'une droite graduée

1) Tracer au stylo une droite la plus longue possible sur la bande de papier fournie.

2) Placer à gauche sur cette droite le repère de l'origine, inscrire la valeur 0 en dessous.

3) Grâce à la petite bande de couleur « $\frac{1}{10}$ », qui correspond à un dixième d'une unité, placer le nombre 1.



4) Placer ensuite les nombres 2 et 3, toujours en dessous de la droite.

Partie 2 : placer des nombres décimaux sur la droite graduée

1) Sur la droite graduée, placer au crayon à papier et au-dessus les nombres suivants :

$\frac{8}{10}$ $\quad$ $0,3$ $\quad$ cinq dixièmes $\quad$ $\frac{23}{10}$ $\quad$ $1,7$ $\quad$ $2+\frac{1}{10}$ $\quad$ douze dixièmes

2) Trouver un moyen pour placer $\frac{143}{100}$ sur la droite graduée.

3) Placer au crayon les nombres suivants : $\quad$ $\frac{255}{100}$ $\quad$ $0,23$ $\quad$ cent-six centièmes $\quad$ $1+\frac{9}{10}+\frac{8}{100}$

Partie 3 : ordonner, encadrer, intercaler des nombres décimaux

1) Écrire dans l'ordre croissant les quinze nombres inscrits sur la droite graduée.

- ....

2) Encadrer chacun des nombres suivants par deux nombres entiers consécutifs.

- .... $< \frac{8}{10} <$ ....
- .... $< 1,7 <$ ....
- .... $< \frac{255}{100} <$ ....
- .... $< 0,3 <$ ....
- .... $< 2+\frac{1}{10} <$ ....
- .... $< 0,23 <$ ....
- ...... < cinq dixièmes < ......
- ...... < douze dixièmes < ......
- ...... < 106 centièmes < ......
- .... $< \frac{23}{10} <$ ....
- .... $< \frac{143}{100} <$ ....
- ...... $< 1+\frac{9}{10}+\frac{8}{100} <$ ......

3) Intercaler un nombre vérifiant chacune des inégalités.

- cinq dixièmes < .... $< \frac{8}{10}$
- $2 <$ .... $< 2+\frac{1}{10}$
- $0,23 <$ .... $< 0,3$

Source : Apprentissages numériques et résolution de problèmes au CM2, Ermel, Hatier 2001.

1. Rappels sur les nombres décimaux

DÉFINITION

Une **fraction décimale** est une fraction dont le dénominateur est 1, 10, 100, 1 000 . . .
Un **nombre décimal** est un nombre qui peut s'écrire sous forme d'une fraction décimale.

Un nombre a une seule valeur numérique mais a plusieurs écritures.

Exemple Voilà plusieurs écritures du nombre seize et quatre-vingt-deux centièmes :

$$\begin{aligned}16{,}82 &= 16+\frac{82}{100}=\frac{1\,682}{100}\\ &= 1\times 10+6\times 1+8\times\frac{1}{10}+2\times\frac{1}{100}=1\times 10+6\times 1+8\times 0{,}1+2\times 0{,}01\end{aligned}$$

2. Priorités dans les calculs

DÉFINITION

- Lorsqu'on effectue l'addition de deux **termes**, le résultat est une **somme**.
- Lorsqu'on effectue la soustraction de deux **termes**, le résultat est une **différence**.
- Lorsqu'on effectue la multiplication de deux **facteurs**, le résultat est un **produit**.
- Lorsqu'on effectue la division d'un **dividende** par un **diviseur**, le résultat est un **quotient**.

$12 + 3 = 15$	$12 - 3 = 9$	$12 \times 3 = 36$	$12 \div 3 = \frac{12}{3} = 4$
$\nwarrow \nearrow \quad \uparrow$	$\nwarrow \nearrow \quad \uparrow$	$\nwarrow \nearrow \quad \uparrow$	$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
termes — somme	termes — différence	facteurs — produit	dividende — diviseur — quotient

MÉTHODE 1 Priorités opératoires

Dans un calcul, on effectue dans l'ordre :
- les calculs entre parenthèses, en commençant par les plus intérieures ;
- les multiplications et les divisions ;
- les additions et soustractions.

Les calculs s'effectuent généralement de gauche à droite, mais une expression comportant uniquement des multiplications ou des additions peut s'effectuer dans l'ordre que l'on veut.

Exercice d'application

Calculer la valeur de A :
$A = 8\times 5+3\times((15-9)\times 2)$

Correction

$$\begin{aligned}A &= 8\times 5+3\times((15-9)\div 2)\\ &= 8\times 5+3\times(6\div 2)\\ &= 8\times 5+3\times 3\\ &= 40+9\\ A &= 49\end{aligned}$$

REMARQUE : une expression qui figure au numérateur et/ou au dénominateur d'un quotient est considérée comme une expression entre parenthèses :
$\dfrac{8+4}{3{,}5+2{,}5}=(8+4)\div(3{,}5+2{,}5)=12\div 6=2.$

Entraînement

Rappels sur les nombres décimaux

1 Associer chaque nombre de la colonne de gauche à un nombre de la colonne de droite.

143 dixièmes •	• 143
1 430 millièmes •	• 14 300
1 430 dixièmes •	• 1,43
143 millièmes •	• 0,014 3
143 dix-millièmes •	• 0,143
143 centaines •	• 14,3

2 Décomposer les nombres suivants ainsi :

$$\frac{736}{100} = 7 + \frac{3}{10} + \frac{6}{100} = 7,36$$

1) $\frac{8\,725}{1\,000}$ 2) $\frac{1\,253}{100}$ 3) $\frac{32}{100}$ 4) $\frac{908}{10}$

3 Compléter avec les signes < ou >.

1) $\frac{32}{100}$ ---------- $\frac{40}{100}$

4) $\frac{85}{100}$ ----------- $\frac{9}{10}$

2) $\frac{7}{10}$ ----------- $\frac{7}{100}$

5) $\frac{37}{100}$ --------- $\frac{307}{1\,000}$

3) $\frac{43}{100}$ ------------ $\frac{4}{10}$

6) $5 + \frac{8}{10}$ ------ $5 + \frac{8}{100}$

4 Ranger chaque série de nombres :

1) dans l'ordre croissant ;

0,7 | 0,07 | 0,707 | 0,007 | 0,77 | 0,077

2) dans l'ordre décroissant.

5,3 | 3,5 | 5,35 | 3,53 | 5,353 | 3,535

5 Gavin souhaite classer dans l'ordre croissant l'ensemble de ces lettes afin de trouver le mot mystère. Comment peut-on l'aider ?

- O = 65,165
- R = $\frac{655}{10}$
- A = $\frac{6\,503}{100}$
- T = $56 + \frac{6}{100}$
- G = $\frac{651}{10} + \frac{3}{100}$
- H = $50 + 6 + \frac{65}{1\,000}$
- Y = $56 + \frac{5}{100}$
- E = $(6 \times 10) + (5 \times 1) + (6 \times 0,1)$
- P = 56 unités et 6 millièmes

Priorités dans les calculs

6 Traduire par une expression mathématique les phrases suivantes puis calculer :

1) La somme de 7 et du produit de 2 par 3.
2) Le produit de 7 et de la somme de 2 et de 3.
3) Le quotient de la différence de 7 et de 2 par 3.
4) La différence de la somme de 7 et de 2 et du produit de 3 par 1.

7 Calculer, en donnant les étapes intermédiaires :

1) $24 - 19 + 5$
2) $45 \div 5 \times 8$
3) $24 + 3 \times 7$
4) $720 \div 9 + 4$
5) $60 - 14 + 5 \times 3 + 2$
6) $37 - 12 \times 2 + 5$
7) $18 - [4 \times (5 - 3) + 2]$
8) $1 + [3 + 5 \times (2 + 1)] \times 2$

8 Calculer les nombres suivants :

1) $\frac{18}{3} + 6$ 3) $18 + \frac{6}{3}$ 5) $\frac{18}{\frac{6}{3}}$

2) $\frac{18 + 6}{3}$ 4) $\frac{18}{6 + 3}$ 6) $\frac{\frac{18}{6}}{3}$

9 On considère les calculs suivants faits par Tom :

- A. $50 - 10 \div 2 = 20$
- B. $24 - 8 + 2 = 14$
- C. $8 + 2 \times 3 = 30$
- D. $10 + 8 - 6 = 12$
- E. $100 \div 2 \times 5 = 10$
- F. $5 \times 6 \div 3 = 10$

1) Retrouver les calculs qui sont justes.
2) Corriger les calculs faux.

10 Compléter les calculs suivants pour que chaque égalité soit vraie.

1) Avec les signes +, − ou × :

- 3 --------- 3 -------- 3 -------- 3 = 6
- 3 -------- 3 -------- 3 -------- 3 = 81

2) Avec les signes +, − ou × et des parenthèses :

- ----- 3 -----3----- 3 ---- 3 ----- = 9
- ----- 3 ---- 3 -----3----- 3 ---- = 27

3) Avec les signes +, −, × ou ÷ et des parenthèses :

- ----- 3 -----3----- 3 ---- 3 ----- = 1
- ----- 3 ---- 3 ----- 3 ---- 3 ----- = 12

Nombres en cases

Partie A : nombres croisés

Compléter le tableau suivant pour que les égalités soient vraies en ligne et en colonne.

2	+	3	×		=	17
×		+		+		×
	×		−	201	=	150
=		=		=		=
	+	12	×		=	

Partie B : serpent des nombres

Compléter le serpent suivant sachant que seuls les nombres 1, 2, 3, 4 et 5 doivent être utilisés une seule fois seulement en respectant les priorités d'opérations.

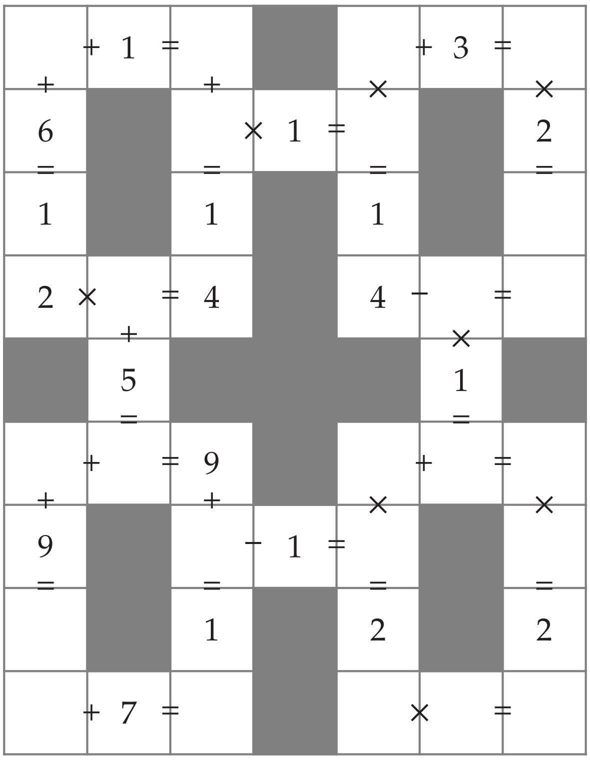
			−	6		66
+		×		−		=
13		12		11		10
×		+		+		−
		7		9		
÷		+		×	8	÷

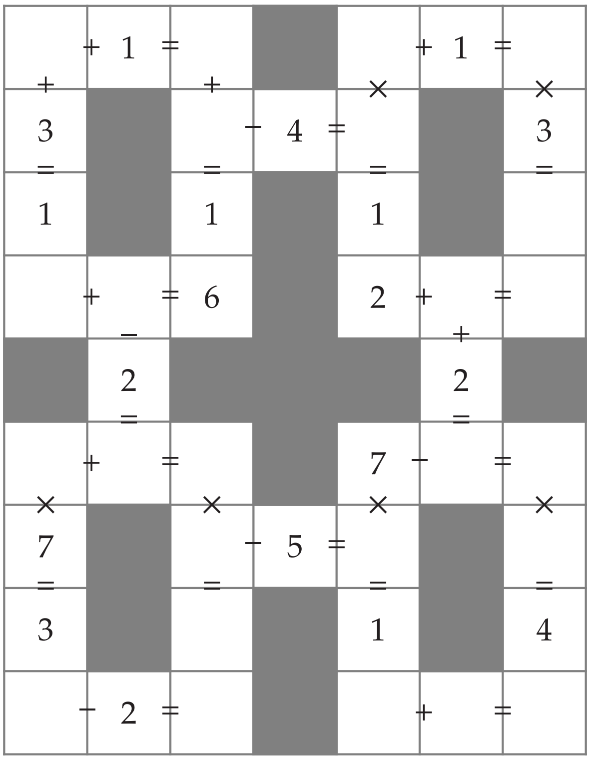
Partie C : le garam

Le Garam est un jeu de logique mathématique à base d'opérations simples.

Remplir chaque case avec un seul chiffre de sorte que chaque ligne et chaque colonne forment une opération correcte.

Le résultat d'une opération verticale est un nombre à deux chiffres si deux cases suivent le symbole égal.





ESPACE &
GÉOMÉTRIE

2

Les angles

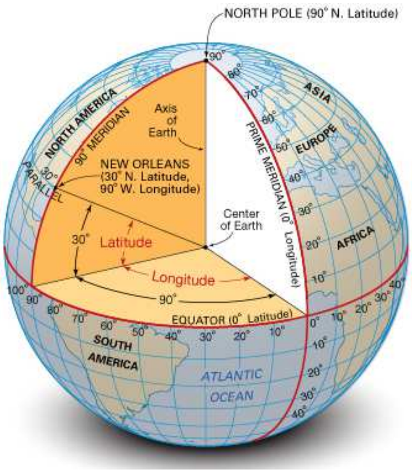
Connaissances ♡ et compétences ♢ du cycle 4

♡ Caractérisation angulaire du parallélisme : angles alternes-internes, angles correspondants.

Débat : angles et coordonnées géographiques

Tout point à la surface de la Terre est déterminé par ses coordonnées géographiques (la latitude et la longitude) et par son altitude (élévation par rapport au niveau de la mer).

- La **latitude** d'un point sur la Terre est la mesure de l'angle que forment le plan de l'équateur et la demi-droite joignant le centre de la Terre à ce point.
- La **longitude** d'un point est l'angle que fait le demi-plan passant par le méridien de ce point avec le plan du méridien de Greenwich.



Le collège Simone Veil se trouve à une latitude de 43,62 degrés Nord et 3,85 degrés Est.

Vidéo : **Les fondamentaux : latitude et longitude**, chaîne YouTube *La Classe d'Histoire*.

Cahier de compétences : chapitre 9, exercices 1 à 9.

Activité d'approche

Couples d'angles

Objectif : faire découvrir la notion d'angles-internes et d'angles correspondants.

Partie 1 : préparation

Découper les trois bandelettes en bas de page. Ces bandes représentent deux droites (d_1) et (d_2) et une troisième droite (Δ) qui leur est sécante aux points A et B. Placer une attache parisienne au niveau du point A commun entre (d_1) et (Δ) et une autre au niveau du point B commun entre (d_2) et (Δ).

Combien d'angles sont-ils matérialisés par cette configuration ? ______________________________

Partie 2 : angles alternes-internes

1) Prendre deux jetons, les placer sur deux angles vérifiant les conditions suivantes :

- les deux angles n'ont pas le même sommet ;
- ils sont situés de part et d'autre de la droite (Δ) ;
- ils sont situés « entre » les droites (d_1) et (d_2).

Quelle est la mesure en degrés de chacun de ces deux angles ? ______________________________

2) Combien y a-t-il de telles paires d'angles ? ______________________________

Les angles ainsi construits sont dit **alternes-internes**.

3) Placer les bandelettes de telle sorte que les droites (d_1) et (d_2) soient parallèles, repérer deux angles alternes-internes par deux jetons puis donner la mesure de chacun de ces deux angles. ____________________

4) En observant les résultats de la classe, quelle conjecture peut-on faire ? ____________________

____

Partie 3 : angles correspondants

1) Prendre deux jetons, les placer sur deux angles vérifiant les conditions suivantes :

- les deux angles n'ont pas le même sommet ;
- ils sont situés du même côté que la droite (Δ) ;
- l'un est situé « entre » les droites (d_1) et (d_2), l'autre à l'extérieur.

Quelle est la mesure en degrés de chacun de ces deux angles ? ______________________________

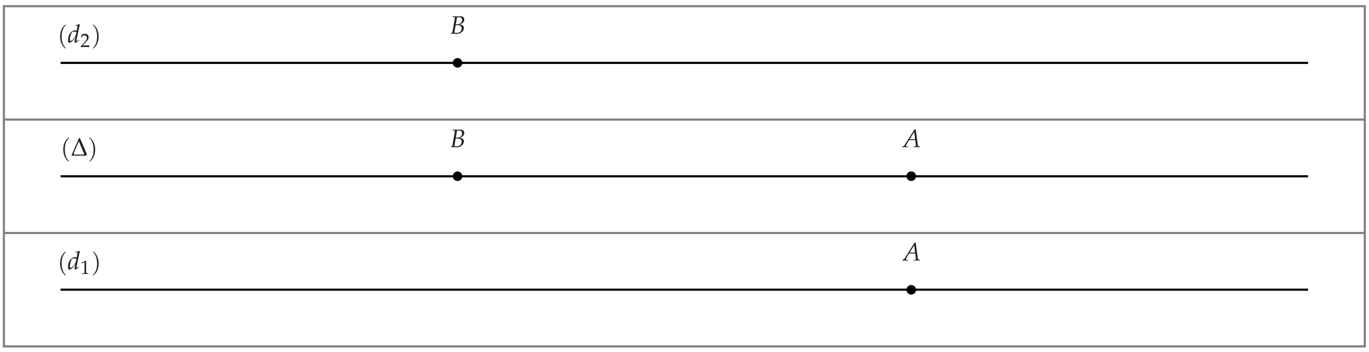
2) Combien y a-t-il de telles paires d'angles ? ______________________________

Les angles ainsi construits sont dit **correspondants**.

3) Placer les bandelettes de telle sorte que les droites (d_1) et (d_2) soient parallèles, repérer deux angles alternes-internes par deux jetons puis donner la mesure de chacun de ces deux angles. ____________________

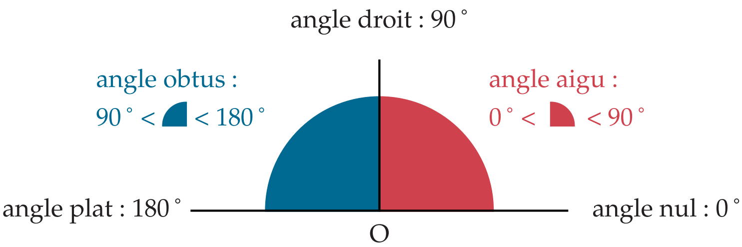
4) En observant les résultats de la classe, quelle conjecture peut-on faire ? ____________________

____

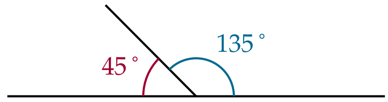


Trace écrite

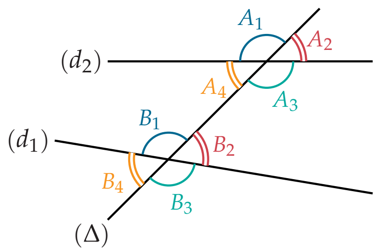
1. Mesure d'angles particuliers : rappels



Dans cette configuration, la somme des deux angles mesure 180 °, on dit que ces angles sont supplémentaires.



2. Angles alternes-internes et correspondants



Lorsque deux droites sont coupées par une droite sécante (Δ), on obtient huit angles.
Dans la suite du cours, on se place dans cette configuration.

DÉFINITION

Deux angles sont **alternes-internes** s'ils n'ont pas le même sommet, qu'ils sont situés de part et d'autre de la sécante (Δ) et qu'ils se situent « entre » les droites (d_1) et (d_2).

Exemple Sur la figure, il y a deux couples d'angles alternes-internes : A_4 et B_2 ; A_3 et B_1.

DÉFINITION

Deux angles sont **correspondants** s'ils n'ont pas le même sommet, qu'ils sont situés du même côté de la sécante (Δ), l'un entre les deux droites (d_1) et (d_2) et l'autre à l'extérieur.

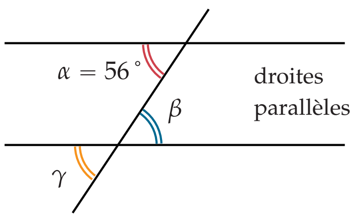
Exemple Sur la figure, il existe quatre couples d'angles correspondants : A_1 et B_1 ; A_2 et B_2 ; A_3 et B_3 ; A_4 et B_4.

3. Et si les droites sont parallèles ?

PROPRIÉTÉ

- Si les deux droites (d_1) et (d_2) sont parallèles, alors les angles alternes-internes et les angles correspondants sont égaux deux à deux.
- Si deux angles alternes-internes ou deux angles correspondants sont égaux, alors les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles.

Exemple



Correction

Mesures de β et γ, sachant que les droites sont parallèles :

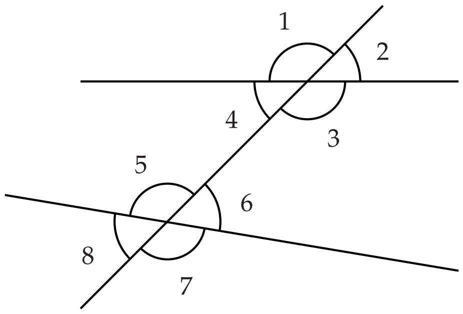
- α et β sont des angles alternes-internes, ils ont donc même mesure. D'où : $\beta = \alpha = 56\,°$.
- α et γ sont des angles correspondants, ils ont donc même mesure. D'où : $\gamma = \alpha = 56\,°$.

Entraînement

Angles particuliers

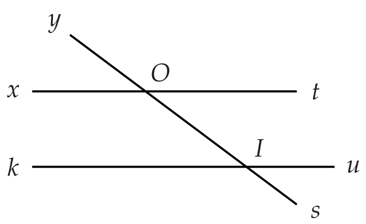
1 Au regard de la figure ci-dessous, que peut-on dire des angles :

1) 1 et 5 ? **3)** 4 et 6 ? **5)** 3 et 5 ?
2) 2 et 6 ? **4)** 3 et 7 ? **6)** 4 et 8 ?

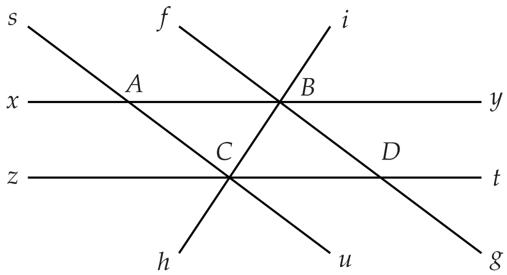


2 Dans la configuration suivante, citer :

1) la sécante ;
2) deux angles correspondants ;
3) deux angles alternes-internes.



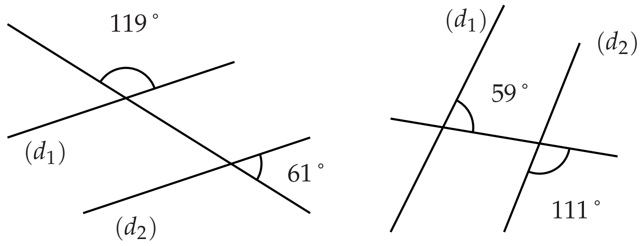
3 Sur cette figure, les droites (xy) et (zt), ainsi que les droites (su) et (fg), sont parallèles.
Compléter le tableau suivant lorsque c'est possible.



Angle	$\widehat{yBg}$	$\widehat{zCi}$	$\widehat{fBi}$	$\widehat{uCi}$
Angle alterne-interne				
Angle correspondant				

Droites parallèles

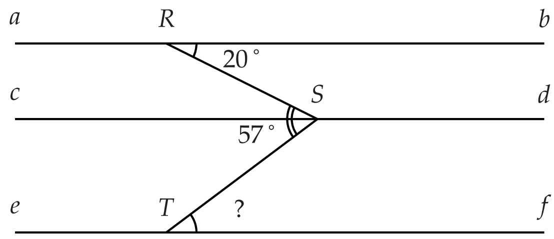
4 Yossra pense que l'une des deux paires de droites (d_1) et (d_2) est parallèle. A-t-elle raison ?



5 Sur la figure ci-dessous :

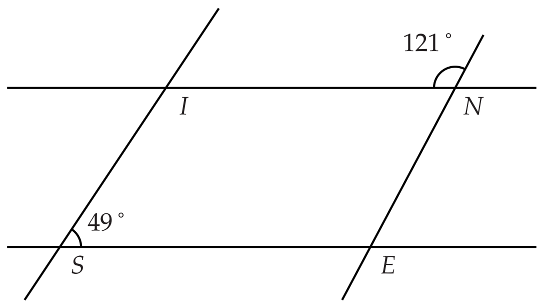
- les droites (ab), (cd) et (ef) sont parallèles ;
- R est un point de (ab), S un point de (cd) et T un point de (ef) tels que $\widehat{bRS} = 20°$ et $\widehat{RST} = 57°$.

Calculer la mesure de l'angle $\widehat{STf}$.



6 Inès possède un champ en forme de quadrilatère $INES$ dont les côtés (IN) et (SE) sont parallèles. Elle prend la mesure de deux angles et se demande si son quadrilatère peut être un parallélogramme.

1) Écrire sur le schéma ci-dessous la mesure de tous les angles existants.
2) Les droites (IS) et (NE) sont-elles parallèles ?
3) Quelle est alors la nature du quadrilatère $INES$?



Ératosthène et la circonférence de la Terre

Par groupes de quatre, effectuer la tâche complexe suivante.

Partie A : la question

En calculant uniquement la distance d'Alexandrie à Syène, en Égypte, Ératosthène a pu calculer la circonférence de la Terre. **De combien de kilomètres s'est-il trompé ?**

Partie B : les documents

Ératosthène

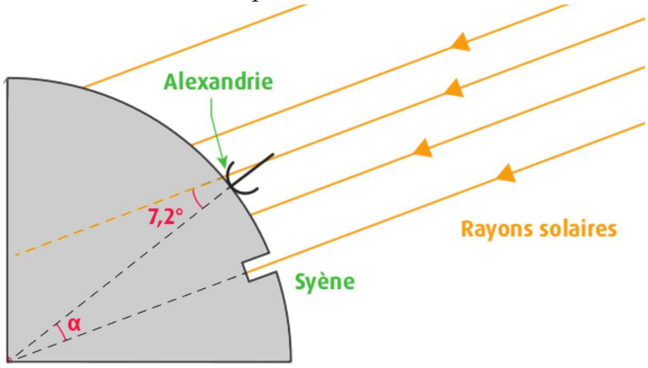
Ératosthène est un astronome, géographe, philosophe, mathématicien grec né à Cyrène (actuelle Libye) vers 276 av. J.-C. et mort vers 198 av. J.-C. à Alexandrie (Égypte). Il est considéré comme le plus grand savant de son siècle, il invente la discipline de la géographie et fut nommé directeur de la bibliothèque d'Alexandrie.
Il est connu pour avoir mesuré géométriquement la circonférence de la Terre en comparant les angles des ombres formées par des rayons lumineux du Soleil à deux lieux différents espacés d'une distance connue.

Chameaux et bématistes

Nous ne disposons aujourd'hui d'aucun écrit d'Ératosthène. Aussi, plusieurs idées circulent sur la manière dont il a mesuré la distance Alexandrie-Syène. L'une d'entre elles indique qu'il se serait basé sur le fait qu'un chameau met environ 50 jours pour aller d'Alexandrie à Syène et qu'en un jour, le chameau parcourt une distance de 100 stades.
La longueur d'un stade est de 157,5 m.
Une autre dit que cette distance a été évaluée par de bématistes, des hommes entraînés à faire des pas réguliers tout en les comptant pour établir des distances.

Méthode d'Eratosthène

- Le 21 juin à midi, à Syène, on peut voir l'image du soleil se refléter au fond d'un puits, ce qui signifie que le soleil est exactement à la verticale du puits.
- Le même jour à midi, à Alexandrie, Eratosthène montre que le soleil fait un angle de 7,2° avec la verticale en utilisant un gnomon.
- Les géomètres de l'époque supposent que les rayons envoyés de différents endroits du soleil sur différents endroits de la Terre sont parallèles.



Données actuelles

Diamètre de la Terre à l'équateur : 12 756 km
Circonférence de la Terre : 40 075 km
Surface de la Terre : 510 065 700 km^2
Âge de la Terre : 4,566 milliards d'années
Altitude maximale : 8 850 m
Profondeur maximale : – 11 035 m

GRANDEURS & MESURES

3

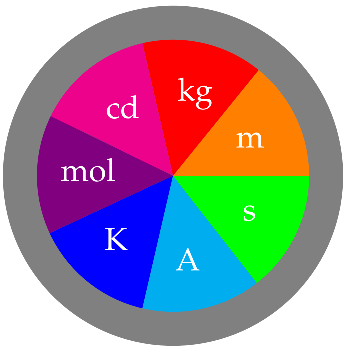
Périmètres et aires

Connaissances ♡ et compétences ♢ du cycle 4

- ♡ Notion de grandeur produit.
- ♢ Vérifier la cohérence des résultats du point de vue des unités.
- ♢ Effectuer des conversions d'unités.

Débat : le SI (Système International)

En 1795, il existe en France plus de 700 **unités de mesures différentes** qui varient d'une ville à l'autre. Source d'erreurs et de fraudes lors des transactions commerciales, politiques et scientifiques vont tenter de réformer cet état de fait : leur idée est d'assurer l'invariabilité des mesures en les rapportant à un étalon universel emprunté à un phénomène naturel. Le 26 mars 1791 nait le mètre (du grec *metron*, mesure), dont la longueur est établie comme égale à la dix-millionième partie du quart du méridien terrestre. L'unité de mesure de base étant déterminée, il suffit désormais d'établir toutes les autres unités de mesure qui en découlent : le mètre carré et le mètre cube, le litre, le gramme… Le système international des unités (SI) est nait en 1960. En 2018, les unités de base sont redéfinies à partir de sept constantes physiques.



Vidéo : **Système International d'unités. L'épopée**, *Laboratoire national de métrologie et d'essais*.

Cahier de compétences : chapitre 11, exercices 1 à 3 et 14.

Activité d’approche

Comparer sans mesurer

Objectifs : différencier aire et périmètre ; comparer des périmètres et des aires sans utiliser la mesure.

On considère les quatre figures A, B, C et D en bas de page.

1) À l’œil nu, classer ces figures dans l’ordre croissant de leur périmètre.

____

2) Trouver un moyen de vérifier ce classement sans utiliser la règle graduée.

____

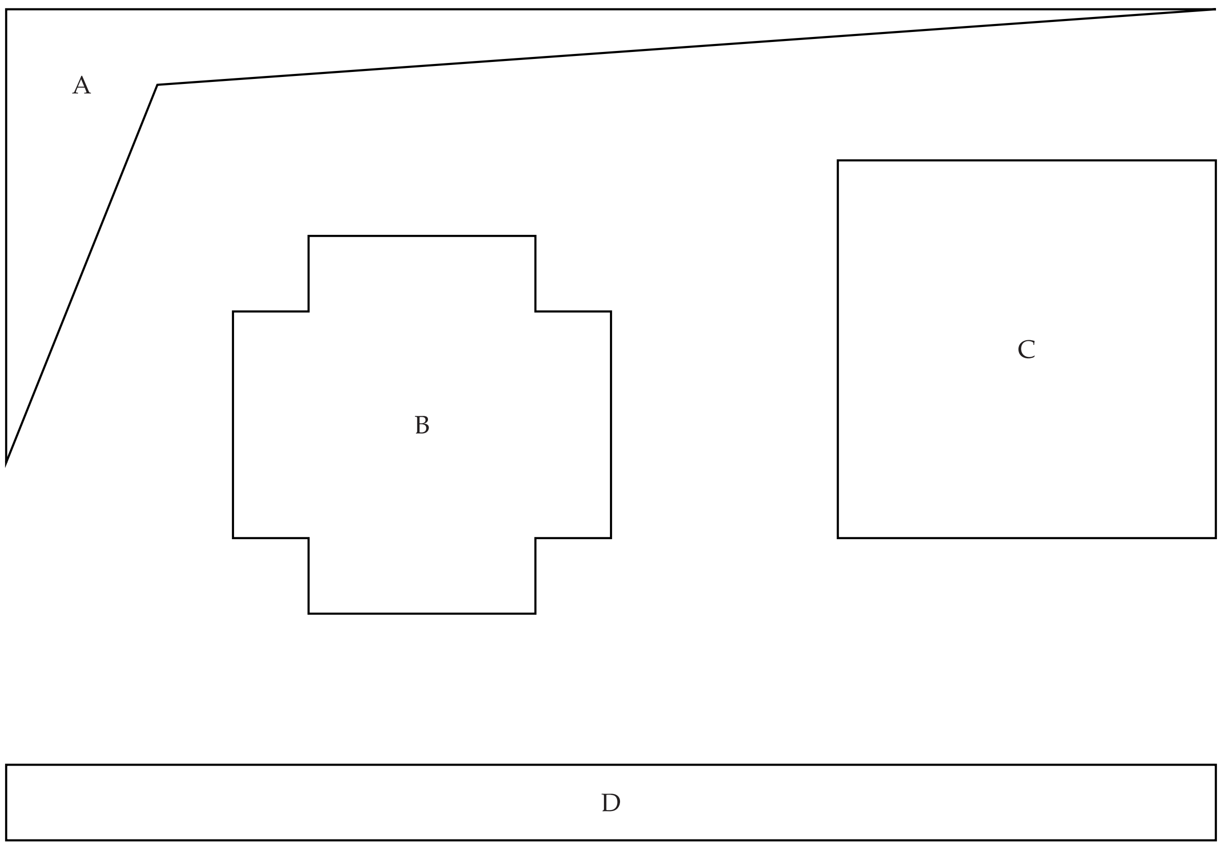
3) À l’œil nu, classer ces figures dans l’ordre croissant de leur aire.

____

4) Trouver un moyen de vérifier ce classement sans utiliser de formules.

____

5) Les classements sont-ils les mêmes ? ______________________________



1. Longueur et périmètre

On peut mesurer une longueur grâce au mètre (m) qui est l'une des sept unités de grandeurs de base du système international, que l'on complète par les unités qui en découlent (multiples et sous-multiples).

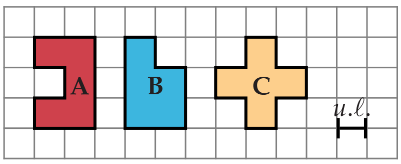
Préfixe	kilo	hecto	déca		déci	centi	milli
Unité de longueur	km	hm	dam	m	dm	cm	mm
Exemple		9	7	3	2	1	

Exemple 973,21 m = 9 732,1 dm = 97 321 cm = 973 210 mm = 97,321 dam = 9,732 1 hm . . .

PROPRIÉTÉ

Pour calculer le périmètre d'un polygone, on additionne la mesure de chacun des segments qui le compose.

Exemple



Correction

L'unité de longueur est le côté d'un carreau ($u.\ell.$) :

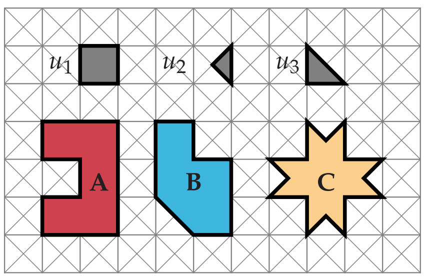
- le périmètre de la figure A vaut 12 $u.\ell.$
- le périmètre de la figure B vaut 10 $u.\ell.$
- le périmètre de la figure C vaut 12 $u.\ell.$

2. Surface et aire

DÉFINITION

La **surface** d'une figure est la partie située à l'intérieur de son contour.
Sa mesure s'appelle l'**aire**, qui est le nombre d'unités d'aire que la figure contient.

Exemple



Correction

Lorsqu'on n'a pas une unité d'aire entière, on peut « découper » une partie de la figure afin de la déplacer ailleurs pour former une unité d'aire.

Unité	fig. A	fig. B	fig. C
u_1	5	4,5	4
u_2	20	18	16
u_3	10	9	8

L'aire est une grandeur composée, correspondant au produit de deux longueurs. Chaque unité d'aire dans le tableau comporte donc deux colonnes.
Pour désigner une aire, on utilise le mètre carré (m^2) et ses multiples et sous-multiples. Pour les mesures agraires, on utilise l'are (a) qui équivaut à 100 m^2 et l'hectare (ha) qui vaut 100 ares, c'est-à-dire 10 000 m^2.

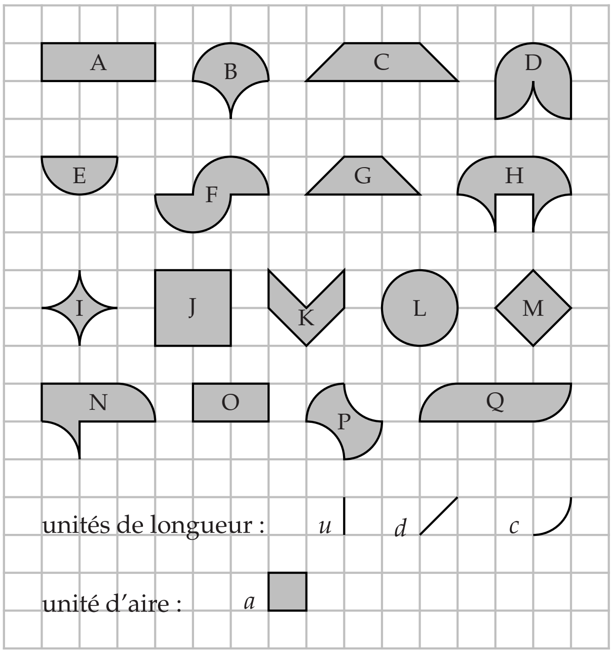
km^2		hm^2		dam^2		m^2		dm^2		cm^2		mm^2	
					3	7	0	1	5	0	4		

Exemple 370,150 4 m^2 = 37 015,04 dm^2 = 370 150 400 mm^2 = 3,701 504 dam^2. . .

Entraînement

Différencier aire et des périmètre

1 On considère les surfaces suivantes.



1) Compléter les tableaux ci-dessous.
Dans la deuxième ligne, indiquer le nombre de côtés d'un carré correspondant à une longueur u ; dans la troisième le nombre de diagonales d'un carré d ; dans la quatrième, le nombre de quarts de cercles c et dans la dernière le nombre d'unités d'aires approximatives en arrondissant à l'unité.

	A	B	C	D	E	F	G	H
u								
d								
c								
a								

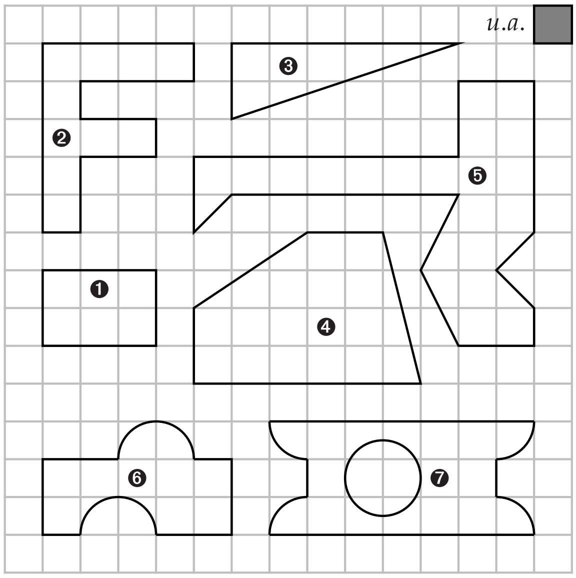
	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
u									
d									
c									
a									

2) Quelles sont les surfaces ayant une même aire ? Ont-elles le même périmètre ?

3) Quelles sont les surfaces ayant un même périmètre ? Ont-elle la même aire ?

4) Classer les surfaces dans l'ordre croissant de leur aire.

2 Sachant que l'unité d'aire est le carreau (*u.a.*), déterminer l'aire de chaque surface suivante.



Conversion de mesures

3 Effectuer les conversions de longueurs suivantes :

1) 1 275 m = ____________________________ cm

2) 32,5 dm = ____________________________ dam

3) 345 697,34 cm = ________________________ km

4) 0,003 m = ____________________________ mm

5) 2,5 km = ______________________________ m

4 Effectuer les conversions d'aires suivantes :

1) 1 275 m^2 = ____________________________ cm^2

2) 32,5 dm^2 = __________________________ dam^2

3) 345 697,34 cm^2 = ________________________ m^2

4) 0,003 m^2 = ____________________________ mm^2

5) 2,5 km^2 = ____________________________ m^2

5 Donner une unité de mesure usuelle pour chacun des objets suivants :

1) Longueur d'une piste d'athlétisme.

2) Hauteur d'un livre.

3) Surface d'un jardin.

4) Longueur d'une fourmi.

5) Surface d'une feuille.

6) Largeur d'une pièce.

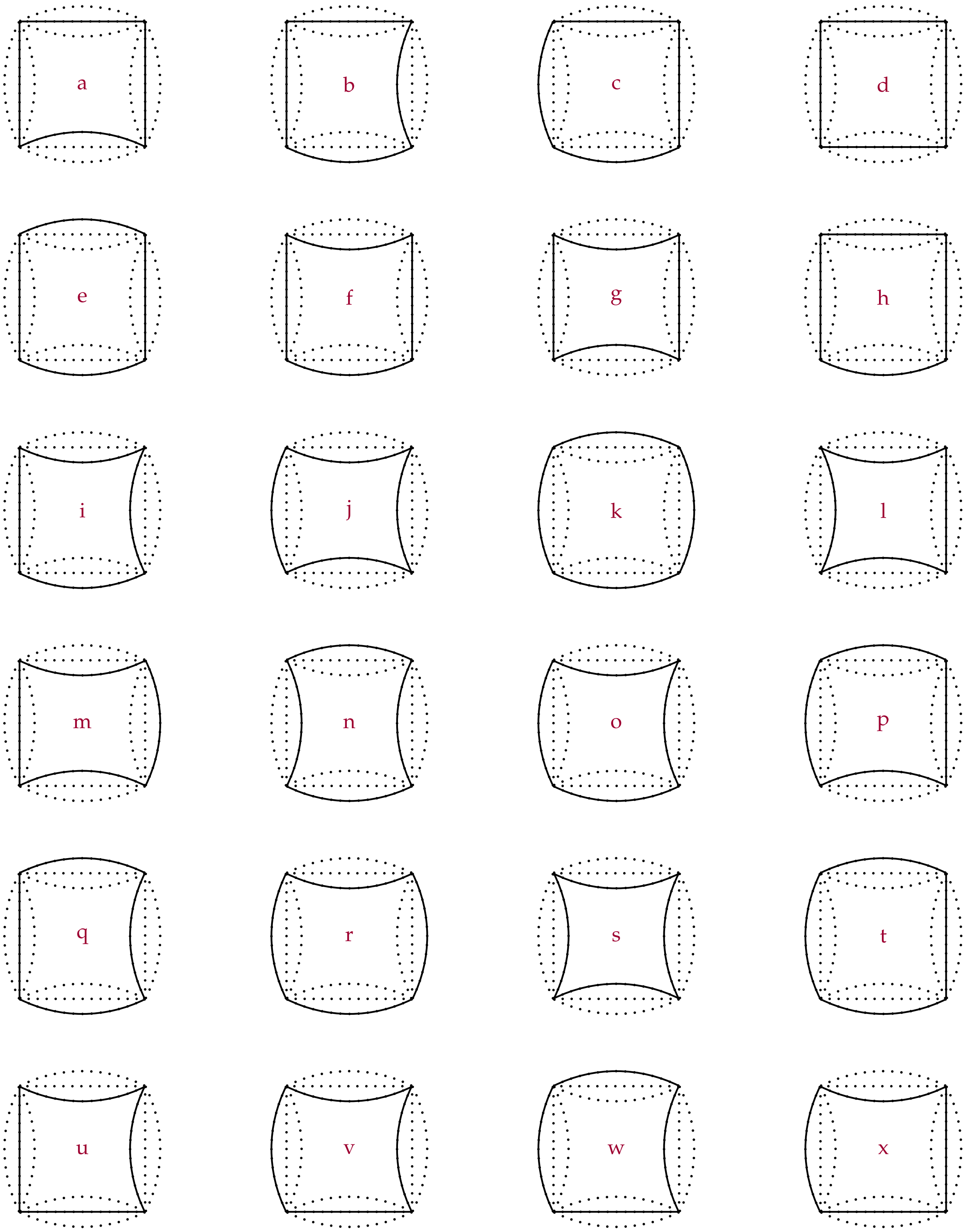
7) Surface d'un champ.

8) Rayon d'une planète.

Le curvica

Curvica est un jeu puzzle avec 24 pièces inventé par Jean Fromentin en 1982 afin de travailler sur les notions de périmètre, d'aire et de symétrie, entre autres ! À partir d'un carré, on obtient une pièce du puzzle curvica en « creusant », en « bombant » ou en laissant droits les côtés.

Partie A : les 24 formes du curvica



PARTIE B : grille réponse

Défis	Réponses	Points
Niveau facile		1 pt
1. Trouver la pièce dont l'aire est la plus grande.		
2. Trouver la pièce dont le périmètre est le plus petit.		
3. Assembler deux pièces pour obtenir un rectangle.		
4. Trouver la pièce de plus grand périmètre et de plus petite aire.		
5. Trouver une pièce ayant un seul axe de symétrie.		
6. Trouver une pièce ayant exactement deux axes de symétrie.		
7. Trouver deux pièces de même périmètre mais d'aires différentes.		
Niveau moyen		1,5 pt
8. Trouver deux pièces de même aire mais de périmètres différents.		
9. Trouver deux pièces de même aire et de même périmètre.		
10. Assembler quatre pièces pour obtenir un carré.		
11. Trouver deux pièces ayant même aire, même périmètre et au moins un axe de symétrie chacune.		
12. Trouver deux pièces dont l'une a un périmètre plus grand que l'autre mais une aire plus petite.		
13. Assembler deux pièces pour obtenir une figure dont l'aire et le périmètres sont les plus grands possibles.		
Niveau difficile		2 pts
14. Trouver deux pièces ayant ni axe de symétrie, ni même périmètre, ni même aire.		
15. Assembler cinq ou six pièces pour obtenir un rectangle.		
	Total sur 20 points	

Source : Yves Martin. Curvica - activités mathématiques ludiques, 2015, p.75

NOMBRES & CALCULS

4

Nombres relatifs

Connaissances ♡ et compétences ♢ du cycle 4

♡ Nombres décimaux négatifs.

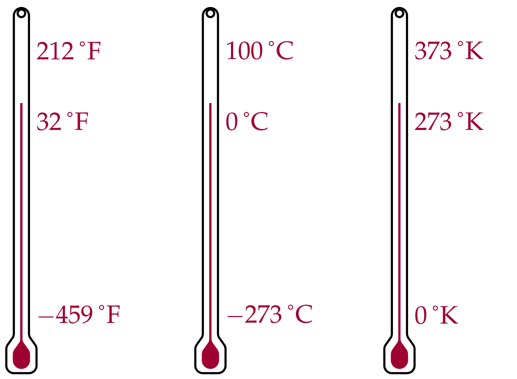
♡ Notion d'opposé.

♢ Repérage sur une droite graduée.

Débat : les unités de mesure de température

Il existe trois échelles principales de température :

- l'échelle Farenheit, créée en 1720 par le scientifique allemand **Gabriel Farenheit** et allant de 32 °F à 212 °F ;
- l'échelle Celsius, créée en 1741 par le physicien suédois **Anders Celsius** dans laquelle 0 °C correspond au point de congélation de l'eau et 100 °C à son point d'ébullition ;
- l'échelle de Kelvin, créée à la fin du XIX^{e} siècle par **Lord Kelvin** pour laquelle le point 0 correspond au zéro absolu, c'est-à-dire à la plus basse température existante.



Vidéo : **Celsius et Farenheit**, chaîne YouTube *Ma deuxième école*, épisode de la série *Culture G*.

Cahier de compétences : chapitre 3, exercices 1 à 16. ; 19 ; 21.

Activité d'approche

Carrés magiques

Objectifs : résoudre un problème avec des nombres ; montrer que, pour résoudre un problème, il est parfois nécessaire d'inventer de nouveaux nombres, des nombres négatifs.

Un carré magique est un tableau carré tel que la somme pour chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale soit la même.

	2	7	6	→ 15
	9	5	1	→ 15
	4	3	8	→ 15
↙ 15	↓ 15	↓ 15	↓ 15	↘ 15

Compléter les carrés suivants pour les rendre magiques en commençant par déterminer la somme commune.

Somme =

8		
	5	
4		2

Somme =

18		24
	15	
		12

Somme =

2	7	
	3	
		4

Somme =

	1	4
	7	
10		

Source : Une introduction des nombres relatifs en 5^e - PLOT 45, APMEP 2014.

1. Nombres relatifs

DÉFINITION

Un **nombre relatif** est un nombre positif (+) ou négatif (−). Le nombre sans son signe correspond à sa distance à l'origine 0.

Exemple Les étages d'un immeuble sont repérés par rapport à un niveau 0 : le rez-de-chaussée. Les étages au-dessus sont les étages positifs et les étages en dessous (cave, garages) sont les étages négatifs.

Exemple Le signe de $+3$ est $+$ et sa distance à l'origine 0 est 3.
Le signe de -7 est $-$ et sa distance à l'origine 0 est 7.

DÉFINITION

L'**opposé** d'un nombre relatif est le nombre de signe contraire et de même distance à 0.

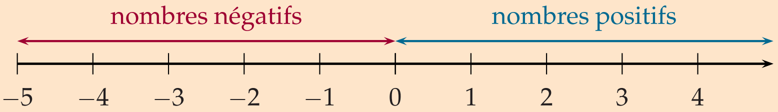
Exemple L'opposé de -3 est $+3$ et l'opposé de $+2$ est -2 .

REMARQUE : De manière usuelle, on omet le signe « + » devant les nombres positifs.

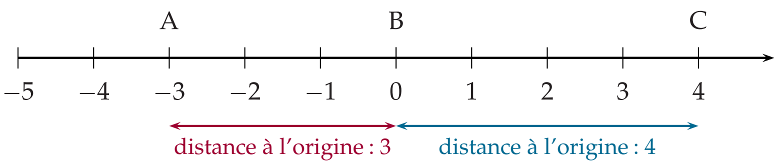
2. Droite graduée et comparaison

DÉFINITION

Sur une droite graduée, on repère chaque point par un nombre : son abscisse.
D'un côté de l'origine 0, on place les nombres négatifs et de l'autre les nombres positifs.



Exemple L'abscisse de A est -3, on note A(-3) ; l'abscisse de B est 0 et l'abscisse de C est $+4$.



PROPRIÉTÉ

- Deux nombres relatifs négatifs sont rangés dans l'ordre inverse de leur distance à zéro.
- Un nombre relatif négatif est inférieur à un nombre relatif positif.
- Deux nombres relatifs positifs sont rangés dans l'ordre de leur distance à zéro.

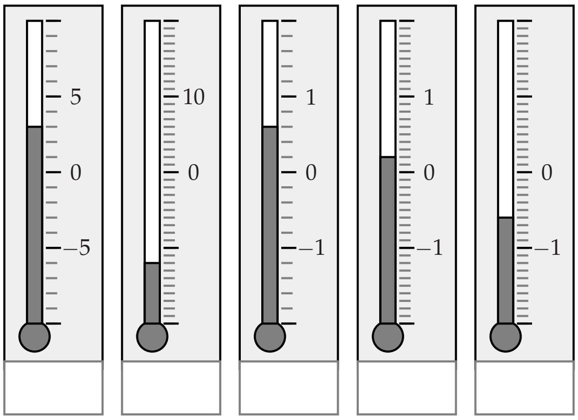
Exemple $-4 < -2$ car $4 > 2$; $-4 < 2$ car $-4 < 0$ et $2 > 0$; $+4 > +2$ car $4 > 2$.

REMARQUE : les nombres négatifs sont rangés « dans le sens inverse » des nombres positifs.

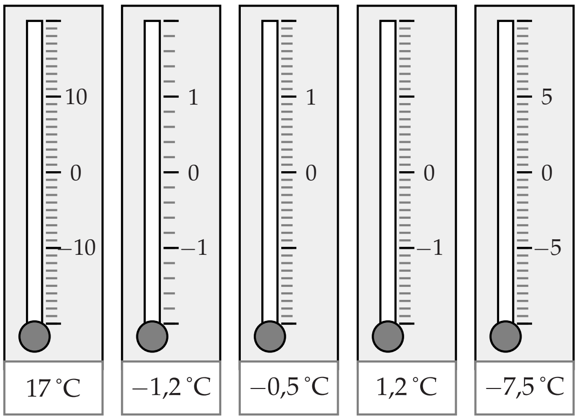
Entraînement

Nombres relatifs

1 Quelle est la température indiquée par chacun des thermomètres ?



2 Colorier les thermomètres jusqu'à la graduation correspondant à la température donnée.



3 Entourer en bleu les nombres positifs et en rouge les nombres négatifs.

12	$+\pi$	$-\dfrac{12}{13}$	-17	$+0,001$
$-54,2$	$\dfrac{1}{10}$	$-0,14$	$\dfrac{3}{7}$	$100,01$
$12,6$	$-1,18$	-3^2	$0,1$	$48\,000$

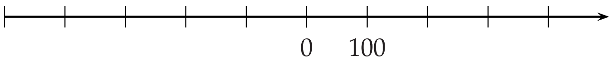
4 Compléter le tableau suivant :

Nombre	2,5		0	−5		7,1
Opposé		−2,7			1	

Droite graduée et comparaison

5 Reproduire l'axe chronologique ci-dessous puis placer le plus précisément possible ces évènements :

- T : le temple de Jérusalem est détruit en 70 après Jésus-Christ ;
- J : Jules César naît en 100 avant J.-C. ;
- C : Constantin crée Constantinople en 324 ;
- A : Alexandre le Grand meurt en 324 avant J.-C.



6 Construire une droite graduée dont l'origine est au milieu du cahier et l'unité vaut 1 cm puis répondre aux questions suivantes.

1) Sur la droite graduée, placer les points :
A(+8), B(−2), C(+3), D(−5) et E(+2).

2) En examinant la position des points A, B, C, D et E sur cette droite graduée, comparer :

+2 et −2	+2 et −5	+3 et +8
−2 et −5	+8 et −2	−5 et +3

3) Ranger dans l'ordre croissant : +8; −2; +3; −5 et +2.

7 Compléter par <, > ou =.

1) $+5,34$ ------ $+3,54$
2) $0,05$ ------------ 1
3) $-8,51$ ------- $-8,5$
4) $11,9$ ------- $+11,9$
5) $3,14$ ------ $-1,732$
6) $-9,27$ ----- $-9,272$
7) $+8,64$ ------ $-8,64$
8) $-19,2$ ------- $+9,2$
9) $-14,39$ ----- $+14,4$
10) $-0,99$ ----- $-0,909$

8 Chasser l'intrus dans chacun des cas suivants.

1) $-9,84 < -9,72 < -9,67 < -9,78 < -9,18$
2) $+1,5 < +1,51 < +1,499 < +1,54 < +1,55$
3) $-10,1 > -10,02 > -10,2 > -10,22 > -10,222$

9 Ranger dans l'ordre croissant et simplifier.

1) +3 ; −7 ; −8 ; +7 ; +14 ; +8 ; −9.
2) +5,0 ; +2,7 ; −2,6 ; −3,1 ; +7,1 ; −8,3 ; −0,2.
3) −10,6 ; +14,52 ; −8,31 ; −3,8 ; +4,2 ; +14,6 ; −8,3.

10 Donner tous les entiers relatifs compris entre :

1) −2 et +5.
2) −15 et −20.

D'après Les cahiers Sésamath 5e. Magnard-Sesamath 2019

Nombres croisés

Compléter cette grille de nombres croisés à l'aide de chiffres et de signes « + » ou « − » grâce aux indications données.

	a	b	c	d	e	f
1		■			■	
2				■		
3		■	■			■
4	■			■	■	
5			■			
6		■				■

Horizontalement

1) Valeur du plus grand chiffre.
Opposé de l'entier compris entre $-12,2$ et $-13,9$.
Les nombres négatifs sont précédés de ce signe.

2) Résultat du calcul $8 \times 20 - (12 + 28)$.
Nombre entier compris entre $-1,8$ et $-0,2$.

3) Opposé de l'opposé de $+8$.
Nombre entier supérieur à $73,01$ et inférieur $74,99$.

4) Sur une droite graduée de 3 en 3, je suis placé à trois graduations à gauche de l'origine.
Signe de l'opposé d'un nombre positif.

5) Nombre entier le plus proche et supérieur à $-1,4$.
Nombre entier inférieur à $-15,154$ et supérieur à $-16,98$.

6) Diviseur commun à 12, 24 et 33.
Mon chiffre des centaines est le double de mon chiffre des dizaines qui est lui-même le double de mon chiffre des unités.

Verticalement

a) Résultat du calcul $9 \times (100 + 2)$.
Nombre relatif se situant avant zéro et se trouvant à 5 unités du nombre $+2$.

b) J'ai la même distance à zéro que le nombre -2.
Nombre opposé de la moitié de 2.

c) Le chiffre des unités est l'abscisse de l'origine et le chiffre des dizaines est le premier nombre entier positif non nul.
Opposé de l'entier compris entre $-9,12$ et $-8,93$.
Nombre relatif se situant après zéro et se trouvant à 11 unités du nombre -7.

d) Distance à zéro de l'opposé de $-\dfrac{33}{11}$.
Opposé de $-42 \div 6$.
Nombre négatif se trouvant à deux unités de l'origine.

e) Nombre se trouvant à 8 unités de -12.
Distance à zéro de $+\dfrac{22}{2}$.

f) Opposé de $+1$.
Nombre entier le plus proche et supérieur à $-6,98$.

ESPACE & GÉOMÉTRIE

5

Repérage et déplacements

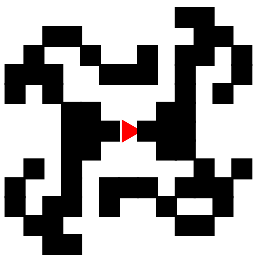
Connaissances ♡ et compétences ♢ du cycle 4

♢ (Se) repérer sur une droite graduée, dans le plan muni d'un repère orthogonal.

♢ Première approche des algorithmes et de la programmation.

Débat : la fourmi de Langton : que se passe-t-il ensuite ?

La **fourmi de Langton**, du nom de son inventeur scientifique américain *Christopher Langton*, est un petit programme informatique inventé vers la fin des années 1980. Il consiste en un automate qui se déplace dans un quadrillage suivant des règles simples. Il modélise le fait qu'un ensemble de comportements élémentaires peut donner lieu à un comportement complexe.



Vidéo : **La fourmi de Langton**, chaîne YouTube *Science étonnante*.

Cahier de compétences : chapitre 3, exercices 17 ; 18 ; 20 ; 22 ; 23.

Activité d’approche

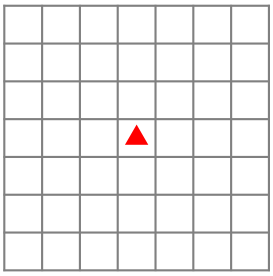
La fourmi de Langton

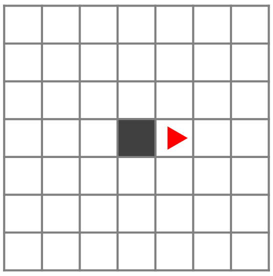
Objectifs : suivre un algorithme de déplacement ; se repérer dans le plan dans un repérage relatif.

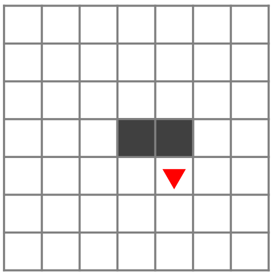
La fourmi de Langton est un automate qui se déplace dans un quadrillage suivant les règles suivantes :

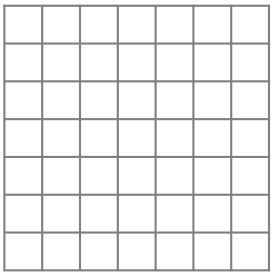
- au départ, toutes les cases sont de la même couleur, ici blanches ;
- si la fourmi est sur une case blanche, elle tourne de 90 ° vers la droite, change la couleur de la case en noir et avance d’une case ;
- si la fourmi est sur une case noire, elle tourne de 90 ° vers la gauche, change la couleur de la case en blanc et avance d’une case.

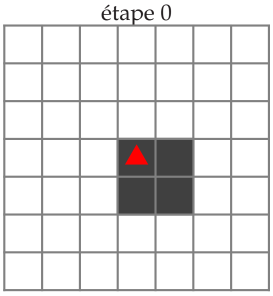
Compléter dans les quadrillages ci-dessous les quinze premières étapes du déplacement de la fourni.

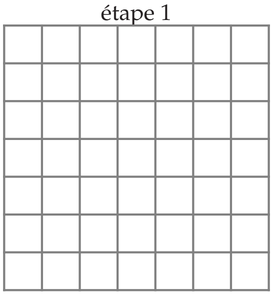

étape 0

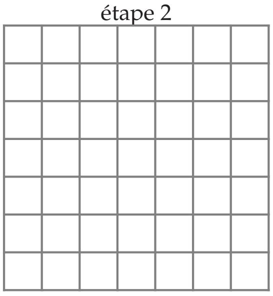

étape 1

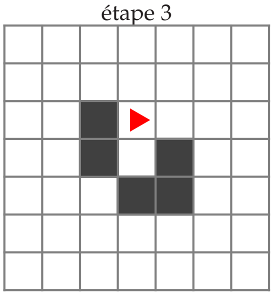

étape 2

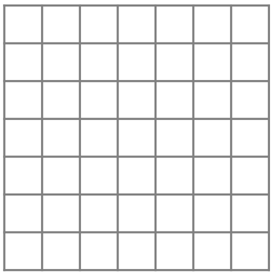

étape 3

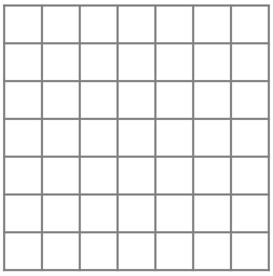

étape 4

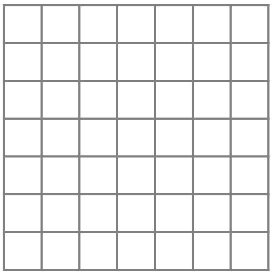

étape 5

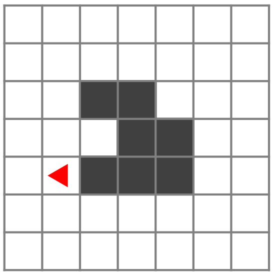

étape 6

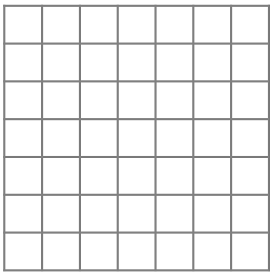

étape 7

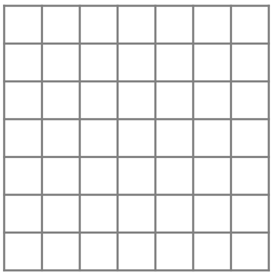

étape 8

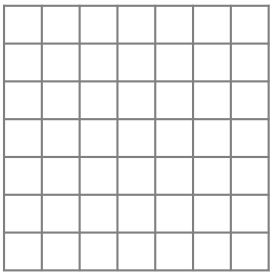

étape 9

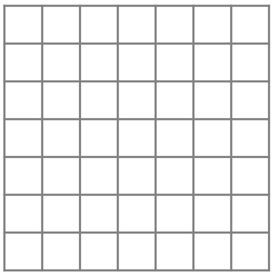

étape 10


étape 11


étape 12


étape 13


étape 14


étape 15

1. Repérer un point dans un repère du plan

DÉFINITION

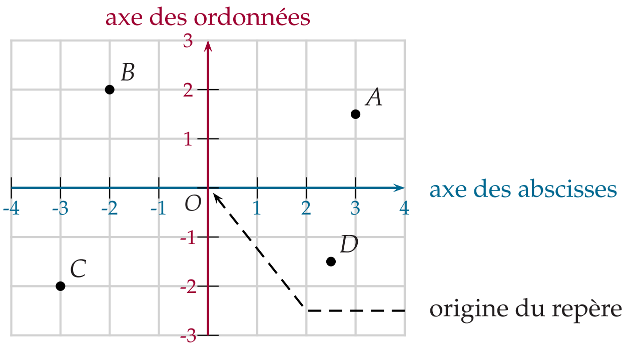
Un **repère orthogonal** est constitué de deux axes gradués perpendiculaires et sécants en O.

- O est l'**origine** du repère ;
- la droite horizontale est l'**axe des abscisses** ;
- la droite verticale est l'**axe des ordonnées**.

PROPRIÉTÉ

Dans un repère, un point M est repéré par un couple $(x; y)$ appelé coordonnées du point M.
x est l'**abscisse** du point et y est l'**ordonnée**.

Exemple



Correction

Les coordonnées des points O, A, B, C et D sont :

- $O(0;0)$
- $A(3;1,5)$
- $B(-2;2)$
- $C(-3;-2)$
- $D(2,5;-1,5)$

2. Se déplacer

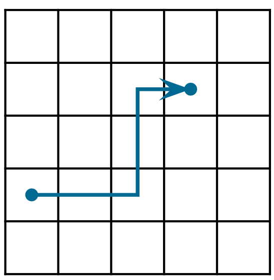
MÉTHODE 1 **Langages de déplacement**

Pour se déplacer dans le plan, il existe principalement deux langages de déplacement :

- le langage **absolu** composé de mots de vocabulaire du type : « haut », « bas », « droite » et « gauche ». Le déplacement se fait comme si on se plaçait en vue du dessus ;
- le langage **relatif** composé de mots de vocabulaire du type : « avancer », « tourner à droite » et « tourner à gauche ». C'est ici le point de vue de l'observateur qui est adopté.

Exercice d'application

Coder ce déplacement :



Correction

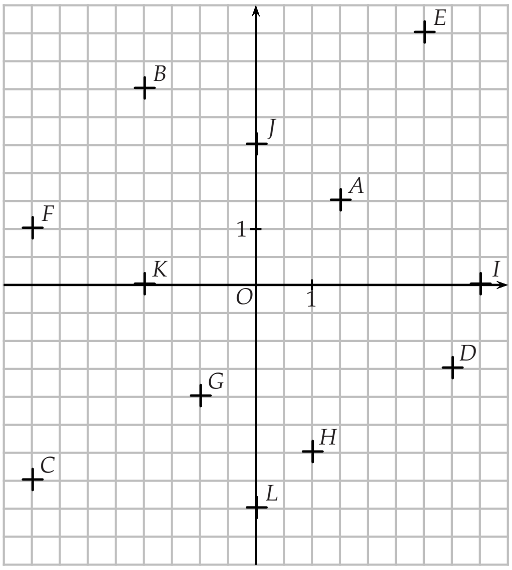
Avec le langage absolu :
« droite
droite
haut
haut
droite »

Avec le langage relatif :
« avancer
avancer
tourner à gauche
avancer
avancer
tourner à droite
avancer »

Entraînement

Se repérer dans le plan

1 Lire puis écrire les coordonnées des points A à L.



2 On considère les points de coordonnées :

$M(-9\,;-5)$	$N(-4\,;0)$	$O'(2,5\,;7)$	$P(5\,;3)$
$Q(-1\,;-1)$	$R(2\,;-3)$	$S(5\,;-2)$	$T(-6,5\,;-2)$
$U(-1\,;-4)$	$V(2\,;0)$	$W(-6,5\,;4)$	$X(-9\,,0)$
$Y(-4\,;-5)$	$Z(-6,5\,;-1)$		

1) Créer un repère orthogonal en prenant un centimètre pour une unité qui puisse contenir tous les points.
2) Placer les points dans le repère.
3) Relier dans l'ordre les points suivants :
   - $W - X - M - Y - N - W - O' - P - S - Y$.
   - $U - Q - V - R$.
   - $X - N - P$.
   - Tracer le cercle de centre T passant par Z.

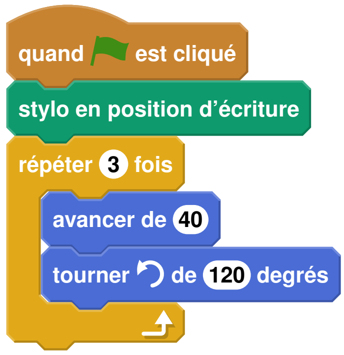
   Chanineze reconnait un dessin familier. Quel est-il ?

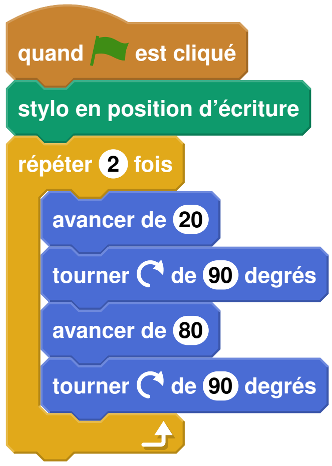
3 On se place dans un repère orthogonal d'origine O et d'unité 1 cm.

1) Placer le point A de coordonnées $(3,5\,;1,5)$.
2) Placer le point B symétrique du point A par rapport à l'axe des abscisses. Quelles sont ses coordonnées ?
3) Placer le point C symétrique du point B par rapport à l'axe des ordonnées. Quelles sont ses coordonnées ?
4) Placer le point D symétrique du point C par rapport à l'axe des abscisses. Quelles sont ses coordonnées ?
5) Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

Algorithmes de déplacement

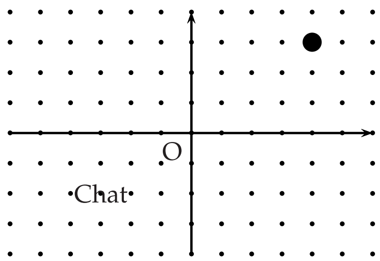
4 Tracer les figures obtenues lorsque l'on exécute les programmes suivants avec scratch.
Pour chaque cas, donner la nature de la figure obtenue.
On représentera l'unité par 1 mm sur le cahier.

1) 

2) 

3) 

5 L'image suivante représente la position obtenue au déclenchement du bloc « Départ » d'un programme. L'arrière-plan est constitué de points espacés de 40 unités. Le chat a pour coordonnées $(-120\,;\,-80)$.
Le but du jeu est de positionner le chat sur la balle représentée par le petit disque.



1) Quelles sont les coordonnées du centre de la balle représentée dans cette position ?
2) Dans cette question, le chat est dans la position obtenue au déclenchement du bloc départ.
Voici le script du lutin « chat » qui se déplace.

a) Expliquer pourquoi le chat ne revient pas à sa position de départ si le joueur appuie sur la touche → puis sur la touche ←.
b) Le joueur appuie sur la succession de touches suivante : → → ↑ ← ↓. Quelles sont les coordonnées x et y du chat après ce déplacement ? Justifier.
c) Parmi les propositions ci-dessous, laquelle permet au chat d'atteindre la balle ?

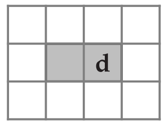
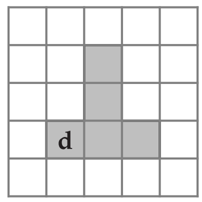
déplacement 1	déplacement 2	déplacement 3
→→→→→→→↑↑↑↑↑	→→→↑↑↑→↓←	↑→↑→↑→→↓↓

3) Que se passe-t-il quand le chat atteint la balle ?

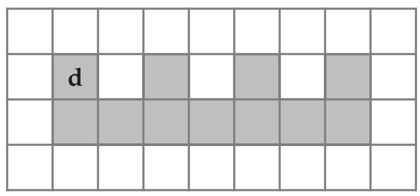
6 Un programme permet à un robot de se déplacer sur les cases d'un quadrillage. Chaque case atteinte est colorée en gris.
Au début d'un programme, toutes les cases sont blanches, le robot se positionne sur une case de départ indiquée par un « **d** » et la colore aussitôt en gris.
Le robot se déplace suivant un programme grâce à un langage absolu dont le vocabulaire est

« S (south) ; E (east) ; N (north) ; W (west) ».

Voici des exemples de programmes et leurs effets :

1W	Le robot avance de 1 case vers l'ouest.	
2E 1W 2N	Le robot avance de 2 cases vers l'est, puis de 1 case vers l'ouest, puis de 2 cases vers le nord.	

1) Voici un programme :
1W 2N 2E 4S 2W
On souhaite dessiner le motif obtenu avec ce programme. Sur votre copie, réaliser ce motif en utilisant des carreaux, comme dans les exemples précédents. On marquera un « **d** » sur la case de départ.
2) On fait fonctionner un programme qui dessine le motif suivant :

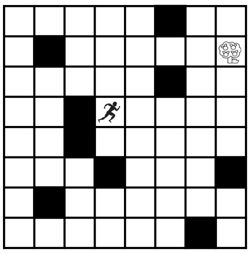


a) Proposer un programme permettant de dessiner ce motif.
b) Comment pourrait-on faire évoluer l'écriture de ce programme afin qu'il soit plus compact ?

Source : exercices inspirés d'épreuves du DNB

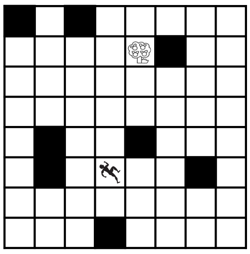
Le jeu des dominogrammes

But du jeu : en groupe, faire une chaîne fermée avec les huit cartes de domino.
Règle du jeu : chaque domino est basé sur *Les douze travaux d'Hercule*, et notamment le travail n°11 dans lequel Hercule doit dérober les pommes d'or du jardin d'Hespérides. Le côté gauche comporte un quadrillage avec des cases noirs que l'on ne peut pas traverser, le personnage d'Hercule (orienté) et le pommier du jardin d'Hespérides. Le côté droit comporte un programme de déplacement d'Hercule. L'objectif est d'associer un programme d'un domino avec un quadrillage d'un autre domino. Les huit dominos doivent créer une chaine fermée.



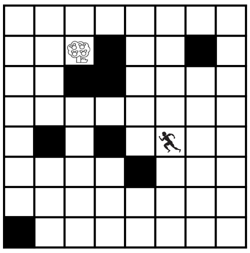
✈

- Démarre
- Avance de 3
- Tourne à droite
- Avance de 1
- Tourne à gauche
- Avance de 1
- Prends les pommes



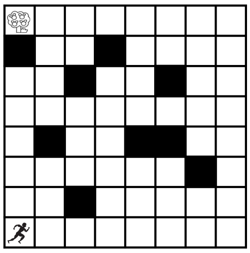
■

- Démarre
- Tourne à droite
- Avance de 4
- Tourne à gauche
- Avance de 3
- Tourne à gauche
- Avance de 1
- Prends les pommes



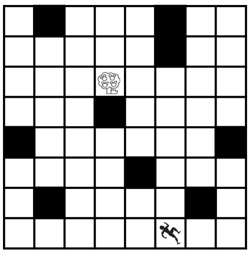
✚

- Démarre
- Avance de 7
- Tourne à gauche
- Avance de 7
- Tourne à gauche
- Avance de 7
- Prends les pommes



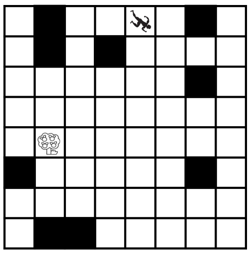
✔

- Démarre
- Avance de 3
- Tourne à gauche
- Tourne à droite
- Avance de 2
- Tourne à gauche
- Avance de 2
- Prends les pommes



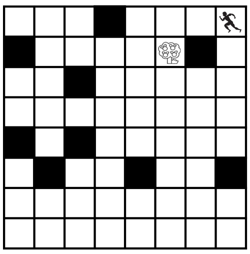
✦

- Démarre
- Avance de 6
- Tourne à droite
- Avance de 3
- Tourne à droite
- Avance de 2
- Tourne à gauche
- Prends les pommes



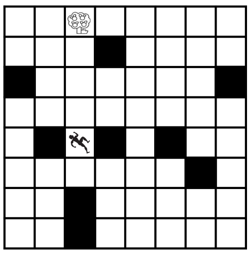
✪

- Démarre
- Avance de 2
- Tourne à gauche
- Avance de 1
- Prends les pommes



✷

- Démarre
- Avance de 2
- Tourne à gauche
- Tourne à gauche
- Tourne à gauche
- Tourne à gauche
- Avance de 2
- Prends les pommes



▲

- Démarre
- Avance de 1
- Tourne à gauche
- Avance de 2
- Tourne à droite
- Avance de 2
- Avance de 1
- Prends les pommes

Lorsque le groupe a réussi la mission, passer au niveau supérieur avec une autre série de dominos comportant des boucles de répétition.

ORGANISATION & GESTION DE DONNÉES

6

Interpréter, représenter des données

Connaissances ♡ et compétences ♢ du cycle 4

- ♢ Recueillir des données, les organiser.
- ♢ Lire et interpréter des données sous forme de données brutes, de tableau, de diagramme (diagramme en bâtons, diagramme circulaire, histogramme).
- ♢ Utiliser un tableur-grapheur pour présenter des données sous la forme d'un tableau ou d'un diagramme.

Débat : le premier tableur

Des données brutes récoltées ont souvent peu de sens si elles sont utilisées ainsi, d'où la nécessité de les disposer d'une manière plus lisible à l'aide de tableaux et diagrammes.
Avec l'avènement de l'informatique, les tableaux deviennent numériques grâce à l'apport des **tableurs** : logiciels qui permettent de manipuler des données numériques, d'effectuer un certain nombre d'opérations de façon automatisée, de créer des représentations graphiques à partir des données : diagrammes , histogrammes, courbes. . .
Le premier tableur fut créé en 1978 par *Daniel Bricklin*, étudiant à Harvard qui devait établir des tableaux comptables pour une étude de cas sur Pepsi-Cola sans pour autant établir tous les calculs « à la main ». Son premier prototype, *VisiCalc* (pour Visible Calculator), pouvait manipuler un tableau de vingt lignes et cinq colonnes !

	A	B	C	D	E
1					
2					
3					
4					

Vidéo : **Meet the inventor of electronic spreadsheet**, Site Internet de *Ted talks*.

Cahier de compétences : chapitre 6, exercices 1 ; 3 ; 4 ; 19 à 21 ; 23 ; 25 ; 41.

Activité d'approche

Récolter des données

Objectif : Récolter des données au sein de la classe afin de les représenter sous différentes formes.

Quel est ton loisir préféré (sport, culture, art, jeu...) et combien de temps en heures y consacres-tu en moyenne par semaine ?

Trace écrite

1. Tableaux

On souhaite connaître les loisirs préférés ainsi que le temps passé en heures à pratiquer ce loisir d'une classe de 5^{e} du collège Simone Veil composée ce jour là de 26 élèves. On obtient les résultats suivants :

Judo	5,5	Gymnastique	4	Hand-ball	5	Hand-ball	4	Tennis	1,5
Karaté	2	Équitation	1	G.R.S.	9,5	Hand-ball	4,5	Natation	1,5
Lego®	3	Badminton	14	Football	8	Danse	2	Taekwondo	6,5
Lecture	2,5	Boxe	1,5	Danse	1,5	Courir	6	Taekwondo	6
Musique	7	Hand-ball	3	Piano	3,5	Vidéos	10	Dessiner	10
Lecture	30								

On organise les résultats : pour rassembler les données de manière pratique, on les présente sous forme d'un tableau où l'on regroupe ensemble des activités de « même type ».
L'**effectif** d'une donnée est le nombre de fois qu'elle apparaît. Par exemple :

Exemple

loisir	sports de combat	sports de « balle »	sports d' endurance	gym.	arts	culture
effectif	5	7	3	2	6	3

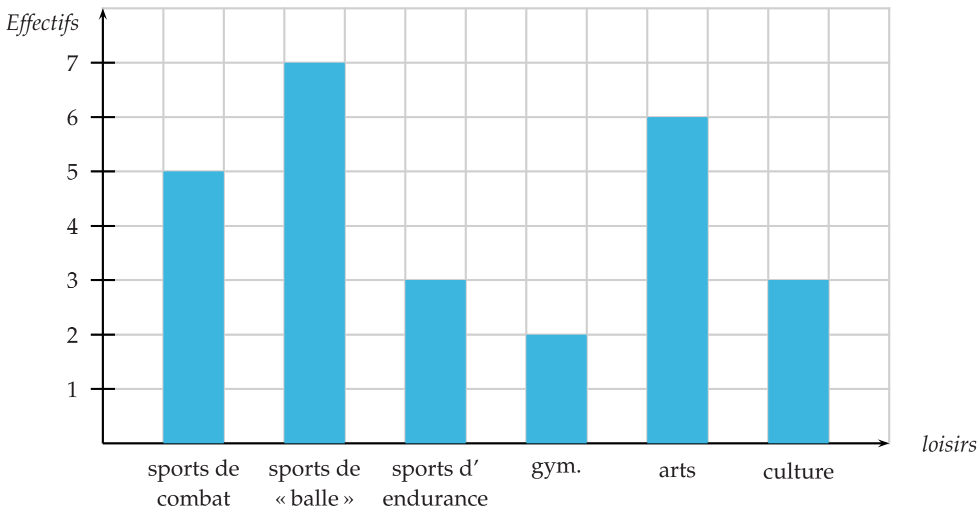
2. Diagrammes

DÉFINITION

Un **diagramme en bâtons** (ou en barres) est constitué de segments de droites verticaux dont chaque hauteur est proportionnelle au nombre qu'il représente. Il montre une répartition.

Exemple Voici le diagramme en bâtons représentant les loisirs préférés de la classe de 5^{e} :

Correction



Remarque : les « bâtons » ont une largeur quelconque, toujours la même sur la série.

Trace écrite

DÉFINITION

Un **diagramme circulaire** est constitué de secteurs circulaires dont la mesure des angles est proportionnelle aux effectifs. Il montre des proportions.

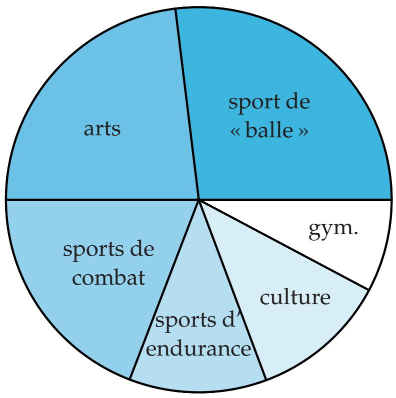
Exemple

Dans la classe de 5e, on a :

- pour les sports de combat : $\frac{5}{26} \times 360° \approx 69°$;
- pour les sports de « balle » : $\frac{7}{26} \times 360° \approx 97°$;
- pour les sports d'endurance : $\frac{3}{26} \times 360° \approx 41,5°$;
- pour la gymnastique : $\frac{2}{26} \times 360° \approx 28°$;
- pour les arts : $\frac{6}{26} \times 360° \approx 83°$;
- pour la culture : $\frac{3}{26} \times 360° \approx 41,5°$.

Correction

D'où le diagramme circulaire :



3. Histogrammes

Pour étudier une série, on peut faire un regroupement par classe, ce qui rend l'étude moins précise, mais plus globale.

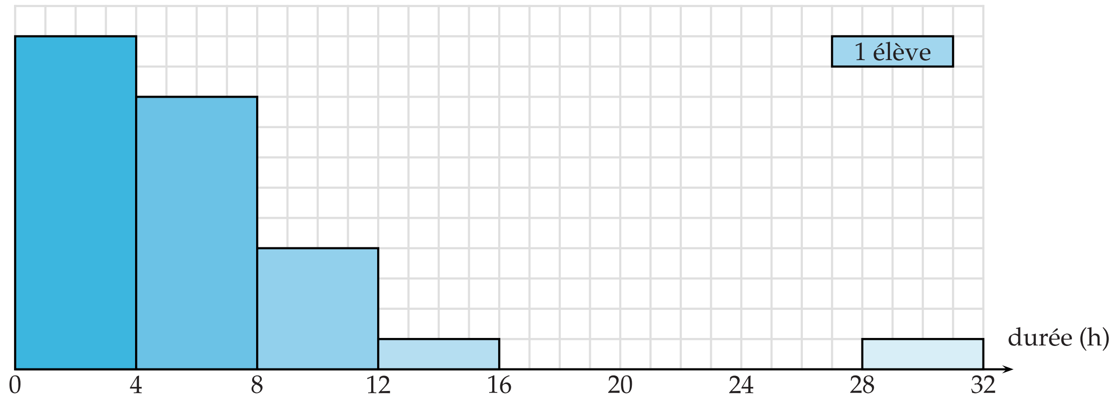
DÉFINITION

Un **histogramme** est constitué de rectangles contigus dont les aires sont proportionnelles aux effectifs de chaque classe. L'axe des abscisses est gradué grâce aux bornes de chaque classe.

Exemple On regroupe les activités selon le nombre d'heures pratiquées par semaine par classe d'amplitude 4 heures :

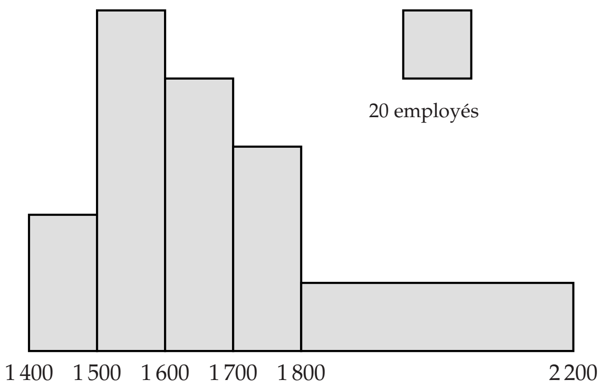
Durée	[0 ; 4 [	[4 ; 8 [	[8 ; 12 [	[12 ; 16 [	[16 ; 20 [	[20 ; 24 [	[24 ; 28 [	[28 ; 32 [
Effectif	11	9	4	1	0	0	0	1

Correction On représente ces données par un histogramme :



Représenter des données

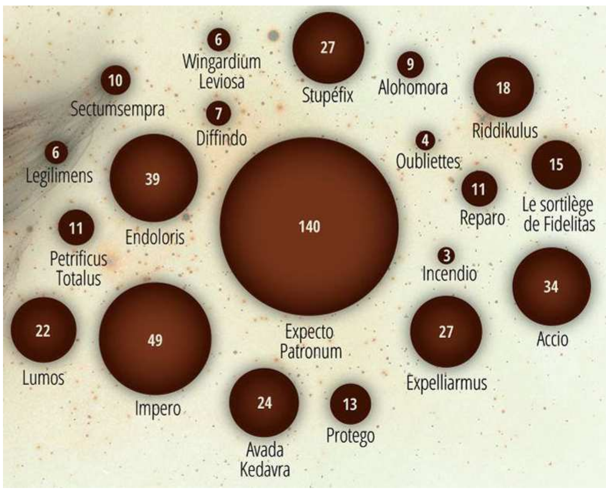
1 On représente ci-dessous la répartition des salaires dans une entreprise :



Source : eduscol.education.fr/ressources-2016

1) Comment appelle-t-on ce diagramme ?
2) Pourquoi n'y a-t-il pas d'axe vertical ?
3) Pourquoi les barres n'ont-elles pas toutes la même largeur ?
4) Construire un tableau représentant les données.

2 L'infographie suivante donne le nombre de fois que des sortilèges de magie apparaissent dans les sept livres de la série *Harry Potter*.



Source : Harry Potter, les nombres d'or de la saga, Le Figaro.fr, 2017

1) Comment sont représentées les données dans cette infographie ?
2) Combien y a-t-il eu de sortilèges donnés au total dans les sept livres ?
3) Représenter les données dans un tableau en notant uniquement les sortilèges cités plus de 20 fois.
4) Construire un diagramme en bâtons pour les valeurs de ce tableau.
5) Construire un diagramme circulaire pour les valeurs de ce tableau.
6) Laquelle de ces trois représentations vous convient le mieux ? Pourquoi ?

3 Le tableau ci-dessous représente la répartition des médailles françaises aux Jeux olympiques d'été de 1896 à 2016 pour les dix sports ayant eu le plus de médailles.
1) Compléter le tableau.
2) Comment est établi le classement des sports aux Jeux olympiques.
3) Construire trois diagrammes circulaires : celui du cyclisme, du tir et du canoë-kayak en fonction de la couleur de médaille obtenue. Les comparer.

Pl.		Sport	Or	Argent	Bronze	T.
1				51	35	**118**
2			41		23	**91**
3			14	25		**68**
4			14	13	10	
5			14	10		**49**
6			13		17	**41**
7				14	10	**33**
8			9		3	**15**
9			8	15		**43**
10			8	9	19	

Source : France aux Jeux olympiques, Wikipedia, 2019

Le tableur

Un tableur est un logiciel d'édition et de présentation de tableaux. Il comporte des **feuilles de calcul** composées de multiples lignes et colonnes formant des **cellules**. Chaque cellule est repérée par son adresse : une lettre désignant la colonne et un numéro désignant la ligne. Par exemple, la cellule **A1** fait référence à la colonne A ligne numéro 1.

PARTIE A : écrire dans une cellule

Ouvrir une nouvelle feuille de tableur, écrire les textes suivants et appuyer sur entrée.

Dans la cellule A1 : `1+2` ; Dans la cellule A2 : `=1+2`

Quelle est la différence entre ces deux écritures ? Quelle est la différence d'interprétation du tableur ?

_ _

_ _

PARTIE B : un exemple d'utilisation du tableur

Adrien revient de la boulangerie avec huit petits gâteaux qu'il a payés 11,50 € au total. Il y a des muffins à 0,80 € l'un et des tartelettes à 2,50 € pièce. On veut connaître le nombre de muffins et de tartelettes ramenées.

1) Préparation du tableau : commencer par indiquer dans la **ligne 1** les données de type « texte ».
Dans la **colonne A**, écrire le nombre de muffins qu'il est possible d'avoir acheté, de 0 à 8 dans les cellules **A2** à **A10**. Connais-tu une méthode rapide pour écrire ces neuf nombres de 0 à 8 ?

	A	B	C	D	E
1	Nombre de muffins	Nombre de tartelettes	Prix des muffins	Prix des tartelettes	Prix payé
2	0				
3	1				
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					

2) **Colonne B** : dans la cellule **B2**, écrire la formule : `=8-A2` puis sélectionner cette cellule et la tirer vers le bas pour compléter la colonne B. Quel est l'effet de ces actions ?

_ _

3) **Colonne C** : dans la cellule **C2**, écrire la formule : `=0,8*A2` Expliquer cette formule puis compléter la colonne C.

_ _

4) **Colonne D** : quelle formule peut-on écrire dans le cellule **D2** ? Compléter alors la colonne D.

_ _

5) **Colonne E** : quelle formule peut-on écrire dans le cellule **E2** ? Compléter alors la colonne E.

_ _

6) Résoudre le problème en lisant le résultat dans le tableur et en indiquant les cellules importantes pour cela.

_ _

GRANDEURS & MESURES

7

Horaires et durées

Connaissances ♡ et compétences ♢ du cycle 4

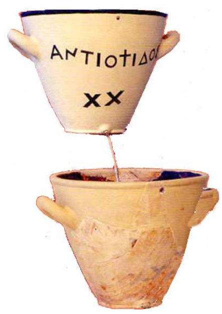
- ♢ Mener des calculs impliquant des grandeurs mesurables.
- ♢ Exprimer et vérifier la cohérence des résultats du point de vue des unités.
- ♢ Effectuer des conversions d'unités.

Débat : instruments anciens de mesure de temps et de durée

De tous temps on a voulu mesurer le **temps** et la **durée**, ci-dessous figurent quelques instruments utilisés dans des époques plus ou moins lointaines.

Cadran solaire
1 500 av. J.-C.
Heures du jour

Nocturlabe
X^{e} siècle
Heures de la nuit



Clepsydre
1 600 av. J.-C.
Durées longues (heures)

Sablier
IX^{e} siècle
Durées courtes (minutes)

Vidéo : **Remettons les pendules à l'heure**, chaîne YouTube *C'est pas sorcier*.

Cahier de compétences : ∅

De la seconde au siècle

Objectif : donner un ordre de grandeur dans le domaine des durées.

Relier les durées suivantes à son ordre de grandeur.

Durée d'un cycle complet de lune •		• Âge maximum atteint par un humain
	• Siècle •	
Durée d'une grossesse •	• Année •	• Intervalle entre deux battements de cœur consécutifs
	• Mois •	
Record du monde du 100 m •		• Durée d'un saison
	• Jour •	
Temps de cuisson d'un œuf à la coque •		• Durée d'un entraînement de sport
	• Heure •	
Temps mis par la lumière pour parcourir une distance équivalente à celle séparant la Terre et la Lune •	• Minute •	• Durée d'un film
	• Seconde •	
Durée d'un weekend •		• Temps mis par la Terre pour faire le tour de son étoile : le Soleil

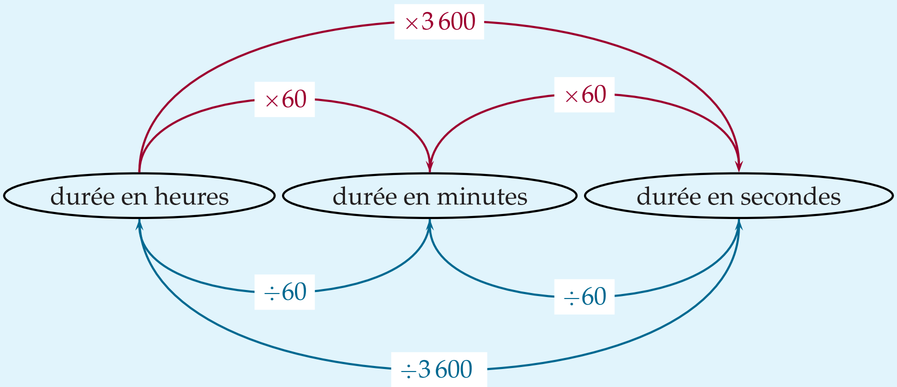
1. Unités de temps

Selon les situations, on indique les durées en années, mois, jours, heures, minutes, ou secondes : 1 siècle = 100 ans ; 1 an = 12 mois = 365 jours ou 366 jours ; 1 jour = 24 heures ; 1 heure = 60 minutes = 3 600 secondes…
Pour mesurer le temps ou une durée, on peut utiliser un cadran solaire, un sablier, une montre, un chronomètre…

2. Conversion de durées

MÉTHODE 1

Pour convertir des heures en minutes ou des minutes en secondes ou inversement, on peut utiliser le schéma suivant :



Exercice d'application Convertir 170 minutes en heures et minutes.

Correction $170 = 2 \times 60 + 50$, donc
$170\,\text{min} = 2\,\text{h}\,50\,\text{min}$.

Exercice d'application Convertir 1 h 25 min 36 s en secondes.

Correction $1\,\text{h} = 3\,600\,\text{s}$ et $1\,\text{min} = 60\,\text{s}$ donc
$1\,\text{h}\,25\,\text{min}\,36\,\text{s} = 3\,600\,\text{s} + 25 \times 60\,\text{s} + 36\,\text{s} = 5\,136\,\text{s}$.

Pour effectuer des additions ou soustractions, on peut effectuer une opération experte (un peu périlleuse) ou procéder de proche en proche.

Exemple

- Un train part de Montpellier à 8 h 48. La durée du trajet pour se rendre à Paris est de 3 h et 20 min.
  À quelle heure arrivera-t-il à Paris ?
- Un automobiliste part de Montpellier à 8 h 35 et arrive à Perpignan à 10 h 20. Quelle est la durée de son trajet ?

Correction

- $$\begin{array}{cccccc} & & 8 & \text{h} & 4 & 8 \\ + & & 3 & \text{h} & 2 & 0 \\ \hline & 1 & \cancel{1} & \text{h} & \cancel{6} & 8 \\ & & & & & \\ & 1 & 2 & \text{h} & 0 & 8 \end{array}$$
  on aligne les heures sous les heures, les minutes sous les minutes puis on additionne. Si le nombre de minutes est supérieur à 60, on soustrait 60 min et on ajoute 1 h.
- $8\,\text{h}\,35\,\text{min} \xrightarrow{+25\,\text{min}} 9\,\text{h}\,00\,\text{min}$
  $9\,\text{h}\,00\,\text{min} \xrightarrow{+1\,\text{h}} 10\,\text{h}\,00\,\text{min}$
  $10\,\text{h}\,00\,\text{min} \xrightarrow{+20\,\text{min}} 10\,\text{h}\,20\,\text{min}$.
  La durée totale du trajet est de 1 h 45 min.

Entraînement

Conversion de durées

1 Convertir les durées données ci-dessous en heures et minutes.

1) 1,5 h.
2) 2,25 h.
3) 0,3 h.

2 Convertir les durées données ci-dessous en heures décimales.

1) 6 h 30 min.
2) 2 h 45 min.
3) 8 h 33 min.

3 Convertir les durées données ci-dessous en minutes.

1) 1 h 56 min.
2) 2 j 25 min.
3) 1 j 20 h 3 min.

4 Convertir les durées données ci-dessous en heures et minutes.

1) 156 min.
2) 296 min.
3) 1 603 min.

Calcul de durées

5 Effectuer les calculs suivants :

1) 3 h 45 min + 5 h 13 min
2) 5 h 38 min + 9 h 43 min
3) 11 h 28 min − 7 h 22 min
4) 15 h 35 min − 9 h 49 min

6 Hamza part à 7 h 38 min pour prendre le bus direction le collège Simone Veil. Il met 6 minutes pour aller jusqu'à l'arrêt de bus, puis le trajet en bus dure 16 minutes et enfin il lui reste 4 minutes à pied.
À quelle heure arrivera-t-il au collège ?

7 Loane part du collège à pied à 17 h 04 min. Elle prévoit 15 min 30 s pour le trajet, 5 min pour acheter un pain au chocolat et 7 min pour dire au revoir aux copines (et copains !).
À quelle heure arrivera-t-elle chez elle ?

8 Duaa part en promenade à 9 h 20. Elle rentre à 12 h15, ne s'étant arrêté pour se reposer que lors de trois pauses de 5 min chacune.
Pendant combien de temps a-t-elle marché ?

Problèmes

9 Dans une usine, une machine met 5 min 26 s pour fabriquer une pièce.

1) Combien de temps met-elle pour fabriquer 5 pièces ?
2) Combien de temps met-elle pour en fabriquer 10 ?
3) Combien de temps met-elle pour en fabriquer 20 ?
4) Combien de temps met-elle pour en fabriquer 100 ?
5) Combien la machine aura-t-elle fabriqué de pièces si elle fonctionne 8 h sans s'arrêter ?
6) Une nouvelle machine, qui vient d'arriver à l'usine, met deux fois moins de temps pour fabriquer la même pièce.
   Quel temps met-elle pour fabriquer la pièce ?

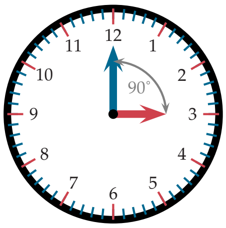
10 On voit un éclair quasiment à l'instant où il se produit (la lumière a une vitesse de 300 000 km/s), mais le bruit (coup de tonnerre) n'est entendu qu'un peu plus tard car la vitesse du son est d'environ 340 m/s, soit à peu près 1 million de fois plus lent.

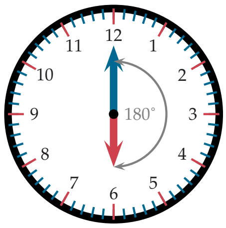
1) Concrètement, que veut dire le fait que la lumière a une vitesse de 300 000 km/s ?
2) Si on entend le tonnerre 6 secondes après avoir vu l'éclair, à quelle distance se situe l'orage ?
3) Erdogan se trouve à 8,5 km d'une orage. il voit un éclair. Combien de temps se passera-t-il avant qu'il n'entende le tonnerre ?
4) Justifier la technique qui consiste à compter les secondes entre l'éclair et le tonnerre et à les diviser par 3 pour obtenir la distance (en kilomètre) à laquelle la foudre est tombée.

quel degré est-il ?

À une heure donnée, on fait correspondre l'angle le plus petit formé par les deux aiguilles, par exemple :

15 h 00 correspond à 90 °

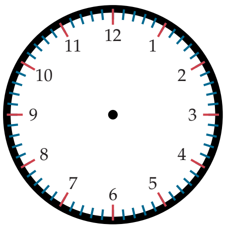




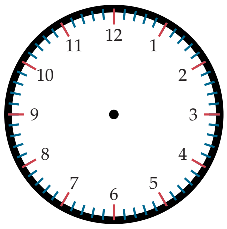
18 h correspond à 180 °

1) Indiquer, en justifiant, l'angle correspondant à chacune des heures suivantes :

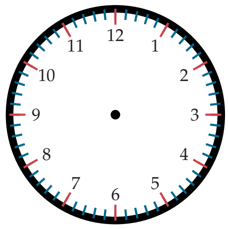
8 h



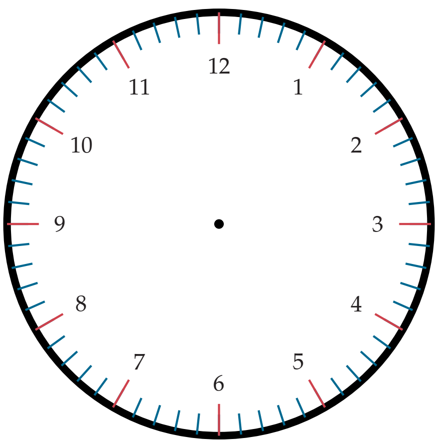
10 h 30



6 h 20



2) Il est entre minuit et une heure du matin, l'aiguille des minutes est sur une des douze graduations du cadran, les deux aiguilles forment un angle de 140 °. Quelle heure est-il ?



NOMBRES & CALCULS

8

Expressions litterales

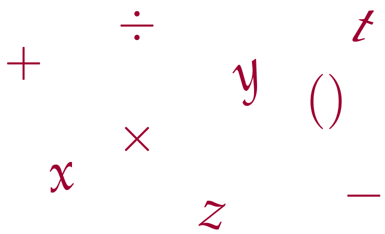
Connaissances ♡ et compétences ♢ du cycle 4

♡ Notion d'inconnue.

♢ Utiliser le calcul littéral pour traduire une propriété générale, pour démontrer un résultat général pour valider ou réfuter une conjecture, pour modéliser une situation.

Débat : petits contes mathématiques

Les vidéos des **Petits contes mathématiques** ont été créés par *Universciences* : c'est une série pédagogique qui retrace l'histoire des maths à travers la découverte d'une notion, d'une formule, d'une conjecture ou d'une équation. Le récit est rythmé par des illustrations animées et la légèreté du ton dédramatise le sujet pour tous ceux qui ne seraient pas des « matheux ».



Vidéo : **Le** x, site Internet *Le blob*, épisode de la série *Petits contes mathématiques*.

Cahier de compétences : chapitre 4, exercices 1 à 22 ; 36 à 39.

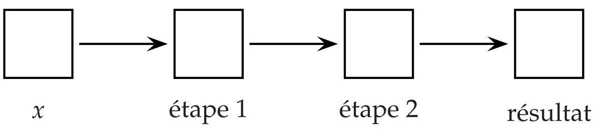
Activité d'approche

Des variables aux inconnues

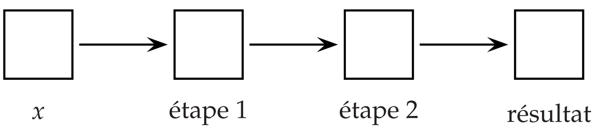
Objectifs : voir l'effet des variables dans un programme de calcul créé avec Scratch ; produire une expression littérale.

On considère le programme de calcul ci-dessous dans lequel x, Etape 1, Etape 2 et Résultat sont quatre variables.

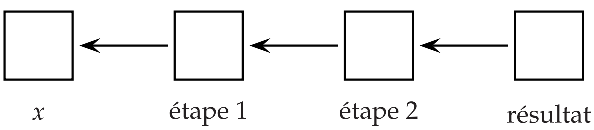
1) Mohammad a fait fonctionner ce programme en choisissant le nombre 5.
Vérifier que ce qui est dit à la fin est : « J'obtiens finalement 20 ». Pour cela, remplir le diagramme suivant :



2) Que dit le programme si Hajar le fait fonctionner en choisissant au départ le nombre 7 ?



3) Guillaume fait fonctionner le programme, et ce qui est dit à la fin est : « J'obtiens finalement 8 ». Quel nombre a-t-il choisi au départ ?



4) Si l'on appelle x le nombre choisi au départ, écrire en fonction de x l'expression obtenue à la fin du programme.

____

Cette activité est une adaptation du DNB 2017 de Pondichery.

1. Expressions littérales

DÉFINITION

Une **expression littérale** est une succession d'opérations où apparaissent des lettres représentant des nombres. On parle aussi d'**expression algébrique**.

Exemple

$4 \times x + 3$; $2 \times a - 89$; $y - 3 \times z + t - 4$.

Lorsque l'on choisit une certaine valeur pour chaque lettre d'une expression littérale, on peut calculer la valeur de l'expression littérale.

Exemple

Calculer $4 \times x + 3 \times y$ pour $x = 5$ et $y = 0$.

Correction

$4 \times x + 3 \times y = 4 \times 5 + 3 \times 0 = 20 + 0 = 20$.

2. Produire une expression littérale

Parfois, on est amené à trouver une expression littérale pour avoir une formule générale.

Exemple

- Matéo a quatre ans de plus que Noé.
  Exprimer l'âge de Matéo par rapport à celui de Noé.
- Un rectangle a pour largeur ℓ et pour longueur L.
  Donner l'expression de son aire et de son périmètre.

Correction

- En appelant « x » l'âge de Noé, l'âge de Matéo peut s'écrire « $x + 4$ ».
- $\mathcal{A} = \ell \times L$.
  $\mathcal{P} = 2 \times (\ell + L)$.

3. Simplification d'une expression littérale

Pour simplifier une expression littérale, on peut supprimer le signe « $\times$ » devant une lettre, une parenthèse ou entre deux lettres.

PROPRIÉTÉ

- On utilise la notation $2a$ pour $a + a$ ou $a \times 2$ ou encore $2 \times a$. On dit « deux a ».
- On utilise la notation ab pour $a \times b$. On dit « ab ».
- On utilise la notation a^2 pour $a \times a$. On dit « a au carré ».
- On utilise la notation a^3 pour $a \times a \times a$. On dit « a au cube ».

On écrit une expression comportant un nombre et une « lettre » avec le nombre précédé de la « lettre ».

Exemple

$A = 5 \times y - 2 \times x$.
$B = x \times x \times x + 7 \times y \times y$.
$C = x \times 3$

Correction

$A = 5y - 2x$.
$B = x^3 + 7y^2$.
$C = 3x$, est préférable à $C = x3$. En effet, par commutativité de la multiplication, $x \times 3 = 3 \times x = 3x$.

Entraînement

Valeurs d'une expression littérale

1 Calculer les expressions A à H pour $x = 2$ et $y = 0$.

1) $A = 2x$
2) $B = 7 - 3y$
3) $C = 4x + 5$
4) $D = 4(x - 2)(x + 3)$
5) $E = 2xy$
6) $F = (x - y) \times 3$
7) $G = 2x^2 - 3x + 5$
8) $H = y^2 + 3x - 5$

2 Complèter le tableau suivant.

x	0	1	2	3	4	5	6
$2x + 4$							
$x^2 + 1$							

Produire une expression littérale

3 Si x représente un nombre, comment peut-on écrire les expressions suivantes :

1) Le double de x.
2) Le tiers de x.
3) La somme de x et de 13.
4) La différence de x et de 7.
5) Le triple de la somme de 2 et de x.
6) Le tiers de la différence de 16 et x.

4 Si on note z l'âge en années de Narjisse aujourd'hui, comment peut-on noter :

1) L'âge qu'elle aura dans deux ans ?
2) Le triple de l'âge qu'elle avait il y a quatre ans ?
3) La moitié de l'âge qu'elle aura dans cinq ans ?
4) Son année de naissance si on est en 2021 ?

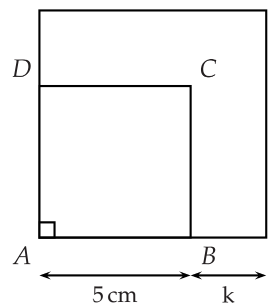
5 Voici un programme :

Choisis un nombre. Retire-lui 5. Multiplie le résultat par 3.

1) Faire fonctionner le programme avec trois nombres de son choix.
2) Quel nombre faut-il choisir pour obtenir 6 ?
3) Quel nombre faut-il choisir pour obtenir 0 ?
4) Soit x le nombre de départ, donner l'expression finale en fonction de x.

6 Fresia construit un carré $ABCD$ de 5 cm de côté.

1) Calculer le périmètre $\mathcal{P}_1$ et l'aire $\mathcal{A}_1$ de $ABCD$.
2) On augmente ses côtés de k cm. Exprimer, en fonction de k :
   - la longueur L du nouveau côté ;
   - le nouveau périmètre $\mathcal{P}_2$ de ce carré ;
   - la nouvelle aire $\mathcal{A}_2$ de ce carré.
3) Grâce aux expressions trouvées en 2, donner le périmètre et l'aire si on augmente le côté de 2 cm.



Simplifier une expression littérale

7 Recopier les expressions suivantes en supprimant les signes $\times$ s'ils ne sont pas nécessaires.

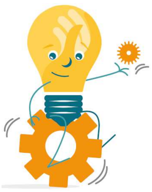
1) $A = 9 \times n$
2) $B = x \times 3$
3) $C = 12 \times (a - 3)$
4) $D = 2 \times a(2 \times 8)$
5) $E = n \times x$
6) $F = 2 \times \pi \times R$

8 Simplifier les expressions suivantes :

1) $A = a \times a$
2) $B = b \times b \times b$
3) $C = c \times c \times 3$
4) $D = 9 + d \times d \times d$
5) $E = a \times a \times b \times 3$
6) $F = x \times x \times x - 2 \times y \times y$
7) $G = (a + b) \times (a + b)$
8) $H = (x + y)(x + y)(x + y)$

D'après Sésamath, le manuel de cycle 4. Magnard 2016

Défis !!!



Défi 1

1) a) Choisir deux nombres consécutifs, calculer leur somme.

b) Faire de même avec deux autres nombres consécutifs, comparer avec les résultats de la classe.

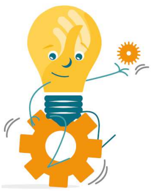
c) Quelle conjecture peut-on émettre ?

2) On choisit un entier n.

a) Comment s'écrit le nombre suivant n ?

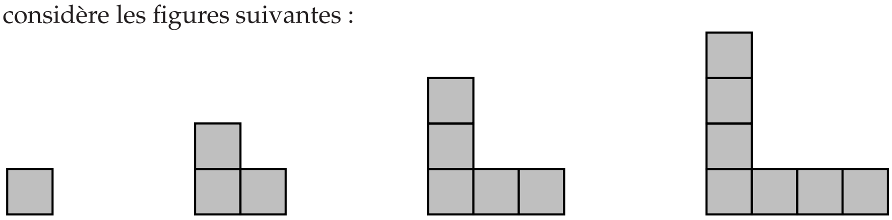
b) Donner l'expression de la somme de deux nombres consécutifs en fonction de n.

c) Conclure :



Défi 2

On considère les figures suivantes :



étape 1 étape 2 étape 3 étape 4

1) Combien y a-t-il de carrés dans chacune des étapes 1 à 4 ?

2) Combien y aura-t-il de carrés dans les étapes 5 et 6 ?

3) Déterminer le nombre de carrés à l'étape 2021.

4) Trouver une formule donnant le nombre de carrés à l'étape n.

5) Vérifier alors le résultat trouvé à la question 3).

ESPACE &
GÉOMÉTRIE

9

Somme des angles d'un triangle

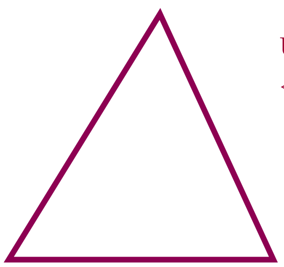
Connaissances ♡ et compétences ◇ du cycle 4

♡ Somme des angles d'un triangle.

Débat : géométrie euclidienne VS géométrie sphérique

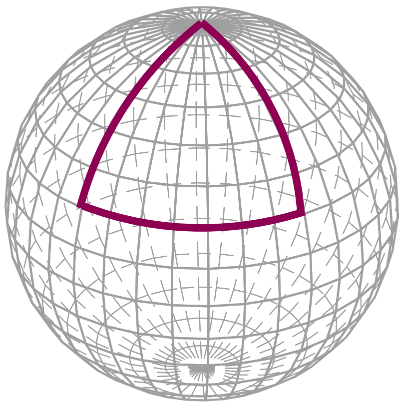
« Un ours part de sa caverne et parcourt 10 km vers le sud, puis 10 km vers l'est et enfin 10 km vers le nord. Il se retrouve alors juste devant l'entrée de sa caverne. Quelle est la couleur de l'ours ? »

La **géométrie sphérique** n'a pas les même propriétés que la **géométrie euclidienne** utilisée au collège et au lycée. Cette dernière est la géométrie initiée par *Euclide*, mathématicien grec né vers 330 av. J.-C., il est connu pour avoir recensé une grande partie des mathématiques de l'époque dans ses *Éléments* : une série de treize livres utilisée pendant près de 2 000 ans qui fut l'ouvrage le plus édité au monde après la Bible.



Un triangle « plat »
⟸

Un triangle « sphérique »
⟹



Vidéo : **Les triangles et l'astronomie**, site Internet *Le blob*, épisode de la série *Math.ing*.

Cahier de compétences : chapitre 9, exercices 10 à 24.

Activité d'approche

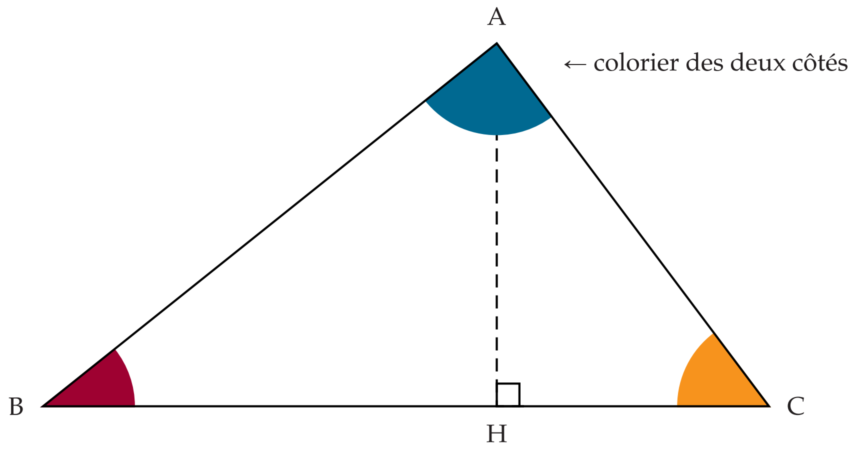
Des angles mouvants

Objectif : faire découvrir la propriété de la somme des angles d'un triangle.

Partie 1 : construction du triangle

1) Sur une feuille, tracer un triangle ABC quelconque puis le découper.

2) Colorier les trois angles de trois couleurs différentes des deux côtés du triangle (une couleur par angle).



3) Tracer la hauteur issue du sommet A et nommer le pied de cette hauteur H.

4) Plier le triangle ABC de manière à placer le point A sur le point H.

5) Plier le triangle ABC de manière à placer le point B sur le point H.

6) Plier le triangle ABC de manière à placer le point C sur le point H.

Partie 2 : observations

1) Que forment les trois angles obtenus en H ?

----

2) Formuler cette observation en utilisant les angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.

----

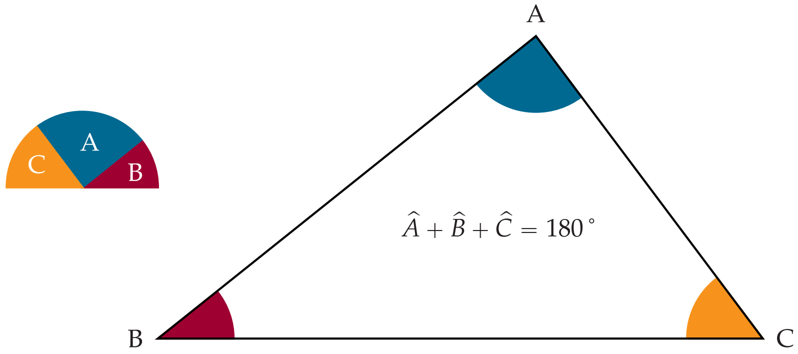
3) Formuler cette observation par une phrase simple et générale sans utiliser le nom des angles.

----

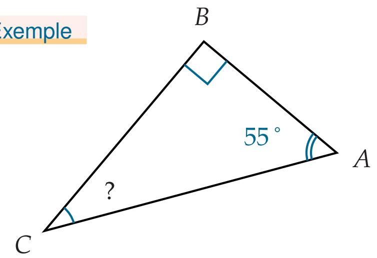
1. Somme des angles dans un triangle

PROPRIÉTÉ

Dans un triangle, la somme de la mesure de ses trois angles est égale à 180 °.



Exemple



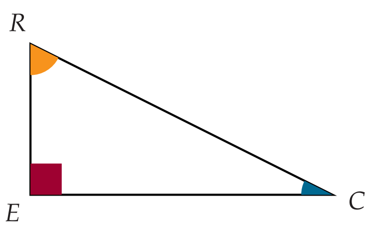
Calculer la mesure de l'angle $\widehat{BCA}$.

Correction

D'après le codage, l'angle $\widehat{ABC}$ est droit, donc $\widehat{ABC} = 90°$.
De plus, $\widehat{CAB} = 55°$.
Or, la somme des angles du triangle ABC fait 180 ° d'où :
$\widehat{CAB} + \widehat{ABC} + \widehat{BCA} = 180°$
$55° + 90° + \widehat{BCA} = 180°$
$\widehat{BCA} = 180° - 55° - 90° = 35°$

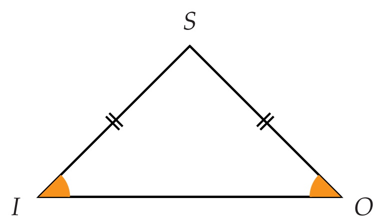
Par conséquent, pour qu'un triangle soit constructible, il est nécessaire que la somme de ses angles fasse 180 °.

2. Triangles particuliers



Triangle rectangle

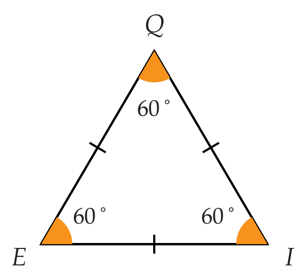
la somme des deux angles aigus est égale à 90 °



Triangle isocèle

les angles de la base ont la même mesure

si le triangle est isocèle et rectangle, les angles de la base mesurent 45 °



Triangle équilatéral

tous les angles mesurent 60 °

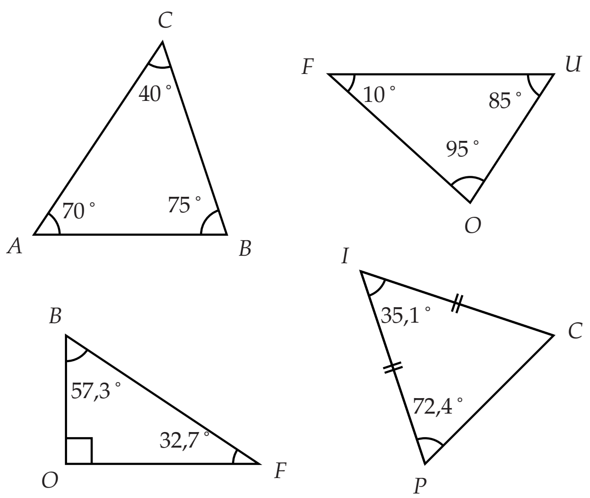
Entraînement

Angles d'un triangle

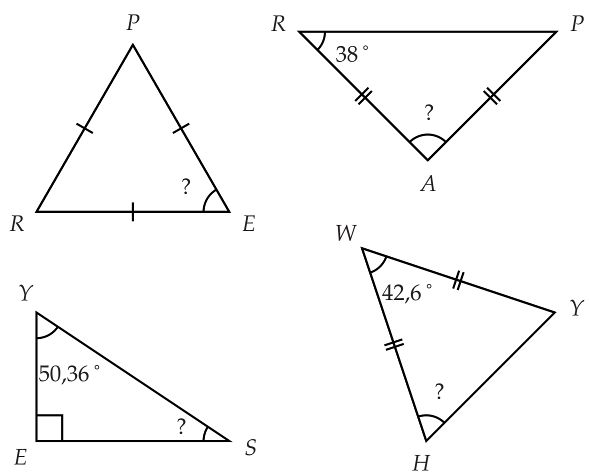
1 Pour chaque cas, calculer la mesure de l'angle manquant dans le triangle LEA.

$\widehat{LEA}$	$\widehat{EAL}$	$\widehat{ALE}$
124 °	18 °	
71 °		29 °
	98,1 °	59,6 °
49,5 °		113 °

2 Les figures suivantes ne sont pas en vraie grandeur. Pour chacune d'elles, indiquer si elles sont constructibles ou non en justifiant la réponse.

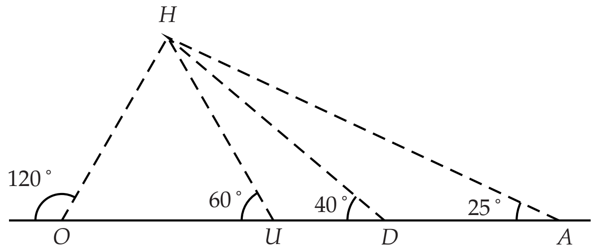


3 Calculer, pour chaque triangle, la mesure de l'angle marqué d'un point d'interrogation.

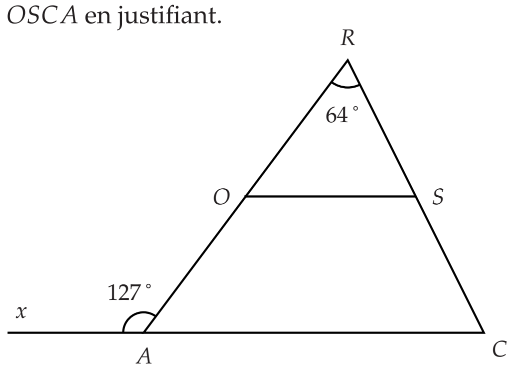


Défis !

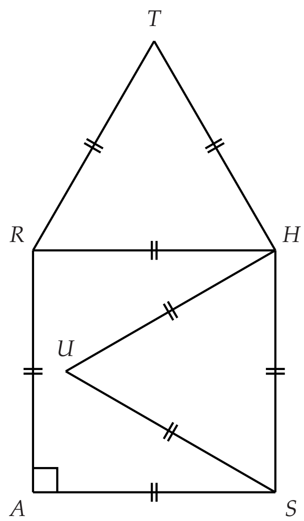
4 Dans la figure ci-dessous, les points O, U, D et A sont alignés. Des mesures d'angle sont indiquées.
Le triangle HOA est rectangle en H ?



5 Sachant que les droites (OS) et (AC) sont parallèles, calculer la mesure de chacun des angles du quadrilatère $OSCA$ en justifiant.



6 On considère la figure suivante :



1) Quelle est la nature des triangles ASU et UHT ?
2) • Calculer l'angle $\widehat{ASU}$.
   • Calculer l'angle $\widehat{UHT}$.
3) Calculer alors la mesure des angles $\widehat{SAU}$ et $\widehat{HUT}$.
4) Que peut-on dire des points A, U et T ? Justifier.

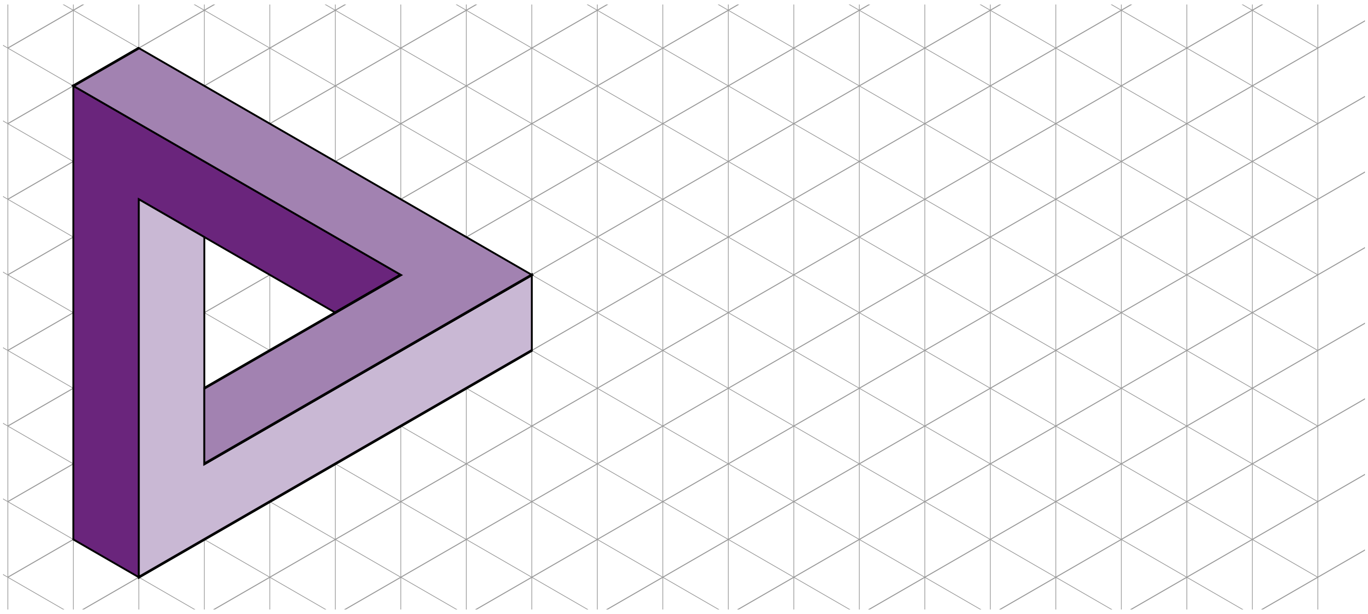
Le triangle de Penrose

Partie A : le triangle de Penrose, kesako ?

Le *triangle de Penrose*, aussi appelé tripoutre ou tribarre est un triangle impossible à construire physiquement en 3D mais facilement modélisable en 2D. Il a été conçu par le physicien et mathématicien britanique **Roger Penrose** (né à Colchester en 1931) dans les années 1950.

1) Observer le triangle de Penrose et en particulier ses angles sur ce quadrillage à maille triangulaire (aussi appelé isométrique en raison de l'égalité de longueur de tous ses côtés). Pourquoi est-il impossible à construire ?

2) Le reproduire sur le quadrillage juste à droite puis le colorier.

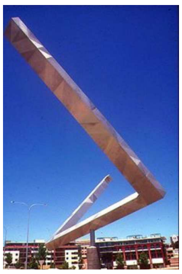


Partie B : et dans la vraie vie ?

⇒ Le jeu **Monument Valley** est un jeu de réflexion en perspective isométrique qui se passe dans un décor composé de structures aux formes géométriques impossibles basées sur ce triangle.

⇒ **An impossible triangle sculpture in Perth** : in 1997, a new landmark has been created for Perth, in a unique collaboration between a leading WA artist Brian McKay and architect Ahmad Abas. Destined to become a bold icon for Perth, the « Impossible Triangle » has been erected in Claisebrook Square, East Perth. The sculpture is 13.5 meters height and the design striations on the polished aluminium reflects both sunlight and artificial lighting. The view of the triangle depends on where it is observed from.

Source : https ://im-possible.info/english/


ORGANISATION & GESTION DE DONNÉES

10

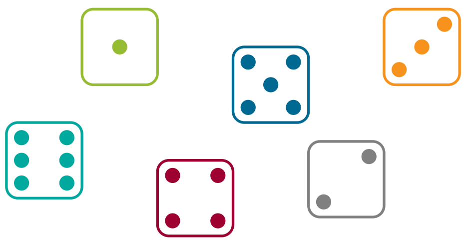
Probabilités

Connaissances ♡ et compétences ♢ du cycle 4

- ♡ Vocabulaire des probabilités.
- ♡ Notion de probabilités.
- ♡ La probabilité d'un événement est comprise entre 0 et 1.
- ♢ Aborder les questions relatives au hasard à partir de problèmes simples.
- ♢ Calculer des probabilités dans des cas simples.

Débat : histoire des probabilités

C'est en cherchant à résoudre des problèmes posés par les jeux de hasard que les mathématiciens donnent naissance aux **probabilités**. Lors de fouilles archéologiques, on a trouvé des indices montrant que les jeux de hasard se pratiquaient déjà 5 000 ans av. J.-C. (on utilisait des osselets). Les premiers dés connus ont été mis à jour à *Tepe Gawra*, au nord de l'Irak, et datent du troisième millénaire av. J.-C. Le jeu de cartes était également pratiqué dans divers pays depuis des époques reculées. Les cartes actuelles apparaissent en France au XIVe siècle et leur utilisation donne très vite lieu à des jeux d'argent.
On attribue souvent la réelle naissance à la fin du XVIIe siècle ce qui en fait une branche des mathématiques relativement récente.



Vidéo : **Les probabilités**, site Internet *Le blob*, épisode des *Petits contes mathématiques*.

Cahier de compétences : chapitre 6, exercices 27 à 36.

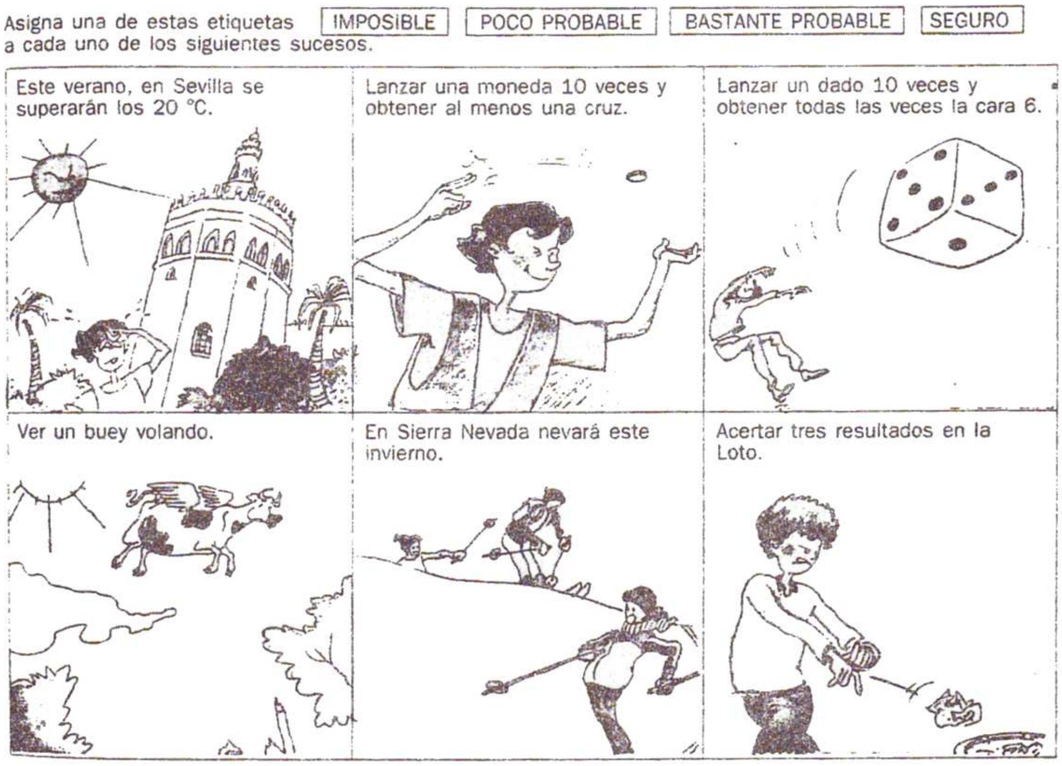
Activité d'approche

Imposible, probable o seguro

Objectifs : placer un événement sur une échelle de probabilité.

Partie 1 : traduction

Traduire en français les six vignettes de cette illustration.



- Vignette 1 : ____________________
- Vignette 2 : ____________________
- Vignette 3 : ____________________
- Vignette 4 : ____________________
- Vignette 5 : ____________________
- Vignette 6 : ____________________

Partie 2 : exploitation

Pour chaque cas, dire si l'affirmation est « imposible », « poco probable », « bastante probable » ou « seguro ».

Vignette 1	Vignette 2	Vignette 3	Vignette 4	Vignette 5	Vignette 6

Source : Une initiation aux probabilités par le jeu, IREM de Rouen.

1. Vocabulaire des probabilités

DÉFINITION

On appelle **expérience aléatoire** une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat de façon certaine.

Exemple Lancer une pièce de monnaie est une expérience aléatoire dont le résultat est soit « pile », soit « face ».

VOCABULAIRE :

- Chaque résultat possible et prévisible d'une expérience aléatoire est appelé une **issue**.
- L'ensemble formé par les issues est appelé **univers**, souvent noté Ω.
- Un **événement** de l'expérience aléatoire est une partie quelconque de l'univers.

Exemple

- Lancer d'une pièce de monnaie : $\Omega = \{\text{pile} ; \text{face}\}$.
- Lancer d'un dé à six faces : $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.
  « Obtenir un numéro pair » est un événement que l'on peut noter $A = \{2 ; 4 ; 6\}$.

2. Calcul de probabilités

La probabilité P d'un événement est « la chance » qu'il se produise.

DÉFINITION

On dit qu'il y a **équiprobabilité** lorsque toutes les issues ont la même probabilité ; dans ce cas, on a $P = \dfrac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$.

REMARQUE : dans un exercice, pour signifier que l'on est dans une situation d'équiprobabilité, on a des expressions du type : « on lance un dé **non pipé** » ; « dans une urne, les boules sont **indiscernables** au toucher » ; « on rencontre **au hasard** une personne parmi. . . ».

Exemple

On tire une carte dans un jeu non truqué de 52 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir une tête ?

Correction

Le jeu est non truqué, il y a donc équiprobabilité. Les issues possibles sont le valet, la dame et le roi de pique, de carreau, de trèfle et de coeur ce qui fait 4×3 cartes donc, $P = \dfrac{12}{52}$.

PROPRIÉTÉ

Un probabilité est toujours comprise entre 0 et 1. Si elle est égale à 0, on dit que l'événement est **impossible** et si elle est égale à 1, l'événement est **certain**.

Exemple

On lance un dé classique équilibré à six faces. Quelle est la probabilité d'obtenir un 9 ? d'obtenir un nombre entier ?

Correction

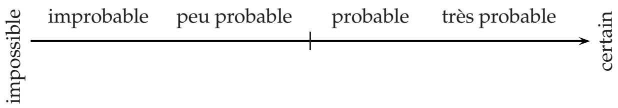
Nous sommes dans une situation d'équiprobabilité.

- On ne peut pas obtenir un 9 avec un dé à 6 faces donc, $P = \dfrac{0}{6} = 0$.
- Tous les nombres obtenus sont entiers donc, $P = \dfrac{6}{6} = 1$.

Entraînement

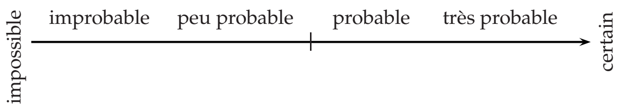
Échelle des probabilités

1 Pour chacun des événements suivants, indiquer s'il relève du hasard et si oui, le placer sur l'échelle ci-dessous.



1) Obtenir pile au jeu de pile ou face ____________
2) La fête nationale aura lieu le 14 juillet _________
3) Un élève aura des basquettes demain _________
4) Obtenir 6 avec un dé à six faces _____________
5) Trouver la bonne combinaison au loto _________
6) Demain il fera beau _____________________

2 Une roue de loterie est partagée en huit secteurs identiques numérotés de 1 à 8. Calculer la probabilité de chaque événement et les placer sur l'échelle.



1) « Obtenir 2. »
2) « Obtenir un multiple de 2. »
3) « Obtenir un nombre supérieur à 4. »
4) « Obtenir un nombre positif. »
5) « Obtenir un nombre impair. »
6) « Obtenir un multiple de 13. »

Calcul de probabilités

3 On écrit sur les faces d'un dé équilibré à six faces, chacune des lettres du mot : NOTOUS. On lance le dé et on regarde la lettre inscrite sur la face supérieure.

1) Quelles sont les issues de cette expérience ?
2) Déterminer la probabilité des évènements suivants :
- **a)** E_1 : « On obtient la lettre O. »
- **b)** E_2 : « On obtient une consonne. »
- **c)** E_3 : « On obtient une lettre du mot KIWI. »
- **d)** E_4 : « On obtient une lettre du mot CAGOUS. »

3) Graduer un axe et y placer les probabilités des évènements précédents.

4 Rosalie tire une carte dans un jeu ordinaire de cinquante-deux cartes.

1) Donner les probabilités de chacun des événements suivants : « Obtenir un carreau » ; « Obtenir un valet » et « Obtenir un valet de carreau ».
2) Calculer la probabilité de ne pas obtenir de carreau.

5 On dispose d'un dé à six faces numérotées de 1 à 6 et d'un dé à quatre faces avec des sommets numérotés de 1 à 4, parfaitement équilibrés. On lance les deux dés.

1) Avec quel dé la probabilité d'obtenir un 3 est-elle la plus grande ?
2) Avec quel dé la probabilité d'obtenir un multiple de 3 est-elle la plus grande ?

6 Trois personnes, Ali, Ben et Charles, ont chacune un sac contenant des billes. Chacune tire au hasard une bille de son sac dont le contenu est le suivant :

Sac d'Ali	Sac de Ben	Sac de Charles
10 billes rouges 30 billes noires	97 billes rouges 3 billes noires	5 billes rouges

Laquelle de ces trois personnes a-t-elle la plus grande probabilité de tirer une bille rouge ? Justifier.

7 Dans une loterie, 300 billets sont vendus et il y a 37 billets gagnants. Les autres billets sont des billets perdants. Parmi les 37 billets gagnants :

- 2 de ces billets permettent de gagner une télévision ;
- 5 permettent de gagner un bon de 100 € ;
- 10 permettent de gagner un bon de 50 € ;
- 20 permettent de gagner un porte-clés.

1) Quelle est la probabilité de gagner une télévision si l'on achète un billet ?
2) Quelle est la probabilité de gagner un bon (peu importe la somme) si l'on achète un billet ?
3) En plus de l'achat des bons dans plusieurs magasins, l'organisateur de la loterie dépense 500 € pour chaque télévision et 0,50 € pour chaque porte-clés.
- **a)** À quel prix doit-il vendre les billets de loterie pour être sûr que ce jeu ne lui fera pas perdre d'argent ?
- **b)** S'il souhaite vendre chaque billet 2 €, combien doit-il rajouter de billets perdants pour être assuré que ce jeu ne lui fera pas perdre d'argent ?

Vers la loi des grands nombres...

Le travail s'effectue en binôme, vous avez à votre disposition un dé classique non truqué à six faces.

1) Compléter le tableau suivant :

Numéro sur la face visible du dé	1	2	3	4	5	6
Probabilité d'obtenir cette face (fraction)						
Probabilité d'obtenir cette face (décimal)						

Que remarque-t-on ? ____

2) Lancer 10 fois le dé et noter les résultats obtenus dans le tableau suivant :

Numéro sur la face visible du dé	1	2	3	4	5	6
Nombre de fois où cette face est obtenue						
Probabilité d'obtenir cette face (fraction)						
Probabilité d'obtenir cette face (décimal)						

Que remarque-t-on ? ____

3) Lancer 100 fois le dé et noter les résultats obtenus dans le tableau suivant :

Numéro sur la face visible du dé	1	2	3	4	5	6
Nombre de fois où cette face est obtenue						
Probabilité d'obtenir cette face (fraction)						
Probabilité d'obtenir cette face (décimal)						

Que remarque-t-on ? ____

4) Répertorier les résultats de la classe entière et noter les résultats obtenus dans le tableau suivant :

Numéro sur la face visible du dé	1	2	3	4	5	6
Nombre de fois où cette face est obtenue						
Probabilité d'obtenir cette face (fraction)						
Probabilité d'obtenir cette face (décimal)						

Que remarque-t-on ? ____

NOMBRES & CALCULS

11

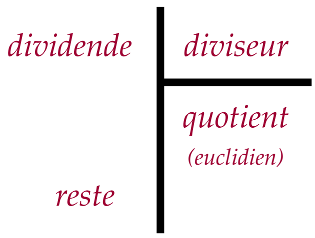
Multiples et diviseurs

Connaissances ♡ et compétences ♢ du cycle 4

- ♡ Multiples et diviseurs.
- ♡ Critères de divisibilité par 2, 3, 5, 9.
- ♡ Division euclidienne.
- ♢ Déterminer si un entier est ou n'est pas multiple ou diviseur d'un autre entier.
- ♢ Utiliser un critère de divisibilité par 2, 3, 5, 9, 10.
- ♢ Modéliser et résoudre des problèmes mettant en jeu la divisibilité.

Débat : la division euclidienne

Le nom de **division euclidienne** est un hommage rendu à *Euclide* (300 av. J.-C.), mathématicien grec qui en explique le principe par soustractions successives dans son œuvre *Les éléments*. Mais elle apparait très tôt dans l'histoire des mathématiques, par exemple dans les mathématiques égyptiennes, babyloniennes et chinoises.



Vidéo : **Division euclidienne avec matériel multibase**, chaîne YouTube *Méthode Heuristique*.

Cahier de compétences : ∅

Activité d'approche

Les multiplications incomplètes

Objectifs : calculer mentalement des multiplications et des divisions ; résoudre un problème de calcul mental ; compléter un tableau à double entrée.

Compléter ces tables de multiplication dont on a effacé le contenu de certaines cases. Les nombres sont tous strictement positifs, il ne peut pas y avoir deux fois le même nombre sur une même colonne ou une même ligne.

Partie 1 : piste verte

×		
		24
	25	30

×		7
		21
4	8	

×	6	
	24	32
	36	

×	3	
		18
5		45

Partie 2 : piste bleue

×	2		
		9	
	8		
	16		56

×	2		
4		16	
			35
9	18		45

×		7	
	12		32
			64
		63	72

Partie 3 : piste rouge

×		3	
	20		
		18	
		6	4

×			7
2			14
	72	54	
	40		35

×			
	18		15
		64	
		32	

Partie 4 : piste noire

×			10
	20	8	
	35		70
			100

×			
		45	
	28		
	44		99

×		13	
		65	
	42		49
	72		84

Trace écrite

1. Multiples et diviseurs

Rappel : effectuer une division euclidienne d'un **dividende** a par un **diviseur** b, c'est trouver deux entiers appelés **quotient** q et **reste** r tels que $a = b \times q + r$ où $r < b$.
Dans l'exemple ci-contre, on peut écrire : $123 = 5 \times 24 + 3$.

$$\begin{array}{rl}
\text{dividende} & \\
\downarrow \quad & \\
1\,2\,3 & \big|\ 5 \ \leftarrow \text{diviseur} \\
-\ 1\,0 & \big|\ 2\,4 \ \leftarrow \text{quotient} \\
2\,3 & \big| \\
-\ 2\,0 & \big| \\
3 & \big| \leftarrow \text{reste}
\end{array}$$

DÉFINITION

a et b sont deux nombres entiers. Lorsque le reste de la division de a par b est égal à 0, on dit que a est un **multiple** de b, ou que b est un **diviseur** de a, ou encore que a est **divisible** par b.

Exemple

- 15 est un multiple de 3 car $15 = 3 \times 5 + 0$, on peut aussi dire que 3 est un diviseur de 15, ou que 15 est divisible par 3.
- 17 n'est pas un multiple de 3 car $17 = 3 \times 5 + 2$.
- Les diviseurs de 24 sont 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 et 24.
- Il y a une infinité de multiples de 18, comme par exemple 18 ; 36 ; 54 ; 180...

2. Critères de divisibilité

PROPRIÉTÉ

- un nombre est divisible par 2 s'il se termine par 0 ; 2 ; 4 ; 6 ou 8 ;
- un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est un multiple de 3 ;
- un nombre est divisible par 5 s'il se termine par 0 ou 5 ;
- un nombre est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est un multiple de 9 ;
- un nombre est divisible par 10 s'il se termine par 0.

Exemple

- 252 et 253 sont-ils divisibles par 3 ?
- 52 362 et 52 363 sont-ils divisibles par 9 ?

Correction

- $2 + 5 + 2 = 9$ est multiple de 3 donc, 252 est divisible par 3.
  $2 + 5 + 3 = 10$ n'est pas multiple de 3 donc, 253 n'est pas divisible par 3.
- $5 + 2 + 3 + 6 + 2 = 18$ est multiple de 9 donc, 52 362 est divisible par 9, et donc par 3.
  $5 + 2 + 3 + 6 + 3 = 19$ n'est pas multiple de 9 donc, 52 363 n'est pas divisible par 9.

REMARQUE : pour savoir si un nombre est divisible par 3, on peut calculer la somme des chiffres du nombre obtenu jusqu'à ce que l'on trouve un seul chiffre :
pour 563 387 981, on calcule : $5 + 6 + 3 + 3 + 8 + 7 + 9 + 8 + 1 = 50$. Puis on calcule $5 + 0 = 5$.
5 n'est pas divisible par 3 donc, 563 387 981 n'est pas divisible par 3.

Entraînement

Division euclidienne

1 Effectuer la division euclidienne de 307 par 7 puis de 13 758 par 25.

2 On donne les égalités :
$415 = 7 \times 59 + 2$ et $56 \times 57 = 3\,192$.
Sans effectuer de calculs, donner le quotient et le reste des divisions euclidiennes suivantes.

1) 415 par 7
2) 3 192 par 56
3) 415 par 59
4) 3 192 par 57

3 Résoudre les problèmes suivants :

1) 6 798 supporters d'un club de rugby doivent faire un déplacement en car pour soutenir leur équipe. Chaque car dispose de 55 places. Combien de cars faut-il réserver ?
2) Des stylos sont conditionnés par boîte de 40. Jules a 2 647 stylos. Combien lui en manque-t-il pour avoir des boîtes entièrement remplies ?
3) Trois amis participent à une chasse au trésor et trouvent 1 419 pièces en chocolat. Si le partage est équitable, combien de pièces en chocolat auront-ils chacun ? Zakaria arrive et leur rappelle que c'est lui qui leur a prêté sa boussole. Il exige donc d'avoir la même part que chacun des trois autres plus les pièces restantes. Combien de pièces recevra-t-il ?

Multiples et diviseurs

4 Trouver tous les diviseurs des nombres suivants : 14 ; 40 ; 48 et 2 037.

5 Ecrire :

1) La liste des dix premiers multiples de 6.
2) Cinq multiples de 11.
3) Tous les multiples de 13 inférieurs à 80.
4) Le plus grand multiple de 12 inférieur à 75.
5) Le plus grand multiple de 36 inférieur à 100.
6) Le plus petit multiple de 9 supérieur à 1 200.
7) Le plus petit multiple de 14 supérieur à 710 ?
8) Le plus petit et le plus grand diviseur de 2 021.

6 Répondre aux questions suivantes :

1) a) Écrire tous les multiples de 3 inférieurs à 41.
   b) Écrire tous les multiples de 5 inférieurs à 41.
   c) Entourer les multiples communs à 3 et 5.
   d) Que remarque-t-on ?
2) a) Écrire tous les multiples de 4 inférieurs à 50.
   b) Écrire tous les multiples de 6 inférieurs à 50.
   c) Entourer les multiples communs à 4 et 6.
   d) Que remarque-t-on ?

Critères de divisibilité

7 Les nombres 30 ; 27 ; 246 ; 325 ; 4 238 et 6 139 sont-ils divisibles par 2 ? par 3 ? par 5 ? par 9 ?

8 Colorie le chemin pour aller de la case 99 à la case 108 en ne passant que par des nombres divisibles par 9, horizontalement et verticalement.

99	27	7875	934	117	9999	63	8321	69	
	980	1116	128	9000	777	4455	109	675	
	732	8784	666	7866	304	963	124	946	
	132	678	418	456	2044	7272	1070	6666	
	1152	4200	82	1035	3303	54	5543	765	
	4778	354	4779	234	9001	1117	208	89	
	810	888	7200	998	632	5544	36	945	
	101	7001	6669	8757	207	1071	2350	2358	108

9 Je suis un nombre impair à deux chiffres sans 2 dans mon écriture. Je ne suis pas divisible par 5 mais je suis un multiple de 9. Qui suis-je ?

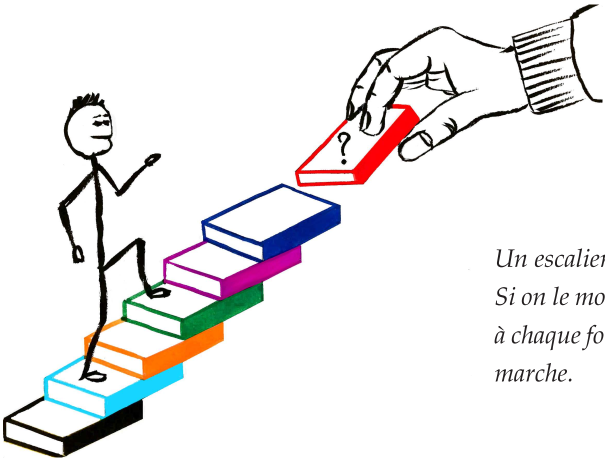
10 Répondre par vrai ou faux en justifiant.

1) Tout nombre divisible par 3 est divisible par 9.
2) Tout nombre divisible par 9 est divisible par 3.
3) Tout nombre divisible par 2 et 3 est divisible par 5.
4) Tout nombre dont le chiffre des unités est 2 est divisible par 2.
5) Tout nombre dont le chiffre des unités est 3 est divisible par 3.

D'après Le manuel Sésamath de cycle 4. Magnard-Sesamath 2016

L'escalier

Partie A : l'énoncé



Un escalier compte moins de 100 marches.
Si on le monte 3 par 3, 4 par 4, ou encore 5 par 5, à chaque fois on arrive exactement sur la dernière marche.

Partie B : les questions

1) Combien y a-t-il de marches à cet escalier ?

2) Arriverait-on exactement sur la dernière marche de cet escalier si on le montait :

- **a)** en sautant 6 marches à la fois ?
- **b)** en sautant 8 marches à la fois ?
- **c)** en sautant 5 marches, puis 7, à nouveau 5, puis 7, et ainsi de suite ?
- **d)** en sautant 3 marches, puis 4, à nouveau 3, puis 4, et ainsi de suite ? et en sautant d'abord 4 marches ?

Partie C : la narration de recherche

ESPACE & GÉOMÉTRIE

12

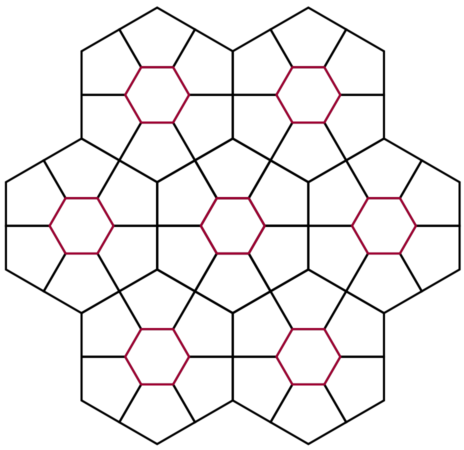
La symétrie centrale

Connaissances ♡ et compétences ♢ du cycle 4

♢ Comprendre l'effet d'une symétrie (axiale et centrale) sur une figure.

Débat : les pavages

Un **pavage du plan** est un ensemble de portions du plan qui, lorsqu'on les met les unes à côté des autres, forment le plan tout entier, sans recouvrement. Par exemple, lorsque l'on pose du carrelage, on effectue un pavage de la pièce. Ce carrelage peut être de forme carrée, rectangulaire, hexagonale. . .



Vidéo : **Pavages interactifs**, site Internet *Mathématiques magiques* de *Thérèse Eveilleau*.

Cahier de compétences : chapitre 7, exercices 1 à 33.

Activité d'approche

Le bonhomme inversé

Objectifs : transformer une figure par symétrie axiale ; observer l'effet de deux symétries axiales.

Construire sur le quadrillage ci-dessous les bonhommes demandés.

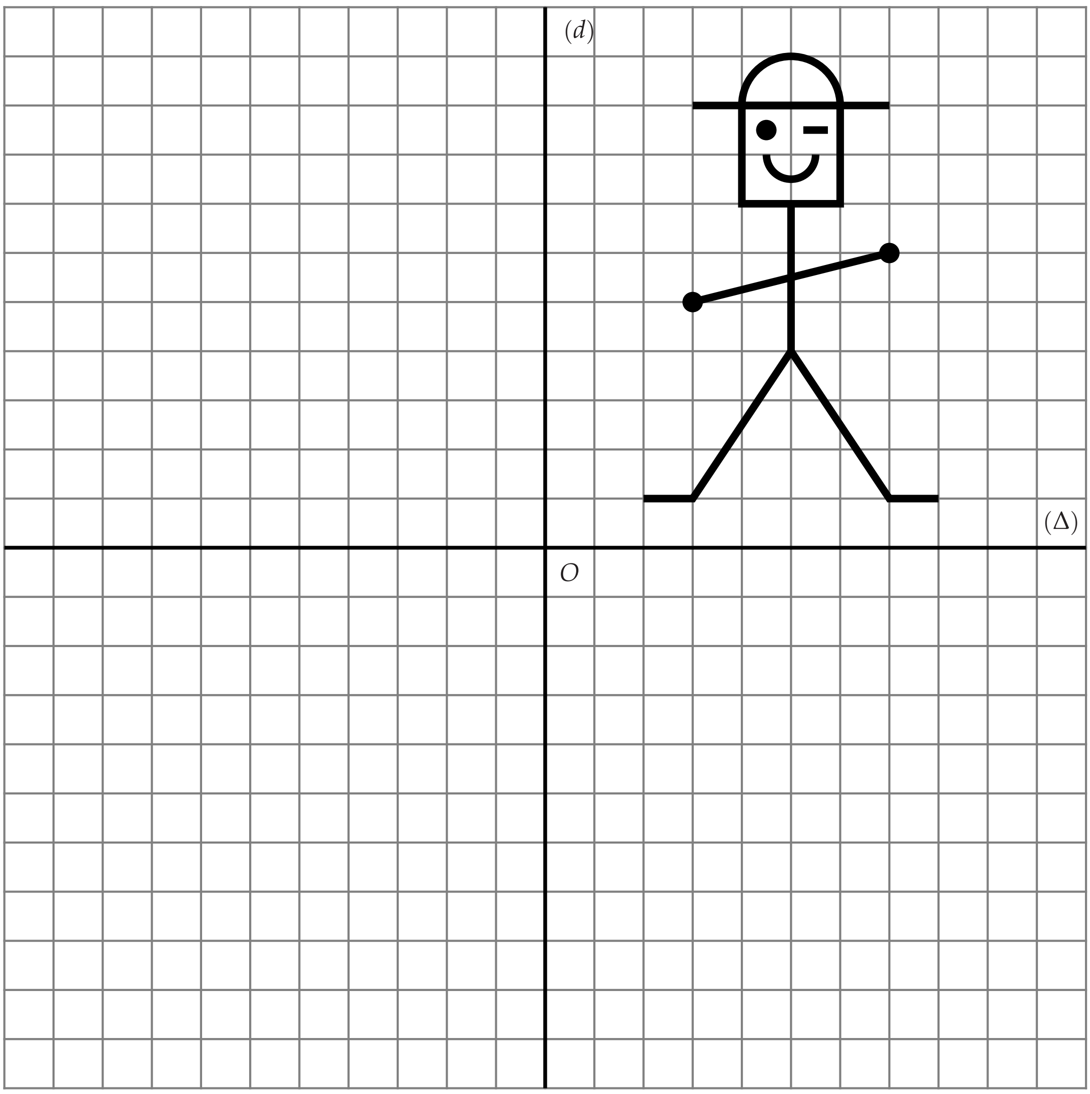
1) Construire en vert le symétrique du bonhomme par rapport à la droite (d).

2) Construire en rouge le symétrique du bonhomme vert par rapport à la droite (Δ).

3) Reproduire sur du papier calque le bonhomme noir et le point O.

4) En s'aidant du calque, sans le plier, trouver comment passer du bonhomme noir au bonhomme rouge.

5) Sans utiliser les bonhommes noir et rouge ni les droites (d) et (Δ), construire en bleu l'image du bonhomme vert par la symétrie centrale de centre O.



Source : À la découverte de la symétrie centrale, Nathalie Bernard, IREM de Lille.

1. La symétrie centrale

DÉFINITION

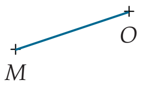
Le point M' est l'image du point M par la **symétrie de centre** O lorsque le point O est le milieu du segment $[MM']$.

MÉTHODE 1 **Construire le symétrique d'un point par symétrie centrale**

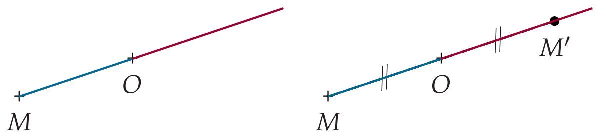
Pour construire le symétrique d'un point M par la symétrie centrale de centre O :
- tracer la demi-droite $[MO)$;
- reporter la longueur MO de l'autre côté du point O ;
- placer le point M' symétrique de M par rapport à O.

Exercice d'application

Tracer le point M', symétrique du point M par rapport à O.

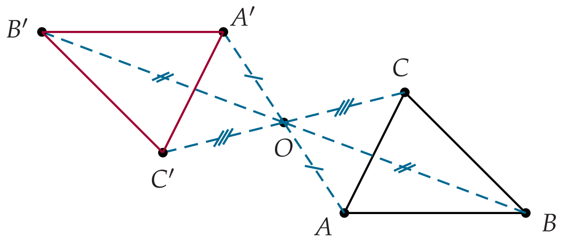


Correction



REMARQUE : transformer une figure par symétrie centrale de centre O revient à lui faire faire un demi-tour autour de ce point.

Pour tracer la figure symétrique d'une figure par la symétrie centrale de centre O, il faut construire le symétrique de chacun des points qui la compose.

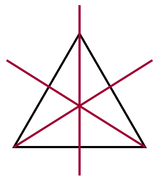


2. Centre de symétrie

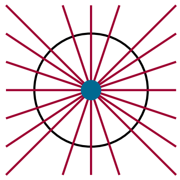
DÉFINITION

Si une figure $\mathcal{F}$ est transformée en elle-même par la symétrie centrale de centre O, alors O est le **centre de symétrie** de la figure $\mathcal{F}$.

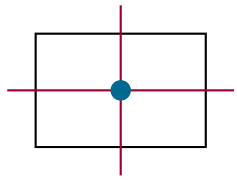
Exemple Si une figure possède un centre de symétrie, alors il est unique.



3 axes de symétrie
0 centre de symétrie



∞ axes de symétrie
1 centre de symétrie

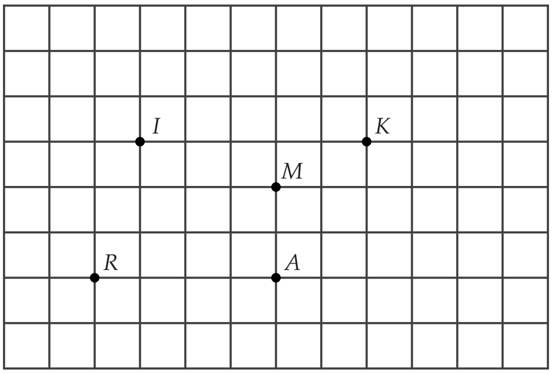


2 axes de symétrie
1 centre de symétrie

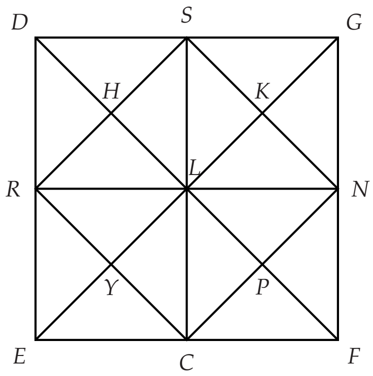
Entraînement

Construction de symétriques

1 Construire les points I', K', R' et A' symétriques respectifs de I, K, R et A par rapport au point M.

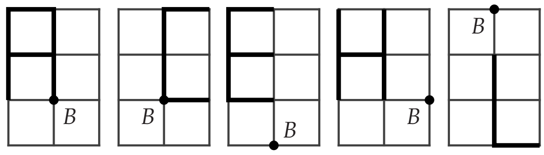


2 Sur la figure ci-dessous, $DEFG$ est un rectangle de centre L. Les points R, C, N et S sont les milieux respectifs des côtés $[DE]$, $[EF]$, $[FG]$ et $[GD]$.

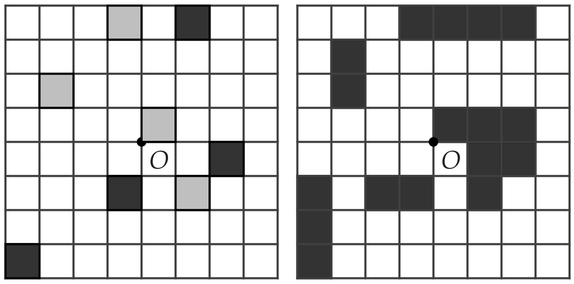


1) Colorier en jaune le triangle DHS.
2) Colorier en rouge le symétrique du triangle DHS par rapport à (RN).
3) Colorier en orange le symétrique du triangle DHS par rapport à (SC)
4) Colorier en bleu le symétrique du triangle DHS par rapport à H.
5) Colorier en vert le symétrique du triangle DHS par rapport à L.

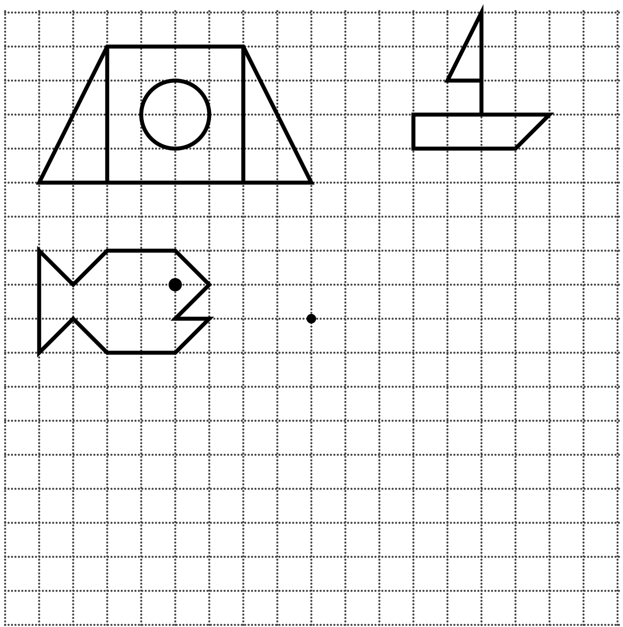
3 Dans chaque cas, reproduire la lettre sur le cahier et construire son symétrique par rapport au point B.



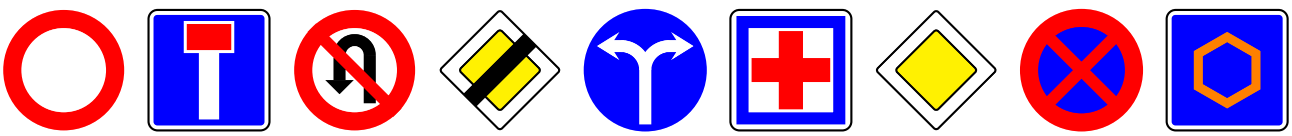
4 Colorier le minimum de cases pour que chacune des figures ci-dessous admette le point O pour centre de symétrie.



5 Tracer la figure symétrique de toutes les figures par rapport au point O.

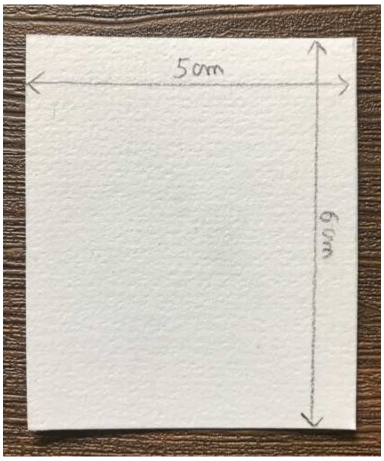


6 Pour chacun de ces panneaux de signalisation, tracer le ou les axes et/ou centre de symétrie.



Pavage du plan rectangulaire

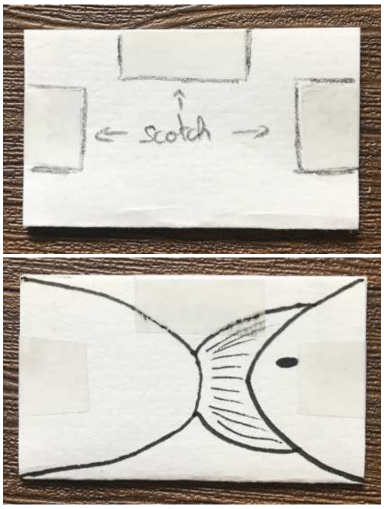
Un pavage du plan est une portion de plan sur laquelle un motif de base se répète par isométrie (transformation du plan qui conserve les longueurs) tel que les motifs ne se recouvrent pas et ne laissent pas de « trous ». La symétrie centrale est une isométrie. Nous allons composer un pavage à partir d'un motif.



1) Découper dans une feuille de papier Canson un rectangle de 5 cm sur 6 cm.

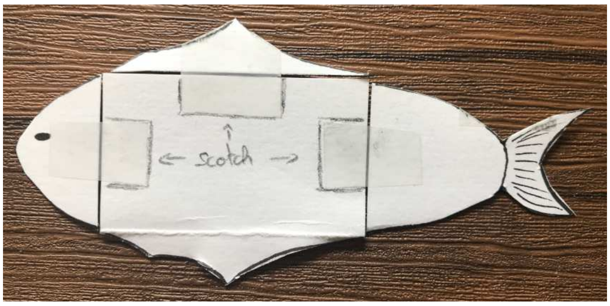
2) Plier le rectangle en deux dans le sens de la largeur et placer trois petits bouts de scotch sur les trois côtés qui ne sont pas attachés.

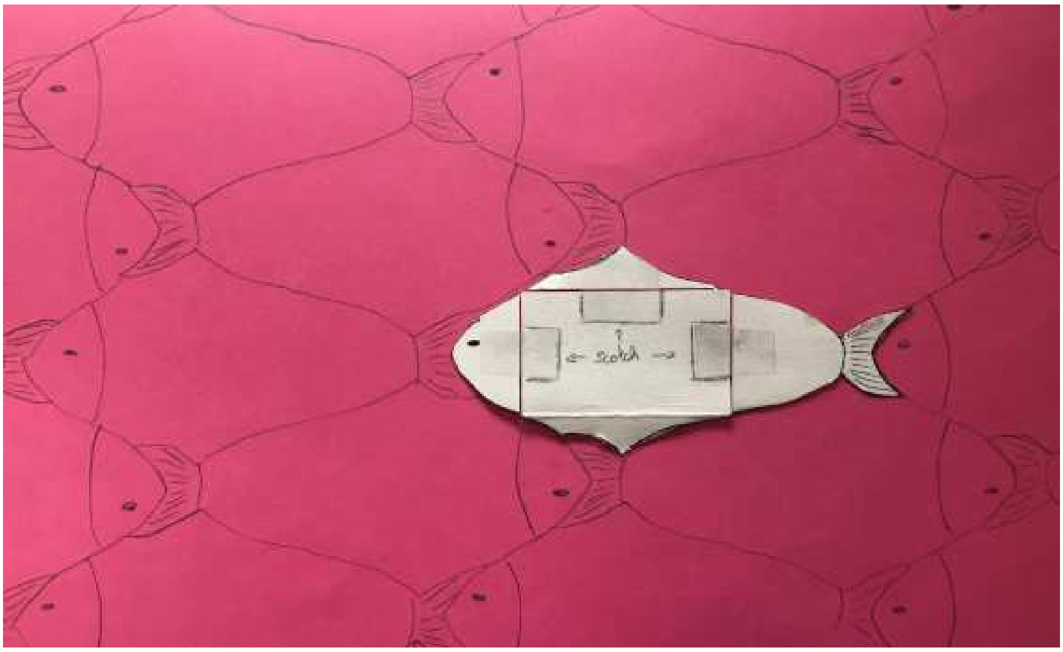
3) Dessiner une forme qui ressemble à un poisson en deux morceaux.



4) Découper selon les traits en commençant par les coins laissés sans scotch puis ouvrir afin d'obtenir la forme du poisson.

5) Grâce à ce gabarit, dessiner un pavage de poissons sur une feuille unie en passant de l'un à l'autre par symétrie centrale de manière à remplir toute la feuille.





GRANDEURS & MESURES

13

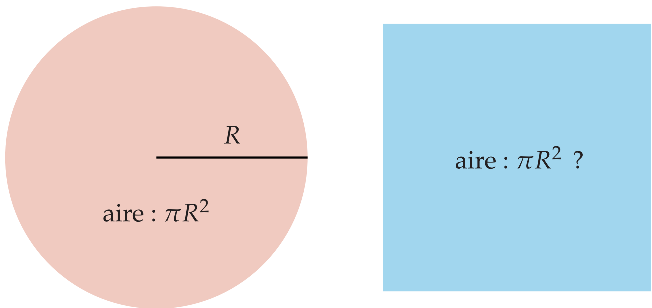
Calcul d'aires

Connaissances ♡ et compétences ◇ du cycle 4

- ◇ Mener des calculs impliquant des grandeurs mesurables, notamment des grandeurs composées, exprimer les résultats dans les unités adaptées.
- ◇ Vérifier la cohérence des résultats du point de vue des unités.
- ◇ Effectuer des conversions d'unités.

La quadrature du cercle

Dans le langage courant, l'aire désigne souvent une surface plane limitée, destinée à un usage précis : une aire de jeu, une aire d'atterrissage, une aire de lancement. . .
En mathématiques, l'aire est la mesure d'une surface et a procuré de nombreuses recherches depuis très longtemps. Par exemple, **la quadrature du cercle** consiste à trouver, par construction à la règle et au compas, un carré d'aire égale à un disque. Ce problème a été posé pendant l'Antiquité dans la civilisation grecque et a été réfuté seulement en 1882 par le mathématicien allemand *Ferdinand von Lindemann*.



Vidéo : **Raconte-moi une histoire : Archimède et le nombre** π, chaîne YouTube *m@ths et tiques*, Yvan Monka.

Cahier de compétences : chapitre 11, exercices 14 à 31.

Activité d'approche

Une aire multiforme

Objectifs : tracer différentes figures d'aire donnée ; travailler les multiples et diviseurs.

M. et Mme Vegetable veulent installer un potager de $12\,m^2$ dans leur jardin.
Ils souhaitent dessiner sur une feuille différentes formes correspondant à cette surface au 1/100ᵉ.
Par combien de centimètre sera représentée une longueur de 1 mètre ? ______________________________

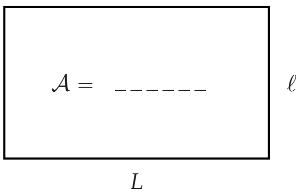
Partie 1 : des potagers rectangulaires

1) Pour délimiter leur potager, on propose à M. et Mme Vegetable des bordures de longueur 1 m qu'ils ne veulent pas découper. Dessiner en rouge sur votre feuille toutes les possibilités de potagers rectangulaires qu'ils peuvent constituer avec de telles bordures.

2) Ils décident de couper une bordure en deux. Dessiner en noir les nouveaux potagers rectangulaires qu'il est possible de construire.

3) Dessiner en vert deux nouveaux potagers rectangulaire d'aire $12\,m^2$ avec des mesures de votre choix.

4) Rappeler la formule de calcul de l'aire d'un rectangle de côtés L et ℓ puis compléter le tableau avec les valeurs trouvées aux questions 1), 2) et 3).



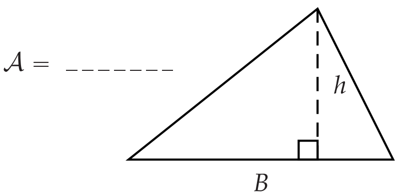
L							
ℓ							

Partie 2 : des potagers triangulaires

1) M. et Mme Vegetable se disent qu'il serait original d'avoir un potager triangulaire. Ils souhaitent avoir une base de 6 m. Dessiner en bleu trois potagers d'aire $12\,m^2$ et de base 6 m.

2) Donner toutes les mesures possibles pour la base et la hauteur sachant que ces mesures sont des nombres entiers.

3) Rappeler la formule de calcul de l'aire d'un triangle de base B et de hauteur h puis compléter le tableau avec les valeurs trouvées à la question 2).

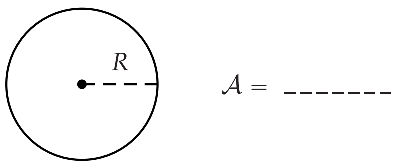


B				
h				

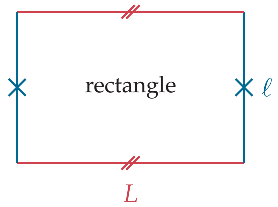
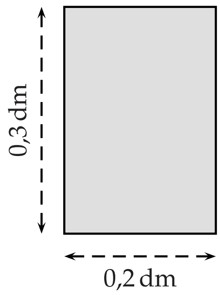
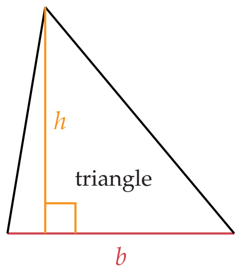
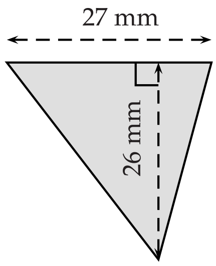
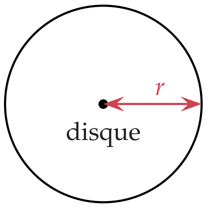
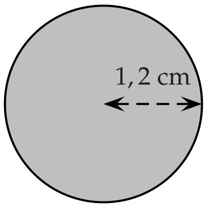
Partie 3 : un potager circulaire

1) Finalement, M. et Mme Vegetable s'orientent vers un potager circulaire. Donner une valeur au centième près de la valeur du rayon.

2) Rappeler la formule de calcul de l'aire d'un disque de rayon R.



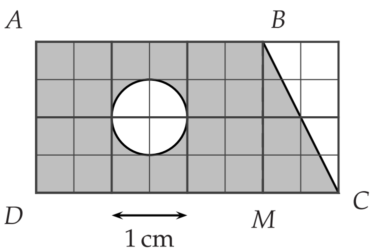
1. Aires usuelles

Figure plane	Mesures	Exemple	Calcul
	$\mathcal{A} = L \times \ell$		$\mathcal{A} = 0{,}2\,\text{dm} \times 0{,}3\,\text{dm} = 0{,}06\,\text{dm}^2$
Pour le cas particulier du carré, on a $\mathcal{A} = c^2$ où c est la mesure du côté du carré.			
	$\mathcal{A} = \dfrac{b \times h}{2}$		$\mathcal{A} = \dfrac{27\,\text{mm} \times 26\,\text{mm}}{2} = 351\,\text{mm}^2$
Dans le cas du triangle rectangle, on choisit comme base et comme hauteur les deux côtés de l'angle droit.			
	$\mathcal{A} = \pi \times r \times r$ $\mathcal{A} = \pi r^2$		$\mathcal{A} = \pi \times (1{,}2\,\text{cm})^2 \approx 4{,}52\,\text{cm}^2$

2. Calcul d'aires composées

Pour calculer l'aire d'une figure complexe, il suffit de la « découper » en figures usuelles et d'additionner ou de soustraire les aires qui la constituent.

Exemple



Correction

La figure grisée ci-contre est composée du rectangle $ABMD$ de longueur 3 cm et de largeur 2 cm ; du triangle MBC de base 1 cm et de hauteur 2 cm et du disque de rayon 0,5 cm.

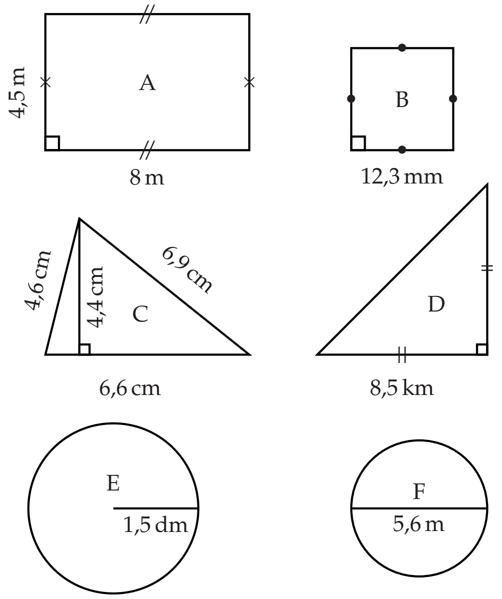
Pour calculer son aire, on additionne l'aire du rectangle et du triangle et on soustrait l'aire du disque :

$$\mathcal{A} = 3\,\text{cm} \times 2\,\text{cm} + \frac{1\,\text{cm} \times 2\,\text{cm}}{2} - \pi \times (0{,}5\,\text{cm})^2 \approx 6{,}21\,\text{cm}^2$$

Entraînement

Calculer d'aires

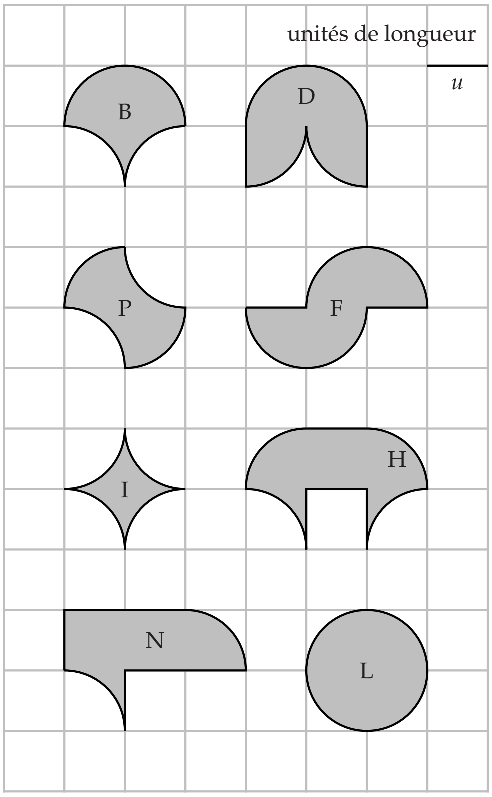
1 Calculer l'aire de ces figures.



2

1) On peut regrouper les surfaces ci-dessous par deux ou par trois sauf une, laquelle ?

2) Calculer alors l'aire de chaque surface.



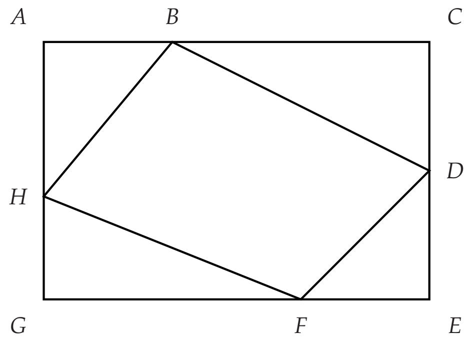
Problèmes

3 Résoudre les petits problèmes suivants :

1) Quelle est l'aire d'un carré de périmètre 32 cm ?

2) Quel est le périmètre d'un rectangle de largeur 6 m et d'aire 48 m^2 ?

4 Dans cette figure, on a : $AB = 9$ cm ; $BC = 21$ cm ; $CD = 11$ cm ; $DE = 9$ cm ; $EF = 11$ cm ; $GH = 7$ cm.



1) Calculer le périmètre du rectangle $ACEG$.

2) Calculer l'aire du quadrilatère $BDFH$.

5 Le drapeau suisse est constitué d'un fond rouge et d'une croix blanche en son centre.

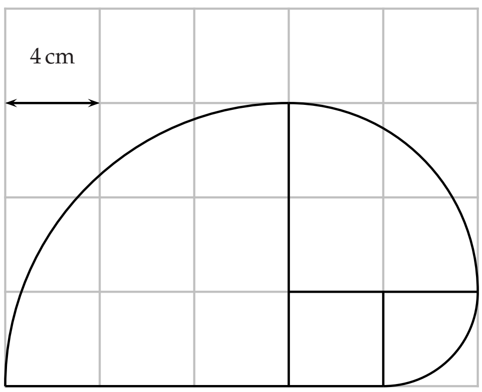
On considère un drapeau dont la largeur et la longueur sont de 20 cm et 35 cm et la largeur et la longueur de chaque bande blanche est de 4 cm par 15 cm.

1) Dessiner le drapeau suisse à l'échelle 1/5ᵉ.

2) Calculer l'aire de la croix blanche dessinée.

3) Calculer l'aire de la surface rouge dessiné.

6 Calculer l'aire de cette figure. Donner la valeur exacte et une valeur approchée au centimètre près.

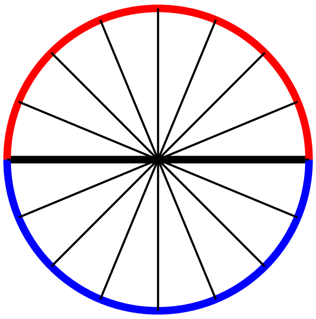


La surface du disque selon Archimède

PARTIE A : un peu d'histoire

Archimède de Syracuse $(-284; -212)$ est un des plus grands scientifiques de l'antiquité, né à Syracuse.
Il est à l'origine de plusieurs découvertes, dont la poussée d'Archimède et de systèmes de leviers. En mathématiques, il serait le premier à avoir donné une méthode permettant de trouver une valeur approchée de π par encadrement par des polygones et il a proposé des méthodes de calcul d'aires de certaines surfaces comme par exemple celle du disque.

PARTIE B : la méthode d'Archimède



- Tracer sur une feuille au format A4 un disque de rayon 6 cm.
- Tracer un diamètre de ce cercle puis repasser en rouge l'un des demi-cercles et en bleu l'autre demi-cercle.
- Découper ce cercle en deux parts égales, puis quatre, puis huit, puis seize. Proposer une méthode pour cela (il est possible d'utiliser tout le matériel de géométrie).

1) Calculer la valeur du périmètre de ce disque : ____________

- Assembler les portions de disque comme sur la *figure 1* ci-dessous.
- Découper l'un des deux portions de disque des extrémités en deux parts égales.
- Coller sur le cahier toutes les portions de disque selon la *figure 2*.

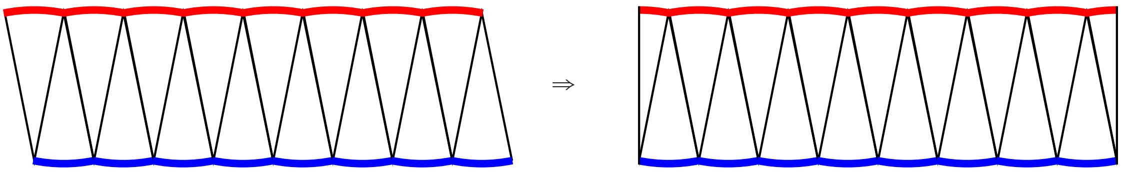


figure 1 *figure 2*

2) À quoi « ressemble » la figure 2 obtenue ? ____

3) En s'appuyant sur les mesures prises sur la figure collée, donner une approximation de son aire : ________

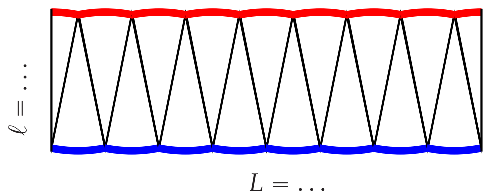
PARTIE C : vers la formule de l'aire du disque

On considère ici un cercle de rayon R découpé de la même manière que dans la partie B.

4) Sur la figure ci-contre, exprimer la longueur L et la largeur ℓ en fonction de R en considérant que la longueur L est presque équivalente à la longueur de la courbe en bleu.

5) En déduire la formule proposée par Archimède pour l'aire d'un disque : ________________________________

6) Comment cette approximation peut-elle se justifier ?



NOMBRES & CALCULS

14

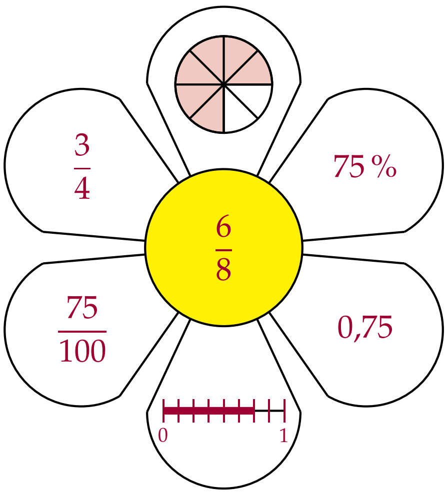
Comparaison et égalité de fractions

Connaissances ♡ et compétences ♢ du cycle 4

♢ Effectuer des calculs et des comparaisons de pour traiter des problèmes (fractions).

Débat : les fractions, ces nombres rompus !

Tout nombre peut s'écrire de différentes façons : ils ont des habillages différents mais ont la même valeur. La façon dont on les écrit permet de pouvoir les comparer. Par exemple, la **fraction** $\frac{6}{8}$ possède (entre autres) les représentations suivantes :



Vidéo : **Les fractions**, site Internet *Le blob*, épisode de la série *Petits contes mathématiques*.

Cahier de compétences : chapitre 2, exercices 1 à 29 ; 43 à 45.

Activité d'approche

Des briques et des fractions

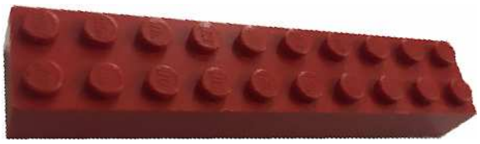
Objectifs : utiliser des fractions pour exprimer une proportion ; produire des fractions égales, ranger des fractions.

Partie 1 : les légo®

On choisit la brique de Lego® classique u ci-contre que l'on prend comme unité et les onze briques a à k. On considère que le volume d'une brique est proportionnel au nombre de « boutons » présents sur le dessus.

u : 

a : 
b : 
c : 
d : 

e : 
f : 
g : 
h : 

i : 
j : 
k : 

Partie 2 : les fractions

1) Compléter les égalités suivantes à l'aide de nombres entiers, décimaux ou fractionnaires :

$a =$ ------- u $c =$ ------- u $e =$ ------- u $g =$ ------- u $i =$ ------- u $k =$ ------- u

$b =$ ------- u $d =$ ------- u $f =$ ------- u $h =$ ------- u $j =$ ------- u

2) Compléter les égalités suivantes à l'aide de fractions dont le dénominateur est 8 :

$a = \frac{}{8}u$ $c = \frac{}{8}u$ $e = \frac{}{8}u$ $g = \frac{}{8}u$ $i = \frac{}{8}u$ $k = \frac{}{8}u$

$b = \frac{}{8}u$ $d = \frac{}{8}u$ $f = \frac{}{8}u$ $h = \frac{}{8}u$ $j = \frac{}{8}u$

3) Classer les Lego® dans l'ordre croissant de leur volume :

----

1. Rappels sur les fractions

DÉFINITION

Soit a et b deux nombres ($b \neq 0$). Le **quotient** $\frac{a}{b}$ est le nombre qui, multiplié par b, donne a.
Ce quotient, écrit sous forme d'une fraction, est le résultat d'une division : $\frac{a}{b} = a \div b$.

Exemple
La fraction $\frac{7}{3}$ peut-être interprétée comme :

Correction
- $7 \div 3$, dont une valeur approchée est 2,33 ;
- sept tiers, c'est-à-dire sept fois un tiers ;
- le nombre qui, multiplié par 3, donne 7 : $\frac{7}{3} \times 3 = 7$.

2. Égalité de fractions

PROPRIÉTÉ

On ne change pas la valeur d'une fraction en multipliant ou en divisant le numérateur et le dénominateur par un même nombre relatif non nul.

$$\frac{b}{c} = \frac{b \times a}{c \times a} = \frac{ba}{ca}. \quad \text{On a aussi} \quad a \times \frac{b}{c} = \frac{a \times b}{c} = \frac{ab}{c}$$

Exemple $\frac{1}{2} = \frac{1 \times 2}{2 \times 2} = \frac{2}{4} = \frac{2 \times 2}{4 \times 2} = \frac{4}{8} \ldots$; $7 \times \frac{3}{5} = \frac{7 \times 3}{5} = \frac{21}{5}$.

Remarque : la propriété permet de **simplifier** des fractions, ce qui signifie écrire une fraction qui lui est égale, mais avec un numérateur et un dénominateur plus petits.

Exemple Pour simplifier $\frac{150}{180}$, on peut tout d'abord diviser le numérateur et le dénominateur par 10 : $\frac{150}{180} = \frac{150 \div 10}{180 \div 10} = \frac{15}{18}$, puis les diviser encore par 3 : $\frac{15}{18} = \frac{15 \div 3}{18 \div 3} = \frac{5}{6}$.

3. Comparaison de fractions

PROPRIÉTÉ

- Pour comparer deux fractions ayant le même dénominateur, on compare uniquement le numérateur : la fraction la plus grande est celle dont le numérateur est le plus grand.
- Pour comparer deux fractions de dénominateurs différents, on modifie l'écriture des fractions pour qu'elles aient le même dénominateur.

Exemple
Comparer les fractions suivantes :
- $\frac{3}{5}$ et $\frac{4}{5}$.
- $\frac{2}{3}$ et $\frac{7}{12}$.

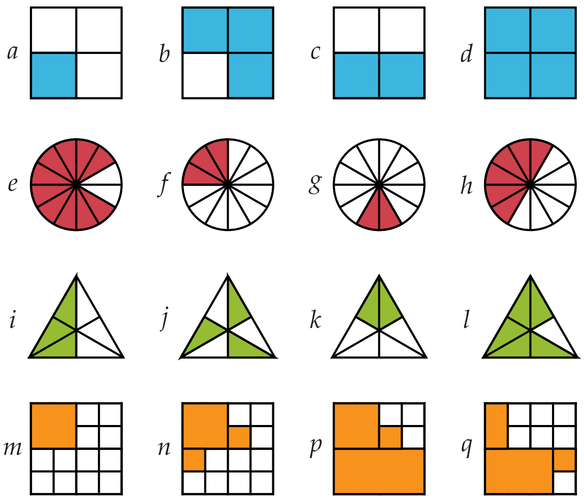
Correction
On a :
- $3 < 4$ donc $\frac{3}{5} < \frac{4}{5}$.
- On remarque que $\frac{2}{3} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{8}{12}$.

  Comme $\frac{8}{12} > \frac{7}{12}$, alors $\frac{2}{3} > \frac{7}{12}$.

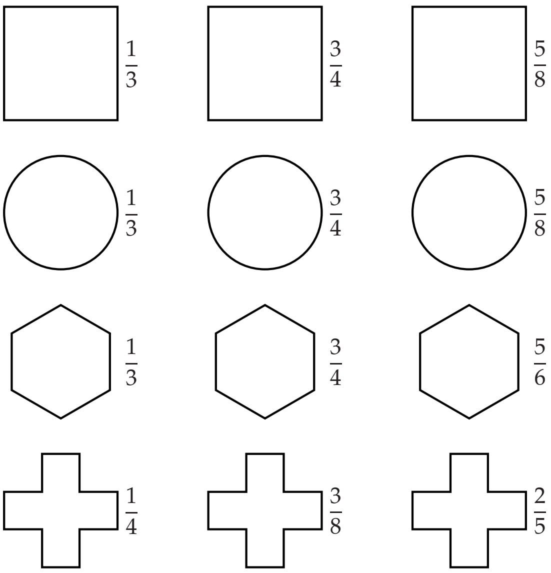
Entraînement

Fractions

1 Ecrire la fraction qui représente la partie colorée de chaque figure puis la simplifier si possible.



2 Dans chaque figure ci-dessous, colorier selon la fraction donnée.



Egalités et comparaisons

3 Compléter avec le signe $=$ ou $\neq$.

1) $\dfrac{3+5}{7+5}$ ---- $\dfrac{3}{7}$ 4) $\dfrac{33}{77}$ ------ $\dfrac{3}{7}$ 7) $\dfrac{3}{7}$ ------ $\dfrac{30}{70}$

2) $\dfrac{3\times5}{7\times5}$ ---- $\dfrac{3}{7}$ 5) $\dfrac{7}{3}$ ------ $\dfrac{3}{7}$ 8) $\dfrac{3}{3}$ ------ $\dfrac{7}{7}$

3) $\dfrac{3\times7}{7\times3}$ ---- $\dfrac{3}{7}$ 6) $\dfrac{3}{7}$ ----- $3{,}7$ 9) 3 ------ $\dfrac{21}{7}$

4 Compléter les fractions suivantes :

1) $\dfrac{1}{2} = \dfrac{\ldots}{14} = \dfrac{8}{\ldots} = \dfrac{\ldots}{50} = \dfrac{16}{\ldots} = \dfrac{64}{\ldots}$

2) $\dfrac{4}{5} = \dfrac{\ldots}{15} = \dfrac{8}{\ldots} = \dfrac{\ldots}{50} = \dfrac{16}{\ldots} = \dfrac{64}{\ldots}$

3) $\dfrac{11}{7} = \dfrac{\ldots}{14} = \dfrac{88}{\ldots} = \dfrac{\ldots}{49} = \dfrac{121}{\ldots} = \dfrac{550}{\ldots}$

5 Surligner d'une même couleur les nombres égaux.

$\dfrac{5}{4}$	$\dfrac{54}{45}$	$\dfrac{28}{42}$	$\dfrac{12}{15}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{9}{81}$	$\dfrac{4}{6}$
$\dfrac{50}{40}$	$\dfrac{27}{54}$	$\dfrac{4}{36}$	$\dfrac{36}{72}$	$\dfrac{1}{9}$	$\dfrac{4}{5}$	$\dfrac{6}{5}$

6 Simplifier au maximum ces fractions.

1) $\dfrac{6}{10}$ 3) $\dfrac{16}{28}$ 5) $\dfrac{88}{33}$ 7) $\dfrac{15}{75}$

2) $\dfrac{18}{16}$ 4) $\dfrac{30}{48}$ 6) $\dfrac{55}{30}$ 8) $\dfrac{108}{117}$

7 Comparer les fractions suivantes :

1) $\dfrac{1}{9}$ ------ $\dfrac{1}{3}$ 4) $\dfrac{7}{19}$ ----- $\dfrac{7}{20}$ 7) $\dfrac{81}{91}$ ----- $\dfrac{81}{90}$

2) $\dfrac{4}{9}$ ----- $\dfrac{12}{9}$ 5) $\dfrac{2}{3}$ ------ $\dfrac{4}{6}$ 8) $\dfrac{17}{10}$ ----- $0{,}7$

3) $\dfrac{18}{17}$ -------- 1 6) $\dfrac{18}{13}$ ----- $\dfrac{15}{13}$ 9) $\dfrac{2}{3}$ ------ $\dfrac{1}{4}$

8 Pour chaque item, réduire les fractions au même dénominateur, les ranger dans l'ordre croissant puis en déduire le classement des fractions initiales dans l'ordre croissant.

1) $A = \dfrac{1}{2}$; $B = \dfrac{2}{3}$; $C = \dfrac{5}{6}$; $D = \dfrac{5}{12}$; $E = \dfrac{7}{24}$.

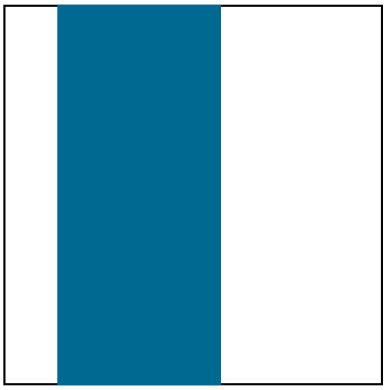
2) $F = \dfrac{1}{2}$; $G = \dfrac{3}{4}$; $H = \dfrac{7}{8}$; $I = \dfrac{11}{16}$; $J = \dfrac{23}{32}$.

ExploRATIO

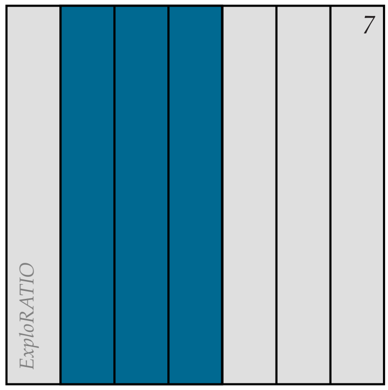
Partie A : présentation du matériel

ExploRATIO est un matériel permettant des activités de manipulation et de réflexion dans le domaine des fractions. Il est composé de **transparents** représentant un carré unité, puis un carré partagé en 2, en 3, en 4, en 5, en 6, en 7, en 8, en 9 et en 10 et de **vignettes** dont une partie est colorée.
L'objectif est de déterminer la fraction de l'unité correspondant à la partie colorée.

Exemple de vignette :



le transparent divisé en 7 parts égales permet de vérifier que la partie colorée correspond à trois septièmes d'unité, soit $\frac{3}{7}$.



Partie B : À vous de jouer!

Pour chacun des niveaux 1, 2 et 3, donner la fraction de carré unité coloriée puis simplifier au maximum.

Niveau 1							
1a	1b	1c	1d	1e	1f	1g	1h

Niveau 2							
2a	2b	2c	2d	2e	2f	2g	2h

Niveau 3						
2i	2j	2k	2l	2m	2n	2p

ExploRATIO : Un dispositif pédagogique créé par le Groupe d'Enseignement Mathématique (Belgique)

ESPACE & GÉOMÉTRIE

15

L'inégalité triangulaire

Connaissances ♡ et compétences ♢ du cycle 4

♡ Inégalité triangulaire.

♢ Mettre en œuvre ou écrire un protocole de construction d'une figure géométrique.

Débat : des instruments de navigation astronomique anciens

De tous temps, les hommes ont cherché à se repérer. Avant l'avénement de l'électronique et des GPS, de multiples instruments ont pu exister, par exemple :

Sphère armillaire : modélisation de la sphère céleste

Antiquité

Astrolabe : représentation plane de la sphère armillaire

Antiquité

Boussole : indique le nord magnétique

XIII^{e}

Octant : mesure la hauteur des corps célestes (45 °)

XVIII^{e}

Sextant : mesure la hauteur des corps célestes (60 °)

XVIII^{e}

Vidéo : **Du kamal au GPS 1** et **Du kamal au GPS 2**, chaîne Youtube du *Musée national de la marine*.

Cahier de compétences : chapitre 8, exercices 1 à 17 ; 27 à 33.

Activité d'approche

Avec des allumettes

Objectifs : construire des triangles sous contraintes.

Devant vous, vous avez dix allumettes. Pour chacune des questions suivantes, faire la construction si elle est possible avec des allumettes puis faire un dessin pour schématiser la situation.

1) a) Aligner quatre allumettes en les plaçant les unes à côté des autres.

b) À partir de ce segment de longueur 4 allumettes, construire un triangle dont les deux autres côtés ont pour longueur trois allumettes.

c) En utilisant les dix allumettes, construire un triangle différent du précédent dont un des côtés a pour longueur quatre allumettes. Quelles sont les longueurs de ses côtés ?

2) En utilisant les dix allumettes, est-il possible de construire un triangle dont un des côtés a pour longueur six allumettes ? sept allumettes ? Expliquer.

3) En utilisant les dix allumettes, peut-on construire un triangle dont un côté a pour longueur cinq allumettes ? Que constate-t-on dans ce cas ?

4) On veut maintenant construire un triangle de périmètre 15 allumettes dont les côtés ont pour longueur un nombre entier d'allumettes. Donner toutes les solutions possibles.

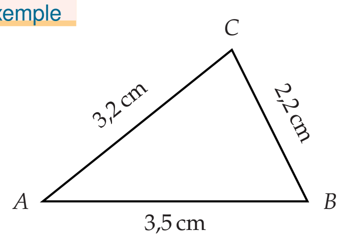
Trace écrite

1. L'inégalité triangulaire

PROPRIÉTÉ

Dans un triangle, la longueur d'un côté est toujours inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés. S'il y a égalité, alors les trois points sont alignés et le triangle est « plat ».

Exemple



Correction

Dans le triangle ABC, on a :

- $AC = 3{,}2$ cm et $AB + BC = 5{,}7$ cm donc $AC \leqslant AB + BC$;
- $CB = 2{,}2$ cm et $CA + AB = 6{,}7$ cm donc $CB \leqslant CA + AB$;
- $BA = 3{,}5$ cm et $BC + CA = 5{,}4$ cm donc $BA \leqslant BC + CA$.

Remarque : dans la pratique, on vérifie seulement que la longueur du plus grand côté est plus grande que la somme des longueurs des deux autres côtés.

2. Construction de triangles

Pour construire un triangle, il faut au minimum trois données :
- soit trois longueurs ;
- soit deux longueurs et l'angle compris entre les segments correspondants aux longueurs données ;
- soit une longueur et les deux angles adjacents au segment correspondant à la longueur donnée ;
- si on a trois angles, on pourra construire un triangle mais il ne sera pas unique : tous les triangles seront semblables (des agrandissements ou des réductions du même triangle).

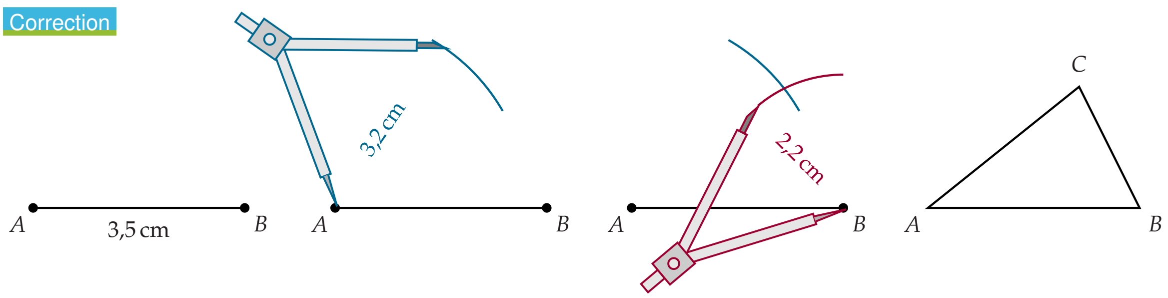
MÉTHODE 1 **Construction d'un triangle connaissant trois longueurs**

Pour construire un triangle ABC dont on connaît les longueurs des trois côtés :

- on trace à la règle graduée l'un des côtés (en général le plus grand), par exemple $[AB]$;
- on trace un arc de cercle de centre A et de rayon AC ;
- on trace un arc de cercle de centre B et de rayon BC ;
- le point C se situe à l'intersection des deux arcs de cercle.

Exercice d'application Tracer le triangle ABC tel que : $AB = 3{,}5$ cm ; $BC = 2{,}2$ cm et $CA = 3{,}2$ cm.

Correction



Trace écrite

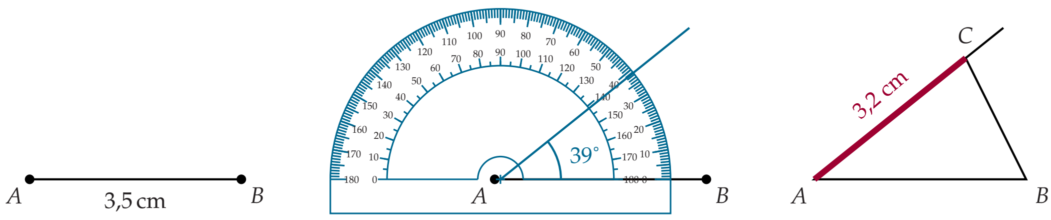
MÉTHODE 2 Construction d'un triangle connaissant deux longueurs et un angle

Pour construire un triangle ABC dont on connait la longueur de deux côtés ainsi que l'angle entre ces cotés :

- on trace à la règle graduée l'un des côtés donnés, par exemple $[AB]$;
- on trace au rapporteur l'angle donné à partir du segment tracé ;
- on trace à la règle graduée le deuxième segment de longueur donnée le long du support de l'angle tracé juste avant ;
- le point C se trouve à l'extrémité de ce segment.

Exercice d'application Tracer le triangle ABC tel que : $AB = 3{,}5\,\text{cm}$; $\widehat{BAC} = 39°$et $CA = 3{,}2\,\text{cm}$.

Correction



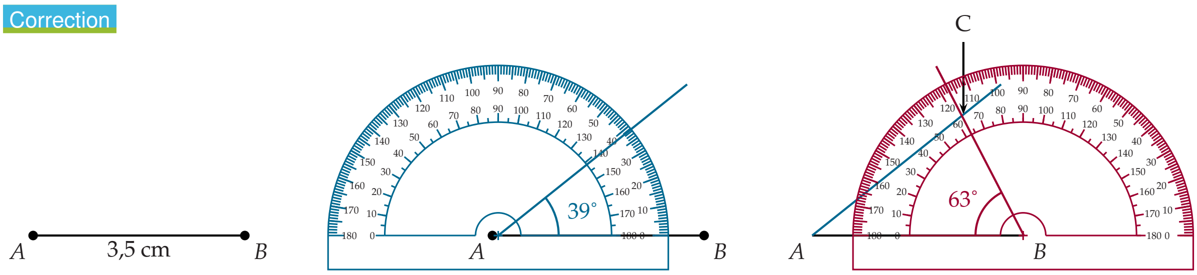
MÉTHODE 3 Construction d'un triangle connaissant une longueur et deux angles

Pour construire un triangle ABC dont on connait la longueur d'un côté ainsi que ses deux angles adjacents :

- on trace à la règle graduée le côté donné, par exemple $[AB]$;
- on trace au rapporteur les deux angles donnés à partir du segment tracé ;
- les deux demi-droites tracées grâce au rapporteur se coupent au point C.

Exercice d'application Tracer le triangle ABC tel que : $AB = 3{,}5\,\text{cm}$, $\widehat{BAC} = 39°$et $\widehat{ABC} = 63°$

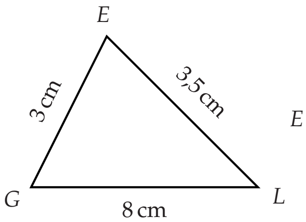
Correction

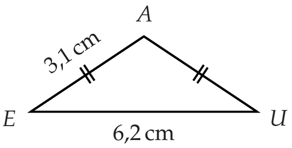


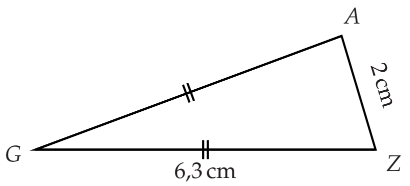
Remarque : pour chaque cas, on a deux choix de construction pour C, d'un côté ou de l'autre du segment.

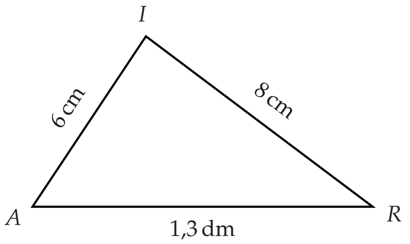
Inégalité triangulaire

1 Ces triangles sont-ils constructibles (ils ne sont pas tracés en vraie grandeur) ?









2 Choisir trois nombres du tableau (chacun une fois) correspondant aux longueurs des côtés d'un triangle :

1) non constructible ;
2) quelconque ;
3) isocèle ;
4) de périmètre 13 cm.

8 cm	5 cm	12 cm	2 cm
10 cm	12 cm	15 cm	10 cm
9 cm	3 cm	5 cm	7 cm

3 Le périmètre d'un triangle non aplati est de 18 cm. Ce triangle peut-il avoir un côté. . .

1) de 7 cm ?
2) de 4 cm ?
3) de 11 cm ?
4) de 9 cm ?

Justifier en donnant un exemple lorsque cela est possible ou en le prouvant dans le cas contraire.

Construction de triangles

4 Construire en vraie grandeur les deux triangles NOM et EDF suivants tels que :

1) $MN = 4{,}5$ cm, $MO = 7$ cm et $\widehat{NMO} = 48^\circ$.
2) $\widehat{FDE} = 45^\circ$, $DE = 8$ cm et $\widehat{FED} = 28^\circ$.

5 Après avoir effectué les calculs nécessaires, tracer chacun des triangles suivants en vraie grandeur.

1) EFG tel que $EF = 7{,}5$ cm, $\widehat{EFG} = 49^\circ$ et $\widehat{EGF} = 72^\circ$.
2) RST isocèle en S de périmètre 13 cm et $ST = 4$ cm.
3) OCI isocèle en I tel que $CO = 7$ cm et $\widehat{CIO} = 100^\circ$.

Défis

6 Kaoutar a trouvé un triangle sympa dont tous les angles ont pour mesure un entier pair : 44 °, 66 ° et 70 °.

1) Trouver un autre exemple de triangle dont les mesures d'angles sont paires.
2) En poursuivant ses recherches, elle a trouvé un triangle dont les mesures sont des multiples de trois : 45°, 51°et 84°. Trouve un autre exemple de triangle dont les mesures d'angles sont des multiples de trois.
3) Continuer les recherches en trouvant un triangle dont les mesures d'angles sont des multiples de quatre.
4) Cela est-il possible avec tous les nombres entiers ?

7 Rana veut tracer un triangle tel que son périmètre mesure 16 cm et deux de ses angles mesurent 64 ° et 46 °.

1) Calculer la mesure de son troisième angle.
2) Tracer un segment $[DE]$ mesurant 16 cm et placer le point A tel que $\widehat{ADE} = 32^\circ$ et $\widehat{AED} = 23^\circ$ qui sont les angles moitié de 64 ° et 46 °.
3) Placer un point B sur le segment $[DE]$ à égale distance de A et de D, puis un point C sur le segment $[DE]$ à égale distance de A et E.
4) Quelle est la nature des triangles ABD et ACE ?
5) Calculer la mesure des angles de ABD et de ACE.
6) Démontrer que le périmètre du triangle ABC vaut bien 16 cm.
7) Montrer que $\widehat{ABC} = 46^\circ$ et $\widehat{ACB} = 64^\circ$ puis conclure.

Source : Sesamath, le manuel 5e. Génération 5 - 2013

Récréation, énigmes

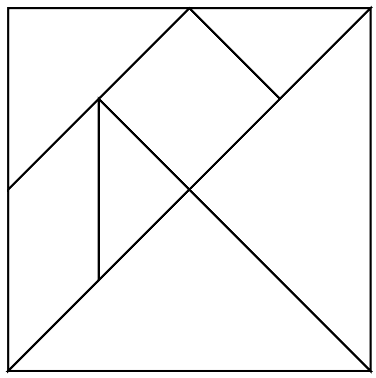
Le tangram

Partie A : histoire

Le jeu de tangram, appelé en chinois « qī qiǎo bǎn », prononcé *tzi tchiao pan*, « les sept plaques de l'habileté », semble avoir été inventé au début du XIXe siècle en Chine.
Ce jeu viendrait d'une légende qui dit qu'un empereur chinois du XVIe siècle du nom de *Tan*, fit tomber un carreau de faïence qui se brisa en 7 morceaux. Il n'arriva jamais à rassembler les morceaux pour reconstituer le carreau mais l'homme s'aperçut qu'avec les 7 pièces il était possible de créer de formes multiples.

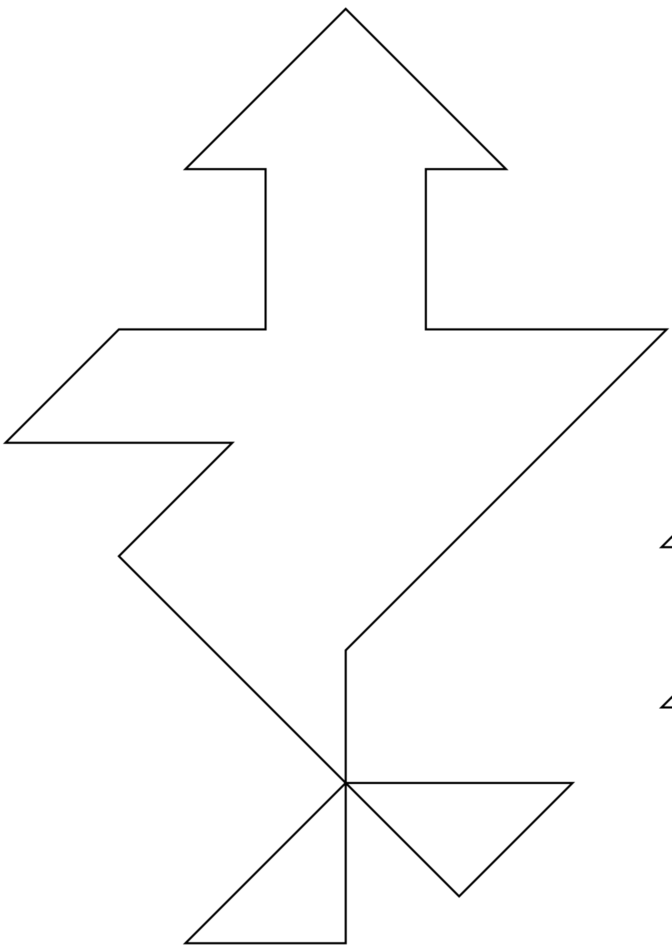
Partie B : le tangram carré

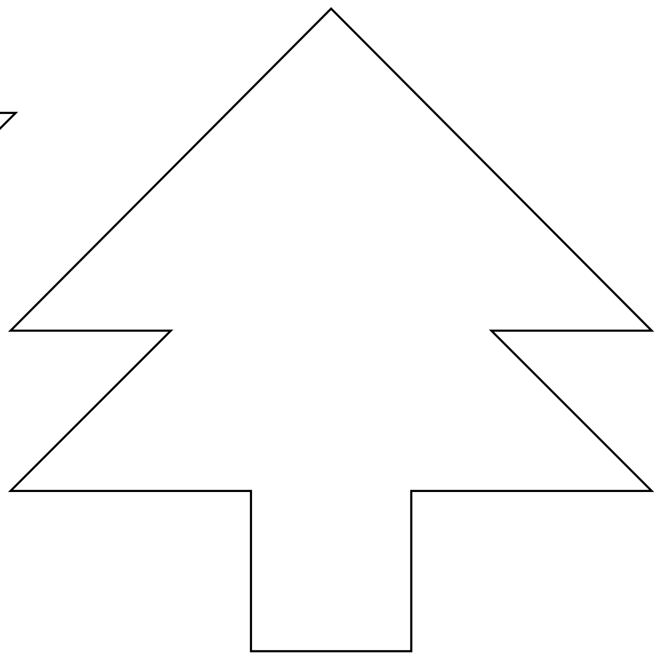
Voilà le tangram.
Donner la mesure de tous les angles présents sur la figure.
Matériel autorisé : équerre et compas.



Partie C : puzzles

Le bonhomme et le sapin sont deux formes constituées des sept pièces du tangram. Tracer le contour des formes à l'intérieur.
Matériel autorisé : règle non graduée et rapporteur.





Proportionnalité

Connaissances ♡ et compétences ♢ du cycle 4

- ♡ Coefficient de proportionnalité.
- ♢ Reconnaître une situation de proportionnalité ou de non-proportionnalité.
- ♢ Résoudre des problèmes utilisant la proportionnalité (pourcentages, échelles, réduction).

Défi : ces affreux pourcentages !

La notion de **pourcentage** est très importante dans la vie courante mais c'est un concept relativement mal compris ou mal utilisé, et on trouve régulièrement des erreurs dans les médias. Ces deux vidéos montrent des exemples de pourcentages erronés dans des journaux d'information.

%

Vidéos : **Consommation d'huile de palme** et **Facture d'électricité**, issues de journaux télévisés.

Cahier de compétences : chapitre 5, exercices 1 à 43.

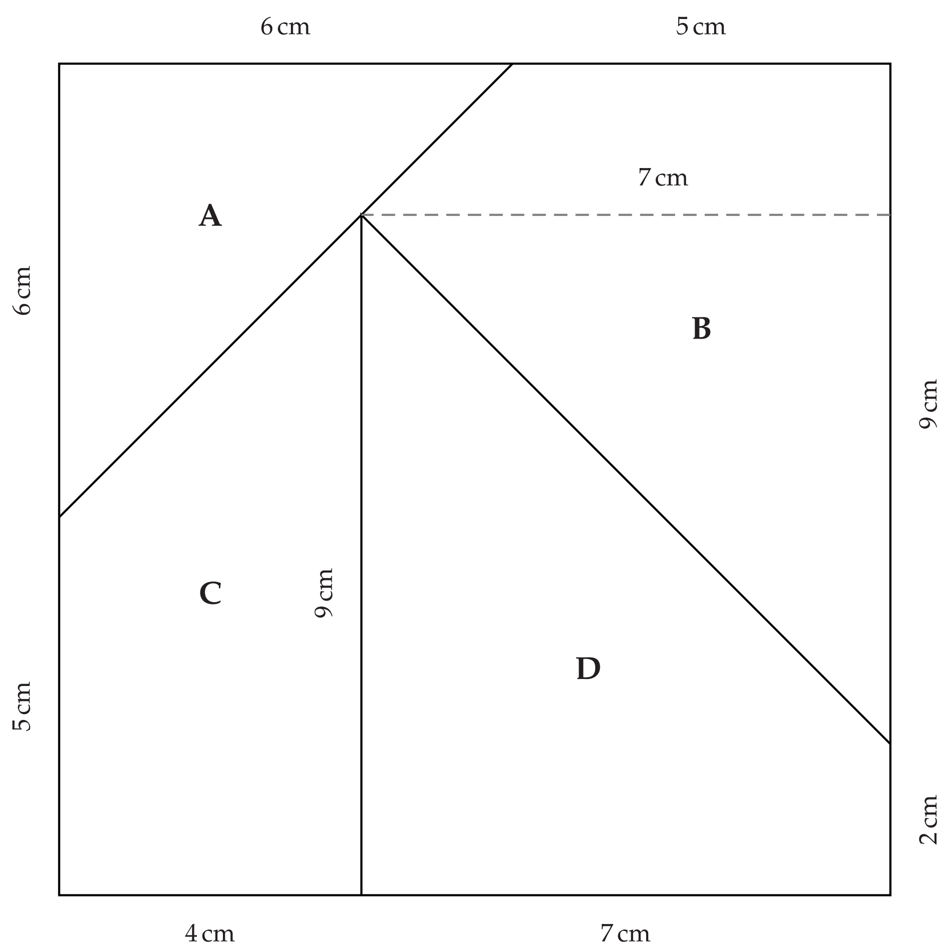
Activité d'approche

Le puzzle de Brousseau

Objectifs : mettre en œuvre un ou des moyens pour résoudre un problème d'agrandissement ; reproduire une figure géométrique en respectant des mesures ; rendre compte d'un travail en groupe.

Partie 1 : présentation du puzzle

Ci-dessous se trouve un puzzle composé de quatre pièces A, B, C et D dont les mesures sont indiquées sur la figure.



Partie 2 : travail demandé

Par groupes de quatre, vous allez devoir refaire le même puzzle mais en plus grand : il faudra s'accorder sur la procédure à adopter pour agrandir les éléments du puzzle, se répartir la construction des pièces en faisant les calculs individuellement puis assembler les morceaux pour reconstituer le puzzle agrandi.
Le compte-rendu de vos recherches sera présenté sous la forme d'une affiche par groupe.

C'est parti… le segment de 4 cm devra mesurer 5 cm sur votre puzzle agrandi.

1. Procédures de proportionnalité (rappels)

Si 4 stylos coûtent 10 €
combien coûtent 12 stylos ?

Linéarité additive
12 stylos = 4 stylos + 4 stylos + 4 stylos
coûtent 10 € + 10 € + 10 € = 30 €

Linéarité multiplicative
12 stylos = 3×4 stylos
coûtent 3×10 € = 30 €

Passage par l'unité
1 stylo coûte 4 fois moins cher :
10 € ÷ 4 = 2,5 €
12 stylos coûtent 12 fois plus cher :
$12 \times 2{,}5$ € = 30 €

Coefficient de proportionnalité
$4 \times \boxed{2{,}5} = 10$
le coefficient de proportionnalité vaut 2,5
$12 \times \boxed{2{,}5} = 30$
12 stylos coûtent 30 €

2. Reconnaître une situation de proportionnalité

MÉTHODE 1 Proportionnel ou pas ?

Pour reconnaître des grandeurs proportionnelles, on peut vérifier qu'il existe un coefficient de proportionnalité entre ces grandeurs.

Exercice d'application

- Le périmètre d'un cercle est-il proportionnel à son rayon ?
- L'aire d'un disque est-elle proportionnelle à son rayon ?

Correction

- On a $p = 2 \times \pi \times r = \boxed{2 \times \pi} \times r$.
  $2 \times \pi$ est un coefficient constant, le périmètre est donc bien proportionnel à son rayon.
- On a $A = \pi \times r^2 = \pi \times r \times r = \boxed{\pi \times r} \times r$.
  $\pi \times r$ varie en fonction de r, l'aire n'est donc pas proportionnelle à son rayon.

Exercice d'application Ces deux tableaux T_1 et T_2 sont-ils des tableaux de proportionnalité ?

T_1

10	22	30
12	26,4	36

T_2

10	22	30	45
12	26,4	36	56

Correction On calcule tous les quotients :

$\frac{12}{10} = 1{,}2$; $\frac{26{,}4}{22} = 1{,}2$; $\frac{36}{30} = 1{,}2$; $\frac{56}{45} \approx 1{,}24$.

- T_1 est un tableau de proportionnalité de coefficient de proportionnalité 1,2.
- T_2 n'est pas un tableau de proportionnalité car le dernier quotient n'est pas égal aux autres.

Trace écrite

3. Pourcentages, échelles

DÉFINITION

Le **pourcentage** d'une quantité est le nombre qui aurait été proportionnellement obtenu si la quantité avait été de 100.

Exemple

- Une promotion sur un jus de fruits indique que la contenance est de 1 L + 20 %.
  Quelle est la nouvelle contenance ?
- La contenance d'une bouteille d'eau est passée de 1,5 L à 1,75 L.
  Quel est le pourcentage d'augmentation ?

Correction

- Calcul de l'augmentation : $\frac{20}{100} \times 1\text{ L} = 0,2\text{ L}$.
  Calcul de la nouvelle contenance :
  $1\text{ L} + 0,2\text{ L} = 1,2\text{ L}$.
- Calcul de la différence entre les contenances :
  $1,75\text{ L} - 1,5\text{ L} = 0,25\text{ L}$.
  Calcul du pourcentage : $\frac{0,25\text{ L}}{1,5\text{ L}} \times 100 \approx 33\%$.

DÉFINITION

L'**échelle** d'une carte est le coefficient de proportionnalité entre la mesure réelle et sa mesure sur la carte, ces deux mesures étant exprimées dans la même unité.

Exemple Une carte au $1/2\,000^{e}$ signifie que 1 cm sur la carte représente 2 000 cm en réalité, soit 20 m. On note aussi 1 : 2 000.

Distance sur la carte en cm	1	2	10
Distance sur le terrain en m	20	40	200

Problèmes de proportionnalité

1 Ces situations sont-elles proportionnelles ? Justifier par un contre-exemple ou une preuve.

1) Taille en mètre en fonction de l'âge ?

2) Périmètre du carré en fonction de son côté ?

3) Aire du carré en fonction de son côté ?

4) Distance parcoure à vélo à vitesse constante en fonction du temps.

2 Compléter les tableaux de proportionnalité suivants.

× … ↑ ↓ × …

1	12	8	
		24	75

× … ↑ ↓ ÷5

			60
3	10	26	

3 Maïssae a pesé ses beignets et a trouvé que deux beignets pèsent 300 g et trois beignets pèsent 450 g.

1) Combien pèsent cinq beignets ?

2) Combien pèsent six beignets ?

3) Combien pèsent quatorze beignets ?

4 Un robinet qui fuit laisse échapper de façon continue trois litres d'eau en deux heures.

1) Quelle quantité d'eau se sera écoulée au bout d'une demi-journée ?

2) Quel temps s'est écoulé pour laisser s'échapper 51 L ?

3) L'eau est facturée 0,003 1 € le litre.
Quel sera le montant de la facture au bout d'un an ?

5 Trois poules pondent dix œufs en deux heures.

1) Combien de poules faudrait-il pour pondre cinq œufs en vingt minutes ?

2) Combien de temps mettraient neuf poules pour pondre vingt œufs ?

Source : d'après Les cahiers Sésamath 5e. Magnard-Sésamath 2017.

Pourcentages, échelles, vitesses…

6 Au collège de Rayhan, le foyer prend en charge 25 % du prix des voyages scolaires alors que dans celui de Bilal, le foyer donne 54 € pour un voyage de 180 € et l'aide est proportionnelle au coût du voyage.

1) Si Rayhan participe à un voyage qui coûte 230 €, quel montant est pris en charge par son foyer ?

2) En proportion, dans quel collège le foyer participe-t-il le plus au financement des voyages ?

7 Khaoula mélange deux verres contenant des boissons au sirop.

1) Les deux verres sont identiques. Dans l'un des verres il y a 3,5 % de sirop et dans l'autre 5 %.
Quel est le pourcentage de sirop dans le mélange ?

2) Le premier verre a une contenance de 20 cL et il y a 3,5 % de sirop. Le deuxième verre contient 10 cL de boisson dont 5 % de sirop.
Quel est le pourcentage de sirop dans le mélange ?

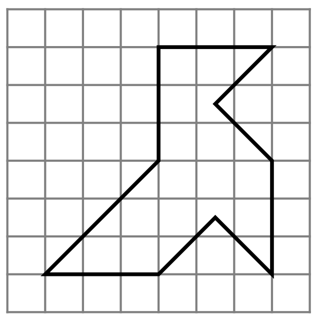
8 La vitesse moyenne de connexion ADSL est de 10 Mbit/s (Mbit = méga bit soit 1 000 000 bits).

1) Quelle est la durée de chargement d'un fichier de taille 786 Mbit ?

2) Calculer la taille d'un fichier qui s'est chargé en 5 minutes et 12 secondes.

3) Reprendre les questions avec une vitesse moyenne de connexion de la fibre optique qui est de 100 Mbits/s.

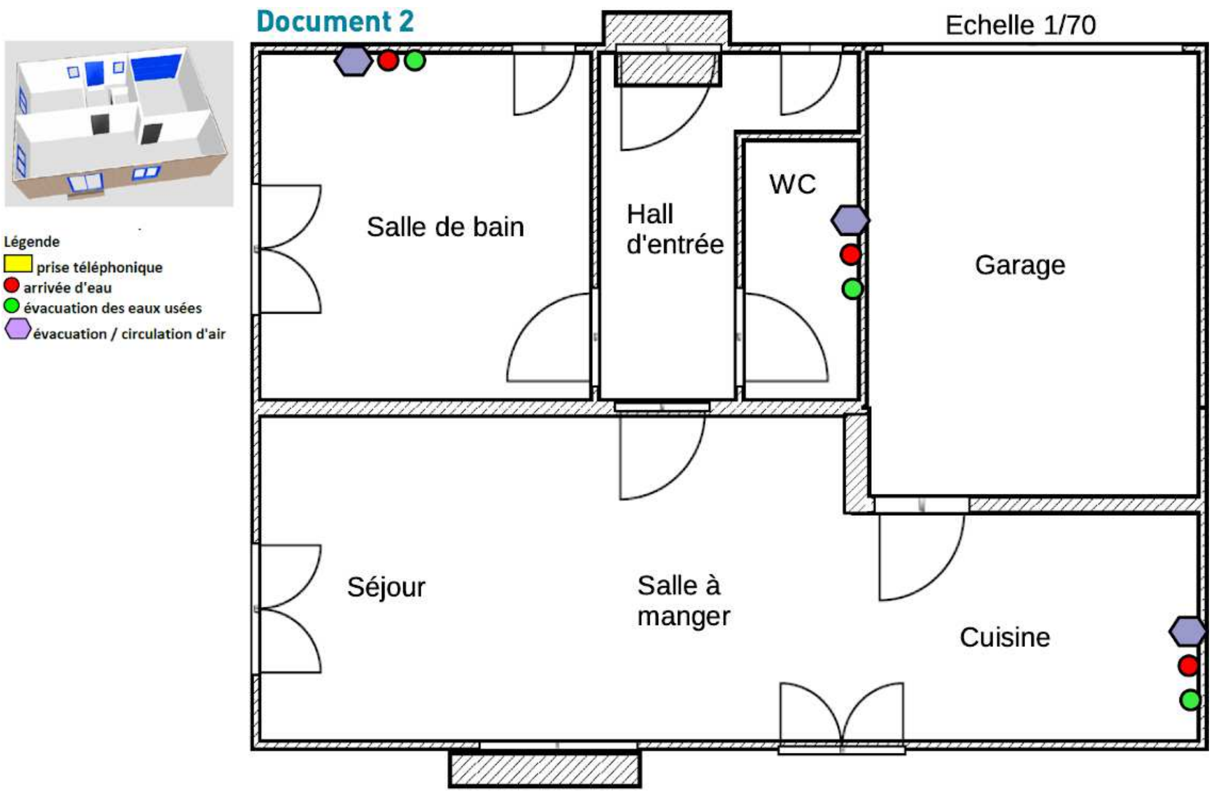
9 Reproduire sur le cahier la cocotte à l'échelle 1 : 2 puis à l'échelle 2 : 1.



Je rénove ma maison

Partie A : les documents

Lucie et Marc doivent poser le revêtement de sol dans leur pièce de vie principale (séjour, salle à manger et cuisine) de leur nouveau pavillon. Ils disposent d'une page de magazine (document 1) et du plan du rez-de-chaussée de leur pavillon (document 2).



Partie B : la tâche proposée

Ils veulent poser du carrelage dans la cuisine et du parquet dans le reste de la pièce. À l'aide des documents 1 et 2, aider Lucie et Marc à estimer le montant de leur facture.

Source : éduSCOL.education.fr/ressources-2016 - résoudre des problèmes de proportionnalité.

NOMBRES & CALCULS

17

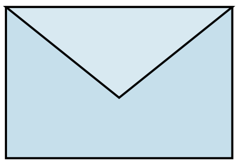
Distributivité simple

Connaissances ♡ et compétences ♢ du cycle 4

♢ Réduire des expressions algébriques dans des cas très simples.

Débat : polysémie du facteur

La **polysémie** est la caractéristique d'un mot ou d'une expression qui a plusieurs sens ou significations différentes. En mathématiques, on utilise régulièrement des mots qui n'ont pas forcément le même sens qu'en français par exemple.
Le mot **facteur** ne déroge pas à cette règle : étymologiquement, il vient du latin *factir*, celui qui fait. Le facteur que nous utilisons en mathématiques désigne un terme d'un produit, et le facteur que nous connaissons le mieux est certainement la personne distribuant le courrier. À l'origine, le facteur est un fabriquant d'instruments de musique. Enfin, le terme facteur s'utilise aussi en économie ou en biologie pour mentionner un élément important qui concourt à un résultat.



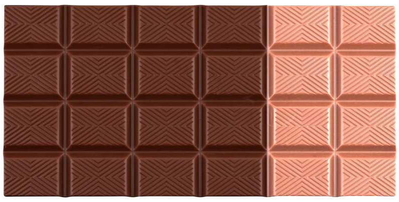
Vidéo : **Comprendre la simple distributivité**, chaîne YouTube de *Jean-Yves Labouche*.

Cahier de compétences : ∅.

Je veux du chocolat !

Objectifs : découvrir la distributivité simple pour réduire une expression littérale de la forme $ax + bx$ où a et b sont des nombres décimaux.

Un chocolatier expérimente une nouvelle tablette de chocolat pour son magasin : celle-ci est composée de rangées de chocolat dont le cacao vient de côte d'ivoire (CI) et d'un tout nouveau chocolat du Brésil (BR), un peu plus clair. Sa tablette représentée ci-dessous est composée de 64 g de chocolat CI et de 32 g de chocolat BR.



1) Il fait un premier test sur 20 tablettes de chocolat qu'il distribue à ses amis pour la tester.
Combien a-t-il besoin de chocolat en tout : trouver deux manières de calculer la masse des 20 tablettes et écrire les deux calculs *(aide : on peut utiliser des parenthèses dans l'un des calculs)*.

Calcul 1 : ____________________

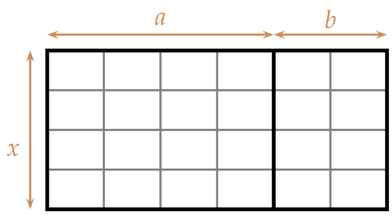
Calcul 2 : ____________________

2) Ses amis trouvent qu'il n'y a pas de chocolat BR, ils proposent donc un deuxième test sur 35 tablettes de chocolat, mais en utilisant cette fois-ci 56 g de chocolat CI et 40 g de chocolat BR.
Combien a-t-il besoin de chocolat en tout ?

Calcul 1 : ____________________

Calcul 2 : ____________________

3) Pour pouvoir effectuer ses calculs plus rapidement, il décide de trouver une formule littérale qui lui permette de calculer le nombre de carreaux de chocolat dont il aura besoin.



On note :

- a le nombre de rangées de chocolat CI ;
- b le nombre de rangées de chocolat BR ;
- x le nombre de lignes de chocolat.

a) Donner deux expressions algébriques permettant de calculer le nombre total de carreaux de chocolat.

Calcul 1 : ____________________

Calcul 2 : ____________________

b) Sachant que le nombre de carreaux est le même dans les deux expressions, écrire l'égalité qui résulte de ces deux calculs.

____

1. Distributivité simple

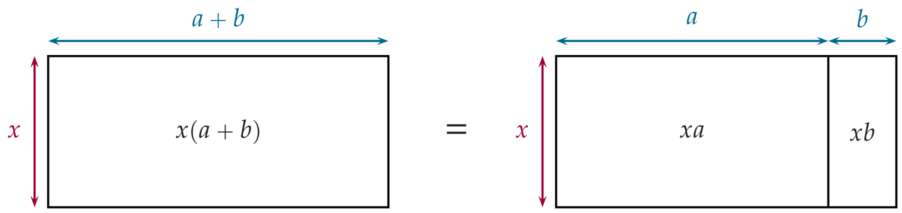
PROPRIÉTÉ

Le produit d'un nombre par une somme est égal à la somme des produits de ce nombre par chacun des termes de la somme :

$$x \times (a+b) = x \times a + x \times b \qquad \text{ou} \qquad x(a+b) = xa + xb$$

Le produit d'un nombre par une différence est égal à la différence des produits de ce nombre par chacun des termes de la différence :

$$x \times (a-b) = x \times a - x \times b \qquad \text{ou} \qquad x(a-b) = xa - xb$$



Exemple

Calculer en ligne $8 \times (12+7)$ et $17 \times (100-1)$.

Correction

- $8 \times (12+7) = 8 \times 12 + 8 \times 7 = 96 + 56 = 152$.
- $17 \times (100-1) = 17 \times 100 - 17 \times 1 = 1\,700 - 17 = 1\,683$.

2. Simplification d'écritures littérales

Par commutativité, on peut transformer la propriété de distributivité selon les quatre formes suivantes :

$\boxed{x(a+b) = xa + xb}$ $\boxed{(a+b)x = ax + bx}$ $\boxed{ax + bx = (a+b)x}$ $\boxed{xa + xb = x(a+b)}$

Ces différentes formes nous permettent de simplifier des écritures ou d'effectuer des calculs plus facilement.

Exemple

$13 \times 102 = 13 \times (100+2) = 13 \times 100 + 13 \times 2 = 1\,300 + 26 = 1\,326$.

$5x + 3x = (5+3)x = 8x$.

$18t - 5t = (18-5)t = 13t$.

factoriser

on a enlevé des parenthèses $$ax + bx = (a+b)x$$ on a mis des parenthèses

développer

Entraînement

Factoriser

1 Entourer le facteur commun de chaque expression, la factoriser puis calculer mentalement.

1) $83 \times 72 + 83 \times 28$
2) $36 \times 25 - 36 \times 5$
3) $98 \times 26 + 98 \times 4$
4) $16 \times 44 - 6 \times 44$

2 On considère l'expression suivante :
$A = 97 \times 27 + 3 \times 27$

1) En respectant les priorités opératoires, effectuer le calcul de A sans calculatrice.
2) Factoriser A puis calculer sa valeur toujours sans calculatrice.
3) Des questions 1) et 2), quelle est la méthode la plus simple pour calculer l'expression A ?
4) Calculer sans calculatrice $B = 1\,215 \times 47 - 47 \times 215$.

3 Factoriser chaque expression puis en donner une écriture simplifiée si nécessaire.

1) $A = 6 \times b + 6 \times d$
2) $B = 3 \times 4 + g \times 4$
3) $C = p \times 8 - p \times 4$
4) $D = s \times 7 - 4 \times 7$
5) $E = 6 \times a + z \times 6$
6) $F = k \times 5 + k \times t$

4 Faire apparaître un facteur commun puis factoriser l'expression.

1) $12 + 6a$
2) $24c + 12$
3) $3x - 15$
4) $21 - 7g$
5) $18b + 99c$
6) $7x - 14y$

5 Aurèle propose le programme de calcul suivant :

- Choisir un nombre.
- Calculer son double et son triple.
- Ajouter les deux nombres obtenus.
- Diviser le résultat par dix.

1) Appliquer ce programme de calcul en prenant comme nombre de départ 4 puis 15,4.
2) Appliquer ce programme de calcul avec un nombre de votre choix.
3) Quelle conjecture peut-on faire sur le résultat obtenu ?
4) Montrer que la remarque reste vraie quel que soit le nombre x de départ choisi.

Développer

6

1) Sans calculatrice, poser le calcul suivant :
$E = 33 \times 103$.
2) Décomposer le nombre 103 comme une somme de deux nombres simples.
3) Développer l'expression E et effectuer les calculs.
4) Quelle est la méthode la plus simple pour calculer l'expression E de tête ?

7 On donne : $197 \times 17 = 3\,349$ et $197 \times 4 = 788$.
Calculer les nombres suivants en proposant une décomposition qui utilise les égalités ci-dessus.

1) $A = 197 \times 21$
2) $B = 197 \times 13$
3) $C = 197 \times 34$
4) $D = 197 \times 12$

8 Développer chaque expression puis en donner une écriture simplifiée.

1) $A = 5 \times (a + 9)$
2) $B = 3 \times (10 + b)$
3) $C = (11 + c) \times 7$
4) $D = 2 \times (a - 4)$
5) $E = (9{,}3 - c) \times 5$
6) $F = 4 \times (a + b)$

9 Millie propose le programme de calcul suivant :

- Choisir un nombre.
- Calculer son triple.
- Ajouter 5
- Doubler le résultat obtenu.

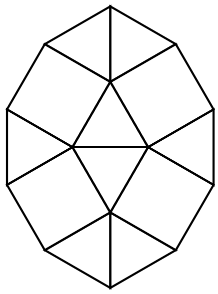
1) Appliquer ce programme de calcul en prenant comme nombre de départ 4 puis 1,5.
2) Effectuer ce programme pour un nombre x de départ et écrire une expression simplifiée du résultat en fonction de x.
3) Utiliser cette expression pour calculer le résultat obtenu à partir du nombre $\frac{7}{2}$ puis du nombre 0.

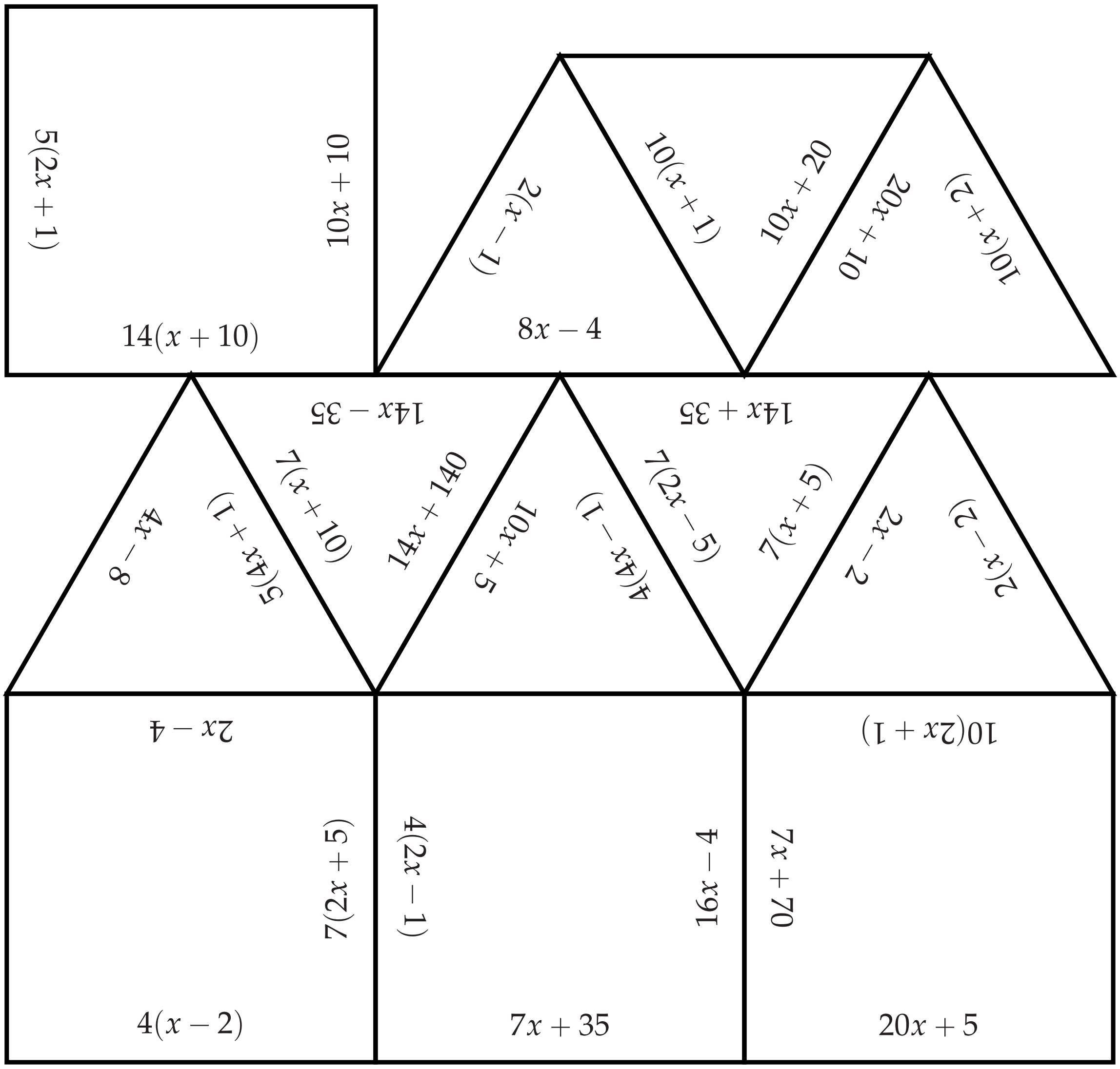
Source : d'après Les cahiers Sésamath 5e. Magnard-Sésamath 2017.

Un diamant algébrique

Découper les douze pièces du puzzle et les assembler de telle sorte que les expressions face à face soient égales. Coller le puzzle sur votre cahier.

La forme à obtenir est celle ci-contre.





Source : monclasseurdemaths.fr

ESPACE &
GÉOMÉTRIE

18

Reconnaître des solides

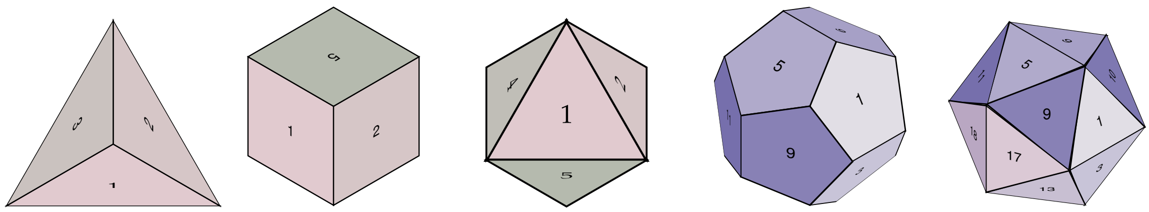
Connaissances ♡ et compétences ♢ du cycle 4

♡ Reconnaître des solides : cube, pavé droit, prisme, cylindre, pyramide, cône et boule.

Débat : les solides de Platon

Parmi les *solides* de l'espace, il en est une sorte qui a été étudiée par le philosophe grec **Platon** (-425; -348) : les polyèdres réguliers et convexes. Ce dernier associe chacun des quatre éléments physiques avec un solide régulier.

- la Terre est associée au *cube* : ces petits solides font de la poussière lorsqu'ils sont émiettés et se cassent lorsqu'on s'en saisit ;
- l'air est associé à l'*octaèdre* : ses composants minuscules sont si doux qu'on peut à peine les sentir ;
- l'eau est associée à l'*icosaèdre* : elle s'échappe de la main lorsqu'on la saisit comme si elle était constituée de petites boules minuscules ;
- le feu est associé au *tétraèdre* car la chaleur du feu semble pointue comme un poignard ;
- le *dodécaèdre* est mis en correspondance avec le tout, parce que c'est le solide qui ressemble le plus à la sphère.



Vidéo : **Les 5 solides de Platon**, chaîne YouTube *Micmaths* de *Mickaël Launay*.

Cahier de compétences : chapitre 12, exercices 1 à 3.

Activité d'approche

Les polydrons

Objectifs : construire des solides fermés ; trier des solides selon leur forme.

Les Polydrons sont des polygones en plastique dur qui peuvent se fixer entre eux à l'aide de charnières.
Ce matériel permet de construire facilement des polyèdres et des patrons.

Partie 1 : construction de solides

1) Citer les différentes formes de Polydrons en précisant leur nature exacte.

---

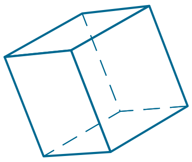
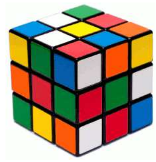
2) Construire un premier solide, donner son nom si possible et le dessiner.

3) Construire d'autres solides en essayant de varier les formes.

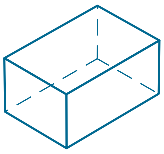
Partie 2 : classement des solides

1) En regroupant tous les solides de la classe, déterminer un classement commun, discuter des choix.
2) Citer les classes choisies en expliquant leurs caractéristiques.

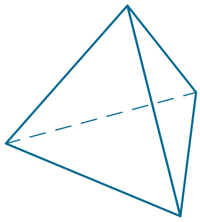
Les polyèdres

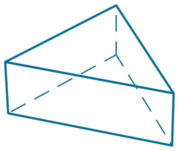
Cube : cas particulier du pavé droit lorsque toutes les faces sont carrées




Parallélépipède ou pavé : du grec *parallelos*, parallèle et *epidon*, surface. Cas particulier du prisme droit lorsque la base est un rectangle



Pyramide : une base polygonale, un sommet, des faces latérales triangulaires, qui sont isocèles et superposables si la pyramide est régulière




Prisme : du grec *prismatos*, scié. Deux bases polygonales, des faces latérales qui sont des parallélogrammes, rectangles si le prisme est droit

prismes

pyramides

Les solides du collège

cylindres

cônes

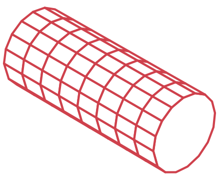
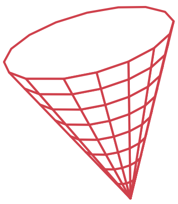
boules

Les solides non polyédriques

Cylindre : du grec *kulindros*, rouleau. Deux bases en forme de disques, une surface latérale

Cône : du grec *kônos*, pomme de pain. Une base en forme de disque, une surface latérale, un sommet

La **sphère** : du grec *sphaîra*, corps rond, est la surface extérieure de la **boule**




Entraînement

Classer et reconnaître des solides

1 On considère les catégories de solides suivants que l'on peut trouver dans la vie courante :

A. Différentes boites parallélépipédiques et cubiques.
B. Des prismes droits à bases triangulaires (Toblerone) ou octogonales.
C. Une pyramide à base carrée tronquée (boite de fromage de chèvre).
D. Des cylindres (boîtes de conserve diverses, boîte de camembert, rouleau de papier d'aluminium).
E. Des cônes.
F. Des boules (balles, ballons).
G. D'autres emballages (formes ovales, anneaux, boîtes en forme de cœur...).

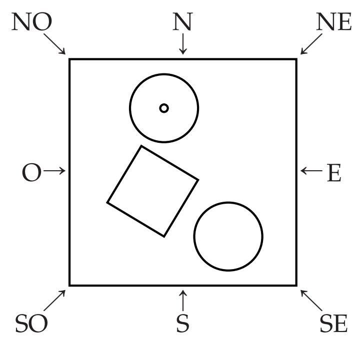
1) Classer ces sept catégories selon leur caractère polyédrique ou non
2) Pourquoi, en cours de maths, faut-il s'intéresser uniquement aux formes des boites d'emballages ?
3) Quelle est la particularité du rouleau de papier d'aluminium ?
4) Des classes ont proposé les classements suivants :

5e1	5e2
A, B et C	A, B et D
F	C et E
G	F et G

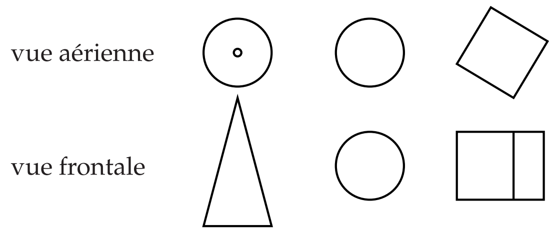
Quels ont pu être leurs critères de classement ?
5) On propose la définition suivante pour déterminer un polyèdre : « solide qui ne roule pas » et pour un non polyèdre : « solide qui roule ».
Ces définition vous paraissent-elles pertinentes ?

2 On dispose de trois objets sur une table : un cône, un cube et une sphère. On a également des représentations de ces solides selon des points de vue différents.

Vue de la table du dessus :

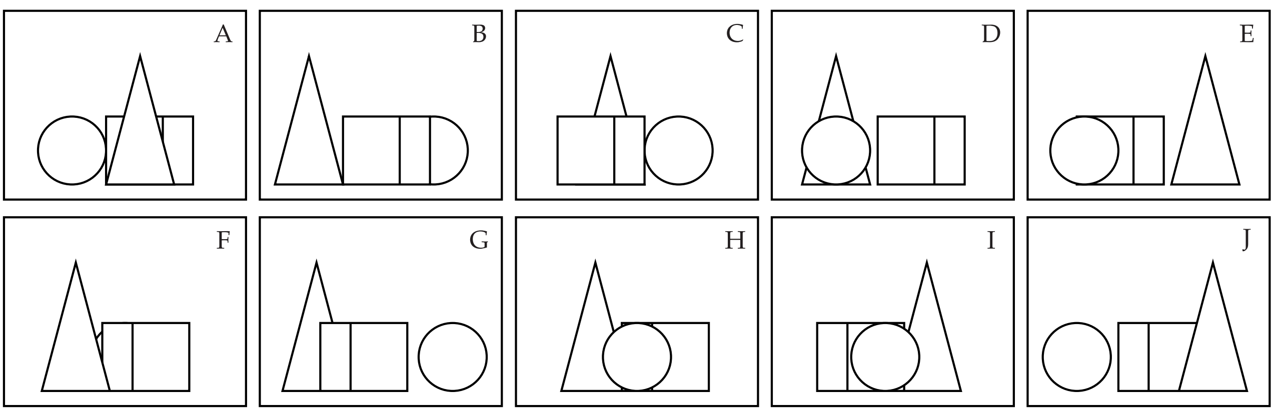


Solides en vue du dessus et de face :



Les images ci-dessous représentent des vues, selon divers axes de visée. Déterminer le point de vue de chaque image (attention, certaines images correspondent à aucune configuration !).

N	NE	E	SE	S	SO	O	NO



La relation d'Euler [1]

On a reproduit page suivante une représentation en perspective cavalière de neuf solides. Pour chacun de ces solides, effectuer les actions suivantes à l'aide du tableau ci-dessous :

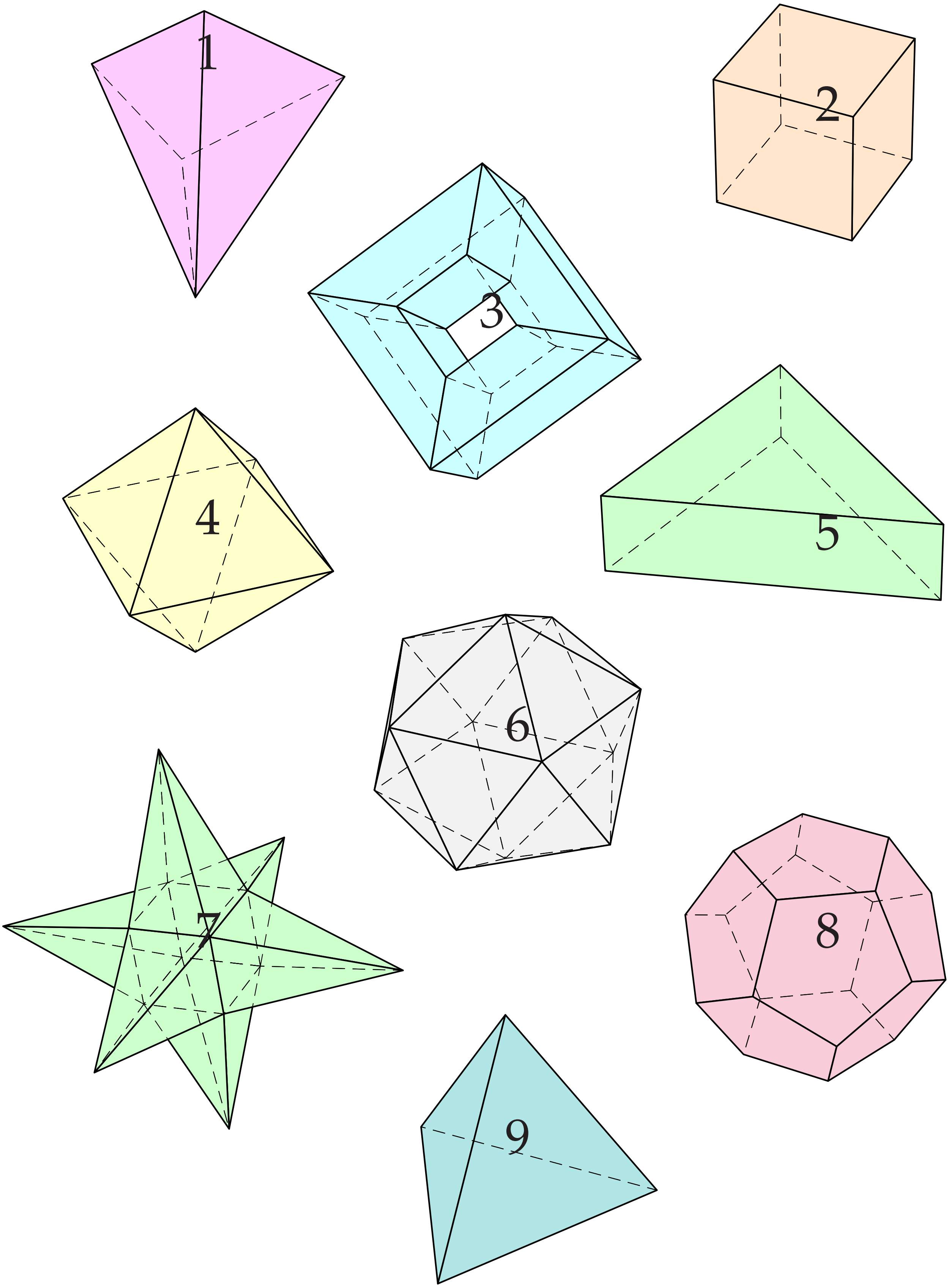
- retrouver son nom dans le tableau (indiquer le numéro n) ;
- trouver le nombre de faces F ;
- trouver le nombre de sommets S ;
- trouver le nombre d'arrêtes A ;
- calculer la valeur de $F + S - A$, que remarque-t-on ?
- dire si le solide est régulier, c'est-à-dire si toutes ses faces sont identiques et régulières, et tous les angles du solide sont identiques ;
- dire si le solide est convexe, c'est-à-dire s'il n'a pas de « creux » ou de trou ;
- enfin, dire s'il s'agit d'un solide de Platon (polyèdre régulier et convexe).

Nom du solide	n	F	S	A	F + S − A	est-il régulier ?	est-il convexe ?	solide de Platon ?
Tétraèdre								
Polyèdre étoilé								
Octaèdre								
Pyramide								
Icosaèdre								
Prisme								
Cube								
Beignoïde								
Dodécaèdre								

Source : d'après une activité parue dans la revue Envol. n°129, octobre-novembre-décembre 2004.

1. Leonhard Euler, né le 15 avril 1707 à Bâle (Suisse) et mort à 76 ans le 7 septembre 1783 à Saint-Pétersbourg (Empire russe), est un mathématicien et physicien suisse.

Récréation, énigmes



GRANDEURS & MESURES

19

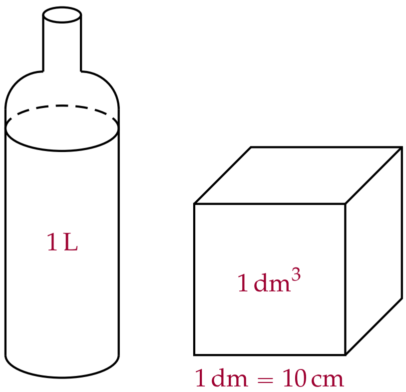
Volumes et capacités

Connaissances ♡ et compétences ◇ du cycle 4

- ♡ Calculer le volume d'un prisme, d'un cylindre.
- ♡ Correspondance entre volume et contenance : $1\,\text{L} = 1\,\text{dm}^3$ et $1\,000\,\text{L} = 1\,\text{m}^3$.
- ◇ Mener des calculs impliquant des grandeurs mesurables, notamment des grandeurs composées, exprimer les résultats dans les unités adaptées.
- ◇ Vérifier le cohérence des résultats au niveau des unités.
- ◇ Effectuer des conversions d'unités de volumes.

Débat : $1\,\text{L} = 1\,\text{dm}^3$

Cette correspondance est à connaître. Pourtant, elle ne paraît pas si naturelle que cela : elle signifie que l'eau contenue dans une bouteille d'un litre remplirait exactement un cube de 1 dm de côté.



Vidéo : **Correspondance entre unités de volume et de contenance**, chaîne YouTube de *Jean-Charles Toussaint*.

Cahier de compétences : chapitre 12, exercices 24 à 42.

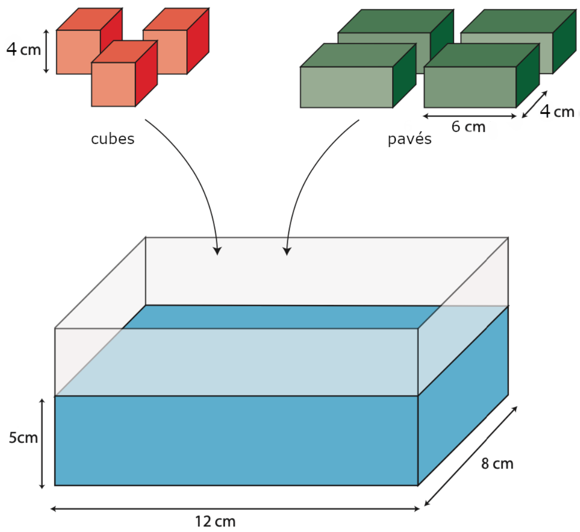
Activité d'approche

Des pavés de toutes sortes

Objectifs : calculer le volume d'un pavé ; différencier volume et capacité ; résoudre un problème dans le domaine des grandeurs et mesures.

Partie 1 : observations

Quelle action est matérialisée par le schéma suivant ?



Partie 2 : questions

1) Quel est le volume d'eau en cm^3 contenu dans la boite transparente ?

----

2) Quelle est la capacité d'eau en L contenue dans la boite transparente ?

----

3) Dans la bassine, on plonge trois cubes et quatre pavés. Quelle doit être la hauteur des pavés pour que l'eau monte de 4 cm ?

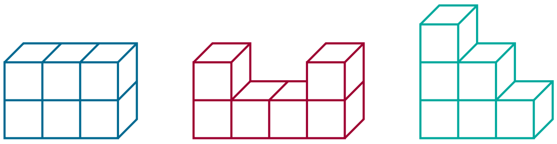
Source : d'après l'activité Des pavés dans la mare, IREM Paris Nord.

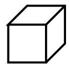
1. Volume par dénombrement

DÉFINITION

Le **volume** est une grandeur physique qui mesure l'espace occupé par celui-ci.

Exemple Ces trois objets n'ont pas la même forme mais occupent la même quantité d'espace, ils ont donc le même volume.



Si l'unité de volume est un cube  le volume de ces trois solides est de 6 unités de volume.

Il existe deux unités en dimension 3 : les unités de volumes en « cube » et les unités de capacité en « litre ».

DÉFINITION

- Lorsque l'unité de volume est un cube de 1 m d'arête, cela représente 1 m^3.
- Le **litre** (L) est une unité de capacité valant 1 dm^3. On a alors 1 L = 1 dm^3 et 1 000 L = 1 m^3.

Pour effectuer un changement d'unité de volume, on reprend les même préfixes que pour les changements de longueur, et on impose pour chacun d'eux trois colonnes au tableau.

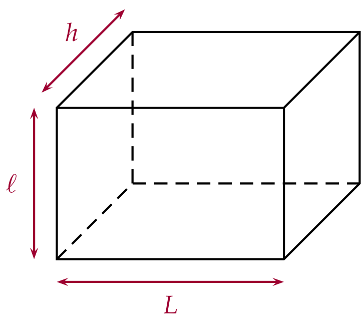
km^3			hm^3			dam^3			m^3			dm^3			cm^3			mm^3		
							2	1	0	9	2	8	0	1	5					

Ainsi, pour convertir d'une unité à l'autre ; on multiplie ou on divise par 1 000, 1 000 000. . .

Exemple 21,092 801 5 dam^3 = 21 092,801 5 m^3 = 21 092 801,5 dm^3 = 21 092 801 500 cm^3.

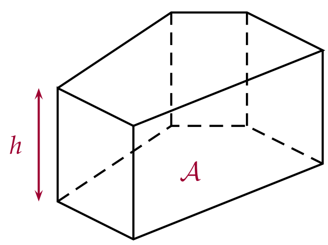
2. Volumes classiques

Le pavé droit : $\mathcal{V} = L \times \ell \times h$



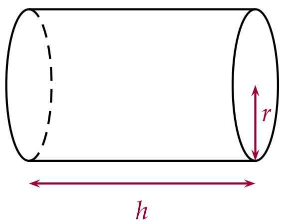
Le **cube** de côté c est un cas particulier avec $L = \ell = h = c$: $\mathcal{V} = c^3$

Le prisme : $\mathcal{V} = \mathcal{A} \times h$



$\mathcal{A}$ est l'aire d'une base, h la hauteur du prisme.

Le cylindre : $\mathcal{V} = \pi \times r^2 \times h$

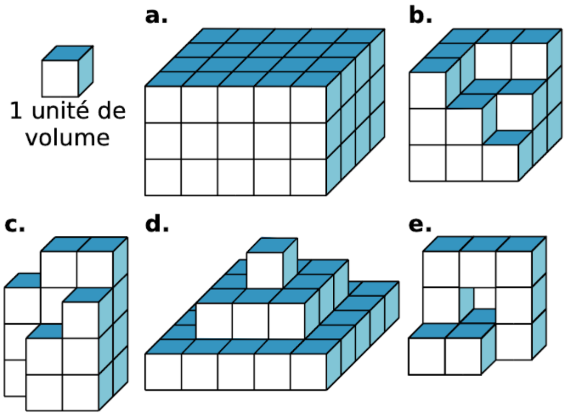


h est la hauteur du cylindre, r est le rayon du disque de base.

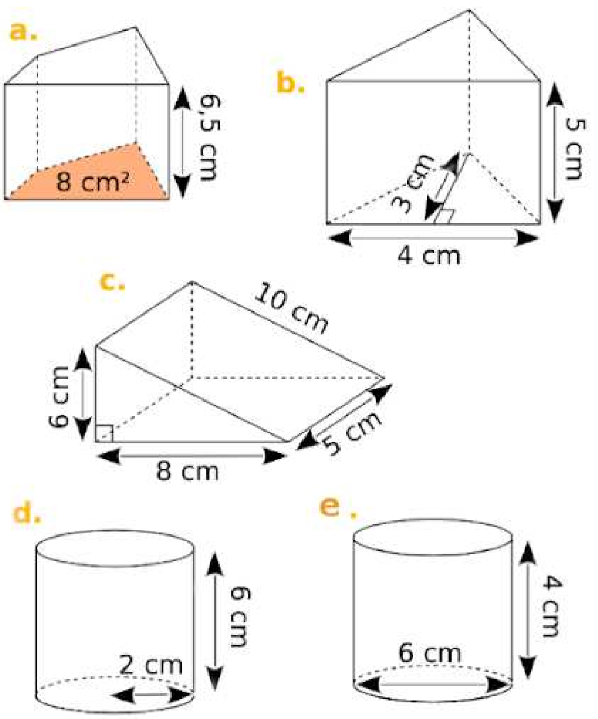
Entraînement

Calcul de volumes

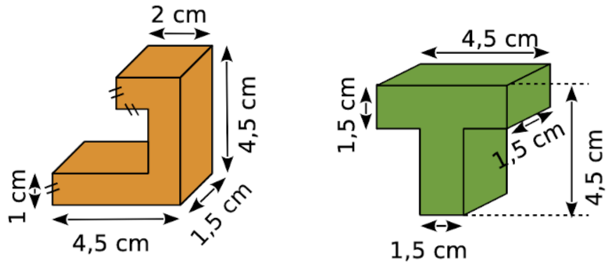
1 Donner le volume de chaque solide en unités de volume (les volumes sont supposés pleins).



2 Dans chacune des figures suivantes, colorier une base en jaune, repasser une hauteur en rouge puis calculer le volume.



3 Les figures colonne suivante représentent deux pièces d'un jeu. Comparer leur volume.



Volumes et capacités : problèmes

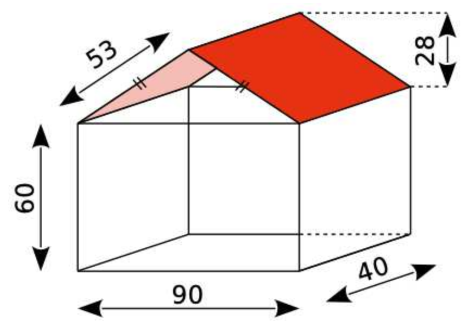
4 Pour un chantier, un maçon doit construire quatre colonnes en béton de forme cylindrique, de 50 cm de rayon et de 4 m de hauteur.

1) Quel est le volume total des colonnes ?
2) Pour 1 m^3 de béton, il faut 400 kg de ciment, 460 L de sable, 780 L de gravillons et 200 L d'eau.
   Donner la quantité de ciment, de sable, de gravillons et d'eau nécessaire pour les quatre colonnes.

5 Ilia dispose de deux seaux d'exactement 3 litres et 5 litres. Chaque seau a une forme cylindrique et l'aire de leur base est de 200 cm^2.

1) Calcule la hauteur de chacun de ces seaux.
2) Comment va procéder Ilia pour obtenir 4 L en utilisant uniquement ses seaux de 3 L et 5 L ?

6 Voici la représentation en perspective cavalière d'une maison de poupée dont les longueurs sont exprimées en centimètres.



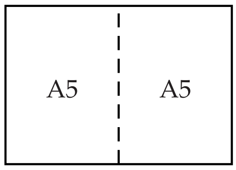
1) Calculer la surface de bois nécessaire pour réaliser le modèle de la maison.
2) Sachant que le contre-plaqué choisi coûte 28,90 € le m^2, calculer le montant de sa dépense.
3) Calculer, au dm^3 près, le volume de la maison.

Source : D'après Les cahiers Sésamath 5e. Magnard-Sesamath 2017

Format A5 et cylindres

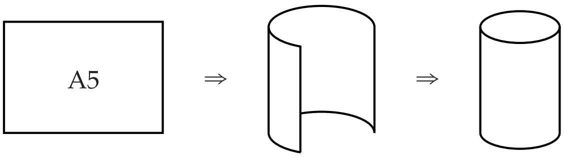
Partie A : construction de cylindres

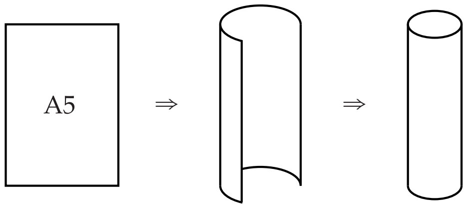
1) Découper une feuille au format A4 suivant sa médiane la plus courte afin d'obtenir deux feuilles au format A5.



2) Rouler la première feuille dans le sens de la longueur pour former un premier cylindre.

3) Rouler la deuxième feuille dans le sens de la largeur pour former un deuxième cylindre.





4) À votre avis, ces cylindres ont-il le même volume ? Si non, quel est celui qui semble avoir le volume le plus grand ? ____________________

Partie B : calcul du volume

5) Rappeler les dimensions d'une feuille au format A4. En déduire les dimensions d'une feuille au format A5.

____

6) Premier cylindre.

a) Donner la mesure de la hauteur du cylindre. ____________________

b) Que vaut le périmètre du disque de base du cylindre ? En déduire son rayon.

____

c) Calculer alors le volume du premier cylindre.

____

7) Deuxième cylindre.

a) Donner la mesure de la hauteur du cylindre. ____________________

b) Que vaut le périmètre du disque de base du cylindre ? En déduire son rayon.

____

c) Calculer alors le volume du deuxième cylindre.

____

8) Conclusion : ____________________

NOMBRES & CALCULS

20

Somme et différence de nombres relatifs

Connaissances ♡ et compétences ♢ du cycle 4

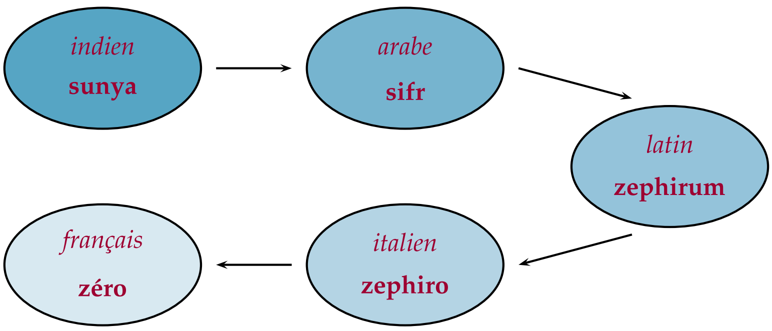
♡ Somme et différence de nombres décimaux.

♢ Calculer avec des nombres décimaux relatifs.

Débat : Brahmagupta et l'invention du 0

Brahmagupta est un mathématicien indien né en 598. Dans l'un de ses ouvrages, le *Brahma Sphuta Siddhanta*, il présente les règles d'arithmétique qui concernant les nombres positifs (qu'il appelle les biens) et les nombres négatifs (qu'il appelle les dettes) par des calculs de pertes et de profits. Il définit ainsi le zéro comme la différence d'un nombre par lui-même. Par exemple, voilà comment il exprime les opérations usuelles :

- zéro soustrait d'une dette est une dette ;
- zéro soustrait d'un bien est un bien ;
- zéro soustrait de zéro est zéro ;
- une dette soustraite de zéro est un bien ;
- un bien soustrait de zéro est une dette.



Vidéo : **Les nombres négatifs**, site Internet *Le blob*, épisode de la série *Petits contes mathématiques*.

Cahier de compétences : chapitre 3, exercices 24 à 47.

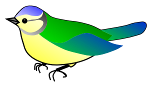
Activité d'approche

La pêche mystérieuse

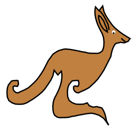
Objectif : effectuer des additions et des soustractions avec des nombres entiers relatifs.

Sept amis jouent à la fête foraine au jeu de la pêche mystérieuse, ils gagnent ou il perdent des points selon les objets qu'ils « pêchent ». Voilà les points qu'ils peuvent gagner :

Billy
+150 points

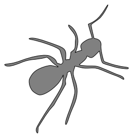


Birdy
+100 points

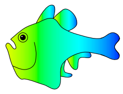


Skippy
+50 points

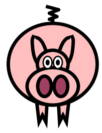
Cependant, certains objets font perdre des points :



Antas
-25 points

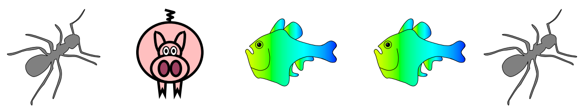
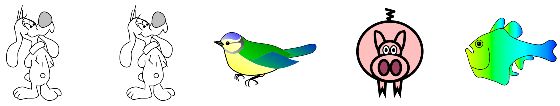
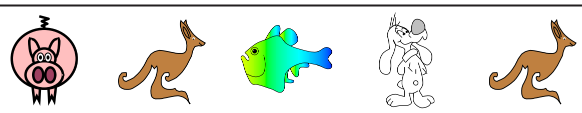
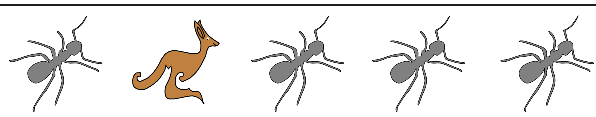
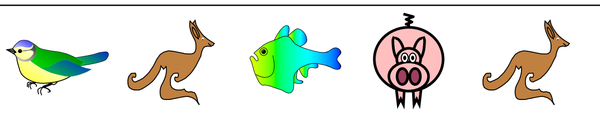
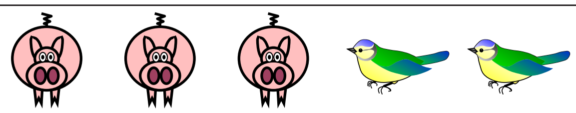


Fishas
-75 points



Pigas
-125 points

Compléter le tableau suivant des gains et des pertes. En déduire le total, puis le classement.

Pêche	Gains	Pertes	Total
Smaïl 			
Houda 			
Zakaria 			
Ikram 			
Adrien 			
Hajar 			
Bilal 			

Classement : ____

Trace écrite

1. Additionner deux nombres relatifs

MÉTHODE 1 Somme de deux nombres relatifs

- La somme de deux nombres relatifs ayant **le même signe** s'obtient en ajoutant les distances à 0 et en mettant le même signe que les nombres.
- La somme de deux nombres relatifs n'ayant **pas le même signe** s'obtient en calculant la différence entre les distances à 0 et en mettant le signe du terme ayant la plus grande distance à 0.

Exercice d'application Même signe :

$A = (+3) + (+7)$

$B = (-12) + (-5)$

Correction Le signe devant 3 et 7 est $+$, on additionne donc 3 et 7 et on met le signe $+$: $A = +10$.
On peut écrire $A = +(3+7) = +10 = 10$.
Le signe devant 12 et 5 est $-$, on additionne donc 12 et 5 et on met le signe $-$: $B = -17$.
On peut écrire $B = -(12+5) = -17$.

Exercice d'application Signes différents :

$C = (-7) + (+3)$

$D = (+12) + (-5)$

Correction Le signe devant 7 est $-$ et celui devant 3 est $+$, on effectue donc la différence entre 3 et 7 et on met le signe $-$: $C = -(7-3) = -4$.
Le signe devant 12 est $+$ et celui devant 5 est $-$, on effectue donc la différence entre 5 et 12 et on met le signe $+$: $D = +(12-5) = +7 = 7$.

PROPRIÉTÉ

La somme de deux nombres opposés vaut 0.

Exemple $E = (+2\,022) + (-2\,022) = (-2\,022) + (+2\,022) = 2\,022 - 2\,022 = 0$.

2. Soustraire deux nombres relatifs

PROPRIÉTÉ

Soustraire un nombre revient à ajouter son opposé : $a - b = a + (-b)$.

Exemple
Calculer $F = (+15,3) - (-5,1)$
et $G = (+2,4) - (+1,3)$

Correction
$F = (+15,3) + (+5,1) = +(15,3+5,1) = +20,4 = 20,4$
$G = (+2,4) + (-1,3) = +(2,4-1,3) = +1,1 = 1,1$

MÉTHODE 2 Simplification d'expressions

Pour **simplifier** les écritures dans les opérations :
- on transforme chaque soustraction en addition de l'opposé ;
- on écrit l'expression en enlevant les parenthèses et les signes $+$ devant les nombres ;
- on peut éventuellement regrouper les termes de même signe afin de les calculer ensemble.

Exercice d'application $H = (+1,2) + (+3,4) + (-1,5) - (+2,7) - (-5,7)$.

Correction $H = (+1,2) + (+3,4) + (-1,5) + (-2,7) + (+5,7) = 1,2 + 3,4 - 1,5 - 2,7 + 5,7$
$H = (1,2 + 3,4 + 5,7) - (1,5 + 2,7) = 10,3 - 4,2 = 6,1$.

Entraînement

Additions et/ou soustractions

1 Effectuer les calculs suivants :

1) $A = (-12) + (-15)$
2) $B = (-20) + (+18)$
3) $C = (+21) + (-21)$
4) $D = (+10) + (-13)$
5) $E = (-3) + (+16)$
6) $F = (+13) + (+7)$
7) $G = (+2,1) + (+0,8)$
8) $H = (-1,5) + (-0,1)$

2 Pour chaque cas, transformer la soustraction en addition puis effectuer le calcul.

1) $A = (-12) - (+15)$
2) $B = (-45) - (-41)$
3) $C = (+32) - (+27)$
4) $D = (-2,6) - (+2,7)$
5) $E = (-1,4) - (-2,3)$

3 Effectuer les calculs suivants en simplifiant.

1) $A = (+12) + (-11) + (+25) + (-17)$
2) $B = (-2,1) + (-9) + (+6,4) + (-8,3)$
3) $C = (+14) + (-7) + (+2) + (-3,75) + (-5,25)$
4) $D = (+13,5) + (-8,1) + (-6,9) + (-5,5)$
5) $E = (-7) + (+1) - (-10)$

4 Pour chaque expression, regrouper astucieusement puis calculer.

1) $A = -14 + 5 - 2$
2) $B = -2 - 23 + 33$
3) $C = 18 - 7 + 9 - 18 - 9 + 7$
4) $D = 6,4 + 11,5 - 3,4 + 0,5$
5) $E = 13,36 + 4 + 6 - 3,36$

Problèmes et défis

5 Dans le monde entier, les heures locales sont fixées par rapport à l'heure universelle (UT). Paris est à UT, New York est à UT -6 h et New Delhi est à UT $+4$ h 30.

1) François, qui est à Paris, appelle à New York à 20 h et téléphone pendant trois quarts d'heure. Quelle heure est-il à New York à la fin de l'appel ?
2) Après ce coup de téléphone, François peut-il raisonnablement appeler à New Delhi ?

D'après Les cahiers Sésamath 5e. Magnard-Sesamath 2017

6 Dans un QCM de dix questions, une réponse juste rapporte 4 points, une absence de réponse 0 point et une mauvaise réponse enlève 3 points.

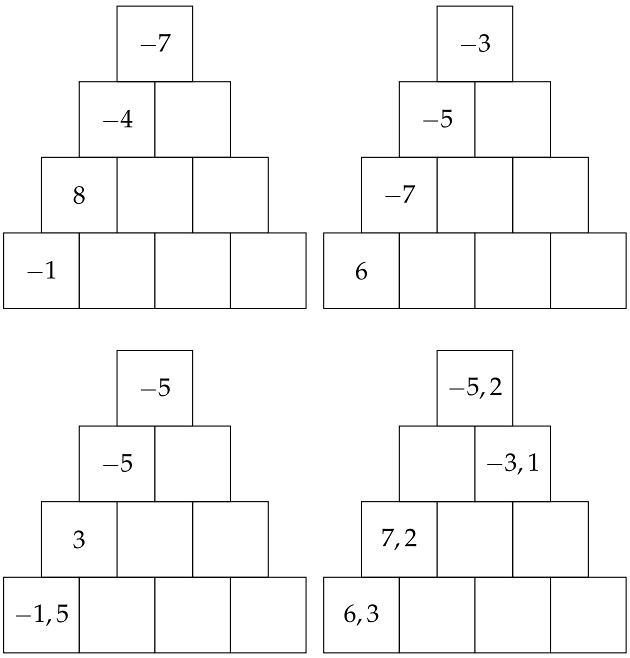
1) Mohamed-Amine a 2 bonnes réponses et 8 mauvaises. Quelle est sa note ?
2) Quelle est la plus mauvaise note qu'il est possible d'obtenir à ce QCM ? La meilleure note ?
3) Emma a obtenu 14 points. Donner une combinaison possible pour obtenir ce résultat.

7 Voici un programme de calcul :

Choisir un nombre. Ajouter -3. Retirer $-1,5$. Donner l'opposé du résultat.

1) Appliquer ce programme au nombre $-2,5$ puis 0.
2) Quel nombre faut-il choisir pour obtenir 6 ?
3) Soit x le nombre de départ, donner l'expression finale en fonction de x.

8 Compléter les pyramides suivantes sachant que chaque nombre est la somme des nombres se trouvant dans les deux cases juste en dessous.



Décryptage

Décrypter les codes suivants utilisé par l'agent Zérozérossette sachant que chaque symbole correspond à un nombre entier relatif et que la somme de chaque ligne et de chaque colonne est indiquée en bout de celle-ci.

❄	+	❄	+	✈	=	16
+		+		+		
♣	+	♣	+	♣	=	9
+		+		+		
✈	+	✔	+	♣	=	18
=		=		=		
14		17		12		

❄ =	✈ =
♣ =	✔ =

❄	+	❄	+	❄	=	-3
+		+		+		
✈	+	♣	+	❄	=	-3
+		+		+		
✔	+	✔	+	♣	=	6
=		=		=		
6		0		-6		

❄ =	✈ =
♣ =	✔ =

❄	+	✈	+	✈	+	❄	=	2
+		+		+		+		
✈	+	✈	+	✈	+	♣	=	9
+		+		+		+		
✈	+	♣	+	✔	+	✄	=	-7
=		=		=		=		
3		7		-1		-5		

❄ =	✈ =	♣ =
✄ =	✔ =	

✔	+	✔	+	♣	+	♣	=	-158
+		+		+		+		
✈	+	✔	+	✄	+	✄	=	-19
+		+		+		+		
❄	+	✔	+	✈	+	✔	=	-86
=		=		=		=		
-32		-162		-37		-32		

❄ =	✈ =	♣ =
✄ =	✔ =	

ESPACE & GÉOMÉTRIE

21

Le parallélogramme

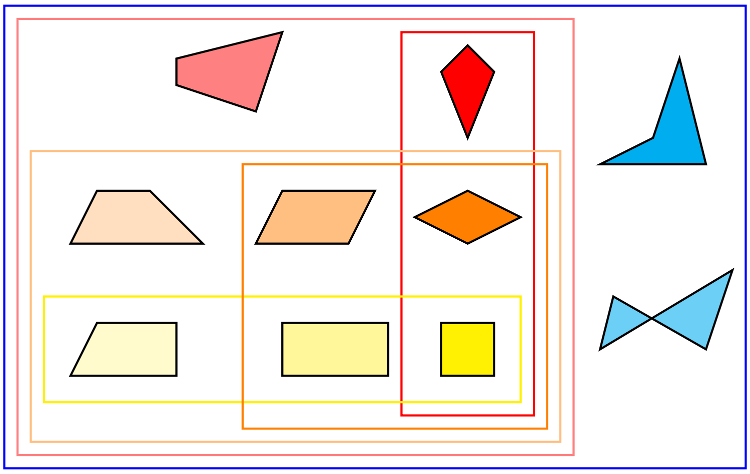
Connaissances ♡ et compétences ◊ du cycle 4

♡ Parallélogramme (une définition et une propriété caractéristique).

◊ Mettre en oeuvre ou écrire un protocole de construction d'une figure géométrique.

Défi : vocabulaire des quadrilatères

Le mot **quadrilatère** provient du latin : *quatuor*, quatre, et *latus*, côté. Il existe un mot équivalent d'origine grecque : **tétrapleure** de *tèssera*, quatre, et *pleura*, côté ou **tétragone**, de *gônia*, angle.
Comme pour les triangles, les quadrilatères peuvent être particuliers selon qu'ils ont certaines propriétés : parmi ceux-ci, on peut trouver par exemple la famille des trapèzes, des parallélogrammes, des rectangles, des losanges, des carrés ou encore des cerfs-volants.



Vidéo : **Pourquoi « mathématiques » ?**, site Internet *m@ths-et-tiques* de *Yvan Monka*.

Cahier de compétences : chapitre 10, exercices 1 à 24.

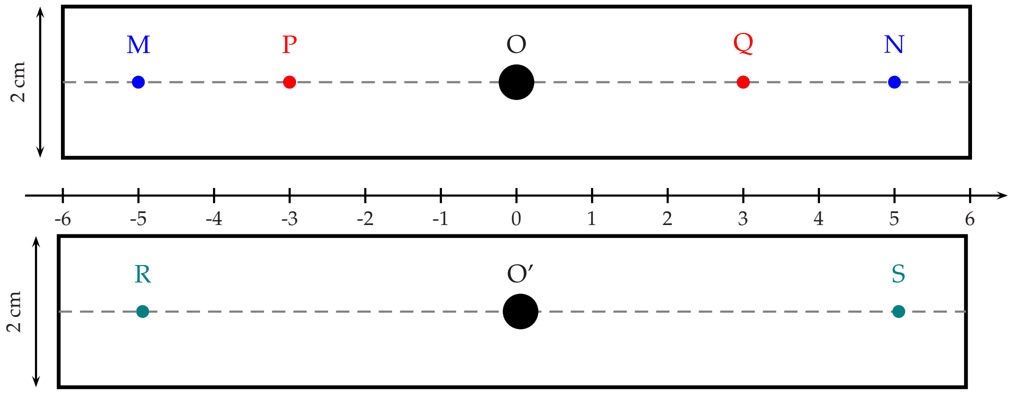
Activité d'approche

Les bandelettes

Objectifs : connaître et reconnaître des figures à quatre côtés ; donner des propriétés de quadrilatères.

Partie 1 : construction des bandelettes

1) On veut fabriquer à l'aide de bandelettes de papier des « squelettes » de quadrilatères : chaque squelette est composé de deux bandelettes fixées à l'aide d'une attache parisienne. Sur une feuille de papier canson, tracer les deux rectangles suivants et placer les points O, O′, M, N, P, Q, R et S à l'aide de la droite graduée en centimètres.



2) Percer des trous sur les points M, N, P, Q, R et S qui doivent permettre de passer la mine d'un crayon.

3) Percer des trous sur les points O et O′, qui sont destinés à recevoir une attache parisienne.
Les bandelettes attachées correspondent alors au squelette d'un quadrilatère.

Partie 2 : construction des quadrilatères

4) On considère un squelette obtenu en faisant se croiser les deux bandelettes aux points O et O′ en plaçant l'attache parisienne à travers ces deux points. On s'intéresse aux quadrilatères MRNS tracés à partir de ce squelette.
- **a)** En plaçant le squelette sur votre feuille, placer les points M, N, R et S puis tracer le quadrilatère MRNS.
- **b)** À quelle famille semble appartenir ce quadrilatère ?
- **c)** Que représentent les segments [MN] et [RS] pour ce quadrilatère ?
- **d)** Justifier alors la conjecture proposée en b).
- **e)** Citer d'autres propriétés relatives à ce quadrilatère particulier.
- **f)** Trouver un cas particulier à cette configuration.

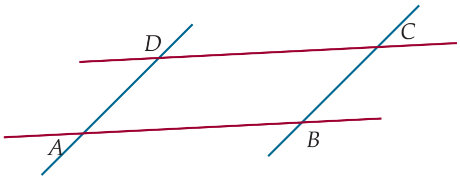
5) On s'intéresse maintenant aux quadrilatères PRQS tracés à partir de ce même squelette.
- **a)** En plaçant le squelette sur votre feuille, placer les points P, Q, R et S puis tracer le quadrilatère PRQS.
- **b)** À quelle famille semble appartenir ce quadrilatère ?
- **c)** Que représentent les segments [PQ] et [RS] pour ce quadrilatère ?
- **d)** Conjecturer trois propriétés concernant votre quadrilatère : une à partir de ses diagonales, une autre à partir de la position relative de ses côtés et une dernière concernant les angles.
- **e)** Trouver un cas particulier à cette configuration.

Source : inspirée du site de Dominique Pernoux.

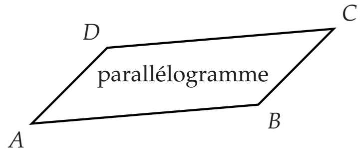
1. Qu'est-ce qu'un parallélogramme ?

DÉFINITION

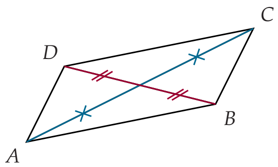
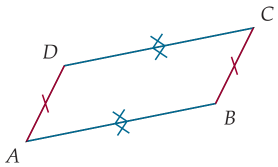
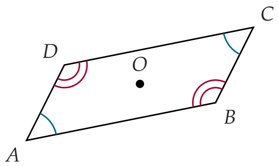
Un **parallélogramme** est un quadrilatère dont les côtés sont deux à deux parallèles.



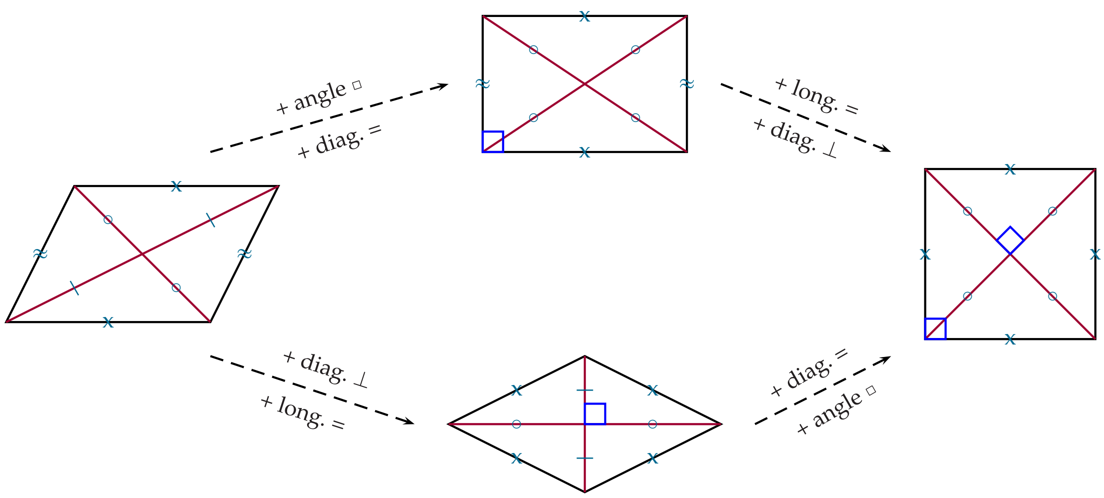
$(AB)//(DC) \Longrightarrow (AD)//(BC)$



Autres caractéristiques d'un parallélogramme :

	**PROPRIÉTÉ 1** Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu alors c'est un parallélogramme.	Ici, $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leur milieu, donc, $ABCD$ est un parallélogramme.
	**PROPRIÉTÉ 2** Si un quadrilatère a ses côtés opposés de la même longueur deux à deux alors c'est un parallélogramme.	Ici, $AB = DC$ et $AD = BC$, donc, $ABCD$ est un parallélogramme.
	**PROPRIÉTÉ 3** Un parallélogramme possède son centre O comme centre de symétrie. Les angles opposés sont égaux.	Ici, $\widehat{ADC} = \widehat{ABC}$ et $\widehat{DAB} = \widehat{DCB}$.

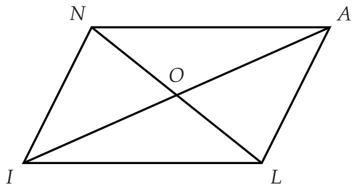
2. Parallélogrammes particuliers



Entraînement

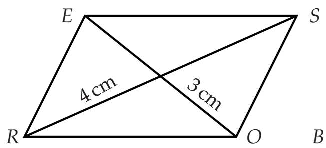
Propriétés des parallélogrammes

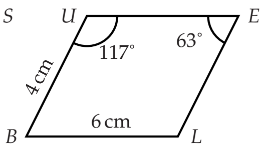
1 On considère le parallélogramme $ILAN$ suivant :



Coder un maximum d'informations sur la figure.

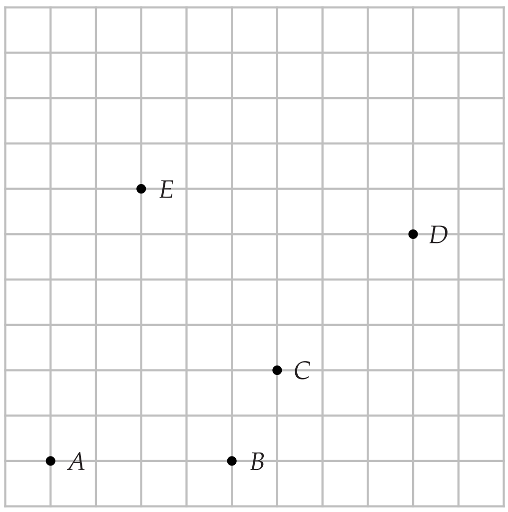
2 Dans les parallélogrammes $ROSE$ et $BLEU$ suivants, compléter toutes les mesures possibles.





Construction de parallélogrammes

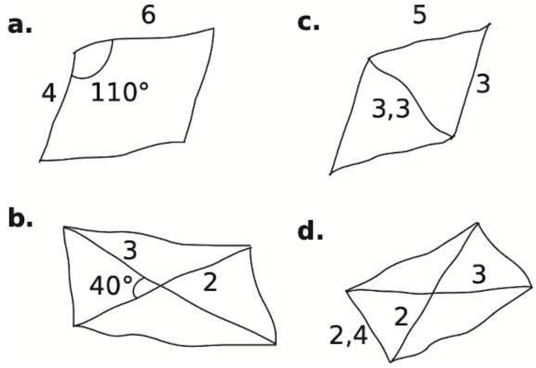
3 Construire sur ce quadrillage les parallélogrammes suivants : $ABCF$, $BCDG$, $CDHE$ et $BIEC$.



4 Construire les parallélogrammes $ABCD$ et $EFGH$ tels que :

1) $AB = 5\,\text{cm}$; $AD = 3{,}5\,\text{cm}$ et $BD = 7\,\text{cm}$.
2) $EF = 2\,\text{cm}$; $EH = 4{,}5\,\text{cm}$ et $EG = 3{,}5\,\text{cm}$.

5 Construire en vraie grandeur les parallélogrammes schématisés ci-dessous (longueurs en cm).



6 Construire en vraie grandeur :

1) Un parallélogramme $VERT$ tel que $VT = 5\,\text{cm}$; $\widehat{ERT} = 125^\circ$ et $VE = 4\,\text{cm}$.
2) Un parallélogramme $GRIS$ de centre O tel que $GR = 6\,\text{cm}$; $SO = 3\,\text{cm}$ et $IO = 4\,\text{cm}$.
3) Un parallélogramme $NOIR$ tel que $NI = 62\,\text{mm}$; $\widehat{NIR} = 40^\circ$ et $\widehat{RNI} = 30^\circ$.

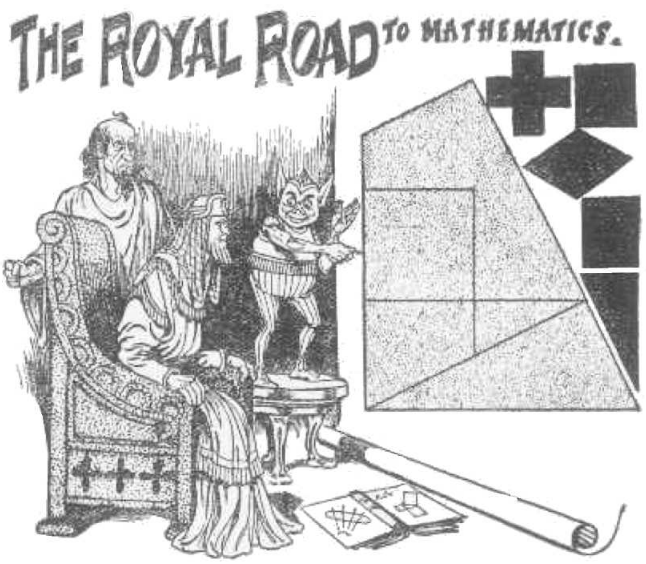
Démonstrations

7 1) Tracer le cercle (C_1) de centre O de rayon 3,5 cm.
2) Placer deux points N et P sur (C_1) tels que [NP] soit un diamètre de (C_1).
3) Construire le cercle (C_2) de centre O de rayon 5 cm.
4) Placer deux autres points Q et R sur (C_2), non alignés avec N et P tels que $[QR]$ soit un diamètre de (C_2).
5) Démontrer que le quadrilatère $NQPR$ est un parallélogramme.
6) Calculer les longueurs NP et QR. Justifier.

8 1) Tracer un triangle équilatéral ABC de côté 5 cm.
2) À l'extérieur du triangle et de telle sorte que les figures ne se recouvrent pas, placer les points D et E tels que $ABDE$ soit un rectangle avec $AD = 7\,\text{cm}$.
3) Placer les points F et G tels que $ACFG$ soit un losange avec $\widehat{ACF} = 150^\circ$.
4) Donner la mesure des angles $\widehat{CAG}$ et $\widehat{BAG}$.
5) Que peut-on en déduire pour les points G, A et E ?

Les puzzles de Sam Loyd

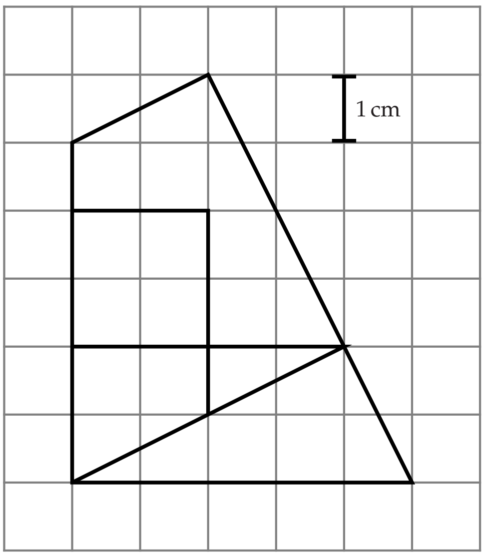
Sam Loyd (1841-1911) était un mathématicien américain adepte de casse-têtes mathématiques et d'échec. Il est à l'origine de milliers de casse-têtes publiés notamment dans des journaux. On considère l'énigme « The royal road to mathematics », issu du *Sam Loyd's cyclopedia of 5000 puzzles tricks and conundrums with answers*, page 60.



"My learned friend has discoursed upon the six geometrical forms, the traprapezium, the square, greek cross, parallelogram or diamond, rectangle and triangle. The trapezium, he has told us is a geometrical form with four sides, no two of which are parallel. The shape was originated many years ago as the mainsail for a catamaran, the five other geometrical shapes will readily be recognized as the flags or ensigns of ancient yachts. The most interesting part of the whole business is that I can mark off the trapjezium into five parts, which form six wonderful puzzles. Cut these five pieces out of paper and it will be no easy task to rearrange them to form the trapezium. Then utilize all five of the pieces so as to form a perfect square! They will also fit together to make a greek cross. If properly placed they will make a perfect parallelogram, or a rectangle, or a right angled triangle.

Partie A : composition du trapezium

On considère le quadrilatère de Sam Loyd construit sur le quadrillage suivant :

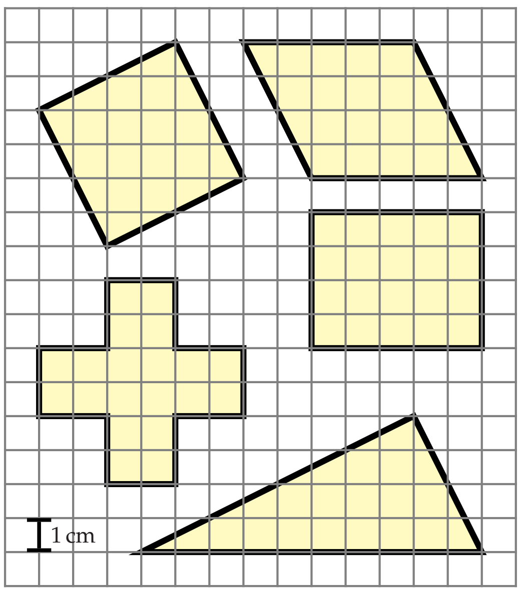


1) L'auteur appelle cette figure « trapezium » que l'on peut traduire par trapèze. Qu'en pensez-vous ? Dans le texte, comme définit-il cette figure ?

2) De quoi est composé ce trapezium ?

Partie B : résolution des puzzles

Sam Loyd propose, à partir des pièces du trapézium, de reconstituer le carré, la croix grecque, le parallélogramme, le rectangle et le triangle rectangle.



3) Reproduire le trapezium puis le découper.

4) Avec les pièces du puzzle, reconstituer chacune des figures ci-dessus.

ORGANISATION & GESTION DE DONNÉES

22

Traiter des données

Connaissances ♡ et compétences ♢ du cycle 4

♡ Effectifs et fréquences.	♢ Calculer des effectifs, des fréquences.
♡ Indicateurs de position : moyenne.	♢ Calculer et interpréter des indicateurs de position

Débat : les statistiques

Les premiers textes écrits retrouvés sur les **statistiques** étaient des recensements de bétail. On attribue souvent l'introduction du terme **statistique** au professeur *Achenwall*, qui aurait, en 1746, créé le mot *Statistik*, dérivé de l'allemand *Staatskunde*.

Même si cette branche des mathématiques est récente, elle fait partie des notions les plus utilisées actuellement et les plus gros consommateurs de statistiques sont les assureurs (risques d'accidents, de maladie des assurés), les médecins (épidémiologie), les démographes (populations et leur dynamique), les économistes (emploi, conjoncture économique), les météorologues...

quartiles *mode* *histogramme*
médiane *écart-type*
moyenne *fréquence*
maximum *minimum*

Vidéo : **Chocolat, corrélation et moustache de chat**, chaîne YouTube *La statistique expliquée à mon chat*.

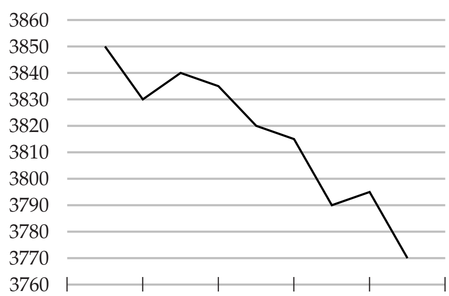
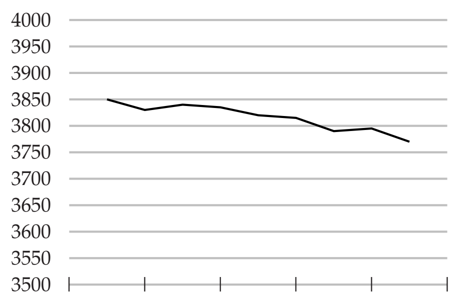
Cahier de compétences : chapitre 6, exercices 2 ; 5 à 18 ; 22 ; 24 ; 26 ; 37 à 40 ; 42 ; 43.

Activité d'approche

Pourquoi étudier les statistiques ?

Objectif : avoir un regard critique envers les chiffres et les informations que l'on nous donne.

Pourquoi étudier les statistiques ? Entre autres pour savoir démêler le vrai du faux dans les publicités, les journaux. . . Pour chaque ligne du tableau suivant, discuter de ce que vous pouvez déduire immédiatement des données brutes que l'on vous donne, puis étudier ce que l'on pourrait ajouter dans la colonne de droite.
Cela change-t-il votre opinion ?

	Ce qu'on vous dit	Ce qu'on oublie de vous dire
1	Au loto, 100 % des gagnants ont tenté leur chance.	Le pourcentage de gagnants par rapport au nombre total de joueurs.
2	M. Truc a largement remporté les élections avec 60 % des suffrages.	Le taux d'abstention a été de 50 %.
4	En 1995, au Brésil, 16 % des enfants étaient au travail et au Guatemala : 15,9 %.	Le Brésil compte 170 millions d'habitants et le Guatemala 12,7 millions d'habitants.
5	La température annuelle moyenne de Moscou est de 5 degrés. Que prendrez-vous dans vos valises ?	Quel mois partez-vous ?
6	Il y a en France environ 200 000 licenciés à la Fédération française de tir à l'arc. En Chine, il y en a 1 500 000. C'est un sport beaucoup plus pratiqué en Chine qu'en France.	La France compte 60 000 000 habitants et la Chine 1 200 000 000 habitants.
7	C'est un vendredi noir à la Bourse ! Forte chute des valeurs ! 	Et si on prenait une autre échelle ? 

Ce que nous apprend ce tableau c'est que l'on peut faire dire n'importe quoi aux chiffres, et ainsi déformer la réalité, donc il faut toujours avoir à l'esprit que les résultats d'une étude statistique peuvent être fortement biaisés.

Source : d'après Les statistiques dans les nouveaux programmes du cycle central, académie de Rouen

1. Effectifs et fréquences

On demande aux élèves d'une classe de 5e quel est son loisir principal et combien de temps il passe à le pratiquer. On obtient les résultats suivants arrondis à l'heure près :

Judo	6	Gymnastique	4	Hand-ball	5	Hand-ball	4	Tennis	2	Karaté	2	Équitation	1
G.R.S.	10	Hand-ball	5	Natation	2	Lego®	3	Badminton	14	Football	8	Danse	2
Taekwondo	7	Lecture	3	Boxe	2	Danse	2	Courir	6	Taekwondo	6	Musique	7
Hand-ball	3	Piano	4	Vidéos	10	Dessiner	10	Lecture	30				

DÉFINITION

- L'**effectif** d'une donnée est le nombre de fois qu'elle apparaît ; si on fait la somme des effectifs on obtient l'**effectif total**.
- La **fréquence** d'une donnée est le quotient de l'effectif de cette donnée par l'effectif total. Elle s'exprime par un nombre décimal entre compris entre 0 et 1 ou en pourcentage.

Exemple Tableau des effectifs et des fréquences.

Temps passé (h)	1	2	3	4	5	6	7	8	10	14	30	T
Effectif	1	6	3	3	2	3	2	1	3	1	1	26
Fréquence en %	3,8	23,1	11,5	11,5	7,7	11,5	7,7	3,8	11,5	3,8	3,8	100

On peut également faire un regroupement par classes, ce qui rend l'étude moins précise, mais ce qui permet d'avoir une vision plus globale.

Exemple Tableau des effectifs par classes d'amplitude 5 heures.

Temps passé (h)	] 0 ; 5]	] 5 ; 10]	] 10 ; 15]	] 15 ; 20]	] 20 ; 25]	] 25 ; 30]	Total
Effectif	15	9	1	0	0	1	26

2. Moyenne arithmétique

DÉFINITION

La **moyenne** d'une série est égale au quotient de la somme des données par l'effectif total.

MÉTHODE 1 Calcul d'une moyenne pondérée

Pour obtenir la somme des données dans le cas où les données sont pondérées (effectif $\neq 1$) :

- on multiplie chaque effectif par sa donnée, puis on fait la somme ;
- lorsque les données sont présentées par classes, on choisit le centre de la classe comme donnée que l'on multiplie par l'effectif, puis on fait la somme.

Puis on divise cette somme par l'effectif total.

Exercice d'application Quel est le temps moyen passé sur le loisir principal de la classe de 5e ? Faire le calcul avec le tableau simple ($\overline{m}$) et le tableau par classes ($\overline{m_c}$).

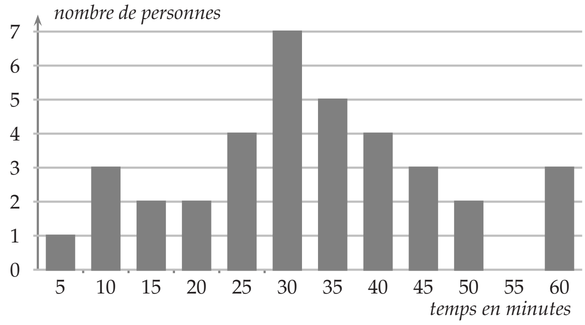
Correction $$\overline{m_c} = \frac{15 \times 2,5 + 9 \times 7,5 + 1 \times 12,5 + 0 \times 17,5 + 0 \times 22,5 + 1 \times 27,5}{26} = \frac{145}{26} \approx 5,6.$$

$$\overline{m} = \frac{1 \times 1 + 6 \times 2 + 3 \times 3 + 3 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times 6 + 2 \times 7 + 1 \times 8 + 3 \times 10 + 1 \times 14 + 1 \times 30}{26} = \frac{158}{26} \approx 6,1.$$

Entraînement

Effectifs, fréquences, moyennes

1 Le diagramme en bâtons ci-dessous représente le temps de trajet journalier en minutes de 36 personnes travaillant dans l'entreprise Kadubol.



1) a) Construire le tableau d'effectifs et de fréquences récapitulant toutes ces valeurs.

b) Calculer la moyenne

2) a) Construire le tableau des effectifs en les regroupant par classes d'amplitude 15 minutes en commençant par la classe] 0 ; 15].

b) Calculer la moyenne en utilisant la répartition par classes. Le résultat obtenu est-il le même que lors du calcul précédent ? Pourquoi ? Est-il plus fiable ?

2 Le tableau suivant résume les résultats obtenus par une classe lors d'une évaluation.

N	3	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	17	18
E	1	2	1	3	3	5	6	4	2	1	2	2	1

1) Combien y a-t-il d'élèves dans cette classe ?

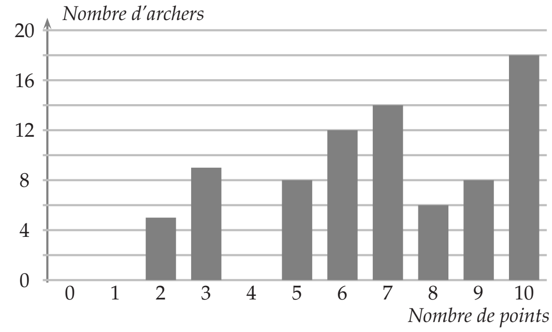
2) Compléter le tableau par les fréquences.

3) Quel est le pourcentage d'élèves ayant obtenu une note inférieure ou égale à 8 ?

4) Déterminer la moyenne de la série de notes.

5) Cette évaluation était la quatrième de la période. Toutes les évaluations ont le même coefficient et jusqu'alors Bastien avait 9 de moyenne ; après ce devoir, il a 9,5 de moyenne. Quelle note a-t-il obtenue à ce devoir ?

3 Quatre-vingts archers d'un club de tir à l'arc A ont participé à un championnat. Le nombre de points obtenus par chaque archer du club est donné par le diagramme ci-dessous.



1) a) Combien d'archers ont gagné exactement six points lors de ce championnat ?

b) Combien d'archers ont gagné trois points ou plus lors de ce championnat ?

2) Le club de tir à l'arc B a aussi participé à ce championnat. Voici quelques données :

- Le score moyen des archers lors du championnat est 7 points.
- Le score moyen des dix meilleurs archers lors du championnat est 9,9 points.

a) Comparer les résultats des deux clubs selon leurs scores moyens.

b) Comparer les résultats des deux clubs selon les scores de leurs dix meilleurs archers.

4 Ce tableau présente les températures moyennes mensuelles à Tours en 2019.

Mois	J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
Température en °C	4,4	7,8	9,6	11,2	13,4	19,4	22,6	20,5	17,9	14,4	8,2	7,8

1) D'après le tableau, quelle a été la température moyenne à Tours en novembre 2019 ?

2) Vérifier que la température moyenne annuelle est 13,1 °C.

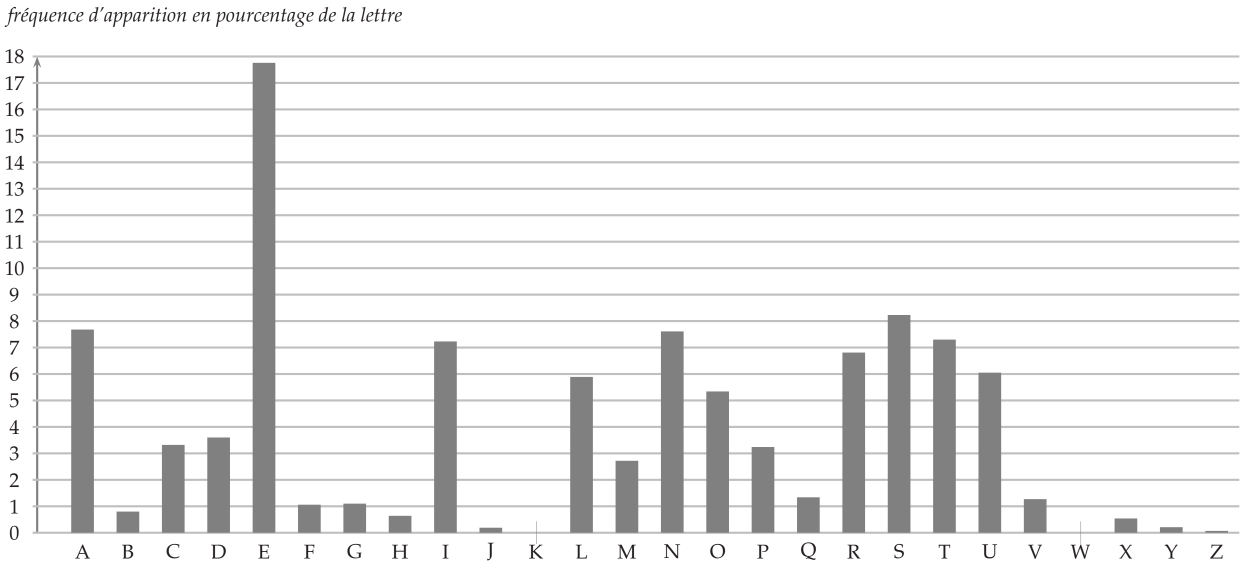
3) La température moyenne annuelle à Tours en 2009 était de 11,9 °C. Le pourcentage d'augmentation entre 2009 et 2019, arrondi à l'unité, est-il de : 7 % ; 10 % ou 13 % ? Justifier la réponse.

Cryptographie

La cryptographie est l'ensemble des techniques permettant de protéger une communication au moyen d'un code graphique secret. Parmi elles, on retrouve la méthode de substitution monoalphabétique : les lettres du texte à coder sont remplacées par d'autres lettres tel que deux lettres différentes sont codées de façons différentes et que la même lettre est toujours codée de la même façon.

Le savant arabe *Al-Kindi* (Abu Yūsuf Ya'qūb ibn'Ishāq as-Sabbāh al-Kindī) met au point, au 9e siècle, une technique appelée analyse des fréquences afin de déchiffrer les messages secrets. Elle repose sur la comparaison entre les fréquences d'apparition des lettres dans un message crypté à partir d'une langue connue avec la fréquence d'apparition moyenne des lettres dans cette langue.

En français, par exemple, on a la répartition suivante représentée par un diagramme en bâtons, basée sur l'analyse de milliers de romans.



Ainsi, il y a des chances que la lettre la plus fréquente du message crypté soit la traduction de la lettre E, très fréquente en français. Les lettres très peu fréquentes ou absentes dans un message auront tendance à être les traductions de K ou W, par exemple.

Calculer la fréquence de chaque lettre du message codé ci-dessous (on pourra représenter les résultats dans un tableau). En observant les correspondances entre le diagramme en bâton et votre tableau, décoder le message.

BKSMAMZCZMTFY KF OKATOCFZ ZHKY CYZIAMKIYKUKFZ AK UKYYCLK ATOK RTIY CRKP BHCFADM IF XCY OKAMYMB RKHY SC YTSIZMTF BMFCSK OCFY AKZZK CAZMRMZK UCZDKUCZMGIK VHCRT

Pour retrouver la correspondance de chaque lettre, on pourra tout d'abord retrouver la lettre la plus fréquente qui correspond à un E, puis chercher les mots courts de 2 lettres par exemple.

Spoiler : l'un des mots du message décrypté est « message ».

NOMBRES & CALCULS

23

Nombres premiers

Connaissances ♡ et compétences ♢ du cycle 4

- ♡ Définition d'un nombre premier.
- ♡ Liste des nombres premiers inférieurs ou égaux à 30.
- ♢ Décomposer un nombre entier en produit de facteurs premiers (à la main ou à l'aide d'un logiciel).
- ♢ Simplifier une fraction pour la rendre irréductible.

Débat : la cryptologie

La **cryptologie** est un art ancien et une science nouvelle : un art ancien car Jules César l'utilisait déjà ; une science nouvelle parce que ce n'est un thème de recherche scientifique que depuis les années 1970. Ce mot vient du grec *krypton* - caché et *logos* - science et signifie science du secret. Elle englobe la **cryptographie** (l'écriture secrète) et la **cryptanalyse** (l'analyse de cette dernière). Actuellement, on utilise en cryptographie des méthodes basées sur la difficulté de trouver la décomposition d'un nombre en produit de facteurs premiers.

Vidéo : **Les nombres premiers**, site Internet *Le blob*, épisode de la série *Petits contes mathématiques*.

Cahier de compétences : ∅.

Activité d'approche

Le crible d'Ératosthène

Objectifs : calculer des multiples ; suivre un algorithme ; déterminer des nombres premiers.

On considère le tableau des nombres entiers de 1 à 100 ci-dessous.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Partie 1 : recherche des nombres premiers jusqu'à 100

1) Barrer le nombre 1.
2) Entourer le nombre 2, premier nombre non barré après 1, puis barrer tous les multiples de 2 plus grands que 2.
3) Entourer le nombre 3, premier nombre non barré après 2, puis barrer tous les multiples de 3 plus grands que 3.
4) Entourer le nombre 5, premier nombre non barré après 3, puis barrer tous les multiples de 5 plus grands que 5.
5) Continuer ainsi de suite jusqu'à 10 puis entourer les nombres restants.

Partie 2 : conclusion

Eratosthène ($-276; -194$) était un mathématicien, géographe, philosophe, astronome, poète grec. Cet algorithme qu'il a établi porte son nom et permet de trouver tous les **nombres premiers** (des nombres entiers divisibles uniquement par 1 et eux-même) inférieurs à un certain nombre n, ici 100.

Lister tous les nombres entourés dans le tableau : ce sont les nombres premiers inférieurs à 100.

_ _

_ _

1. Nombres premiers

DÉFINITION

Un entier naturel est un **nombre premier** s'il admet comme seuls diviseurs 1 et lui-même.

PROPRIÉTÉ

Les nombres premiers inférieurs à 30 sont 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 et 29.

Exemple

23 et 49 sont-ils des nombres premiers ?

Correction

- 23 est un nombre premier car il est dans la liste des nombres premiers.
- 49 est divisible par 1 et par 49, mais aussi par 7. Donc, 49 n'est pas un nombre premier.

2. Décomposition en produit de facteurs premiers

PROPRIÉTÉ

Tout nombre entier admet une décomposition en produit de facteurs premiers, unique à l'ordre des facteurs près.

Pour déterminer cette décomposition, on teste si le nombre est divisible par les nombres premiers successifs, éventuellement plusieurs fois. Sur la calculatrice, la fonction « *Décomp* » permet d'obtenir la décomposition d'un nombre en produit de facteurs premiers.

Exemple

Décomposer 180 en produit de facteurs premiers.

Correction

$$\begin{array}{r|l} 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

donc, $180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$ ou encore, $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$.

3. Simplifier une fraction

MÉTHODE 1 Rendre une fraction irréductible

Pour simplifier une fraction, c'est-à-dire écrire une fraction égale mais avec des nombres plus petits au numérateur et au dénominateur, on procède de la façon suivante :

- On décompose le numérateur en produit de facteurs premiers.
- On décompose le dénominateur en produit de facteurs premiers.
- On simplifie par tout nombre commun au numérateur et au dénominateur.

Exercice d'application

Simplifier la fraction $\frac{90}{84}$.

Correction

$$\frac{90}{84} = \frac{2 \times 3^2 \times 5}{2^2 \times 3 \times 7} = \frac{\cancel{2} \times \cancel{3} \times 3 \times 5}{\cancel{2} \times 2 \times \cancel{3} \times 7} = \frac{3 \times 5}{2 \times 7} = \frac{15}{14}.$$

Entraînement

Nombres premiers

1 Les nombres suivants sont-ils des nombres premiers ? Justifier.

1) 0
2) 1
3) 11
4) 23
5) 35
6) 36
7) 37
8) 38
9) 51
10) 99

2 Décomposer les nombres suivants en produits de facteurs premiers.

1) 12
2) 18
3) 28
4) 45
5) 48
6) 210
7) 442
8) 2 048
9) 30 375
10) 100 000

Simplifications de fractions

3

1) Décomposer les nombres 90 et 75 en produit de facteurs premiers.
2) Simplifier la fraction $\dfrac{90}{75}$
3) Simplifier la fraction $\dfrac{75}{90}$

4

1) Décomposer les nombres 242 et 165 en produit de facteurs premiers.
2) Simplifier la fraction $\dfrac{242}{165}$
3) Simplifier la fraction $\dfrac{165}{242}$

5 Simplifier les fractions suivantes :

1) $\dfrac{5}{15}$
2) $\dfrac{12}{23}$
3) $\dfrac{15}{35}$
4) $\dfrac{20}{90}$
5) $\dfrac{125}{45}$
6) $\dfrac{57}{98}$

6 Voici les diviseurs de trois nombres :

	Liste des diviseurs
42	1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 7 ; 14 ; 21 ; 42
56	1 ; 2 ; 4 ; 7 ; 8 ; 14 ; 28 ; 56
60	1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 10 ; 12 ; 15 ; 20 ; 30 ; 60

À l'aide de cette liste, simplifier au maximum chaque fraction.

1) $\dfrac{42}{56}$
2) $\dfrac{56}{60}$
3) $\dfrac{60}{42}$
4) $\dfrac{56}{42}$
5) $\dfrac{60}{56}$
6) $\dfrac{42}{60}$

Défis

7 Une conjecture est un résultat que l'on pense vrai, mais qui n'a pas encore été démontré. La conjecture de Goldbach dit que tout nombre pair strictement supérieur à 2 peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers. Par exemple, $8 = 3 + 5$; $40 = 23 + 17$.

1) Trouver deux telles sommes pour 28.
2) Trouver deux telles sommes pour 42.
3) Trouver deux telles sommes pour 52.

8 On considère un nombre entier naturel n.
On note S la somme de tous ses diviseurs stricts (c'est-à-dire ses diviseurs autres que lui-même).

- n est dit parfait lorsque $S = n$.
- n est dit déficient lorsque $S < n$.
- n est dit abondant lorsque $S > n$.

Par exemple, 8 a comme diviseurs 1 ; 2 ; 4 et 8 donc $S = 1 + 2 + 4 = 7$ et 7 est plus petit que 8, donc 8 est déficient.

1) Vérifier que 28 et 496 sont des nombre parfait.
2) Trouver le plus petit nombre déficient, le plus petit nombre parfait et le plus petit nombre abondant.
3) Quelle est la nature des nombres 7 ; 11 et 29 ?
4) Quelle est la nature d'un nombre premier ?

Le jeu de Juniper-Green

Ce jeu mathématique se joue à deux. Il a été créé par *Richard Porteous*, enseignant à l'école de Juniper Green.

Partie A : règles du jeu

Deux joueurs jouent sur une grille de N nombres suivant les règles suivantes :

- Règle 1 : le premier joueur choisit un nombre pair entre 1 et N et le barre sur la grille.
- Règle 2 : chacun son tour, les deux joueurs choisissent un nombre parmi les multiples ou les diviseurs du nombre choisi précédemment par son adversaire et inférieur à N puis le barre.
- Règle 3 : un nombre ne peut être joué qu'une seule fois.

Le joueur qui ne peut plus jouer a perdu.

Partie B : avec des grilles de 20 nombres

En binôme, jouer quelques parties sur une grille de 20 nombres. Sous la grille, noter la suite de nombres obtenue.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

Trouver une suite minimale : _

Trouver une suite maximale : _

Partie C : avec des grilles de 100 nombres

Jouer avec ces grilles de 100 nombres.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

ESPACE & GÉOMÉTRIE

24

Représenter les solides

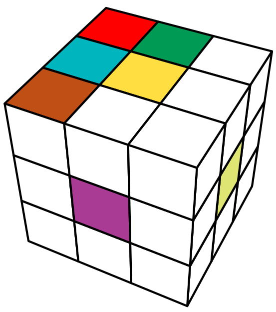
Connaissances ♡ et compétences ◇ du cycle 4

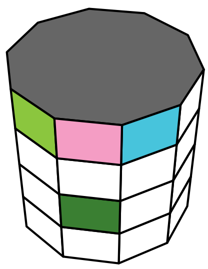
◇ Construire et mettre en relation des représentations des solides suivants : pavé droit et cylindre (perspective cavalière, vue de face, de dessus, patrons).

◇ Utiliser un logiciel de géométrie dynamique pour représenter des solides.

Débat : la perspective

La **perspective cavalière** est un outil qui permet de représenter sur une feuille de papier des objets en volume sans point de fuite. Cette représentation était utilisée pour la conception des fortifications militaires. Le « cavalier » était un promontoire de terre situé en arrière des fortifications et qui permettait de voir par-dessus la ligne des ouvrages de défense, et donc de voir les ouvrages des assaillants et ainsi d'anticiper leurs plans offensifs. D'autres perspectives sont utilisées notamment pour les arts : le perspective par **point de fuite** et la **perspective isométrique** par exemple.





Vidéo : **Comment dessiner des illusions d'optique 3D**, chaîne YouTube *Simple drawing tutorial*.

Cahier de compétences : chapitre 12, exercices 4 à 23.

Activité d'approche

Patrons !

Objectifs : tracer le patron d'un pavé droit et d'un cylindre ; construire un pavé droit et un cylindre.

Partie 1 : patron du pavé droit

On considère un pavé droit, aussi appelé parallélépipède rectangle de mesures 4 cm ; 3 cm et 2 cm. Quelles sont les figures qui composent son patron ?
Tracer à main levée un patron en indiquant les mesures.

Partie 2 : développement du cylindre

On considère un cylindre de révolution de hauteur 4 cm et dont le rayon de la base mesure 1,6 cm. Quelles sont les figures qui composent son développement ?
Tracer à main levée un développement avec les mesures.

Partie 3 : patron à taille réelle

Tracer ci-dessous le patron à taille réelle du pavé droit puis le découper : il servira pour la trace écrite.

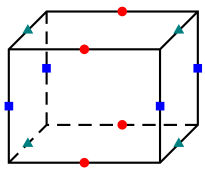
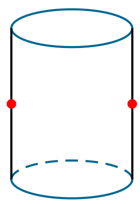
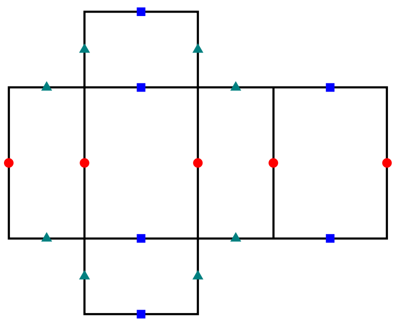
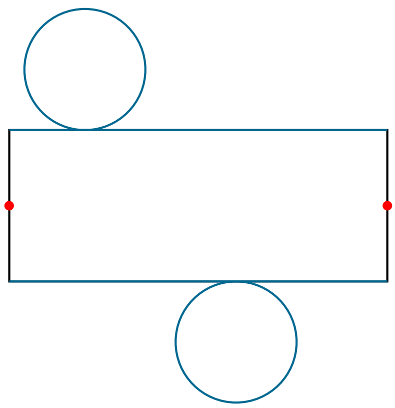
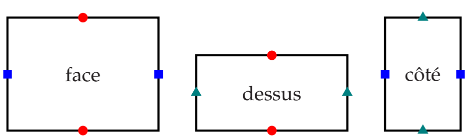
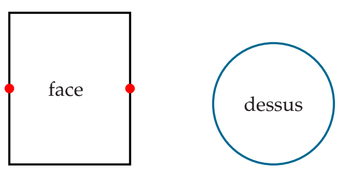
1. Définitions

DÉFINITION

- La représentation en **perspective cavalière** d'un solide de l'espace est une technique de dessin permettant de représenter un solide sur une surface à deux dimensions en respectant le parallélisme.
- Le **patron** d'un solide est une surface plane d'un seul tenant qui, par pliage, permet de reconstituer le solide sans recouvrement de ses faces.
- Si le solide n'est pas un polyèdre, on parle de **développement**.

Le patron ou le développement d'un solide n'est pas unique, il dépend de la manière dont on le déplie.

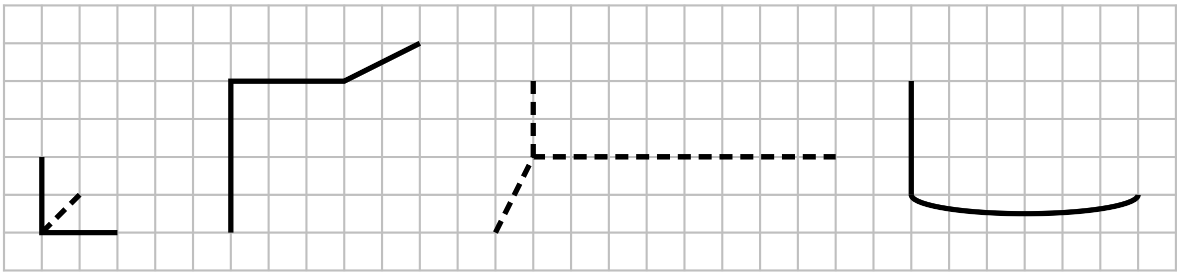
2. Représentations graphiques

	Pavé (droit)	Cylindre (de révolution)
Perspective cavalière		
Patron ou développement		
Vues diverses		

Entraînement

Représenter des solides

1 Terminer la représentation en perspective cavalière des trois pavés et du cylindre suivants :

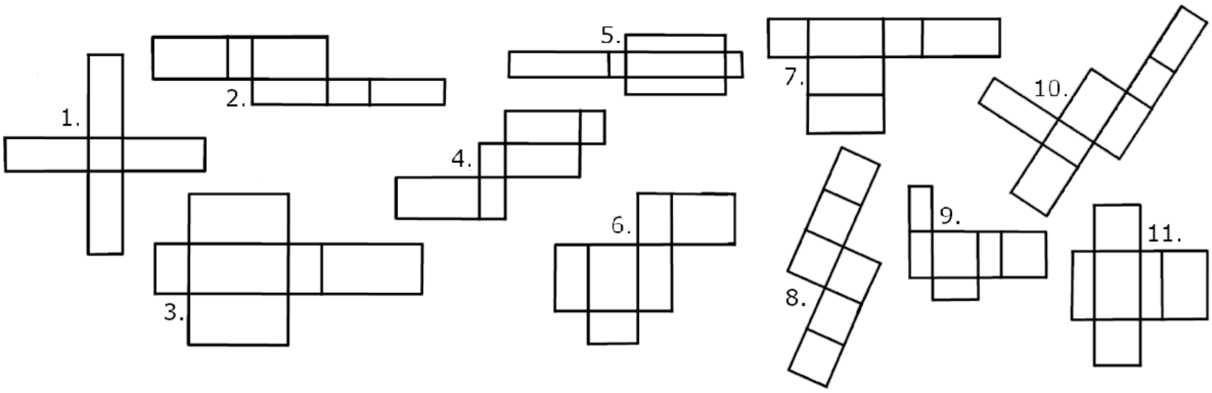


2 Tracer un maximum de patrons différents du cube (c'est-à-dire non superposables).

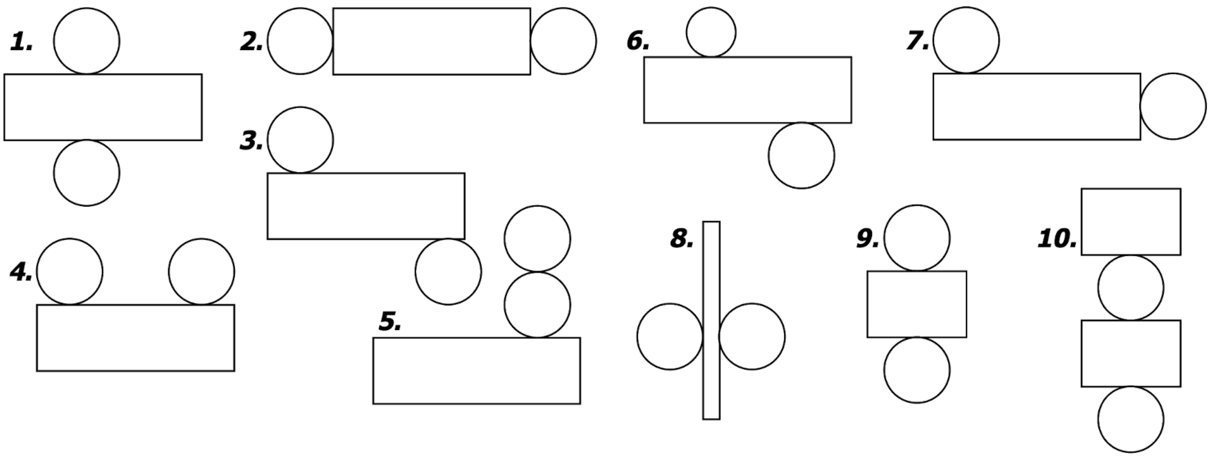
3 Construire en vraie grandeur un patron des solides suivants :

1) Pavé droit de mesures 5 cm ; 4 cm et 2 cm.
2) Cylindre de révolution de hauteur 8 cm dont le diamètre de la base vaut 2 cm.
3) Cylindre de révolution de hauteur 2 cm dont le rayon de la base vaut 2,5 cm.

4 Parmi tous ces patrons, quels sont ceux qui permettent de construire un pavé ?

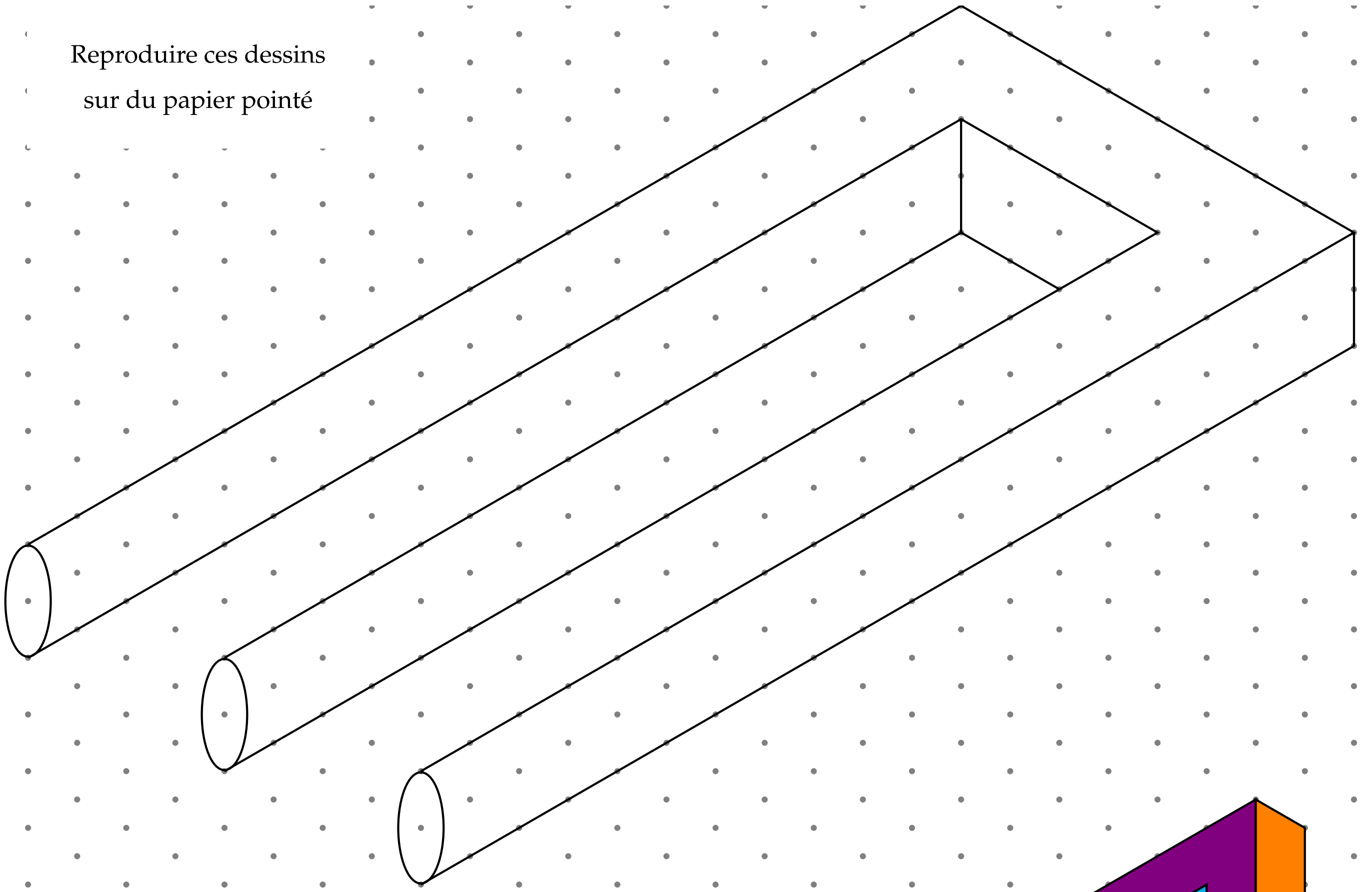


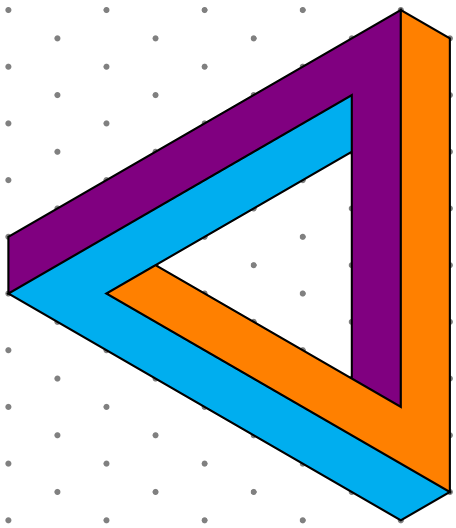
5 Parmi tous ces développements, quels sont ceux qui permettent de construire un cylindre ?

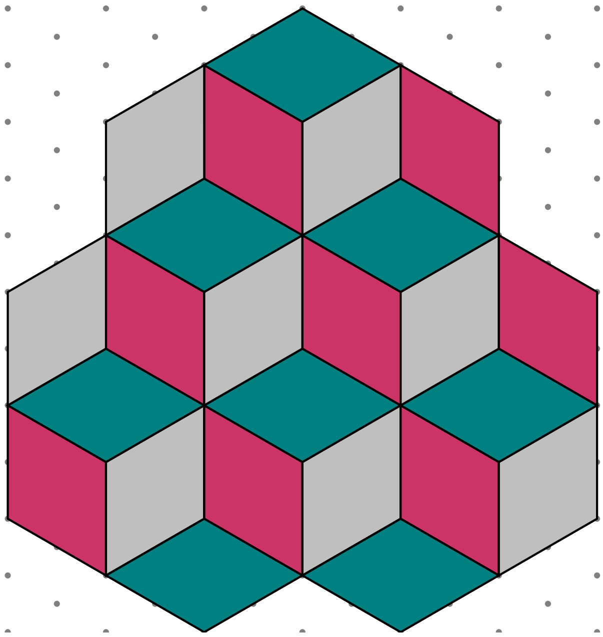


Des dessins magiques

Reproduire ces dessins
sur du papier pointé







Récréation, énigmes

GRANDEURS & MESURES

25

L’aire du parallélogramme

Connaissances ♡ et compétences ♢ du cycle 4

♡ Aire du parallélogramme (obtenue à partir de celle du rectangle par découpage et recollement).

♢ Mener des calculs impliquant des grandeurs mesurables, notamment des grandeurs composées, exprimer les résultats dans des unités adaptées.

Débat : des aires en images

Le parallélogramme peut être vu comme un rectangle que l’on aurait « étiré » par un coin, son **aire** correspond donc à l’aire un rectangle.

Vidéo : **Aire de figures simples**, chaîne YouTube de *Science silencieuse*.

Cahier de compétences : chapitre 11, exercices 16.

Activité d'approche

Aire d'un parallélogramme

Objectif : calculer l'aire d'un rectangle ; déterminer la formule de l'aire d'un parallélogramme.

Pour cette activité, il faut se munir d'une paire de ciseau et de colle.

1) Sur le cahier, tracer une droite horizontale sur toute la largeur de la page en laissant 4 cm au dessus puis dessiner un rectangle de 5 cm sur 3 cm sur la ligne comme ceci :

2) Découper les trois rectangles tracés en bas de page dont une longueur est en gras (la base).
Ils mesurent tous 5 cm par 3 cm.

3) Transformer les trois rectangles en trois parallélogrammes en donnant un seul coup de ciseaux en ligne droite en partant de la base (côté en gras) et en coupant le bord supérieur.

4) Coller les deux morceaux obtenus côte à côte sur le cahier en apposant le côté gras sur la droite tracée.
Quelle est la nature de chaque quadrilatère obtenu ?

5) Que peut-on dire de l'aire des quatre quadrilatères obtenus ?

6) À partir de la formule de l'aire du rectangle, déterminer comment calculer l'aire d'un parallélogramme.

Inspiré de : Aire des parallélogrammes, Groupe d'Enseignement Mathématique, Belgique.

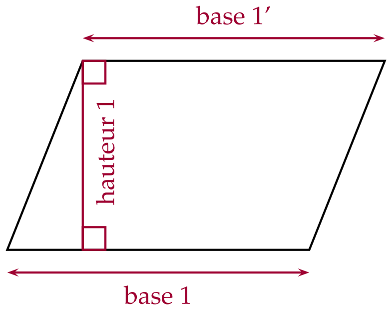
Trace écrite

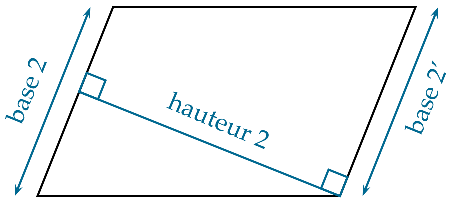
1. Hauteur d'un parallélogramme

DÉFINITION

On considère l'un des côtés parallèles d'un parallélogramme que l'on prend comme **base**. Une **hauteur** du parallélogramme associée à cette base est un segment perpendiculaire à la base situé entre les deux côtés parallèles.

REMARQUE : il y a donc quatre bases possibles pour un parallélogramme, deux à deux parallèles et deux hauteurs associées chacune à une paire de parallèles.





2. Aire du parallélogramme

PROPRIÉTÉ

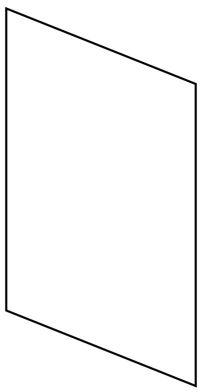
L'aire du parallélogramme se calcule grâce à la formule :

$$\mathcal{A} = \text{base} \times \text{hauteur} = b \times h$$

REMARQUE : attention à ne pas confondre avec l'aire du rectangle qui est longueur × largeur.

Exemple

Déterminer l'aire du parallélogramme suivant :



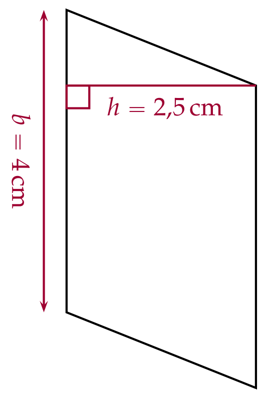
Correction

- On définit une base ;
- on trace une hauteur relative à cette base ;
- on mesure la base ;
- on mesure la hauteur ;
- on applique la formule :

  $\mathcal{A} = b \times h$

  $\mathcal{A} = 4\,\text{cm} \times 2{,}5\,\text{cm}$

  $\mathcal{A} = 10\,\text{cm}^2$.

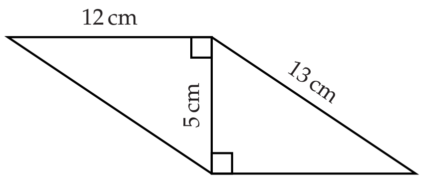


Entraînement

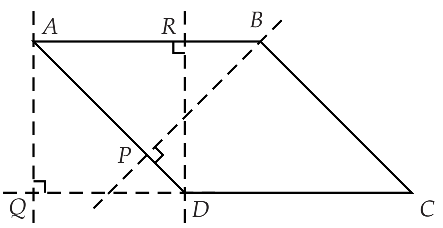
Aire des parallélogrammes

1 Calculer l'aire puis le périmètre :

1) d'un rectangle de longueur 30 m et de largeur 20 m ;
2) d'un carré de côté 6 cm ;
3) du parallélogramme suivant :

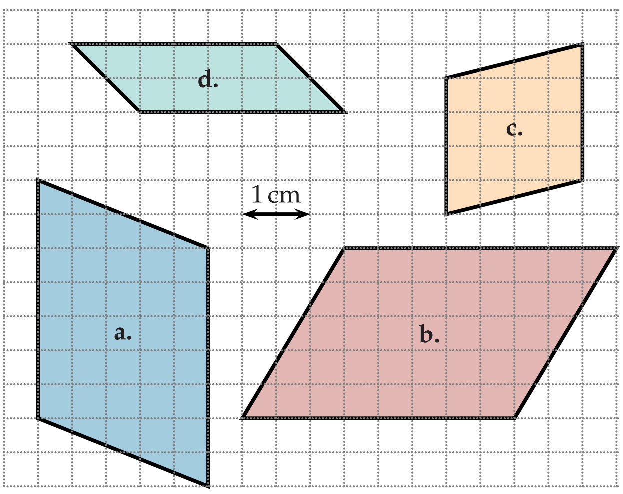


2 Observer le parallélogramme $ABCD$ puis compléter les phrases ci-dessous.

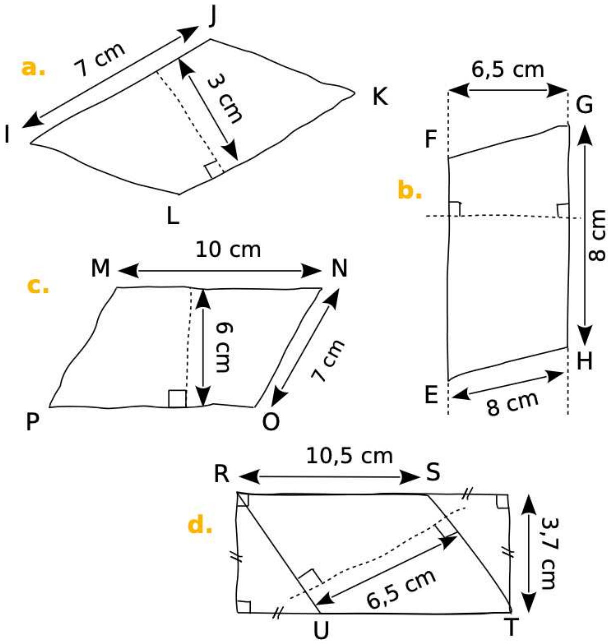


1) Une hauteur relative au côté $[DC]$ est _________
2) La droite (BP) est une hauteur relative à _______
3) La perpendiculaire à (AB) passant par R est une hauteur relative à ___________________________
4) La droite (AQ) est une hauteur relative à _______
5) Le quadrilatère $ARDQ$ est un ______________

3 Pour chaque parallélogramme, tracer une hauteur puis déterminer son aire.



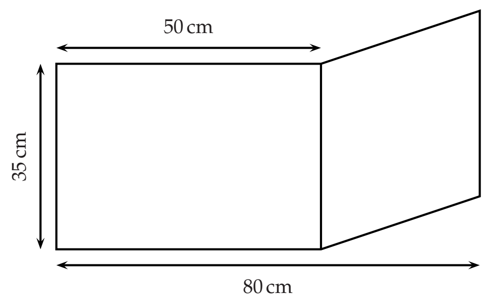
4 Déterminer l'aire de chacun des parallélogrammes suivants.



5 Déterminer la longueur inconnue.

1) Parallélogramme de base 8 cm et d'aire 24 cm^2. Calculer la hauteur.
2) Parallélogramme de hauteur 30 cm et d'aire 2,1 dm^2. Calculer la mesure de la base relative à cette hauteur.

6 Un menuisier doit découper une planche selon le plan suivant :



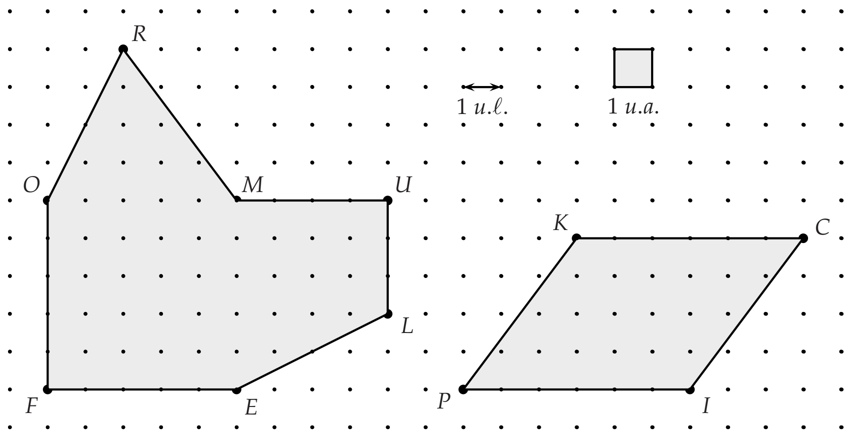
1) Calculer l'aire de la planche.
2) Le menuisier doit faire deux ouvertures dans cette planche :
   - une ouverture rectangulaire de 40 cm sur 15 cm ;
   - une ouverture en parallélogramme de base 20 cm et de hauteur 13 cm.

   Calculer la nouvelle aire de la planche.

D'après Les cahiers Sésamath 5e. Magnard-Sesamath 2017

La formule de Pick

On travaille dans un réseau pointé à maille carrée. On note $u.\ell.$ l'unité de longueur et $u.a.$ l'unité d'aire.
On appelle polygone de Pick, un polygone non aplati construit sur un tel réseau et dont chacun des sommets est un point du réseau. On considère les figures $FORMULE$ et $PICK$ suivantes :



PARTIE A : avec les formules classiques

1) Calculer l'aire du parallélogramme $PICK$ en unité d'aire.

____

2) Calculer l'aire du polygone $FORMULE$, en unité d'aire en détaillant les étapes du raisonnement.

____

____

PARTIE B : avec la formule de Pick

La formule de Pick permet de calculer l'aire $\mathcal{A}$ d'un polygone de Pick, à partir du nombre i de points du réseau strictement intérieurs à ce polygone et du nombre b de points du réseau sur le bord du polygone : $\boxed{\mathcal{A} = i + \frac{b}{2} - 1}$.

3) Appliquer cette formule au parallélogramme $PICK$.

$i =$ ____________ $b =$ ____________ donc, $\mathcal{A} =$ ____________

4) Appliquer cette formule au polygone $FORMULE$.

$i =$ ____________ $b =$ ____________ donc, $\mathcal{A} =$ ____________

5) Appliquer la formule de Pick aux trois polygones de Pick $MOFE$, MOR et $MULE$.
Vérifier que la somme des résultats obtenus est égale à l'aire totale de la figure.

____

____

____

NOMBRES & CALCULS

26

Somme et différence de fractions

Connaissances ♡ et compétences ♢ du cycle 4

♡ Somme, différence de deux nombres rationnels.

♢ Calculer avec des fractions.

♢ Effectuer des calculs et des comparaisons pour traiter des problèmes.

Débat : l'œil d'Oudjat, ou œil d'Horus

Dans la mythologie égyptienne, on trouve une histoire liée aux fractions : *Seth*, dieu de la violence et incarnation du mal, arrache l'**œil** à **Horus**. *Seth* le partage en six morceaux et les répand à travers l'Egypte. *Thot*, dieu magicien, reconstitue l'œil, symbole du bien contre le mal. Chacune de ses parties symbolise une fraction de numérateur 1 et de dénominateurs 2, 4, 8, 16, 32 et 64. Il accordera le 64^{e} manquant à tout scribe recherchant et acceptant sa protection.

Vidéo : **La légende de l'œil d'Horus**, chaîne YouTube *Ma deuxième école*, épisode de la série *Culture G*.

Cahier de compétences : chapitre 2, exercices 30 à 41 ; 46 à 49.

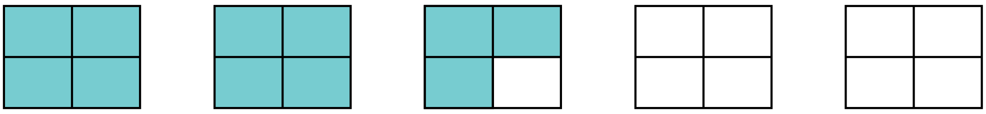
Activité d'approche

Décomposer une fraction

Objectifs : représenter des fractions ; écrire une fraction sous la forme de la somme ou de la différence d'un entier et d'une fraction inférieure à 1.

Partie 1 : des toasts en entrée

Pour faire des toasts à ses amis, Chiara coupe des tranches de pain de mie en quatre, avant de les garnir.
Maryam mange onze de ces petits toasts. Quelle fraction de grande tranche de pain de mie Mariam a-t-elle mangée ?

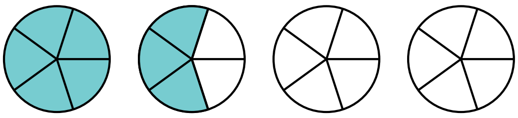


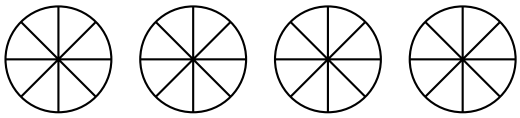
Elle a mangé 11 fois $\frac{1}{4}$ de grande tranche, donc $\frac{11}{4}$ de grande tranche, ce qui fait 2 tranches et $\frac{3}{4}$ de tranche, ou 3 tranches moins $\frac{1}{4}$ de tranche. On peut écrire : $\frac{11}{4} = 2 + \frac{3}{4} = 3 - \frac{1}{4}$.
Maïssa, elle, a mangé 17 petits toasts. Colorier ce que cela représente ci-dessous.

Compléter l'égalité : $\frac{17}{4} = \ldots + \frac{\ldots}{\ldots} = \ldots - \frac{\ldots}{\ldots}$

Partie 2 : des « flam » en plat principal

Pour poursuivre, Chiara propose à ses amis de manger des flammekueches (flam).





Une part de flam représente $\frac{\ldots}{\ldots}$ de flam.

$\frac{\ldots}{\ldots}$ de flam est colorié.

Donc, $\frac{\ldots}{\ldots} = \ldots + \frac{\ldots}{\ldots} = \ldots - \frac{\ldots}{\ldots}$

Une part de flam représente $\frac{\ldots}{\ldots}$ de flam.

Colorier $\frac{13}{8}$ de flam.

Donc, $\frac{13}{8} = \ldots + \frac{\ldots}{\ldots} = \ldots - \frac{\ldots}{\ldots}$

Partie 3 : des éclairs en dessert

Rayhan a mangé $\frac{73}{9}$ de mini-éclairs au chocolat, trouver une manière de décomposer cette fraction en la somme et la différence d'un nombre entier et d'une fraction inférieure à 1.

Inspiré de Écrire une fraction sous la forme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1, académie de Poitiers.

1. Décomposer une fraction

MÉTHODE 1 Décomposer une fraction

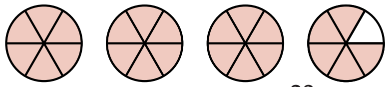
Pour décomposer une fraction en somme ou différence d'un entier et d'une fraction inférieure à 1, on peut effectuer la division euclidienne du numérateur par le dénominateur.

- Pour avoir une somme, le quotient nous donne le nombre entier et la fraction inférieure à 1 s'obtient en prenant comme numérateur le reste et comme dénominateur le diviseur.
- Pour avoir une différence, il suffit de prendre l'entier suivant le quotient et de choisir la fraction complémentaire à 1.

Exercice d'application

Décomposer $\frac{23}{6}$.

Correction



$$\begin{array}{r|l} 23 & 6 \\ 5 & 3 \end{array}$$

donc, $23 = 6 \times 3 + 5$ et $\frac{23}{6} = 3 + \frac{5}{6} = 4 - \frac{1}{6}$

2. Additionner et soustraire des fractions

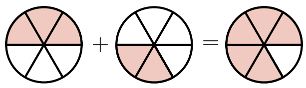
MÉTHODE 2 Additionner et soustraire deux fractions de même dénominateur

Pour additionner ou soustraire deux fractions ayant le même dénominateur, il suffit d'additionner ou de soustraire les numérateurs tout en gardant le même dénominateur :

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \qquad \text{et} \qquad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

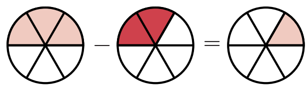
Exercice d'application Additionner $\frac{3}{6}$ et $\frac{2}{6}$.

Correction $\frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$



Exercice d'application Soustraire $\frac{2}{6}$ de $\frac{3}{6}$.

Correction $\frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6}$

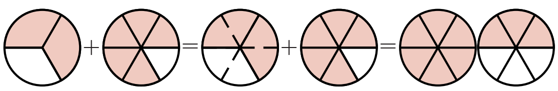


MÉTHODE 3 Additionner et soustraire deux fractions de dénominateurs multiples

Pour additionner ou soustraire deux fractions ayant des dénominateurs multiples, on transforme l'écriture d'une fraction pour qu'elle ait le même dénominateur que l'autre.

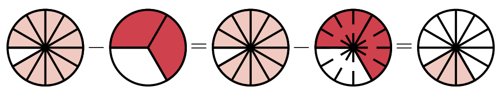
Exercice d'application Additionner $\frac{2}{3}$ et $\frac{5}{6}$.

Correction $\frac{2}{3} + \frac{5}{6} = \frac{2 \times 2}{2 \times 3} + \frac{5}{6} = \frac{4}{6} + \frac{5}{6} = \frac{9}{6}$.



Exercice d'application Soustraire $\frac{2}{3}$ de $\frac{11}{12}$.

Correction $\frac{11}{12} - \frac{2}{3} = \frac{11}{12} - \frac{4 \times 2}{4 \times 3} = \frac{11}{12} - \frac{8}{12} = \frac{3}{12}$.



Remarque : cela revient à dire que pour additionner ou soustraire des parts, il faut auparavant qu'elles soient égales, et donc partager les parts les plus grandes de manière à ce qu'elles aient la même taille que les parts les plus petites.

Entraînement

Décomposer des fractions

1 Écrire chaque fraction sous la forme de la somme d'un nombre entier et d'une fraction inférieure à 1 en faisant le calcul mentalement. En déduire une écriture comme la soustraction d'un entier et d'une fraction.

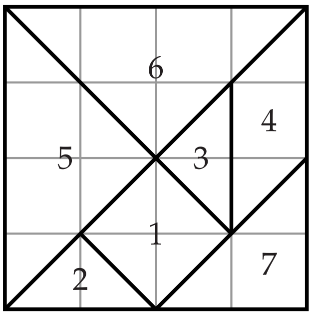
1) $\frac{7}{2}$
2) $\frac{9}{8}$
3) $\frac{1}{3}$
4) $\frac{5}{3}$
5) $\frac{11}{4}$
6) $\frac{13}{4}$

2 Écrire chaque fraction sous la forme de la somme d'un nombre entier et d'une fraction inférieure à 1 en posant la division euclidienne. En déduire une écriture comme la soustraction d'un entier et d'une fraction.

1) $\frac{27}{2}$
2) $\frac{92}{8}$
3) $\frac{13}{3}$
4) $\frac{53}{3}$
5) $\frac{121}{5}$
6) $\frac{127}{4}$

Ajouter et soustraire des fractions

3 Dans cet exercice, l'unité est le carré suivant (le tangram), constitué de sept pièces.



1) Quelle fraction du tangram représente chacune des pièces de 1 à 7 ?
2) Avec quelles pièces du tangram (deux minimum) peut-on faire la fraction $\frac{1}{8}$?
3) Avec quelles pièces (deux minimum) peut-on faire la fraction $\frac{3}{16}$? Donner trois possibilités.
4) Avec quelles pièces (deux minimum) peut-on faire la fraction $\frac{1}{4}$? Donner quatre possibilités.

4 Effectuer les calculs suivants, puis simplifier si nécéssaire.

1) $\frac{2}{3}+\frac{7}{3}$
2) $\frac{6}{7}-\frac{3}{7}$
3) $\frac{3}{13}-\frac{8}{13}$
4) $\frac{18}{23}+\frac{28}{23}$
5) $\frac{8}{3}-\frac{2}{3}-\frac{4}{3}$
6) $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{5}{2}$
7) $\frac{12}{7}+\frac{2}{7}-\frac{9}{7}$
8) $\frac{8}{10}-\frac{302}{10}+\frac{78}{10}$

5 Répondre aux petits défis suivants :

1) Combien faut-il ajouter à $\frac{2}{3}$ pour obtenir 1 ?
2) Combien faut-il soustraire à $\frac{15}{4}$ pour obtenir 3 ?
3) Combien faut-il ajouter à $\frac{13}{10}$ pour obtenir 2 ?
4) Combien faut-il soustraire à $\frac{52}{17}$ pour obtenir 3 ?

6 Effectuer les calculs suivants, puis simplifier si nécéssaire.

1) $\frac{2}{3}+\frac{7}{6}$
2) $\frac{6}{7}-\frac{3}{14}$
3) $\frac{38}{13}-\frac{3}{39}$
4) $\frac{18}{46}+\frac{28}{23}$
5) $\frac{8}{3}-\frac{2}{6}-\frac{4}{12}$
6) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}$
7) $\frac{3}{4}-4-\frac{5}{16}$
8) $\frac{12}{49}+2-\frac{9}{7}$

7 Un adulte passe en moyenne $\frac{1}{4}$ de son temps à travailler, $\frac{1}{3}$ à dormir, $\frac{1}{12}$ à gérer le quotidien et $\frac{3}{36}$ à manger.

1) Sur une journée de 24 h, combien de temps un adulte passe-t-il sur chacune de ces activités ?
2) Quelle fraction de son temps lui reste-t-il pour ses loisirs ?

8 Pour chacune des figures ci-dessous, exprimer la partie coloriée à l'aide d'une fraction de la surface du grand carré.

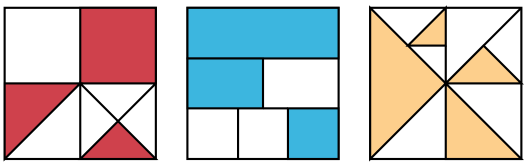


figure 1 figure 2 figure 3

Sudofractions

		2						

- Calculer la somme ou la différence proposée dans chaque case de la grille ci-dessous.
- Simplifier la fraction si possible.
- Choisir le numérateur de la fraction obtenue et le reporter dans la case correspondante de la grille vierge de sudoku ci-contre.
- Compléter la grille selon les règles du Sudoku.

Par exemple, $\frac{9}{6} - \frac{5}{6} = \frac{4}{6} = \frac{\mathbf{2}}{3}$ *donc,*
la troisième case de la ligne du haut comporte un 2.

$\frac{1}{13}+\frac{5}{13}$	$\frac{1}{7}+\frac{4}{7}$	$\frac{9}{6}-\frac{5}{6}$		$\frac{4}{3}+\frac{4}{3}$	$\frac{8}{4}-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}+\frac{6}{2}$		$\frac{15}{14}-\frac{7}{14}$
$\frac{2}{3}+\frac{5}{3}$	$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}$		$\frac{5}{9}-\frac{1}{9}$			$\frac{5}{7}-\frac{2}{7}$		
		$\frac{5}{3}+\frac{3}{3}$	$\frac{5}{6}-\frac{1}{3}$					$\frac{5}{2}+1$
$\frac{12}{7}-\frac{4}{7}$	$1-\frac{1}{3}$			$\frac{1}{5}+\frac{1}{10}$				$\frac{3}{7}+\frac{3}{7}$
$1+\frac{2}{3}$			$\frac{5}{9}-\frac{1}{3}$				$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$	
			$\frac{14}{9}-\frac{2}{3}$			$\frac{4}{3}+\frac{1}{3}$	$\frac{5}{2}-\frac{1}{2}$	
	$1-\frac{1}{9}$	$\frac{3}{8}+\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}-\frac{1}{4}$	$\frac{11}{3}-\frac{9}{3}$		$\frac{6}{2}+\frac{12}{4}$	$\frac{3}{6}+\frac{5}{6}$	
$\frac{12}{11}-\frac{10}{11}$	$\frac{7}{2}-\frac{25}{8}$		$1-\frac{1}{7}$		$\frac{9}{7}-\frac{1}{7}$		$\frac{2}{7}+1$	
$2+\frac{5}{2}$				$\frac{1}{7}+\frac{3}{7}$				

ESPACE & GÉOMÉTRIE

27

Les droites du triangle

Connaissances ♡ et compétences ♢ du cycle 4

♡ Triangle : hauteurs et médiatrices.

Débat : mot valise

Un **mot-valise** est un mot formé par l'accolement du début d'un mot et la fin d'un autre mot. À l'heure actuelle, on invente régulièrement des mots-valises : *Brexit* pour Britain et exit, *Twictée* pour Twitter et dictée, *pourriel* pour poubelle et courriel…
Les maths n'échappent par à la règle et le mot *médiatrice* est un mot-valise qui vient de médiane (dans un triangle, droite joignant un sommet au milieu du côté opposé) et bissectrice (droite coupant un angle en deux angles égaux). Il a été formé en 1923, donc très récemment.

Vidéo : **Les mots-valises**, chaîne YouTube *Image et communication*, épisode d'*Au pied de la lettre*.

Cahier de compétences : chapitre 8, exercices 18 à 26 ; 29.

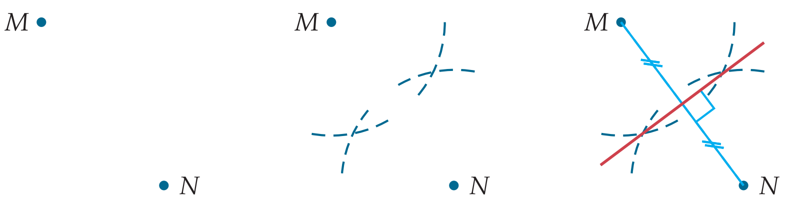
Activité d'approche

Des droites concourantes

Objectifs : tracer les médiatrices d'un triangle ; démontrer que les médiatrices d'un triangle sont concourantes ; faire une démonstration.

Partie 1 : construction de médiatrices

1) Expliquer à l'oral la construction de la médiatrice d'un segment d'après les schémas suivants :



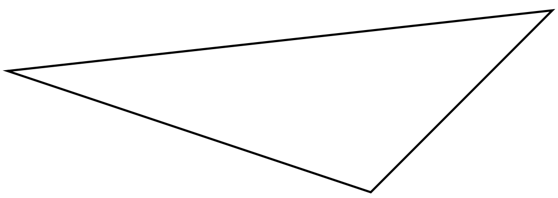
2) Donner une définition de la médiatrice d'un segment :

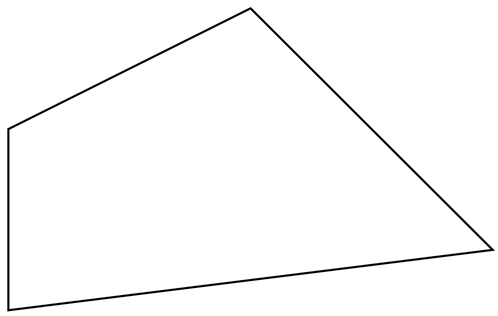
____

3) Donner une propriété de la médiatrice d'un segment :

____

4) Tracer la médiatrice de tous les côtés de ces deux polygones.





5) Pour quel polygone les médiatrices sont-elles concourantes ? ______________________

Partie 2 : démonstration

6) Sur une feuille, tracer un triangle ABC puis tracer la médiatrice de $[AB]$ et la médiatrice de $[BC]$.
Placer O, point d'intersection de ces deux médiatrices.

7) O se situe sur la médiatrice de $[AB]$. Comparer les longueurs OA et OB : ______________________

8) O se situe sur la médiatrice de $[BC]$. Comparer les longueurs OB et OC : ______________________

9) En déduire une relation entre OA et OC : ______________________

10) Que peut-on dire du point O par rapport à $[CA]$? ______________________

11) Tracer le cercle de centre O passant par A. Que remarque-t-on ? ______________________

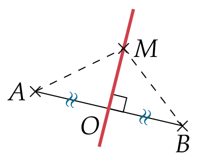
12) Conclure : ______________________

1. Médiatrices d'un triangle

DÉFINITION

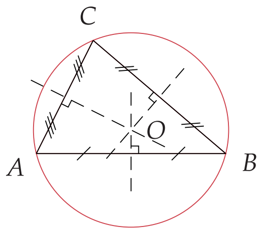
Les **médiatrices** d'un triangle sont les médiatrices des côtés du triangle, c'est-à-dire les trois droites perpendiculaires aux côtés qui passent par leur milieu.

Pour tracer la médiatrice du segment $[AB]$ au compas, on choisit un écartement au compas et on trace deux arcs de cercle à partir de A et de B de part et d'autre du segment $[AB]$. Puis on trace la droite passant par les deux points formés par l'intersection des arcs de cercle.



PROPRIÉTÉ 4 Si un point appartient à la médiatrice d'un segment, alors il est équidistant des extrémités de ce segment.

Ici, M appartient à la médiatrice de $[AB]$. Donc $MA = MB$.



PROPRIÉTÉ 5 Dans un triangle, les trois médiatrices sont concourantes en un point qui est le centre du cercle circonscrit au triangle.

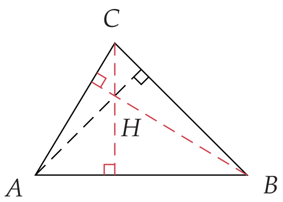
Ici, les médiatrices à $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$ se coupent en O qui est le centre du cercle passant par les trois sommets A, B et C.

2. Hauteurs d'un triangle

DÉFINITION

Les **hauteurs** d'un triangle sont les hauteurs relatives aux sommets du triangle, c'est-à-dire les trois droites perpendiculaires aux côtés qui passent par le sommet opposé.

Pour tracer la hauteur dans un triangle issue d'un sommet, on trace la droite passant par ce sommet et perpendiculaire au côté opposé.



PROPRIÉTÉ 6 Dans un triangle, les trois hauteurs sont concourantes en un point appelé orthocentre du triangle.

Ici, H est le point de concours de la hauteur issue de C et de celle issue de B. Donc, $[AH]$ est la hauteur issue de A.

Entraînement

Tracés de médiatrices et de hauteurs

1 Suivre le programme suivant en codant les éléments construits :

1) Construire un triangle CJR quelconque.

2) Tracer en rouge la médiatrice du segment $[JR]$ à l'aide du compas et d'une règle graduée.

3) Tracer en noir la médiatrice du segment $[CJ]$ à la règle graduée et à l'équerre.

4) Construire la médiatrice (d) du segment $[CR]$ avec seulement une équerre (non graduée).

2 Dans chaque cas, construire le triangle puis son cercle circonscrit de centre O.

1) Triangle SKI tel que :
$SI = 8\,\text{cm}$; $\widehat{KSI} = 65°$et $\widehat{KIS} = 45°$.

2) Triangle GYM tel que :
$GM = 4\,\text{cm}$; $GY = 5\,\text{cm}$ et $\widehat{YGM} = 103°$.

3) Triangle TIR tel que :
TIR est isocèle en T ; $TI = 8\,\text{cm}$ et $IR = 5{,}5\,\text{cm}$.

4) Triangle VTC tel que :
VTC est un triangle équilatéral de côté 4 cm.

3 Construction de hauteurs.

1) Construire un triangle BLE puis tracer :
- en bleu, la hauteur issue du sommet E ;
- en noir, la hauteur issue du sommet B ;
- en rouge, la hauteur relative à $[BE]$.

2) Quelle remarque peut-on faire ?

4 Tracer les hauteurs dans les cas suivants :

1) Un triangle ONE ayant trois angles aigus, quelle remarque peut-on faire sur l'orthocentre ?

2) Un triangle TWO tel que l'angle $\widehat{TWO}$ soit obtus, quelle remarque peut-on faire sur l'orthocentre ?

3) Un triangle TRE rectangle en R, quelle remarque peut-on faire sur l'orthocentre ?

Conjectures et démonstrations

5

1) Tracer un triangle YES quelconque.

2) Placer :
- le milieu O du côté $[ES]$;
- le milieu U du côté $[YS]$;
- le milieu I du côté $[YE]$.

3) Tracer le triangle OUI puis ses hauteurs.

4) Placer le point T orthocentre du triangle OUI.

5) Trace le cercle de centre T et de rayon $[TY]$.

6) Quelle conjecture peut-on écrire ?

6

1) Tracer un triangle BAC rectangle en A.

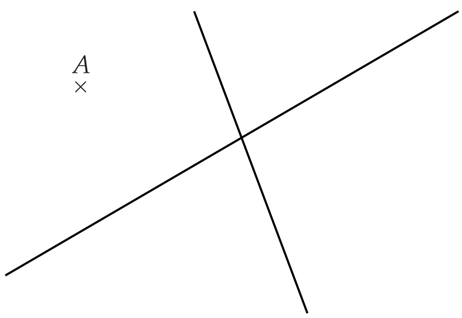
2) Placer un point M à l'extérieur du triangle ABC.

3) La droite perpendiculaire à (AB) passant par M coupe $[AB]$ en I et la droite perpendiculaire à $[AC]$ passant par M coupe $[AC]$ en J.

4) Placer le point P sur la demi-droite $[MI)$ tel que I soit le milieu de $[MP]$ et le point Q sur la demi-droite $[MJ)$ tel que J soit le milieu de $[MQ]$.

5) Que représente le point A pour le triangle MQP ? Justifier.

7 Amira avait tracé un triangle AVU au crayon et les médiatrices de deux des côtés au stylo. Son voisin Arthur a effacé le triangle mais a laissé le point A et les deux médiatrices. Reconstruire le triangle d'Amira.



Source : Sesamath, le manuel 5e. Génération 5 - 2013

La droite d'Euler

Ouvrir Geogebra et choisir l'onglet **Géométrie**.

Partie A : construction de la figure

	Instructions	Outil GeoGebra	Action
1)	Construction du **triangle** ABC		
	Tracer un triangle ABC	polygone	cliquer en trois points quelconques du plan
2)	Construction des trois **hauteurs** et de l'orthocentre H		
	Tracer les hauteurs du triangle	droites perpendiculaires	sélectionner pour chaque hauteur le sommet et son côté opposé
	Placer l'orthocentre	intersection entre deux objets	sélectionner deux hauteurs parmi les trois
	Renommer l'orthocentre en H	clic droit propriétés	nom du point : H
	Effacer les hauteurs	clic droit	décocher « afficher l'objet »
3)	Construction des trois **médiatrices** et du centre du cercle circonscrit O		
	Tracer les médiatrices du triangle	médiatrices	choisir pour chaque médiatrice deux sommets du triangle
	Placer le centre du cercle circonscrit	...	...
	Renommer le centre en O	...	...
	Tracer le cercle circonscrit	cercle (centre-point)	choisir le centre O et le sommet A
	Effacer les médiatrices	...	...
4)	Construction des trois **médianes** et du centre de gravité G. *La médiane d'un côté du triangle est la droite passant par le milieu du côté et le sommet opposé. Le point de concours des médianes s'appelle le centre de gravité.*		
	Tracer les médianes du triangle	milieu ou centre	pour chaque médiane, sélectionner deux sommets du triangle
		droite passant par deux points	sélectionner un sommet et le milieu du côté opposé
	Placer le centre de gravité	...	...
	Renommer le centre en G	...	...
	Effacer les médianes et les milieux	...	...

Partie B : constatations

5) H, O et G peuvent-ils être confondus ? Dans quels cas ?

____

6) Dans le cas où aucun point n'est confondu, que peut-on conjecturer sur l'alignement des points H, O et G ?

____

7) Peut-on conjecturer l'existence d'une relation de longueur entre OH et OG ?

____

ORGANISATION & GESTION DE DONNÉES

28

Le ratio

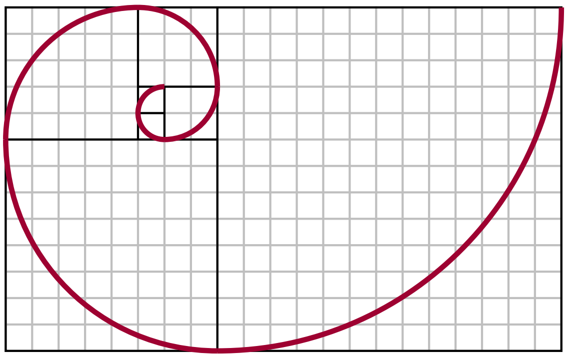
Connaissances ♡ et compétences ♢ du cycle 4

♡ Notion de ratio.

♢ Partager une quantité (par exemple une somme d'argent) en deux ou trois parts selon un ratio donné.

Débat : d'où vient le ratio ?

Ratio vient de l'anglais **ratio** que l'on traduit par proportion qui lui-même vient du latin **ratio** qui signifie calcul ou compte. Ce vocabulaire est plutôt utilisé dans le monde anglo-saxon.
On le retrouve pour la première fois dans *Les éléments*, d'*Euclide*, soit il y a environ 2 300 ans !



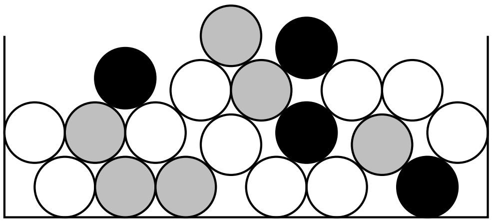
Vidéo : **Quel est le point commun entre un ananas, des lapins et la tour de Pise ?**, chaîne YouTube *Unisciel*.

Cahier de compétences : chapitre 5, exercices 36 à 46 ; 51 ; 52.

Activité d'approche

Représenter des ratios

Objectifs : calculer un ratio ; partager une quantité en deux ou trois parts selon un ratio donné.



Dans cette boite, il y a 4 balles noires pour 6 balles grises. On dit que la quantité de balles noires et grises est dans le ratio de 4 : 6 (on lit « 4 pour 6 ») ou encore 2 : 3 (« 2 pour 3 »).
Inversement, le ratio des balles grises et noires est de 6 : 4.

1) a) Quel est le ratio des balles noires et blanches ? Simplifier éventuellement ce ratio.

---

b) Quel est le ratio des balles grises et blanches ? Simplifier éventuellement ce ratio.

---

c) Comment pourrait-on écrire le ratio de balles noires, grises et blanches ?

---

d) Quelle fraction du total des balles représente les balles noires ? Les balles grises ? Les balles blanches ?

---

2) Dans cette question, on garde les mêmes ratios que dans les questions précédentes.

a) Si le bac contenait 40 balles, combien aurait-on de balles noires ? Grises ? Blanches ?

Quelle fraction du total des balles représente chaque sorte de balles ?

---

b) Si le bac contenait 10 balles, combien aurait-on de balles noires ? Grises ? Blanches ?

Quelle fraction du total des balles représente chaque sorte de balles ?

---

c) Si le bac contenait 130 balles, combien aurait-on de balles noires ? Grises ? Blanches ?

Quelle fraction du total des balles représente chaque sorte de balles ?

---

3) On souhaite partager 21 balles roses et violettes dans le ratio 3 : 4. Combien aura-t-on de balles roses et violettes ?

---

4) On partage 48 balles bleues, blanches et rouges dans le ratio 1 : 2 : 3. Combien a-t-on de balles de chaque couleur ?

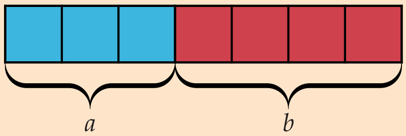
---

1. Définition du ratio

DÉFINITION

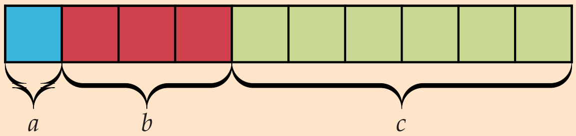
- On dit que **deux nombres** a et b sont, par exemple, dans le **ratio** $3:4$ si $\dfrac{a}{3} = \dfrac{b}{4}$.
  On parle de ratio « trois pour quatre ».

  On peut modéliser ainsi :



- On dit que **trois nombres** a, b et c sont, par exemple, dans le **ratio** $1:3:6$ si $\dfrac{a}{1} = \dfrac{b}{3} = \dfrac{c}{6}$.
  On parle de ratio « un pour trois pour six ».

  On peut modéliser ainsi :



Exemple Yassine et Nisrine se partagent des cookies dans un ratio $3:4$, cela veut dire que, à chaque fois que Yassine a 3 cookies, Nisrine en a 4 si bien que le nombre de cookies que possède Yassine divisé par 3 est toujours égal au nombre de cookies que possède Nisrine divisé par 4.

Remarque : attention à ne pas confondre les notations $3:4$; $3 \div 4$ et $\dfrac{3}{4}$, la première désigne un ratio, la deuxième une division et la troisième une fraction.
Dans l'exemple, Yassine possède $\dfrac{3}{7}$ des cookies et Nesrine $\dfrac{4}{7}$.
Chacune de ces fractions permet de comparer une partie à la totalité, ce ne sont pas des ratios.

2. Méthode de partage suivant un ratio

MÉTHODE 1

Pour partager une quantité suivant un ratio :

- on calcule le nombre de parts égales à distribuer en additionnant les nombres du ratio ;
- on divise la quantité par le nombre de parts à distribuer ce qui nous donne la quantité par part ;
- on distribue les parts selon le ratio.

Exercice d'application

On souhaite partager 15 pièces d'or entre les pirates Seyon et Lloyd suivant le ratio $2:3$.
Combien vont-ils avoir de pièces d'or chacun ?

Correction

- Les 15 pièces d'or sont partagées en 5 parts égales (2 parts pour Seyon et 3 parts pour Lloyd).
- 15 pièces d'or $\div 5 = 3$ pièces d'or donc, une part vaut 3 pièces d'or.
- Seyon a 2 parts, soit 2×3 pièces d'or $= 6$ pièces d'or et Lloyd a 3 parts, soit 3×3 pièces d'or $= 9$ pièces d'or.

On peut également dire que Seyon et Lloyd se partagent les pièces d'or suivant le ratio $6:9$.

Entraînement

Calculer un ratio

1 Simplifier les ratios suivants.

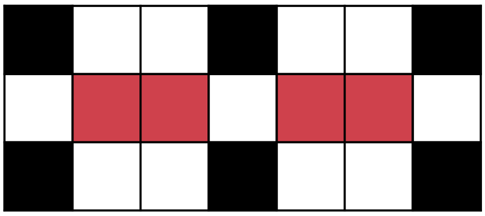
1) 35 : 20 **2)** 49 : 70 **3)** 18 : 24

2 Déterminer des ratios.

1) Un paquet de bonbons contient 13 bonbons à la fraise et 8 au citron.
Dans quel ratio sont les bonbons à la fraise et les bonbons au citron ?

2) Un paquet de bonbons contient 28 bonbons à la fraise, 18 au citron et 14 au cola.
Dans quel ratio sont les bonbons à la fraise, les bonbons au citron et les bonbons au cola ?

3 Utiliser le dessin ci-dessous pour répondre aux questions.



1) Quel est le ratio carrés rouges - total de carré ?

2) Que peut représenter le ratio 4 : 6 ?

3) Selon quel ratio sont représentés les carrés noirs et les carrés blancs ?

4 Utiliser ce tableau des matchs perdus ou gagnés d'un collège pour répondre aux questions.

Sport	matchs gagnés	matchs perdus
Rugby	9	6
Judo	12	8
Handball	10	5

1) Quels sports ont un ratio équivalent gains-pertes ?

2) Pour le handball :

a) Quel est le ratio gains-matchs joués ?

b) Quelle est la fraction de matchs gagnés ?

c) Quel est le pourcentage de matchs gagnés ?

Calculer des quantité grâce à un ratio

5 Quelle quantité d'huile et de vinaigre utilise-t-on dans une vinaigrette de 500 mL réalisée dans le ratio 3 : 1 ?

6 Deux amis ont joué au loto et leur mise s'est faite selon le ratio 3 : 5. Ils gagnent 64 €.
Quelle est la somme d'argent qui revient à chacun d'eux ?

7 Une recette de biscuits sablés commence par la fabrication d'un « sable » réalisé avec de la farine, du beurre et du sucre dans le ratio 10 : 6 : 5. Une pâte homogène est ensuite fabriquée avec ce sable et un peu de lait.
Quelles masses de farine, de beurre et de sucre doit-on prendre pour créer un « sable » de 630 g ?

8 Pour récompenser leurs enfants Clémentine, Myrtille et Prune, qui les ont beaucoup aidés, M. et Mme Potager leur donnent un peu d'argent. Ils leur distribuent 120 € selon le ratio 3 : 4 : 5 parce qu'ils n'ont pas aidé autant les uns que les autres.
Combien chacun va-t-il recevoir ?

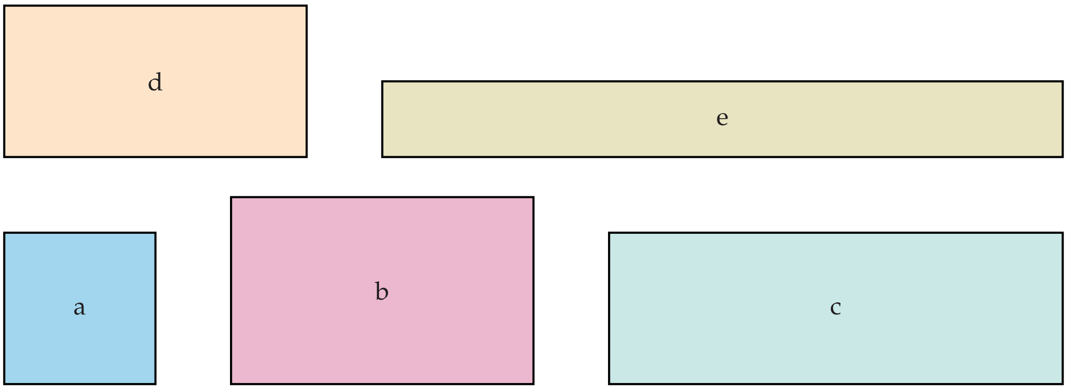
9 Dans une assemblée, le ratio hommes-femmes est de 50 : 45.
Si cinq femmes entrent, le ratio sera-t-il de 50 : 50 ?

10 Adam va fêter ses 13 ans. Avant son anniversaire, il essaie une nouvelle recette de cocktail sans alcool, pour laquelle il faut 2 verres de jus d'orange pour 3 verres de jus d'ananas et 4 verres de jus de pomme.
Cette recette lui plaît. Pour tous ses amis, il veut préparer 45 L de cocktail.
Combien de litres de chaque ingrédient doit-il acheter ?

D'après « Les ratios au collège », académie de Bordeaux.

The golden ratio

1) Among the following rectangles, circle the one you think is the most attractive and well-balanced.



2) Measure each rectangle's length and width, and compare the ratio of length to width for each rectangle above :

Rectangle	a	b	c	d	e
Length (ℓ) in cm					
Width (w) in cm					
$\ell \div w$					

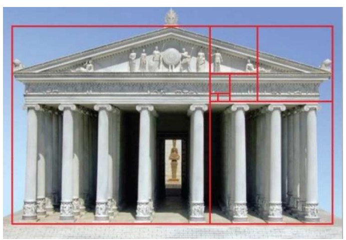
3) Draw a segment 10 cm long then make a small mark on it 6,18 cm along. Divide the length of the whole line by the length of the long section just made. Divide the length of the long section by the length of the short section. What ratios do you get ?

4) Unscramble the words to find out the various names of this ratio.

TEH	_ _ _	HET	_ _ _
DEOGNL	_ _ _ _ _ _	NODLEG	_ _ _ _ _ _
TAIRO	_ _ _ _ _	NOOPOITRRP	_ _ _ _ _ _ _ _ _ _
ETH	_ _ _	HTE	_ _ _
DIINVE	_ _ _ _ _ _	DEONLG	_ _ _ _ _ _
TINPOORPRO	_ _ _ _ _ _ _ _ _ _	NEBRUM	_ _ _ _ _ _

5) This number named golden ratio is $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Calculate is value with your calculator : _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

A golden rectangle has a length to width ratio called the golden ratio, which is approximately 1.618. It is used often in art and architecture. For example, the front of the Parthenon, a temple in Athens, Greece fits into a golden rectangle.



NOMBRES & CALCULS

29

Introduction aux équations

Connaissances ♡ et compétences ♢ du cycle 4

- ♡ Notion d'inconnue, d'équation.
- ♢ Utiliser le calcul littéral pour valider ou réfuter une conjecture, pour modéliser une situation.

Débat : les équations

Aussi loin que remontent les textes connus en mathématiques, on y trouve des questions que l'on modéliserait aujourd'hui par des **équations** qui consistent à remplacer les valeurs inconnues par des lettres (souvent x) et à exprimer un lien entre les inconnues et des grandeurs caractérisées par des nombres. L'objectif est de trouver la ou les inconnues, sachant qu'il n'est pas toujours possible de les déterminer algébriquement.

$x^2 - 5x + 4 = 0$

$3x - 6 = 0$ $\quad$ $e^x - 4 = 0$

$x + 5 = 0$ $\quad$ $2\sqrt{x} = 4$

Vidéo : **Les équations**, site Internet *Le blob*, épisode de la série *Petits contes mathématiques*.

Cahier de compétences : chapitre 4, exercices 23 à 36 ; 40 à 42.

Activité d'approche

Programme de calcul

Objectifs : tester une égalité ; utiliser un tableau numérique (tableur) ; établir une expression littérale.

On considère le programme de calcul suivant. À l'issue de ce programme, on obtient 257.

> Choisir un nombre.
> Lui ajouter 3.
> Multiplier le résultat par 5.
> Ajouter le double du nombre choisi au départ.

Partie 1 : tester des valeurs à la main

1) Tester le programme avec 0 : ____

2) Tester le programme avec 1 : ____

3) Tester le programme avec 10 : ____

4) Tester le programme avec 22 : ____

Partie 2 : tester des valeurs à l'aide d'un tableur

On s'aperçoit très vite que pour trouver la valeur de départ, il faut procéder à de nombreux essais à moins de tomber « par hasard » sur la bonne valeur. On ne peut pas non plus « remonter » l'algorithme car dès le début, il faudrait connaître la valeur de départ. Afin de limiter les calculs, on va donc s'aider d'un tableur.

5) Ouvrir un tableur présent sur l'ordinateur.

6) Remplir la première ligne ainsi :

	A	B	C	D
1	nombre choisi	ajouter 3	multiplier le résultat par 5	ajouter le double du nombre de départ

7) Dans la cellule `A2`, inscrire 0.
Dans la cellule `B2`, écrire la formule suivante : `=A2+3`
Que signifie cette formule ? Quel résultat s'affiche dans cette cellule ?

____

☞ Une cellule est désignée par un couple lettre-nombre qui indique la case à l'intersection de la colonne lettre et de la ligne nombre.

9) Quelle formule doit-on entrer dans la cellule `C2` pour obtenir le résultat de la cellule `B2` multiplié par 5 ? Vérifier que le résultat affiché est cohérent.

____

☞ Pour saisir une formule dans une cellule, il faut commencer par le signe `=` *pour indiquer qu'il s'agit d'un calcul.*

10) Quelle formule doit-on entrer dans la cellule `D2` pour obtenir le résultat de la somme de la cellule de la cellule `C2` et du double du nombre de départ ? Vérifier que le résultat affiché est cohérent. ____________________

☞ Dans une feuille de calcul, le signe de multiplication est l'étoile `*`

11) Afin de tester un grand nombre de valeurs, on entre les nombres de 0 à 50 dans la colonne `A` : entrer dans la cellule `A3` le nombre 1, sélectionner les cellules `A2` et `A3` puis copier la sélection vers le bas jusqu'à 50.

☞ Pour copier les cellules, sélectionner le coin inférieur droit des deux cellules sélectionnées puis glisser la souris vers le bas.

12) Sélectionner les cellules `B2` à `D2` et les copier vers le bas.

14) Conclure sur la solution du problème. ________________________

1. Notion d'équations

DÉFINITION

- Une **équation** est une égalité entre deux expressions où apparaissent des **inconnues** désignées par des lettres.
- **Résoudre** l'équation, c'est trouver toutes les valeurs possibles pour l'inconnue.
Ces valeurs sont appelées des **solutions** de l'équation.

inconnue x

$$\underbrace{2x+5}_{1^{\text{er}}\text{ membre}} = \underbrace{105}_{2^{\text{e}}\text{ membre}}$$

La solution de cette équation est le nombre réel $x = 50$

2. Tester une égalité

MÉTHODE 1 Résoudre une équation en testant une égalité

Pour résoudre une équation, on peut tester différentes valeurs de l'inconnue et vérifier que les deux membres de l'égalité sont égaux en effectuant les étapes suivantes :

1) on écrit séparément les deux membres de l'égalité ;
2) on remplace l'inconnue par la valeur numérique dans chaque membre ;
3) on calcule la valeur de chaque membre :
   - si elles sont égales, l'égalité est vraie.
   - si elles ne sont pas égales, l'égalité est fausse.

Exercice d'application L'égalité $2x + 1 = 5x - 5$ est-elle vraie pour $x = 3$?

Correction Pour $x = 3$, on a :

- $2x + 1 = 2 \times 3 + 1 = 7$.
- $5x - 5 = 5 \times 3 - 5 = 10$.

Les deux membres de l'égalité ne sont pas égaux, donc l'égalité n'est pas vraie pour $x = 3$.

Exercice d'application L'égalité $2x + 1 = 5x - 5$ est-elle vraie pour $x = 2$?

Correction Pour $x = 2$, on a :

- $2x + 1 = 2 \times 2 + 1 = 5$.
- $5x - 5 = 5 \times 2 - 5 = 5$.

Les deux membres de l'égalité sont égaux, donc l'égalité est vraie pour $x = 2$.
On dit que 2 est une solution de l'équation $2x + 1 = 5x - 5$.

REMARQUE : en cinquième, on résout une équation en testant des valeurs pour l'inconnue.
La résolution algébrique sera abordée à partir de la quatrième.

Entraînement

Tester une égalité

1 L'égalité $5x = 2x + 15$ est-elle vérifiée :

1) Pour $x = 4$.
2) Pour $x = 5$.

2

1) Montrer que pour $x = 3$, l'égalité $2x^2 = 6x$ est vérifiée.
2) Peut-on trouver un autre nombre pour lequel l'égalité précédente est vérifiée ?

3 Déterminer si l'égalité $3y = 4x - 3$ est vérifiée :

1) pour $y = 3$ et $x = 3$.
2) pour $y = 2$ et $x = 4$.

Résoudre une équation

4 Compléter les opérations à trou suivantes.

1) $4 \times$ ____ $= 8$
2) $6 \times$ ____ $= 54$
3) ____ $\times 25 = 50$
4) $1 \times$ ____ $= 89$
5) _____ $\times 21 = 0$
6) $10 \times$ ___ $= 10$
7) $4 \times$ ____ $= 2$
8) _____ $\times 4 = 6$
9) $5 \times$ ____ $= 22$
10) $4 \times$ _____ $= 3$

5 Compléter les opérations à trou suivantes.

1) $2 +$ ____ $= 16$
2) $5 +$ ____ $= 15$
3) $18 +$ ____ $= 0$
4) $18 +$ ____ $= 8$
5) $-3 +$ ____ $= 1$
6) $-5 +$ ___ $= -7$
7) $+2 +$ ____ $= 6$
8) $-7 +$ ___ $= -3$
9) $+6 +$ ____ $= 3$
10) $10 +$ ___ $= -4$

6 Résoudre de tête les équations suivantes.

1) $3 + x = 25$
2) $-15 + x = 32$
3) $2 + x = -5,8$
4) $-45 + x = -47$
5) $x + 42 = 78$
6) $x - 28 = 14$
7) $x + 48 = -29$
8) $x - 8,5 = 7$
9) $3 \times m = 15$
10) $t \times 5 = 3,5$

Petits défis

7 Adam a inscrit un nombre sur sa calculatrice puis a tapé la suite de touches suivantes :

$\boxed{\times}$ $\boxed{5}$ $\boxed{+}$ $\boxed{8}$

1) Combien a-t-il trouvé en ayant choisi le nombre 24 ?
2) Adam a trouvé 43, quel nombre avait-il écrit sur sa calculatrice ?
3) Il se demande quel nombre afficher pour obtenir 12. Pouvez-vous l'aider ?

8 Voici un programme :

Choisi un nombre.
Retire-lui 3.
Multiplie le résultat par 5.

1) Faire fonctionner le programme avec trois nombres de votre choix supérieurs à 3.
2) Quel nombre faut-il choisir pour obtenir 15 ?
3) Quel nombre faut-il choisir pour obtenir 0 ?
4) Soit x le nombre de départ, donner l'expression finale en fonction de x.

9 La somme de trois entiers consécutifs est 72.
Quels sont ces nombres ?

10 Smaïl est allé au marché et avec 14,53 € il a acheté :

- 1,1 kg de viande à 10,50 € le kilogramme ;
- 250 g d'olives à 8,52 € le kilogramme ;
- un melon.

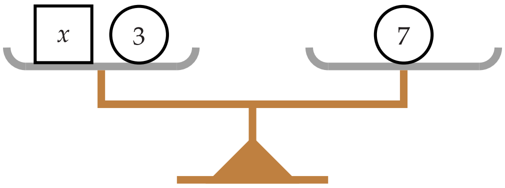
1) Quel est le prix du melon ?
2) On note m le prix de melon, quelle équation permet de résoudre le problème de manière littérale ?

Source : Les cahiers Sesamath 5e. Magnard-Sésamath 2017.

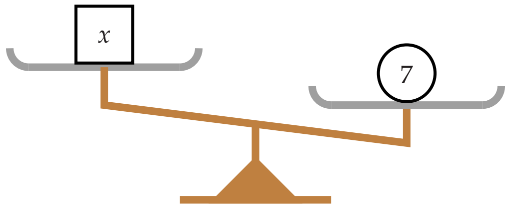
En route vers la quatrième

Partie A : équations du type $x + a = b$

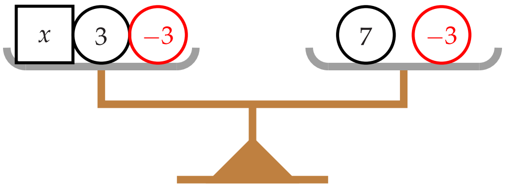
1) On souhaite résoudre l'équation $x + 3 = 7$. Trouver la solution de tête : ______________________________
On peut schématiser cette équation de la façon suivante à l'aide une balance :



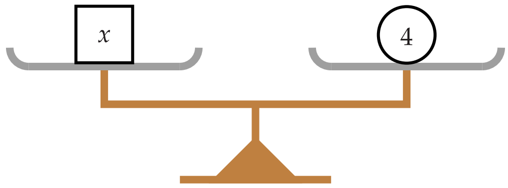
Le bras de gauche contient les poids $\boxed{x}$ et 3, le bras de droite le poids 7. On veut rendre $\boxed{x}$ seul.
Traduction algébrique : $x + 3 = 7$.



En enlevant le poids 3 à gauche, la balance n'est plus en équilibre, l'équation n'est donc plus vérifiée.
Traduction algébrique : $x \neq 7$.



On enlève donc le poids 3 à gauche ET à droite pour équilibrer la balance. Cela revient à ajouter le poids -3.
Traduction algébrique : $x + 3 + (-3) = 7 + (-3)$.

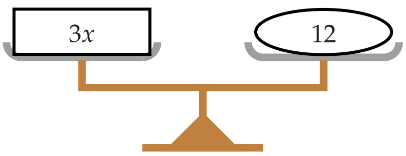


3 et -3 s'annulent à gauche laissant $\boxed{x}$ seul et on obtient 4 à droite.
Traduction algébrique : $x = 4$.

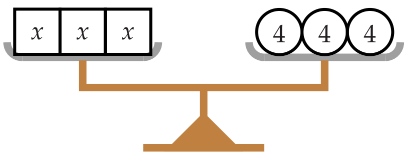
2) Résoudre de la même manière les équations suivantes :
a) $x + 2 = 5$ **b)** $x - 4 = 3$ **c)** $x + 7 = -3$ **d)** $x - 6 = -9$

Partie B : équations du type $a \times x = b$

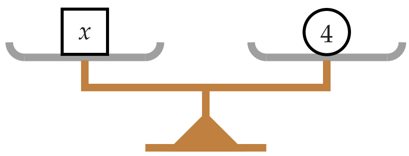
3) On souhaite résoudre l'équation $3 \times x = 12$. Trouver la solution de tête : ____________________________
On peut schématiser cette équation de la façon suivante avec une balance :



Le bras de gauche contient le poid $\boxed{3x}$, le bras de droite le poids 12.
On veut rendre $\boxed{x}$ seul.
Traduction algébrique : $3 \times x = 12$.



On divise les poids en 3, on obtient sur le bras de gauche : $3x = x + x + x$ et sur le bras de droite : $12 = 4 + 4 + 4$
Traduction algébrique : $3 \times x = 3 \times 4$.



Par proprotionnalité, on en déduit alors que chaque poids $\boxed{x}$ est égal à un poids 4.
Traduction algébrique : $x = 4$.

4) Résoudre de la même manière les équations suivantes :
a) $2x = 8$ **b)** $4x = 9$ **c)** $7x = -56$ **d)** $-5x = -15$

GRANDEURS & MESURES

30

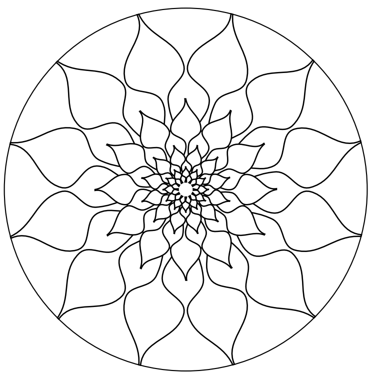
Transformations et grandeurs

Connaissances et compétences abordées

- ◇ Utiliser des transformations pour calculer des grandeurs géométriques.
- ◇ Comprendre l'effet d'une symétrie (axiale et centrale) sur une figure.
- ◇ Mobiliser les connaissances des transformations au programme pour déterminer des grandeurs géométriques.
- ◇ Mener des raisonnements et s'initier à la démonstration en utilisant des transformations.

Débat : les mandalas

Mandala est un terme sanskrit qui signifie *cercle*. Il désigne plus largement un objet support à la méditation et à la concentration composé de cercles ; de symétries et de formes diverses.



Vidéo : **Tibet sand painting of Mandala**, chaîne YouTube *Tibet travel*

Cahier de compétences : ∅.

Activité d'approche

Propriétés des symétries

Objectifs : observer l'effet d'une symétrie centrale ou d'une symétrie axiale sur les longueurs, les angles, le parallélisme et l'alignement ; utiliser un logiciel de géométrie dynamique.

Ouvrir Geogebra et choisir l'onglet **Géométrie**.

Partie 1 : symétrie axiale

1	Construction de la **figure** et de l'**axe de symétrie**		
	Tracer un quadrilatère $ABCD$	polygone	*cliquer en quatre points du plan*
	Placer un point E sur la droite (AB)	point sur objet	*cliquer quelque part sur la droite (AB)*
	Tracer la parallèle à (BC) passant par D	parallèle	*cliquer sur le segment $[BC]$ puis sur D*
	Tracer une droite (FG)	droite	*cliquer en deux points du plan*
2	Construction de la figure **symétrique par rapport à l'axe** (FG)		
	Tracer la figure symétrique	symétrie axiale	*sélectionner successivement chaque élément de la figure, puis la droite (FG)*
3	Faire apparaître différentes **mesures**		
	Mesurer la longueur du segment $[AD]$	distance	*cliquer sur le segment $[AD]$*
	Mesurer l'angle $\widehat{ABC}$	angle	*cliquer sur les trois points de l'angle*

1) Observer ce qu'il se passe lorsque l'on déplace un point du quadrilatère $ABCD$ ou de l'axe de symétrie.

2) Comparer la longueur du segment $[AD]$ et celle du segment $[A'D']$: ______________________________

3) Comparer la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ et celle de l'angle $\widehat{A'B'C'}$: ___________________________________

4) Où se situe le point E' ? ____

5) Les deux droites parallèles dans la figure d'origine le restent-elles dans la figure symétrique ? ___________

Partie 2 : symétrie centrale

1	Construction de la **figure** et du **centre de symétrie**		
	Tracer un pentagone $ABCDE$	polygone	*cliquer en cinq points du plan*
	Placer un point F sur la droite (AB)	point sur objet	*cliquer quelque part sur la droite (AB)*
	Tracer la parallèle à (CD) passant par E	parallèle	*cliquer sur le segment $[CD]$ puis sur E*
	Placer un point (G)	point	*cliquer en un point du plan*
2	Construction de la figure **symétrique par rapport au centre** G		
	Tracer la figure symétrique	symétrie centrale	*sélectionner successivement chaque élément de la figure, puis le point G*
3	Faire apparaître différentes **mesures**		
	Mesurer la longueur du segment $[BC]$	distance	*cliquer sur le segment $[BC]$*
	Mesurer l'angle $\widehat{CDE}$	angle	*cliquer sur les trois points de l'angle*

1) Observer ce qu'il se passe lorsque l'on déplace un point du pentagone $ABCDE$ ou le point G.

2) Comparer la longueur du segment $[BC]$ et celle du segment $[B'C']$: ______________________________

3) Comparer la mesure de l'angle $\widehat{CDE}$ et celle de l'angle $\widehat{C'D'E'}$: ___________________________________

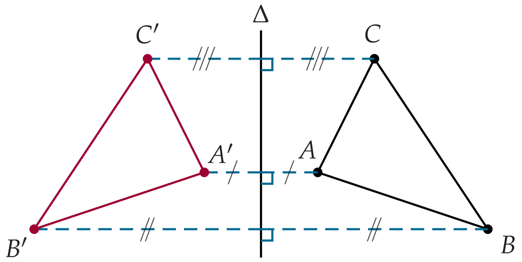
4) Où se situe le point F' ? ____

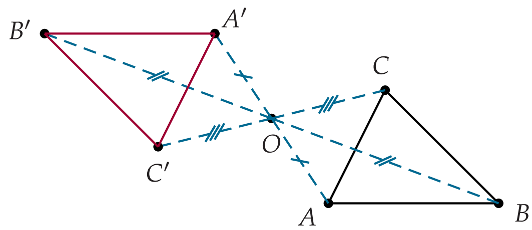
5) Les deux droites parallèles dans la figure d'origine restent-elles parallèles dans la figure symétrique ? ______

1. Rappels sur les symétries

DÉFINITION

- M' est l'image du point M par la **symétrie d'axe** Δ signifie que la droite Δ est la médiatrice du segment $[MM']$.
- M' est l'image du point M par la **symétrie de centre** O signifie que O est le milieu du segment $[MM']$.





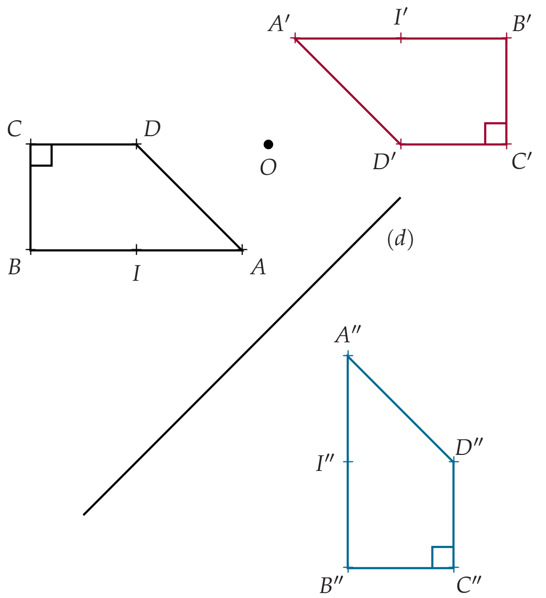
2. Propriétés des symétries

PROPRIÉTÉ

La symétrie axiale et la symétrie centrale **conservent** les longueurs, les angles, l'alignement et le parallélisme (ce sont des isométries).

Exemple

On considère la figure $A'B'C'D'$ symétrique de $ABCD$ par rapport au point O et la figure $A''B''C''D''$ symétrique de $ABCD$ par rapport à la droite (d).



Correction

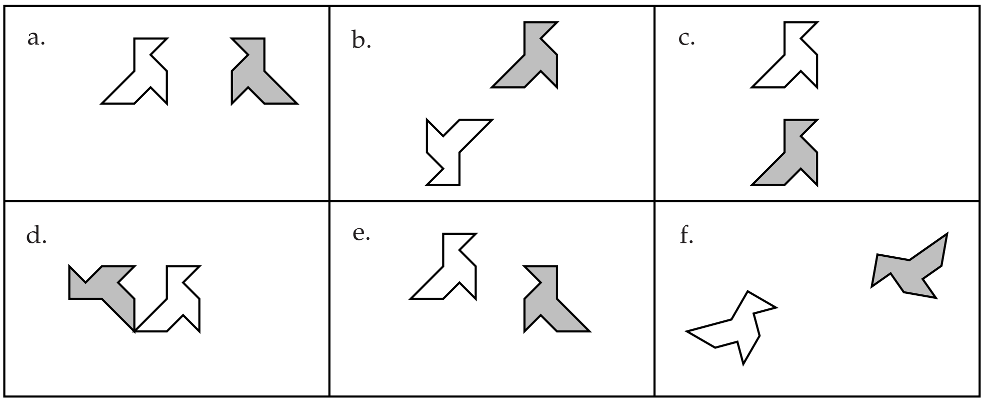
Propriétés conservées :

- L'alignement :
  $I \in [AB]$ donc : $\begin{cases} I' \in [A'B'] \\ I'' \in [A''B''] \end{cases}$
- le parallélisme :
  $(AB)//(CD)$ donc : $\begin{cases} (A'B')//(C'D') \\ (A''B'')//(C''D'') \end{cases}$
- Les longueurs :
  $A'B' = AB$ et $A''B'' = AB$
  $IA = IB$ donc $\begin{cases} I'A' = I'B' \\ I''A'' = I''B'' \end{cases}$
- Les angles :
  $(BC) \perp (CD)$ donc $\begin{cases} (B'C') \perp (C'D') \\ (B''C'') \perp (C''D'') \end{cases}$

Entraînement

Différencier les transformations

1 Pour chacune des figures suivantes, dire s'il s'agit ou pas d'une symétrie (axiale ou centrale). Si oui, tracer l'axe ou le centre de symétrie.

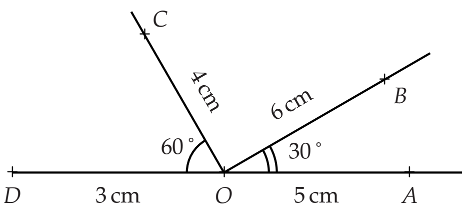


Propriétés et démonstrations

2 Soit ABC un triangle isocèle en A tel que $BC = 3\,\text{cm}$ et $BA = 4\,\text{cm}$.

1) Construire le triangle ABC.
2) Construire le symétrique de ABC par apport à A (D est le symétrique de B et E celui de C).
3) Construire le milieu I de $[BC]$ et J celui de $[DE]$.
4) Démontrer que les trois points J, A et I sont alignés. Que représente la droite (IJ) pour les segments $[BC]$ et $[DE]$?

3 Le dessin ci-dessous n'est pas à taille réelle. Les points D, O et A sont alignés.



1) Reproduire en vraie grandeur ce dessin.
2) Construire les points E et F, symétriques respectifs de B et C par rapport à O. Jules affirme que l'angle $\widehat{BOF}$ mesure $60\,°$ et l'angle $\widehat{COE}$ mesure $90\,°$.
   À-t-il raison ? Si oui, justifier ; sinon, corriger son affirmation.

4 Programme de construction :

- Tracer un triangle MOP tel que : $OM = 2{,}5\,\text{cm}$; $OP = 3\,\text{cm}$ et $\widehat{POM} = 70\,°$.
- Tracer la droite (d) perpendiculaire à la droite (OP) passant par le point P.
- Tracer le symétrique du triangle MOP par rapport à la droite (d) : on notera M' le symétrique de M par rapport à la droite (d), O' celui de O.

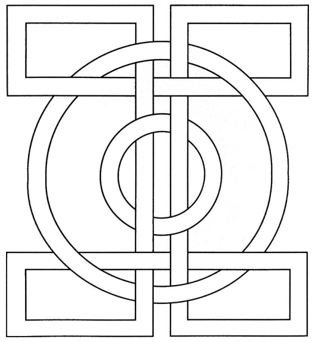
1) Quelle devrait-être la mesure de PO' ? Vérifier.
2) Quelle devrait-être la mesure de $M'O'$? Vérifier.
3) Quelle devrait-être la mesure de $\widehat{PO'M'}$? Vérifier.

5 Un quadrilatère $ABCD$ est appelé isocerfvolant en A si l'angle $\widehat{BAD}$ est droit et si la droite (AC) est un axe de symétrie.

1) a) Construire un quadrilatère ABCD qui soit un isocerfvolant en A.
   b) Construire un quadrilatère qui admette un axe de symétrie et qui ne soit pas un isocerfvolant.
2) a) Dans un isocerfvolant, montrer que $\widehat{DAC} = \widehat{BAC}$
   b) En déduire la mesure de l'angle $\widehat{DAC}$
   c) Quelle est la position relative de (BD) et (AC) ?
3) Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier les réponses.
   a) Tous les carrés sont des isocerfvolants.
   b) Tous les rectangles sont des isocerfvolants.

Source : Les cahiers Sesamath 6e et 5e. Magnard-Sésamath 2017.

Entrelacs chinois



Dans le rectangle quadrillé ci-dessous, les axes de symétrie ont été tracés en rouge, ils se coupent au point O. Le but est de reproduire l'entrelacs ci-contre, formé de trois rubans entrelacés, sachant que :

- l'épaisseur de ces rubans est de 1 carreau ;
- les dimensions de la figure complète sont de 17 carreaux sur 19 carreaux ;
- tous les segments sont portés par des lignes du quadrillages ;
- les cercles ont pour centre commun le point O ;
- les extrémités de leurs diamètres verticaux sont sur des lignes horizontales ;
- cette figure admet un centre de symétrie mais pas d'axe de symétrie.