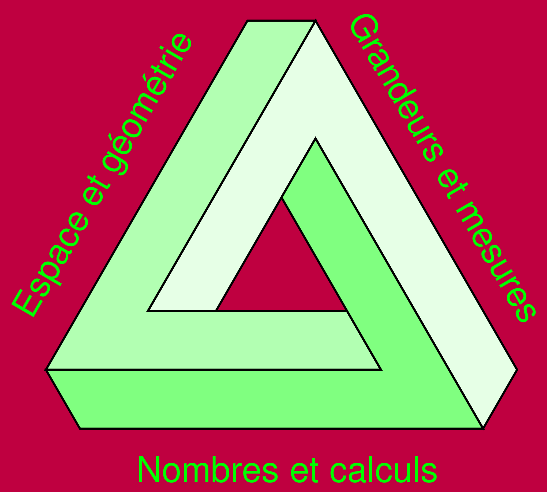
KiT
de survie pour le CRPE

Tome 2 : préparation à l'oral



Nathalie Daval
INSPE Montpellier
2022-2023

Ce manuel est à destination des AED et AESH de l'académie de Montpellier, inscrits à la préparation au concours de professeur des écoles, dans le cadre de la formation proposée par la DAFPEN et préparée à la FDE.

Cette version de 2022-2023 a été écrite avec LaTeX et la classe sesamanuel distribuée librement par l'association Sesamath. Si vous y trouvez des coquilles ou erreurs, merci de me les signaler à l'adresse suivante :
nathalie.daval@umontpellier.fr

Le tome 2 propose dans un premier temps de revenir sur le fonctionnement de l'épreuve orale de leçon français/maths du concours CRPE (admission), puis des 8 thèmes didactiques pouvant tomber en mathématiques. Chaque thème suit la trame suivante :

– **Dans les programmes** : les connaissances et compétences des programmes institutionnels, suivant les derniers BO (ce qui est attendu en fin d'école maternelle pour le cycle 1, et les programmes pour les cycles 2 et 3).

– **Repères didactiques** : un résumé des différents concepts pour chaque thème, ponctués de repères de progressivités sur les trois cycles ainsi que les obstacles et erreurs des élèves.

– **Vu au CRPE 2022** : un exemple d'oral portant sur le thème, choisi parmi les sujets officiels de 2022 ou des sujets préparatifs.

– **Analyse de documents** : des exercices ou parties d'exercices corrigés issus du CRPE « ancien modèle » permettant d'analyser des supports et des productions d'élèves.

– **Activités à faire en classe** : des exemples de séquences, séances ou activités qu'il est possible de faire en classe sur le thème.

Pour information, voilà une petite étude statistique sur les sujets tombés à la session 2022 pour l'académie de Montpellier (chapitres de ce kit).

Chapitres	Num1	Num2	Num3	Num4	Géo5	Géo6	Grm7	Tra8
Sujets	1	2	(2)	1				2
Cycle	C1	C2	(C2)	C3				C3

Toutes les notions abordées sont dans le domaine du numérique, dont deux dans le cadre de la proportionnalité et deux lors de la résolution de problèmes. Ce qui ne veut pas dire, of course, qu'il faut faire l'impasse sur l'espace, la géométrie, les grandeurs et les mesures ;-)

Bon courage à tous pour la session 2023 ! ! !

BY NC SA

Sommaire des réjouissances du tome 2 !

NOMBRES ET CALCULS

ESPACE ET GÉOMÉTRIE

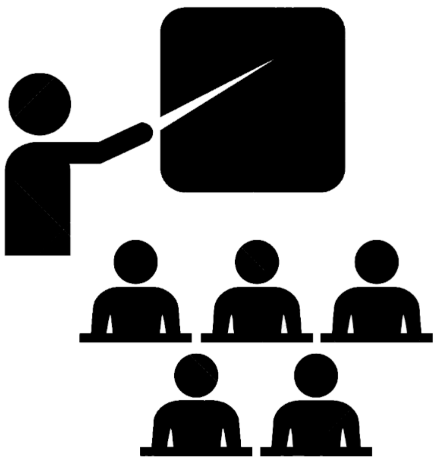
GRANDEURS ET MESURES

TRANSVERSAL

TRANSVERSAL

0

Quelques pistes pour préparer la leçon au concours



Un peu d'histoire

Les écoles normales, depuis le début du 19e siècle, puis les IUFM en 1989, les ESPE en 2013 et enfin (pour l'instant !) les INSPE en 2019 sont des établissements chargés de former les instituteurs, puis les professeurs des écoles, de collège et lycée et de lycées professionnels.

À partir de 1990, le corps des professeurs des écoles nait et le CRPE comprend 2 épreuves d'admissibilité (français, maths), ainsi que quatre épreuves d'admission (oral pro, option, EPS et entretien). Le concours se passait à la fin de la première année et le stage en deuxième année, en alternance.

En 2005, le concours est composé de trois épreuves d'admissibilité écrites (français, maths, GH et sciences) et trois entretiens oraux (EPS, LVE, oral pro).

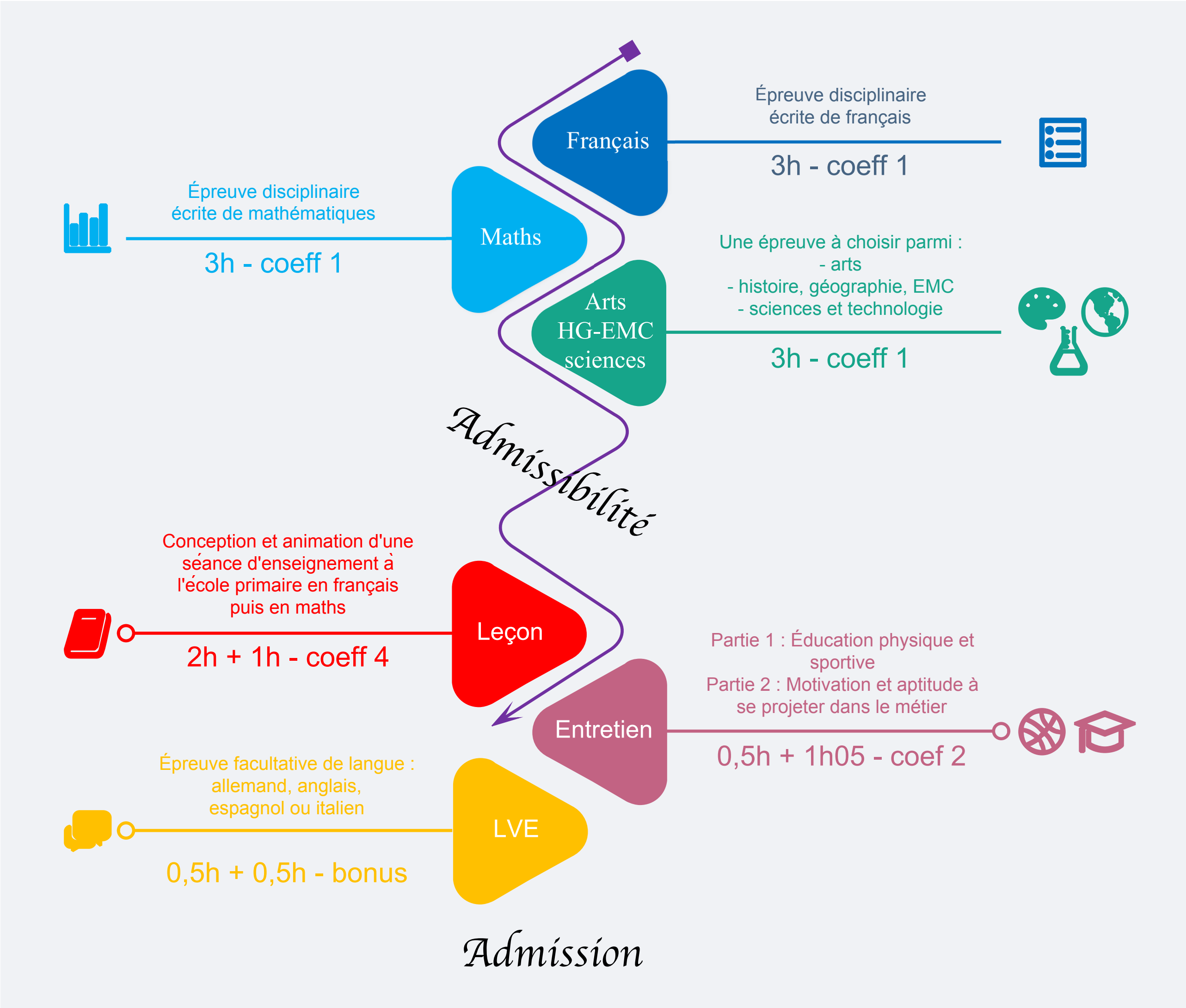
En 2010, une réforme voit le jour, et les candidats sont dans l'obligation d'être titulaire d'un master 2 pour devenir professeur des écoles. Le concours, quant à lui, reste le même.

En 2015, une nouvelle réforme a lieu, les épreuves d'admissibilité sont réduites à deux matières (français et maths), et deux épreuves d'admission orales (dossier et connaissance du système éducatif, puis EPS).

À partir de 2022, après une énième réforme, l'admissibilité repasse à trois épreuves (français, maths et arts-HGEMC-sciences au choix) et deux épreuves orales (leçon en français-maths et entretien), en plus d'une épreuve facultative de langues.

1. Les épreuves au concours à partir de la session 2022

Et comme une infographie vaux mieux qu'un long discours...



Concernant l'**épreuve écrite de mathématiques**, d'une durée de 3h, elle est constituée d'un ensemble d'au moins trois exercices indépendants (pour la session 2022, les différents sujets étaient composés de quatre ou cinq exercices), permettant de vérifier les connaissances disciplinaires. Elle est notée sur 20 et une note inférieure ou égale à 5 est éliminatoire, tout comme les autres épreuves écrites.

L'**épreuve de leçon** est d'une durée de 1h de préparation commune (français et maths), suivie de deux parties de 30 minutes chacune en français et en maths (10 à 15 minutes d'exposé et le reste d'entretien avec le jury). Le sujet comporte deux dossiers (français et maths). Chacun est constitué d'au plus quatre documents de nature variée : supports pédagogiques, extraits de manuels scolaires, traces écrites d'élèves, extraits des programmes... et le candidat doit concevoir et animer une séance d'enseignement sur le thème donné.

2. Les repères institutionnels en mathématiques

Sur éDUSCOL, on trouve moult ressources officielles pour préparer sa classe dans les différentes disciplines. Concernant les mathématiques, on peut télécharger les ressources suivantes (liens cliquables).

Pour le cycle 1 [édu1], il est possible de consulter le programme consolidé publié au BO du 24 juin 2021, ainsi que des **ressources d'accompagnement** dans les domaines 4 (Acquérir les premiers outils mathématiques) et 5 (Se repérer dans le temps et dans l'espace).

Pour les cycles 2 et 3 [édu2] [édu3], on dispose de plusieurs types de ressources.
• Les **programmes de cycle** présentent les enjeux et les objectifs de formation de chaque cycle et mettent en évidence la contribution des différents champs disciplinaires à l'acquisition de chacun des cinq domaines de formation du socle commun.
• Les **repères annuels de progression** offrent une référence commune et doivent permettre d'aborder de façon équilibrée les connaissances et compétences tout au long des trois années de chaque cycle.
• Les **attendus de fin d'année** fixent un horizon en termes de connaissances et de compétences pour chaque niveau. Des exemples de réussite sont proposés afin d'illustrer ce que doit savoir faire l'élève de la fin du CP à la fin de la classe de 3e.
Outre ces trois types de ressources incontournables pour la préparation de progressions et de programmations, on y trouve également des **ressources thématiques** qui sont des pistes et des stratégies d'enseignement concrètes sur des notions des différents thèmes ainsi que des **ressources d'évaluation** proposant une aide à l'évaluation du niveau de maîtrise des domaines du socle commun en fin de cycle.

Tableau récapitulatif des ressources institutionnelles principales en élémentaire.

<table>
<tr><th>Cycle 2</th><th>Cycle 3</th></tr>
<tr><td>Programme du cycle 2 (juin 2020)</td><td>Programme du cycle 3 (juin 2020)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Attendus de fin d'année et repères annuels de progression du CP au CM2</td></tr>
<tr><td>Pour enseigner les nombres, le calcul et la résolution de problèmes au CP</td><td>La résolution de problèmes mathématiques au cours moyen</td></tr>
<tr><td colspan="2">Le calcul aux cycles 2 et 3</td></tr>
<tr><td>Le calcul en ligne au cycle 2</td><td>Le calcul en ligne au cycle3</td></tr>
<tr><td></td><td>Fractions et nombres décimaux au cycle 3</td></tr>
<tr><td>Grandeurs et mesures au cycle 2</td><td>Grandeurs et mesures au cycle 3</td></tr>
<tr><td></td><td>Espace et géométrie au cycle 3</td></tr>
<tr><td colspan="2">Initiation à la programmation aux cycle 2 et 3</td></tr>
<tr><td></td><td>Résoudre des problèmes de proportionnalité au cycle 3</td></tr>
</table>

3. Construction d'une séquence, d'une séance

A. Progression, programmation

Avant de commencer à préparer ses séances, il est nécessaire d'avoir tout d'abord réfléchi à la progression et la programmation des apprentissages.

Progression
Vient de « progrès » Elle établit un ordre dans les apprentissages par des étapes successives parmi les notions, tout en tenant compte des acquis des élèves. Facteur : les SAVOIRS

Programmation
Vient de « programme » Elle se préoccupe de la distribution chronologique des séquences dans le cadre de la progression et prend en compte le calendrier scolaire. Facteur : le TEMPS

Séquence
Ensemble de plusieurs séances liées entre elles par un même objectif. Unité de SENS

Séances			
Période d'enseignement d'une séquence. Unité de TEMPS			
Séance 1	Séance 2	...	Séance n
...	...		...

B. Séquence

Plus précisément, le BO stipule qu'une **séquence d'enseignement** est définie comme « un ensemble continu ou discontinu de séances, articulées entre elles dans le temps et organisées autour d'une ou plusieurs activités en vue d'atteindre des objectifs fixés par les programmes d'enseignement ». La séquence mène les élèves à un nouveau savoir ou savoir-faire qui prépare les acquisitions ultérieures.

Il existe plusieurs types de séances :

- **La séance de découverte** : elle permet de susciter l'intérêt des élèves. Les élèves découvrent : manipulent, expérimentent, questionnent, se familiarisent avec le matériel considéré ou les notions abordées.
- **La séance de structuration** : après la séance de découverte, les élèves savent quels savoirs sont mis en jeu, mais il leur manque des connaissances. Ils doivent passer de l'action à la formulation. C'est un bon moment pour comparer les résultats, réflexion, verbaliser... jusqu'à obtenir une trace écrite.
- **La séance d'entraînement** : les élèves sont amenés à répéter ce qu'ils ont appris lors de la séance précédente pour s'approprier les solutions, les mémoriser. Une fois qu'ils savent faire en réception, il faut également s'assurer qu'ils sont capables de produire une situation mettant en jeu cette compétence.
- **La séance de réinvestissement** : l'élève réinvestit son savoir dans un autre contexte, un autre domaine que celui de l'apprentissage initial. Il va renforcer, consolider et fixer ses acquis en les généralisant (ouverture, élargissement).

C. Construction d'une séance

La construction d'une séance est souvent matérialisée par une fiche de préparation. Celle-ci est assez personnelle et il en existe de plusieurs sortes. Toutefois, on y retrouve quelques invariants. Par exemple :

<table>
<tr><th colspan="2">Titre de la séance</th></tr>
<tr><td>Enseignement : mathématiques
Séquence :</td><td>Nombres et calculs - Grandeurs et mesures - Espace et géométrie
Place de la séance dans la séquence :</td></tr>
<tr><td colspan="2">Compétences travaillées/domaines du socle :
Attendus de fin de cycle :
Objectif(s) de l'activité : savoirs (connaissances) et/ou savoirs-faire (capacités). Il est formulé à l'aide d'un verbe d'action et il décrit le résultat attendu sans préciser la stratégie à mettre en œuvre pour l'atteindre.
Prérequis :</td></tr>
<tr><td>Cycle :
Période de l'année : P1 - P2 - P3 - P4 - P5</td><td>Niveau de classe :
Durée :</td></tr>
<tr><td>Dispositif : Individuel - Binôme - Ilots - Classe entière</td><td>Ressources, matériel : manuel, affichage, fiche, outils. . .</td></tr>
</table>

Phase	Objectifs	Activité élève	Activité enseignant(e)	Différentiation
Mise en route appropriation $\approx 5/10$ min	Provoquer une situation de départ qui focalise la curiosité des élèves. Associer les élèves au projet d'apprentissage, formuler l'objectif du jour.	S'implique dans un projet ; rappelle ce qui a été appris antérieurement ; comprend l'objectif du jour ; le reformule ; pose des questions, émet des avis. . .	Présente/explicite la consigne ; donne du sens aux apprentissages ; contextualise ; présente clairement l'objectif d'apprentissage ; le fait reformuler. . .	Matériel spécifique, fiche-outil, tuteur, reformulation. . .
Recherche ou entraînement $\approx 15/25$ min	À définir en fonction de l'objectif de la séance, variable s'il d'agit de phase de recherche ou d'entraînement, ou encore de remédiation.	Effectue la recherche (seul et/ou/puis en groupe) et en prépare la restitution sur un support.	Circule et observe ce que chacun fait, la manière dont il procède. Note les réactions originales pour pouvoir les exploiter ensuite.	Longueur de la situation-problème ; complexité de la situation ; tutorat ; fiches-outils.
Mise en commun $\approx 5/10$ min	Expliciter, vérifier les différents résultats et démarches ; travailler le langage et l'erreur ; valider et valoriser les solutions en rapport avec l'objectif fixé.	Débat sur les réponses trouvées, les stratégies mises en place. Discute, valide et modifie ses représentations. Prend part à un dialogue, écoute.	Organise les conditions de l'échange ; reçoit les solutions ; aide à les analyser, à les valider ou les invalider.	Restitution variable selon les capacités de l'élève.
Institutionnalisation $\approx 5/10$ min	Moment, essentiel, de synthèse et de structuration, pour l'enseignant et les élèves (« qu'est-ce que j'ai appris ? »).	Fait le point sur ce qui a été travaillé. Fait des propositions pour la trace écrite (met des mots sur ce qui a été trouvé) et la copie (éventuellement).	À partir de notes au tableau, d'exemples, de schéma ou d'une photo du travail réalisé, fait formuler la trace écrite. Elle doit être courte et claire.	Trace écrite à trou, photocopiée, grossie. . . en fonction des élèves et de leur éventuel handicap.

Bilan de la séance
Erreurs principales ou récurrentes ; réussites ; contournements ; facilité ; difficultés. . . Analyse de la séance en repérant les points d'appui et les pistes d'amélioration.

4. L'évaluation

Dans les apprentissages, il faut que l'enseignant parte de ce que l'élève sait faire afin de pouvoir cibler au mieux les évaluations qui vont être en lien direct avec l'objectif visé. L'évaluateur est un observateur qui comprend le processus d'apprentissage afin de pouvoir intervenir sur lui. Il convient de garder un rapport correct entre l'évaluation et la formation : c'est l'évaluation qui est au service de la formation, et non le contraire.

En maternelle, elle se traduit très souvent par une observation des démarches et stratégies mises en place par l'élève. Elle peut aussi avoir lieu lors de restitution orale.

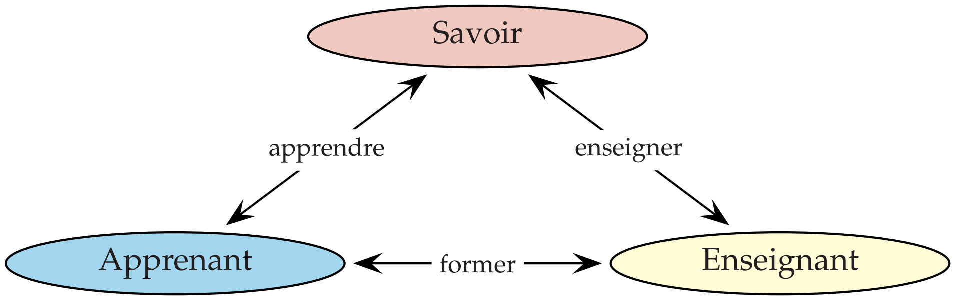
Il existe trois types d'évaluations principales : l'évaluation diagnostique, l'évaluation formative et l'évaluation sommative, chacune ayant une fonction différente :

	Évaluation diagnostique	Évaluation formative	Évaluation sommative
Fonction	Fournit un état des lieux : que savent les élèves ? Sur quelles compétences peut-on compter ? L'enseignant(e) peut ainsi connaître, pour chaque élève, ses points forts sur lesquels ancrer les nouveaux apprentissages ainsi que ses points faibles.	Apporte de l'information sur les acquis en construction. Permet de situer la progression de l'élève et de la classe par rapport à un objectif donné et d'entamer une remédiation.	Dresse un bilan des connaissances et des compétences d'un élève à un instant t.
Quand ?	Au début d'une année, d'une séquence, d'une séance.	Au cours des apprentissages.	À la fin d'un apprentissage.
Pour qui ?	L'enseignant(e), l'équipe pédagogique, éventuellement l'élève et sa famille (évaluations nationales).	Permet à l'élève de prendre conscience de ses propres progrès et de ses erreurs. Indique à l'enseignant(e) comment se déroulent les apprentissages et quels sont les obstacles auxquels il se heurte encore.	Le bilan final permet à l'enseignant et à ses élèves de voir l'effet de leurs efforts communs. L'institution et les parents sont demandeurs d'évaluations régulières.
Comment ?	Pas difficile à pratiquer, mais n'a de sens que par l'usage fait des résultats du diagnostic pour adapter l'enseignement aux élèves	Production individuelle ou collective choisie afin de permettre l'expression de compétences diverses par rapport à un objectif fixé ou en regardant les élèves travailler, en observant leurs cahiers, en les écoutant.	Devoir individuel ou collectif « classique ». Attribution d'une note ou de validation d'un niveau de compétences par rapport à des critères choisis.
Notation ?	Ne présente pas d'intérêt, il s'agit plutôt de relever le niveau d'acquisition de chaque item.	Non noté, ou à titre indicatif.	Oui, d'où l'importance de bien réfléchir à la conception de l'évaluation.

5. Quelques rapides éléments de didactique

« Didactique » est à la fois un substantif et un adjectif. Comme **adjectif**, il signifie « qui vise à instruire » (manuel scolaire, matériel de numération...). Comme **substantif**, il désigne la science qui a pour objet l'étude des méthodes et des théories de l'enseignement.

La didactique étudie les interactions entre les trois pôles : Apprenant (l'élève), Enseignant et Savoir.



• **Axe épistémologique (enseigner)**, savoir ↔ enseignant : transmission du savoir. L'enseignant possède ou se procure le savoir puis le traite pour le transmettre aux élèves. Pour cela, il est obligé de se mettre « au niveau de l'élève », c'est la différence entre le savoir *savant* et le savoir *enseigné*. L'adaptation du premier vers le second constitue la *transposition didactique*.
• **Axe praxéologique (former)**, enseignant ↔ apprenant : ici intervient la notion de *contrat didactique*, c'est-à-dire du système d'obligations qu'enseignants et élèves s'imposent implicitement. L'enseignant est un animateur, il propose des activités, situations qui favorisent les échanges. Il accompagne ses élèves dans leurs apprentissages.
• **Axe psychologique (apprendre)**, apprenant ↔ savoir : l'élève va devoir se documenter, traiter les informations, faire des hypothèses, les tester... dans le but de construire des savoirs et/ou des compétences.

Quelques définitions supplémentaires

Changement de cadre : un *cadre* est constitué de l'ensemble des objets d'une branche mathématique, des relations entre ces objets, de leur formulation et des images associées. On parle par exemple de *cadre géométrique*, de *cadre numérique*, de *cadre des grandeurs*... Un *changement de cadre* permet souvent de faire évoluer les conceptions des élèves.

Conception/représentation : ensemble des connaissances qu'un élève, à un moment donné, dans une situation donnée, semble mobiliser pour résoudre une tâche. On parle aussi de la *représentation* que s'est constituée l'élève.

Dévolution : situation proposée par l'enseignant de façon à permettre à l'élève de s'approprier un énoncé, de faire en sorte que le problème devienne *son* problème, qu'il se sente responsable de la recherche de la solution.

Figure prototypique : figure particulière caractérisée par des propriétés qui ne sont pas spécifiques aux figures géométriques (exemple : un carré « posé » sur un côté et non sur son sommet).

Obstacle : erreur relative à un savoir qui constitue un obstacle à l'apprentissage. On peut distinguer trois principales origines à ces obstacles : les obstacles d'origine *ontogénique* (limitations neurophysiologiques entre autres); les obstacles d'origine *épistémologique* (apparus dans la construction d'un concept); les obstacles d'origine *didactique* (qui semblent ne dépendre que du choix de l'enseignant ou du système éducatif).

Outil, objet : un concept est un *outil* lorsque nous privilégions son utilisation pour résoudre un problème alors que c'est un *objet* si nous l'étudions en tant que tel.

Variable didactique : élément de l'activité (consignes, valeurs numériques, nature ou taille des objets...) que l'enseignant peut faire varier et dont la modification peut entraîner des changements de procédures chez les élèves.

NOMBRES & CALCULS

1

Construction du nombre, numération

Ce qui est attendu des élèves en fin d'école maternelle

- Évaluer et comparer des collections d'objets avec des procédures numériques ou non numériques.
- Réaliser une collection dont le cardinal est donné compris entre 1 et 10.
- Utiliser le dénombrement pour comparer deux quantités ou pour réaliser une collection de quantité égale à la collection proposée (quantités inférieures ou égales à 10).
- Utiliser le nombre pour exprimer la position d'un objet ou d'une personne dans un jeu, dans une situation organisée, sur un rang ou pour comparer des positions.
- Mobiliser des symboles analogiques, verbaux ou écrits pour communiquer des informations orales et écrites sur une quantité, jusqu'à 10 au moins.
- Avoir compris que le cardinal ne change pas si on modifie la disposition spatiale ou la nature des éléments.
- Avoir compris que tout nombre s'obtient en ajoutant un au nombre précédent et que cela correspond à l'ajout d'une unité à la quantité précédente.
- Quantifier des collections jusqu'à dix au moins ; les composer et les décomposer par manipulations effectives puis mentales.
- Dire combien il faut ajouter ou enlever pour obtenir des quantités ne dépassant pas dix.
- Parler des nombres à l'aide de leur décomposition.
- Dire la suite des nombres jusqu'à trente. Dire la suite des nombres à partir d'un nombre donné (entre 1 et 30).
- Lire les nombres écrits en chiffres jusqu'à 10.
- Commencer à écrire les nombres en chiffres jusqu'à 10.
- Commencer à comparer deux nombres inférieurs ou égaux à 10 écrits en chiffres.
- Commencer à positionner des nombres les uns par rapport aux autres et à compléter une bande numérique lacunaire (les nombres en jeu sont inférieurs ou égaux à 10).
- Commencer à résoudre des problèmes de composition de deux collections, d'ajout ou de retrait, de produit ou de partage (les nombres en jeu sont tous inférieurs ou égaux à 10).

Dans les programmes - cycle 2

Comprendre et utiliser des nombres entiers pour dénombrer, ordonner, repérer, comparer

- Dénombrer, constituer et comparer des collections en les organisant, notamment par des groupements par dizaines, centaines et milliers : écritures additives ou multiplicatives, écritures en unités de numération, écriture usuelle ; utilisation de ces désignations pour comparer des collections).
- Repérer un rang ou une position dans une file ou sur une piste.
- Faire le lien entre le rang dans une liste et le nombre d'éléments qui le précèdent : ordinaux et cardinaux.
- Comparer, ranger, encadrer, intercaler des nombres entiers, en utilisant les symboles $=, \neq, <, >$.

Nommer, lire, écrire, représenter des nombres entiers

- Utiliser diverses représentations des nombres (écritures en chiffres et en lettres, noms à l'oral, graduations sur une demi-droite, constellations...). Passer d'une représentation à une autre, en particulier associer les noms des nombres à leurs écritures chiffrées.
- Interpréter les noms des nombres à l'aide des unités de numération et des écritures arithmétiques.
- Utiliser des écritures en unités de numération : unités et leurs relations, valeur des chiffres en fonction de leur rang, nom des nombres.
- Itérer une suite de 1 en 1, de 10 en 10, de 100 en 100.
- Associer un nombre entier à une position sur une demi-droite graduée, ainsi qu'à la distance de ce point à l'origine.
- Graduer une demi-droite à l'aide d'une unité de longueur.

Dans les programmes - cycle 3

Utiliser et représenter les grands nombres entiers

- Connaître les unités de la numération décimale pour les nombres entiers (unités simples, dizaines, centaines, milliers, millions, milliards) et les relations qui les lient.
- Composer, décomposer les grands nombres entiers, en utilisant des regroupements par milliers.
- Comprendre et appliquer les règles de la numération aux grands nombres (jusqu'à 12 chiffres).
- Comparer, ranger, encadrer des grands nombres entiers, les repérer et les placer sur une demi-droite graduée adaptée.

Repères didactiques

1. Idée de nombre, vocabulaire

A. Concept de nombre

À l'école primaire, le nombre est l'un des premiers objets mathématiques élémentaires rencontrés avec les objets géométriques et les grandeurs. Au cycle 1, on construit le nombre pour exprimer des quantités et des rangs dans une liste ordonnée ; au cycle 2 on construit notre numération positionnelle de base 10. Pour schématiser, on peut distinguer quatre grandes étapes dans la construction du nombre et de la numération qui suivent plus ou moins la manière dont l'humanité est passée des quantités aux nombres.

Étapes de construction de notre numération

Au cycle 1	1. comprendre qu'un objet est **une unité** ;
	2. construire le **principe cardinal** ;
Aux cycles 2 et 3	3. **grouper** pour mieux dénombrer ;
	4. représenter le nombre par un **codage**.

B. Un peu de vocabulaire

Représentants.
Nombre : concept de base permettant d'évaluer et de comparer des quantités à condition de lui associer une unité.
Mot-nombre : mot permettant de dire un nombre. Jusqu'à cent, il y a vingt-trois mots-nombres simples.
Chiffre : signe représentant un nombre.
Numéro : nombre « canada-dry » qui a l'aspect d'un nombre, mais qui n'est pas un nombre. Il est utilisé comme identifiant.

Suites de nombres.
Numération : tout système, oral ou écrit, permettant de représenter les nombres.
Comptine numérique : énumération orale de la suite numérique des nombres.
File/bande numérique : support écrit chiffré de la suite numérique des nombres.

Aspects du nombre.
Cardinal : nombre d'éléments d'un ensemble.
Ordinal : rang/position d'un élément dans un ensemble.

Outils logiques.
Classer : regrouper des objets suivant une ou plusieurs catégories.
Trier : comparer chaque objet à un objet témoin, puis écarter ceux qui sont différents (classement binaire).
Ranger : ordonner des objets selon un critère.

Utilisation des nombres.
Compter : littéralement, réciter la comptine numérique.
Calculer : effectuer des opérations avec des nombres.
Dénombrer : accéder au nombre, répondre à la question « combien ? ».
Estimer : dénombrer de manière approchée.

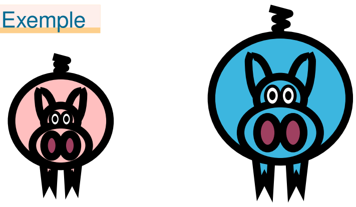
2. La construction du nombre à la maternelle

Dans les programmes en vigueur à la entrée 2020 [édu1], une partie est consacrée spécifiquement aux outils mathématiques, il s'agit du domaine 4 : *Construire les premiers outils pour structurer sa pensée*, et ce qui nous intéresse est plus particulièrement le premier paragraphe *Découvrir les nombres et leurs utilisations* que nous suivrons ici. Le programme préconise d'enseigner tout d'abord le nombre comme moyen de désigner des quantités (usage cardinal), puis, sa fonction comme moyen de désigner des rangs (usage ordinal).

A. Construire le nombre pour exprimer les quantités

Comprendre la notion de **quantité** implique pour l'enfant de concevoir que la quantité n'est pas la caractéristique d'un objet mais d'une collection d'objets : l'enfant fait d'abord appel à une estimation perceptive et globale (plus, moins, pareil, beaucoup, pas beaucoup). Progressivement, il passe de l'apparence des collections à la prise en compte des quantités, il s'agit du **principe cardinal**.

Exemple



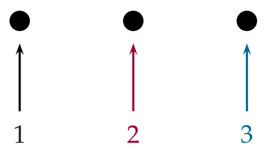
Correction

Ces cochons sont différents par leur taille et leur couleur. Pourtant, ils représentent chacun une même unité : un cochon et on peut donc dire qu'il y a deux cochons.

Puis, l'enfant doit comprendre que, lorsqu'il « compte » une quantité d'objets, le dernier nombre cité correspond à lui seul à la quantité entière des objets et non pas uniquement au dernier objet. Ce principe est repris par *Rémi Brissiaud* par opposition au comptage-numérotage utilisé dans des anciens programmes.

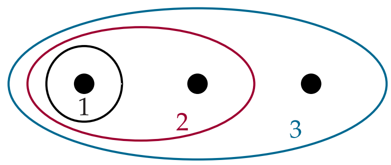
Exemple

Comptage-numérotage



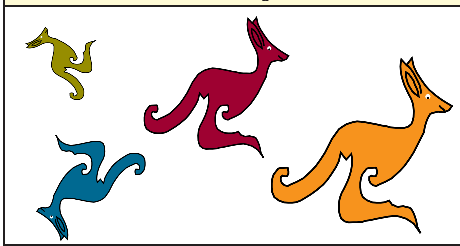
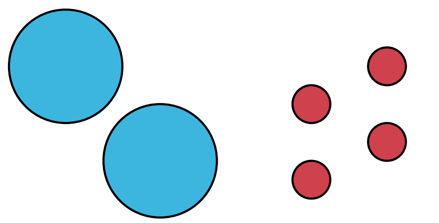
Correction

Un nombre correspond à une collection d'objets

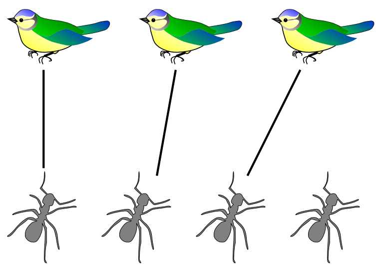
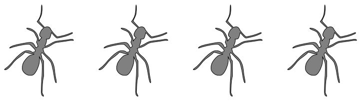
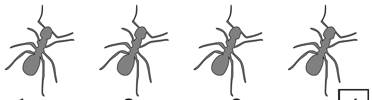


La **perception globale** (subitizing en anglais, subitisation en français) est la reconnaissance visuelle globale d'une quantité. Elle est possible pour de petites quantités ou des configurations géométriques particulières (configurations de dé, digitale...). Pour acquérir cette compétence, il faut inclure des variables didactiques comme l'homogénéité ou non des collections ; la taille des collections ; la présence de leurres perceptifs...

Exemple

Non homogénéité	Leurre perceptif
	
difficultés à « voir » quatre kangourous (qui sont différents)	il y a plus d'objets à gauche car « ça prend plus de place »

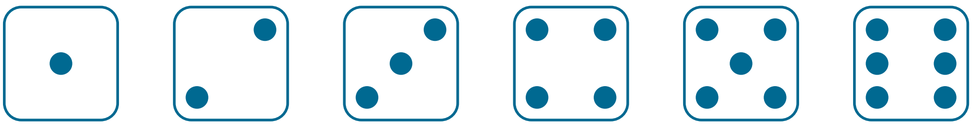
La **comparaison** de collections et la production d'une collection de même cardinal qu'une autre (**équipotence**) sont des activités essentielles pour l'apprentissage du nombre. Il existe trois procédures principales :

Procédure non numérique	Procédures numériques	
Correspondance terme à terme	Perception globale	Comptage un par un
	 Je vois 3 oiseaux  Je vois 4 fourmis	 1 et encore un : 2 et encore un : $\boxed{3}$  1 et un : 2 et un : 3 et un : $\boxed{4}$
objets proches ou déplaçables	objets peu nombreux (généralement inférieurs à 6)	toutes les situations, à acquérir progressivement mais pas systématiquement

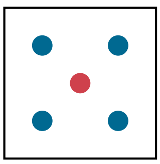
S'il s'agit de construire une collection équipotente à une autre, le nombre d'essais peut également être une variable didactique très influente car l'élève devra alors réfléchir en une seule fois à la meilleure procédure à adopter.

B. Stabiliser la connaissance des petits nombres

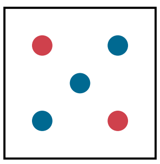
Entre deux et quatre ans, la stabilisation de la notion de quantité, est la capacité à donner, montrer, évaluer ou prendre un certain nombre d'objets en général entre 2 et 5, à les composer et les décomposer.
La reconnaissance des constellations du dé, d'une quantité avec les doigts de la main sont autant de réflexes à acquérir pour stabiliser le nombre.



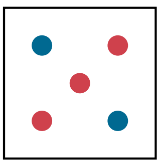
Exemple Décompositions du nombre 5, à l'aide de la constellation du dé : « *cinq, c'est* »



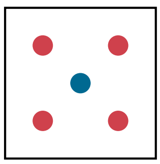
« *1 et encore 4* »



« *2 et encore 3* »



« *3 et encore 2* »



« *4 et encore 1* »

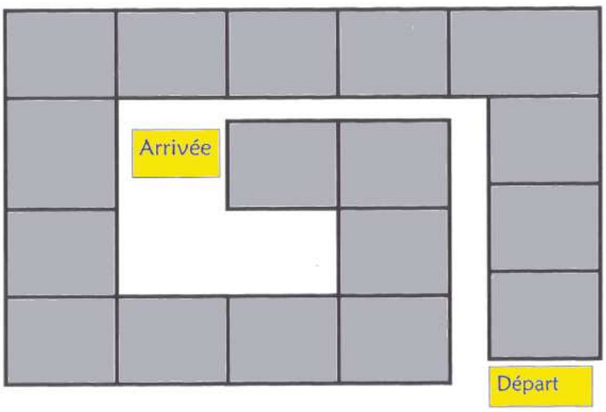
L'itération de l'unité (trois c'est deux et encore un) se construit progressivement, et pour chaque nombre. Après quatre ans, les activités de décomposition et recomposition s'exercent sur des quantités jusqu'à dix.

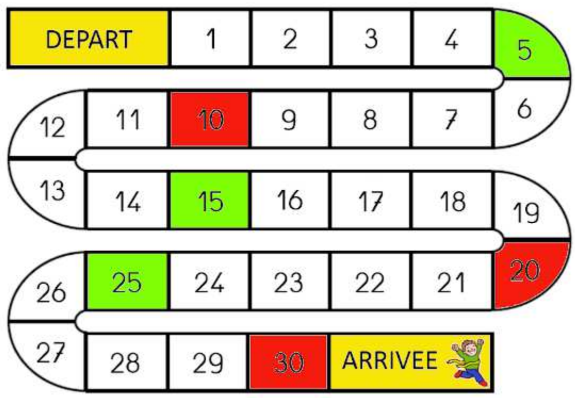
C. Utiliser le nombre pour désigner un rang, une position

Le nombre permet également de conserver la mémoire du rang d'un élément dans une collection organisée. Pour garder en mémoire le rang et la position des objets (troisième perle, cinquième cerceau), les enfants doivent définir un sens de lecture, un sens de parcours, c'est-à-dire donner un ordre. Cet usage du nombre s'appuie à l'oral sur la connaissance de la comptine numérique et à l'écrit sur celle de l'écriture chiffrée.
L'utilisation de jeux de déplacement sur piste (type « jeux de l'oie ») permet aux enfants de faire le lien entre nombres et espace. Des parcours rectilignes avec des cases numérotées et de même taille sont à privilégier.

Lorsque l'on veut ordonner une série d'objets, selon un quelconque critère, on calque sur eux l'*ordre-étalon* des nombres : le premier, le deuxième. . .. Dans « L'empire des nombres », de *Denis Guedj*, l'auteur précise que « Les deux fonctions, l'ordinale et la cardinale, sont inséparables. Dans la vision ordinale, le nombre est vu comme le maillon d'une chaîne ; dans la vision cardinale, il est quantité pure. Le cardinal mesure, l'ordinal ordonne. »

Dès la PS, des jeux de piste sans numérotation sont possibles avec des dés ne comportant que les constellations du 1 et du 2 (voire du 3). Des dessins peuvent être placés sur certaines cases et l'élève gagne cette image quand il arrive exactement sur cette case. Le jeu s'arrête quand un premier élève parvient à l'arrivée. Le gagnant est alors celui qui a le plus d'images.
Les jeux de piste offrent une autre représentation mentale du nombre et privilégient le caractère ordinal du nombre puisque la piste propose une suite ordonnée d'emplacements. Ces jeux piste complémentaires de ceux dans lesquels les élèves travaillent avec des collections d'objets non ordonnés. Les gestes pour placer un pion sur la piste participent de cette représentation mentale.





Selon *Claire Margolinas* (2005) [mar15], « enseigner le nombre comme mémoire de la position demande de s'appuyer sur un milieu matériel qui comporte des files ayant une origine, une orientation et un rang, comme c'est le cas des objets de la figure 3. »

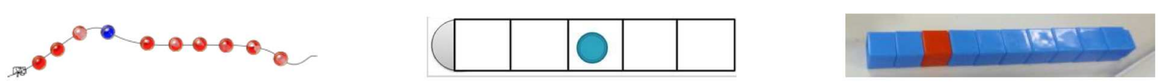
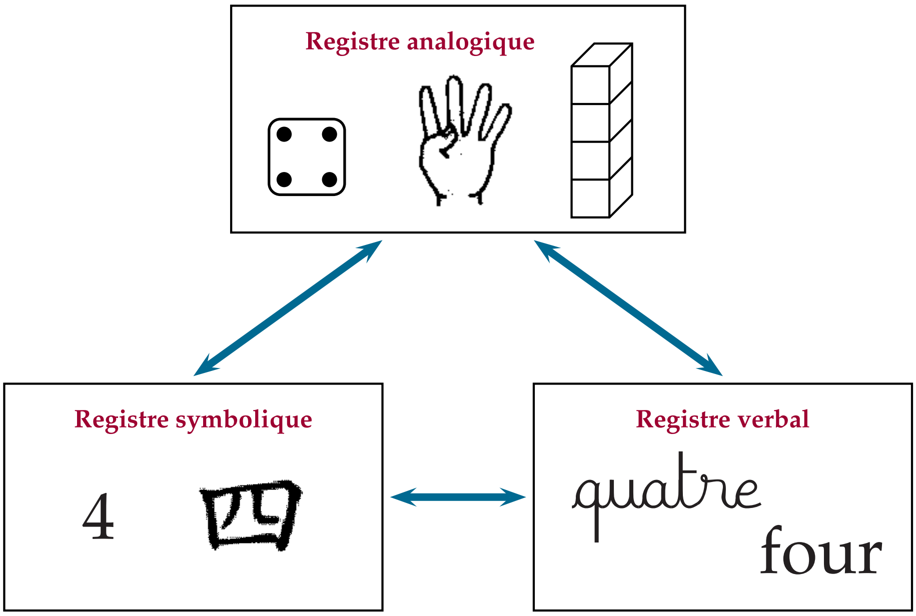


Figure 3 : objets d'un milieu pour le travail sur la position

D. Construire les premiers savoirs et savoir-faire avec rigueur

Acquérir la suite orale des mots-nombres : pour que cette suite soit disponible en tant que ressource pour dénombrer, il faut qu'elle soit stable, ordonnée, segmentée et suffisamment longue. La connaissance de la suite orale des noms des nombres ne constitue pas l'apprentissage du nombre mais y contribue. Avant quatre ans, les premiers éléments de la suite numérique peuvent être mis en place jusqu'à cinq ou six puis progressivement étendus jusqu'à trente en fin de grande section.
La comptine numérique peut être travaillée dans les activités rituelles telles que les comptines ou le comptage des présents/absents en GS, en n'oubliant pas de dire quel est le nombre total d'enfants présents ensuite. Enseigner la comptine numérique trop loin trop tôt est une activité qui n'a rien à voir avec une véritable construction du nombre : les élèves savent souvent « compter » jusqu'à un certain nombre sans en comprendre le sens.

Écriture des nombres avec les chiffres : parallèlement, les enfants rencontrent les nombres écrits notamment dans des activités occasionnelles de la vie de la classe, dans des jeux et au travers d'un premier usage du calendrier. Les premières écritures des nombres sont introduites progressivement, à partir des besoins de communication au sein de la classe ou dans la résolution de problèmes concrets. L'apprentissage du tracé des chiffres se fait avec la même rigueur que celui des lettres, à partir de 4 ans.
L'écriture en chiffres des nombres appartient à l'un des trois registres de représentation des nombres : le registre symbolique (les deux autres registres existants étant le registre analogique et le registre verbal).



Une grande attention doit être portée aux activités de dénombrement pour que soit évité le « comptage-numérotage ». Elles doivent faire apparaître, lors de l'énumération de la collection, que chacun des noms de nombres désigne la quantité qui vient d'être formée. Les enfants doivent comprendre que toute quantité s'obtient en ajoutant un à la quantité précédente (ou en enlevant un à la quantité supérieure) et que sa dénomination s'obtient en avançant de un dans la suite des noms de nombres ou de leur écriture avec des chiffres. Pour dénombrer une collection d'objets, l'enfant doit être capable de synchroniser la récitation de la suite des mots-nombres avec le pointage des objets à dénombrer. Cette capacité doit être enseignée selon différentes modalités en faisant varier la nature des collections et leur organisation spatiale car les stratégies ne sont pas les mêmes selon que les objets sont déplaçables ou non, et selon leur disposition.

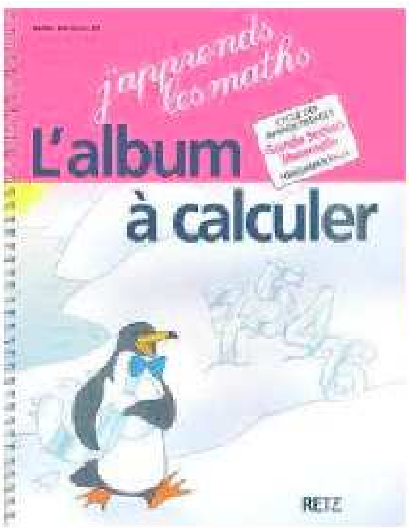
Cette « nouvelle » façon d'enseigner le nombre initiée par *Rémi Brissiaud* s'oppose à des théories plus anciennes mises en avant dans les années 1980 selon lesquelles le comptage devait précéder les activités de calcul, en référence aux cinq principes de deux chercheuses américaines, *Rochel Gelman* et *Charles Ransom Gallistel* :

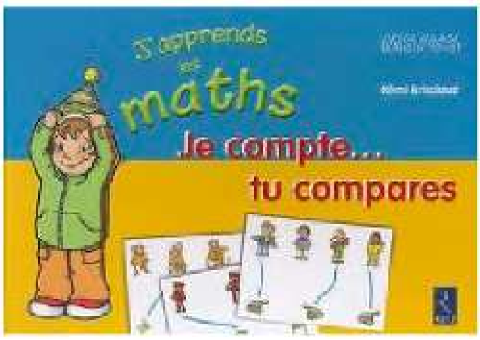
Principes de Gelman

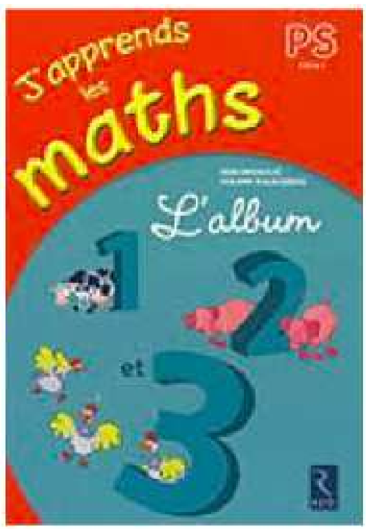
1) Le principe d'adéquation unique : chaque mot énoncé est mis en correspondance terme à terme avec un et un seul élément de la collection que l'on cherche à dénombrer.
2) Le principe d'ordre stable : les mots utilisés doivent être toujours les mêmes et énoncés dans un ordre strict.
3) Le principe cardinal : le dernier mot de la suite suffit pour exprimer la quantité.
4) Le principe d'abstraction : on peut compter des objets disparates, quelle que soit la spécificité de chacun.
5) le principe de non-pertinence de l'ordre : l'ordre dans lequel les éléments sont pris en compte est sans importance.

E. Des exemples de livres pour pratiquer…

Les premiers manuels de *Rémi Brissiaud* : « J'apprends les maths » aux éditions Retz permettent une découverte des nombres et de leur utilisation très proches des attendus du programme :
– L'album 1 2 et 3 pour la PS ;
– Je compte… tu compares pour la MS/GS ;
– L'album à calculer pour la GS.





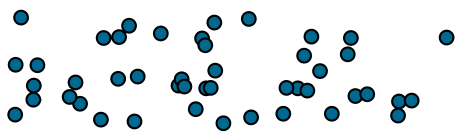
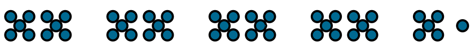
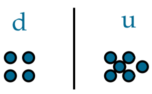


Toute une série de livres inspirés de ces derniers existent pour des quantités et des thèmes différents.
Des exemples sont disponibles dans la partie « Activités à faire en classe ».

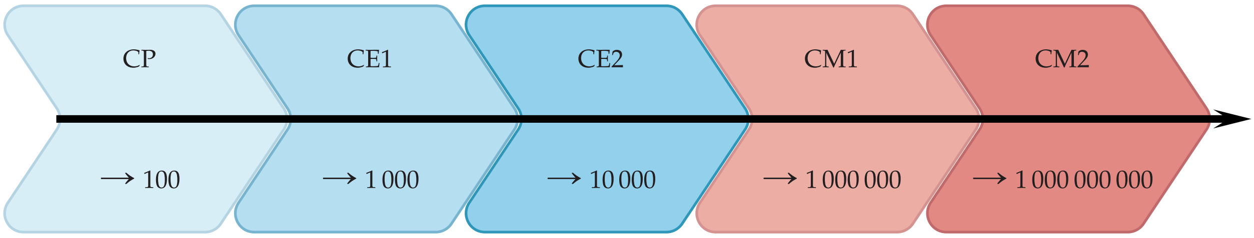
3. Construction de notre numération positionnelle de base 10

D'après les repères annuels de progression, au CP, les élèves poursuivent le travail mené à la maternelle sur les nombres inférieurs à 10. En période 2, ils réalisent des groupements par 10 et s'exercent à échanger 10 unités pour une dizaine et inversement. Le travail de groupements par 10 permet d'aborder rapidement les nombres supérieurs à 20 (jusqu'à 60 au moins) pour travailler sur les aspects positionnel et décimal de la numération écrite. La désignation orale des nombres est démarrée en période 3 : « 53, c'est 5 dizaines et 3 unités ; c'est (5 fois 10) et (3 fois 1) ». Les nombres jusqu'à 100 sont introduits suffisamment tôt (en période 4 au plus tard) pour pouvoir être maîtrisés à la fin du CP.
Au CE1, les élèves poursuivent l'étude de la numération décimale en travaillant avec des centaines. La connaissance des nombres jusqu'à 100 est consolidée, notamment pour leur désignation orale et pour le calcul mental. Ils apprennent à multiplier par 10 pour mieux construire mentalement la numération décimale.
En CE2, les élèves poursuivent l'étude de la numération décimale en travaillant avec des milliers. Parallèlement, la connaissance des nombres jusqu'à 1 000 est consolidée, notamment pour leur désignation orale et pour le calcul mental. Ils renforcent leur connaissance de la multiplication par 10 et apprennent à multiplier par 100.
En CM1, les élèves apprennent à utiliser et à représenter les grands nombres entiers jusqu'au million. Il s'agit d'abord de consolider les connaissances (écritures, représentations. . .).
En CM2, le répertoire est étendu jusqu'au milliard.

Codage des nombre entiers : imaginons une grande quantité d'objets à dénombrer, le comptage un par un serait long et fastidieux. Différentes étapes vont permettre aux élèves de dénombrer cette quantité et de la coder, c'est notamment le but de l'activité « Les fourmillons », de la collection *Ermel*.

Étape	Représentation	Explications
état initial		quantité d'objets (jetons, pois, allumettes. . .) à dénombrer
groupements		groupements par 10, éventuellement sous la forme de constellations
échanges		échange de chaque paquet de 10 par une enveloppe de valeur 10
codage visuel		représentation des dizaines et unités par le même objet, qui a donc une valeur différente suivant sa position
codage chiffré	d | u 4 | 6	codage de la quantité dans notre système positionnel de numération de base 10

On peut résumer les étapes d'apprentissages par la frise suivante :



4. Les irrégularités de notre comptine orale

Les irrégularités dans les noms des nombres de 0 à 100 [dav18] : la compréhension de notre système de numération reste difficile au CP et au CE1, et pour cause : même s'il est préconisé d'étudier les nombres jusqu'à 100 au CP, les irrégularités sont nombreuses dans cette tranche :

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

Premières irrégularités venant très tôt dans la numération : onze, douze, treize, quatorze, quinze et seize sont des nouveaux mots-nombres qui sont les contractés des expressions latines correspondantes pour lesquelles l'unité précède la dizaine (*tredecim* signifie $3 + 10$). Dans une numération régulière, ces nombres se diraient « dix-un, dix-deux, dix-trois, dix-quatre, dix-cinq et dix-six ».

Présence de blocs de nombres « exprimés » en base vingt.

Concernant les dizaines, de nouveaux mots-nombres apparaissent : vingt, trente, quarante... Dans une numération régulière, ces nombres s'exprimeraient ainsi : « deux-dix, trois-dix, quatre-dix... ». Puis, plus loin, les nombres soixante-dix, quatre-vingts et quatre-vingt-dix pourraient être qualifiés de nombres « doublement irréguliers » : les mots français « septante, octante et nonante » subsistent en Suisse et en Belgique, mais plus en France, depuis le 19e siècle.

On s'aperçoit ainsi que la numération orale est une source de difficulté importante pour la compréhension de notre numération parce qu'elle n'est pas en adéquation avec la numération écrite. Plus globalement, on peut résumer les principales différences dans le tableau suivant :

	Désignation orale des nombres		Désignation écrite des nombres	
Éléments de la numération	26 mots jusqu'au milliard, plus la conjonction « et »	zéro, un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, dix, onze, douze, treize, quatorze, quinze, seize, vingt, trente, quarante, cinquante, soixante, cent, mille, million, milliard, et	10 signes appelés chiffres (indo-arabes)	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
Statut du zéro	absent si on considère uniquement l'écriture des nombres entiers naturels	deux-cent-cinq trois-millions	nécessaire pour une meilleure visibilité, justifié par le caractère positionnel de notre numération pour marquer le « manque » d'un ordre	205 3 000 000
Structure	additive si le nombre est constitué de deux mots-nombres en ordre décroissant, multiplicative s'il est constitué de deux mots-nombres en ordre croissant, mixte par combinaison des deux propriétés précédentes	vingt-quatre, c'est $20 + 4$ quatre-vingts, c'est 4×20 quatre-vingt-douze, c'est $4 \times 20 + 12$	stable, justifiée par notre numération positionnelle de base 10	234 $= 2 \times 100 + 3 \times 10 + 4 \times 1$ $= 2 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 4 \times 10^0$
Ordre des éléments	succession de mots qui n'a pas toujours de sens, selon une permutation des mots réglée par une grammaire	cent-quarante-trois ~~cent-trois-quarante~~ ~~quarante-cent-trois~~ ~~quarante-trois-cent~~ trois-cent-quarante ~~trois-quarante-cent~~	succession de chiffres toujours possible (mais de sens différent)	345, 354, 435, 453, 534, 543

5. L'écriture des nombres

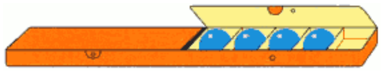
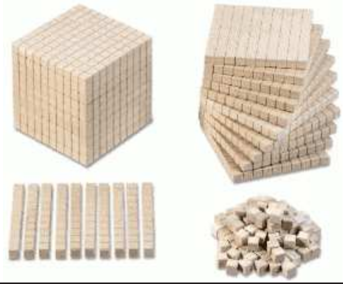
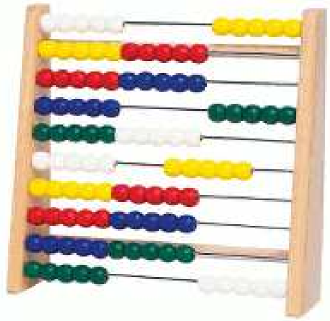
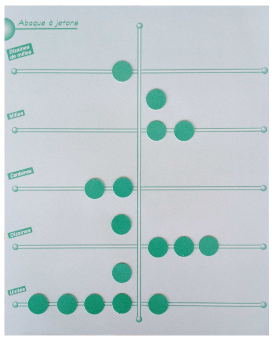
Les règles d'orthographe françaises sont réputées difficiles, celles de l'écriture des nombres n'échappent pas à la règle ;-)

Règles orthographiques conformes à la réforme de 1990

- Les numéraux composés sont systématiquement reliés par des traits d'union : deux-millions-cent-mille-trente-et-un ; trente-et-unième.
- Les mots [vingt] et [cent] prennent un -s lorsqu'il y en a plusieurs et qu'ils se trouvent à la fin du nombre : mille-deux-cent-trente, trente-mille-cent, mille-trois-cents.
- Les mots qui indiquent les classes [mille], [million], [milliard] prennent un -s quand il en a plusieurs, sauf [mille] qui est invariable : un-milliard-deux-cent-millions-trois-mille-cent.

6. Des outils pour la numération

La capacité grouper-échanger peut être travaillée en classe avec différents matériels. Les matériels dessinés sur les fiches de travail doivent correspondre à des matériels réels que les élèves peuvent manipuler puis progressivement s'en passer. Il existe différentes sortes de matériels pédagogiques (liste non exhaustive !).

Objets	Visuel
Les **boites de picbille**, (Rémi Brissiaud) permettent de travailler les groupements par 5 et par 10 , l'échange 10 contre 1, les compléments à 5 et à 10, les notions de dizaines et d'unité.	
Le matériel **multibase**, emboîtable ou non, sous forme de **cubes** unités, de **barres** de 10, de **plaques** de 100 et de gros **cubes** de 1 000 permet de visualiser les groupements.	
Le **boulier numérateur**, ou boulier européen, à utiliser tel quel (une boule = une unité) pour se créer une image mentale des dizaines (une rangée) et des unités (une boule). La lecture des nombres de fait en fonction du nombre de rangées entières activées et du nombre de boules seules.	
Le **boulier chinois** (par exemple) utilise sur chaque tige des boules valant une unité de l'ordre considéré, les unaires (en dessous) et des boules valant cinq unité de l'ordre considéré, les quinaires (au dessus). Les nombres se codent comme dans notre numération, les unités étant placées à droite.	
Les **abaques** (à jetons, romain) à construire avec les élèves ou à photocopier, il en existe de différentes sortes (avec ou sans quinaire, avec quadrillage horizontal ou vertical), on peut les utiliser avec des jetons de type haricots, pois. . .	

Vu au CRPE en 2022

Sujet n°3 de l'épreuve de leçon, concours CRPE 2022, académie de Montpellier.

Consigne candidat : À partir du sujet et du dossier proposés par le jury, vous concevrez la mise en œuvre d'une séance d'enseignement à l'école primaire dans chacune des deux disciplines français et mathématiques. Vous présenterez successivement les composantes pédagogiques et didactiques de chaque séance et son déroulement.

Sujet : Construire le nombre pour exprimer des quantités.

Contexte de la séance d'enseignement :

- cycle d'enseignement : cycle 1 ;
- niveau de la classe : GS ;
- positionnement de la séance de mathématiques :
  - période : période 5 ;
  - séquence dans laquelle elle s'insère : découvrir les nombres et leurs utilisations.

Documents fournis au candidat :

Document 1 : Bulletin officiel n°25 du 24 juin 2021, extrait du programme d'enseignement de l'école maternelle.

4.1. Découvrir les nombres et leurs utilisations

Depuis leur naissance, les enfants ont une intuition des grandeurs qui leur permet de comparer et d'évaluer de manière approximative les longueurs (les tailles), les volumes, mais aussi les collections d'objets divers (« il y en a beaucoup ! », « pas beaucoup », etc.). **À leur arrivée à l'école maternelle**, ils commencent à discriminer les petites quantités, un, deux et parfois trois. Enfin, s'ils savent énoncer les débuts de la suite numérique, cette récitation ne traduit pas une véritable compréhension des quantités et des nombres.

L'école maternelle doit conduire progressivement chacun à comprendre que les nombres permettent à la fois d'exprimer des quantités (usage cardinal) et d'exprimer un rang ou une position dans une liste (usage ordinal). Cet apprentissage demande du temps et la confrontation à de nombreuses situations impliquant des activités pré-numériques puis numériques. Il nécessite un enseignement structuré, **pendant toute la durée du cycle1**, afin qu'à l'issue de l'école maternelle les connaissances et compétences acquises forment un socle solide sur lequel appuyer les apprentissages ultérieurs.

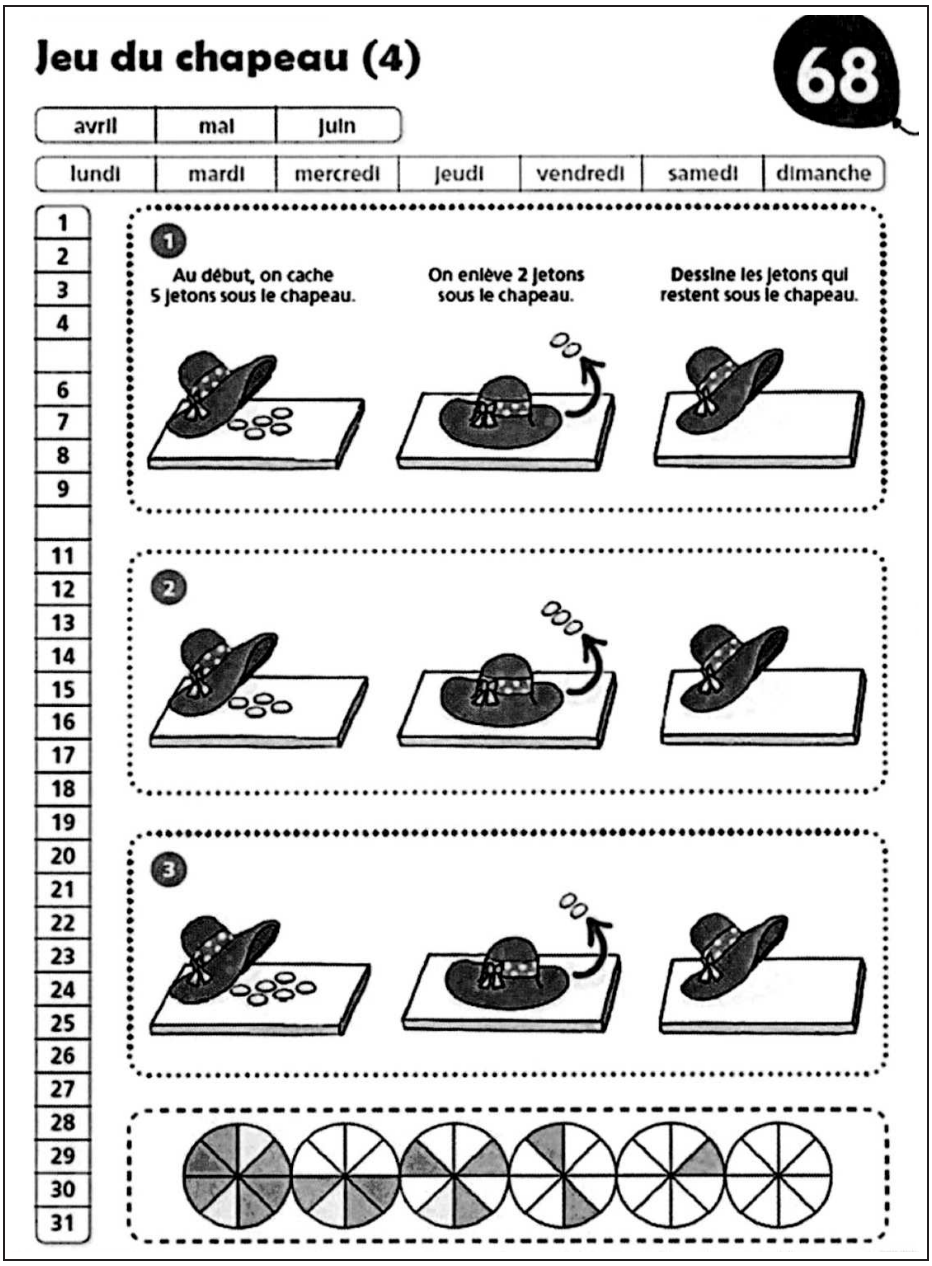
Document 2 : Note de service n°2019-085 du 28 mai 2019, Recommandations pédagogiques, apprentissage fondamental à l'école maternelle . Découvrir les nombres et leurs utilisations.

UN APPRENTISSAGE PROGRESSIF, QUI S'APPUIE SUR LE LANGAGE ORAL ET ÉCRIT

La découverte du nombre et de ses utilisations est liée à la construction d'un langage oral et écrit précis qui contribue à structurer les connaissances et à les fixer en mémoire. La verbalisation par l'enseignant et par l'élève des actions réalisées et de leurs résultats constitue une aide importante à la prise de conscience des procédures utilisées et de leurs effets. L'enseignant est attentif à organiser les échanges oraux pour aider à structurer les apprentissages des élèves : il aide à décrire les situations, les relations, à Justifier et commence à argumenter ; il attire l'attention sur certaines procédures et connaissances utilisées en situation ; il Introduit le vocabulaire spécifique (noms des nombres, adverbes de quantité) pour que les enfants se l'approfondissent et l'utilisent.

L'usage des chiffres est une partie Importante de la découverte du nombre. Il soutient l'élaboration de sa représentation mentale. Les premières écritures chiffrées des nombres sont Introduites progressivement en lien avec l'appropriation de la quantité correspondante et la résolution de situations concrètes. En ajoutant une contrainte d'éloignement dans l'espace et dans le temps dans l'organisation d'une situation, ou en demandant de transmettre une information sans parler, on rend nécessaire l'utilisation d'une trace écrite pour garder des Informations en mémoire. Cet usage de l'écrit pour se souvenir est une découverte importante. L'enseignant aide à comprendre que la conservation de l'information de quantité passe par l'élaboration d'un code commun (les nombres) et mobilise rapidement cette connaissance.

Document 3 : J.P Blanc, P. Bramand, A. Vargas, D. Peynichou, E. Lafont, C.Maurin, N. Blanc, *Pour comprendre les mathématiques GS*, Hachette éducation, juillet 2015, page 68.



Analyse de documents

1 Étude de productions d'élèves

Les exercices et productions d'élèves proposés sont tirés de l'ouvrage « Variations sur une leçon de mathématiques », paru aux éditions *L'Harmattan*, sous la direction de *C. Blanchard-Laville.*

Les exercices suivants ont été proposés au tableau dans une classe de CM1 au mois d'octobre :

> *1) Écrire en chiffres le nombre deux-millions-trois-cent-quarante-mille-cent-cinq.*
> *2) Écrire en chiffres le nombre dix-sept-millions-deux-mille-cinquante-huit.*

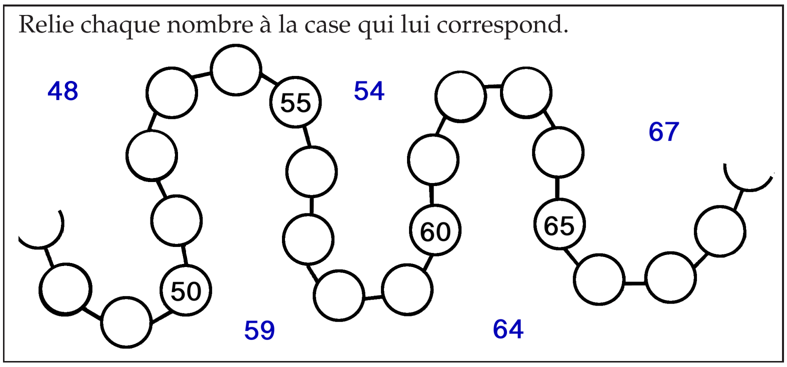
L'exercice 1 est corrigé collectivement avant que l'exercice 2 ne soit donné aux élèves. Dans les séances précédentes, les élèves ont travaillé l'écriture des grands nombres, ce qui a conduit à l'introduction, pour faciliter la lecture, d'un espace entre les classes qui correspondent à des tranches de trois chiffres, et l'enseignant a conclu : « On remplace les mots millions et mille par des espaces ».
Voici les productions relevées pour chacun des exercices :

Exercice 1		Exercice 2	
2 340 105	17 élèves	17 002 058	11 élèves
2 340 500	6 élèves	17 200 058	5 élèves
2 340 050	1 élève	17 200 58	2 élèves
200003004015015	1 élève	17 2 058	1 élève
234500	1 élève	17 2000 058	1 élève
		17 2000 58	1 élève
		17 2 58	5 élèves

1) Expliquez la différence de réussite entre les deux exercices.
2) Faites une hypothèse d'interprétation des réponses dans le premier exercice :
   a) pour la réponse 2 340 500 ;
   b) pour la réponse 200003004015015.
3) Dans l'exercice 2, pour chacune des réponses 17 200 058 et 17 2 58, indiquez en quoi elle respecte ou non les conventions usuelles d'écriture et la conclusion du maître.
4) Quel argument devrait permettre aux élèves de rejeter la réponse 17 200 058 ?
   Permet-il de rejeter 17 2 58 ? Pourquoi ?
5) Proposez un nombre qui pourrait poser problème aux adeptes de la réponse 17 2 58 et les inciter à repérer les inconvénients de leur proposition. Justifiez votre réponse.

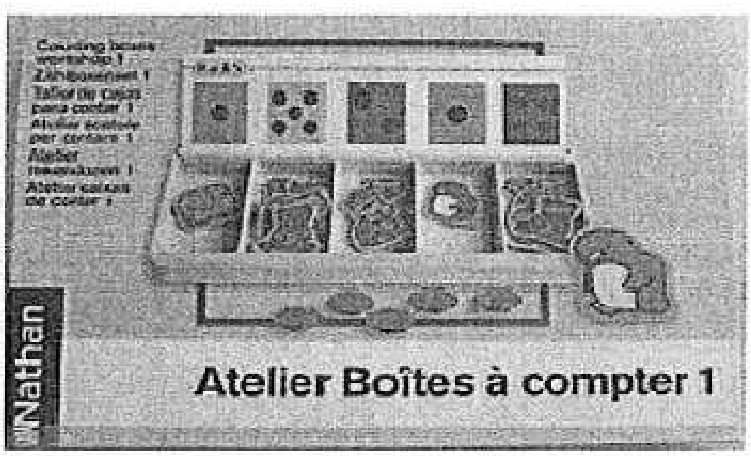
2 Étude d'un exercice

Cet exercice est extrait de *Cap maths CP*, éditions *Hatier*. En faire une analyse a priori :
1) compétences mises en jeu ;
2) procédures utilisables par l'élève ;
3) erreurs prévisibles.



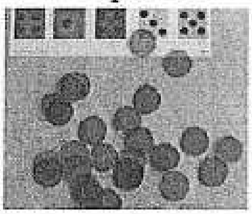
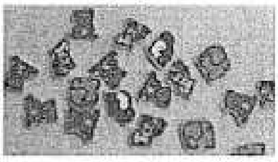
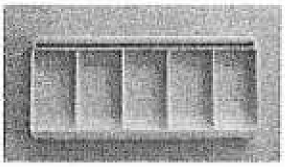
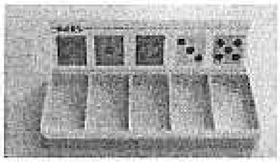
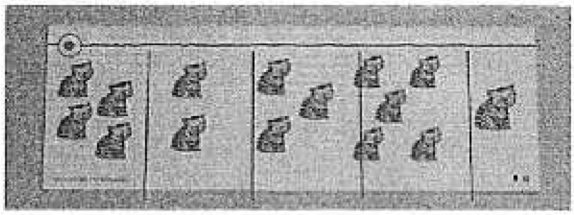
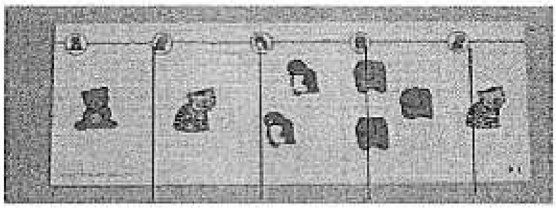
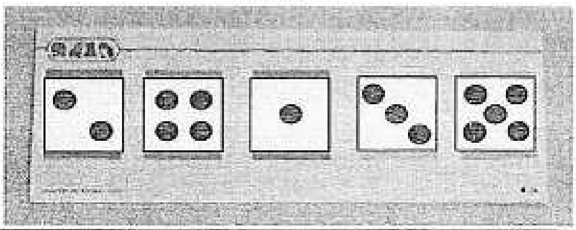
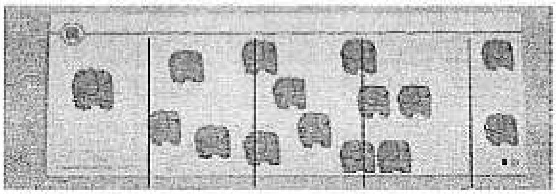
3 CRPE 2016 G1

Un enseignant de moyenne section de maternelle utilise le jeu ci-dessous avec ses élèves.



Atelier Boites à compter 1, Nathan, 2003

La boite contient le matériel suivant :

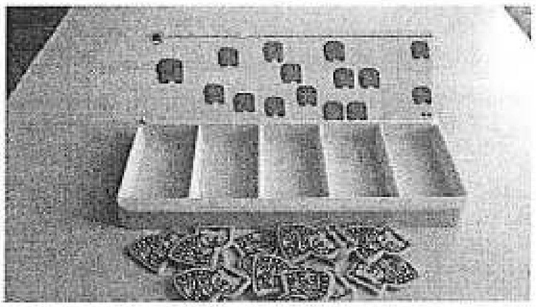
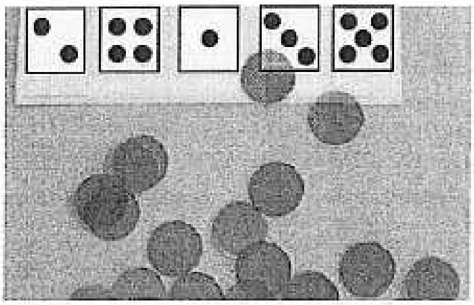
<table>
<tr><td>Des jetons classiques transparents
</td><td>Des jetons-animaux opaques
</td><td colspan="2">Des boîtes à compter où l'on insère une carte
 </td></tr>
<tr><td colspan="4">Des cartes variées comme par exemple</td></tr>
<tr><td colspan="2">Carte A
</td><td colspan="2">Carte B
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Carte C
</td><td colspan="2">Carte D
</td></tr>
</table>

Pour chaque élève, l'enseignant choisit une carte et des jetons (animaux ou classiques).
L'objectif du maître est de faire réaliser par l'élève des collections de jetons de cardinaux identiques à ceux de la carte.

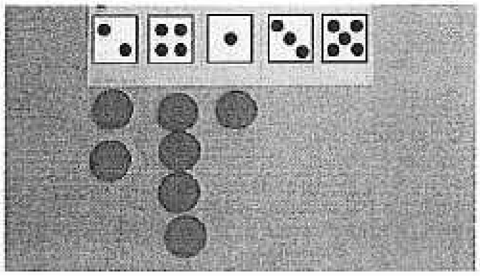
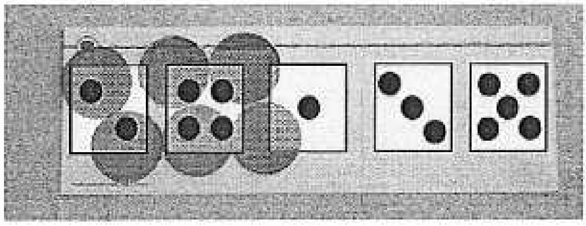
Analyse de documents

1) a) Analyse a priori. Pour chacune des deux configurations matérielles ci-dessous :

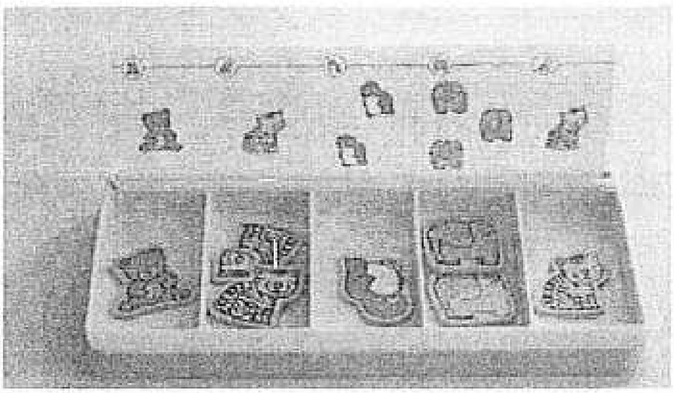
- donner deux méthodes que pourraient utiliser les élèves pour dénombrer les collections proposées.
- donner deux erreurs que les élèves sont susceptibles de faire en réalisant les collections.

Configuration 1	*Configuration 2*
carte D + boîte + jetons-tigre	carte C + pas de boîte + jetons classiques
	

b) Voici ci-dessous deux réalisations d'élèves pour la configuration 2.
Que semblent-ils avoir compris tous les deux ? Analyser les différences éventuelles.

Louise	Kévin
	

2) Voici une autre production d'élève en réponse à une autre configuration matérielle.



Citer une facilité et une difficulté qu'apporte le choix d'une configuration matérielle incluant une boîte.

Analyse de documents

4 **CRPE 2017 G1**

Dans une classe de maternelle, une enseignante donne à un groupe d'élèves la consigne suivante :

> « J'ai installé trois poupées avec leur assiette autour de cette table pour le goûter. Elles pourront commencer leur goûter quand il y aura un biscuit dans l'assiette de la poupée blonde, un biscuit dans l'assiette de la poupée brune et un biscuit dans l'assiette de la poupée rousse.
> Les biscuits du goûter se trouvent dans une boîte dans le coin cuisine.
> Vous devez aller chercher juste ce qu'il faut de biscuits pour le goûter des poupées. Vous pouvez faire plusieurs voyages. »

La table des poupées est éloignée de quelques mètres du coin cuisine.
L'information suivante « la boîte contient 5 biscuits » n'est pas donnée aux élèves.
On appelle « voyage » un aller au coin cuisine et un retour à la table des poupées.

- L'élève A a effectué 3 voyages, rapportant un seul biscuit à chaque fois.
- L'élève B a effectué 1 voyage. Il utilise sa main droite dont il abaisse deux doigts. Il se déplace à la table du coin cuisine et revient avec 3 biscuits dans la main gauche.
- L'élève C effectue très rapidement 1 voyage. Il a pris 3 biscuits.
- L'élève D effectue 2 voyages. Au premier voyage il ramène tous les biscuits. Au deuxième il rapporte 2 biscuits à la cuisine.

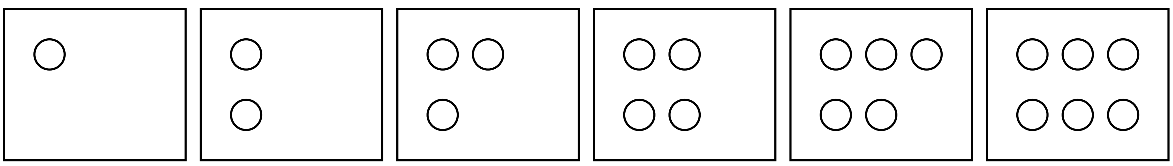
1) Quel aspect du nombre est mobilisé dans cette situation ?
2) Analyser les stratégies mises en oeuvre par chacun des élèves.
3) Proposer une modification interne à l'énoncé de la situation susceptible d'engager les élèves A et D à évoluer dans la construction du nombre. Expliciter cette évolution.

5 **CRPE 2018 G2**

Voici un extrait du programme de l'école maternelle publié dans le bulletin officiel n°2 du 26 mars 2015.

> La stabilisation de la notion de quantité, par exemple trois, est la capacité à donner, montrer, évaluer ou prendre un, deux ou trois et à composer et décomposer deux et trois. Entre deux et quatre ans, stabiliser la connaissance des petits nombres (jusqu'à cinq) demande des activités nombreuses et variées portant sur la décomposition et recomposition des petites quantités [...], la reconnaissance et l'observation des constellations du dé, la reconnaissance et l'expression d'une quantité avec les doigts de la main, la correspondance terme à terme avec une collection de cardinal connu. [...] Après quatre ans, les activités de décomposition et recomposition s'exercent sur les quantités jusqu'à dix.

1) Citer deux procédures qu'un élève de fin de petite section peut utiliser pour affirmer qu'une collection est constituée de trois objets.
2) Proposer une activité à mettre en place en moyenne section pour travailler les décompositions du nombre quatre.
3) Un enseignant de grande section décide d'utiliser avec ses élèves un dé dont les faces sont représentées ci-dessous. Quel intérêt peut-il y avoir à utiliser un tel dé ?



Activités à faire en classe

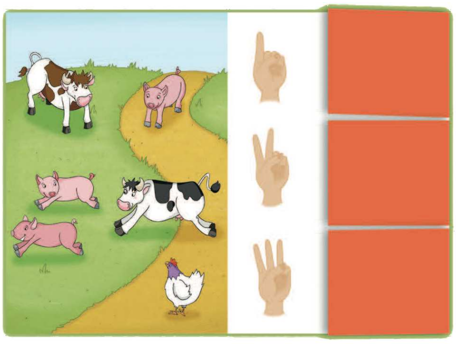
1 C1 - Les Albums des premiers nombres pour ancrer le principe cardinal et la subitisation

Dans la collection « J'apprends les maths », Retz, par *Rémi Brissaud* :

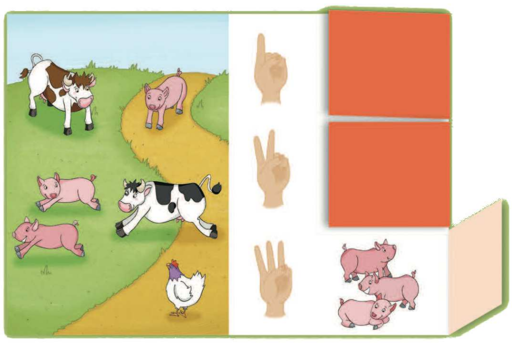
- L'album 123 ;
- 1, 2 et 3 - PS ;
- L'album des premiers nombres 2, 3, 4 et 5.

Ce sont des albums avec rabats pour découvrir les premiers nombres en maternelle dans l'esprit des programmes de 2 020 en favorisant un authentique dénombrement, en évitant le comptage-numérotage, et en s'appropriant leurs décompositions.

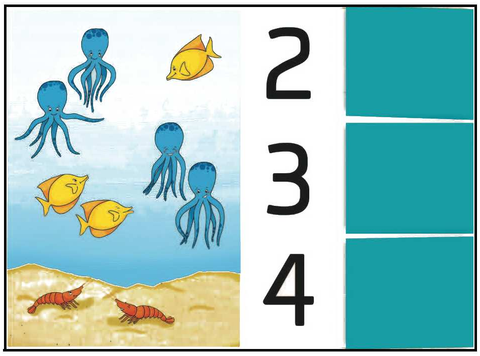
Le principe : parmi plusieurs collections, l'élève doit trouver celle qui a un nombre donné d'unités et justifier sa réponse en utilisant une décomposition du nombre.



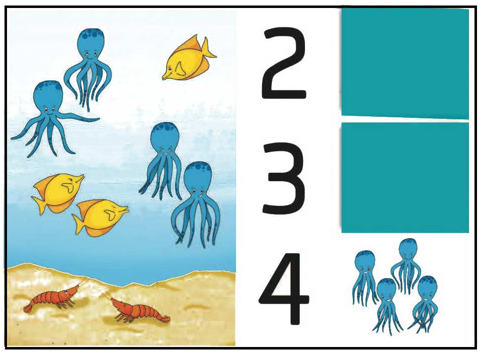
« Dans l'image, il y a trois… trois cochons ! Deux et encore un. »



« On vérifie en levant le rabat. »



« Dans l'image, il y a quatre… Quatre pieuvres ! Deux et encore deux. »



« On vérifie en levant le rabat. »

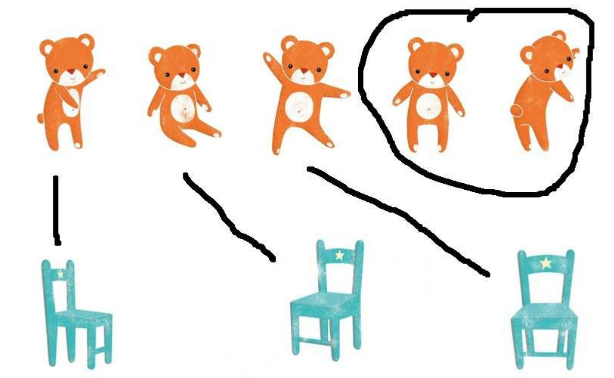
2 C1 - Les fiches à comparer pour comprendre le comptage et la correspondance terme à terme

Dans la collection « J'apprends les maths », Retz, par *Rémi Brissaud* :

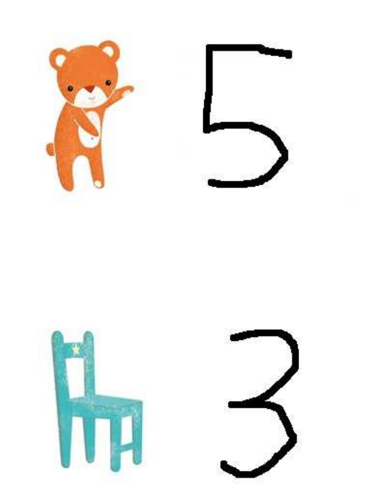
- Je compte, tu compares, de 3 à 5 - PS-MS ;
- Je compte, tu compares, de 5 à 7 - MS-GS ;
- Je compte... tu compares MS-GS.

Un matériel collectif, destiné aux classes de PS à GS, pour comprendre le comptage. Il offre un type de situation pédagogique où, à partir de la seule écoute du comptage oral de deux collections, les enfants sont amenés à découvrir une règle simple pour déterminer si ces collections ont autant d'éléments : lorsque les deux comptages s'arrêtent au même mot, les collections ont le même nombre d'éléments et si l'un des comptages « va plus loin » que l'autre, c'est celui de la collection la plus nombreuse.

Intérêts : comprendre dans le même temps comment l'usage d'une liste ordonnée de mots-nombres permet de mesurer la taille d'une collection, accéder aux décompositions d'un nombre grâce à la comparaison.



5 nounours, c'est 3 nounours, comme les chaises, et encore 2 nounours.
5, c'est 3 et encore 2.



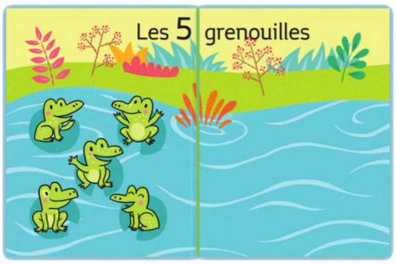
Fiche nombres

3 C1 - Les albums à calculer pour comprendre et apprendre les décompositions

Dans la collection « J'apprends les maths », Retz, par *Rémi Brissaud* :

- L'album à calculer GS (premier et deuxième) ;
- Albums à calculer 3,4,5,6,7 avec les animaux du cirque ou du jardin - MS-GS ;
- Albums à calculer 5,6,7,8,9,10 avec les animaux de la maison - GS ;
- Fiches à calculer 3,4,5,6,7 avec les animaux du cirque ou du jardin MS-GS ;
- Fiches à calculer 5,6,7,8,9,10 avec les animaux de la maison - GS.

Les albums et fiches à calculer permettent de travailler toutes les décompositions des nombres de 3 à 10, en classe entière, en petits groupe (les enfants jouent à plusieurs, avec un meneur de jeu), ou en remédiation individuelle.
Le principe : les élèves doivent retrouver pour chaque page le nombre d'animaux manquant connaissant le nombre total d'animaux en utilisant les rabats de la couverture. Les animaux de la page de gauche sont disposés en constellations.



« Dans l'image, il y a 5 grenouilles sur 5 nénuphars disposés comme les points du dé. 2 en haut, 2 en bas et 1 au milieu. »

« Les grenouilles sous le rabat sont dans l'eau. Combien de grenouilles sont dans l'eau ? »

« Les grenouilles sous le rabat sont sur les nénuphars. Combien de grenouilles sont sur les nénuphars ? »

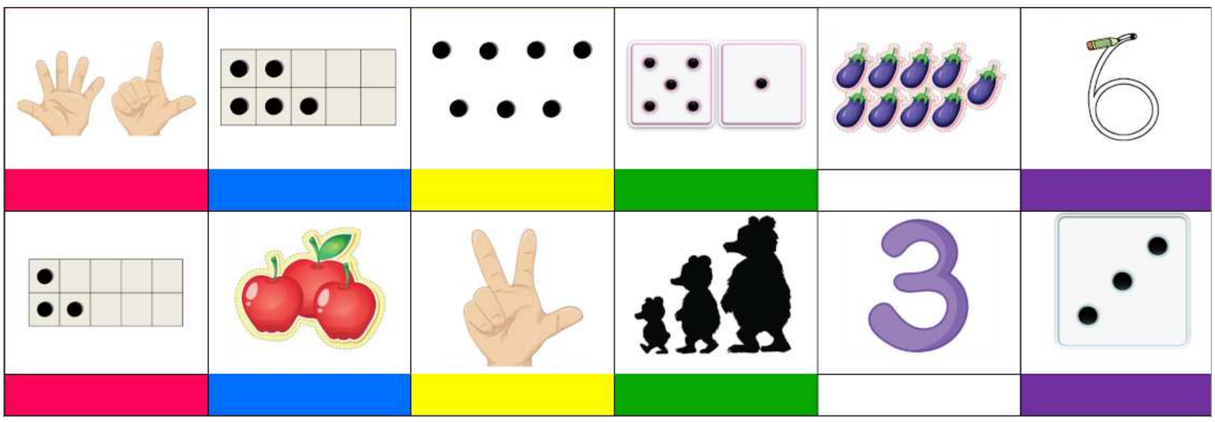
Activités à faire en classe

4 **C1** **- Fabriquer des boites à nombres**

« L'atelier boites à compter » est un jeu éducatif proposé par *Nathan* et permet aux enfants d'apprendre à dénombrer, à réaliser des collections de quantité donnée, de reconnaître différentes représentations des nombres.

Les élèves ont devant eux une boite à nombres, ainsi qu'une fiche et ils doivent reproduire la quantité donnée dans la case correspondante. Avec un budget rikiki, il est tout à fait possible de créer des boites à nombres à l'aide, par exemple, de boites à œufs et de créer ses propres fiches en fonction de son niveau de classe.
Les variables didactiques sur lesquelles on peut jouer sont les suivantes :

- Les nombres abordés : 1 à 3 ; 1 à 5 ; 5 à 7 ; 5 à 10 ; 1 à 10…
- La représentation : digitale, constellation, dé, chiffrée, quadrillée…
- Les objets représentés : animaux, points, objets de la classe…
- La taille des objets.
- La variété des objets sur une même carte.
- Le thème de la fiche : plusieurs représentations du même nombre, représentations de nombres différents à l'aide de mêmes représentants, représentations variées…
- Les objets à utiliser : jetons, animaux, légos, couleurs différentes…
- L'éloignement des objets : sur la table, au fond de la classe, à prendre en une seule fois…



5 C1 - **La piste au trésor**

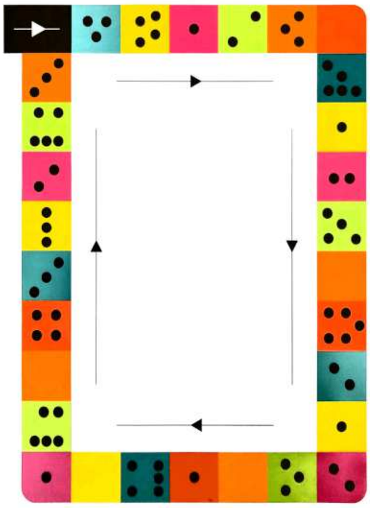
Dans le manuel « Découvrir les maths » en MS, de *Dominique Valentin*, on trouve la situation *Piste au trésor*.

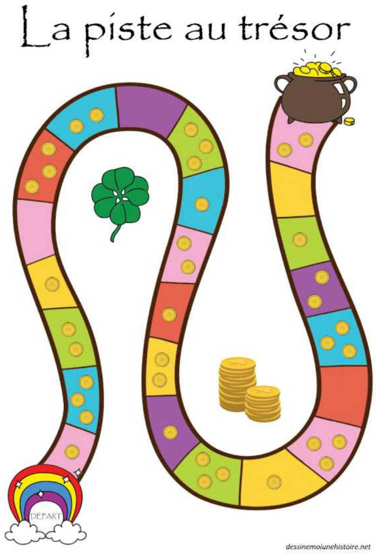
Objectif : Apprendre à choisir une quantité en fonction d'un but à atteindre.

Compétences travaillées : Évaluer et comparer des collections d'objets avec des procédures numériques ou non numériques. Quantifier des collections jusqu'à dix au moins ; les composer et les décomposer par manipulations effectives puis mentales. Dire combien il faut ajouter ou enlever pour obtenir des quantités ne dépassant pas dix. Parler des nombres à l'aide de leur décomposition.

But à atteindre : être le premier à remplir exactement sa grille en plaçant un jeton dans chaque case, sans en avoir pris trop.

Matériel : Une piste de jeu, deux dés avec les couleurs du plateau de jeu, une boîte avec des jetons, des tickets « trésor », une grille réponse de 10 cases par enfant. *Matériel à imprimer*.





Activité 1 : Avec un seul dé, appropriation des règles et du but du jeu.

Le premier joueur lance le dé et avance son pion sur la case de la couleur indiquée par le dé. Il prend alors autant de jetons dans sa boîte qu'il y en a de dessinés sur la case où est arrivé son pion. Il les pose sur son plateau. Il doit alors décider s'il reste sur sa grille assez de cases vides pour y poser les jetons qu'il vient de gagner. Si c'est le cas, il les place sur sa grille. Dans le cas contraire, s'il est capable de s'apercevoir qu'il aura trop de jetons avant de commencer à les poser, il peut les refuser et les remettre dans sa boîte. Si le joueur a pris plus de jetons que ne peut en contenir sa grille, la grille est entièrement vidée. Le joueur doit recommencer à la remplir, sans revenir au début de la piste. Les joueurs jouent alternativement jusqu'à ce que l'un d'eux aie rempli sa grille (et non jusqu'à ce que l'un deux soit arrivé au bout de la piste). Il est possible de faire plusieurs tours de piste. Chaque joueur a un observateur chargé du bon respect des règles (et non du meilleur choix).

Activité 2 : Avec deux dés, choisir pour gagner.

Avec deux dés, le jeu porte sur la stratégie d'anticipation. Chaque joueur lance à son tour les deux dés et choisit la couleur qui lui permet de ramasser la quantité de jetons qui lui convient en avançant sur la case de la couleur choisie la plus proche. Si les deux dés tombent sur la même couleur, le joueur relance un des deux dés. Il arrive qu'aucun des deux dés ne convienne (quantités trop importantes pour le nombre de cases à remplir) ; le joueur peut passer son tour en disant pourquoi. Comme dans le cas du jeu avec un seul dé, le joueur qui a pris trop de jetons perd, et sa grille est vidée. Lorsqu'un joueur a rempli sa grille, il gagne un ticket « trésor ». En fin de jeu, le nombre de tickets gagnés par chaque joueur est comparé. Celui qui possède le plus de tickets remporte la partie.

6 C2 - **Les fourmillions pour comprendre le codage des nombres et notre système de numération**

D'après « Apprentissages numériques et résolution de problèmes », Hatier ERMEL, de *Roland Charnay* (page 333 pour le CP, 316 pour le CE1). Le terme [fourmillions] est emprunté au livre de *Fynn*, « Anna et Mister God », Le Seuil, et défini comme un mot élastique que l'on peut étirer à l'infini pour désigner un très grand nombre. C'est la traduction française du mot anglais inventé par l'auteur : [squillions].


Objectifs

- Faire percevoir la nécessité de développer une stratégie plus efficace que le dénombrement un à un.
- Amener les enfants à organiser une collection en utilisant les groupements par dix, afin d'obtenir un dénombrement plus fiable.
- Faire admettre que ce mode de groupement peut se réitérer (récursivité des groupements).
- Donner du sens aux mots « unité », « dizaine », « centaine », éventuellement « mille ».
- Écrire 100 sous la forme : $10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10$.
- Permettre la production d'une écriture de nombre de trois à quatre chiffres (nombre écrit et lu avec l'enseignant).

Domaine numérique travaillé : les nombres à deux, trois chiffres (et parfois au-delà).
Période idéale : P4 pour le CP, P2 pour le CE1 et P1 pour le CE2.
Mise en place de la situation : une ou plusieurs séances au cours desquelles on pose le problème du dénombrement d'une collection importante d'objets récupérés depuis le début de l'année par les enfants à la demande du maître par exemple. Cette collection doit contenir plus de 1 300 éléments.
Matériel :

- des objets en quantité : bouchons, haricots, bûchettes, des trombones, pâtes. . . ;
- des élastiques, des sacs en plastique, des enveloppes, des boîtes. . . permettant de contenir les objets.

1) **Première phase : émergence de questions (phase collective).**
   On pose le problème aux enfants réunis autour du tas d'objets : « Combien y a-t -il d'allumettes, ou pois. . .) ? » L'enseignant recueille les réponses, les débuts de procédures, les réactions, les remarques de tous ordres, comme : « On les compte un par un » ; « On ne peut pas savoir, c'est trop long à compter » ; « On en prend 5 chacun, on sait compter de 5 en 5 » ; « On compte 2 par 2 » ; « C'est pas assez par 5. On va les mettre par 10 et on aura 10, 20, 30, 40. . . »Si l'idée de grouper par dix ne sort pas, l'enseignant devra la proposer.
2) **Deuxième phase : mise en place de la procédure de groupement (travail de groupes).**
   a) **Étape 1 : les dizaines.** La moitié des enfants fabrique des paquets de 10 objets (les remplisseurs). Les autres contrôlent ces paquets. Lorsque ce travail est fini, on range les paquets et on met en réserve les objets isolés.
   b) **Étape 2 : les centaines.** Quand tous les paquets de dix sont prêts, on fait des sacs de 10 paquets de dix. On range les sacs de 100, on range les paquets de dix non regroupés et les objets isolés.

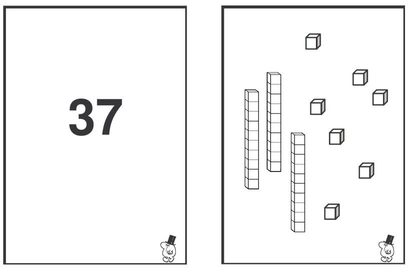
c) **Étape 3 : les milliers.** On regroupe tous les enfants autour des sacs et on fait des boîtes de mille objets. Cette phase de mise en place de la procédure de groupements et de sa réitération permet aux enfants de bien saisir l'organisation des groupements. Elle s'accompagne de langage, de remarques que l'enseignant souligne, qu'il reformule, qu'il renvoie au groupe classe, comme : « 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100 objets pour ce sac » ; « 10 sacs de 10, c'est 100, c'est une centaine » ; « il y a 10 objets dans les petites enveloppes, 10 petites enveloppes dans les grandes, 10 grandes enveloppes dans les sacs, on pourrait mettre 10 sacs dans des plus grands ».

3) **Troisième phase : productions d'écritures.**
Lorsque la collection est ainsi organisée, ou après chaque étape, l'enseignant propose de chercher un message à noter sur le sac de cent, puis sur la boîte de mille pour se rappeler de leur contenu. Quand les élèves l'ont fait, il affiche les écrits les plus caractéristiques que les enfants déchiffrent et critiquent.
Après avoir reposé la question : « Combien y a-t-il d'objets ? », l'enseignant demande d'écrire le nombre d'objets de la collection. On ne vise pas, à ce moment-là, la maîtrise de cette écriture, mais bien plutôt la découverte de son existence. L'enseignant acceptera aussi bien : « 1 sac de 1 000 objets, 3 sacs de 100 objets, 8 sacs de 10 objets, 7 objets » ; « 1 000 + 100 + 100 + 100 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 7 » ; « 1 000 + 300 + 80 + 7 »
Si l'écriture 1 387 n'est pas proposée par un enfant, elle l'est par l'enseignant qui la présente comme l'écriture « la plus courte », ou l'écriture « habituelle » de ce nombre.

4) **Quatrième phase : le compteur vivant.**
La collection continue à évoluer. L'enseignant demande aux enfants de récolter de nouveau des objets ayant servi à l'activité initiale. Chaque matin, l'enseignant relève les objets apportés et propose aux enfants de chercher quel est le nombre des éléments de la collection après cet ajout.
Quatre enfants font fonctionner un « compteur vivant » face au reste de la classe. Ils « sont » les roues du compteur : roue des unités, dizaines, centaines et mille. Ils disposent de cartons de bristol ordonnés sur lesquels sont écrits les chiffres de 0 à 9. Ils changent la valeur des chiffres de leur roue à bon escient.
Les mots « dizaine », « centaine » sont utilisés chaque fois que nécessaire ; l'écriture du nombre à l'aide des « roues » du compteur et mise en évidence.

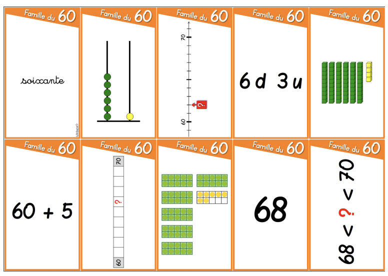
7 C2 - Des jeux pour travailler la numération

La bataille des dizaines et des unités
Lien vers le site « Les coccinelles ».



Compétences travaillées : comparer deux nombres, savoir décomposer et recomposer un nombre inférieur à 50 en dizaines et unités.
Principe du jeu : jeu de bataille.

Le jeu des neuf familles de la numération
Lien vers le site « Lutin bazar ».



Compétences travaillées : utiliser diverses représentations des nombres jusqu'à 100, passer d'une représentation à une autre.
Principe du jeu : jeu des sept familles.

Activités à faire en classe

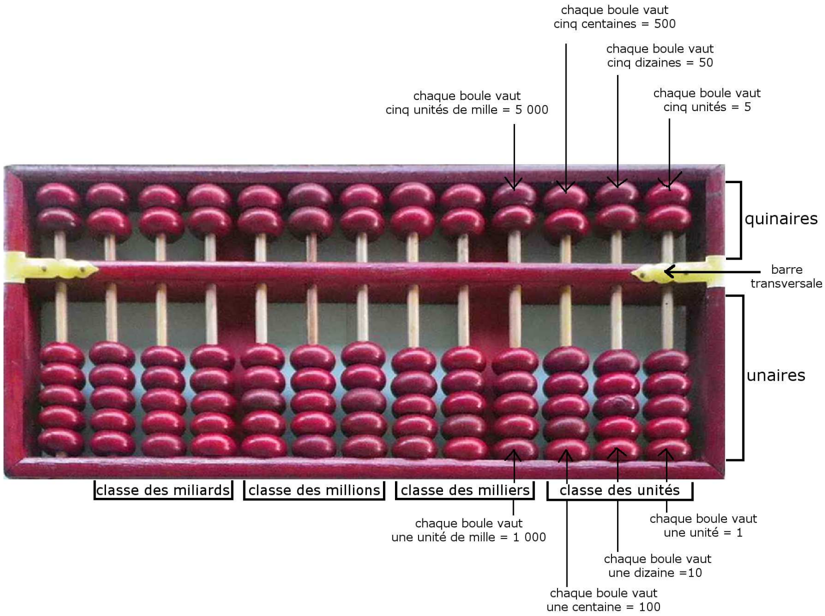
8 **C2/C3** **- Utilisation de bouliers et d'abaques pour consolider la numération**

Les abaques (du latin *abacus*, emprunté au grec *abax*, « table à calcul ») sont utilisés depuis des millénaires dans différents pays du monde et permettent une représentation aisée des nombres en fonction de leur position. Il en existe de différents type, par exemples, le boulier chinois et l'abaque à jetons.

1) Le boulier chinois

Le boulier chinois est aussi appelé *suàn pán* signifiant littéralement « planchette à calcul ».

Il possède habituellement 13 tiges et s'utilise posé à plat. On affecte à l'une des tiges la valeur de l'unité. Une boule est activée lorsqu'on l'approche de la barre transversale. Elle prend alors une valeur dépendant de la tige et de la partie (supérieure ou inférieure) sur laquelle elle est placée. L'écriture d'un nombre n'est pas unique, mais elle est optimisée lorsqu'aucune tige n'est vide.



2) L'abaque à jetons romain

Les colones verticales représentent les différents ordres : unités, dizaines, centaines, milliers, dizaines de milliers.... Pour représenter un nombre, il suffit de placer, pour chaque ordre, autant de jetons que la valeur du chiffre. Il s'apparente au traditionnel tableau de numération.

L'utilisation de l'un ou l'autre de ces abaques devrait se faire en fil rouge tout au long de l'année, comme outil de représentation des nombres, de vérification, de remédiation... Quand l'élève se l'ai bien approprié, on peut proposer de faire des calculs à l'abaque.

NOMBRES & CALCULS 2

Calcul mental et réso. de problèmes

Dans les programmes - cycle 1

Pour provoquer la réflexion des enfants, l'enseignant les met face à des problèmes à leur portée. Quels que soient le domaine d'apprentissage et le moment de vie de classe, il cible des situations, pose des questions ouvertes pour lesquelles les enfants n'ont pas alors de réponse directement disponible. Mentalement, ils recoupent des situations, ils font appel à leurs connaissances, ils font l'inventaire de possibles, ils sélectionnent. Ils tâtonnent et font des essais de réponse.

Dans les programmes - cycle 2

Calculer avec des nombres entiers

- Mémoriser des faits numériques et des procédures : tables d'addition, décompositions additives de 10 et de 100, compléments à la dizaine, à la centaine, doubles et moitiés...
- Traiter à l'oral des calculs relevant des quatre opérations.
- Élaborer ou choisir des stratégies, expliciter les procédures et comparer leur efficacité : addition, soustraction, multiplication, division ; propriétés des opérations (commutativité, associativité, distributivité) et de la numération.
- Calcul mental : calculer pour obtenir un résultat exact, estimer un ordre de grandeur et vérifier la vraisemblance d'un résultat ; résoudre mentalement des problèmes arithmétiques, en particulier en lien avec la monnaie et les durées.
- Calcul en ligne : calculer en utilisant des écritures en ligne additives, soustractives, multiplicatives, mixtes.

Résoudre des problèmes en utilisant des nombres entiers et le calcul

- Résoudre des problèmes issus de situations de la vie quotidienne ou adaptés de jeux [...] conduisant à utiliser les quatre opérations : sens des opérations ; problèmes relevant des structures additives, multiplicatives, de partages ou de groupements.
- Modéliser ces problèmes à l'aide d'écritures mathématiques, sens des symboles $+, -, \times, \div$.

Dans les programmes - cycle 3 (CM)

Calculer avec des nombres entiers et décimaux

- Mobiliser les faits numériques mémorisés au C2 (tables de multiplication jusqu'à 9). Connaître les multiples de 25 ; 50, les diviseur. de 100.
- Calcul mental ou en ligne : multiplier, diviser un nombre décimal par 10, 100, 1 000 ; rechercher le complément à l'entier supérieur ; multiplier par 5 ; 25 ; 50.
  Connaître les critères de divisibilité par 2, 3, 5, 9 et 10.
  Connaître des propriétés de l'addition, soustraction, multiplication (commutativité, distributivité, associativité).
  Vérifier la vraisemblance d'un résultat, notamment en estimant un ordre de grandeur.

Résoudre des problèmes en utilisant des fractions simples, les nombres décimaux et le calcul

- Résoudre des problèmes mettant en jeu les quatre opérations : sens des opérations ; problèmes à une ou plusieurs étapes relevant des structures additive et/ou multiplicative.

Repères didactiques

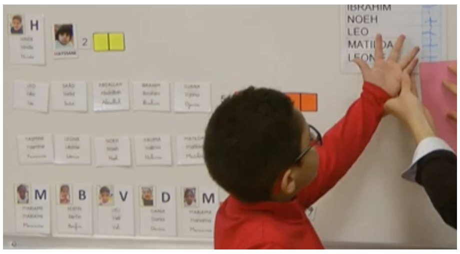
1. Les rituels en mathématiques

Les rituels regroupent les activités qui se répètent chaque jour ou de façon plus espacée mais régulières. On parle souvent de rituels à l'école maternelle, mais il est important également d'instaurer des rituels à l'école élémentaire.

Fonctions principales des rituels

- Les rituels marquent un rite de **passage** : début de journée, activité de démarrage, moment de rupture...
- Fonction d'**autonomie** : la répétition et les contraintes incitent l'élève à adopter une manière de faire, souvent identique, mais évolutive en fonction des variables utilisées.
- Fonction **contractuelle** : règles bien précises collectives et individuelles, rôles.
- Fonction **sociale** : les rituels se font généralement en classe entière avec des règles à respecter, une trame fixe.
- Liés aux **apprentissages** fondamentaux : viser des apprentissages fonctionnels ciblés, créer des automatismes, métier d'élève.

Exemple Rituels classiques à l'école maternelle et élémentaire :
- présents/absents ;
- comptines avec ou sans bande numérique ;
- constellations ;
- jeu du furet ;
- la cible ;
- les pailles...



L'appel, un rituel pour construire le nombre.
Centre Alain Savary, IFÉ [sav19]

Attention toutefois à ne pas tomber dans la routine : la répétition engendre l'automatisme, la lassitude et l'ennui. Les rituels peuvent être vidés de leur sens et externes aux préoccupations des élèves. Éviter également l'accumulation des rituels. Pour remédier à ces écueils, penser à l'articulation entre les temps de regroupements et ceux des ateliers, à leur place dans la journée, à leur quantité, à leur évolution et à leur diversification.

Quelques repères pour organiser la progressivité du rituel de l'appel.

PS	MS	GS
Utiliser le nombre dans une situation ayant du sens ; dénombrer une quantité avec la suite orale entre 3 et 5 (absents par exemple) ; reconnaître une quantité par perception visuelle.	Utiliser le nombre dans une situation ayant du sens ; dénombrer une quantité avec la suite orale entre 5 et 10 ; associer le nom des nombres avec leur écriture chiffrée.	Mémoriser la suite des nombres jusqu'à 15 ; utiliser la suite des nombres connus pour dénombrer ; utiliser le nombre dans une situation ayant du sens ; associer le nom des nombres avec leur écriture chiffrée ; comparer des quantités, résoudre des problèmes.

2. Le calcul mental à l'école élémentaire

L'expression calcul mental signifie, qu'entre l'énoncé du problème et l'énoncé du résultat, on renonce à utiliser toute opération posée ou calculée à l'aide d'une calculatrice. Il est cependant permis d'utiliser une trace écrite, par exemple pour noter des résultats intermédiaires, ou d'utiliser des aides comme des bandes numériques.

Les programmes officiels de 2020 [édu2] stipulent :

> *La pratique quotidienne du calcul mental conforte la maîtrise des nombres et des opérations et permet l'acquisition d'automatismes procéduraux et la mémorisation progressive de résultats comme ceux des compléments à 10, des tables d'addition et de multiplication. L'appropriation des stratégies de calcul adaptées aux nombres et aux opérations en jeu s'appuient sur la connaissance de faits numériques mémorisés (répertoires additif et multiplicatif, connaissance des unités de numération et de leurs relations, etc.) et sur celle des propriétés des opérations et de la numération. Le calcul mental est essentiel dans la vie quotidienne où il est souvent nécessaire de parvenir rapidement à un ordre de grandeur du résultat d'une opération, ou de vérifier un prix, etc.*

A. Calcul mental automatisé et réfléchi

Plusieurs objectifs dans l'enseignement du calcul mental, prolongés au collège, sont ainsi mis en évidence :

Objectifs du calcul mental

- **Automatiser** les calculs simples : constitution des répertoires additifs et multiplicatifs.
- Mettre en place de **méthodes** pour les calculs plus complexes et le calcul approché.
- Renforcer des **images mentales des nombres**, les rendre familiers.
- Améliorer la **rapidité** des calculs.

On distingue deux types de calcul mental : le calcul automatisé et le calcul réfléchi.

Calcul mental automatisé	Calcul mental réfléchi
Les résultats sont immédiatement disponibles car mémorisés.	Les résultats sont obtenus après raisonnement.
Les procédures sont stables d'un individu à l'autre.	Les procédures sont variables d'un individu à l'autre, et sont multiples.
Les calculs nécessitent très peu d'efforts car ils sont exécutés par réflexe et sont donc réalisés rapidement.	Les calculs nécessitent une certaine charge de travail et le recours éventuel à une trace écrite.
Il s'apparente à un exercice classique, il suffit d'exécuter une procédure connue.	Il s'apparente à la résolution d'un petit problème dont il faut imaginer une procédure possible pour le résoudre.

Exemple

- Calcul mental automatisé pour lequel le résultat est dans notre mémoire : tables de multiplication ; doubles et moitiés ; compléments à la dizaine. . .
- Calcul mental réfléchi : stratégies différentes pour $23 + 18$. Additionner 20 et 10 puis 3 et 8 et additionner ; ajouter 10 à 23, puis 8 à 33 ; ajouter 20 à 23, puis soustraire 2. . .

B. Différents types de séances de calcul mental

On sera vigilant à varier les types de séances de calcul mental, voici quelques exemples classiques :

• **Le procédé La Martinière** : *Claude Martin* (1735-1800) est un soldat français. À sa mort, il délègue par testament une grande partie de sa fortune à la création des écoles « La Martinière » à Lyon, Lucknow et Calcutta. L'école de Lyon est très novatrice du point de vue pédagogique, inventant notamment une technique d'utilisation de l'ardoise, toujours pratiquée de nos jours et portant le nom de méthode « La Martinière ». Voici une description tirée du manuel de CM2 de Max Benhaïm et Albert Nadaud : *Calcul jour après jour Cours moyen 2e année*, 1969.

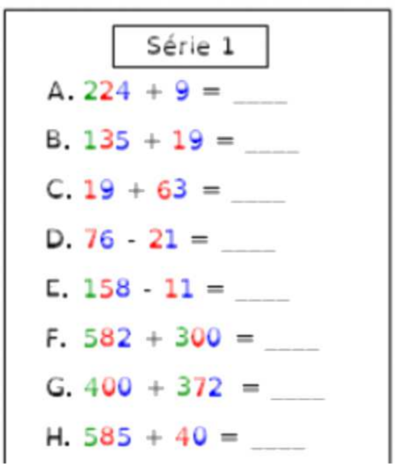
Principes

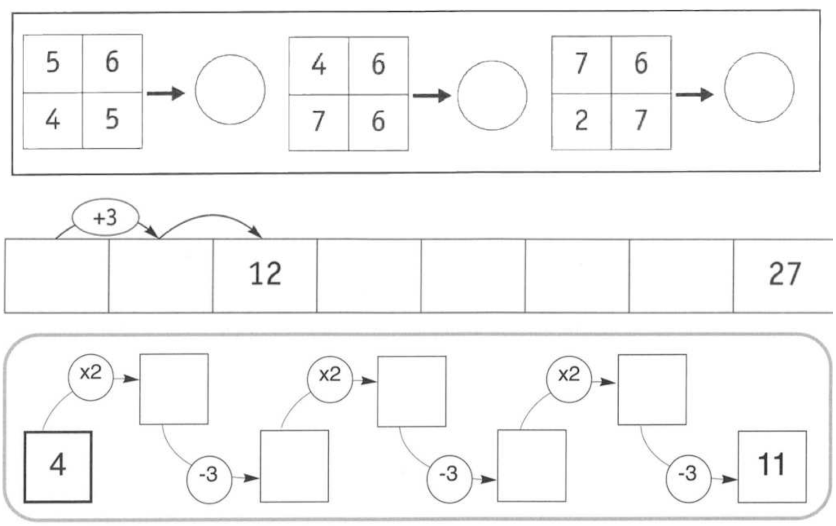
- Les enfants ont devant eux leur ardoise et un morceau de craie.
- Le maître pose la question et la répète une fois.
- Le maître laisse les élèves réfléchir quelques instants.
- Au signal (coup de règle), les enfants écrivent la réponse.
- Au second coup de règle, les élèves doivent lever l'ardoise.
- Le Maître contrôle les résultats et on fait la correction.

L'avantage de la méthode est que l'enseignant voit d'emblée les résultats de tous les élèves, il permet une évaluation globale de la classe. Il travaille la concentration. Il est adapté au calcul automatisé puisque le temps est court. Cependant, il ne laisse pas de trace écrite persistante et ne permet pas la différenciation. Les élèves sont soumis à une pression qui peut provoquer la panique ou la compétition chez certains.

• **Le calcul mental à support écrit en temps limité** : l'élève dispose d'une feuille comportant plusieurs calculs qu'il doit résoudre en temps limité (5 à 15 min). Le calcul se fait dans la tête et le résultat est écrit sur la feuille qui prévoit un espace approprié. L'enseignant relève alors les feuilles pour évaluer les réussites des élèves. Cette méthode facilite l'évaluation individuelle.

• **Moments pour concevoir des méthodes et comparer leur efficacité** : il s'agit davantage de travailler le calcul réfléchi au travers d'activités plus longues qui ne sont plus nécessairement travaillées individuellement. Elles peuvent être présentées de manière ludique, sous forme de « mini-problèmes » par exemple. Ce sera l'occasion de comparer et d'analyser les méthodes utilisées par les élèves. On pourra par exemple utiliser le livre « Le calcul mental au quotidien » de *François Boule* [bou12] qui fourmille d'exemples et qui propose une progression pour les cycles 2 et 3.





C. Progressivité des apprentissages

Au cycle 1 : l'élève apprend à quantifier des collections jusqu'à dix, il les compose et les décompose par manipulations effectives puis mentales.
Il apprend à dire combien il faut ajouter ou enlever pour obtenir des quantités ne dépassant pas dix et parle des nombres à l'aide de leur décomposition.
Ces premiers travaux, nécessaires pour la construction de la notion de nombre, sont aussi les premiers apprentissages du calcul.

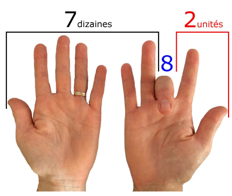
Au cycle 2 : les élèves établissent puis doivent progressivement mémoriser des faits numériques et des procédures.
Au CP, les élèves apprennent en P1 les compléments à 10 et les décomposition additives pour des nombres inférieurs à 10.
En P2, ils apprennent les doubles des nombres inférieurs à 10 et les moitiés des nombres inférieurs à 20.
En fin d'année, les tables d'additions sont censées être mémorisées.
Concernant les procédures, ils mobilisent tout au long de l'année la propriété de commutativité de l'addition : « $3+6$, c'est pareil que $6+3$ ».
Au CE1, ils apprennent les compléments à la dizaine et à la centaine supérieure, puis les doubles et moitiés d'usage courant.
La multiplication par 10, ainsi que les tables de 3, 4 et 5 sont vues à partir de la P3.
Sur cette période, la commutativité de la multiplication est introduite : « 3×5, c'est pareil que 5×3 », ainsi que l'associativité : « $3\times 5\times 2$, c'est pareil que 3×10 » et la distributivité sur l'addition sur des cas très simples : « $12\times 5 = 10\times 5 + 2\times 5$ ».
Au CE2, il apprennent les compléments à 1 000, puis la multiplication par 10 et 1 000, ainsi que les tables de 6 à 9. La distributivité sur la soustraction est mobilisée sur des cas simples : « $5\times 18 = 5\times 20 - 5\times 2$ ».
À partir de la P3, ils développent des procédures concernant la division euclidienne de nombres comme 10, 25, 50 et 100 par un nombre à 1 chiffre à l'oral : « 92 divisé par 9, il y a 10 fois 9 et il reste 2 ».

Au cycle 3 : tout au long du cycle, la pratique régulière du calcul conforte et consolide la mémorisation des tables de multiplication jusqu'à 9.
Au CM1, les élèves apprennent les quatre premiers multiples de 25 et 50.
À partir de la P3, ils apprennent à multiplier et à diviser par 10 des nombres décimaux et recherchent le complément au nombre entier supérieur. Il apprennent également les critères de divisibilité par 2, 5 et 10.
En fin d'année, ils multiplient par 1 000 un nombre décimal.
Les propriétés des opérations sont stabilisées tout au long de l'année.
Au CM2, ils apprennent très vite à diviser un nombre décimal par 100.
En P3, ils multiplient un nombre décimal par 5 et 50, puis apprennent les critères de divisibilité par 3 et 9.
Les propriétés des opérations sont approfondies sur des calculs plus complexes par la nature des nombres, leur taille ou leur nombre.

REMARQUE : on peut facilement retrouver le résultat de la table des 9 avec nos mains. Par exemple, calculons 8×9 :

- placer les faces des mains devant soi, abaisser le 8^{e} doigt ;
- les doigts à gauche représentent le nombre de dizaines ;
- les doigts à droite représentent le nombre d'unités.

donc $8\times 9 = 72$.



Repères didactiques

3. Le calcul posé en ligne

D'après le document Éduscol : « Le calcul en ligne au cycle 2 » [édu2], le calcul en ligne est une modalité de calcul écrit ou partiellement écrit. Il se distingue à la fois :
– du calcul mental, en donnant la possibilité à chaque élève, s'il en ressent le besoin, d'écrire des étapes de calculs intermédiaires qui seraient trop lourdes à garder en mémoire ;
– du calcul posé en colonnes, dans le sens où il ne consiste pas en la mise en œuvre d'un algorithme.

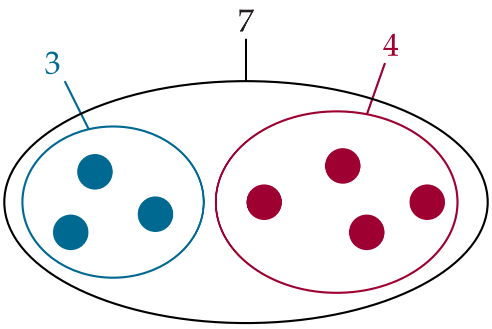
Le calcul en ligne repose sur la compréhension de la notion de nombre, du principe de la numération décimale de position et des propriétés des opérations. En calcul en ligne, les étapes écrites utiles pour l'élève peuvent, dans un premier temps, se présenter sous différentes formes : calculs séparés, arbres de calcul, écritures utilisant des mots ou des flèches, ou tout autre écrit qui accompagne la démarche de l'élève.

A. Règles du calcul en ligne

L'oralisation du calcul en ligne implique un minimum de connaissances au niveau du vocabulaire.

Signe	opération	résultat	exemple
plus : $+$	addition	somme	$3+4=7$: la somme de 3 et de 4 est 7
moins : $-$	soustraction	différence	$7-3=4$: la différence entre 7 et 3 est 4
multiplié : $\times$	multiplication	produit	$8\times 2=16$: le produit de 8 et de 2 est 16
divisé : $\div$	division	quotient	$16\div 2=8$: le quotient de 16 par 2 est 8

Il est important, dès le début du cycle 2, de travailler en même temps l'addition et la soustraction, afin de montrer le lien fort qui les unit.



$3+4=7$

$4+3=7$

$7-3=4$

$7-4=3$

Le **statut du signe « = »** est souvent interprété comme un signe permettant l'affichage du résultat après exécution d'un calcul alors qu'il caractérise l'équivalence entre le membre écrit à sa droite et celui écrit à sa gauche.

> Exemple J'avais 12 billes en arrivant à l'école, j'en ai gagné 10 à la récréation et encore 2 autres à la pause méridienne. J'ai donc maintenant 24 billes.
> L'élève aura tendance à écrire $12+10=22+2=24$.

Cette écriture du calcul n'est pas correcte d'un point de vue mathématique. Elle ne doit pas être proposée au tableau, mais ne doit pas non plus être sanctionnée ; la démarche de l'élève est correcte, c'est l'utilisation du symbole de l'égalité qui ne l'est pas, il faut donc lui expliquer et éviter de laisser s'installer de mauvaises habitudes.

Afin de transiter vers le calcul en colonnes, les élèves apprennent à ajouter des nombres en ligne, en les décomposant en dizaines-unités, puis en ajoutant séparément les dizaines et les unités avant de reconstituer le résultat.

> Exemple $65 + 17 = (60 + 5) + (10 + 7) = (60 + 10) + (5 + 7) = 70 + 12 = 82$.
>
> Pour matérialiser cette façon de calculer, on peut avoir recours à un **arbre de calcul**.
>
> $$\begin{aligned} 65 + 17 &= 60 + 5 + 10 + 7 \\ &= 60 + 10 + 5 + 7 \\ &= 70 + 12 \\ &= 82 \end{aligned}$$

Les premières situations multiplicatives consistent généralement à donner des activités de dénombrement de collections rangées par paquets équipotents ou de manière rectangulaire.
Ainsi, les élèves découvrent l'**écriture multiplicative** comme représentant le nombre d'objets d'une collection rangée en lignes et colonnes. Il s'agit de l'addition itérée. Cela permet notamment d'installer la **commutativité de la multiplication**.

> Exemple
>
> 
>
> On a les représentations de $5 + 5 + 5 = 3 \times 5 = 5 \times 3$.

B. Progressivité des apprentissages

Les connaissances et compétences mises en œuvre pour le calcul en ligne sont les mêmes que pour le calcul mental, le support de l'écrit permettant d'alléger la mémoire de travail et ainsi de traiter des calculs portant sur un registre numérique étendu.

4. Résolution de problèmes

A. Qu'est-ce qu'un problème ?

« Il y a des problèmes lorsqu'on peut apporter des réponses par des raisonnements. Il faut qu'il y ait quelque chose à chercher et qu'il ne soit pas possible d'utiliser la mémoire seule. » *Guy Brousseau*.

« Un problème est généralement défini comme une situation initiale avec un but à atteindre, demandant au sujet d'élaborer une suite d'actions ou d'opérations pour atteindre ce but. » *Jean Brun, Dominique Valentin*.
Le même énoncé peut constituer un problème, ou un exercice selon le niveau auquel on le propose :

> **Exemple** J'ai 38 billes et j'en ai gagné 23 à la récré. Combien avais-je de billes ce matin ?
> Au CP, il s'agit d'un problème puisqu'il va falloir trouver une solution personnelle, pour laquelle la technique experte n'est pas connue. Au CM1, il s'agit d'un exercice.

Aujourd'hui, il y a un consensus sur la place centrale que doit occuper la résolution de problèmes dans l'enseignement des mathématiques à l'école primaire comme au collège. Dans le rapport dirigé par *Cédric Villani* et *Charles Torossian* datant de février 2018 : « 21 mesures pour l'enseignement des mathématiques » [vil18], la cinquième des 21 mesures concerne les étapes d'apprentissage : « Dès le plus jeune âge mettre en oeuvre un apprentissage des mathématiques fondé sur :
– la manipulation et l'expérimentation ;
– la verbalisation ;
– l'abstraction. »
La résolution de problèmes permet de mettre en œuvre ce cinquième fondement, selon le schéma suivant, par exemple :

Agir
Faire, manipuler, essayer, recommencer
Prendre des initiative
Décider

Manipuler, expérimenter

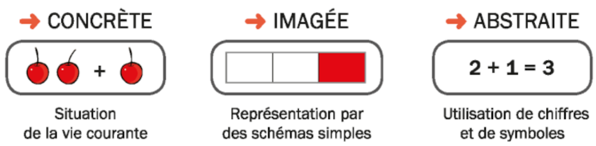
Réussir
Aller au bout d'une démarche
Prendre plaisir
Être vu par l'adulte en train de réussir

Comprendre
Pourquoi, comment on a réussi
Mettre des mots sur ses réussites

verbalier

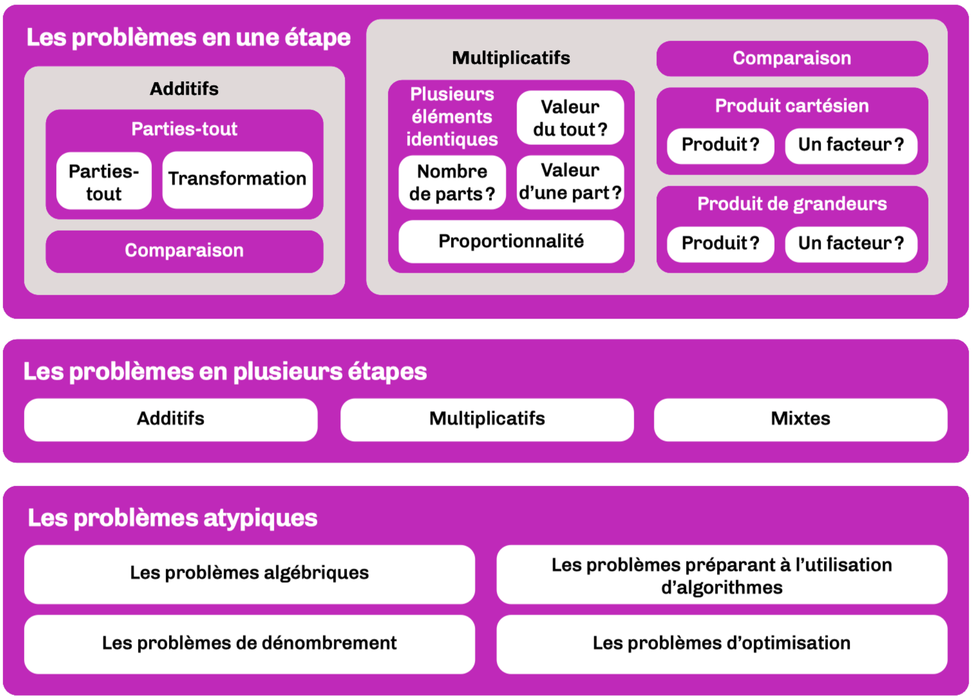
Généraliser
Conjecturer, représenter de manière générale
Passer d'une représentation concrète
à imagée à abstraite, utiliser des symboles

Abstraire



B. Catégorisation des problèmes

Le guide « La résolution de problèmes mathématiques au cours moyen » [men22], édité en 2022 par le ministère de l'éducation nationale, fait émerger un exemple de catégorisation de problèmes en trois catégories principales, en rapport avec les travaux de *Catherine Houdement* et résumées pas le schéma suivant :



– **Les problèmes en une étape :** ce sont des problèmes qui vont se traiter en effectuant une unique opération.
Le travail du CM va être de construire des modélisations permettant de résoudre ces types de problèmes de manière quasi-automatisée.

> Exemple *Catherine Houdement* propose quatre problèmes en une étape :
> 1) Un massif de fleurs est formé de 60 tulipes rouges et de 15 tulipes noires. Combien y a-t-il de tulipes dans ce massif ?
> 2) Un massif est formé de 60 rangées, toutes de 15 tulipes. Combien y a-t-il de tulipes dans ce massif ?
> 3) Un massif de 60 fleurs est composé de tulipes et de 15 jonquilles. Combien y a-t-il de tulipes dans ce massif ?
> 4) 60 tulipes sont disposées en 15 massifs tous identiques. Combien y a-t-il de tulipes dans un massif ?

Ces problèmes ont des points communs : on y parle de massifs de fleurs et de tulipes et ils contiennent, tous, les nombres 60 et 15.
Toutefois, la résolution se fera par des opérations différente : dans nos exemples, les problèmes 1) et 3) sont des problèmes additifs de parties-tout (le premier se résout à l'aide d'une addition, le troisième grâce à une soustraction).
Les problèmes 2) et 4) sont des problèmes multiplicatifs à plusieurs éléments identiques (le deuxième fait appel à une multiplication et le quatrième à une division).
On trouvera dans le guide de multiples exemples expliquant les autres sous-types de problème en une étape.

– **Les problèmes en plusieurs étapes :** ce sont des problèmes qui vont se traiter comme une succession de problèmes en une étape qui vont permettre d'aboutir à la solution recherchée.

Repères didactiques

La difficulté des problèmes en plusieurs étapes n'est pas la simple somme des difficultés des sous-problèmes en une étape qui les composent. Il faut également ajouter la difficulté de la mise en relation de ces différents sous-problèmes élémentaires. La résolution de problèmes en plusieurs étapes va permettre de renforcer les habiletés de résolution de problèmes en une étape.

Exemple

1) Une bouteille de jus de pomme coûte 1,87 zed. Une bouteille de jus d'orange coûte 3,29 zeds. Julien a 4 zeds. Combien de zeds Julien doit-il avoir en plus pour acheter les deux bouteilles ?
2) Un supermarché a commandé une palette de barquettes de fraises. La palette est constituée de 12 étages de cageots et il y a 5 cageots sur chaque étage. Dans chaque cageot, il y a 12 barquettes de 400 g de fraises. Quelle masse de fraises y a-t-il sur la palette ?
3) Lydia achète 5 billets de cinéma à 7,30 €. Elle donne un billet de 50 € à l'employé de caisse. Combien celui-ci va-t-il lui rendre ?

Ici, le premier exemple est un problème en deux étapes dans le domaine additif, le deuxième est un problème en trois étapes dans le domaine multiplicatif et le troisième un problème mixte en deux étapes.

– **les problèmes atypiques :** ce sont des problèmes verbaux à données numériques qui ne rentrent pas dans les catégories des problèmes en une ou plusieurs étapes mentionnées précédemment.
Cette catégorie est moins centrale, mais importante à mettre en place au CM : la résolution des problèmes atypiques doit permettre aux élèves de développer des compétences transversales comme l'autonomie, la prise de décisions, la créativité. . . et de rencontrer un certain nombre de stratégies et de types de raisonnements.

Exemple

1) Dans une ferme, il y a des lapins et des poules. Pour faire chercher le nombre de poules et de lapins à son frère, Cindy lui dit qu'il y a 114 pattes et 40 têtes. Combien y a-t-il de poules et combien y a-t-il de lapins dans la ferme ?
2) Combien peux-tu écrire de nombres à deux chiffres en utilisant uniquement les chiffres 2, 3, 4 et 5 ? Le même chiffre ne peut être utilisé qu'une fois.
3) Un rectangle a ses côtés qui ont pour longueur des nombres entiers de centimètres. Son aire est de 100 cm^3. Trouve toutes les dimensions possibles pour ce rectangle.
4) Parmi les rectangles qui ont leurs côtés mesurant un nombre entier de centimètres et dont le périmètre est 20 cm, détermine celui qui a la plus grande aire.

Le premier problème est considéré comme algébrique, car il pourra être résolu au C4 grâce à l'algèbre (résolution par une ou plusieurs équations). Au C3, l'élève pourra procéder par essais et ajustements en choisissant des valeurs arbitraires, en effectuant les calculs et en ajustant jusqu'à ce qu'une valeur convienne ; par un traitement pré-algébrique en modélisant la situation, par exemple, par une représentation en barres pour en isoler l'inconnue ; ou encore par un raisonnement déductif en réfléchissant aux valeurs choisies afin d'être plus efficace.
Le deuxième exemple est un problème de dénombrement qui demande une certaine organisation. L'élève pourra le résoudre, par exemple, à l'aide d'un tableau ou d'un arbre.
Le troisième exemple fait partie des problèmes préparant à l'utilisation d'algorithmes et qui consistent à rechercher des solutions vérifiant certaines conditions parmi un ensemble de cas possibles. Ici, il doit chercher les couples de nombres entiers strictement positifs dont le produit est 100. De tels problèmes pourront se traiter dans le second degré en écrivant un programme permettant de balayer tous les cas possibles.
Enfin, le dernier problème est un problème d'optimisation et consiste à trouver la meilleure solution possible tout en respectant un certain nombre de contraintes.

D'autres catégorisations existent, basées davantage sur les types de connaissances et compétences à acquérir.

	Contexte	Objectifs	*Exemples*
Situation-problème	Situation où le problème permet aux élèves d'acquérir des connaissances nouvelles. Deux types de problèmes : ceux pour lesquels les élèves disposent de connaissances pas optimales pour le traiter ; ceux pour lesquels les connaissances initiales des élèves ne permettent pas de résoudre le problème directement.	• Prendre conscience de ce qu'est un problème • Emettre des hypothèses • Remettre en cause le savoir antérieur • Induire un comportement de recherche • Construire de nouveaux savoirs	*C1 : une boite d'œufs représente un bus. Certaines places sont prises par des bonhommes. Aller en une seule fois chercher le nombre de bonhommes nécessaire pour remplir le bus.* *CE2 : je veux répartir 756 œufs dans des boîtes de 12 œufs. Combien me faut-il de boîtes ?*
Réinvestissement	Problème visant le transfert et l'utilisation de connaissances antérieures : l'acquisition de connaissances dans un contexte particulier ne suffit pas à leur ancrage. On propose donc un problème utilisant ces connaissances dans un autre contexte. Ce problème peut être un problème complexe nécessitant la mobilisation de plusieurs connaissances mathématiques.	• Reconnaitre, identifier et interpréter des données • Rechercher des informations sur différentes supports • Mobiliser des connaissances construites précédemment dans un contexte différent à bon escient et de façon autonome • Contextualiser, décontextualiser, recontextualiser	*C2 : Tom a gagné 3 paquets de Pokémon. il y a 5 cartes par paquets. Combine Tom a-t-il gagné de cartes Pokemon ?* *CM1/CM2 : je veux répartir 756 œufs dans des boîtes de 12 œufs. Combien me faut-il de boîtes ?*
Problème ouvert	Problème destiné à mettre l'élève en situation de recherche et développer des compétences d'ordre méthodologique nécessaires pour résoudre des situations problèmes. Pas de démarche préalablement explorée. *Exemples de problèmes ouverts*	• Acquérir des attitudes et méthodes favorables à la résolution de problème : hypothèses, imaginer une ou plusieurs solutions, les valider, argumenter, utiliser des connaissances antérieures • Gérer les essais et les traces écrites, trier, organiser les informations, organiser sa démarche, prendre des initiatives, oser se tromper	*CE1 : je veux répartir 756 œufs dans des boîtes de 12 œufs. Combien me faut-il de boîtes ?* *C3 : on dispose de pièces de 50 c, de 20 c et de 5 c. Peut-on constituer la somme de 5 € avec exactement 20 pièces ?*
Tâche complexe	Problème destiné à permettre l'utilisation conjointe de plusieurs connaissances dans des situations plus complexes. Exige de scinder le problème en sous problèmes, de comparer plusieurs solutions et/ou hypothèses et fait appel à plusieurs connaissances, savoirs et savoir-faire. *Exemples de tâches complexes*	• Prendre des informations dans différentes supports • Trier, organiser les informations • Utiliser des connaissances antérieures • Gérer les traces écrites et les essais • Produire des résultats intermédiaires	 *CP : Anne a préparé un goûter pour fêter son anniversaire. Tous les amis qu'elle a invités sont arrivés. Observe l'image et réponds aux questions. Quel est l'âge d'Anne ? A-t-elle bien préparé sa table ?*

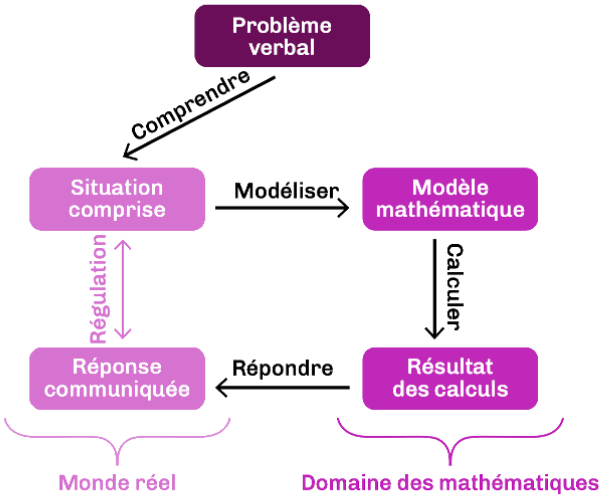
Source : travaux de S. Gano, résolution de problèmes cycle 3, bordas - Documents d'accompagnement des programmes 2002.

C. Les étapes d'un problème

Dans « Enseignement et apprentissage des mathématiques. Que disent les recherches psychopédagogiques » [ver08], *Lieven Verschaffel* et *Erik De Corte* s'expriment ainsi :

> *L'application des mathématiques pour résoudre des problèmes situés dans le monde réel, également appelée modélisation mathématique, peut être conçue comme un processus complexe comprenant plusieurs étapes : la compréhension de la situation décrite ; la construction d'un modèle mathématique qui décrit l'essence de ces éléments et les relations significatives impliquées dans la situation ; l'application du modèle mathématique pour identifier ce qui en découle ; l'interprétation du résultat des calculs afin de parvenir à une solution de la situation pratique qui a donné lieu au modèle mathématique ; l'évaluation du résultat interprété en relation à la situation d'origine ; et la communication des résultats interprétés.*

Le guide de résolution des problèmes en CM retient un modèle assez similaire et synthétique en quatre étapes : comprendre, modéliser, calculer, répondre, résumé par le schéma suivant :



Nous allons expliciter rapidement ces étapes, à l'aide d'un exemple présent dans le guide :

> **Exemple** Marius revient du marché. Il a acheté 750 g de fraises, un demi-kilogramme d'abricots et a oublié la masse des kiwis achetés. Le contenu de son panier pèse 1,650 kg.
> Quelle est la masse des kiwis ?

Comprendre	
Un problème est en premier lieu une histoire qu'il va falloir comprendre. La compréhension doit être fine alors qu'une compréhension globale et approximative pourrait suffire dans d'autres cadres. Il faut également comprendre la question : que cherche-t-on ? quelle est sa nature ?	Ce que les élèves doivent comprendre et savoir : – c'est l'historie de Marius qui a fait des achats au marché ; – dans son panier, il y a des fraises, des abricots et des kiwis, dont Marius a oublié la masse ; – il n'y a rien d'autre dans le panier (implicite) ; – les masses s'additionnent pour former la masse du contenu du panier ; – un demi-kilogramme, c'est comme 0,5 kg ou 500 g ; – on cherche la masse des kiwis.

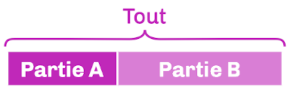
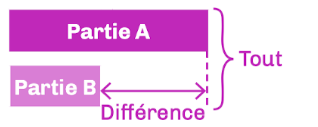
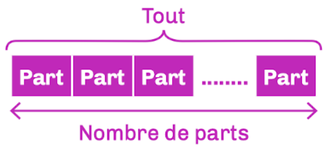
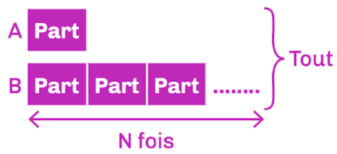
<table>
<tr><th colspan="2">Modéliser</th></tr>
<tr>
<td>La modélisation est le « processus par lequel l'individu convertit les données des situations réelles en problème mathématique ».
Elle aboutit à déterminer, en s'appuyant sur d'éventuelles représentations (dessins, schémas, tableaux, arbres, etc.), quelles opérations devront être effectuées dans la phase suivante pour répondre à la question posée.</td>
<td>– Nous sommes dans un problème à plusieurs étapes du type « parties-tout » ;
– une difficulté supplémentaire provient du fait que les unités ne soient pas homogènes ;
– la modélisation peut se faire (par exemple) à l'aide d'un schéma en barres :
<table>
<tr><td>Fraises
750 g</td><td>Abricots
1/2 kg</td><td>Kiwis
?</td></tr>
<tr><td colspan="3">1,650 kg</td></tr>
</table>
– cette modélisation doit permettre à l'élève d'affiner sa modélisation et de comprendre qu'il doit trouver l'une des trois parties d'un tout.</td>
</tr>
<tr><th colspan="2">Calculer</th></tr>
<tr>
<td>Il s'agit de la réalisation, par les élèves, des calculs correspondant à la suite d'opérations découlant de la modélisation.</td>
<td>– L'exécution des calculs nécessite d'avoir des masses exprimées dans la même unité, en grammes ou en kilogrammes. La conversion en grammes permet de manipuler des nombres entiers.
<table>
<tr><td>Fraises
750 g</td><td>Abricots
500 g</td><td>Kiwis
?</td></tr>
<tr><td colspan="3">1 650 g</td></tr>
</table>
– puis, il peut poser ses calculs en lignes ou en colonnes et les effectuer :
750 g + 500 g = 1 250 g
1 650 g − 1 250 g = 400 g.</td>
</tr>
<tr><th colspan="2">Répondre</th></tr>
<tr>
<td>L'élève doit interpréter le(s) résultat(s) trouvé(s) dans le contexte du problème, puis communiquer la réponse de façon compréhensible par tous.
Il est important de s'assurer que la réponse répond bien à la question posée, et que cette réponse est cohérente avec le contexte du problème (ce que l'on appelle aussi la régulation).</td>
<td>– On a bien trouvé une masse ;
– la réponse parait acceptable (400 kg où 4 g aurait été étrange) ;
– l'élève peut alors écrire une phrase réponse :
« La masse de kiwis dans le panier est de 400 g ».</td>
</tr>
</table>

D. Petit focus sur l'utilisation de schémas en barres

La réalisation d'un schéma ne doit jamais être exigée, sauf dans le cas particulier de séances spécifiques d'apprentissage d'un nouveau modèle de schéma. La réalisation d'un schéma doit permettre de rendre plus visuelles les tâches à réaliser et les relations entre les nombres ou les grandeurs et de soulager la mémoire de travail.

Différents types de schématisation peuvent être évoqués :
– les schémas en barres ;
– les schémas proposant un déplacement sur une droite numérique ou une ligne du temps ;
– les tableaux ;
– les arbres.

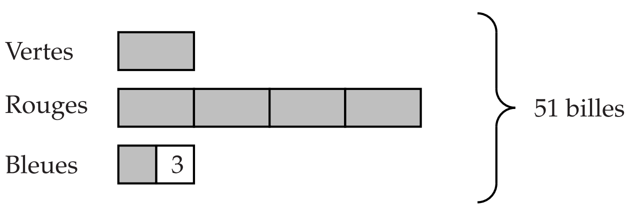
Concernant les schémas en barres, leur utilisation la plus simple concerne les problèmes additifs et multiplicatifs de parties-tout et de comparaison en **une étape** comme indiqué dans ce tableau [men22] :

Problèmes...	de parties-tout	de comparaison
additifs	 Tout = Partie A + Partie B Partie B = Tout – Partie A	 Différence = Partie A – Partie B Partie A = Partie B + Différence Tout = Partie A + Partie B
multiplicatifs	 Tout = Nombre de parts x Part Nombre de parts = Tout ÷ Part Part = Tout ÷ Nombre de parts	 B = N x A A = B ÷ N et N = B ÷ A Tout = A + B

La résolution de problèmes en **plusieurs étapes** peuvent s'appuyer sur des schémas en barres à un ou plusieurs schémas selon le cas.

Quant aux problèmes algébriques, leur modélisation par des barres permettra ensuite, au cycle 4, de transiter petit à petit vers une modélisation algébrique.

> Exemple Dans un bocal, un enfant a des billes vertes, des billes rouges et des billes bleues. Il a 4 fois plus de billes rouges que de billes vertes et il a 3 billes vertes de plus que de billes bleues. En tout il a 51 billes. Combien a-t-il de billes de chaque couleur ?



On ajoute trois billes bleues pour compléter la barre « bleues » : $51 + 3 = 54$.

On en déduit la valeur d'une barre : $54 \div 6 = 9$.

Il y a 9 billes vertes, 4×9 billes = 36 billes rouges et 9 billes − 3 billes = 6 billes bleues.

E. Analyse des difficultés des élèves, pistes de remédiation

Pregnance de certaines règles du contrat didactique	
« Dans un bateau il y a 25 chèvres et 12 moutons. Quel est l'âge du capitaine ? » Certains élèves répondent 37 ans dictés par les règles du contrat didactique : un problème de mathématiques a toujours une solution, et on attend de moi que je pose des opérations. L'élève ne cherche pas à donner du sens au problème, il se centralise sur les indices numériques.	*Il s'agit dans ce cas de « casser » ces règles en proposant de temps à autre aux élèves des problèmes sans solution, des problèmes avec des données supplémentaires, des problèmes qui n'utilisent pas les dernières opérations étudiées… On peut également proposer une solution d'un problème dont il faut qu'ils reconstituent l'énoncé.*
La prégnance de mots inducteurs	
Certains mots comme « chaque, range, total, reste, plus »… amènent les élèves à mobiliser certaines opérations quelles que soient les autres informations de l'énoncé.	*Il s'agit ici de faire prendre conscience à l'élève que les mots inducteurs peuvent conduire à des résultats faux. Pour cela on peut leur proposer par exemple un problème contenant le mot « plus » et qui se résout à l'aide d'une soustraction.*
La surcharge de la mémoire de travail	
– Difficultés à déchiffrer les mots. Arrivé au bout de sa lecture il aura perdu la plupart des informations de l'énoncé. – Essai de tout mémoriser. Lorsque sa mémoire de travail sera saturée, des indices seront oubliés.	*– Une remédiation se situe au niveau de l'automatisation de la lecture, on peut proposer des énoncés présentés sous forme de situations concrètes ou faire lire le problème à haute voix.* *– On peut à l'élève de schématiser ou de « raconter le problème ».*
Le contexte du problème ou la présence de mots inconnus	
Un contexte trop éloigné du contexte social de l'élève ou un énoncé contenant des mots inconnus ne permet pas de juger de la compétence à résoudre un problème.	*L'enseignant doit choisir les mots de façon à ce que le contexte soit suffisamment familier pour les élèves et s'assurer que les mots en présence dans le texte sont connus.*
Les blocages psychologiques	
Certains élèves se considèrent nuls en maths et pensent qu'ils sont incapables de résoudre un problème.	*Il s'agit de redonner confiance à l'élève, de lui faire prendre conscience qu'il est capable de faire quelque chose en maths.*
L'insuffisance des réseaux de connaissance stockés dans la mémoire à long terme	
Le stockage des expériences n'est pas identique pour tous, ni la manière de les réactiver au moment opportun. De plus les expériences sociales ne sont pas les mêmes pour tous les élèves.	*L'enseignant doit être capable de sélectionner un certain nombre de problèmes permettant d'aider les élèves à les mémoriser correctement pour qu'ils deviennent des problèmes de référence.*
La non maîtrise d'une technique opératoire	
Certains élèves élaborent une procédure de recherche correcte mais font des erreurs au moment d'effectuer le calcul.	*Faire un travail sur l'acquisition des algorithmes opératoires. Parallèlement, autoriser les élèves à utiliser leur calculatrice.*

Source : travaux de R. Charnay et M. Mante, Les étapes de la résolution d'un problème, Mathématiques Tome 1, Hatier concours [char13-1].

Vu au CRPE en 2022

Sujet n°5 de l'épreuve de leçon, concours CRPE 2022, académie de Montpellier.

Consigne candidat : À partir du sujet et du dossier proposés par le jury, vous concevrez la mise en œuvre d'une séance d'enseignement à l'école primaire dans chacune des deux disciplines français et mathématiques. Vous présenterez successivement les composantes pédagogiques et didactiques de chaque séance et son déroulement.

Sujet : Manipulation, représentation et verbalisation pour un passage progressif à l'abstraction.

Contexte de la séance d'enseignement :

- cycle d'enseignement : cycle 2 ;
- niveau de la classe : CP ;
- positionnement de la séance de mathématiques :
  - période : période 2 ;
  - séquence dans laquelle elle s'insère : résolution de problèmes.

Documents fournis au candidat :

Document 1 : Ministère de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports, extrait du BO n°11 du 26.11.2015, Annexe 1 : Programme d'enseignement du cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2) – Volet 3 : les enseignements – Mathématiques – pp. 55-56.

> [...] Au cycle 2, la résolution de problèmes est au centre de l'activité mathématique des élèves, développant leurs capacités à chercher, raisonner et communiquer. [...] Ils peuvent être issus de situations de vie de classe ou de situations rencontrées dans d'autres enseignements [...] ce qui contribue à renforcer le lien entre les mathématiques et les autres disciplines. [...] La composante écrite de l'activité mathématique devient essentielle. Ces écrits sont d'abord des écritures et représentations produites en situation par les élèves eux-mêmes qui évoluent progressivement avec l'aide du professeur vers des formes conventionnelles institutionnalisées dans les cahiers par des traces écrites qui ont valeur de référence.[...] L'introduction et l'utilisation des symboles mathématiques sont réalisés au fur et à mesure qu'ils prennent sens dans des situations basées sur des manipulations, en relation avec le vocabulaire utilisé, assurant une entrée progressive dans l'abstraction.[...]

Document 2 : Ministère de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports, Guide fondé sur l'état de la recherche « *Pour enseigner les nombres, le calcul et la résolution de problèmes au CP* », juillet 2021, p. 84.

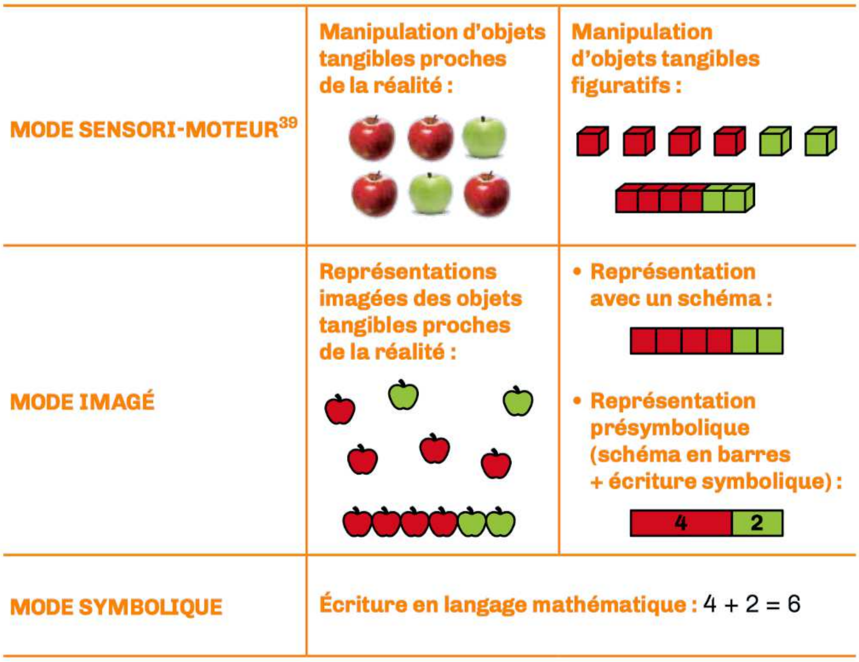
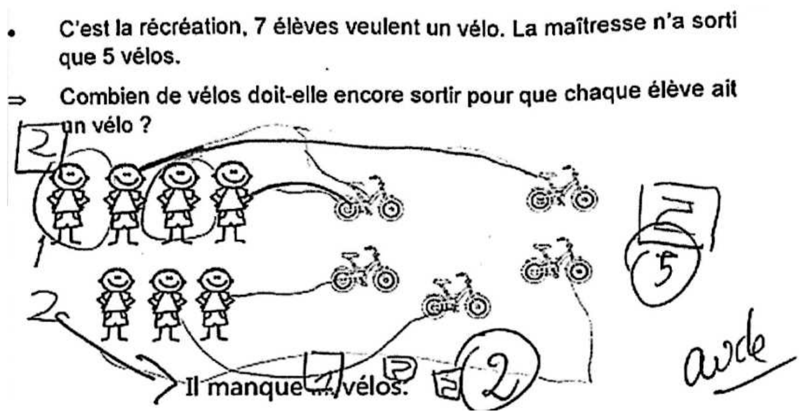


Figure 19. Progression des représentations.

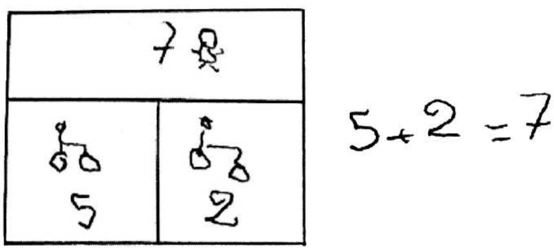
Document 3 : Production d'un élève de CP, période 2, séance 3.

Voici la production d'un élève réalisée lors de la troisième séance d'une séquence de cinq séances.
La première séance était une mise en situation en extérieur, durant laquelle 7 élèves ont constaté qu'il manquait 2 vélos pour que chacun puisse en faire simultanément. La deuxième séance était une séance de manipulation d'images.



Document 4 : Production d'un élève de CP, période 2, séance 5.

Après une séance 4 d'introduction d'une représentation avec schéma, la séance 5 a conduit à ce type de production :



Analyse de documents

1 Étude d'exercices de calcul mental

Ces exemples sont issus du livre de François BOULE « Le calcul mental au quotidien », aux éditions Canopé

- **Exercice 1.**
  Barrer les paires de nombres dont le quotient est 3. Quel est le nombre qui reste ?

8	39	72
27	23	69
13	81	24

14	17	39
57	48	51
16	13	42

11	54	48
16	24	51
33	17	18

- **Exercice 2.**
  Combiner les quatre nombres « 1, 5, 7, 25 » avec des signes arithmétiques « $+, -, \times, \div$ » pour obtenir le nombre indiqué : 10 ; 11 ; 60 ; 13.
- **Exercice 3.**
  Combiner quatre fois le nombre « 9 » avec des signes arithmétiques, pour obtenir le nombre indiqué.
  8 ; 10 ; 11 ; 17 ; 19 ; 72 ; 90 ; 720.
- **Exercice 4.**
  Entourer le résultat exact, sans poser l'opération.

17×8	631	136	361	163
$25 \times 2{,}7$	675	5,76	67,5	6,75
$51 \times 0{,}15$	7,65	5,76	76,5	0,65
$4{,}7 \times 0{,}4$	18,8	8,81	1,88	8,11
$0{,}03 \times 2{,}2$	0,66	0,066	6,06	0,606

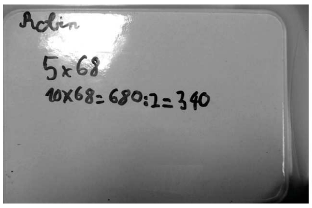
- **Exercice 5.**
  Entourer le nombre le plus proche du résultat, sans le calculer.

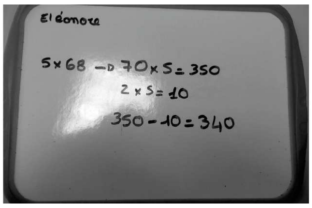
41×153	6200	600	200	5000
$0{,}2 \times 8$	8	0,8	4	1,5
$0{,}3 \times 0{,}3$	0,3	0,1	0,9	0,33
$0{,}7 \times 124$	70	8	100	800
$48 \times 0{,}48$	230	4,8	48	20
$54 \div 0{,}1$	0,5	5	50	500

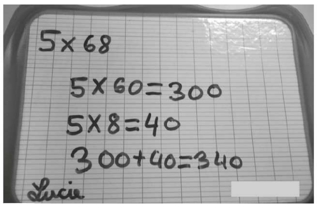
1) Résoudre ces problèmes.
2) Identifier la procédure utilisée à chaque fois.
3) En quoi ces activités, qui utilisent un support écrit, relèvent-elles bien du calcul mental ?
4) À quel niveau peuvent-elles être proposées ?
5) Identifier, pour chacune d'elles, la ou les connaissances/compétences travaillées.
6) Dans la dernière activité, quel problème peut poser le calcul de $0,7 \times 124$? Comment le traiter avec les élèves ?

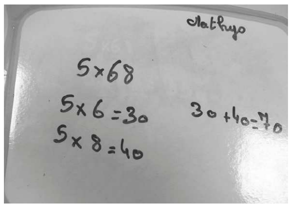
2 CRPE 2018 G2

Lors d'un travail sur le calcul en ligne, un enseignant propose la situation suivante à ses élèves : « Calculer 5×68 ». Voici les productions de quatre élèves, Robin, Eléonore, Lucie et Mathys.









1) Analyser chacune des productions, en explicitant les procédures mises en oeuvre et en relevant les éventuelles erreurs.

2) Donner trois démarches pouvant être attendues d'un élève de cycle 3 pour calculer en ligne 25×28. Pour chacune de ces démarches indiquer les connaissances en jeu.

3 CRPE 2001 Aix

Vous trouverez ci-dessous un problème du cahier de l'Évaluation Nationale CE2, édition septembre 2000. Cet exercice a été proposé dans les classes de CE2 entre le 11 et le 20 septembre 2000.

> **Problème :** *108 coureurs prennent le départ d'une course. Il y a beaucoup d'abandons. 85 coureurs seulement terminent la course.* **Combien de coureurs ont abandonné ?**
>
> *Utilise ce cadre pour faire tes recherches.*
>
> **Réponse :** ....

1) Quelles sont les compétences mathématiques évaluées dans cet exercice ?

2) Le problème peut être mis en équation de 3 manières différentes : indiquez-les.

3) Vous trouverez page suivante les productions de 11 enfants.

- **a)** Classez ces productions selon les procédures utilisées.
- **b)** Analysez les erreurs commises par Houssan et Benyamine.

4) Voici les consignes de codage données pour cet exercice :

Réponse exacte : 23 coureurs (avec ou sans l'unité)	code 1
Écriture soustractive exacte (108 – 85), mais résultat faux ou absent	code 4
Mise en œuvre de l'addition	code 8
Autres résultats	code 9
Absence de réponse	code 0

En utilisant ces consignes :

- Pour quels enfants mettriez vous le code 1 ?
- Quel code mettriez vous pour Cédric ? pour Camille ?
- Quelles remarques faites-vous sur les codes proposés ?

Analyse de documents

Productions de l'exercice 2 : CRPE 2001 Aix

Melvin

108

Réponse :..............

Houssan

$$\begin{array}{r} 108 \\ -\ \ 85 \\ \hline 183 \end{array}$$

Réponse : *5 ont abandonné*

Camille

$$\begin{array}{r} \scriptstyle 1\ \ \\ 108 \\ +\ \ 85 \\ \hline =193 \end{array}$$

Réponse : *Il y a 193 coureurs qui ont abandonné*

Amandine

$$85 \xrightarrow{15} 100 \xrightarrow{8} 108$$

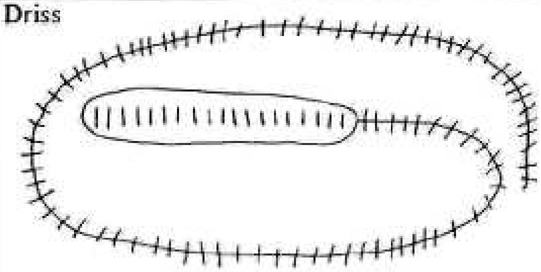
Réponse : *23 coureurs ont abandonné*

Hildéa

108	102	95
107	101	94
106	100	93
105	99	92
105	98	91
104	97	90
103	96	89

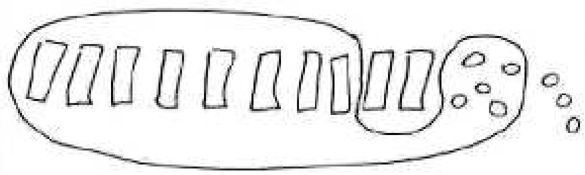
Réponse :...

Driss



Réponse : *19*

Siham



Réponse : *23 coureurs ont abandonné*

Gabrielle

$$85 \xrightarrow{5} 90 \xrightarrow{10} 100 \xrightarrow{8} 108$$

Réponse : *Il y a 24 coureurs qui ont abandonné*

Benyamine

$$\begin{array}{r} 1\,{\scriptstyle 1}0\,0\,8 \\ {\scriptstyle 1}+8\,5 \\ \hline 3\,3 \end{array}$$

Réponse : *33 coureurs ont abandonné*

Nabila

Réponse : *23 coureurs ont abandonné*

Cédric

$$\begin{array}{r} \scriptstyle 1\ \ \ \\ 8\,5 \\ +\ 1\,3 \\ \hline 1\,0\,8 \end{array}$$

Réponse : *13*

4 **CRPE 2018 G1**

1) Donner deux raisons pour lesquelles le calcul en ligne est, en termes d'apprentissage, complémentaire au calcul posé.

2) Le calcul suivant est proposé à des élèves de cycle 2 qui pratiquent régulièrement le calcul en ligne : $28 + 17 = ?$
Expliciter trois stratégies qu'un élève de cycle 2 pourrait mobiliser pour effectuer ce calcul en ligne.

3) Expliciter trois stratégies de calcul mental ou en ligne qu'un élève de cycle 2 pourrait mobiliser pour effectuer 14×5. Pour chacune, indiquer quelles sont les connaissances et les propriétés utilisées.

5 **CRPE 2018 G3**

Un professeur des écoles distribue le problème suivant à ses élèves de CE1 et leur demande de se mettre en groupe pour le résoudre. Les productions de quatre groupes sont présentées dans la suite.

Les cinq élèves de l'équipe verte ont gagné des images.

Lisa : 12 images — Camille : 11 images

Luc : 10 images — Nora : 13 images

Ilyes : 9 images

Ils veulent se les partager pour que chacun en ait la même quantité.

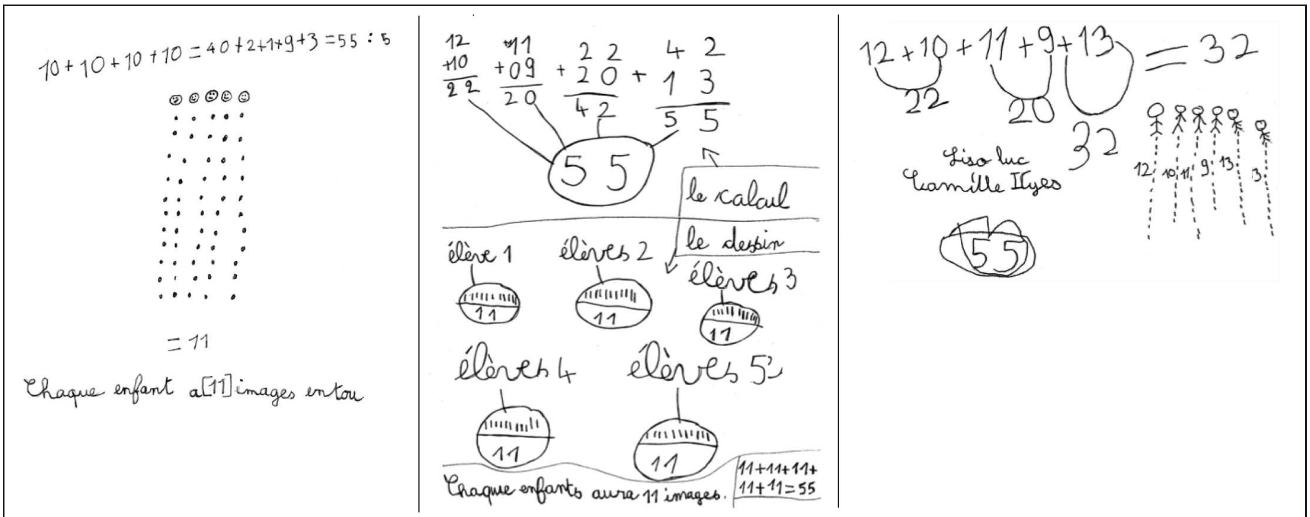
Combien d'images aura chaque enfant après le partage ?

1) Citer deux objectifs d'apprentissage que cette situation permet de travailler.

2) **a)** Expliquer chacune des stratégies d'addition pour trouver 55 pour les élèves des groupes 1 et 2 en s'appuyant sur leurs productions ci-dessous.

b) Donner un point commun et deux différences dans la démarche mathématique des groupes 1 et 2.

3) Citer deux difficultés qu'a rencontrées le groupe 3.



Groupe 1 — Groupe 2 — Groupe 3

Activités à faire en classe

1 C1 - Situation problème : les maisons

Les enfants disposent de carrés et des triangles de papiers de même taille mais de 4 couleurs différentes. Ils doivent trouver toutes les maisons différentes qu'il est possible de fabriquer à partir de ce matériel.

Objectif : Apprendre à chercher, organiser sa recherche, trouver tous les possibles d'une situation.

Compétences visées :

- Reproduire un assemblage à partir d'un modèle.
- Apprendre à chercher, organiser sa recherche, raisonner.
- Explorer les formes, les suites organisées.
- Catégoriser, classer.

Matériel :

- des carrés et des triangles de trois couleurs différentes ;
- une fiche pour la trace écrite finale avec des maisons vierges ;
- des feutres ou des crayons de couleur.

Déroulement de l'activité :

Étape 1 : Premiers essais de recherche individuelle.

Appropriation : présentation du matériel. Comment faire une petite maison avec ce matériel ?

Recherche : vous allez essayer de construire le plus de maisons possibles, toutes différentes.

Mise en commun : constater que certains camarades en ont plus ou moins que d'autres, que certains ont des maisons jumelles.

Étape 2 : Organiser l'ensemble des possibles, trouver des caractères communs.

Appropriation : qu'a-t-on fait à l'étape 1 ? J'ai fabriqué toutes les possibilités, je vais vous les prêter et par équipes de 3, vous allez les organiser pour qu'on puisse vérifier quelles sont celles qui vous manquent.

Recherche : verbalisation pour trouver un critère de regroupement.

Mise en commun : dégager et expliquer le critère de tri.

Étape 3 : Reprendre l'étape 1 en utilisant le critère d'organisation pour trouver les maisons qui manquent.

Appropriation : faire reformuler et expliciter.

Réinvestissement : étayage pour soutenir par le langage la stratégie pour identifier les maisons manquantes.

Trace finale : les 16 maisons sont affichées.

2 C1 - Situation problème : L les embouteillages

Il s'agit d'une activité d'anticipation pour les MS et GS (peut être adapté pour la PS) proposée par *Dominique Valentin* dans son livre *Découvrir le monde avec les mathématiques*. Ce jeu est une adaptation du jeu de société « Ruch hour » qui dispose d'un quadrillage de 6 cases par 6 cases alors que le jeu adapté ne possède que 5 cases par 5 cases.

Objectif : à partir d'un état initial, organiser une suite d'actions pour atteindre un but. C'est un tâche complexe qui nécessite une appropriation.

But du jeu : faire sortir la voiture rouge de l'aire de stationnement en respectant les règles d'action : avancer ou reculer sur sa ligne ou sa colonne. Il n'est pas possible de tourner ou de passer par dessus un autre véhicule mais tous les véhicules peuvent être déplacés.

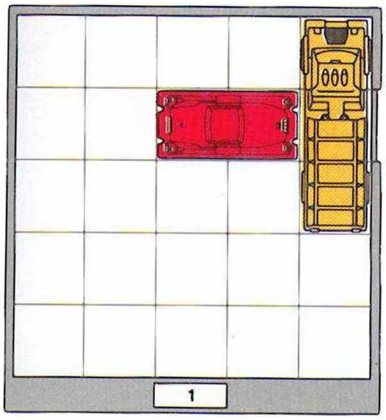
Dans les programmes : outre le travail de résolution de problèmes, cette activité travaille le domaine 5 « Explorer le monde » et plus particulièrement l'item « Représenter l'espace » : par l'utilisation et la production de représentations diverses (photos, maquettes, dessins, plans. . .) et également par les échanges langagiers avec leurs camarades et les adultes, les enfants apprennent à restituer leurs déplacements et à en effectuer à partir de consignes orales comprises et mémorisées. Le passage aux représentations planes les amène à commencer à mettre intuitivement en relation des perceptions en trois dimensions et des codages en deux dimensions [. . .]

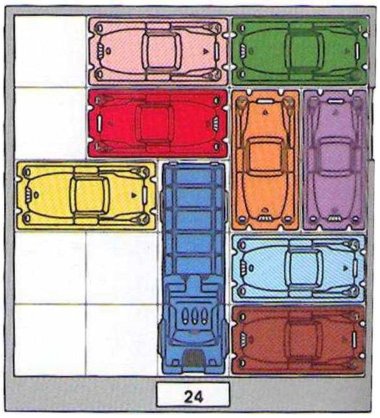
Compétences travaillées :

- Situer des objets par rapport à soi, entre eux, par rapport à des objets repères.
- Orienter et utiliser correctement une feuille de papier, un livre ou un autre support d'écrit, en fonction de consignes, d'un but ou d'un projet précis.
- Utiliser des marqueurs spatiaux adaptés (devant, derrière, droite, gauche, dessus, dessous. . .) dans des récits, descriptions ou explications.
- Se repérer sur un quadrillage ;
- Essayer, tâtonner, être concentré et persévérer pour résoudre un problème ;
- Organiser mentalement une suite d'actions pour atteindre un but et être capable de la reproduire plusieurs fois.

Matériel :

- une grille de jeu de 5 × 5 cases représentant une aire de stationnement dont la sortie est matérialisée à droite ;
- les véhicules : des voitures dont une rouge et des camions ;
- une série de cartes-problèmes numérotées de 1 à 24 de difficulté graduelle ;
- une feuille de route afin de noter sa progression.





les cartes-problèmes n°1 et n°24 : l'objectif est de faire sortir la voiture rouge

Déroulement de l'activité :

Étape 1 : présentation du matériel et des règles de déplacement.

L'enseignant présente le parking : « Les véhicules ne peuvent pas être retirés du plateau et ne peuvent qu'avancer ou reculer dans leur couloir sur lequel ils sont placés ». L'enseignant donne le but à atteindre : fair sortir la voiture rouge du parking.

Après avoir posé la voiture rouge et quelques autres véhicules sur le parking, on constate que la voiture rouge est bloquée. Il faut cependant la faire sortir du parking. L'enseignant demande à un enfant de faire rouler la voiture rouge et quelques autres véhicules, mais pas de la faire sortir. On ne s'intéresse ici qu'au respect des règles de déplacement.

Étape 2 : appropriation de la situation en petits groupes.

L'enseignant place sur le plateau du parking les voitures suivant une première configuration. Un enfant est invité à montrer l'endroit de la sortie qui n'est pas très visible lorsqu'un véhicule est placé devant. Puis l'enseignant demande si la voiture peut sortir et ce qu'il faut faire pour qu'elle puisse sortir. Il demande quel véhicule il faut déplacer et de proche en proche il fait déplacer tous les véhicule afin d'arriver à l'objectif.

Étape 3 : résolution des problèmes.

Cette phase est proposée à tous les enfants qui ont pu s'approprier l'ensemble de la situation dans l'étape précédente. Elle ne commence donc pas forcément au même moment pour tous les enfants. Chaque enfant prend sa feuille de route et coche les problèmes numérotés qu'il a résolus. Le contrat est exposé aux enfants soit au cours d'un regroupement, soit de manière individuelle :

- tu prends une carte-problème numérotée ;
- tu disposes les voitures comme sur la carte-problème (GS) ou tu me demande de les poser (PS-MS) ;
- tu essaies de faire sortir la voiture rouge ;
- quand tu as réussi à la faire sortir, tu remets les voitures à la même place qu'au début et tu recommences pour être sûr de la façon de la faire sortir ;
- si tu y arrives une seconde fois, tu peux mettre une croix dans la case de ta feuille de route ;
- un peu plus tard, tu me montreras à nouveau comment tu as fait.

Une version numérique : la version adaptée du jeu de société est disponible sur Internet. *Le jeu à l'identique* peut être utilisé en classe avec un petit groupe d'élèves par exemple.

3 C1 - Rituel : la tour d'appel

Compétences visées : quantifier des collections jusqu'à 10 dix au moins, les composer, les décomposer par manipulation ; comparer des quantités.

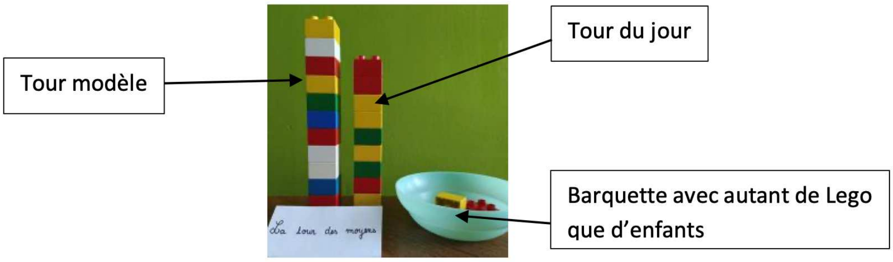
Objectif : représenter un petit groupe d'élèves (présents, filles, garçons, MS, GS. . .) par une tour en briquettes puis la comparer à un modèle. Travailler le vocabulaire « plus que », « moins que », « autant que » et le dénombrement.

Déroulement :

1) Construire la tour modèle avec les enfants.
   Difficulté : pour certains, la modélisation est compliquée. Une briquettes, c'est un enfant. Ne pas hésiter à réaliser cette tour plusieurs fois, le temps que les élèves comprennent cette modélisation. Il est possible d'ajouter une étiquette photo ou prénom sur les briquettes dans un premier temps.
2) Les enfants construisent la tour du jour. À l'arrivée en classe, en même temps que l'enfant va chercher son étiquette prénom, il prend une briquettes dans une barquette pour l'ajouter à la tour du jour.
   Dans la barquette, il doit y avoir autant de briquettes que d'enfants inscrits, cela permet de valider en faisant le lien avec les étiquettes des absents.
3) La tour du jour est réalisée par un seul enfant pendant l'appel en s'appuyant sur les tableaux présents/absents. Il la présente à ses camarades pendant le regroupement.

Variantes : compter les présents, dire combien il faut ajouter d'élèves pour obtenir tous les élèves de la classe ; travailler les décompositions des nombres, avec ou sans couleurs ; construire une tour par jour et les comparer en fin de semaine.

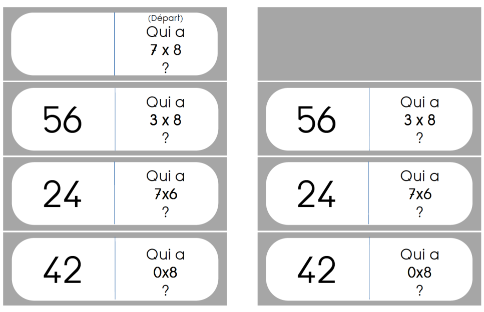
Exemples : *La tour d'appel en moyenne section*. *La tour d'appel en grande section*.



4 C2 - Des jeux pour travailler les tables de multiplication

Le domino des multiplications

Lien vers le site « Charivari ».

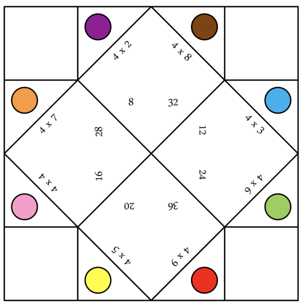


Connaissances travaillées : connaître des tables de multiplication.

Principe du jeu : jeu des dominos.

Les cocottes des multiplications

Lien vers le site de « Lutinbazar »



Connaissances travaillées : connaître ses tables de multiplication.

Principe du jeu : jeu de la cocotte.

Activités à faire en classe

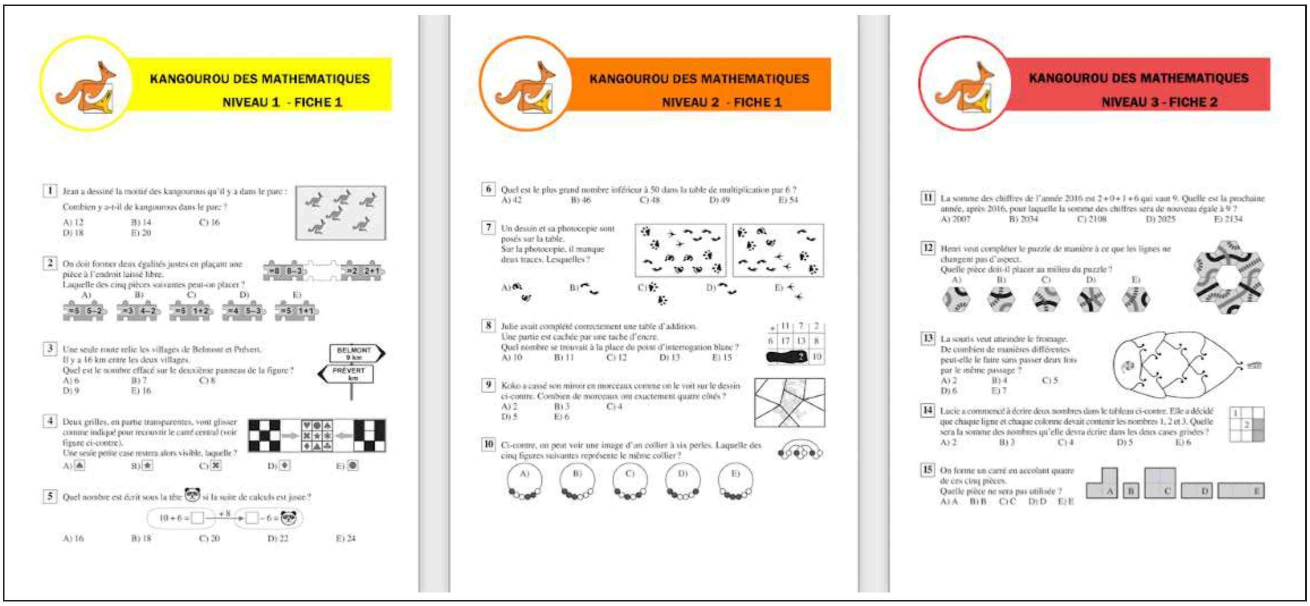
5 C2/C3 - Fiches de résolution de problèmes classiques

Des exemples d'activités de résolution de problèmes foisonnent dans les manuels et sur la toile, par exemples :

- pour la maternelle, des cartes de problèmes de *La maîtresse au petit pois* ;
- pour le CE1, des fiches du blog *Classeur d'école* classées par thèmes : résoudre un problème additif, rechercher une différence, rechercher la condition initiale, résoudre un problème avec des euros. . . ;
- pour le CE2 et le CM1, des fiches pour le cycle 3 (programmes de 2008) classées par compétence à développer : appliquer des consignes, reconnaître un problème, identifier la consigne, associer une question à un problème, repérer les données utiles, reconstituer un énoncé. . .
- des fiches de défis maths ou rallyes maths proposées dans de nombreuses académies. L'intérêt est de faire des mathématiques une source de plaisir, de valoriser le travail en équipe, d'inciter au débat mathématique, de favoriser l'autonomie des élèves, de développer certaines stratégies d'apprentissages. . .

6 C2/C3 - Le concours kangourou

Le *concours kangourou* est un jeu de mathématiques créé en 1991 sur le modèle du concours national australien (d'où son nom). Il comporte 24 questions à choix multiple de difficulté croissante, proposées le même jour dans tous les établissements scolaires du CE2 aux classes supérieures. La liste des sujets est disponible dur le site *Le kangourou des mathématiques*, ils sont tous corrigés et peuvent être utilisés en classe librement.
Il est possible de faire effecteur aux élèves entièrement un sujet (le temps théorique est de 50 minutes), mais on peut également se servir des sujets pour créer des fiches de mini résolutions de problèmes, à utiliser en autonomie par exemple lorsqu'un élève a terminé son travail. Un avantage est que ces sujets est qu'ils balayent tous les domaines abordés à l'école par le biais de questions logiques.



Les questions sont graduées : les 8 premières sont les plus simples, les 8 suivantes un peu plus complexes et les 8 dernières encore plus compliquées.
Le document présenté est constituées de fiches de cinq questions. Avec un sujet de concours, quatre fiches (de 1 à 4) de niveau de plus en plus ardu sont proposées, jusqu'à la question 20 mais on peut tout à fait envisager une autre configuration !

NOMBRES & CALCULS

3

Champ additif et multiplicatif

Dans les programmes - cycle 1

Découvrir les nombres et leurs utilisations

- Avoir compris que tout nombre s'obtient en ajoutant un au nombre précédent et que cela correspond à l'ajout d'une unité à la quantité précédente.
- Quantifier des collections jusqu'à dix au moins ; les composer et les décomposer par manipulations effectives puis mentales.
- Dire combien il faut ajouter ou enlever pour obtenir des quantités ne dépassant pas dix.
- Parler des nombres à l'aide de leur décomposition.

Dans les programmes - cycle 2

Calculer avec des nombres entiers

- Calcul posé : mise en œuvre d'un algorithme de calcul posé pour l'addition, la soustraction, la multiplication.

Dans les programmes - cycle 3

Calculer avec des nombres entiers et des nombres décimaux

- Connaître et mettre en œuvre un algorithme de calcul posé pour effectuer :
  – l'addition, la soustraction et la multiplication de nombres entiers ou décimaux ;
  – la division euclidienne d'un entier par un entier ;
  – la division d'un nombre décimal (entier ou non) par un nombre entier.
- Calcul instrumenté : Utiliser une calculatrice pour trouver ou vérifier un résultat.

Repères didactiques

1. Le champ additif

Le champ additif réunit à lui seul les additions et les soustractions. Mais le choix et l'application de l'une ou l'autre de ces opérations n'est pas forcément simple pour les élèves.

A. Classification des problèmes à structure additive

Selon *Gérard Vergnaud* [ver86], on peut classer les problèmes à structures additives selon six types dont les quatre suivants sont les plus utilisés :

La composition de deux états : $\left\{\begin{array}{l}\square\\ \square\end{array}\right.\ \square$

Recherche du composé	Noé a 7 billes rouges et 4 billes bleues, combien a-t-il de billes au total ?	$\left\{\begin{array}{l}7\\ 4\end{array}\right.\ \square$
Recherche d'une partie	Noé a 11 billes de couleurs bleues et rouges. Il possède 7 billes rouges, combien a-t-il de billes bleues ?	$\left\{\begin{array}{l}7\\ \square\end{array}\right.\ 11$

La transformation d'un état : $\square \xrightarrow{\bigcirc} \square$

Recherche de l'état final	Noé avait 25 billes, il en a gagné 7 pendant la récréation. Combien en a-t-il maintenant ?	$25 \xrightarrow{+7} \square$
Recherche de l'état initial	Noé a gagné 7 billes pendant la récréation. Il en a maintenant 32. Combien en avait-il avant ?	$\square \xrightarrow{+7} 32$
Recherche de la transformation	Noé avait 25 billes avant la récréation, il en a maintenant 32. Combien en a-t-il gagné ?	$25 \xrightarrow{\bigcirc} 32$

La comparaison des états : $\begin{array}{c}\square\\ \Big\vert\\ \square\end{array}\ \bigcirc$

Recherche de l'un des états	Noé a 32 billes, il en a 7 de plus que Matéo. Combien de billes a Matéo ?	$\begin{array}{c}32\\ \Big\vert\\ \square\end{array}\ -7$
Recherche de la comparaison	Noé a 32 billes, Matéo en a 25. Combien de billes Matéo a-t-il en moins que Noé ?	$\begin{array}{c}32\\ \Big\vert\\ 25\end{array}\ \bigcirc$

La composition de transformations : $\begin{array}{c}\xrightarrow{\bigcirc}\ \xrightarrow{\bigcirc}\\ \xrightarrow[\bigcirc]{\qquad\qquad}\end{array}$

Recherche de la transformation composée	Noé a joué deux parties de billes. Il en a gagné 8 à la première partie et en a perdu 3 à la seconde. Combien a-t-il gagné de billes au total ?	$\begin{array}{c}\xrightarrow{+8}\ \xrightarrow{-3}\\ \xrightarrow[\bigcirc]{\qquad\qquad}\end{array}$
Recherche de l'une des composantes	Noé a joué deux parties de billes. Il en a gagné 8 à la première partie et en a gagné 5 au total. Combien en a-t-il perdu à la seconde partie ?	$\begin{array}{c}\xrightarrow{+8}\ \xrightarrow{\bigcirc}\\ \xrightarrow[+5]{\qquad\qquad}\end{array}$

B. Le calcul posé en colonnes : l'addition

Les opérations posées permettent l'obtention de résultats notamment lorsque le calcul mental ou écrit en ligne atteint ses limites. Leur apprentissage est aussi un moyen de renforcer la compréhension du système décimal de position et de consolider la mémorisation des relations numériques élémentaires. Il a donc lieu lorsque les élèves se sont approprié des stratégies de calcul basées sur des décompositions/recompositions.

Progressivité des apprentissages

Au CP : au plus tard en P4, les élèves apprennent à poser les additions en colonnes (nombres à deux chiffres).

Au CE1 : ils consolident la maîtrise de l'addition avec des nombres plus grands et de taille différente.

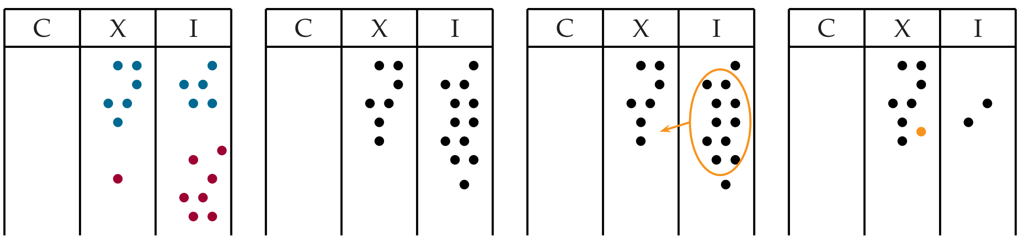
Au CM1 : ils étendent aux nombres décimaux l'algorithme de l'addition.

On peut introduire la présentation des calculs en colonne comme une réorganisation du calcul en ligne. Cette nouvelle présentation des calculs est plus économique sur le plan des écritures mathématiques, mais elle est plus délicate à faire fonctionner lorsque le calcul comporte des retenues. Les élèves apprennent à dérouler l'algorithme, c'est-à-dire la suite des calculs de manière automatique.

Exemple Calcul de $65 + 17$:
$$\begin{array}{cc} & {\scriptstyle 1} \\ & 6\,5 \\ + & 1\,7 \\ \hline & 8\,2 \end{array}$$
→ le calcul de $5 + 7$ donne 12, soit 1 dizaine et 2 unités.

Des outils tels que le matériel multibase ou les abaques à jetons, utilisés en fil rouge, peuvent aider à la conceptualisation et à la compréhension de la numération et de l'algorithme de l'addition.

Exemple Effectuer la somme de 65 et de 17 à l'abaque romain :



représentation des deux nombres 65 et 17 — « ajout » des deux nombres — échange de 10 unités contre 1 dizaine — lecture de la somme : 82

Difficultés rencontrées par les élèves :

- **Connaissance des tables d'addition** : de nombreuses erreurs observées chez les élèves sont liées à une maîtrise insuffisante de ces répertoires.
- **Nombres en jeux** : selon la taille et la nature des nombres, les élèves peuvent ne pas maitriser le système de numération, et ne pas comprendre le fonctionnement de l'algorithme.
- **Chronologie des calculs** : lorsque les deux termes de l'opération ont le même nombre de chiffres, les élèves mettent en œuvre une chronologie qui consiste à calculer de gauche à droite, comme on lit. Ce n'est pas faux, mais cela pose des problèmes avec les retenues.
- **Alignement erroné des chiffres** : lorsque les nombres utilisés n'ont pas la même longueur, il peuvent avoir des difficultés à aligner correctement les chiffres.
- **Gestion des retenues** : retenue oubliée, inversion du chiffre des dizaines et des unités, retenue écrite mais non prise en compte, retenues systématiques, retenue qui dépasse 1.

Repères didactiques

C. Le calcul posé en colonnes : la soustraction

Progressivité des apprentissages

Au CE1 : les élèves apprennent une technique de calcul posé pour la soustraction au plus tard en P3. Le choix de la technique est laissé, en général, aux équipes d'écoles.

Au CE2 : ils consolident la maîtrise de la technique de la soustraction apprise en CE1.

Au CM1 : ils étendent aux nombres décimaux la technique de la soustraction.

Outre l'addition à trous, il existe actuellement deux techniques utilisées dans les écoles : la technique « par compensation » et la technique « par emprunts », encore appelée « par cassage »
Dans la technique **par compensations**, les élèves vont apprendre à retirer, rang après rang, le chiffre d'en bas au chiffre d'en haut. Lorsqu'à un rang donné le chiffre d'en haut est inférieur à celui d'en bas, on ajoute dix unités du rang considéré au chiffre d'en haut et une unité au chiffre du rang suivant en bas. Cette technique repose sur la propriété des différences égales puisqu'on ajoute le même nombre 10 aux deux termes de la différence, ce qui ne modifie pas le résultat. Mathématiquement, cela s'écrit $a - b = (a + 10) - (b + 10)$. La compréhension de la technique classique est souvent problématique car la propriété des différences égales reste assez abstraite.
Pour la technique **par emprunts**, le calcul est posé en colonnes de la même manière. En revanche, lorsqu'à un rang donné le chiffre d'en haut est inférieur à celui d'en bas, on « emprunte » une unité du rang supérieur du nombre du haut, qui se transforme en 10 unités de l'ordre considéré.
Cette technique utilise le principe des échanges pour traiter les retenues. Elle est considérée comme plus simple à comprendre et à assimiler pour les élèves. En revanche, son écriture devient un peu compliquée lorsque le nombre le plus grand comporte un ou plusieurs 0. C'est aussi la méthode qui n'a souvent pas été apprise par les parents...

Exemple Calculer $65 - 17$.

Correction

compensations

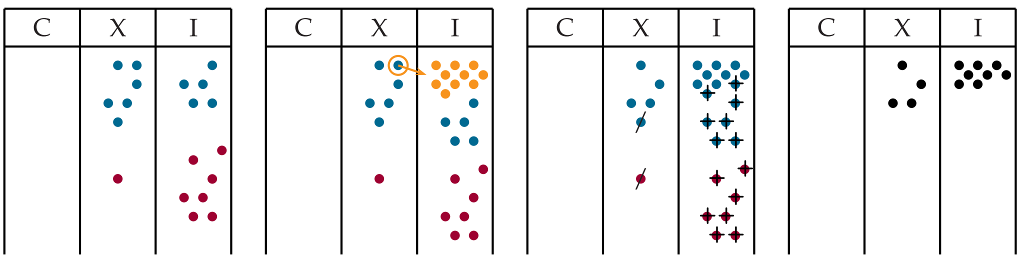
$$\begin{array}{rcc} & 6 & {}_{1}5 \\ - & 1 & 7 \\ & {}_{+1} & \\ \hline & 4 & 8 \end{array}$$

emprunts

$$\begin{array}{rcc} & {}^{5} & \\ & \cancel{6} & {}_{1}5 \\ - & 1 & 7 \\ \hline & 4 & 8 \end{array}$$

Là aussi, l'utilisation d'un abaque peut permettre de modéliser la soustraction.

Exemple Calcul de $65 - 17$ à l'abaque romain selon la méthode par emprunts :



représentation des deux nombres 65 et 17 — emprunt d'1 dizaine, transformation en 10 unités — soustraction terme à terme — lecture de la différence : 48

Difficultés rencontrées par les élèves :

Les difficultés sont les mêmes que pour les additions, auxquelles on peut ajouter le **choix et la compréhension de la technique** : en CE1, la classe apprend un technique, ensuite, des élèves ayant appris des méthodes différentes peuvent se retrouver dans la même classe.

2. Le champ multiplicatif

Le champ des structures multiplicatives concerne les problèmes qui peuvent être résolus en utilisant une multiplication, une division ou une suite de multiplications et de divisions.

A. Classification des structures multiplicatives

Il existe plusieurs manières de classer les problèmes qui peuvent se résoudre par une multiplication ou une division. Les tableaux suivants fournissent une classification possible, inspirée de *Gérard Vergnaud* [ver86] : il distingue les situations multiplicatives en fonction des grandeurs en jeu et du type de relation qui les relient.

Situations portant sur un seul domaine de grandeur

Problème avec rapport scalaire		$\square \xrightarrow{\bigcirc} \square$
Recherche de l'état final	Quentin a 7 ans. Son père est quatre fois plus âgé que lui. Quel est l'âge du père ?	$7 \xrightarrow{\times 4} ?$
Recherche de l'état initial	Le père de Quentin est quatre fois plus âgé que lui : il a 28 ans. Quel est l'âge de Quentin ?	$? \xrightarrow{\times 4} 28$
Recherche de la transformation	Quentin a 7 ans. Son père a 28 ans. Combien de fois le père de Quentin est-il plus âgé que lui ?	$7 \xrightarrow{?} 28$

Produit de mesures		$a\ \overset{b}{\boxed{a \times b}}$
Problèmes de multiplication	Quel est le nombre de carreaux sur une feuille de papier quadrillé de 25 carreaux sur 40 carreaux ?	$25\ \overset{40}{\boxed{?}}$
Problèmes de division	Ma feuille de papier quadrillé possède 1 000 carreaux au total. Sachant qu'il y en 40 dans la longueur, combien y en a-t-il dans la largeur ?	$?\ \overset{40}{\boxed{1\,000}}$

Situations portant sur deux domaines de grandeur

Proportion simple avec présence de l'unité		$\begin{array}{c\|c} 1 & a \\ b & c \end{array}$
Problèmes de multiplication	Matéo achète 6 paquets de 12 bonbons. Combien a-t-il acheté de bonbons ?	$\begin{array}{c\|c} 1 & 12 \\ 6 & ? \end{array}$
Problèmes de division-partition	Matéo a acheté 6 paquets de bonbons. Il a compté tous ses bonbons et en a trouvé 72. Combien y a-t-il de bonbons dans un paquet ?	$\begin{array}{c\|c} 1 & ? \\ 6 & 72 \end{array}$
Problèmes de division groupement (quotition)	Matéo a acheté 72 bonbons. Les bonbons sont groupés en paquets de 12. Combien a-t-il acheté de paquets de bonbons ?	$\begin{array}{c\|c} 1 & 12 \\ ? & 72 \end{array}$

Situations portant sur une composition de grandeurs

Proportion simple composée	Problèmes relatifs à des situations dans lesquelles une grandeur varie proportionnellement à une autre qui varie, elle-même, proportionnellement à une $3^{ème}$.	1 c	a 1 	 b d
	Dans un paquet de cartes Pokemon©, il y a 8 cartes. Dans un deck, il y a 5 paquets de cartes. Noé achète 3 decks, combien va t'il avoir de cartes Pokémon© ?	1 3	5 1 	 8 ?
Proportion double	Le prix de location d'un kayak au lagon est de 8 € par heure et par personne. Combien paieront 6 personnes pour 2 heures ?			

B. Calcul posé en colonnes : la multiplication

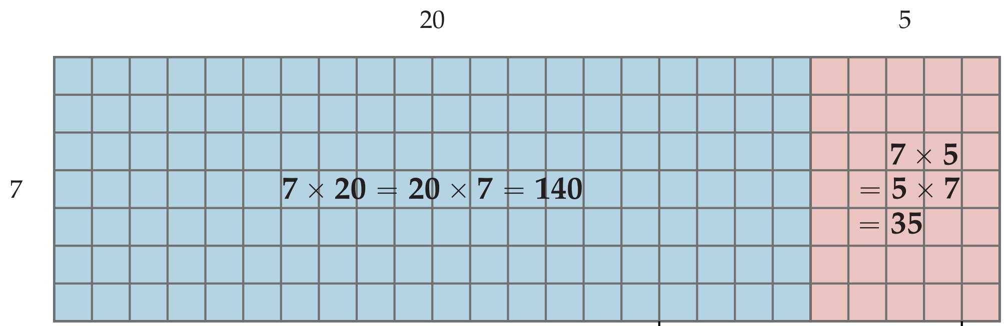
Progressivité des apprentissages

Premières situations multiplicatives : elles consistent généralement à donner des activités de dénombrement de collections rangées par paquets équipotents ou de manière rectangulaire. Les élèves découvrent l'écriture multiplicative comme résultat d'une addition itérée.

Multiplications en ligne : elles sont réalisées en utilisant la décomposition du multiplicateur en dizaines et unités et la distributivité de la multiplication sur l'addition. On continue ainsi le travail sur la numération tout en préparant la compréhension de la technique experte en colonnes.

Au CE2 : les élèves apprennent une technique de calcul posé pour la multiplication, tout d'abord en multipliant un nombre à deux chiffres par un nombre à un chiffre, puis avec des nombres plus grands.
La connaissance du répertoire multiplicatif est nécessaire pour la technique posée de la multiplication. À défaut, on pourra laisser une table de Pythagore aux élèves pour qu'ils se concentrer sur l'algorithme.

Exemple Pour 7×25, on peut modéliser la situation ainsi :



Puis faire le lien avec les opérations en ligne et en colonne.

Écriture en ligne :

$$\begin{aligned} 7 \times 25 &= 7 \times (20 + 5) \\ &= 7 \times 20 + 7 \times 5 \\ &= 140 + 35 \\ &= 175 \end{aligned}$$

Écriture en colonnes :

$$\begin{array}{rrr} & & 7 \\ \times & 2 & 5 \\ \hline & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \\ \hline 1 & 7 & 5 \end{array}$$

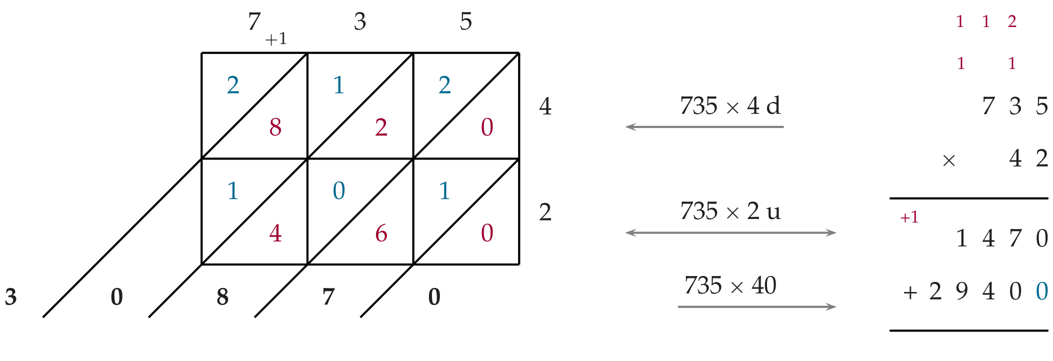
Au CM1 : dès le début d'année, ils renforcent leur maîtrise de l'algorithme appris au cycle 2.

Au CM2 : en période 1, ils apprennent la multiplication d'un nombre décimal par un nombre entier.

De nombreuses techniques de calcul de produits ont été élaborées au cours des temps. L'étude de certaines d'entre elles peut d'ailleurs être conduite avec une visée culturelle et historique, et comme support à un travail sur les propriétés de la multiplication (abaques, multiplication per gelosia...).

Exemple La **multiplication per gelosia** est une technique opératoire venant de la civilisation indienne au XII^e siècle, puis introduite en Europe par le mathématicien italien Léonard de Pise, plus connu sous le nom de Fibonacci.
Elle est très utilisée jusqu'au XV^e siècle. Le nom fait allusion à la pièce en bois qui, en Italie, équipait certaines fenêtres à jalousie chez les maris jaloux : la femme pouvait regarder ce qui se passait dans la rue sans être vue des autres hommes.

On pourra faire le lien entre la ces deux techniques, soulever les avantages et les inconvénients de chacune.



$735 \times 42 = 30\,870$

Difficultés rencontrées par les élèves :

- **Connaissance des tables de multiplication** : les résultats des tables de multiplication ne sont pas parfaitement mémorisés.
- **Gestion des retenues** : la place (juste au dessus des « colonnes » ou à côté) et le fait de barrer ou non les retenues au fur et à mesure produit des confusions.
- **Chronologie des calculs** : la difficulté est d'autant plus grande s'il y a plusieurs chiffres aux deux nombres, la chronologie se fait toujours de droite à gauche, et il ne faut pas oublier les décalages à chaque changement d'ordre.
- **Existence d'un « 0 » dans l'un des chiffres du multiplicateur** : cela impose un décalage supplémentaire ou l'ajout d'une ligne de zéros.

C. Calcul posé en colonnes : la division

Progressivité des apprentissages.

Au cycle 2 : les élèves résolvent des problèmes de recherche du nombre de parts et de la taille d'une part.

Au CM1 : les élèves apprennent l'algorithme de la division euclidienne de deux nombres entiers en P3.

Au CM2 : ils apprennent la technique de la division de deux nombres entiers (quotient décimal ou non) en P2, puis celle de la division d'un nombre décimal par un nombre entier en P3.

On distingue la **division euclidienne** de la **division** (décimale). Le résultat de la division euclidienne est composé de deux nombres : le quotient et le reste, alors que le résultat de toutes les autres opérations (y compris de la division décimale) est composé d'un seul nombre. Le nom de **division euclidienne** est un hommage rendu à *Euclide* (300 av. J.-C.), mathématicien grec qui en explique le principe par soustractions successives dans son œuvre *Les éléments*.

DÉFINITION

Effectuer une division euclidienne d'un **dividende** par un **diviseur**, c'est trouver deux entiers appelés **quotient** et **reste** tels que :

« dividende = (diviseur × quotient) + reste » avec reste < diviseur.

Exemple

Avec une bouteille de 150 cL de jus, combien peut-on remplir de verres de 8 cL ?
On peut remplir 18 verres de 8 cL et il restera 6 cL de jus.
On écrit : 150 cL = 8 × 18 cL + 6 cL

Correction

dividende

$$\begin{array}{r|ll} 1\,5\,0 & 8 & \leftarrow \text{diviseur} \\ \cline{2-2} 7\,0 & 1\,8 & \leftarrow \text{quotient} \\ 6 & & \leftarrow \text{reste} \end{array}$$

DÉFINITION

Effectuer la division décimale d'un **dividende** par un **diviseur**, c'est calculer la valeur exacte ou une valeur approchée du **quotient** « dividende ÷ diviseur ».

Exemple

On achète 8 CD de même prix pour 150 €.
Quel est le prix d'un CD ?
Un CD vaut 18,75 €.
On écrit : 150 € = 8 × 18,75 €

Correction

$$\begin{array}{r|l} 1\,5\,0 & 8 \\ \cline{2-2} 7\,0 & 1\,8{,}7\,5 \\ 6\,0 & \\ 4\,0 & \\ 0 & \end{array}$$

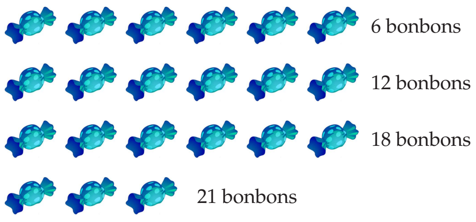
Savoirs et savoir-faire pour s'engager dans la division euclidienne

1) Maîtrise des deux sens de la division et des unités de mesure :
   - la division quotition (groupements), c'est la recherche de « combien de parts ? ».
     La division se fait entre deux grandeurs identiques.
   - la division partition (partage), c'est la recherche de la valeur d'une part.
     La division se fait entre deux grandeurs différentes.
2) Maîtrise des tables de multiplication.
   Ce qui englobe la recherche de « Dans 59 combien de fois 7 ? », qui n'est pas directement dans la table de multiplication par 7.

Exemple Avec les nombres 21 et 6, on peut proposer les deux sens de la division :

J'ai 21 bonbons, combien puis-je faire de paquets de 6 bonbons ?

Si l'élève veut modéliser la situation, il va faire des paquets de 6 bonbons jusqu'à épuiser les 21 bonbons :

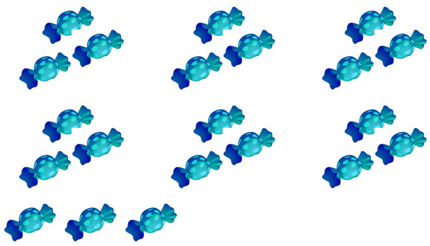


Je peux faire 3 paquets de 6 bonbons et il restera 3 bonbons seuls.

21 bonbons = 3 × 6 bonbons + 3 bonbons.

J'ai 21 bonbons à partager entre 6 amis. Combien chaque ami va-t-il avoir de bonbons ?

Si l'élève veut modéliser la situation, il va distribuer un par un les bonbons à chaque ami jusqu'à épuiser les 21 bonbons :



Je peux donner 3 bonbons à chacun de mes 6 amis et il restera 3 bonbons seuls.

21 bonbons = 6 × 3 bonbons + 3 bonbons.

À partir de là, plusieurs étapes peuvent être suggérées. Un temps préalable suffisant doit être consacré au calcul réfléchi de quotients et de restes. La seconde étape vers la technique peut consister à effectuer des divisions par un nombre à un chiffre, avant de travailler sur des divisions plus complexes, tout en limitant le niveau de difficulté. Dans toutes les circonstances, trois recommandations peuvent être faites :

– commencer le calcul par une estimation du nombre de chiffres du quotient ;

– s'autoriser à poser des produits annexes, à la suite d'une première estimation du nombre cherché dans le quotient (la production de la totalité de « la table du diviseur » ne doit pas être encouragée) ;

– encourager la pose effective des soustractions (sans interdire aux élèves qui le souhaitent de s'en dispenser).

Deux techniques s'affrontent : celle de la division avec soustractions partielles posées, et celle sans. Si l'on ne pose pas les soustractions partielles, les élèves doivent calculer mentalement les résultats intermédiaires ce qui est difficile, surtout en cas de retenues ! Dans un premier temps, on peut également utiliser la soustraction comportant des résultats intermédiaires reprenant à chaque étape la totalité du dividende.

Exemple Division euclidienne de 557 par 3 selon trois méthodes :

$$\begin{array}{r|l} 557 & 3 \\ \cline{2-2} -\underline{300} & 100 \\ 257 & +80 \\ -\underline{240} & +\ \ 5 \\ \cline{2-2} 17 & 185 \\ -\underline{15} & \\ 2 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 557 & 3 \\ \cline{2-2} -\underline{3} & 185 \\ 25 & \\ -\underline{24} & \\ 17 & \\ -\underline{15} & \\ 2 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 557 & 3 \\ \cline{2-2} 25 & 185 \\ 17 & \\ 2 & \end{array}$$

+ sens à l'opération, erreur rattrapable
− lourdeur de l'écriture

+ technique usuelle
− compréhension

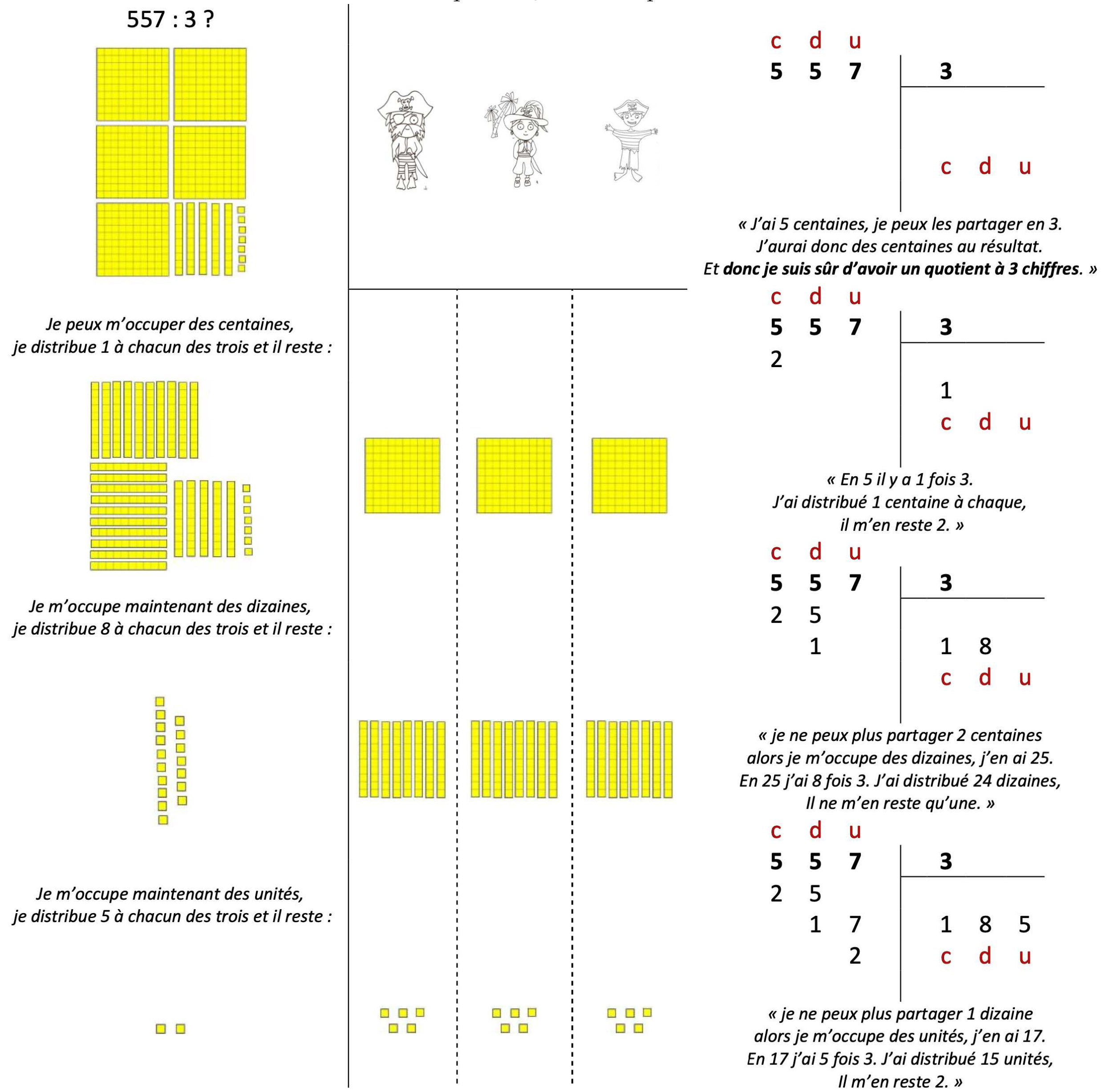
+ gain de temps et de place
− source d'erreurs, surcharge cognitive

À la suite, on peut écrire l'équation qui caractérise la division euclidienne : $557 = 3 \times 185 + 2$.

Pour introduire l'écriture en potence, on peut utiliser un matériel de numération (faux billets/pièces, multibase...) afin de manipuler les nombres sur une situation concrète et de faire le lien avec l'écriture de la division euclidienne.

Exemple On peut proposer la situation suivante issue d'une animation pédagogique sur la division au CE2 aux Andelys en 2011 :
Le chef des pirates veut partager 557 pièces d'or en 3 parts égales. Comment peut-il faire ?

Avec le matériel mutibase, les élèves doivent partager une certaine quantité d'or. On les laissera manipuler et organiser leur recherche comme il le le souhaitent. À l'issue de la mise en commun, on décide de commencer par les centaines et d'introduire la notation classique français avec la potence.



Difficultés rencontrées par les élèves

- Les calculs s'effectuent « de gauche à droite ».
- Nécessité d'effectuer simultanément des divisions, multiplications et soustractions.
- Les chiffres écrits successivement pour constituer le quotient sont le résultat d'une approximation qui peut conduire à essayer un chiffre erroné, donc provisoire.

D. Procédures utilisées pour résoudre des problèmes multiplicatifs

Cette partie s'inspire du « Hatier concours, Professeur des écoles, Admissibilité, Mathématique, Tome 2 », *Roland Charnay, Michel Mante* [cha13-2].

Problèmes « de multiplication ». On considère l'exemple suivant :

> **La directrice d'une école maternelle a acheté n boites de p crayons. Combien a-t-elle acheté de crayons ?**

On peut utiliser (au moins) trois types de procédures pour effectuer le calcul :

Les procédures

1) une procédure de type dessin ou schéma ;
2) une procédure de type calcul additif ;
3) une procédure de type calcul multiplicatif.

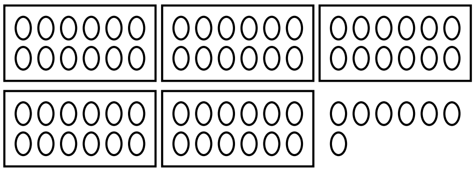
Résumons dans un tableau ces procédures en fonction des nombres n et p :

<table>
<tr><th></th><th>n et p sont petits
ex : 4 boites de 6 crayons</th><th>n est petit et p est grand
ex : 4 boites de 24 crayons</th><th>n et p sont grands
ex : 36 boites de 24 crayons</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>L'élève représente les 4 boites de 6 crayons :
IIIIII IIIIII IIIIII IIIIII
puis les dénombre un par un ou six par six.</td><td>Possible, mais procédure très coûteuse !</td><td>Procédure inutilisable dans ce cas.</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>$6+6+6+6=24$
ou
« 6 ; 12 ; 18 ; 24 ».</td><td>Efficace à condition de savoir calculer des sommes de nombres à deux chiffres et plus, et d'organiser au mieux ses calculs :
24 + 24 + 24 + 24
48 + 48
96</td><td>Procédure très longue.</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>Calcul mental de 4×6 à l'aide des tables de multiplication.</td><td>Très efficace si on connait la procédure experte :
$\begin{array}{r} 24 \\ \times \quad 4 \\ \hline 96 \end{array}$</td><td>Procédure experte requise ici.
$\begin{array}{r} 24 \\ \times\ 36 \\ \hline 144 \\ 72 \\ \hline 864 \end{array}$</td></tr>
</table>

Repères didactiques

Problèmes « de division ». On considère l'exemple suivant : On considère l'exemple suivant :

On range 67 oeufs dans des boîtes de 12. Combien de boîtes peut-on remplir ?

Procédure de type dessin ou schéma.	
Dessin figuratif  Dessin schématisé $\boxed{12}\ \boxed{12}\ \boxed{12}\ \boxed{12}\ \boxed{12}\ 7$	Ces procédures deviennent très vite peu économiques et difficiles à gérer dès que les nombres sont grands. Il s'agit souvent de procédures d'entrée dans le problème qui permettent à l'élève de comprendre la situation et d'imaginer une autre procédure plus rapide.

Procédure progressive basée sur l'addition ou la soustraction	
Additions « pas à pas » : $12+12 = 24+12 = 36+12 = 48+12 = 60+7 = 67$ ou $12+12+12 = 36$ $36+36 = 72$ $12+12 = 24$ $36+24 = 60$ $60+7 = 67$	La première suite d'égalités est correcte du point de vue de la démarche : l'élève simule le remplissage des boites une à une en faisant le bilan des œufs utilisés après chaque boite remplie. Cependant, le statut du signe « = » ne semble pas tout à fait compris puisque les égalités ne sont pas vraies dans leur globalité. La seconde démarche est comparable, mais l'élève fait des bilans partiels et réutilise ses calculs antérieurs. Une difficulté est de retrouver à la fin le nombre de fois que l'on a utilisé « 12 ».
Soustractions « pas à pas « $67-12 = 55$ $55-12 = 43$ $43-12 = 31$ $31-12 = 19$ $19-12 = 7$	L'élève s'intéresse aux œufs restants à mettre en boite plutôt qu'aux œufs utilisés. Ces procédures deviennent vite coûteuses avec des nombres assez grands. Certains élèves, parvenus à la fin de leurs calculs, ne savent plus comment retrouver le nombre de boîtes (surcharge cognitive).
Additions et/ou soustractions de multiples du diviseur : $\begin{array}{r} {}^{1} \\ 3\,6 \\ +\ 3\,6 \\ \hline 7\,2 \end{array}$ et $\begin{array}{r} 7\,2 \\ -\ \ 5 \\ \hline 6\,7 \end{array}$	Ce sont des améliorations des procédures précédents, l'élève utilisant souvent un résultat obtenu mentalement qui correspond au remplissage de plusieurs boites à la fois. La même difficulté que précédemment pour compter le nombre de boites se pose.

Procédure de type calcul multiplicatif : l'élève cherche à résoudre une équation du type $12 \times \cdots = 67$	
Pose de la multiplication à trous : $\begin{array}{r} 1\ 2 \\ \times\ \bullet\ \bullet \\ \hline 6\ 7 \end{array}$	Procédure délicate lorsque le reste n'est pas nul puisqu'elle n'est pas possible en une seule opération.
Essais de multiples successifs du diviseur : $12 \times 4 = 48$; $12 \times 5 = 60$; $12 \times 6 = 72$	Procédure qui peut être fastidieuse si l'élève a commencé son évaluation avec un nombre trop petit. Nécessite ensuite un ajustement pour trouver le bon résultat.
Essais par approches successives : $\begin{array}{r} 1\ 2 \\ \times\ 4 \\ \hline 4\ 8 \end{array}$ $\begin{array}{r} 1\ 2 \\ \times\ 8 \\ \hline 9\ 6 \end{array}$ $\begin{array}{r} 1\ 2 \\ \times\ 6 \\ \hline 7\ 2 \end{array}$ $\begin{array}{r} 1\ 2 \\ \times\ 5 \\ \hline 6\ 0 \end{array}$	L'efficacité de cette procédure dépend à la fois de la qualité de l'approximation effectuée au départ et des ajustements successifs.

Procédure mixte utilisant à la fois la multiplication et la soustraction	
Calculs partiels « au hasard » : $\begin{array}{r} 1\ 2 \\ \times\ 3 \\ \hline 3\ 6 \end{array}$ $\begin{array}{r} 6\ 7 \\ -\ 3\ 6 \\ \hline 3\ 1 \end{array}$ puis $\begin{array}{r} 1\ 2 \\ \times\ 2 \\ \hline 2\ 4 \end{array}$ $\begin{array}{r} 3\ 1 \\ -\ 2\ 4 \\ \hline 7 \end{array}$	L'élève fait un essai de multiple, calcule l'écart entre ce produit et le dividende puis recommence avec l'écart. L'élève pourra également commencer par utiliser des multiples de 10, 100 si le nombre est grand.

Procédure experte de la division euclidienne	
Calcul de la division de la euclidienne de 67 par 12 : $\begin{array}{rr|l} & 6\ 7 & 1\ 2 \\ \cline{3-3} - & 6\ 0 & 5 \\ \cline{2-2} & 7 & \end{array}$ ou utilisation d'une calculatrice.	Procédure experte dont relève le problème posé. Le but étant d'amener progressivement l'élève à utiliser cette procédure.

Pour les problèmes qui se résolvent par une multiplication ou une division, il existe de multiples variables didactiques, comme par exemple : le **type de problèmes** (une, plusieurs ou composition de grandeurs) ; le type de **nombres utilisés** (nombre entiers et/ou décimaux) ; la **taille des nombres** en jeu ; les **outils de calcul** disponibles ou non (calculatrice, abaque) ; le **contexte** (plus ou moins familier) ; ma manière dont l'**énoncé** est formulé (compréhensible ou complexe, présence de mots inducteurs) ; existence ou non d'un **reste** non nul pour la division. . .

Vu au CRPE en 2022

Documents 1 à 4 issus du livre « *Leçon, le manuel complet pour réussi l'oral* », CRPE 2022, Vuibert.

Consigne candidat : À partir du sujet et du dossier proposés par le jury, vous concevrez la mise en œuvre d'une séance d'enseignement à l'école primaire dans chacune des deux disciplines français et mathématiques. Vous présenterez successivement les composantes pédagogiques et didactiques de chaque séance et son déroulement.

Sujet : La soustraction posée.

Contexte de la séance d'enseignement :

- cycle d'enseignement : cycle 2 ;
- niveau de la classe : CE1 ;
- positionnement de la séance de mathématiques :
  - période : non précisé ;
  - séquence dans laquelle elle s'insère : technique de calcul posé pour la soustraction.

Documents fournis au candidat :

Document 1 : Extrait des repères annuels de progression, cycle 2. Ministère de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports.

<table>
<tr><th>CP</th><th>CE1</th><th>CE2</th></tr>
<tr><td colspan="3">Calcul (suite)</td></tr>
<tr><td colspan="3">Les procédures à mémoriser dans le cadre du calcul posé.
Les opérations posées permettent l'obtention de résultats notamment lorsque le calcul mental ou écrit en ligne atteint ses limites. Leur apprentissage est aussi un moyen de renforcer la compréhension du système décimal de position et de consolider la mémorisation des relations numériques élémentaires. Il a donc lieu lorsque les élèves se sont approprié des stratégies de calcul basées sur des décompositions/recompositions liées à la numération décimale, souvent utilisées également en calcul mental ou écrit.</td></tr>
<tr><td>Les élèves enrichissent d'abord la mémorisation de faits numériques et de procédures. Au plus tard en période 4, les élèves apprennent à poser les additions en colonnes avec des nombres de deux chiffres.</td><td>Dès le début de l'année, les élèves consolident la maîtrise de l'addition avec des nombres plus grands et avec des nombres de taille différente.
Ils continuent à enrichir la mémorisation de faits numériques et de procédures. Au plus tard en période 3, les élèves apprennent une technique de calcul posé pour la soustraction.</td><td>Dès le début de l'année, les élèves consolident la maîtrise de la technique de la soustraction apprise en CE1.
Ils apprennent et entretiennent tout au long de l'année une technique de calcul posé pour la multiplication, tout d'abord en multipliant un nombre à deux chiffres par un nombre à un chiffre puis avec des nombres plus grands.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Les techniques de calcul posé sont communes à toutes les classes, elles sont ritualisées avec les mêmes formes et les mêmes mots. Ce choix doit être poursuivi au cycle 3.</td></tr>
</table>

Document 2 : Extrait de la note de service n°2018-051 du 25-4-2018 « *Enseignement du calcul : un enjeu majeur pour la maîtrise des principaux éléments de mathématiques à l'école primaire* ».

LE CACLUL POSÉ

Le calcul posé repose sur la connaissance de faits numériques (tables) et sur celle d'algorithmes qui ne sont véritablement opératoires que s'ils sont parfaitement maîtrisés. Ainsi, les quatre algorithmes opératoires (pour l'addition, la soustraction, la multiplication, la division) doivent faire l'objet d'un enseignement précis, guidé et normalisé. Au début de l'apprentissage, le rythme doit être suffisamment soutenu afin que l'automaticité - et donc le confort et la sûreté pour l'élève - puissent s'installer. Ensuite, à partir du CE1, la plupart des séances de mathématiques donnent l'occasion aux élèves de poser une ou plusieurs opérations. Pour autant, une fois les principes de fonctionnement d'un algorithme d'une opération posée acquis par les élèves, le cadre privilégié pour l'entraînement à la mise en œuvre de cet algorithme est celui de la résolution de problèmes. Il faut ainsi éviter la pratique répétée d'exercices techniques sur des temps excessivement longs. Dans le même esprit, on évitera les exercices de calcul d'opérations posées trop longues comme par exemple la multiplication de nombres supérieurs à 1 000 ou la division par des grands nombres. Pour la soustraction, le choix de l'algorithme (compensation ou cassage de l'unité de numération supérieure) relève de l'équipe d'école. On aura intérêt à conserver le même durant les quatre années concernées (du CE1 au CM2). [...]
La justification mathématique de la pertinence des algorithmes opératoires est d'une difficulté inégale selon l'opération : [...]
– pour la soustraction, si c'est le choix du cassage de l'unité de numération supérieure qui est fait, [...] le maître doit justifier l'algorithme par l'utilisation de matériel puis l'oralisation ; en revanche, si c'est le choix de la compensation qui est fait, une justification peut être donnée, basée sur des écritures en ligne (75-29 = (75+10) - (29+10), c'est pour cela que l'on dit « 9 ôtés de 5 je ne peux pas, donc je fais 9 ôtés de 15 (ce qui revient à ajouter une dizaine à 75), je pose 6 et je retiens 1 ; 2 et 1 de retenue (ce qui revient à ajouter une dizaine à 29) qui font 3, 3 ôtés de 7 font 4 ») sans qu'il soit demandé à tous les élèves de mémoriser cette explicitation ; [...]

CALCUL MENTAL, CACLUL EN LIGNE OU CALCUL POSÉ ?

Il n'y a pas lieu d'opposer les différents modes de calcul. Chacun doit faire l'objet d'un entraînement spécifique. L'élève, lorsqu'il doit produire un résultat, par exemple pour une résolution de problèmes, doit pouvoir choisir le mode de calcul qui lui paraît, à lui, dans cette situation, avec ses connaissances, le plus sûr et/ou le plus rapide et/ou le plus facile.

__Document 3__ : Extrait d'« *Enseigner les mathématiques à l'école* », Thierry Dias, Magnard 2018, pp. 172-174.

Nous allons étudier trois techniques, fondées sur trois principes distincts, qui peuvent constituer un bon matériau pour différencier. [...]

La méthode par « cassage »

Cette technique est la plus simple à comprendre et elle est utilisée dans certains pays, comme la Suisse et les États-unis. Elle permet en effet de bien comprendre le système des groupements et échanges qui conditionne la numération décimale.
La voici schématisée sur un exemple : 753 − 85.

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 4 & \\ & 7 & \cancel{5} & 13 \\ - & & 8 & 5 \\ \hline & & & 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} & 6 & 14 & \\ & \cancel{7} & \cancel{5} & 13 \\ - & & 8 & 5 \\ \hline & 6 & 6 & 8 \end{array}$$

Avec cette technique, on commence bien sûr par les unités, en constatant immédiatement que la soustraction 3 − 5 n'est pas possible dans l'ensemble des entiers naturels. Pour obtenir davantage d'unités dans le premier terme, on « casse » une dizaine (c'est-à-dire que l'on défait un groupement de dix). Des 75 dizaines que nous avions, il en restera donc 74 : on barre le 5 l'on écrit 4 à la place. Maintenant que l'on a 13 unités (10 + 3), on peut soustraire 5 : on effectue 13 − 5 pour trouver 8. C'est le chiffre résultat de la colonne des unités.
On refait ensuite la même opération, qui consiste à défaire un groupe de cent pour obtenir davantage de dizaines. Cette technique opératoire repose donc sur des réécritures successives du premier terme. Dans les situations où ce nombre comporte plusieurs zéros, la technique devient laborieuse et complexe, car on doit le barrer plusieurs fois [...].

La méthode par « compléments »

Cette technique consiste à transformer la soustraction en une addition à trous. Elle revient donc à utiliser ses connaissances sur l'addition pour les reporter dans un calcul soustractif. Ici, on cherche un nombre qui, ajouté à 85, donne 753.

On doit donc aller de 5 à 3 en avançant mais, comme ce n'est pas possible, on va aller de 5 à 13, d'où la retenue que l'on pose ici en bleu. Pour aller de 5 à13, il faut 8.

On continue ainsi : pour aller de $8+1=9$ à 5, ce n'est pas possible ; on va donc de 9 à15, etc.

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ 1 & 8 & 5 \\ 6 & 6 & 8 \\ \hline 7 & 5 & 3 \end{array}$$

Cette technique est assez complexe sur le plan sémiotique car se pose alors le problème des retenues. [...] Néanmoins, cette procédure peut se révéler très intéressante si l'on n'essaie pas de la traduire par une écriture en colonnes, mais en appui sur une ligne des nombres. [...]

La méthode « traditionnelle »

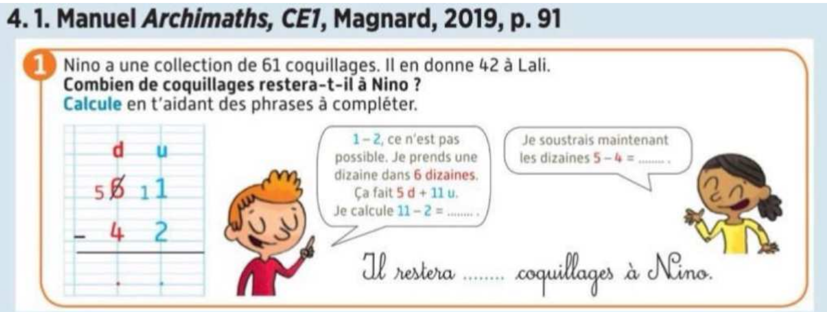
Cette technique est la plus courante et c'est probablement celle que vous avez apprise à l'école. Elle repose sur le fait que le résultat d'une soustraction ne change pas si l'on ajoute le même nombre à chacun des termes.

On se retrouve donc avec la même systématique que lors de la première technique : pour enlever 5 à 3, on inscrit « 13 » mais, ici, on place la retenue sur la dizaine du nombre juste en dessous du 8. Lorsqu'on ajoute une dizaine à un nombre, on l'ajoute à celui que l'on enlève, et ainsi de suite.

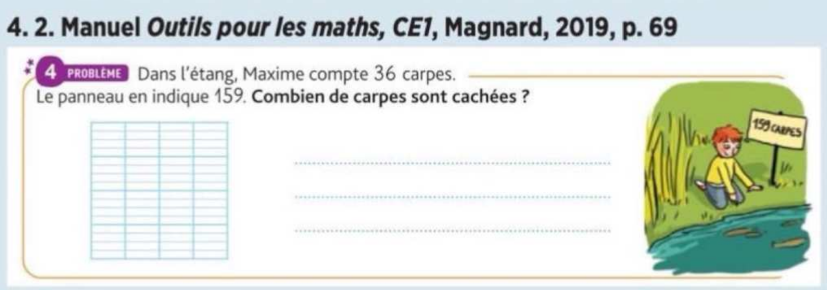
$$\begin{array}{cccc} & 7 & {}^{1}5 & {}^{1}3 \\ & & 8 & 5 \\ - & 1 & 1 & \\ \hline & 6 & 6 & 8 \end{array}$$

Cette technique est très complexe au niveau du sens et provoque un apprentissage très procédural. L'élève l'apprend alors comme un automatisme très symbolique (« Je dois mettre un petit I ici, et un autre là... ») sans lui donner de sens. [...] C'est pourtant celle qui est le plus souvent enseignée en France, même si la tendance actuelle est à un basculement vers la première technique.

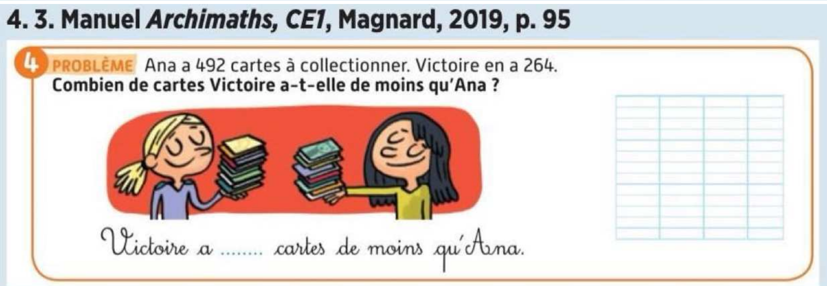
<u>Document 4</u> : Extraits de manuels scolaires.


4. 1. Manuel *Archimaths, CE1*, Magnard, 2019, p. 91

1 Nino a une collection de 61 coquillages. Il en donne 42 à Lali.
Combien de coquillages restera-t-il à Nino ?
Calcule en t'aidant des phrases à compléter.


4. 2. Manuel *Outils pour les maths, CE1*, Magnard, 2019, p. 69

4 PROBLÈME Dans l'étang, Maxime compte 36 carpes.
Le panneau en indique 159. **Combien de carpes sont cachées ?**


4. 3. Manuel *Archimaths, CE1*, Magnard, 2019, p. 95

4 PROBLÈME Ana a 492 cartes à collectionner. Victoire en a 264.
Combien de cartes Victoire a-t-elle de moins qu'Ana ?

1 CRPE 2001 Amiens

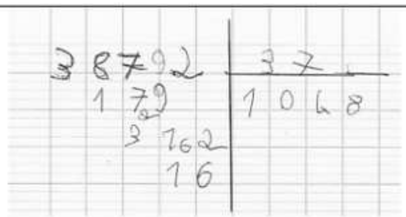
1) Classez ces productions issues de l'évaluation CE2 en formulant des hypothèses quant à la nature des erreurs.

Élève A	Élève B	Élève C	Élève D
1 1 2 3 8 + 1 5 9 + 3 7 4 7 6 1	2 6 1 2 3 8 + 1 5 9 + 3 7 4 1 1 2	1 2 2 3 8 + 1 5 9 + 3 7 4 7 7 1	1 2 2 3 8 + 1 5 9 + 3 7 4 9 5 1
Élève E	**Élève F**	**Élève G**	**Élève H**
1 2 2 3 8 + 1 5 9 + 3 7 4 7 8 1	1 2 2 3 8 + 1 5 9 + 3 7 4 6 5 1	1 2 2 3 8 + 1 5 9 + 3 7 4 7 6 1	2 3 8 + 1 5 9 + 3 7 4 6 15 21

2) Quelles sont les compétences et/ou connaissances nécessaires à la réussite de cet exercice ?

2 CRPE 2015 G1

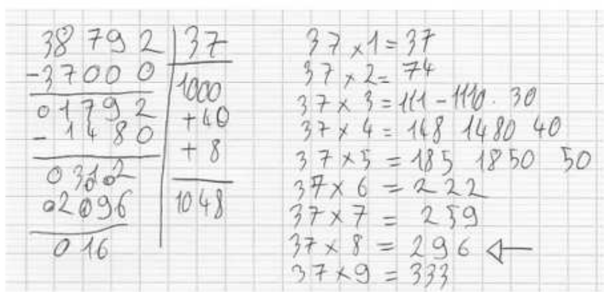
Voici les productions de quatre élèves.



Adama

Marie

Kévin



Anaïs

1) Donner un avantage de chacune des techniques opératoires utilisées par Adama et Anaïs.

2) Relever les erreurs faites par Marie et Kévin et, pour chacune, émettre une hypothèse sur son origine.

Analyse de documents

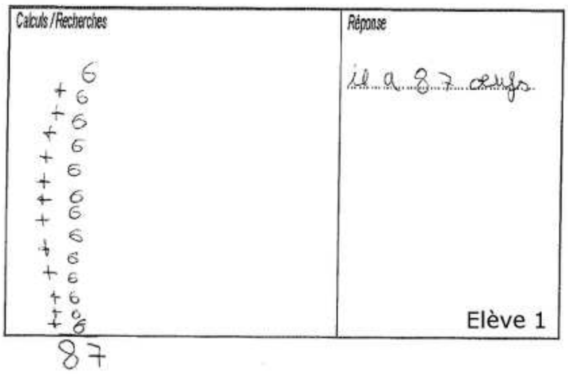
3 CRPE 2017 G2

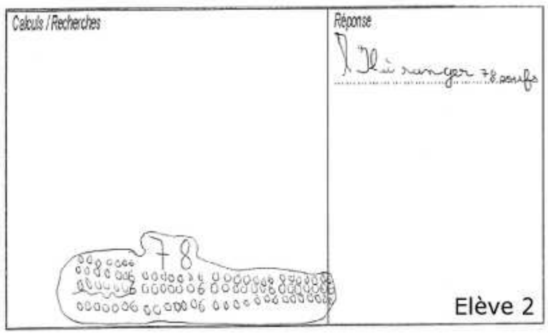
Exercice extrait des évaluations nationales à l'entrée au CE2.

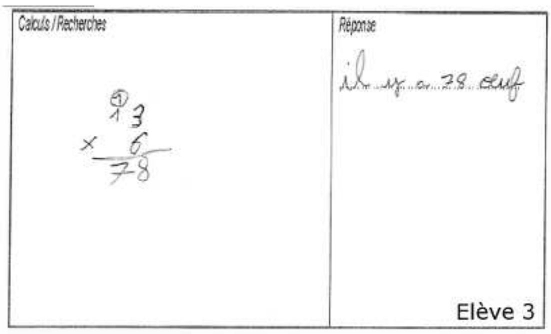
> Un fermier range 6 oeufs dans chaque boîte.
> Quand il a fini, il compte ses boîtes et en trouve 13. Combien a-t-il rangé d'oeufs ?
> Écris tes calculs dans le premier cadre et ta réponse dans le deuxième cadre.

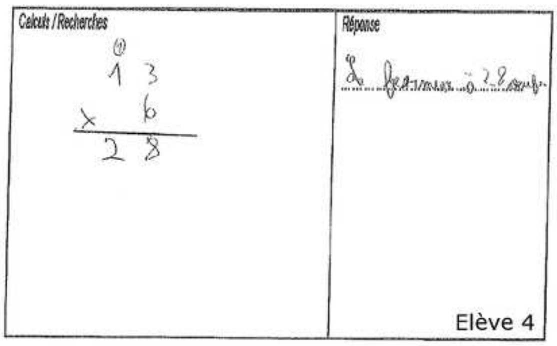
On a ci-dessous les productions de six élèves.

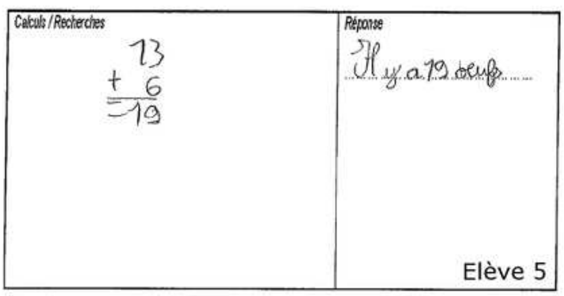
1) Pour chacun des élèves 1, 2 et 3 : expliciter les procédures utilisées et donner deux compétences qui semblent acquises par chacun des élèves.
2) Pour chacun des élèves 4, 5 et 6 : citer une compétence qui semble acquise, identifier et analyser les erreurs.
3) Pour l'élève 5, proposer une aide que pourrait envisager l'enseignant pour l'amener à corriger son erreur.
4) Pour les élèves 1 et 6, comment l'enseignant pourrait-il modifier l'énoncé pour les amener à utiliser une multiplication ?

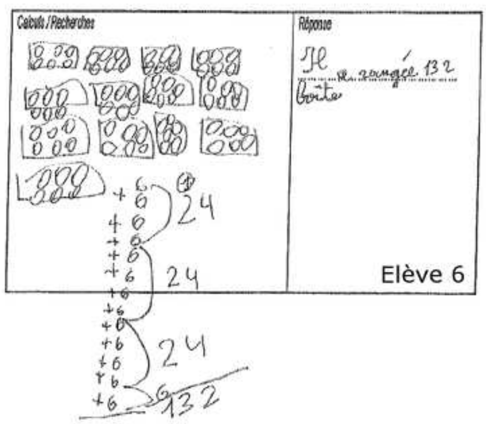












4 CRPE 2017 G3

On considère l'exercice suivant issu du manuel scolaire « Cap maths », Hatier (édition 2016).

Calcule avec la méthode de ton choix.

a. 91 − 52 = ...	c. 800 − 153 = ...
b. 613 − 209 = ...	d. 607 − 54 = ...

1) Quelle est la notion abordée ? Citer deux connaissances et savoir-faire que cette situation met en jeu.

2) Étude des productions des élèves. On considère les quatre productions d'élèves ci-dessous.

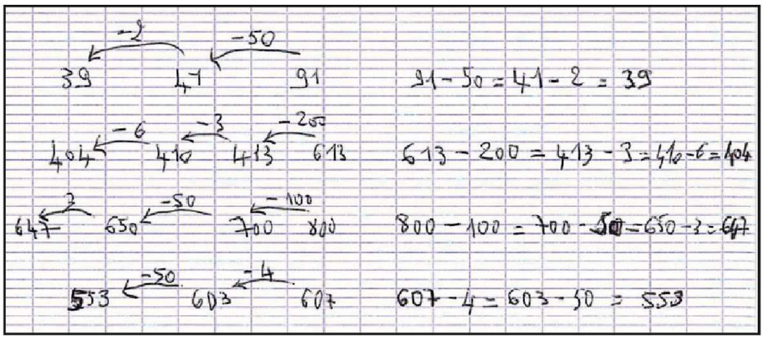
a) Quelles sont les différentes procédures utilisées par Antoine, Barbara et Clara ?

b) Qu'est-ce qui différencie les procédures utilisées par Barbara et Dominique ?

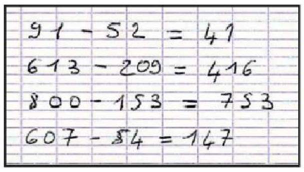
c) Relever les réussites et les erreurs de Barbara et Clara.

d) Quel accompagnement pédagogique mettre en œuvre pour remédier aux difficultés rencontrées par Clara ?

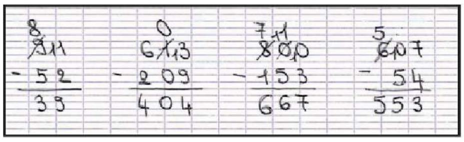
Antoine



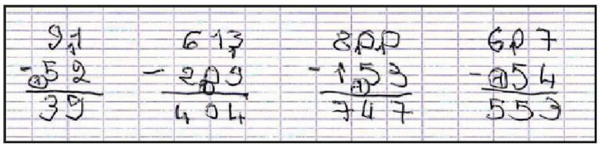
Clara



Barbara



Dominique



5 CRPE 2017 G1

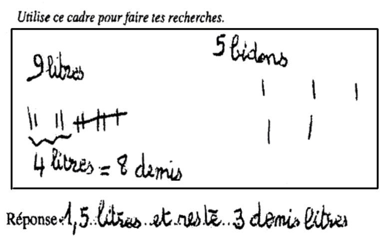
L'exercice ci-dessous est extrait de évaluations nationales CM2 de 2012.

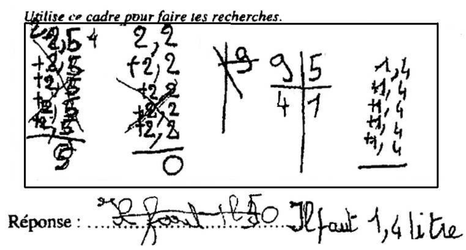
> Il faut 9 litres d'huile pour remplir complètement 5 bidons identiques.
> Quelle est la contenance, en litre, de chacun de ces bidons ?

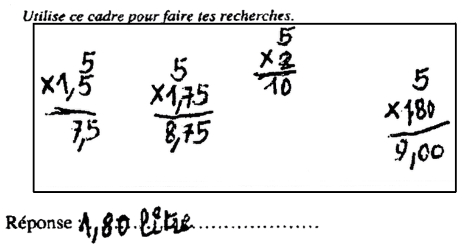
1) Quelle opération permet de répondre à cette question ?

2) Voici les productions de Julia, Karima et Louis. Pour chacune d'entre elles, expliquer la procédure utilisée.

3) Quelles modifications, concernant les nombres en jeu dans l'exercice, peut proposer l'enseignant à Louis pour l'encourager à changer de procédure ?







Activités à faire en classe

1 C1 - Fabriquer un album à compter

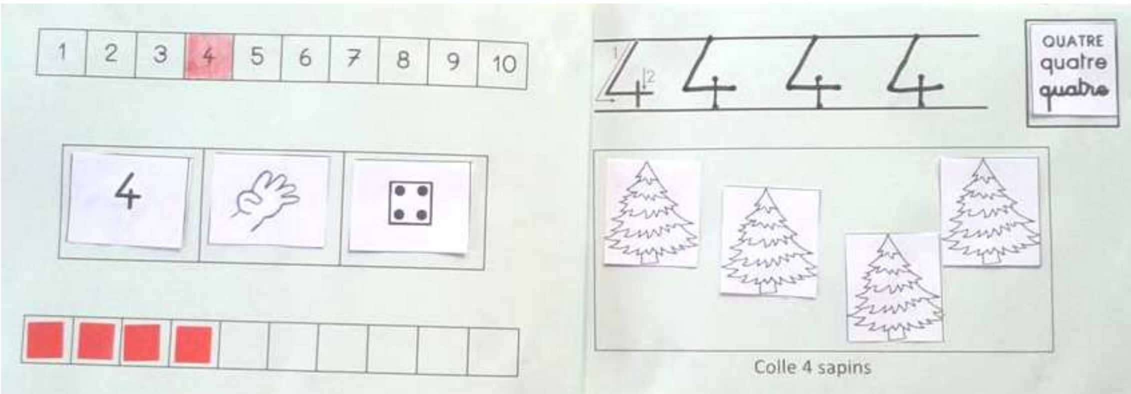
Compétence visée : travailler les différentes désignations des nombres.

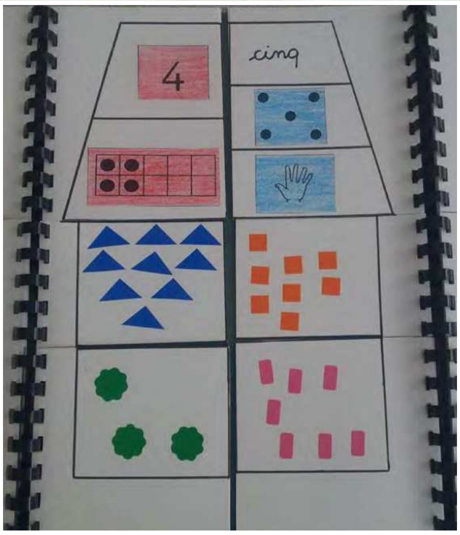
Objectif : donner du sens aux nombres en les matérialisant de différentes façons. Les diverses désignations du nombre (chiffres, mots, représentations digitales, dés, collections d'objets, jetons...) contribuent à structurer les connaissances. Le champ numérique utilisé est choisi en fonction des compétences des élèves.

Déroulement :

1) Découvrir des livres à compter.
   Par exemple : *1, 2, 3 petits chats qui savent compter jusqu'à 3* ; *Cinq petites coccinelles* ; *10 petites coccinelles*...
2) Organiser le projet :
   - combien de pages ?
   - quels éléments : écriture chiffrée, écriture en lettres, représentation digitale, constellation du dé, collection d'objet, frise, abaque... ?
   - quelles techniques : dessiner, colorier, peindre, coller, utiliser des tampons... ?
   - quel format : une double page par nombre ou pages découpées à reconstituer ?
3) Accompagner le projet : apprendre des comptines, travailler sur les collections (classer, catégoriser, comparer), ritualiser des jeux mathématiques ;
4) Concevoir et fabriquer : peut se faire tout au long de l'année, en fil rouge ;
5) Faire partager : présenter le livre à une autre classe, ramener son livre à la maison.

Exemples : *Projet : réalisation d'un livre à compter*





2 C1 - Greli-grelo

Compétence visée : composer, décomposer les nombres.

Objectif : déterminer le nombre d'objets d'une collection après augmentation ou diminution de ce nombre sans que la collection entière soit visible.

Déroulement : le meneur de jeu place des objets dans une main, il montre cette main ouverte pour que les élèves puissent dénombrer les objets qu'il place dans une boîte opaque. Il fait ensuite de même avec son autre droite et place les objets contenus dans cette main dans la même boîte. Il ferme la boîte et la secoue en chantant : « Greli-grelo, combien j'ai d'sous dans mon sabot ? ». On écoute les propositions des autres joueurs et on valide en recomptant la totalité des objets sortis de la boîte et étalés sur un plateau.

Variantes : types de jetons, nombre de jetons, cartes de constellations, retirer des jetons, commence par montrer la collection complète puis une partie de la collection...

Exemples : *Greli-grelo décomposition*, *Greli-grelo composition*.

3 C1 - Halli Galli

Source : Vers les maths, moyenne section. Accès.

Matériel : 56 cartes où sont dessinés de 1 à 5 fruits (banane, pruneau, fraise, citron), une sonnette, des jetons.

Organisation : travail dirigé avec 4 élèves.

Déroulement

Étape 1 : Découvrir les cartes de Halli Galli

- Observer les cartes. Nommer les fruits. Dire combien de fruits l'on voit.
  Trier les cartes en fonction du nombre de fruits.
- Trier les cartes en fonction du type de fruit. Se répartir la tâche dans le groupe. Chaque élève classe ensuite ses cartes en fonction du nombre de fruits. Ranger les paquets de cartes dans l'ordre croissant

Étape 2 : Retrouver tes décompositions du nombre 5

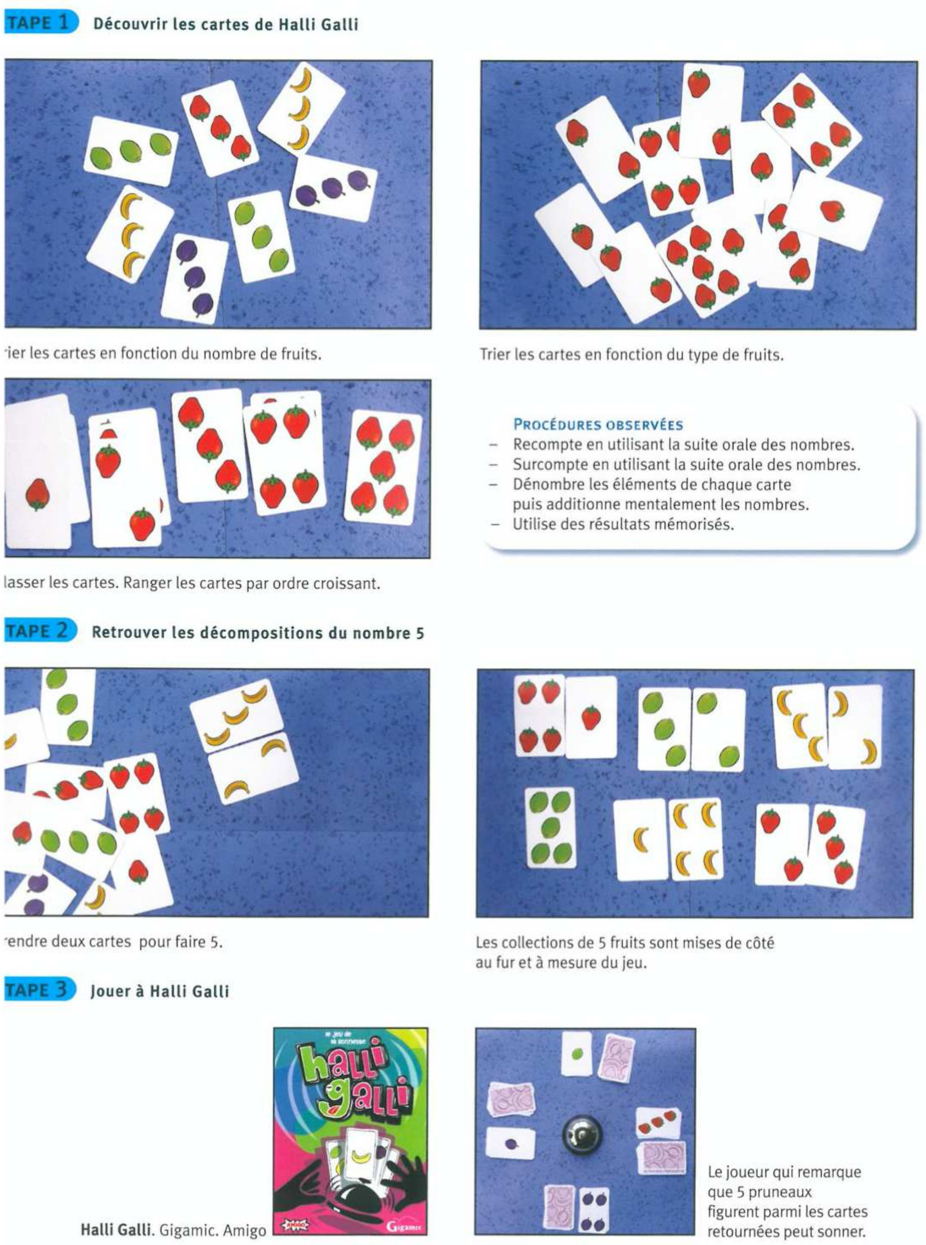
- Étaler toutes les cartes fraises et bananes sur la table faces fruits visibles.
  Prendre deux cartes chacun son tour pour faire 5. Les cartes doivent représenter la même sorte de fruit.
  Si l'élève réussit, il reçoit un jeton. Dans le cas contraire, il repose les cartes et passe son tour.
- Mettre en commun les moyens pour savoir si les deux cartes font 5 : dénombrer les fruits en utilisant la suite orale des nombres, surcompter en utilisant la suite orale des nombres.

Étape 3 : Jouer à Halli Galli

- *Jeu 1 : Découvrir la sonnette*
  L'enseignant forme un tas devant lui avec les cartes de 5 fruits et quelques autres.
  La clochette est posée au centre de la table à la même distance de chaque joueur.
  - L'enseignant retourne une carte. Si cette carte représente 5 fruits, le joueur qui sonne le premier gagne la carte. On joue seulement quelques minutes à ce jeu pour que chaque élève utilise la sonnette au moins une fois.
- *Jeu 2 : Jouer avec deux cartes*
  L'enseignant pose deux tas de cartes devant lui. Il n'utilise que les cartes bananes et fraises.
  - L'enseignant retourne deux cartes. Si 5 fruits de la même sorte figurent parmi les cartes retournées, le joueur qui sonne le premier gagne les deux cartes.

- *Jeu 3 : Jouer selon la règle de Halli Galli*
  – Les cartes sont distribuées une à une à chaque joueur jusqu'à ce qu'il n'en reste plus.
  – Chaque joueur pose son tas de cartes à l'envers devant lui.
  – Chaque joueur retourne à tour de rôle la première carte de son tas et la place devant lui.
  – Dès que 5 fruits de la même sorte figurent parmi les cartes retournées, le joueur qui sonne le premier gagne les deux cartes qui additionnées font 5. Il donne les cartes gagnées à l'enseignant et reçoit un jeton en échange.
  – Lorsque toutes les cartes ont été retournées et qu'il n'y a plus de possibilité de faire 5, on compte le nombre de jetons gagnés par chaque joueur.
  – Si un joueur sonne alors qu'il n'y a pas 5 fruits de la même sorte, il passe une fois son tour.

On trouvera sur le site Maths - Jouer à Halli Galli des variantes de ce jeu avec des fiches à imprimer.



TAPE 1 Découvrir les cartes de Halli Galli

ier les cartes en fonction du nombre de fruits.

Trier les cartes en fonction du type de fruits.

lasser les cartes. Ranger les cartes par ordre croissant.

PROCÉDURES OBSERVÉES
– Recompte en utilisant la suite orale des nombres.
– Surcompte en utilisant la suite orale des nombres.
– Dénombre les éléments de chaque carte puis additionne mentalement les nombres.
– Utilise des résultats mémorisés.

TAPE 2 Retrouver les décompositions du nombre 5

rendre deux cartes pour faire 5.

Les collections de 5 fruits sont mises de côté au fur et à mesure du jeu.

TAPE 3 Jouer à Halli Galli

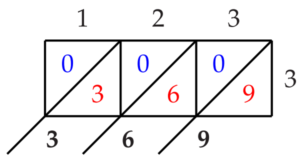
Halli Galli. Gigamic. Amigo

Le joueur qui remarque que 5 pruneaux figurent parmi les cartes retournées peut sonner.

4 C2/C3 - La multiplication per gelosia

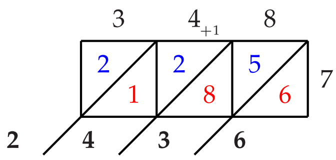
Partie A : multiplication par un nombre à un chiffre

Leonardo a effectué la multiplication ci-contre.
Faire l'opération à côté, comment Leonardo a-t-il fait son opération ?



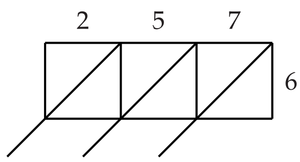
$123 \times 3 = 369$

Leonardo a ensuite effectué une multiplication plus difficile.
Faire l'opération à côté, comment Leonardo a-t-il fait son opération ?



$348 \times 7 = 2\,436$

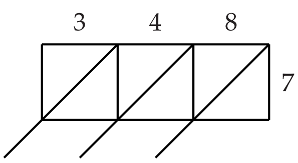
À la manière de Leonardo, effectue l'opération : 257×6.

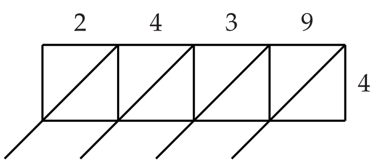


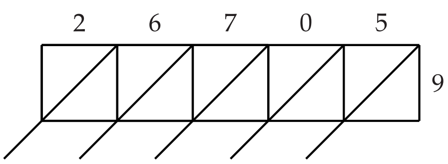
$257 \times 6 =$ ________

Cette technique de multiplication s'appelle la **multiplication per gelosia**, elle vient de la civilisation indienne au XII^e siècle, et a été introduite en Europe par le mathématicien italien **Léonard de Pise**, plus connu sous le nom de **Fibonacci**. Elle est très utilisée jusqu'au XV^e siècle.
Le nom fait allusion à la pièce en bois qui, en Italie, équipait certaines « fenêtres à jalousie » chez les maris jaloux : la femme pouvait regarder ce qui se passait dans la rue sans être vue des autres hommes.

Effectue les opérations suivantes en indiquant à côté l'opération réalisée et le résultat obtenu.

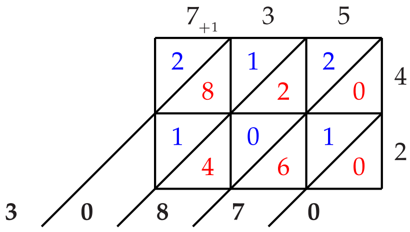




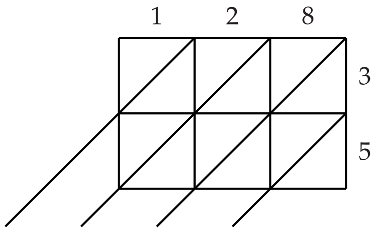


PARTIE B : multiplication par un nombre à deux chiffres

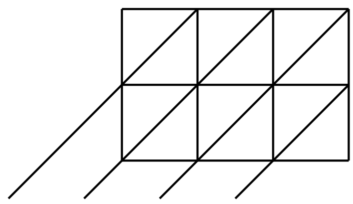
Etudier l'exemple ci-dessous et en déduire les deux autres calculs.



$735 \times 42 = 30\,870$

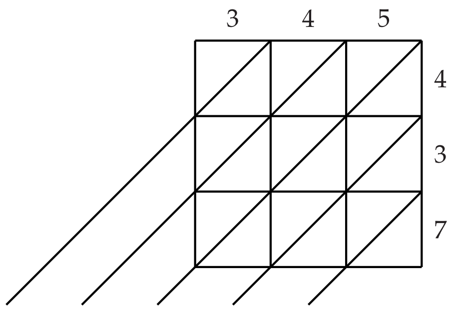


$128 \times 35 =$ _________

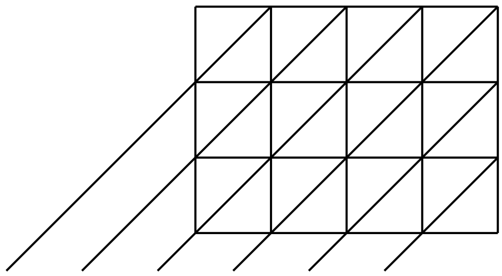


$934 \times 75 =$ _________

PARTIE C : Encore plus loin...



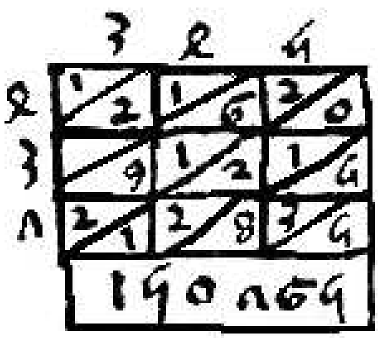
____

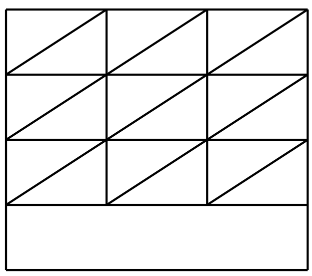


$1\,345 \times 824 =$ _____________

PARTIE D : Pour les experts !

On a retrouvé ce document, écrit en chiffres arabes, dans un manuscrit du 15e siècle.
Saurais-tu le retranscrire avec nos chiffres indo-arabes actuels ?





NOMBRES & CALCULS

4

Fractions et décimaux

Dans les programmes - cycle 3

Utiliser et représenter des fractions simples, les nombres décimaux

- Connaître diverses désignations des fractions : orales, écrites et décompositions additives et multiplicatives (ex : quatre tiers ; $\frac{4}{3}$; $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$; $1+\frac{1}{3}$; $4\times\frac{1}{3}$).
- Connaître et utiliser quelques fractions simples comme opérateur de partage en faisant le lien entre les formulations en langage courant et leur écriture mathématique (ex : faire le lien entre « la moitié de » et multiplier par $\frac{1}{2}$).
- Utiliser des fractions pour rendre compte de partages de grandeurs ou de mesures de grandeurs. Repérer et placer des fractions sur une demi-droite graduée adaptée.
- Encadrer une fraction par deux nombres entiers consécutifs. Comparer deux fractions de même dénominateur.
- Écrire une fraction sous forme de somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1. Connaître des égalités entre des fractions usuelles (ex : $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$; $\frac{10}{100}=\frac{1}{10}$; $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$). Utiliser des fractions pour exprimer un quotient.
- Connaître les unités de la numération décimale (unités simples, dixièmes, centièmes, millièmes) et les relations qui les lient.
- Comprendre et appliquer aux nombres décimaux les règles de la numération décimale de position (valeurs des chiffres en fonction de leur rang).
- Connaître et utiliser diverses désignations orales et écrites d'un nombre décimal (fractions décimales, écritures à virgule, décompositions additives et multiplicatives).
- Utiliser les nombres décimaux pour rendre compte de mesures de grandeurs.
- Connaître le lien entre les unités de numération et les unités de mesure (par exemple : dixième à dm/dg/dL, centième à cm/cg/cL/centimes d'euro).
- Repérer et placer un nombre décimal sur une demi-droite graduée adaptée. Comparer, ranger des nombres décimaux.
- Encadrer un nombre décimal par deux nombres entiers, par deux nombres décimaux.
- Trouver des nombres décimaux à intercaler entre deux nombres donnés.

Repères didactiques

1. Introduction

A. Repères de progressivité

Les fractions, puis les nombres décimaux, apparaissent comme de nouveaux nombres introduits pour pallier l'insuffisance des nombres entiers, notamment pour mesurer des longueurs, des aires et repérer des points sur une demi-droite graduée. Le lien à établir avec les connaissances acquises à propos des entiers est essentiel. Avoir une bonne compréhension des relations entre les différentes unités de numération des entiers (unités, dizaines, centaines de chaque ordre) permet de les prolonger aux dixièmes, centièmes… L'écriture à virgule est présentée comme une convention d'écriture d'une fraction décimale ou d'une somme de fractions décimales. Cela permet de mettre à jour la nature des nombres décimaux et de justifier les règles de comparaison et de calcul.

Au **CM1**, dès la période 1, les élèves utilisent les fractions simples comme $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{2}$ (il est important de travailler les fractions inférieures et supérieures à l'unité) dans le cadre de partage de grandeurs.
En période 2, ils mobilisent les fractions décimales dont le dénominateur est 10 ou 100 qui sont positionnées sur une droite, puis ils comparent et ajoutent des fractions de même dénominateur.
Ensuite, les élèves apprennent à décomposer une fractions décimale comme la somme d'un entier et d'un fraction décimale inférieure à 1. Cela permettra d'introduire l'écriture décimale d'un nombre.
Par exemple, $\frac{73}{10} = 7 + \frac{3}{10} = 7,3$ ou $\frac{1\,227}{100} = 12 + \frac{27}{100} = 12,27$.
Ils apprennent à utiliser les nombres décimaux ayant au plus deux décimales en veillant à mettre en relation fractions décimales et écritures à virgule.
Ils connaissent des écritures décimales de fractions simples ($\frac{1}{2} = 0,5 = \frac{5}{10}$; $\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 0,25$; la moitié d'un entier).

Au **CM2**, le travail effectué au CM1 est approfondi avec notamment l'introduction du millième : $\frac{1}{1000}$ et donc les nombres à trois décimales.
Ils connaissent des écritures décimales de fractions simples ($\frac{1}{5} = 0,2 = \frac{2}{10}$; $\frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 0,75$; la moitié d'un entier).

B. Rappels mathématiques sur les différentes dénominations des fractions

On considère ici uniquement les nombres positifs : les nombres relatifs seront vus au cycle 4.

Nom	Définition	Exemple
Fraction	Écriture d'un nombre rationnel positif sous la forme $\dfrac{n}{d}$ où $n \in \mathbb{N}$ et $d \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{6}{4}$
Fraction irréductible	Fraction de la forme $\dfrac{n}{d}$ où $n \in \mathbb{N}$ et $d \in \mathbb{N}^*$ avec n et d premiers entre eux	$\dfrac{3}{2}$
Fraction décimale	Fraction du type $\dfrac{n}{d}$ où $d = 10^p$ avec $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{15}{10}$
Fraction « anglaise »	Écriture du type $E + \dfrac{n}{d}$ où $E \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, d \in \mathbb{N}^*$ et $n < d$	$1 + \dfrac{1}{2}$
Écriture fractionnaire	Écriture de la forme $\dfrac{n}{d}$ où $n \in \mathbb{R}$ et $d \in \mathbb{R}^*$	$\dfrac{0,75}{0,5}$

2. La construction du concept de fraction

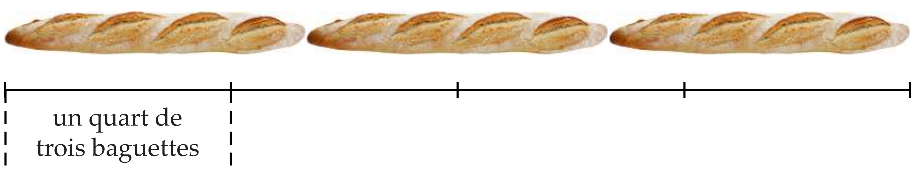
A. Deux conceptions des fractions

Arrêtons nous un instant sur le problème suivant, issu d'un travail de *Rémi Brissaud* : « Les fractions et les décimaux au CM1 - Une nouvelle approche » [bri98].

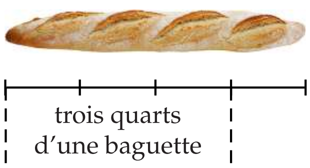
Comment partager une quantité de trois baguettes de pain en quatre parts égales ?

Deux procédures différentes au niveau du raisonnement sont possibles :

• **La partition de la pluralité :** ce qui revient à faire « 3 divisé par 4 ». On partitionne la totalité des trois baguettes en quatre parts égales, par exemple en prenant la moitié de la moitié des trois baguettes.



• **Le fractionnement de l'unité :** ce qui revient à faire « trois quarts ». On partage donc chaque baguette (unité) en quatre parts égales et l'on en prend trois parts.



Le principe est donc de comprendre que ces deux méthodes mènent à un résultat équivalent, ce que l'on peut écrire de manière mathématique :

$$3 \div 4 = \frac{3}{4} = 3 \times \frac{1}{4}$$

C'est cette équivalence qui fonde le concept de fraction : elle justifie le fait que les deux gestes mentaux précédents soient désignés de la même façon, par la barre de fraction, et que l'on puisse lire indifféremment 3/4 comme 3 divisé par 4 ou comme trois quarts.

Rémi Brissiaud recommande de commencer par introduire le sens partition de la pluralité (le moins naturel des deux). Sinon, en commençant par le sens le plus naturel, il sera alors difficile d'accéder à l'autre sens.

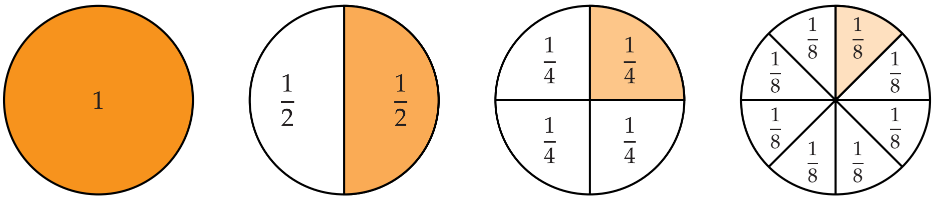
Remarquons que dans notre exemple, le numérateur est inférieur au dénominateur. Le sens « trois quarts » est donc prédominant. Supposons maintenant que l'on veuille partager onze baguettes en quatre Dans ce cas, le sens le plus naturel sera certainement de commencer par distribuer deux baguettes à chaque personne, puis à partager les trois baguettes restantes en qutre.
On peut dire que « 11 divisé par 4 est égal à 2 plus le reste, 3, divisé par 4 » ce qui s'écrit :

$$\frac{11}{4} = 2 + \frac{3}{4}.$$

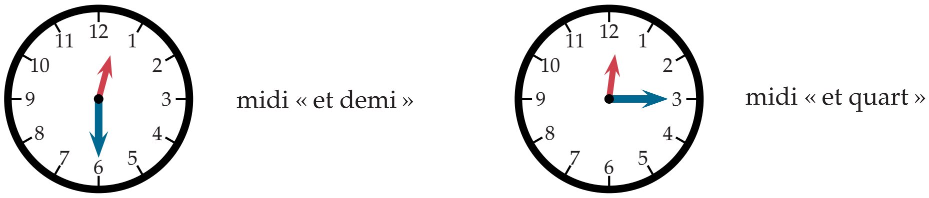
B. Les fractions simples

D'après ce que nous venons de voir, on peut alors affirmer que les fractions naissent de l'idée de couper une grandeur en parts égales, puis de prélever des parts. Ou que, dans certains cas, une fraction peut aussi exprimer un rapport de deux grandeurs de même nature.

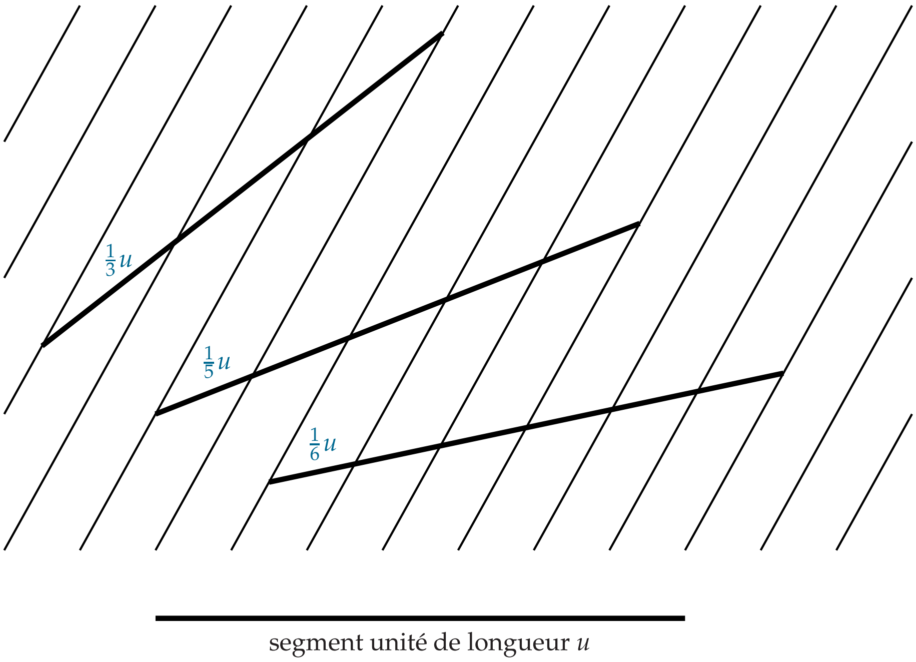
Pour les fractions plus petites que l'unité, l'apprentissage des fractions est favorisé par leur représentation sur une bande ou un segment de longueur « un » (l'unité de longueur) ou encore grâce à un disque d'aire une unité.
Les fractions telles que $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ peuvent être facilement illustrées par pliages successifs de l'unité.



On peut, à cette occasion, faire le lien avec les grandeurs (capacités, masses, durées). Par exemple, la lecture de l'heure illustre bien ces notions de fractions simples :

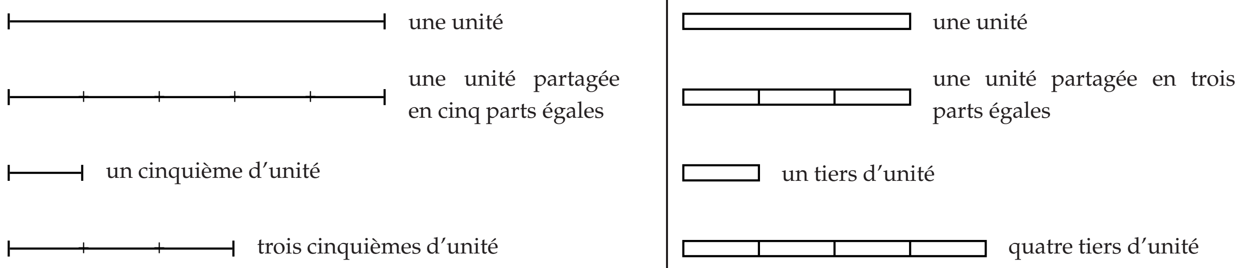


Pour les fractions simples mais plus compliquées à construire, comme $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$, on peut avoir recours à un réseau de droites parallèles équidistantes aussi appelé « guide-âne ».



À partir du partage de l'unité, on peut passer aux fractions simples dont le numérateur n'est pas 1 :

Unité de longueur = segment | *Unité de longueur = bande*

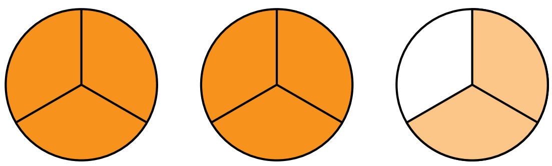


Fraction représentée : $\frac{3}{5}$

Fraction représentée : $\frac{4}{3}$

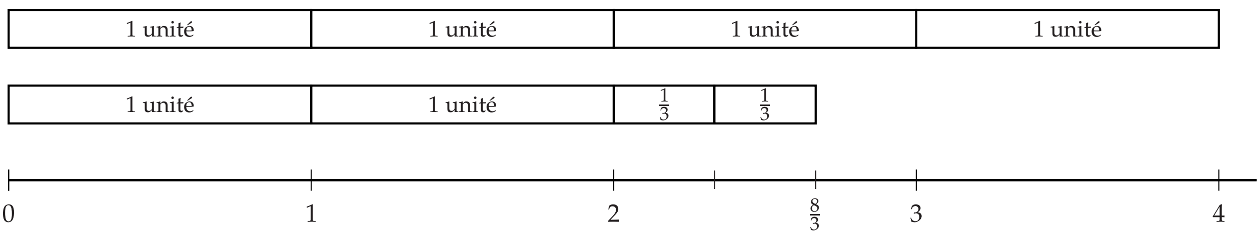
Le passage du mot à son écriture fractionnaire est une rupture. Jusque-là, pour un élève, un nombre s'écrit avec des chiffres en utilisant le système de numération positionnelle, de gauche à droite. L'écriture d'un nombre sous forme d'une fraction est une nouvelle convention d'écriture dans laquelle les nombres de part et d'autre du trait de fraction ont une signification qu'il convient d'expliciter. Le « nombre du dessous », appelé dénominateur (celui qui nomme), détermine le nombre de parts en lequel on partage l'unité. C'est celui qui permet de définir la nouvelle unité de comptage. Le « nombre du dessus », appelé numérateur (celui qui compte), détermine le nombre d'unités de comptage que l'on considère.

Les fractions supérieures à 1 doivent très vite être abordées, car les élèves ont l'habitude d'utiliser les fractions comme des « morceaux de », et des fractions telles que $\frac{8}{3}$ par exemple n'ont pas toujours du sens pour les élèves. Pour expliciter la compréhension d'une telle fraction, on peut écrire la fraction sous forme de somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1. Cette écriture permet d'obtenir un ordre de grandeur du nombre représenté par cette fraction et d'encadrer facilement la fraction par deux nombres entiers consécutifs.



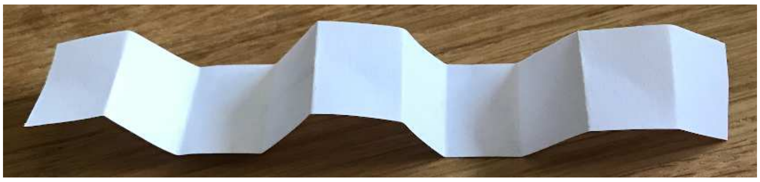
$\frac{8}{3} = 2 + \frac{2}{3}$ donc, $\frac{8}{3}$ est compris entre 2 et 3.

Les nombres, exprimés sous forme de fractions simples, permettent aussi de repérer un point sur une demi-droite graduée. Pour cela, on partage l'unité en parts égales correspondant au dénominateur de la fraction, on reporte ensuite la fraction autant de fois que nécessaire. L'écriture d'une fraction comme somme d'un entier et d'une fraction comprise entre 0 et 1 est particulièrement utile pour placer une fraction sur une droite graduée et donne du sens au travail mené pour passer d'une écriture à l'autre.

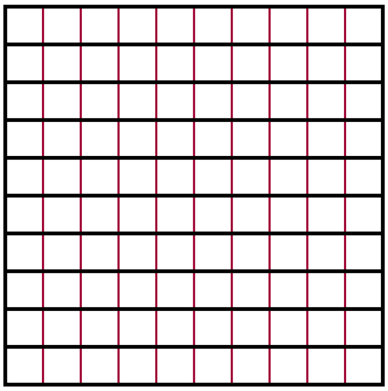


C. Les fractions décimales

Le travail sur les fractions simples conduit à rencontrer des fractions ayant un dénominateur égal à 10. Il prépare l'introduction des fractions décimales, définies comme des fractions particulières correspondant à un partage de l'unité en 10, 100 ou 1 000 à l'école. Il faut prendre l'habitude de lire les fractions de la manière suivante afin d'anticiper le travail sur les nombres décimaux : $\frac{1}{10}$ se lit « un dixième », $\frac{1}{100}$ « un centième », $\frac{1}{1\,000}$ « un millième ».
Par continuité avec les pliages en 2, 3, 4... on fait au moins une fois avec les élèves le pliage en 10 même si ce n'est pas simple.



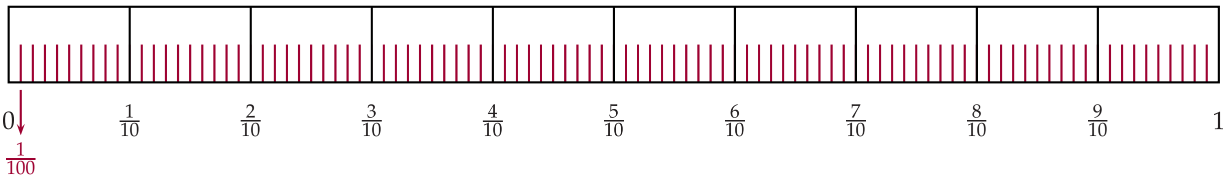
L'intérêt est de montrer l'aspect récursif de la méthode : après avoir partagé en 10, on peut encore partager chaque dixième en 10...
Le fait que 10 dixièmes soit égal à une unité, que 10 centièmes soit égal à 1 dixième et que 100 centièmes soit égal à 1 unité doit être explicité par l'utilisation de matériel permettant la manipulation et la visualisation de ces partages.
Un grand carré unité divisé en 100 petits carrés permet un type de modélisation.



On a les représentations suivantes :

- il y a 100 petites carrés dans le grand carré donc, un petit carré représente 1 centième de l'unité, soit $\frac{1}{100}$.
- il y a 10 lignes dans le grand carré donc, une ligne représente 1 dixième de l'unité, soit $\frac{1}{10}$.
- il y a 10 petites carrés dans une ligne donc, 10 centièmes valent 1 dixième.

La bande unité, quant à elle, permet de représenter les valeurs des fractions décimales de manière plus linéaire.



Le travail sur les relations entre les différentes unités de numération permet de faire le lien entre différentes écritures d'un même nombre décimal dont deux seront particulièrement mises en avant :

- $\frac{753}{100} = 7 + \frac{53}{100}$. Cette écriture correspond à la décomposition du nombre décimal en la somme de sa partie entière et de sa partie décimale. Elle est utile pour les calculs, les comparaisons et le repérage sur une droite graduée.
- $\frac{753}{100} = 7 + \frac{5}{10} + \frac{3}{100}$ est la somme d'un entier et de fractions décimales de dénominateurs différents. Cette écriture prépare l'introduction de l'écriture à virgule des nombres décimaux.

3. Les nombres décimaux

A. La construction des décimaux

Au cycle 3, les nombres décimaux sont introduits à partir des fractions décimales. L'écriture à virgule est présentée comme une convention d'écriture d'une fraction décimale ou d'une somme de fractions décimales (codage). Cette notation permet la mise en place des règles de comparaison et de calcul.

Par exemple, le nombre $\frac{16\,802}{1\,000} = 16 + \frac{8}{10} + \frac{0}{100} + \frac{2}{1\,000} = 16 + \frac{802}{1\,000}$ peut s'écrire

$$\frac{16\,802}{1\,000} = 1\times 10 + 6\times 1 + 8\times\frac{1}{10} + 0\times\frac{1}{100} + 2\times\frac{1}{1000}$$

$$= 1 \quad 6 \;,\; 8 \quad 0 \quad 2$$

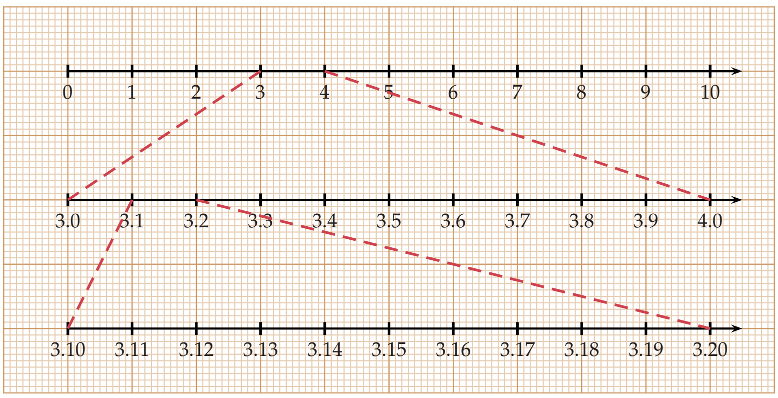
chiffre des dizaines — chiffre des unités — chiffre des dixièmes — chiffre des centièmes — chiffre des millièmes

Pour la partie fractionnaire, on utilise le vocabulaire « dixième », « centième », « millième » en articulant correctement afin de ne pas confondre avec « dizaine », « centaine », « millier ». Dans un premier temps, il faudra faire attention à bien « dire » les nombres décimaux : on ne dit pas « seize virgule huit-cent-deux » mais « seize et huit-cent-deux millièmes » ou « seize, huit dixièmes et deux millièmes ».
On peut profiter de l'occasion pour faire le parallèle avec le tableau de numération, que l'on prolonge vers la droite.

		partie entière		,		partie décimale		
...	milliers	centaines	dizaines	unités	dixièmes	centièmes	millièmes	...
			1	6	8	0	2	

La comparaison de deux nombres décimaux se fait alors ordre par ordre : 2,5 est plus grand que 2,46 car ils ont la même partie entière, mais 2,5 comporte 5 dixièmes alors que 2,46 n'en comporte que 4... cela suffit pour conclure ! On évitera d'employer la « recette de cuisine » consistant à ajouter des « 0 » à l'un des nombres jusqu'à obtenir le même nombres de chiffres après la virgule puis comparer leur partie décimale : en effet, c'est procédure renforcerait l'idée que l'on pourrait comparer les parties décimales comme s'il s'agissait de nombres entiers.

L'utilisation régulière de la demi-droite graduée, avec d'éventuels zooms successifs, permet de travailler l'intercalation entre deux décimaux et de déterminer la position d'un nombre sur la demi-droite graduée avec de plus en plus de précision. Cela contribuera également à aider les élèves à ne pas voir un nombre décimal comme deux entiers séparés par une virgule, mais bien comme un nombre à part entière.



B. Les erreurs liées aux nombres décimaux

L'enseignant.e doit faire attention à ne pas nommer un nombre décimal comme s'il s'agissait d'un couple de nombres entiers : c'est en effet l'erreur la plus fréquente chez l'élève. De plus, les propriétés de la structure de l'ensemble des nombres entiers utilisée jusque là ne se généralisent pas au niveau des nombres décimaux.

Nombres entiers	Nombres décimaux
Tout nombre entier a un prédécesseur (sauf 0) et un successeur. • *Le prédécesseur de 4 est 3, son successeur est 5.*	Le prédécesseur ou le successeur d'un nombre décimal n'a aucun sens. • *Quel serait le successeur de 4 ? de 5,7 ?*
Entre deux nombres entiers consécutifs, il n'y a pas de nombre entier. • *Entre 12 et 13, il y a aucun entier*	Entre deux nombres décimaux consécutifs, il n'y a une infinité de nombre décimaux. • *Entre 13 et 14, on a par exemple 13, 5 ou 13,68...*
Entre deux nombres entiers, il y a un nombre fini de nombres entiers. • *Entre 5 et 8, il n'y a 6 et 7 uniquement.*	Entre deux nombres décimaux, il y a une infinité de nombres décimaux. • *Entre 5 et 8, on a par exemple 5,6 ou 7 ou 7,999...*
Plus un nombre entier a de chiffres, plus il est grand. • 1 234 est plus grand que 123.	Le nombre de chiffres d'un nombre décimal n'a aucune incidence sur sa grandeur. • 1,235 est plus petit que 12,4.
Un nombre entier était jusque là représenté sur une frise numérique.	On représente dorénavant les nombres décimaux (y compris les entiers) sur une droite graduée.

Autres conceptions erronées des élèves :

Erreurs et difficultés	Exemples
Assimilation de la virgule à un trait de fraction	$\frac{3}{5} = 3,5$.
Difficulté à concevoir qu'un même nombre puisse avoir plusieurs désignations.	• $1 + \frac{4}{10} = 1,4 = 1,40$ *sont perçus comme des nombres différents.*
Nombre à virgule vu comme deux entiers séparés par une virgule.	• $4,3 < 4,26 < 4,249$ *car* $3 < 26 < 249$. • *2,47 est le successeur de 2,46.* • $2,3 + 7,12 = 9,15$ *puisque* $2 + 7 = 9$ *et* $3 + 12 = 15$.
Connaissance mal installée du système décimal.	• *Dans 12,345 le chiffre centièmes est 3 puisque 3 est le chiffre des centaines dans 345.* • *Dans* 234, 678 *le chiffre des dixièmes est 7 en raison de la position supposée des dixièmes comme symétrique de celle des dizaines.* • $4,249 < 4,16 < 4,1$ *puisque les millièmes sont forcément plus petits que les centièmes, eux-mêmes plus petits que les dixièmes.*
Application de règles au-delà de leur domaine de validité.	• $1,4 \times 10 = 1,40$ *ou 10,4 puisqu'on ajoute un « 0 » à la fin de l'écriture du nombre.*
Usage social des nombres décimaux à l'oral à l'origine de confusions.	• *Un kilo cinq s'écrit 1,5 kg alors que un euro cinq s'écrit 1,05 euros.*

Vu au CRPE en 2022

Sujet n°6 de l'épreuve de leçon, concours CRPE 2022, académie de Montpellier.

Consigne candidat : À partir du sujet et du dossier proposés par le jury, vous concevrez la mise en œuvre d'une séance d'enseignement à l'école primaire dans chacune des deux disciplines français et mathématiques. Vous présenterez successivement les composantes pédagogiques et didactiques de chaque séance et son déroulement.

Sujet : Introduction de la notion de fraction.

Contexte de la séance d'enseignement :

- cycle d'enseignement : cycle 3;
- niveau de la classe : CM1;
- positionnement de la séance de mathématiques :
  - période : période 1 ou 2;
  - séquence dans laquelle elle s'insère : utiliser et représenter des fractions simples.

Documents fournis au candidat :

Document 1 : Document Éduscol d'après le BOEN n°31 du 20 juillet 2020, *Programme du cycle 3 en vigueur à la rentrée 2020*, extrait de la page 93.

Attendus de fin de cycle

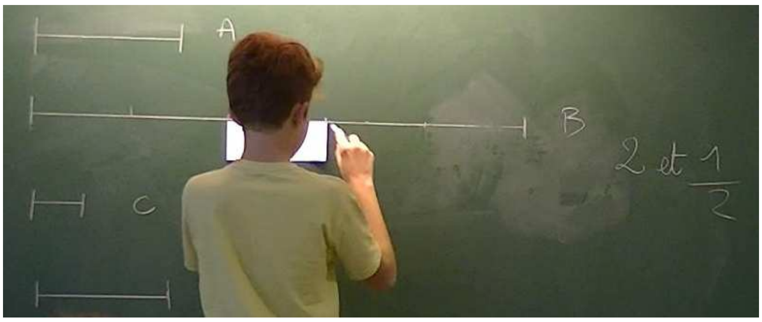
– Utiliser et représenter les grands nombres entiers, des fractions simples, les nombres décimaux.

– Calculer avec des nombres entiers et des nombres décimaux.

– Résoudre des problèmes en utilisant des fractions simples, les nombres décimaux et le calcul.

Utiliser et représenter les grands nombres entiers, des fractions simples, les nombres décimaux
Connaître diverses désignations des fractions : orales, écrites et décompositions additives et multiplicatives (ex : quatre tiers ; 4/3 ; 1/3 + 1/3 + 1/3 + 1/3 ; 1 + 1/3 ; 4 × 1/3). Connaître et utiliser quelques fractions simples comme opérateur de partage en faisant le lien entre les formulations en langage courant et leur écriture mathématique (ex : faire le lien entre « la moitié de » et multiplier par 1/2). Utiliser des fractions pour rendre compte de partages de grandeurs ou de mesures de grandeurs. Repérer et placer des fractions sur une demi-droite graduée adaptée. Encadrer une fraction par deux nombres entiers consécutifs. Comparer deux fractions de même dénominateur. Écrire une fraction sous forme de somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1. Connaître des égalités entre des fractions usuelles (ex : 5/10 = 1/2 ; 10/100 = 1/10 ; 2/4 = 1/2). Utiliser des fractions pour exprimer un quotient.

Document 2 : Image tirée de « Séquence sur les fractions et les décimaux », séquence tirée de ERMEL, retravaillée par le groupe 1[er] degré de l'IREM de Montpellier au cours de l'année scolaire 201612017, et prise dans une classe de CM1-CM2 de l'école J. Rostand de Clermont l'Hérault.



Document 3 : R. Charnay, B. Anselmo, G. Combiet, M.P. Dussuc, D. Madier, M. Front, A. Ravoux, « Fractions simples », *Nouveaux CAP MA THS CM1*, Paris, Éditions Hatier, 2020, page 30.

UNITÉ 2

Fractions simples

apprentissage 3

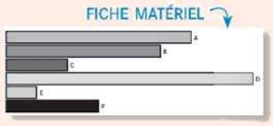
Je cherche — Des bandes à mesurer

La longueur de la bande blanche est égale à 1 u.

1 u

A Sur ta fiche, choisis deux bandes : une bande parmi A, B, C et une autre parmi D, E, F.
Mesure-les avec l'unité qui t'a été remise.
Écris, sur une feuille, le nom de chaque bande et la mesure que tu as obtenue.
Tes mesures doivent permettre aux autres élèves de ta classe de retrouver les deux bandes que tu as choisies.

FICHE MATÉRIEL

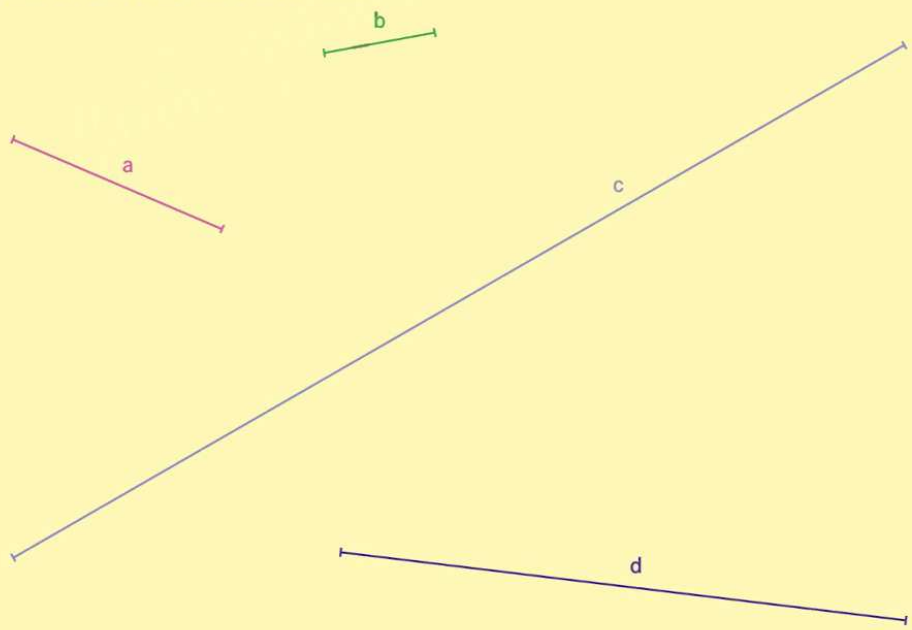


Je m'entraine

EXPRIMER DES LONGUEURS À L'AIDE DE FRACTIONS — DICO 9

INCONTOURNABLE

1 Mesure les segments a, b, c et d avec l'unité u de la recherche.
Écris les résultats avec des fractions.



Document 4 : Hélène Zucchetta et Bernard Anselmo, *Construire les nouveaux nombres au cycle 3. Fractions et décimaux*, Canopé éditions, Mars 2018, extrait de la page 145.

SITUATION 1 - ANNEXE 4 - ÉLÈVE — CANOPÉ / IREM DE LYON

Coller ici une unité entière non pliée

Des nouveaux nombres pour mesurer

Les nombres entiers ne suffisent pas toujours pour ....

Il est parfois nécessaire de partager ....

On utilise alors des ....

1. Partage de l'unité

a) En 2 parties égales. Les parties obtenues s'appellent ....
....
....
....
....

b) En 4 parties égales. Les parties obtenues s'appellent ....
....
....
....
....

c) En 8 parties égales. Les parties obtenues s'appellent ....
....
....
....
....

2. Explication des écritures

$\frac{1}{2}u$, c'est l'unité partagée en .... parties égales et je prends .... de ces parties.

$\frac{3}{4}u$, c'est l'unité partagée en .... parties égales et je prends .... de ces parties.

$\frac{3}{8}u$, c'est l'unité partagée en .... parties égales et je prends .... de ces parties.

$\frac{8}{8}u$, c'est 8 fois .... d'unité.

Dans l'écriture $\frac{3}{8}u$, 8 est le .... et 3 est le ....

Tracer ici un segment mesurant $\frac{3}{4}$ d'unités puis donner d'autres écritures de $\frac{3}{4}$ d'unités

Tracer ici un segment mesurant $\frac{8}{8}$ d'unités puis donner d'autres écritures de $\frac{8}{8}$ d'unités

Analyse de documents

1 **CRPE 2014 G1**

A. En classe de CM1, un enseignant propose en application de la leçon sur les nombres décimaux les deux exercices suivants :

> **Exercice 1**
> Calcule les sommes suivantes : $0,3+0,8$ $1,3+0,12$

> **Exercice 2**
> Range dans l'ordre croissant les nombres décimaux suivants :
> $5,100$ $5,6$ $5,03$

1) Voici les réponses d'un élève à l'exercice 1 :

> $0,3+0,8=0,11$
> $1,3+0,12=1,15$

À partir de ces réponses, indiquer ce que cet élève semble maîtriser et ce qu'il lui reste à travailler.

2) Voici la réponse d'un élève à l'exercice 2 :

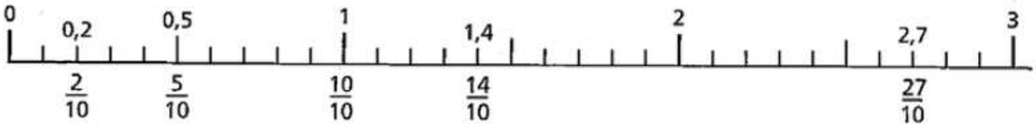
> $5,03<5,6<5,100$

a) Quelle représentation erronée des nombres décimaux pourrait être à l'origine de l'erreur de cet élève ? Justifier.

b) Quelle désignation orale des nombres 5,03 ; 5,6 et 5,100 l'enseignant pourrait-il utiliser pour aider les élèves à se construire une bonne représentation des nombres décimaux ?

B. En classe de CM2, un autre enseignant propose l'exercice de réinvestissement suivant :

> **B** Tu as appris au CM1 que la **fraction décimale** $\frac{2}{10}$ est égale au **nombre décimal** 0,2.
> Observe cette droite graduée ; elle te permet de trouver les égalités entre fractions décimales et nombres décimaux.



> **a.** Complète les égalités : $\frac{5}{10}=0,\ldots$; $\frac{8}{10}=\ldots$; $\frac{1}{10}=\ldots$
> $0,3=\frac{\ldots}{10}$; $0,7=\frac{\ldots}{\ldots}$; $0,9=\frac{\ldots}{\ldots}$

Extrait du manuel « Pour comprendre les mathématiques CM2 », Hachette 2005.

1) Quelle définition d'un nombre décimal peut-on donner à l'école élémentaire ?

2) Un élève affirme que la somme de deux nombres décimaux ne pourra jamais être un nombre entier. Comment l'enseignant peut-il utiliser le support de l'exercice **B** pour lui apporter une réponse justifiée ?

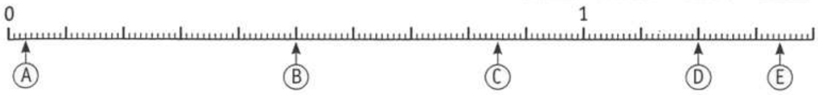
3) Un autre élève se demande si la somme de deux nombres décimaux est toujours un nombre décimal. Quelle réponse argumentée l'enseignant peut-il lui apporter ?

4) Pour prolonger l'activité, l'enseignant demande aux élèves de placer le nombre 1,07 sur la droite graduée de l'exercice ci-dessus.
Citer deux intérêts qu'il pourrait y avoir à prolonger ainsi l'activité.

2 CRPE 2015 G1

SITUATION 1 : Extrait du manuel « Outils pour les maths » CM1 Magnard (édition 2011)

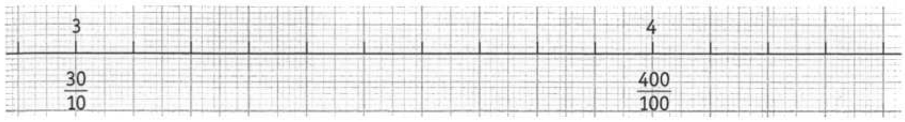
2 * **a.** Associe ces fractions aux lettres sur la droite : $\frac{50}{100}$ $\frac{3}{100}$ $\frac{120}{100}$ $\frac{134}{100}$ $\frac{85}{100}$



b. Écris chaque fraction sous la forme d'un nombre décimal.

3 ** **Reproduis cette droite sur du papier millimétré et place :**

$\frac{300}{100}$ $\frac{40}{10}$ 3,6 3,75 $\frac{29}{10}$ 3,96 4,3 $\frac{326}{100}$



1) Un élève a bien réussi la question ❷ mais a fait des erreurs à la question ❸. En comparant la présentation et les tâches demandées dans ces deux questions, donner trois raisons pouvant expliquer cette différence de réussite.

2) Quelle définition d'un nombre décimal peut-on proposer à l'école élémentaire ?

SITUATION 2 : Extrait du manuel « Tribu des maths » CM2 Magnard (édition 2010)

Fatou dit qu'elle a réussi à tracer un segment dont la mesure en décimètres est comprise entre $2 + \frac{5}{10} + \frac{2}{100}$ et $2 + \frac{6}{10} + \frac{1}{100}$.

Max lui dit que ce n'est pas possible, car $\frac{1}{100}$ est plus petit que $\frac{2}{100}$.

Qui a tort ? Expliquez pourquoi.

Trois copies d'élèves sont proposées :

Léonie

$2 + \underbrace{\frac{5}{10}}_{=0,5} + \underbrace{\frac{2}{100}}_{=0,02} = 2,52$ et $2 + \underbrace{\frac{6}{10}}_{=0,6} + \underbrace{\frac{1}{100}}_{=0,01} = 2,61$

Fatou dit que le segment qu'il a fait est entre 2,52 et 2,61.
C'est Max qui a tort car $\frac{1}{100} = 0,01$ et $\frac{2}{100} = 0,02$ mais
le chiffre d'avant pour $\frac{2}{100}$ est 2,52 est pour $\frac{1}{100}$ c'est 2,61
c'est le chiffre des dixièmes qui a permis a Fatou. Alors que Max a comparer au chiffres des centièmes

Lara

$2 + \frac{5}{10} + \frac{2}{100} = \frac{252}{1000} = 0,252 = 252$

$2 + \frac{6}{10} + \frac{1}{100} = \frac{261}{1000} = 0,261 = 261$

Max a tort car 252 est plus petit que 261
Fatou a raison

Clément

$2 + \frac{5}{10} + \frac{2}{100} = 2,52$ $2 + \frac{6}{10} + \frac{1}{100} = 2,61$

2,52 − 2,61 = IMPOSSIBLE

Etou a tort parce que nous ne pouvons pas le calcul

Analyse de documents

1) Quelles sont les erreurs faites par Lara ? Indiquer pour chacune une origine possible.
2) Citer une compétence qui semble acquise dans le domaine de la numération pour Clément.
3) Léonie s'appuie sur les écritures décimales des nombres $2 + \frac{5}{10} + \frac{2}{100}$ et $2 + \frac{6}{10} + \frac{1}{100}$ pour comparer ces nombres. Énoncer la règle de comparaison qu'elle utilise implicitement.

3 CRPE 2015 G3

L'exercice suivant a été donné à des élèves de l'école primaire :

On découpe un ruban mesurant 137,6 cm en 8 morceaux de même longueur. Combien mesure chacun des morceaux ?

1) Quel sens de la division illustre-t-il ?
2) Proposer une procédure pour résoudre ce problème, permettant de se ramener à une opération sur les nombres entiers.
3) Proposer une procédure de calcul qui peut être attendue d'un élève de CM2 pour effectuer la division $137,6 \div 8$, sans se ramener à une opération sur les entiers.
4) Le quotient d'un nombre décimal par 8 est-il toujours un nombre décimal ? justifier.

4 CRPE 2017 G2

Les problèmes suivants, issus du manuel EuroMaths CM2 (éditions Hatier, 2009), ont été donnés en fin d'année à des élèves d'une classe de CM2. La calculatrice n'était pas autorisée.

> 1) Un croissant coûte 1,25 €. Quel est le prix de 10 croissants ?
> 2) Pour 10 baguettes, Pierre paie 8,50 €. Quel est le prix d'une baguette ?
> 3) Un paquet de 100 enveloppes illustrées coûte 13 €. Quel est le prix d'une enveloppe ?
> 4) Éric fait la collection de fourmis en plastique. Il en a plus de 100. Chacune de ses fourmis mesure 0,7 cm. Quelle est la mesure de la ligne formée par 100 fourmis à la queue leu leu ?

1) Citer deux compétences travaillées dans ces exercices.
2) Voici les productions de deux élèves en réponse au problème 4.

Théo :

Réponse : CePa mesorer 0,700 cm

Explications :
100 x 0,7cm = 0,700

Eugénie :

Réponse : la longeur est 70 cm

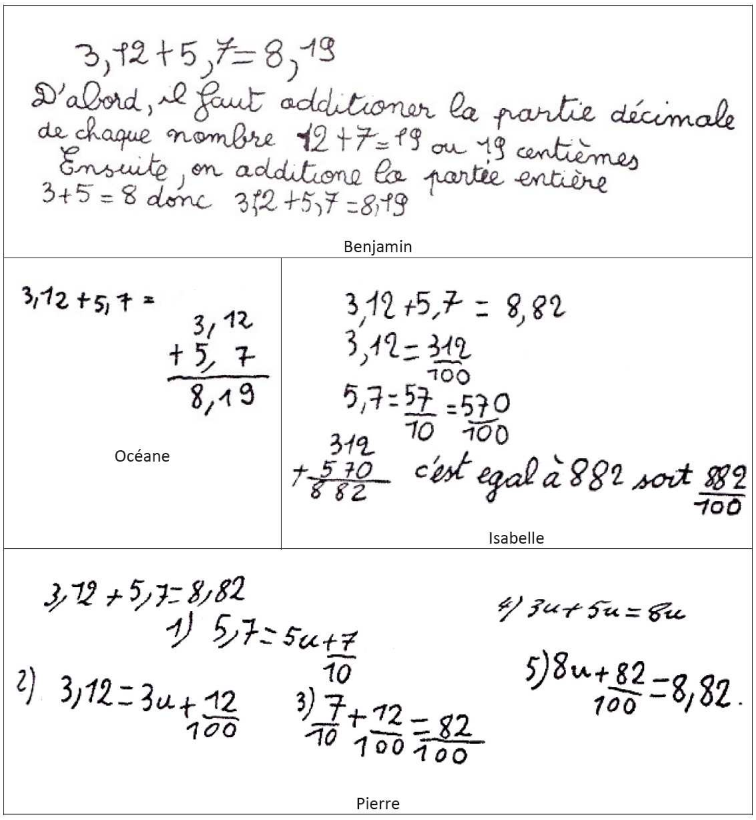
Explications : 0,7 x 100 = 70 tous les chilffrels vant a deusc rong a la gauche

a) Analyser l'erreur de Théo en émettant une hypothèse sur son origine.
b) Formuler précisément la procédure utilisée par Eugénie et en donner une justification mathématique.

5 **CRPE 2018 G1**

Des élèves d'une classe de cycle 3 doivent calculer $3,12+5,7$ et expliquer comment ils procèdent.

Voici des exemples de productions d'élèves :



3,12 + 5,7 = 8,19
D'abord, il faut additioner la partie décimale de chaque nombre 12 + 7 = 19 ou 19 centièmes
Ensuite, on additione la partée entière
3 + 5 = 8 donc 3,12 + 5,7 = 8,19

Benjamin

3,12 + 5,7 =

$$\begin{array}{r} 3,12 \\ +\ 5,7 \\ \hline 8,19 \end{array}$$

Océane

$3,12+5,7=8,82$

$3,12=\frac{312}{100}$

$5,7=\frac{57}{10}=\frac{570}{100}$

$$\begin{array}{r} 312 \\ +\ 570 \\ \hline 882 \end{array}$$ c'est egal à 882 soit $\frac{882}{100}$

Isabelle

$3,12+5,7=8,82$

1) $5,7=5u+\frac{7}{10}$

2) $3,12=3u+\frac{12}{100}$

3) $\frac{7}{10}+\frac{12}{100}=\frac{82}{100}$

4) $3u+5u=8u$

5) $8u+\frac{82}{100}=8,82.$

Pierre

1) À partir de l'analyse des différentes productions, expliquer quelles sont les différentes démarches proposées.

2) Quelle représentation erronée des nombres décimaux pourrait être à l'origine des erreurs des élèves ?

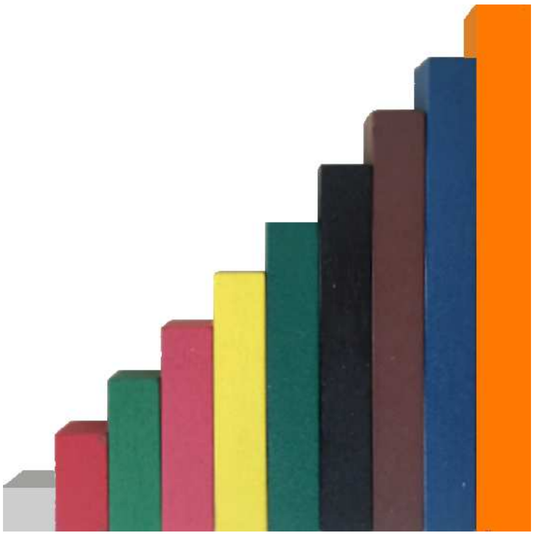
3) Proposer trois tâches ou activités que pourrait mettre en place l'enseignant pour remédier à ce type d'erreurs ?

Activités à faire en classe

*Ces exemples d'activités sont inspirées des documents d'accompagnement « Fractions et décimaux au cycle 3 » proposés sur le site édu***scol** [edu3].

1 C3 - Découverte des fractions simples avec des réglettes Cuisenaire

On utilise ici des réglettes Cuisenaire, ou des bandes de papier plastifiées.
Ce matériel a été inventé par un pédagogue belge *Georges Cuisenaire* en 1945 sous la forme de réglettes en bois. Il permet, en définissant une unité parmi les réglettes, de travailler et d'entretenir la notion de fraction simple (entre autre).
Différentes activités peuvent être menées avec les élèves. Site Internet (avec vidéos et tutoriels) :
http://www.cuisenaire.eu



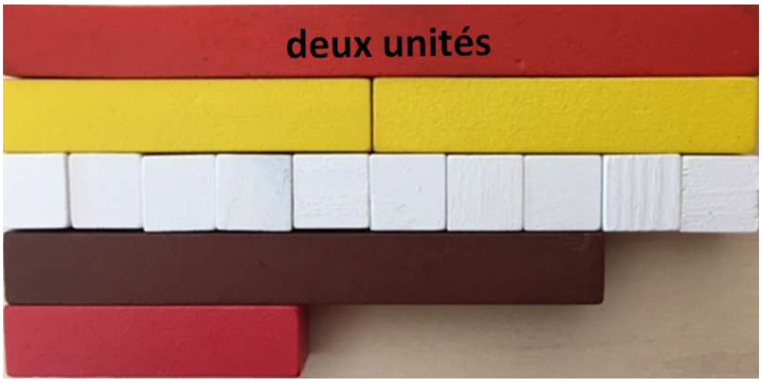
Activité 1 : l'unité est la plus grande des réglettes.
L'unité est définie comme étant la longueur de la réglette orange. On demande aux élèves de trouver la longueur des réglettes jaunes, rouges et blanches en fonction de cette unité.
Par exemple, pour trouver la longueur de la réglette rouge, l'élève regarde combien de ces réglettes sont nécessaires pour reconstituer l'unité : il faut 5 réglettes rouges pour obtenir une unité ; l'unité est donc partagée en cinq parts égales, et une réglette rouge représente une de ces parts. Chaque réglette rouge vaut donc un cinquième de l'unité.

- Jaune : $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ ou $2 \times \frac{1}{2} = 1$
- Rouge : $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = 1$ ou $5 \times \frac{1}{5} = 1$
- Blanche : $\frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = 1$ ou $10 \times \frac{1}{10} = 1$

Activité 2 : utilisation d'une unité différente.
Faire varier l'unité de référence permet de montrer que l'unité n'est pas attachée à un objet singulier.
L'unité est définie maintenant comme étant la longueur de la réglette bleue, il s'agit de trouver la longueur des réglettes vertes et blanche.

- Verte : $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$ ou $3 \times \frac{1}{3} = 1$
- Blanche : $\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = 1$ ou $9 \times \frac{1}{9} = 1$

Activité 3 : fractions supérieures à 1.
La réglette orange vaut maintenant deux unités, il s'agit de trouver la longueur des réglettes jaunes, blanches, marron et roses.



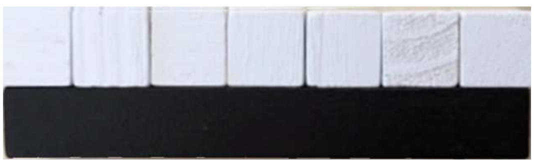
Laisser les élèves produire des phrases et écritures différentes en leur imposant de se rapporter à l'unité. Par exemple :

- La réglette jaune vaut une unité.
- Chaque réglette blanche correspond au cinquième de l'unité.
- La réglette marron vaut une unité plus trois cinquièmes de l'unité, ou encore huit cinquièmes de l'unité ou deux unités moins deux cinquièmes de l'unité.
- La réglette rose vaut quatre cinquièmes ou la moitié de huit cinquièmes ou une unité moins un cinquième.

La compétence « représenter » est développée ici au travers de la production de diverses écritures de fractions simples.

Activité 4 : travail inverse.
On travail la compétence inverse : à partir de la fraction, il s'agit de retrouver l'unité.

La réglette blanche vaut un septième de l'unité, quelle est l'unité ?



Pour obtenir un septième, on a dû partager l'unité en sept parts égales. Pour retrouver l'unité, il faut donc prendre 7 fois un septième.
$\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}=1$

La réglette verte vaut $\frac{3}{4}$ de l'unité, quelle est l'unité ?

Pour obtenir $\frac{3}{4}$ de l'unité, on a partagé l'unité en 4 parts égales et on a pris 3 de ces parts. La réglette verte représente ces 3 parts. Je cherche la réglette qui peut représenter l'une de ces 3 parts : il s'agit de la réglette rouge (car trois réglettes rouges valent une réglette verte). La réglette unité est donc la réglette marron.

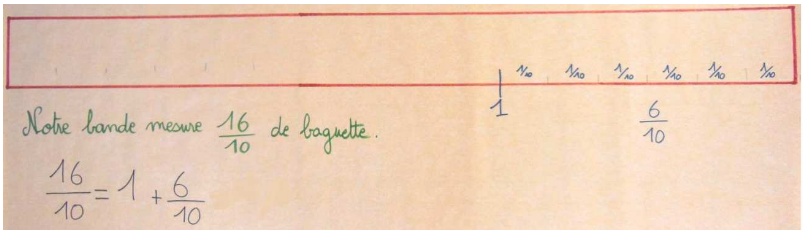
Activités à faire en classe

2 C3 - De la fraction simple à la fraction décimale

Activité 1 : la bande graduée.
Les élèves disposent de baguettes de bois identiques partagées en 10 parts égales, de bandes de papier de différentes longueurs, ainsi que d'une affiche pour y inscrire le résultat de leur recherche.
La règle graduée n'est pas autorisée. Les élèves travaillent par groupe. Une baguette et une bande sont distribuées à chaque groupe et la consigne est la suivante :

> L'unité choisie est la longueur de la règle en bois. Vous devez mesurer la longueur de la bande de papier à l'aide cette unité. Vous pouvez donner plusieurs réponses. Lorsque vous vous êtes mis d'accord, écrivez vos réponses sur l'affiche.

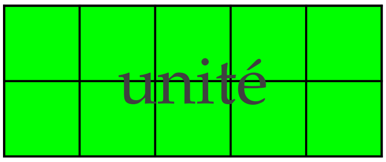
Après un temps de recherche suffisant pour que chaque groupe parvienne à donner au moins une réponse, une première mise en commun est menée avec la classe. Chaque groupe vient commenter au tableau son affiche et expliquer sa façon de procéder.
Ce peut être le moment pour la classe de se mettre d'accord sur la réponse attendue : par exemple, si groupe a répondu « la baguette mesure 13 graduations », on peut revenir avec la classe sur la consigne, repréciser l'unité avec laquelle on mesure, et chercher la valeur de l'une des « graduations ». Une fois cette synthèse intermédiaire menée, chaque groupe termine le travail. Une nouvelle synthèse collective est conduite afin de faire expliciter les procédures et les différentes écritures. Cette activité peut être reprise ultérieurement en donnant des baguettes de longueurs différentes dans chacun des groupes, cela permet de travailler la notion d'unité pour introduire plus tard l'écriture à virgule.



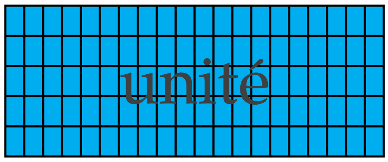
Situation 2 : construction de nombres.
Les élèves disposent en plusieurs exemplaires de cartes :
- d'unités ;
- d'unités partagées en 10 parts égales ;
- d'unités partagées en 100 parts égales.

unité

unité partagée en 10 parts égales



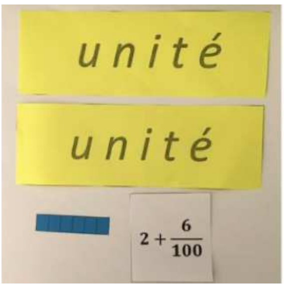
unité partagée en 100 parts égales

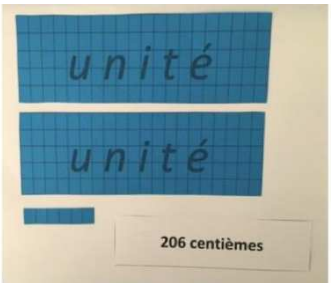


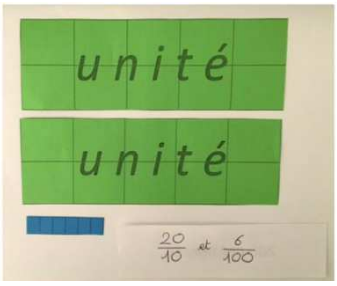
Ainsi que de cartes sur lesquelles figurent différents nombres écrits de différentes manières.

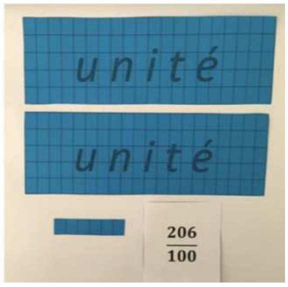
206 centièmes	2 unités et 6 centièmes	$2 + \frac{6}{100}$	$\frac{20}{10} + \frac{6}{100}$	$\frac{26}{100}$	26 dixièmes

Les élèves travaillent en groupe. Une seule carte-nombre est distribuée à chaque groupe au début. La tâche consiste en premier lieu à construire le nombre figurant sur la carte à l'aide des unités.
Lorsqu'un groupe a terminé, l'enseignant distribue une autre carte. Ce scénario permet une différenciation naturelle : l'objectif est le même pour toute la classe, mais certains groupes pourront construire plus de nombres que d'autres, chacun ayant le temps d'avancer à son rythme.
Les élèves collent le nombre construit et la carte-nombre sur une affiche tout en échangeant et en confrontant leurs idées. À l'issue de la recherche, les travaux sont mutualisés et commentés avec la classe et les différentes écritures d'un même nombre sont regroupées ensemble.



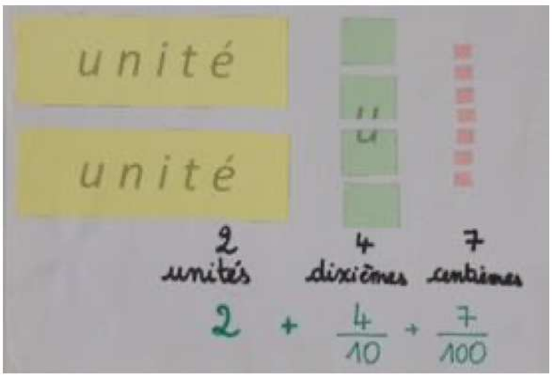


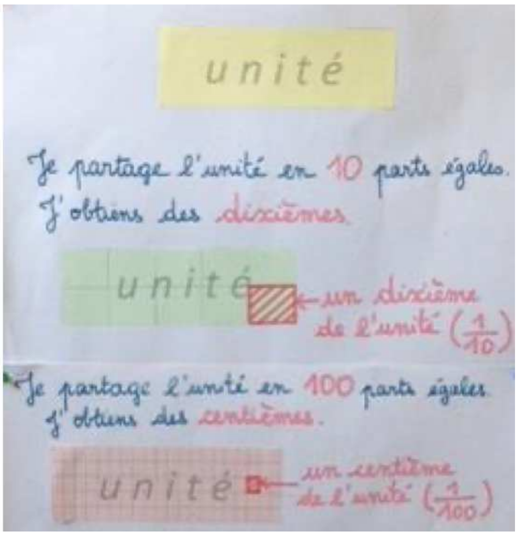




On pourra également afficher des nombres différents mais dont l'écriture est proche ($\frac{26}{100}$ et 26 dixièmes par exemple).
Une trace écrite est conservée sous la forme d'un affichage dans la classe et dans le cahier des élèves. Dans les cahiers, les élèves notent le par exemple le plus grand nombre d'écritures possibles de 2 unités et 6 centièmes

Exemples d'affiches dans la salle de classe :





Cette activité permet :
- de travailler les équivalences d'écritures ;
- elle donne du sens à des écritures différentes ;
- elle crée une image mentale des nombres et du rapport 10 entre les différentes unités ;
- elle facilite les comparaisons ;
- elle peut être complexifiée en ajoutant une unité partagées en millièmes en CM2.

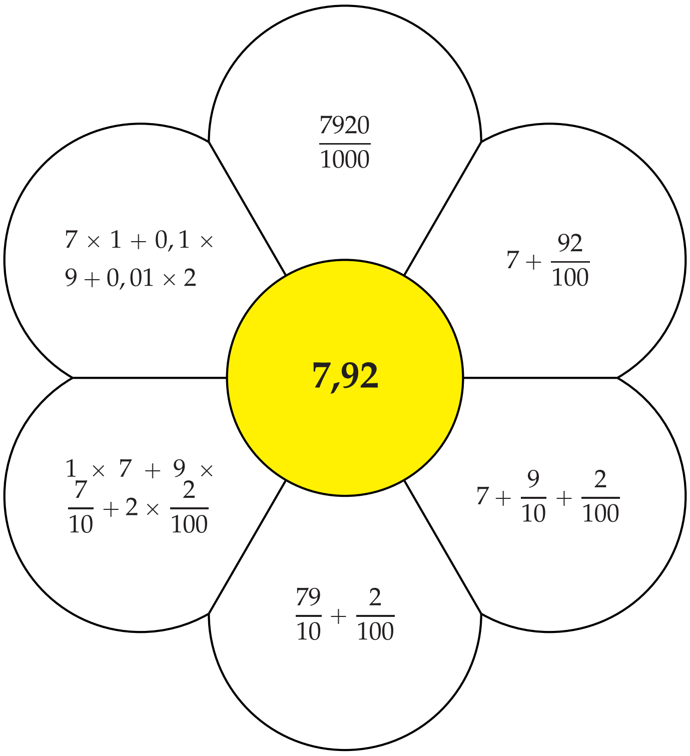
Activités à faire en classe

3 C3 - De l'écriture fractionnaire à l'écriture décimale

On peut reprendre à cette étape les affichages des activités précédentes et y ajouter l'écriture décimale, comme codage de l'écriture sous forme de fractions décimales.

On peut ensuite constituer des « fleurs des nombres » : l'enseignant.e choisit un nombre qui est écrit au centre de la fleur. Les élèves cherchent individuellement le plus de représentations possibles de ce nombre et une synthèse collective est ensuite effectuée.

Cette situation peut être proposée en fin de séquence, pour permettre des réinvestissements et pour développer des automatismes. Elle peut également être utilisée plus tôt lors des premiers travaux sur les différentes décompositions en sommes de fractions décimales. En guise de trace écrite, l'élève pourra compléter sa production personnelle avec d'autres écritures proposées par ses camarades.



GÉOMÉTRIE

5

Géométrie plane

Dans les programmes - cycle 1

Explorer des formes - Ce qui est attendu des enfants en fin d'école maternelle

- Classer des objets en focntion de caractéristiques liées à leur forme.
- Savoir nommer quelques formes planes (carré, triangle, cercle ou disque, rectangle) et ce dans toutes les orientations et configurations.
- Reproduire un assemblage à partir d'un modèle (puzzle, pavage, assemblage de solides).
- Reproduire, dessiner des formes planes.

Dans les programmes - cycle 2

Reconnaitre, nommer, décrire, reproduire quelques figures géométriques. Reconnaitre et utiliser les notions d'alignement, d'angle droit, d'égalité de longueurs, de milieu, de symétrie

- Décrire, reproduire sur papier quadrillé ou uni des figures ou des assemblages de figures planes.
- Utiliser la règle, le compas ou l'équerre comme instruments de tracé.
- Reconnaitre, nommer les figures usuelles : carré, rectangle, triangle, triangle rectangle, polygone, cercle, disque.
- Décrire à partir des côtés et des angles droits, un carré, un rectangle, un triangle rectangle. Les construire sur un support uni connaissant la longueur des côtés.
- Construire un cercle connaissant son centre et un point, ou son centre et son rayon.
- Utiliser la règle (non graduée) pour repérer et produire des alignements.
- Repérer et produire des angles droits à l'aide d'un gabarit, d'une équerre.
- Reporter une longueur sur une droite déjà tracée.
- Repérer ou trouver le milieu d'un segment.
- Reconnaitre si une figure présente un axe de symétrie.
- Reconnaître dans son environnement des situations modélisables par la symétrie.
- Compléter une figure pour qu'elle soit symétrique par rapport à un axe donné.

Dans les programmes - cycle 3

Reconnaitre, nommer, décrire, reproduire, représenter, construire quelques figures géométriques

- Reconnaître, nommer, décrire des figures simples ou complexes : triangles, quadrilatères, cercle, disque.
- Reproduire, représenter, construire des figures simples ou complexes.
- Réaliser, compléter, rédiger un programme de construction.
- Réaliser, compléter et rédiger un programme de construction d'une figure plane.
- Réaliser une figure plane simple ou une figure composée de figures simples à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

Reconnaître et utiliser quelques relations géométriques

- Tracer avec l'équerre la droite perpendiculaire à une droite donnée passant par un point donné.
- Tracer avec la règle et l'équerre la droite parallèle à une droite donnée passant par un point donné.
- Déterminer le plus court chemin entre un point et une droite.
- Compléter une figure par symétrie axiale.
- Construire le symétrique d'un point, d'un segment, d'une droite par rapport à un axe donné.
- Construire la figure symétrique d'une figure donnée par rapport à un axe donné.

Cours

1. L’évolution des concepts géométriques au cours des cycles

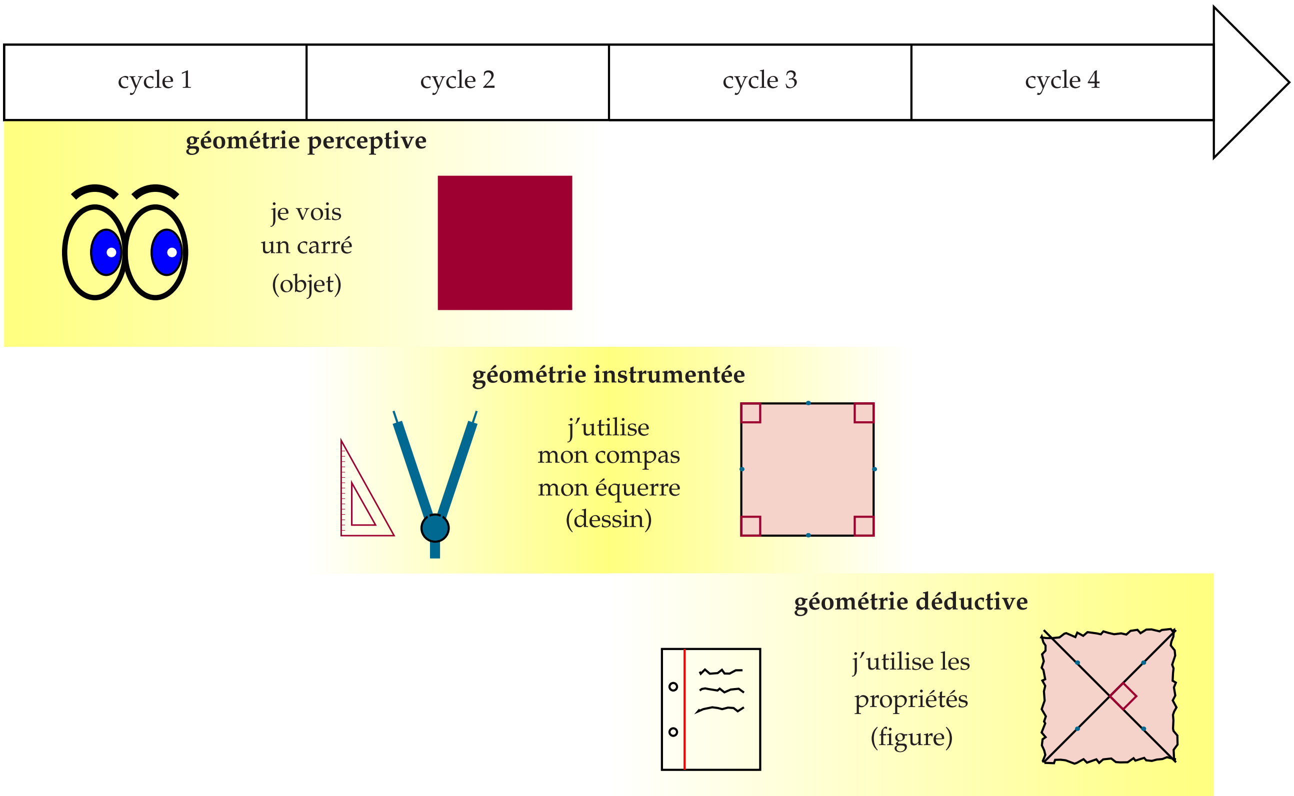
Au cycle 1, l’enfant travaille essentiellement dans la **géométrie perceptive** : il s’intéresse à ce qu’il voit sans utilisation de moyens argumentés de vérification. L’approche des formes planes se fait très souvent par la manipulation de solides. En effet, à ce stade, l’enfant ne distingue pas encore un solide de sa représentation plane, ou du moins il entre dans l’abstraction puisqu’il généralise un objet par ses propriétés visuelles.

Exemple

Correction

L’exemple typique de la boite à forme : dit-on : « met le parallélépipède rectangle, le prisme et le cylindre dans les trous ? ». Non, on se contente de parler du carré, du triangle et du rond, ou dans le meilleur des cas du disque !

Au cours du **cycle 2**, l’élève continue à travailler sur une géométrie de la perception, puis s’oriente progressivement en fin de cycle 2 et au **cycle 3** vers une **géométrie instrumentée** : la reconnaissance de la figure se fait à l’aide d’instruments. On passe d’un objet réel à un objet géométrique caractérisé grâce à des propriétés liées aux instruments. Au **cycle 4**, l’élève entre dans la **géométrie axiomatique**, ou **déductive** dans laquelle l’objet est défini par ses propriétés.



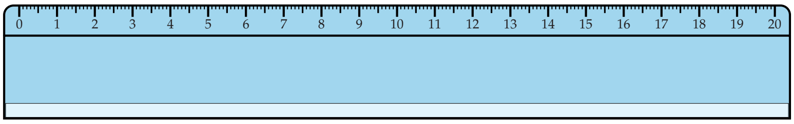
Ce schéma synthétique est un peu réducteur et il ne faut pas complètement cloisonner ces trois types de géométrie : en effet, la compétence « raisonner » travaillée dès le cycle 2 implique un panachage des géométries, pour tracer un rectangle de dimensions données sur une feuille blanche, un élève de CM1 a besoin de se représenter l’objet, d’utiliser ses instruments, de connaître les propriétés caractéristiques du rectangle et de raisonner.

2. Les outils de la géométrie

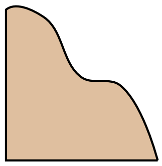
Un instrument est formé de trois composantes :
– un artéfact, c'est-à-dire un objet matériel qui a été conçu dans un but déterminé ;
– une technique d'utilisation ;
– une théorie sous-jacente à l'usage de cet instrument.

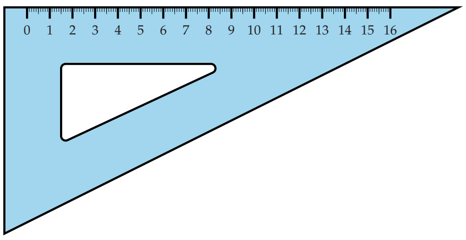
À l'école primaire, les élèves ont recours à différentes règles (graduées ou non, de diverses tailles), à des gabarits, à l'équerre, au compas. Ils commenceront à utiliser le rapporteur uniquement au collège.

• **La règle :** celle de l'élève est toujours graduée, ou pire (pour la géométrie), elle l'est des deux côtés. L'inconvénient principal de cette graduation visible est que l'élève aura tendance à vouloir mesurer, ce qui est une compétence des grandeurs et mesures mais pas de la géométrie (pure). Si on ne veut pas que la mesure soit utilisée, il suffit de mettre un scotch de couleur sur les graduations.



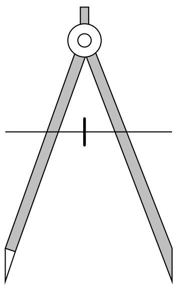
• **Le gabarit :** c' est un objet (papier, carton, métal) qui permet de vérifier la valeur d'un angle, ou de comparer deux angles, ou de construire un angle. Le plus classique est l'angle droit : n'importe quel coin d'une feuille rectangulaire est un gabarit d'angle droit. Son utilisation est indispensable avant l'introduction de l'équerre classique.





• **L'équerre :** c'est un gabarit d'angle droit, en général gradué mais comme pour le règle, les graduations sont inutiles pour la géométrie. L'équerre traditionnelle peut engendrer des représentations erronées relatives à l'angle droit (confusion avec le triangle, mauvaise utilisation en raison des trois angles présents sur une équerre).

• **Le compas :** permet de reporter des longueurs et de tracer des cercles (sans contrainte, à partir du centre et d'un point/de son rayon/de son diamètre). À l'origine, il s'agit d'un instrument qui est uniquement dédié aux reports de longueurs, notamment pour la navigation.



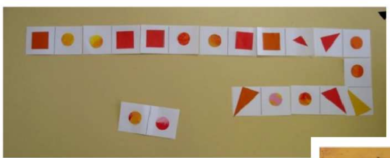
Le B.O. préconise de mobiliser des instruments variés lors des tracés : pochoirs, règles graduées et non graduées, bandes de papier avec un bord droit pour reporter des longueurs ou trouver un milieu, gabarits d'angle droit, équerres, compas. Certaines compétences de construction, comme tracer un segment d'une longueur donnée ou reporter la longueur d'un segment (CM1-CM2) sont menées conjointement avec les apprentissages du domaine « grandeurs et mesures ». Cependant, ce travail doit d'abord pouvoir se faire sans règle graduée.
Voici un tableau récapitulant les liens entre les instruments et leurs propriétés géométriques :

Instrument	propriété géométrique	objet géométrique
Règle non graduée	alignement; appartenance de points à une droite	droite
Règle graduée	distance entre deux points	segment
Gabarit	comparaison d'angles	angle
Equerre	perpendicularité; parallélisme (en tant que double parallèle); distance entre un point et une droite	angle droit
Compas	égalité de longueurs; report de longueurs	cercle

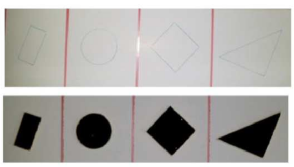
3. Explorer les formes à la maternelle

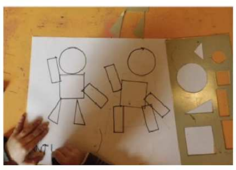
La connaissance des formes géométriques est une étape importante dans le développement de l'enfant. L'étude des formes en maternelle permet l'accès à la géométrie du cycle 2, participe à l'organisation de l'espace, à la perception du monde, joue un rôle dans l'apprentissage de l'écriture (tracés et identification des lettres).
De manière générale, la manipulation des objets peut être regroupée en trois types d'actions :

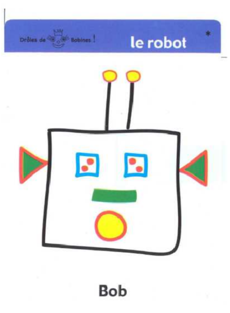
Catégoriser	Reproduire et assembler	Représenter
Consiste à considérer de manière équivalente de objets, des personnes ou des situations qui partagent des caractéristiques communes; à réduire la complexité du monde en mettant de l'ordre dans ses connaissances en les subdivisant en catégories.	Les élèves disposent d'un objet et ils doivent en réaliser une copie. Il est possible de reproduire, avec des matériaux divers, un objet plus ou moins usuel, ou bien procéder à des aménagements ou à des compléments de fabrication.	Représenter un objet ou une situation spatiale, c'est l'évoquer à l'aide de procédés graphiques conventionnels (dessin à main levée, codage...) pour permettre une restitution proche de l'objet initial.
PS +++ MS +++ GS ++	PS ++ MS +++ GS +++	MS ++ GS +++
• Différencier et classer des formes planes (lotos, dominos). • Nommer des formes planes (bonhomme, portrait robot) . • Reconnaître des formes planes (brochettes, kim).	• Reproduire un assemblage de formes planes (puzzles, tangrams). • Reproduire des formes planes (géoplan, brochettes).	• Dessiner un assemblage de formes (drôles de bobines). • Tracer des formes planes (pochoir, empruntes). • Représenter un assemblage de formes planes (géoplan, bonhomme triangle).

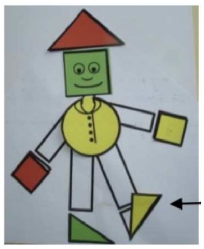


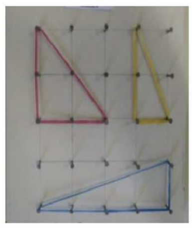
Quelques exemples











4. Progressivité des apprentissages à l'école élémentaire

– Au **CP** : la règle est utilisée comme outil de tracé de segments, et la règle graduée comme outil de mesure ou de report de longueur.

Les élèves reproduisent un carré, un rectangle, un triangle ou des assemblages de ces figures sur du papier quadrillé ou pointé, avec ou sans règle.

Il perçoivent des éléments symétriques dans leur environnement proche.

– Au **CE1** : l'usage de la règle graduée est consolidé, ils découvrent l'équerre pour tracer ou reconnaître des angles droits et utilisent le compas pour tracer des cercles.

Les élèves consolident la reproduction d'un carré, d'un rectangle et d'un triangle sur un support uni, connaissant la longueur des côtés, à l'aide d'un règle et d'une équerre. Ils construisent des cercles sans contraintes, avec une ficelle ou un compas.

Ils reconnaissent si une figure présente un axe de symétrie, visuellement et/ou en utilisant du papier calque, des découpages, des pliages.

– Au **CE2** : les élèves consolident l'utilisation de la règle graduée, de l'équerre et du compas. Ils abordent le report de longueur sur une droite déjà tracée, avec le compas.

Ils consolident la construction de figures géométriques et construisent des cercles à partir du centre et du rayon ou du diamètre.

Ils complètent une figure pour qu'elle soit symétrique par rapport à un axe donné.

– Au **CM1** : les élèves utilisent la règle graduée ou non ainsi que des bandes de papier pour reporter des longueurs. Ils utilisent l'équerre pour repérer ou construire un angle droit, et d'autres gabarits d'angle ainsi que du papier calque. Ils utilisent le compas pour tracer un cercle, connaissant son centre et un point du cercle ou son centre et la longueur d'un rayon, ou bien pour reporter une longueur.

Ils consolident le vocabulaire du cycle 2 : côté, sommet, angle, angle droit, face, arête, milieu, droite, segment. Ils commencent à rencontrer la notation « segment [AB] » mais cette notation n'est pas exigible ; pour les droites, on parle de la droite « qui passe par les points A et B », ou de « la droite d ».

Ils reconnaissent qu'une figure admet un (ou plusieurs) axe de symétrie, visuellement et/ou par pliage ou en utilisant du papier calque. Ils complètent une figure par symétrie ou construisent le symétrique d'une figure donnée par rapport à un axe donné, par pliage et piquage ou en utilisant du papier calque.

– Au **CM2** : le travail sur les angles se poursuit, notamment sur des fractions simples de l'angle droit (demi ou tiers d'angle droit, angle plat comme somme de deux angles droits).

Les élèves commencent à rencontrer la notation « droite (AB) », et nomment les angles par leur sommet « angle ($\widehat{A}$ »).

Ils observent que deux points sont symétriques par rapport à une droite donnée lorsque le segment qui les joint coupe cette droite perpendiculairement en son milieu et construisent, à l'équerre et à la règle graduée, le symétrique d'un point, d'un segment, d'une figure par rapport à une droite.

Cours

5. Les figures planes

Les figures à connaître

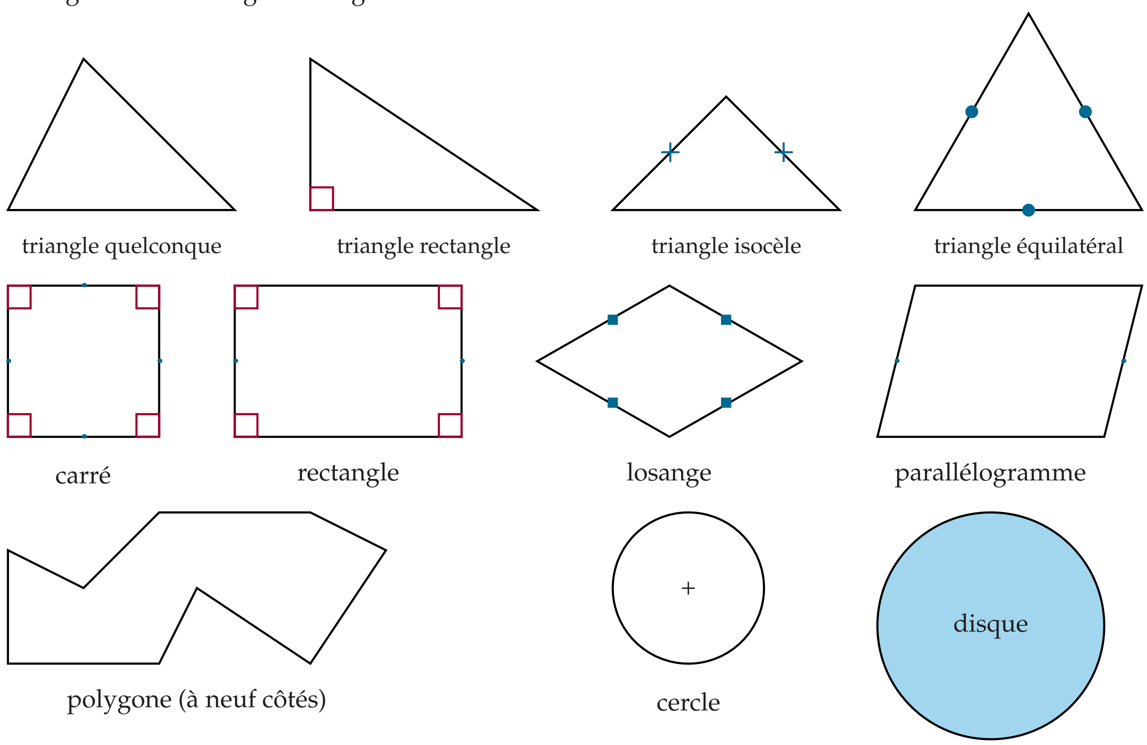
Au cycle 2, l'élève doit reconnaître et nommer les figures et objets usuels tels que :

- carré, rectangle, triangle, triangle rectangle, polygone, cercle, disque ;
- côté, sommet, angle droit, rayon, centre, segment, milieu d'un segment, droite.

Au cycle 3, l'élève commence à utiliser les premières caractérisations des figures planes par leurs propriétés pour :

- les triangles dont les triangles particuliers (rectangle, isocèle, équilatéral) ;
- les quadrilatères dont les quadrilatères particuliers (carré, rectangle, losange, approche du parallélogramme) ;
- le cercle comme ensemble de points situés à une distance donnée d'un point donné.

Si l'entrée dans la géométrie des propriétés fait son apparition en grandes pompes en 6^{e}, elle est déjà bien présente en début et milieu de cycle 3, ainsi qu'au cycle 2 avec la description à partir des côtés et des angles droits d'un carré, d'un rectangle et d'un triangle rectangle.



À partir du CM2, on amène les élèves à dépasser la dimension perceptive et instrumentée pour raisonner sur les propriétés et les relations. Par exemple, l'usage de la règle et du compas pour tracer un triangle, connaissant la longueur de ses côtés, mobilise la connaissance des propriétés du triangle et de la définition du cercle. Les problèmes de reproduction de figures donnent l'occasion de dégager et travailler les propriétés et relations géométriques du programme. Le choix d'un support uni, quadrillé ou pointé et des instruments disponibles se fait suivant les objectifs. Les jeux du type portrait, Kim, etc., la construction de frises, pavages, rosaces peuvent contribuer à développer la connaissance des propriétés des figures du programme et du vocabulaire associé.

L'initiation à l'utilisation de **logiciels de géométrie dynamique** permettant de produire des figures se fait graduellement, en lien avec l'ensemble des activités, des connaissances et des compétences géométriques.

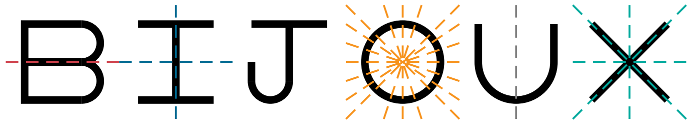
6. La symétrie

D'après le « module sur la symétrie de l'université de Paris 5 dans le cadre de la TFM » : au cycle 2 et 3, les élèves mettent en place une première maîtrise de la symétrie. Ils passent peu à peu d'une reconnaissance perceptive de la symétrie axiale à l'utilisation de pliages, du miroir, du papier calque puis d'outils tels que règle, équerre, compas pour vérifier que deux figures sont symétriques ou ont un axe de symétrie pour finalement tracer la figure symétrique d'une figure donnée par rapport à un axe quelconque ou pour tracer la moitié symétrique d'une figure donnée par rapport à un axe. C'est en fin de cycle 3, en 6e, que l'étude systématique de la symétrie axiale se fera.

A. Recherche d'un axe de symétrie

Pour conjecturer l'existence d'un axe, on repère : soit une sous-figure qui admet un axe de symétrie; soit des éléments de la figure qui semblent symétriques (segments de même longueur, angles de même mesure) et on cherche alors à préciser leur axe de symétrie.

Exemple



Pour vérifier que l'axe conjecturé est bien un axe de symétrie de la figure, on peut

- effectuer le pliage et vérifier que les deux parties de la figure situées dans les demi-plans définis par la droite se superposent;
- utiliser du matériel pédagogique comme le géomiroir, qui laisse passer le regard tout en réfléchissant l'image de la figure;
- utiliser du papier calque pour vérifier que les deux figures se correspondent;
- tracer mentalement le symétrique de la figure et repérer s'il fait partie de la figure.

Difficultés et erreurs concernant la recherche d'axe(s) de symétrie :

• **Orientation de l'axe** : les élèves privilégient les axes verticaux ou horizontaux, dans la mesure où ils le sont souvent dans leur contexte social et scolaire. Si une figure possède des axes de symétrie ni horizontaux ni verticaux, certains élèves ne les verront pas.

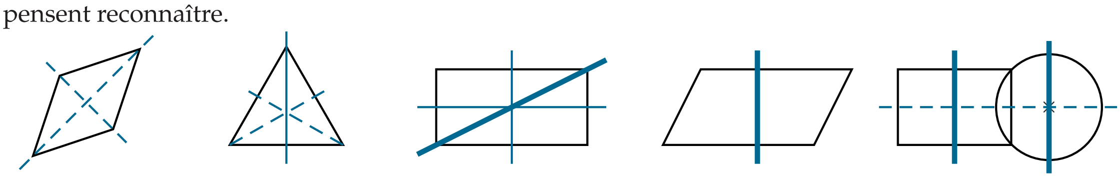
• **Nombre d'axes de symétrie** : si plusieurs axes de symétrie existent, l'élève, après en avoir trouvé un, peut considérer que sa tâche est terminée et donc ne pas en chercher d'autres.

• **Familiarité que l'élève a avec la figure** : le figue est-elle une image connue par l'élève ? Si oui, il déterminera plus facilement le ou les axes de symétrie.

• **Théorème en acte** : beaucoup d'élèves s'appuient sur le théorème-élève suivant : « un axe de symétrie d'une figure passe par le milieu de cette figure », sans penser que la réciproque est fausse.

• **Figures élémentaires** : dans le cas où la figure est composée de figures élémentaires facilement repérables et possédant chacun un axe de symétrie, les élèves ont tendance à assimiler ces axes comme ceux de la figure complète.

Exemple En pointillé les axes que certains élèves ne reconnaissent pas, en gras ceux qu'ils pensent reconnaître.

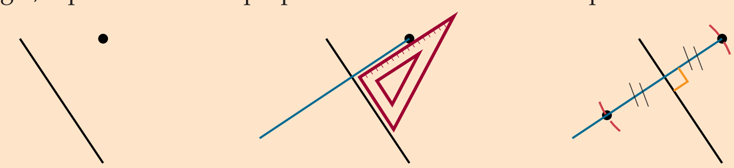


B. Tracer le symétrique d'une figure par rapport à un axe

Il est nécessaire que les élèves aient travaillé avec le pliage et aient utilisé au moins un miroir afin qu'ils aient une bonne représentation de ce qu'est la symétrie axiale. Si l'on s'engage trop rapidement dans un travail sur les tracés sans ces prérequis, les élèves risquent de produire des figures erronées et ne pas comprendre leurs erreurs. Il faut aussi que les élèves soient capables de reconnaître si des figures sont superposables, qu'ils aient des notions concernant la perpendicularité : reconnaître que deux droites sont perpendiculaires, tracer une droite perpendiculaire à une autre quelle que soit sa direction. Les situations doivent conduire les élèves à utiliser des techniques qui évoluent en fonction des supports et des instruments choisis ; par exemple, passer du pliage ou de l'utilisation de papier calque à la construction du symétrique d'un point par rapport à une droite à l'équerre et à la droite graduée.

Les procédures de tracé du symétrique d'une figure

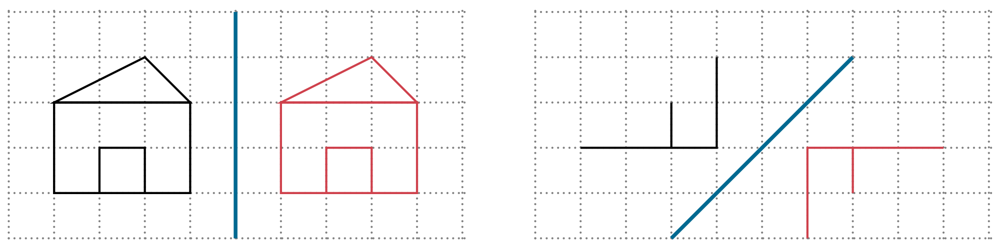
- **Par pliage** : plier la feuille suivant l'axe de symétrie, puis décalquer la figure par transparence. Aucune connaissance mathématique n'est à connaître ici.
- **Avec un papier calque** : décalquer la figure de départ ainsi que l'axe, retourner le papier calque et replacer ce papier sur la feuille en plaçant correctement l'axe, et enfin repasser le crayon sur la figure afin qu'elle laisse une emprunte sur la feuille.
- **Avec une équerre et une règle graduée** : tracer la perpendiculaire à l'axe de symétrie passant par le point dont on veut déterminer le symétrique à l'aide de son équerre, puis avec la règle, reporter sur cette perpendiculaire la distance du point à l'axe.



- **Sur papier quadrillé :** placer le symétrique de chacun des points en s'aidant du quadrillage, puis relier ces points entre eux, ou, placer un premier point symétrique, puis construire la figure symétrique inversée point par point.

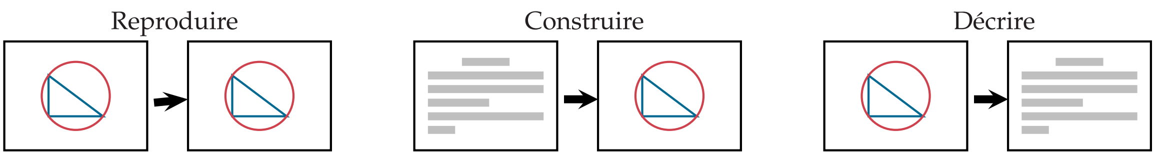
Difficultés et erreurs concernant la construction de la figure symétrique :
• **Mauvais dénombrement des carreaux :** l'élève se trompe dans le dénombrement des carreaux lors de la construction du symétrique d'un point. Il ne s'agit pas d'une erreur de compréhension.
• **Erreur dans l'ordre du tracé :** lorsque le nombre de sommets d'un polygone dont il faut tracer le symétrique est important, l'élève trace le symétrique de tous les points puis il se trompe dans l'ordre de jonction de ces points.
• **Construction du translaté :** consiste à construire le symétrique d'un point correctement puis à placer l'image de la figure en la translatant. Cette erreur est d'autant plus présente si la figure est elle même presque symétrique.
• **Axe de symétrie oblique :** dans le cas d'un axe ne suivant pas les lignes du quadrillage, l'élève va néanmoins suivre les lignes du quadrillage comme si l'axe était horizontal ou vertical ou à la manière d'une symétrie centrale.

Exemple



7. Programmes de construction

Dans le B.O., on trouve le vocabulaire suivant : **décrire, reproduire, construire** des objets géométriques. On peut schématiser les trois types d'activités par les schémas suivants. La difficulté de ces types de tâches est croissante.



• **La reproduction** d'une figure géométrique est la construction une figure géométrique à partir d'un modèle fourni avec les mêmes dimensions ou en respectant une certaine échelle.

Difficultés liées aux tâches de reproduction

- Repérage des figures de base d'une figure complexe : configurations non reconnues, figures non prototypiques, difficultés à isoler les figures de base des autres éléments...
- Identification des relations entre les figures élémentaires.
- Chronologie du tracé.
- Exécution de tracés géométriques.

• **La construction** consiste à réaliser une figure géométrique plane à partir d'un programme de construction, un texte descriptif, une figure à main levée, etc.

Difficultés liées aux tâches construction

- Vocabulaire géométrique plus ou moins acquis.
- Mobilisation d'images mentales anticipatrices.
- Manipulation des instruments de tracé (difficultés psychomotrices).

• **La description** d'une figure revient à élaborer un message en utilisant le vocabulaire géométrique approprié et en s'appuyant sur les caractéristiques d'une figure géométrique pour en permettre sa représentation ou son identification.

Difficultés liées aux tâches de description

- Au niveau du vocabulaire : l'élève ne connaît pas certains mots mathématiques, il les confond, il utilise certains mots mots du langage courant qui n'ont pas de sens en maths.
- Utilisation insuffisamment précise du vocabulaire.
- Manque de connaissance des propriétés caractérisant les figures de base.

La pratique de ces tâches tout au long du cycle 3 conduit à prévoir des éléments de différenciation dépendant des besoins des élèves reposant sur des choix et des évolutions concernant :
– le support de construction des figures : papier pointé, quadrillé, uni, logiciel de géométrie/programmation...;
– la nature des figures, des éléments qui la composent;
– les éléments directement visibles (analyse immédiate) ou non tracés (à trouver) pour reproduire (alignement, prolongement, milieu, angles droits, parallèles...);
– les contraintes pour la reproduction : support, tracé à main levée avec des codages ou tracé avec des instruments, présence ou non d'une amorce à compléter, instruments autorisés, échelle...

Vu au CRPE en 2022

Proposition n°4 : Figures géométriques de « *Préparation CRPE 2022 COPIRELEM* », ARPEME, page 223.

Consigne candidat : Vous êtes enseignant(e) en CE2, et vous souhaitez mettre en œuvre une séquence visant à apprendre aux élèves à « *Reproduire sur papier quadrillé ou uni de figures planes (éventuellement à partir d'éléments déjà fournis de la figure à reproduire qu'il s'agit alors de compléter [. . .] Décrire à partir des côtés et des angles droits, un carré, un rectangle, un triangle rectangle* ». Vous présenterez une séance de cette séquence construite à partir des énoncés de problèmes proposés en annexe 1, en incluant une phase de synthèse des apprentissages visés.
Pour anticiper son déroulement, vous pourrez prendre appui sur les photographies regroupées dans l'annexe 2.
Les annexes 3 et 4 pourront vous être utiles pour préciser et justifier les enjeux de la séance que vous proposerez et les variables didactiques mises en jeu dans les deux problèmes proposés.

Connaissance ou compétence visée : Reconnaître, nommer, décrire, reproduire, construire quelques figures géométriques.

Contexte de la séance d'enseignement :

- cycle d'enseignement : cycle 2 ;
- niveau de la classe : CE2 ;
- domaine : Espace et géométrie ;

Documents fournis au candidat :

Document 1 : Extraits *Programme d'enseignement du cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2*), en vigueur a la rentrée 2020. Ministère de l'Education nationale de la Jeunesse et des Sports.

Espace et Géométrie

Au cycle 2, les élèves acquièrent à la fois des connaissances spatiales comme l'orientation et le repérage dans l'espace et des connaissances géométriques sur les solides et sur les figures planes. Apprendre à se repérer et se déplacer dans l'espace se fait en lien étroit avec le travail dans « Questionner le monde » et « Éducation physique et sportive ». Les connaissances géométriques contribuent à la construction, tout au long de la scolarité obligatoire, des concepts fondamentaux d'alignement, de distance, d'égalité de longueurs, de parallélisme, de perpendicularité, de symétrie.
Les compétences et connaissances attendues en fin de cycle se construisent à partir de manipulations et de problèmes concrets, qui s'enrichissent tout au long du cycle en jouant sur les outils et les supports à disposition, et en relation avec les activités mettant en jeu les grandeurs géométriques et leur mesure.
Dans la suite du travail commencé à l'école maternelle, l'acquisition de connaissances spatiales s'appuie sur des problèmes visant à localiser des objets ou à décrire ou produire des déplacements dans l'espace réel. L'oral tient encore une grande place dans l'ensemble du cycle mais les représentations symboliques se développent et l'espace réel est progressivement mis en relation avec des représentations géométriques. La connaissance des solides se développe à travers des activités de tri, d'assemblages et de fabrications d'objets. Les notions de géométrie plane et les connaissances sur les figures usuelles s'acquièrent à partir de manipulations et de résolutions de problèmes (reproduction de figures, activités de tri et de classement, description de figures, reconnaissance de figures à partir de leur description, tracés en suivant un programme de construction simple). La reproduction de figures diverses, simples et composées est une source importante de problèmes de géométrie dont on peut faire varier la difficulté en fonction des figures à reproduire et des instruments disponibles. Les concepts généraux de géométrie (droites, points, segments, angles droits) sont présentés à partir de tels problèmes.
En géométrie comme ailleurs, il est particulièrement important que les professeurs utilisent un langage précis et adapté et introduisent le vocabulaire approprié au cours des manipulations et situations d'action où il prend sens pour les élèves, et que ceux-ci soient progressivement encouragés à l'utiliser.

Attendus de fin de cycle

– (Se) repérer et (se) déplacer en utilisant des repères et des représentations.

– Reconnaître, nommer, décrire, reproduire quelques solides.

– Reconnaître, nommer, décrire, reproduire, construire quelques figures géométriques.

- Reconnaître et utiliser les notions d'alignement, d'angle droit, d'égalité de longueurs, de milieu, de symétrie.

Reconnaître, nommer, décrire, reproduire, construire quelques figures géométriques Reconnaître et utiliser les notions d'alignement, d'angle droit, d'égalité de longueurs, de milieu, de symétrie
– Décrire, reproduire sur papier quadrillé ou uni des figures ou des assemblages de figures planes (*éventuellement à partir d'éléments déjà fournis de la figure à reproduire qu'il s'agit alors de compléter*). – Utiliser la règle, le compas ou l'équerre comme instruments de tracé. – Reconnaître, nommer les figures usuelles : carré, rectangle, triangle, triangle rectangle, polygone, cercle, disque. – Décrire à partir des côtés et des angles droits, un carré, un rectangle, un triangle rectangle. Les construire sur un support uni connaissant la longueur des côtés. – Construire un cercle connaissant son centre et un point, ou son centre et son rayon : o vocabulaire approprié pour décrire les figures planes usuelles : ▫ carré, rectangle, triangle, triangle rectangle, polygone, côté, sommet, angle droit ; ▫ cercle, disque, rayon, centre ; ▫ segment, milieu d'un segment, droite. o propriété des angles et égalités de longueur des côtés pour les carrés et les rectangles ; o lien entre propriétés géométriques et instruments de tracé : ▫ droite, alignement et règle non graduée ; ▫ angle droit et équerre ; ▫ cercle et compas.
– Utiliser la règle (non graduée) pour repérer et produire des alignements. – Repérer et produire des angles droits à l'aide d'un gabarit, d'une équerre. – Reporter une longueur sur une droite déjà tracée, en utilisant une bande de papier avec un bord droit ou la règle graduée ou le compas (en fin de cycle). – Repérer ou trouver le milieu d'un segment, en utilisant une bande de papier avec un bord droit ou la règle graduée : o alignement de points et de segments ; o angle droit ; o égalité de longueurs ; o milieu d'un segment.
– Reconnaître si une figure présente un axe de symétrie (à trouver), visuellement et/ou en utilisant du papier calque, des découpages, des pliages. – Reconnaître dans son environnement des situations modélisables par la symétrie (papillons, bâtiments, etc.). – Compléter une figure pour qu'elle soit symétrique par rapport à un axe donné : o symétrie axiale ; o une figure décalquée puis retournée qui coïncide avec la figure initiale est symétrique : elle a un axe de symétrie (à trouver) ; o une figure symétrique pliée sur son axe de symétrie, se partage en deux parties qui coïncident exactement.

Vu au CRPE en 2022

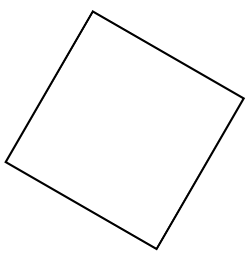
<u>**Document 2**</u> : Extrait de Mathé A.-C., Barrier T., Perrin-Glorian M.-J. (2020). *Enseigner la géométrie élémentaire. Enjeux, ruptures et continuités*. Éditions Academia – L'Harmattan, pp. 94-95.

> [...] la géométrie élémentaire recouvre en réalité au moins deux types de pratiques géométriques aux fondements épistémologiques différents mais tous deux cohérents, que nous avons appelés géométrie physique et géométrie théorique. La géométrie physique, à laquelle se réfère principalement l'enseignement primaire, se propose de résoudre des problèmes portant sur des objets matériels, qui peuvent être graphiques, à l'aide d'instruments matériels. La géométrie théorique avec pour modèle la géométrie euclidienne, à laquelle se réfère principalement l'enseignement secondaire, prend pour objet d'étude des figures théoriques et comme moyen de validation le raisonnement hypothético-déductif. La rupture entre ces deux manières de faire de la géométrie se manifeste dans la nature des problèmes posés et des objets étudiés, et surtout dans les modes de validation pratiqués. Cependant, ces géométries entretiennent des liens étroits, que l'on peut utiliser dans l'enseignement, pour autant que l'on dégage les enjeux d'apprentissage conceptuels du travail instrumenté sur les figures matérielles. C'est ce que nous efforçons de faire dans ce que nous avons appelé la géométrie des tracés.
>
> Notre approche vise à penser un enseignement de la géométrie continu et cohérent, du début du primaire jusqu'au milieu du secondaire, en nous attachant à deux idées fondamentales. La première réside dans la nécessité de viser la construction progressive d'un rapport géométrique aux figures matérielles. D'abord objets d'étude pris pour eux-mêmes, les figures deviennent progressivement représentants d'objets plus généraux et abstraits. La géométrie du secondaire les élaborera en objets théoriques en les incluant dans un cadre axiomatique. Par ailleurs, interpréter géométriquement une figure matérielle suppose une capacité à mobiliser une manière de voir et d'analyser les figures, spécifique à la géométrie, dans un mouvement de déconstruction et reconstruction dimensionnelle. Cette visée constitue pour nous un enjeu fondamental de la géométrie de l'école primaire (et du début du secondaire).
>
> La seconde idée porte sur le rôle que peut jouer le traitement instrumenté de figures matérielles dans le processus de conceptualisation en géométrie. Au-delà d'un usage précis des instruments, l'enseignement de la géométrie au primaire et au début du secondaire vise la conceptualisation d'objets et de relations géométriques. Cette conceptualisation repose sur un usage juste plutôt que précis des instruments, c'est-à-dire en lien avec les propriétés qu'ils permettent de représenter, ce que nous avons appelé un usage géométrique des instruments. Faire évoluer la capacité d'analyse des figures en jouant sur les instruments à disposition conduit à l'élaboration de schèmes d'utilisation de ces instruments qui, de manière articulée avec un travail langagier, viennent soutenir la conceptualisation géométrique. Notre approche vise ainsi la coordination de trois dimensions majeures : la mobilité du regard sur les figures matérielles, le double rôle des instruments (matériels et théoriques) et le langage géométrique. Les situations de reproduction de figure à l'aide d'instruments et les situations de formulation et de validation auxquelles elles donnent lieu sont un moyen d'y parvenir, par un jeu sur les variables didactiques.

<u>**Document 3**</u> : Documents de travail pour les élèves, avec une photographie du matériel mis à leur disposition.

Géométrie. Tracer un carré, connaître ses propriétés

<u>Modèle</u>



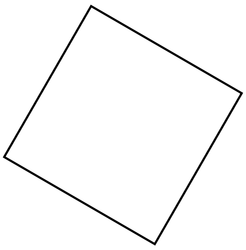
<u>Gabarit fourni</u>

1) Reproduis le carré en utilisant les instruments suivants :

– gabarit de carré « grignoté » *(le gabarit dans l'image ci-dessus)* – crayon.

2) Après avoir effectué ce tracé, quelle(s) propriété(s) du carré as-tu mise(s) en évidence ?

Modèle



Gabarit fourni

1) Reproduis le carré en utilisant les instruments suivants :

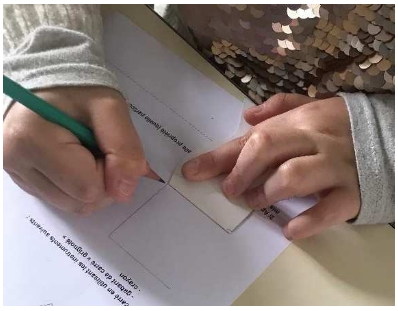
– gabarit de carré « grignoté » *(le gabarit dans l'image ci-dessus)* – crayon.

2) Après avoir effectué ce tracé, quelle(s) propriété(s) du carré as-tu mise(s) en évidence ?

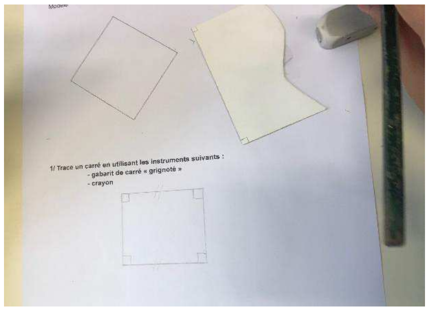
Document 4 : Quelques photographies prises dans une classe de CE1-CE2 lors de la résolution des problèmes de l'annexe 1 : Problème de reproduction d'un carré avec des gabarits grignotés.

Gabarit grignoté 1

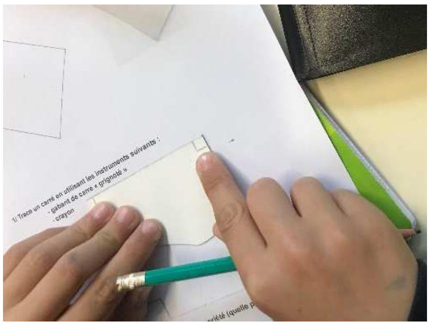
Élève 1. Mauvaise utilisation du gabarit (1)



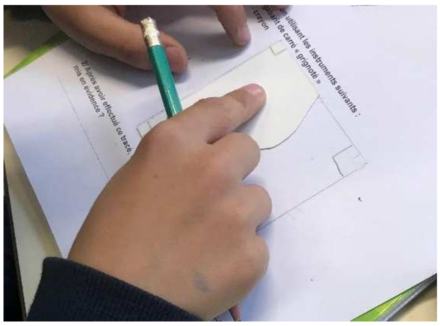
Élève 2. Mauvaise utilisation du gabarit (2) : utilisation du « petit côté »



Élève 3. Bonne utilisation du gabarit (1)

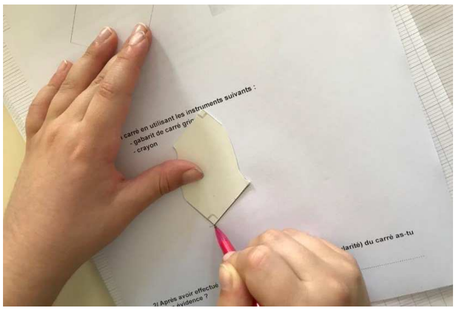


Élève 3. Bonne utilisation du gabarit (2)

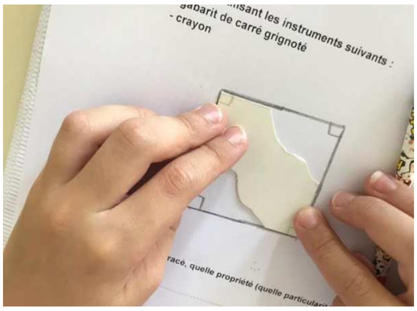


Gabarit grignoté 2

Élève 4. Stratégie 1 : un angle à la fois



Élève 5. Stratégie 2 : deux angles à la fois

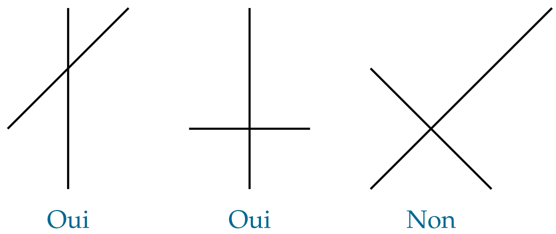


Analyse de documents

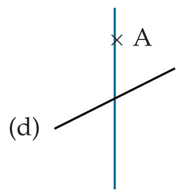
1 Étude de productions d'élèves, Hatier concours

Pour chacune des erreurs ci-dessous, essayez de faire des hypothèses sur les procédures mises en place par l'élève pour les produire. Quelles sont les origines possibles de ces procédures ?

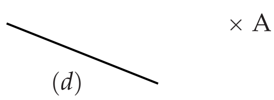
Erreur 1 : préciser pour chacun des cas si les droites sont perpendiculaires.



Erreur 2 : tracer la perpendiculaire à la droite (d) qui passe par A.

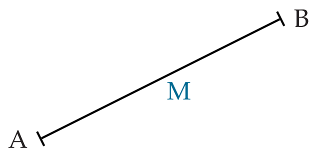


Erreur 3 : tracer la perpendiculaire à la droite (d) qui passe par A.

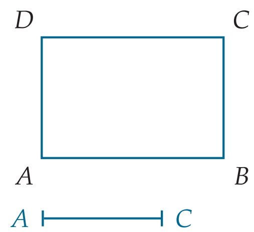


Réponse : ce n'est pas possible

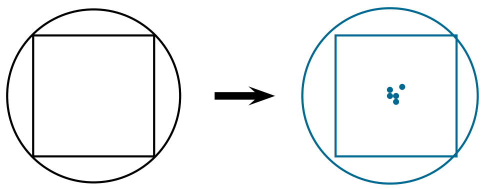
Erreur 4 : voici un segment [AB], placer le point M milieu de ce segment.



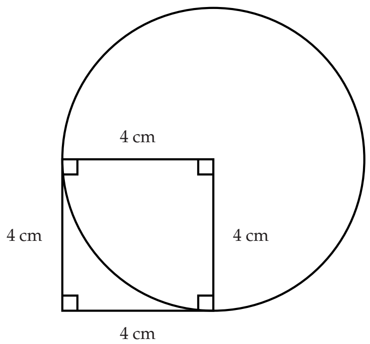
Erreur 5 : tracer le rectangle ABCD. Tracer ensuite le segment [AC].



Erreur 6 : reproduire la figure ci-dessous.



Erreur 7 : écrire un texte pour permettre à quelqu'un qui ne voit pas la figure de la tracer en respectant les dimensions indiquées.



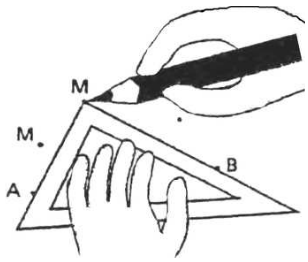
Patrice : prends un compas la moitié 8 cm pour la hauteur et la largeur puis prends ta règle, au 4 cm de la hauteur et largeur trace vers le bas un trait de 4 cm puis vers la gauche de 4 cm puis la hauteur 4 cm la largeur est de 4 cm vers la droite.

Géraldine : trace un carré de 4 cm de côté, trace un cercle de 4 cm de rayon.

Guillaume : tracer un carré de 4 cm de côté ensuite tracer un cercle qui a pour centre un angle droit qui se situe en haut à droite.

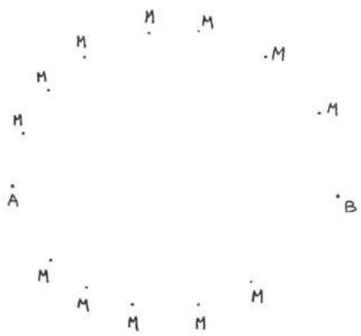
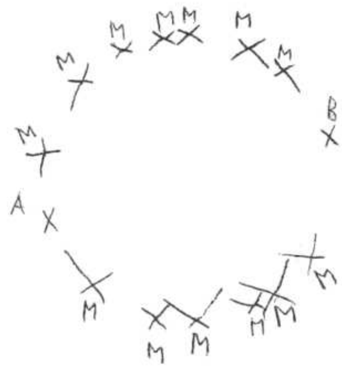
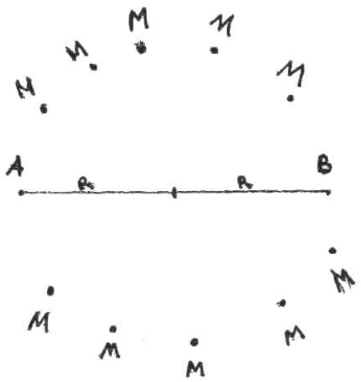
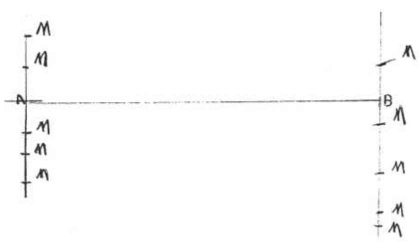
2 **CRPE 2001 Limoges**

Dans une classe de cycle 3 (CM2), le maître donne l'énoncé suivant :



Observe le dessin. Louis a placé deux points A et B sur une feuille. Avec son équerre, il cherche des points M tels que la droite (AM) et la droite (BM) soient perpendiculaires.
À ton tour, place deux points A et B sur une feuille blanche, et cherche au moins dix points M en faisant comme Louis.
Que remarques-tu sur la position de ces points ?
Optimath CM2 - Hachette Education.

Au bout de 15 minutes, il récupère les travaux d'élèves. Voici six de ces travaux numérotés de (1) à (6).

(1) 	(2) *Je remarque que les points M forme un cercle et con peu en tracé une infinité de points* 	(3) *Je remarque qu'il forme un rond* 
(4) *Les points M forme un cercle de centre identique du centre du segment AB* 	(5) *Tous les points sont alignés* 	(6) 

1) a) Faire l'exercice proposé aux élèves sur une feuille blanche.
b) Quelle propriété géométrique l'exercice permet-il de mettre en évidence ?

2) Parmi les constructions des élèves, indiquer celles qui sont incorrectes et émettre des hypothèses sur l'origine des erreurs commises.

3) Quelle incidence, la formulation et/ou le dessin fourni dans l'énoncé peuvent-ils avoir eue dans les productions (3) et (6) ?

3 CRPE 2003 Lille

Cette partie est consacrée à l'étude :

- D'une situation de recherche dirigée, menée par des élèves du cycle 2 « LES POLYMINOS ».
- Puis, d'un document donné en travail individuel à des élèves de cycle 3. Il a pour titre « LES POLYGONES ».

Situation de recherche dirigée au cycle 2 : LES POLYMINOS

Les élèves travaillent en groupe restreint (6 à 8 élèves). Le maître dirige l'atelier, les autres élèves de la classe sont en travail individuel.
Matériel : pour chaque élève, des triangles équilatéraux isométriques, en nombre suffisant, découpés dans du carton.
Consignes données par le maître : « Recherchez des figures géométriques différentes en assemblant exactement par un côté les triangles mis à votre disposition. Effectuez la recherche avec :

- 3 triangles
- 4 triangles
- 5 triangles ».

1) Quelles sont les solutions possibles avec 3 triangles ? avec 4 triangles ?
Indiquer le nombre de solutions et les dessiner à main levée.
2) Quels sont les éléments importants de la consigne sur lesquels l'enseignant devra insister avant de faire commencer la recherche ?
3) Indiquer une difficulté que peuvent rencontrer les élèves ? Quelle aide pourrait alors apporter l'enseignant ?
4) Pourquoi avoir choisi de mener cette recherche en groupe restreint et non pas en classe entière ? Justifier.
5) Quelle trace élaborer en fin de séance ?

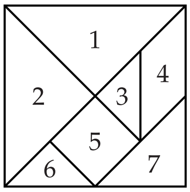
Situation de recherche dirigée au cycle 3 : LES POLYGONES

Les élèves travaillent en groupe restreint (6 à 8 élèves). Le maître dirige l'atelier, les autres élèves de la classe sont en travail individuel.
Matériel : annexe « LES POLYGONES » distribuée à chaque élève par le maître.
Consignes données par le maître : « Répondez aux questions du document que je viens de distribuer. »
Déroulement de la séance : travail individuel, à l'issue duquel le maître effectue une correction collective. Il prolonge l'exercice en demandant :
« Parmi les figures géométriques a, b, c, d, e, f, g, h et i, quelles sont celles que vous pouvez nommer ? »

1) Quelles sont les compétences qui doivent être acquises par les élèves pour pouvoir répondre :
   - à la question I du document élève ?
   - aux questions a), c) et d) de la question II du document élève ?
2) Que cherche à vérifier l'enseignant avec la question b) du II du document élève ?
3) A la question d) du II du document, un élève a volontairement laissé les 3 propositions, qu'en pensez-vous ?
4) Répondre à la question posée par le maître après la correction collective (cf. encadré ci-dessus). Que permet de mettre en évidence cette question ?

LES POLYGONES

I. Regarde les 7 pièces numérotées du tangram.



Retrouve ces 7 pièces dans chaque figure en les numérotant de la même manière que dans le tangram.

figure a

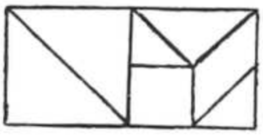


figure b

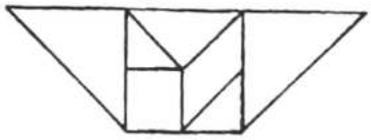


figure c

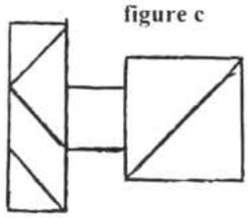


figure d

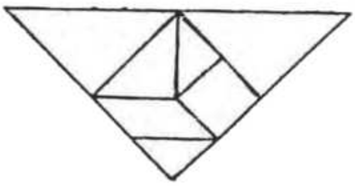


figure e

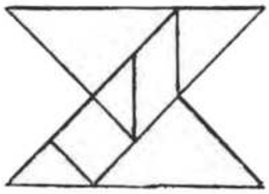


figure f

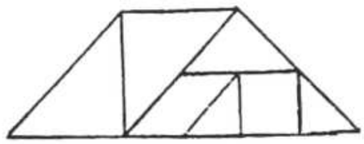


figure g

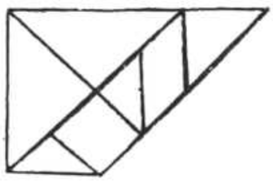


figure h

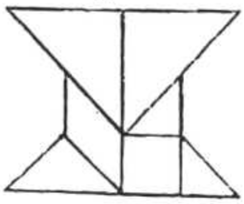
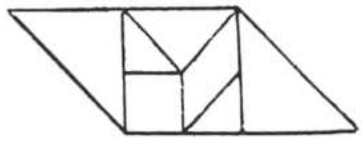


figure i



II. Réponds aux questions en barrant les réponses fausses.

a) Que sont les polygones numérotés dans le tangram 1, 2, 3, 6 et 7 ?

Des carrés — Des triangles équilatéraux — Des triangles rectangles isocèles

b) En quoi sont-ils différents ?

Par leur forme — Par leurs dimensions

c) Qu'est-ce que le polygone numéroté 4 dans le tangram ?

Un losange — Un carré — Un parallélogramme

d) Qu'est-ce que le polygone numéroté 5 dans le tangram ?

Un losange — Un carré — Un parallélogramme

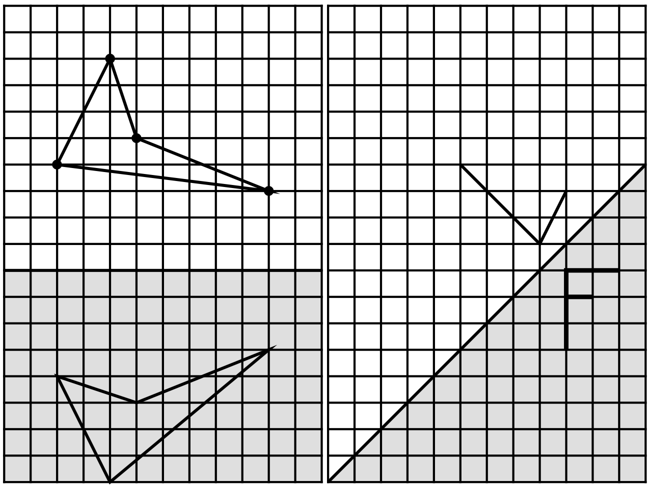
Analyse de documents

4 **CRPE 2002 Dijon**

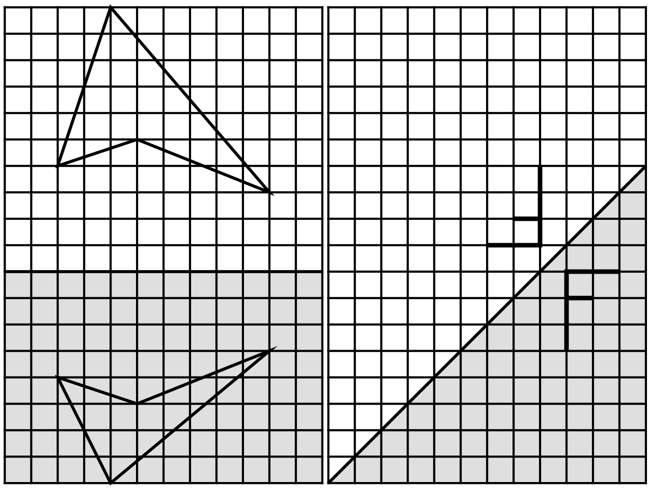
Un enseignant de cycle 3 a proposé les deux exercices donnés ci-dessous. Il a formulé la consigne suivante : « Construisez le symétrique des figures par rapport à la droite tracée en gras ». Il a veillé au préalable à ce que la seule ressource disponible soit la règle.

1) Quelle est la compétence évaluée dans les deux exercices proposés aux élèves ?
2) Citez deux procédures qu'un élève de cycle 3 peut utiliser pour résoudre cet exercice.
3) Pour chaque élève (A, B, C et D), repérez les erreurs et les réussites dans les productions proposées.
4) Quel matériel pourrait-on donner aux élèves afin qu'ils puissent vérifier s'ils ont tracé la bonne figue par symétrie ?

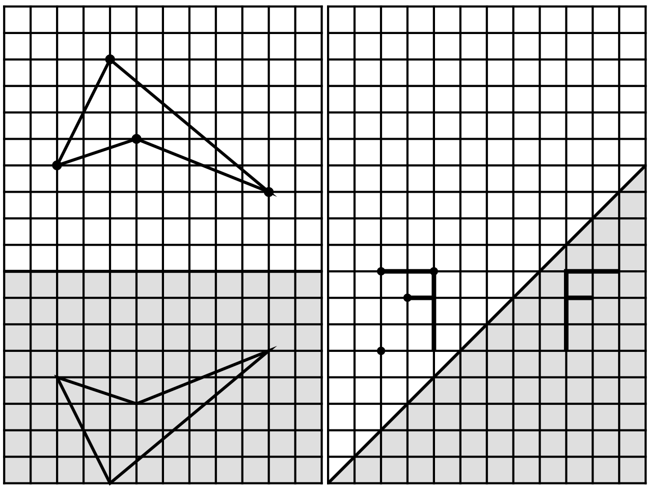
Élève A



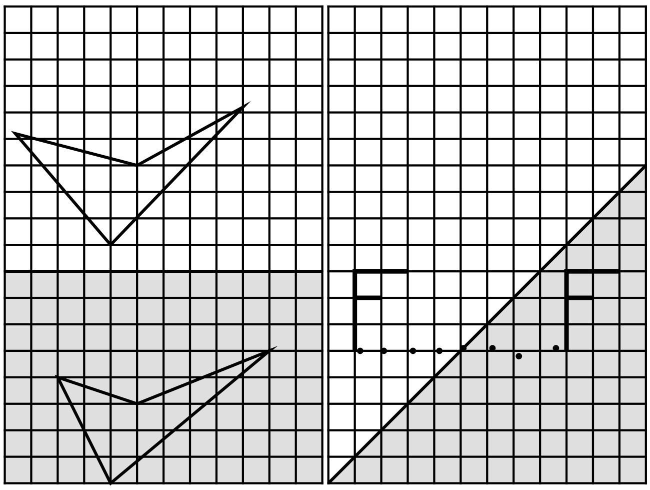
Élève B



Élève C



Élève D



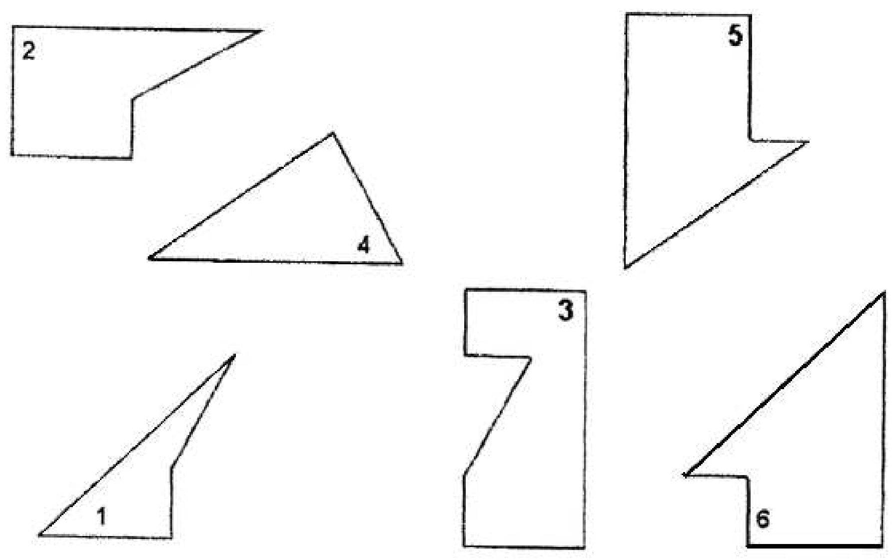
5 CRPE 2004 Martinique

Un maître se propose de mettre en place des activités de construction de figures planes. Le projet de séquence est décrit ci-dessous. Les questions suivantes visent à étudier avec précision les dessins proposés et à conduire une analyse de ce projet de séquence.

1) Niveau concerné.
   A quel niveau de cycle peut-on proposer cette séquence ? Justifier votre réponse en trois points.
2) Analyse des activités 1, 2 et 3.
   Pour chaque activité, répertorier deux compétences à mettre en oeuvre pour la réussir. Présenter les réponses sous forme de tableau.
3) Analyse de la séquence.
   Quelle logique conduit l'enseignant à proposer cette suite d'activités ?
4) Activité 3.
   a) Préciser pour cette activité les rôles des 2 instruments de dessin (règle, équerre).
   b) Donner deux difficultés prévisibles pour la construction.
   c) Donner trois difficultés prévisibles pour la rédaction du programme de construction.
   d) L'enseignant veut réaliser un bilan en fin de l'activité 3, donner 3 composantes qui vous paraissent essentielles pour ce bilan.

Projet de séquence de géométrie.

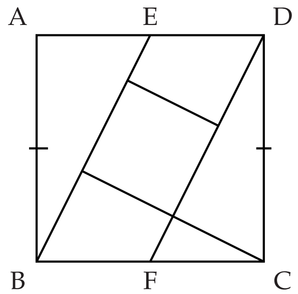
Activité 1.
Quels polygones faut-il assembler pour obtenir 2 carrés ? Tu peux utiliser le crayon à papier et le tracé à main levée sur une feuille pour rechercher les solutions à partir des dessins.

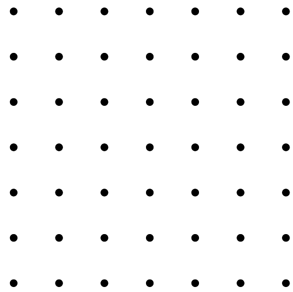


Analyse de documents

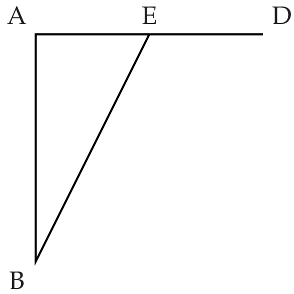
Activité 2.
Le dessin 1 a été utilisé à partir d'un carré et des milieux de ses côtés. Reproduis le dessin 1, à l'aide de la règle non graduée, en utilisant uniquement les points du quadrillage.

Dessin 1



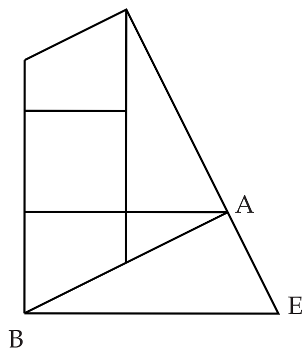


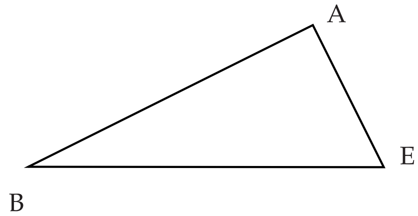
Activité 3.
1) Reproduis le dessin 1 sur cette feuille blanche à partir du nouveau dessin ABED. Instruments autorisés : règle non graduée, équerre.
2) Rédige un programme de construction.

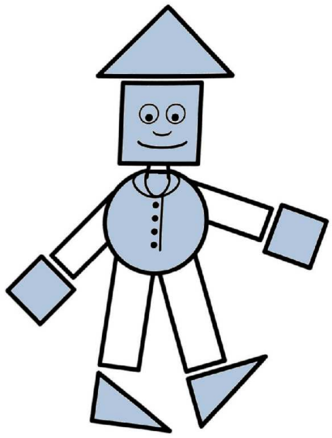


Activité 4.
1) Reproduis le dessin 2 sur cette feuille blanche à partir du triangle ABE. Instruments autorisés : compas, règle non graduée, équerre.
2) Quelles remarques peux-tu faire sur les polygones qui composent le dessin 2 ?
Que remarques-tu en comparant le dessin 1 et le dessin 2 ?

Dessin 2







1 C1 - Explorer les formes : carré, triangle et disque

Il était un petit homme, vers les maths p.94, PS, Accès

Matériel :
- une reproduction par élève du dessin du « petit homme » ;
- les formes nécessaires pour compléter le dessin du « petit homme » incomplet ;
- des formes d'un jeu de construction ;
- une boîte avec un trou pour passer la main.

Organisation : atelier de 4 à 6 élèves.

Déroulement :

1) **Étape 1 : nommer les formes**.
Chaque élève reçoit un dessin représentant le petit homme. Les formes géométriques sont placées au centre de la table. L'enseignant chante le refrain de la chanson « Pirouette cacahuète » dont les paroles ont été modifiées :

Il était un petit homme	Qui avait de drôles de petites mains
Pirouette cacahuète	Qui avait de drôles de chaussures
Il était un petit homme	Qui avait une drôle de p'tite tête
Qui avait un drôle de chapeau	Qui avait une drôle de chemise

Pour chaque strophe, l'enseignant présente et nomme une forme pour compléter son petit homme puis la pose sur son dessin. Il demande aux élèves de chercher une forme identique au centre de la table.

2) **Étape 2 : trier des formes simples**.
- Trier les formes en papier utilisées pour reconstituer le petit homme. Chercher tous les disques puis tous les triangles et enfin les carrés.
- Compléter le classement obtenu avec des figures planes de la classe (différentes matières, tailles et couleurs).

3) **Étape 3 : reconnaître des formes géométriques par le toucher**.
Chaque élève dispose d'une boîte fermée dans laquelle se trouvent des figures planes. Un trou permet de passer la main pour toucher les formes à l'intérieur de la boîte. Un voile en tissu empêche de voir à l'intérieur de la boîte.
- Ouvrir les boîtes et nommer les formes contenues dans sa boîte et les sortir une à une. Constater que chaque élève a les mêmes éléments : carrés, disques et triangles de différentes couleurs.
- Prendre tous la même forme. la manipuler en fermant les yeux et la remettre dans sa boîte.
- Fermer les boîtes, passer la main par le trou et explorer le contenu de la boîte. Sortir la forme de son choix, la nommer.
- Remettre toutes les formes dans la boîte et sortir une forme en respectant la consigne de l'enseignant. L'enseignant montre ou nomme l'objet que les élèves doivent sortir. Commencer par sortir les ronds.

Différentiation :
Sur la table, prévoir des formes identiques à celles contenues dans la boîte. Les élèves qui ne savent pas nommer une forme peuvent la montrer. L'enseignant rappelle le nom des formes en les montrant.

2 C1 - **Tangram**

Cette séquence est téléchargeable sur edumoov.

PS | MS | GS **Explorer des formes, des grandeurs, des suites organisées**

Le tangram

Informations générales

Objectif	**- Classer des objets en fonction de caractéristiques liées à leur forme. Savoir nommer quelques formes planes (carré, triangle, cercle ou disque, rectangle).** **- Reproduire un assemblage à partir d'un modèle (puzzle).** **- Reproduire, dessiner des formes planes.** **- Reconnaitre globalement des formes planes par la vue.**
Auteur	N. DAVAL

Déroulement des séances

- **Séance 1** : Découverte d'un puzzle étrange (20 min)
- **Séance 2** : Propriétés des formes (30 min)
- **Séance 3** : Représenter des figures planes. (20 min)
- **Séance 4** : Reproduire un modèle (niveau 1) (20 min)
- **Séance 5** : Reproduire un modèle (niveaux 2, 3 et 4) (35 min)

1 Découverte d'un puzzle étrange

Explorer des formes, des grandeurs, des suites organisées

Objectif(s) de séance	**Découvrir, toucher, manipuler.**	**20 minutes** (3 phases)
Matériel	Un jeu de tangram par élève (7 pièces).	
Remarques	Pour faire des tangrams, utiliser des éponges en mousse toutes fines, puis découper les formes de tangram dedans, en prenant comme mesure du côté du carré 12 cm (voir gabarit dans les documents joints).	

1. Phase 1

(individuel) | découverte | **5 min.**

Manipulation libre, sans consigne.

2. Phase 2

(individuel) | recherche | **10 min.**

Manipulation libre mais les pièces doivent se toucher sans se chevaucher et ne doivent pas être mises les unes sur les autres.
Les élèves essaient de représenter quelque chose de connu.

3. Phase 3

(collectif) | mise en commun / institutionnalisation | **5 min.**

L'enseignant.e montre des exemples de productions d'élèves, avant et après la consigne, il y a discussion sur la forme des dessins.

2 Propriétés des formes

Explorer des formes, des grandeurs, des suites organisées

Objectif(s) de séance	**- Reconnaitre globalement des formes planes par la vue et le toucher.**	**30 minutes** (3 phases)
Matériel	Des tangrams, un sac ou une boite opaque.	
Remarques	Cette séance peut être divisée en deux séances	

1. Découverte des formes

(individuel) | recherche | **5 min.**

Reprendre les différentes pièces du tangram, les élèves doivent classer les formes suivant celles "qui se ressemblent".

Demander aux élèves s'ils savent nommer les pièces. On peut ainsi nommer le triangle, le carré et une forme étrange : le parallélogramme (vocabulaire de cycle 3, mais rien n'empêche de donner le nom, qui ne sera pas à retenir).

Faire remarquer qu'il y a plusieurs triangles, de tailles différentes, est-il possible de former l'un des triangles avec d'autres triangles du jeu ?

2. Jeu de Kim visuel

5 *(groupes de 5)* | entraînement | **10 min.**

Toutes les pièces sont étalées sur la table, observer et nommer les pièces du puzzle.

L'enseignant.e se retourne pendant qu'un élève retire une pièce de la table. Nommer la pièce qui a disparu.
Inversement, demander aux élèves de fermer les yeux pendant que l'on enlève une pièce du puzzle. Les élèves doivent nommer la pièce disparue.

Variable : on peut jouer avec deux jeux de tangram.

3. Jeu de Kim tactile

5 *(groupes de 5)* | entraînement | **15 min.**

Reprendre la configuration précédente.

Ce jeu nécessite 2 puzzles de tangram. Un puzzle est placé dans un sac ou une boite opaque, l'autre est posé sur la table.
Montrer une pièce sur la table et la chercher dans le sac opaque. Reconnaître la pièce recherchée par le toucher.
Superposer les 2 pièces pour valider. Remettre la pièce dans le sac en cas d'erreur.

Reprendre la configuration précédente, enlever une pièce qui n'est donc plus visible des élèves, leur demander de retrouver cette pièce dans le sac.

Différentiation : le puzzle sur la table peut-être mis sous forme d'un carré (sa forme initiale), ou sous une autre forme, ou posé de manière aléatoire où les formes sont non adjacentes sur la table.

3 Représenter des figures planes.

Explorer des formes, des grandeurs, des suites organisées

Objectif(s) de séance	**- Reproduire, dessiner des formes planes.**	**20 minutes** (2 phases)
Matériel	Des tangrams, des feuilles unies, des paires de ciseau et de la colle.	

1. Représenter les formes du tangram

(individuel) | réinvestissement | 10 min.

Dessiner les 7 pièces du tangram sur une feuille A4 en réalisant le contour de chaque pièce.

Différentiation : faire tenir toutes les pièces sur une même feuille (demande une anticipation de la part des élèves).

2. Reconstituer le tangram

(individuel) | mise en commun / institutionnalisation | 10 min.

Découper les pièces puis les coller suivant un modèle pour reconstituer le grand carré.

4 Reproduire un modèle (niveau 1)

Explorer des formes, des grandeurs, des suites organisées

Objectif(s) de séance	**Reproduire un assemblage par superposition sur le modèle.**
Matériel	Un jeu de tangram par élève. Différents modèles de figures sur papier de la même taille que les pièces du tangram (voir document joint).

20 minutes (3 phases)

1. Reproduire par superposition

(individuel) | recherche | 5 min.

Reproduire un premier modèle sur le support en papier par superposition (niveau 1).

2. Reproduire à côté

(individuel) | recherche | 5 min.

Reproduire le premier modèle à côté du support en papier.

3. Reproduire différents modèles

(individuel) | entraînement | 10 min.

Reproduire d'autres modèles par superposition, puis à côté.

5 Reproduire un modèle (niveaux 2, 3 et 4)

Explorer des formes, des grandeurs, des suites organisées

Objectif(s) de séance	**Reproduire un assemblage par superposition sur le modèle.**
Matériel	Un jeu de tangram par élève. Différents modèles de figures sur papier de la même taille que les pièces du tangram (voir document joint).

35 minutes (2 phases)

1. Reproduire un puzzle (niveau 2).

(individuel) | recherche | 15 min.

Reproduire des modèles où figure le contour des pièces, mais sur un modèle plus petit à côté (niveau 2). Il n'est pas possible superposer les pièces car elle ne sont pas d cela même taille.

2. Reproduire un puzzle (niveau 4)

(individuel) | recherche | 20 min.

Reproduire des modèles où figure uniquement le contour extérieur des pièces (niveau 4).

Différentiation : donner des modèles avec les pièces matérialisées en plus petit à l'intérieur du modèle (modèle 3).

3 C2/C3 - Rallye tangram

Pour une première approche du tangram, il est tout à fait possible de reprendre les activités proposées pour le cycle 1, à adapter en fonction de la classe, puis, lorsque les élèves ont compris le fonctionnement du tangram, on peut leur proposer un rallye mathématique qui peut prendre plusieurs formes :

- un mini-rallye en une séance, par groupes, sur un nombre limité de modèles ;
- un rallye en fil rouge sur une période (ou plus), les élèves résolvant les modèles à leur rythme quand ils ont terminé un travail par exemple. Il remplissent une fiche individuelle.

Vous pouvez trouver des ressources à ce sujet ici, sur le site de boutdegomme.

Mini rallye

Objectif : reconnaitre, nommer, décrire, reproduire, construire quelques figures géométriques (la construction de frises, pavages, puzzles peuvent contribuer à développer la connaissance des propriétés des figures du programme et du vocabulaire associé). Le vocabulaire et les propriétés sont sous-jacents dans l'activité.

Matériel et organisation :

- un tangram pour deux à trois élèves ;
- des modèles de tangram à réaliser ;
- une fiche de route pour la classe affichée au tableau.

Le jeu se fait en ilots de 4 à 5 élèves, procurer deux tangrams par ilot.

Historique : ce casse-tête serait né en Chine au 16^{e} siècle, de la maladresse d'un empereur qui, admirant un magnifique carreau de porcelaine, l'aurait laissé choir sur le sol de son palais, où il se serait brisé en sept morceaux. Voulant reconstituer l'original, il ne peut jamais y parvenir, mais il recréa à la place des milliers de figures différentes...

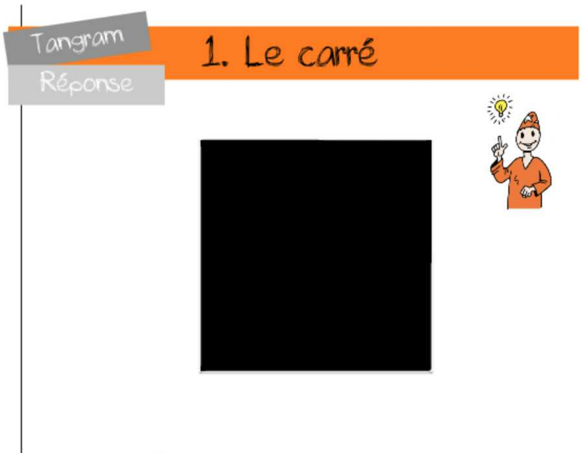
Règle du jeu :

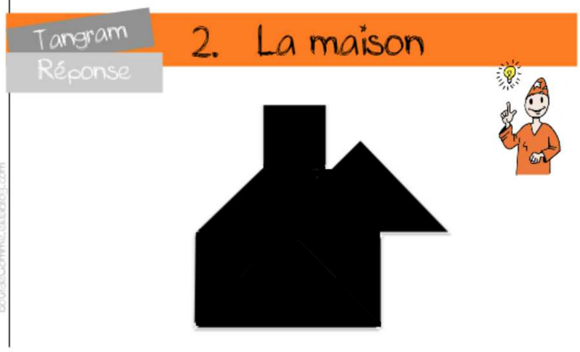
- vous devez reconstituer chacune de ces formes (carré, maison, homme...), dans n'importe quel ordre grâce aux pièces du tangram. Une figure doit toujours être constituée des sept polygones et les pièces ne peuvent être que juxtaposées et non superposées ;
- une fois l'une des figures réalisée et vérifiée par l'enseignant(e), vous pouvez alors valider la construction dans le tableau en mettant une croix au bon endroit !

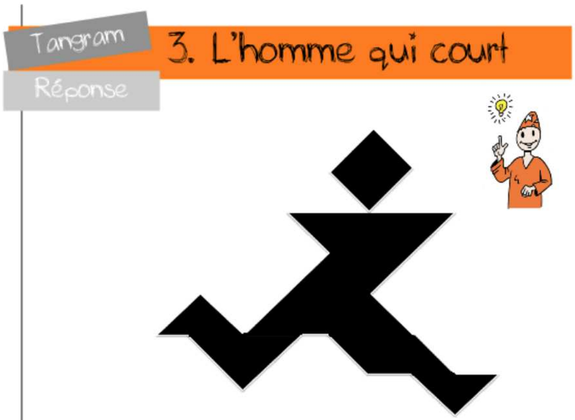
Le tableau à remplir et les formes à reconstituer :

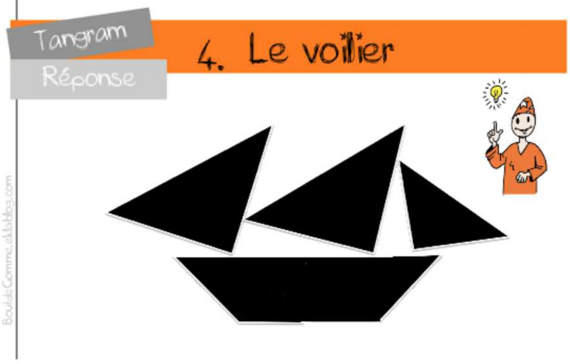
	1. carré	2. maison	3. homme	4. voilier	5. pull	6. sapin	7. usine	8. oie
groupe 1								
groupe 2								
groupe 3								
groupe 4								
groupe 5								
groupe 6								

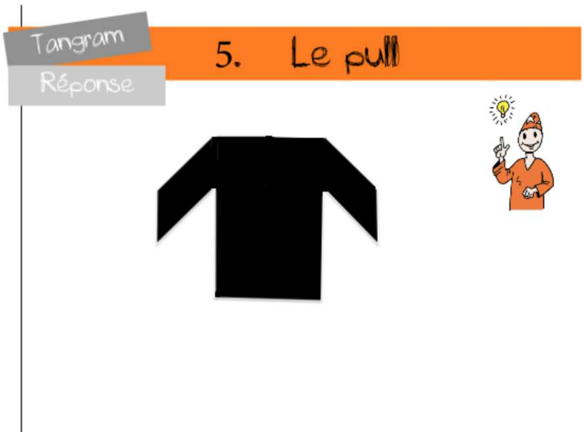
Activités à faire en classe

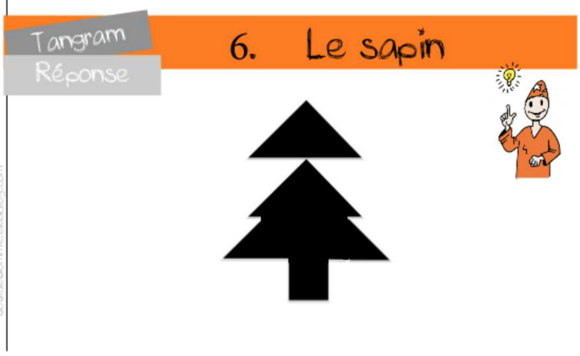


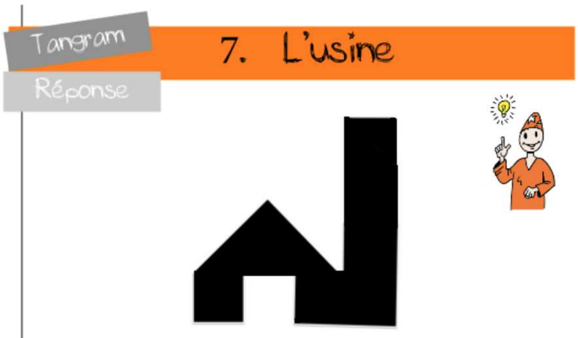


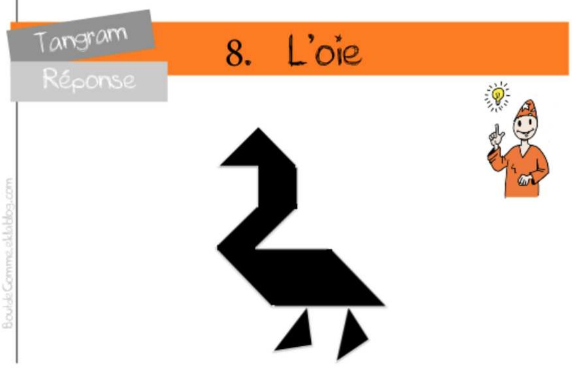












4 C3 - Tangram, le retour !!!

La légende dit qu'un empereur chinois du 16e siècle du nom de « Tan », fit tomber un carreau de faïence qui se brisa en 7 morceaux. Il n'arriva jamais à rassembler les morceaux pour reconstituer le carreau mais l'homme s'aperçut qu'avec les 7 pièces il était possible de créer de formes multiples, d'où l'origine du jeu de tangram.

Le tangram est un carré composé de 7 pièces :
- 2 petits triangles rectangles isocèles ;
- 1 triangle rectangle isocèle de taille moyenne ;
- 2 grands triangles rectangles isocèles ;
- 1 carré ;
- 1 parallélogramme.

Les différentes exploitations pédagogiques du tangram (en géométrie, mais aussi en grandeurs et mesures) :
- travail sur le vocabulaire des formes géométriques ;
- travail sur la description et la reproduction de figures sur feuilles quadrillées et unies ;
- travail sur la réalisation de programmes de construction ;
- travail sur les fractions ;
- travail sur la mesure et la comparaison de périmètres ;
- travail sur la mesure et la comparaison d'aires ;
- travail sur l'agrandissement/réduction...

Un exemple de séquence en cycle 3

Objectif de la séquence : permettre aux élèves d'améliorer leur vision de l'espace (repérage, orientation), de se familiariser avec quelques figures planes et de passer progressivement d'une géométrie de la perception à une géométrie où les objets sont contrôlés par explication de propriétés et recours à des instruments.
On pourra faire les phases 1 à 3 dans une même séance et la phase 4 dans une deuxième séance.

Compétences visées :
- reconnaître de manière perceptive une figure plane, en donner le nom ;
- vérifier l'existence d'une figure simple en ayant recours aux propriétés et aux instruments ;
- décomposer une figure en figures plus simples ;
- tracer une figure (sur papier uni, quadrillé ou pointé), soit à partir d'un modèle, soit à partir d'une description, d'un programme de construction ;
- utiliser à bon escient le vocabulaire suivant : triangle, triangle rectangle, triangle isocèle, carré, parallélogramme.

Matériel : la classe est organisée en ilots, chaque groupe disposant de quatre tangrams de couleurs différentes.

Phase 1 : découverte et manipulation du materiel. *10 minutes*
La classe est organisée en groupes de quatre. On donne les quatre jeux de sept pièces de tangram de couleurs différentes à chaque élève et on les laisse manipuler et découvrir le matériel.
Dans un premier temps, pas de consigne précise si ce n'est d'essayer de ranger ces pièces en différentes catégories ou de construire des figures avec celles-ci.
Observer leurs actions : rangement par couleur, construction de figures ensemble, échanges de pièces...

Activités à faire en classe

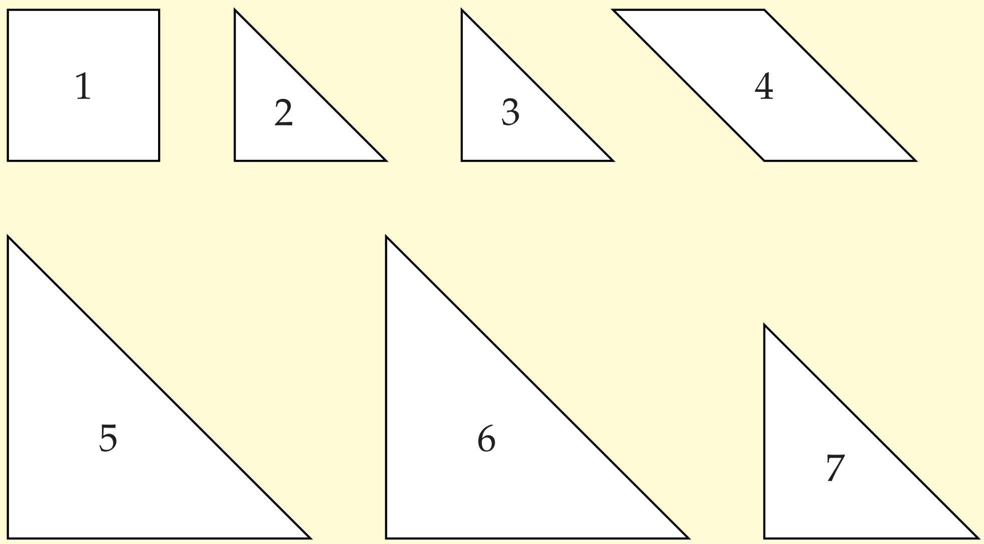
Phase 2 : présentation et description du jeu. *15 minutes*

Objectif de cette phase : utilisation d'un vocabulaire mathématique précis, rappel des formes déjà connues à ce niveau (carré, triangle rectangle voir si possible triangle rectangle isocèle facile à repérer par simple manipulation).

Consigne : le jeu que je vous ai distribué s'appelle le tangram. Il se constitue de sept pièces. Pouvez vous me les décrire ? Me donner leur nom ?

Trace écrite :

Le tangram comporte les sept pièces suivantes

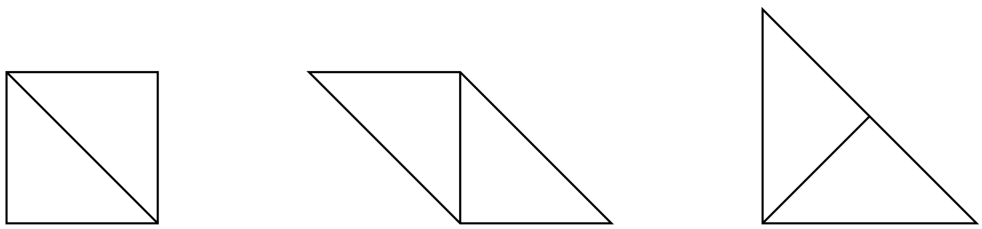


La figure 1 est un carré,
les figures 2, 3, 5, 6 et 7 sont des triangles rectangles isocèles,
la figure 4 est un parallélogramme.

Phase 3 : reproduction de figures. *20 minutes*

Objectif de cette phase : reproduire une figure composée de figures simples.

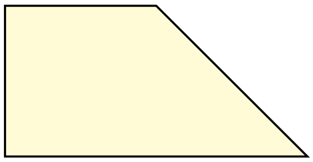
Consigne 1 : vous allez prendre les pièces 2 et 3 et vous allez reconstituer la figure 1 puis la figure 4. Enfin, avec ces deux mêmes pièces vous essaierez de faire un triangle plus grand, correspond-il au triangle 6 ou 7 ?
Faire reformuler la consigne en exigeant l'emploi du nom précis pour chaque figure.
Une fois que vous aurez reproduit ces trois figures, mettez les à coté et comparez les : que pouvez-vous en dire ?
Configurations attendues :



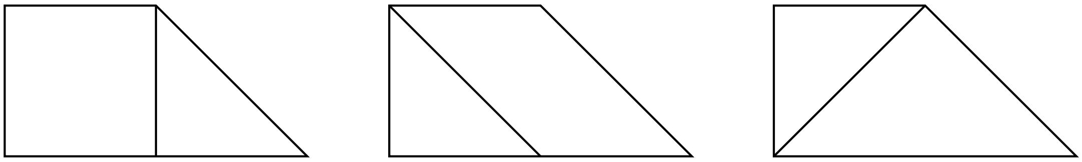
On peut faire remarquer que chacune des figures fait la même aire (la même surface) car elles sont toutes composées des deux mêmes triangles. . . ce qui pourra faire l'objet d'une séance ultérieure sur ce thème.

Activités à faire en classe

Consigne 2 : vous allez reproduire la figure ci-dessous avec les figures 1,2,3,4 de trois manières différentes.

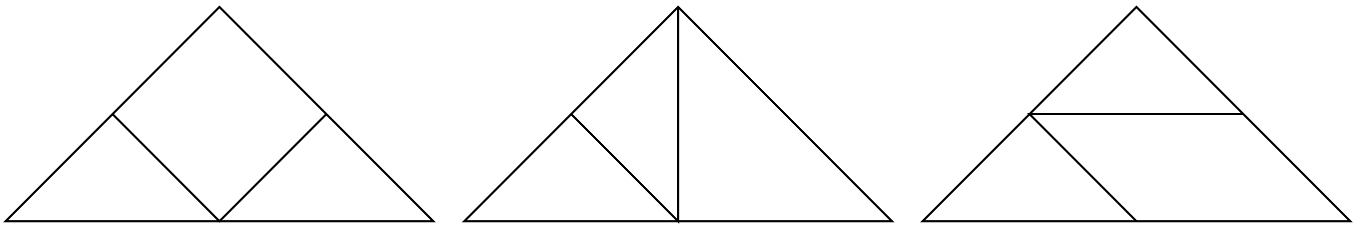


Configurations attendues :

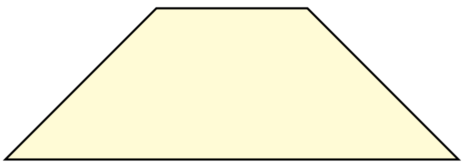


On Remarque que cette figure est égale à un carré et un petit triangle, un parallélogramme et un petit triangle, un moyen triangle et un petit triangle soit une aire correspondant à trois petits triangles.

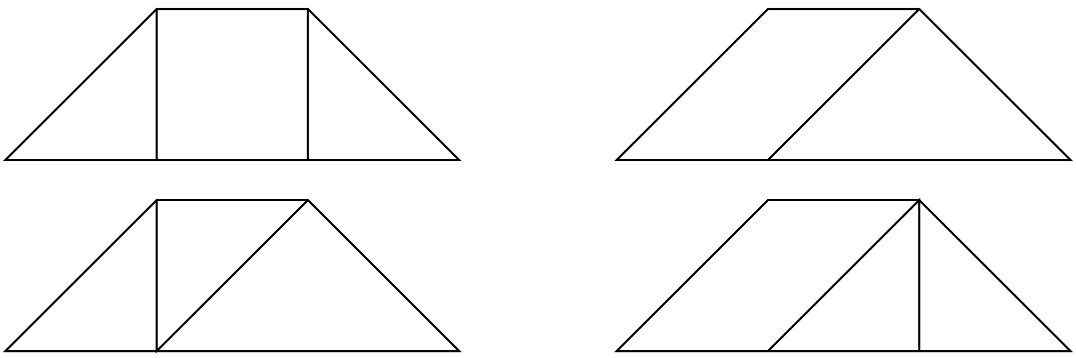
Consigne 3 : vous allez reproduire la figure 5 (ou 6) de trois manières différentes en vous servant des figures 1, 2, 3 et 4. Laisser le temps aux élèves de chercher puis conclure en les présentant au tableau.
Configurations attendues :



Consigne 4 : trouver un maximum de manières différentes pour faire la figure suivante avec les pièces 1, 2, 3, 4, 7.



Donner la silhouette de la figure et tracer les traits manquant selon la ou les solutions que vous avez trouvées.
Configurations attendues :

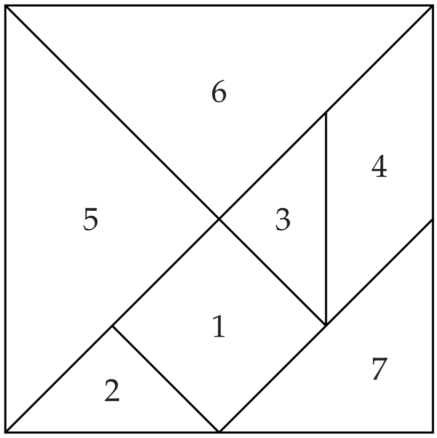


Phase 4 : la construction du tangram. *45 minutes*

Objectif de cette phase : construire une figure complexe à partir de figures simples, élaborer un programme de construction.

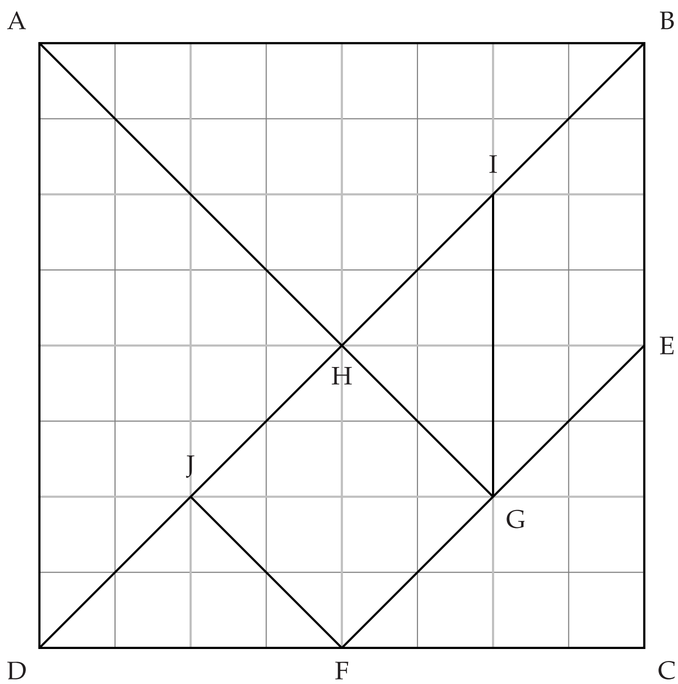
Consigne 1 : essayer maintenant avec les pièces dont vous disposez de réaliser le tangram, c'est à dire le grand carré.

Configuration attendue :



Consigne 2 : tracer le tangram sur une feuille quadrillée ou à petits carreaux. Le grand carré doit mesurer 8 cm de côté. Variante plus difficile : construire le tangram sur une feuille unie.

Consigne 3 : établir un programme de construction.
Variante plus facile : on pourra indiquer sur le tangram le nom des points à utiliser dans le programme.



Exemple de programme :

1) tracer un carré ABCD de 8 cm de côté ;
2) tracer la diagonale [BD] ;
3) placer le point E, milieu du segment [BC] et le point F, milieu du segment [CD] ;
4) tracer le segment [EF] ;
5) placer le point G, milieu du segment [EF] ;
6) tracer le segment [AG] ;
7) placer H, le point d'intersection des segments [AG] et [BD] ;
8) placer le point I, milieu du segment [HB] ;
9) tracer le segment [GI] ;
10) placer le point J, milieu du segment [DH] ;
11) Tracer le segment [FJ].

GÉOMÉTRIE

6

Espace et géométrie

Dans les programmes - cycle 1

Se repérer dans le temps et dans l'espace

- Situer des objets par rapport à soi, entre eux, par rapport à des objets repères.
- Se situer par rapport à d'autres, par rapport à des objets repères.
- Dans un environnement bien connu, réaliser un trajet, un parcours à partir de sa représentation (dessin ou codage).
- Élaborer des premiers essais de représentation plane, communicables (construction d'un code commun).
- Utiliser des marqueurs spatiaux adaptés (devant, derrière, droite, gauche, dessus, dessous. . .).

Explorer des formes

- Classer des objets en fonction de leur forme.
- Reconnaître quelques solides (cube, pyramide, boule, cylindre).
- Reproduire un assemblage de solides à partir d'un modèle.

Dans les programmes - cycle 2

(Se) repérer et (se) déplacer en utilisant des représentations

- Se repérer dans son environnement proche.
- Situer des objets ou des personnes les uns par rapport aux autres ou par rapport à d'autres repères : vocabulaire des positions et des déplacements (gauche, droite, au-dessus, en dessous, sur, sous, devant, derrière, près, loin, nord, sud, est, ouest, avancer, reculer, tourner à droite/gauche, monter, descendre. . .).
- Produire des représentations des espaces familiers (école, quartier) et moins familiers : quelques modes de représentation de l'espace (maquettes, plans, photos).
- S'orienter et se déplacer en utilisant des repères.
- Réaliser des déplacements dans l'espace et les coder pour qu'un autre élève puisse les reproduire.
- Programmer les déplacements d'un robot ou d'un personnage sur un écran : repères spatiaux ; relations entre l'espace dans lequel on se déplace et ses représentations.

Reconnaitre, nommer, décrire, reproduire quelques solides

- Reconnaitre et trier les solides usuels parmi des solides variés.
- Reconnaître des solides simples dans son environnement proche.
- Réaliser et reproduire des assemblages de cubes et pavés droits les associer à des représentations (photos, vues. . .).
- Fabriquer un cube à partir d'un patron fourni : vocabulaire des solides (cube, pavé droit, boule, cylindre, cône, pyramide) et des polyèdres (face, sommet, arête) ; les faces d'un cube sont des carrés ; les faces d'un pavé droit sont des rectangles (qui peuvent être des carrés).

Dans les programmes - cycle 3

(Se) repérer et (se) déplacer dans l'espace en utilisant ou en élaborant des représentations

- Se repérer, décrire ou exécuter des déplacements, sur un plan ou sur une carte (école, quartier, ville, village).
- Accomplir, décrire, coder des déplacements dans des espaces familiers.
- Programmer les déplacements d'un robot/personnage à l'écran en utilisant un logiciel de programmation : vocabulaire des positions et des déplacements (tourner à gauche/droite, $\frac{1}{2}$ tour, $\frac{1}{4}$ de tour).
- Diverses représentation de l'espace : maquettes, plans, schémas.

Reconnaitre, nommer, décrire, reproduire, représenter, construire quelques solides

- Reconnaitre, nommer, décrire des solides simples ou des assemblages de solides simples : cube, pavé droit, prisme droit, pyramide, cylindre, cône, boule. Vocabulaire associé à ces objets : hauteur solide, sommet, face, arête.
- Reproduire, représenter, construire des solides simples ou des assemblages de solides simples sous forme de maquettes ou de dessins ou à partir d'un patron (donné, dans le cas d'un prisme ou d'une pyramide, ou à construire dans le cas d'un pavé droit).

Repères didactiques

1. De repérer, se déplacer

A. Repérage dans l'espace en maternelle

Dans les programmes de 2018 [edu1] : « par l'utilisation et la production de représentations diverses (photos, maquettes, dessins, plans, etc.) et également par les échanges langagiers avec leurs camarades et les adultes, les enfants apprennent à restituer leurs déplacements et à en effectuer à partir de consignes orales comprises et mémorisées. Ils établissent alors les relations entre leurs déplacements et les représentations de ceux-ci. Le passage aux représentations planes par le biais du dessin les amène à commencer à mettre intuitivement en relation des perceptions en trois dimensions et des codages en deux dimensions faisant appel à certaines formes géométriques (rectangles, carrés, triangles, cercles). Ces mises en relations seront plus précisément étudiées à l'école élémentaire, mais elles peuvent déjà être utilisées pour coder des déplacements ou des représentations spatiales. De plus, les dessins, comme les textes présentés sur des pages ou les productions graphiques, initient les enfants à se repérer et à s'orienter dans un espace à deux dimensions, celui de la page mais aussi celui des cahiers et des livres. ».

Faire l'expérience de l'espace

On choisit des activités pour apprendre à effectuer des repérages dans l'espace réel (essentiellement dans le méso espace) permettent de :
– situer des objets par rapport à soi, le centre du repère étant l'enfant lui même : « devant moi, à ma gauche, derrière moi, à ma droite, à côté de moi. . . » ;
– se situer par rapport à des objet, le centre de repère étant l'objet : « je suis devant, je suis à côté, je sui loin. . . » ;
– situer des objets les uns par rapport aux autres, où le centre du repère peut varier « en haut, en bas, à droite de, à gauche de, en dessous de . . . »
– se repérer lorsqu'on se déplace, ou le centre du repère est l'élève, qui bouge dans son espace.

Exemples de situations

- Repérer les différents espaces de la classe puis de l'école « où est la mascotte de la classe ? »
- Mettre l'élève en situation de se déplacer dans l'école, d'en explorer les lieux : aller à la cantine, à la BCD, aux toilette.
- Réaliser des parcours en salle de motricité.
- Jeux de Jacques a dit, chasse au trésor, kim visuel, placer des personnages.

Représenter l'espace

On choisit des activités où on lit et on élabore des représentations de l'espace : maquettes, schémas, dessins. . .

Exemples de situations

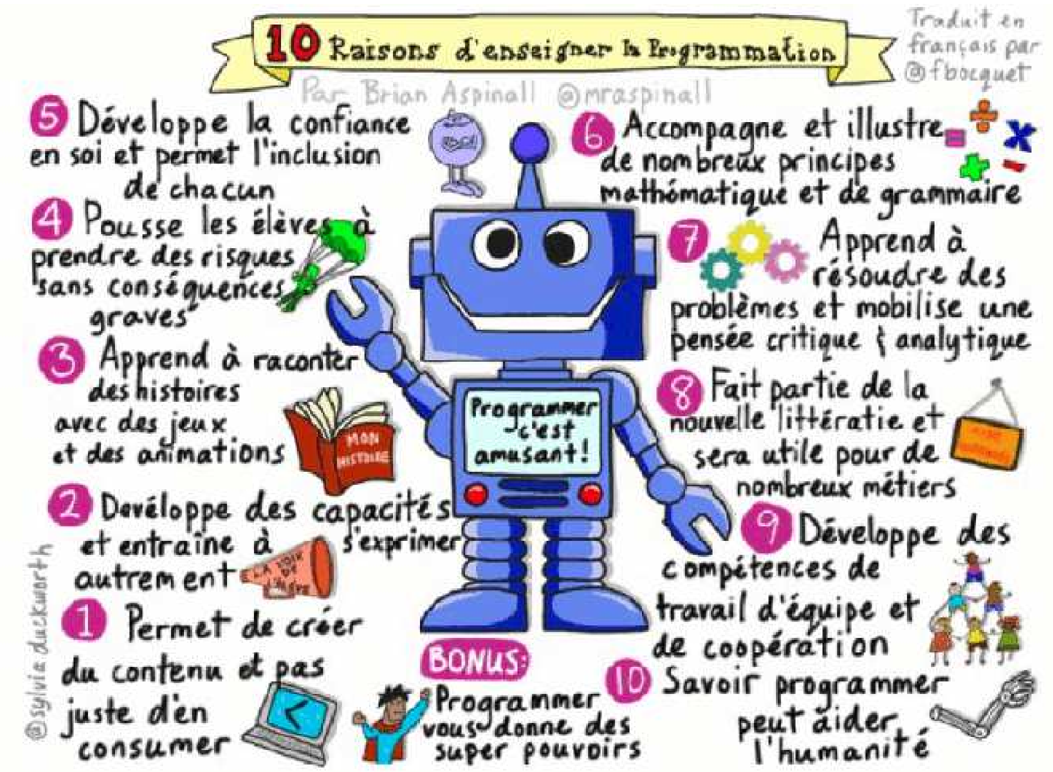
- Manipuler des photos des différents lieux de l'école (classe, salle de jeux, cour). Décrire et apprendre à reconnaître et associer ces lieu à sa photo.
- Réaliser une maquette, un plan, se servir d'un plan pour se déplacer)
- Observer des objets suivant des vues différentes, les représenter.
- Jeux d'organisation spatiale dans le micro-espace : reproduire, coder, observer, prendre en compte des contraintes, créer un assemblage de solides.

B. Repérage et codage

Pourquoi enseigner le code à l'école ?

D'après le document *Proposition d'orientations générales pour un programme d'informatique à l'école primaire* [abi13] : « L'école primaire doit être le temps de la découverte des concepts fondamentaux de l'informatique, celui où l'on parle aux élèves, avec leurs mots, à partir de leur quotidien et de leurs connaissances acquises dans les autres disciplines, d'informations, de langages de programmation, d'algorithmes et de machines. L'enseignement de l'informatique à l'école nous semble être trop souvent limité à l'utilisation d'ordinateurs et de logiciels créés par d'autres. Cette vision dénature une discipline scientifique et technique qui donne un rôle essentiel à l'abstraction et à l'expérimentation personnelle. Faire de l'informatique ne consiste pas à passer des heures devant un écran, mais à acquérir des notions fondamentales et universelles. L'initiation à l'informatique doit donc n'être liée ni à un ordinateur particulier, ni à un logiciel particulier, ni à un langage particulier. Elle doit par ailleurs chercher un équilibre entre des activités fondées sur l'utilisation d'un ordinateur et des activités débranchées, c'est-à-dire ne recourant pas à une telle utilisation. »

En effet, les élèves ont souvent une attitude consommatrice vis-à-vis de l'informatique : on allume, on choisit un logiciel ou une application, puis on applique « bêtement ». L'idée du code à l'école serait de profiter de l'utilisation de cet outil pour s'interroger sur son fonctionnement, pour lui donner du sens, pour le critiquer, et de cette interrogation pourrait naître l'occasion d'échanges collectifs. L'initiation à l'informatique doit aussi passer par la découverte des concepts fondamentaux de langage et d'algorithmes, sans toujours utiliser un ordinateur pour cela. Voici une illustration de *Brian Aspinall*, traduite par *François Bocquet* qui résume les avantages du code et de la programmation à l'école :



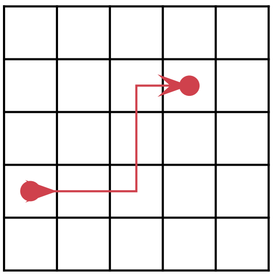
Deux langages de déplacement

Le langage est la capacité de communiquer au moyen d'un système de signes (vocaux, gestuels, graphiques. . .) doté notamment d'un vocabulaire (les mots pour l'exprimer) et d'une grammaire (la syntaxe) [dow].
Une large part des nouveaux programmes concernant le code demande de programmer le déplacement d'un robot ou d'un personnage sur un quadrillage ou sur un écran. Pour cela, nous allons voir deux exemples de langages formels distincts qui peuvent paraître proches, mais qui en réalité ne font pas appel aux mêmes capacités de représentation de l'espace.

Deux langages bien distincts

- le langage A composé des mots de vocabulaire : « haut », « bas », « droite » et « gauche » ;
- le langage R composé des mots de vocabulaire « avancer », « tourner à droite » (qui signifie « tourner sur soi-même d'un quart de tour vers la droite ») et « tourner à gauche ».

Supposons, par exemple, que l'on souhaite coder le déplacement du quadrillage suivant :



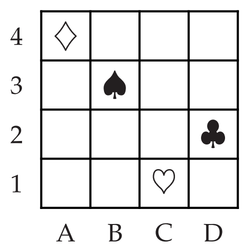
Avec le langage A :
droite - droite - haut - haut - droite

Avec le langage R :
avancer - avancer - tourner à gauche - avancer - avancer - tourner à droite - avancer

Hormis le fait que le nombre d'instructions est supérieur dans le langage R, une autre différence très importante du point de vue de la structuration apparait ici : pour le langage A, le déplacement se fait comme si on se plaçait depuis l'extérieur du quadrillage, par exemple avec une vue du dessus. Ce repérage dépend donc de l'orientation de la feuille, indépendamment du point de vue de l'observateur. Pour ces raisons, il est appelé repérage **Absolu**.
En revanche, pour le langage R, c'est un autre point de vue qui est adopté : on se met à la place de l'observateur et l'orientation du quadrillage n'a aucun effet sur le codage obtenu. Le repérage est qualifié de **Relatif**.
On pourra alors étudier ces deux langages et les comparer : apprendre à traduire un itinéraire d'un langage dans un autre ; étudier les avantages et inconvénients de chaque langage ; étudier l'effet d'une « erreur » ; comment améliorer l'ergonomie du code ; rechercher des propriétés. . .

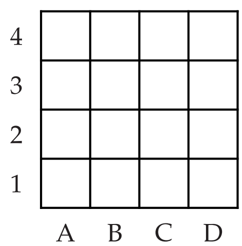
À l'école élémentaire, les élèves apprennent à se déplacer à l'aide d'un quadrillage ou de nœuds : en premier lieu, ils doivent repérer des cases ou des noeuds d'un quadrillage grâce à un repérage absolu (souvent un couple de coordonnées : une lettre et un chiffre). Il n'y a pas lieu dans ce cas de se décentrer : on « lit » directement les coordonnées de la case. L'exercice doit se faire dans les deux sens (codage et décodage).

1) Ecris la position de chaque forme



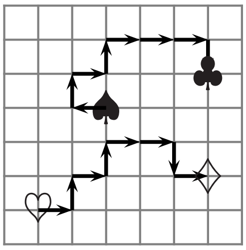
♢(,)
♡(,)
♠(,)
♣(,)

2) Dessine les formes sur le quadrillage



♢(D,2)
♡(A,4)
♠(B,1)
♣(C,3)

Puis, l'élève apprend à se déplacer sur un quadrillage en codant les déplacements.



Ecris le message pour coder le déplacement

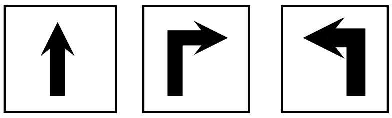
♠									♣

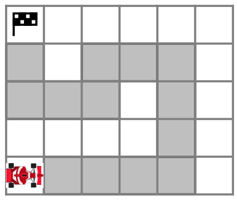
♡	→	↑	→	↑	→	→	↓	→	♢

Nous sommes ici dans un déplacement fléché transposé dans un langage absolu plus « visuel ». Le message peut être amélioré en remplaçant par exemple la suite « → → » par « 2 → », par exemple.

Le langage relatif demande plus d'abstraction et l'élève doit se décentrer afin de se mettre à la place de l'objet que l'on veut faire bouger. C'est régulièrement ce type de langage qui est utilisé dans la robotique et la programmation car il ne dépend pas de l'endroit duquel on se place.

Exemple Coder le déplacement de la voiture jusqu'au drapeau d'arrivée. La voiture se déplace selon les instructions qu'elle reçoit, comme un conducteur qui exécute les instructions données par son GPS.





Il est important de faire verbaliser les élèves sur la signification des flèches : la première flèche (avancer) correspond implicitement à une déplacement d'une case « dans le sens de la voiture ». De la même manière, la deuxième flèche (tourner à droite) ne correspond pas à un déplacement latéral vers la droite, mais à un quart de tour vers la droite, sans toutefois changer de case. On observe ainsi une différence entre l'utilisation réelle de l'action « tourner à droite » et son utilisation dans un algorithme : en effet, lorsqu'un élève est à pied ou à vélo et qu'il tourne à droite, cette action est associée à un déplacement en même temps qu'il tourne alors que, en programmation, elle correspond uniquement à une rotation tout en restant sur place.

C. Repères de progressivité à l'école élémentaire

Ce que disent les repères annuels

– **Au CP**, les élèves représentent des lieux et codent des déplacements se situant dans la classe en mode débranché (papier/crayon, activité de motricité), puis dans l'environnement de l'école.
Ils peuvent commencer à coder des déplacements à l'aide d'un logiciel de programmation adapté.
– **Au CE1 et CE2**, les élèves représentent des lieux et codent des déplacements se situant dans le quartier proche en mode débranché. Ils commencent, ou poursuivent le codage des déplacements à l'aide d'un logiciel au CE1, et consolident ces codage au CE2 : ils comprennent et produisent des algorithmes simples pour la programmation des déplacements d'un robot ou ceux d'un personnage sur un écran tout en continuant à jouer physiquement ces situations dans l'espace concret.
– **Au CM1 et CM2**, les élèves apprennent à programmer le déplacement d'un personnage sur un écran : ils commencent par compléter de tels programmes, puis ils apprennent à corriger un programme erroné. Enfin, ils créent eux-mêmes des programmes (en absolu ou relatif) permettant d'obtenir des déplacements.

Repères didactiques

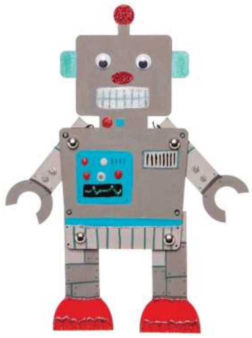
Un exemple de progression

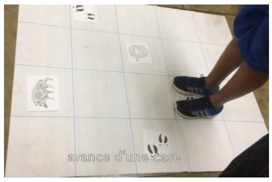
On adoptera une progression en travaillant d'abord dans le méso-espace afin que les élèves puissent appréhender cet espace pour passer progressivement de la manipulation de robots au travail dans le micro-espace.

méso espace

Le robot idiot

code
algorithme
programme



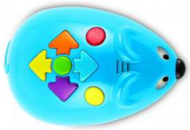


Manipulation de robots

capteurs
robot
automate

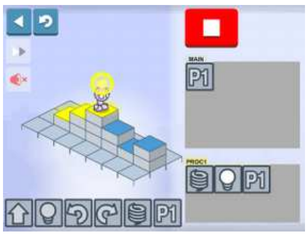
beebot

robot souris

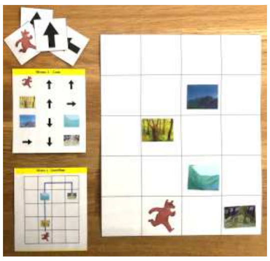


thymio

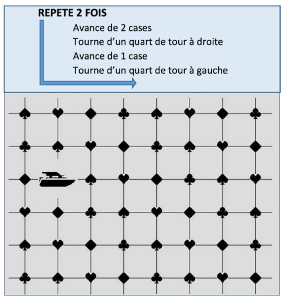
Logiciels



Cartes



Papier-crayon



micro espace

Le site [La main à la pâte] propose de nombreuses activités à faire faire aux élèves, du cycle 1 au cycle 4.

D. Outils pour coder et programmer !

Passons de la théorie à la pratique avec une liste de ressources (non exhaustive!!!) qui permettent d'initier des enfants, même très jeunes, aux principes de la programmation et de la logique sous différentes formes.

Les jeux débranchés	
Robot-idiot	Le « robot-idiot » doit sortir d'un labyrinthe que l'on aura construit sur une nappe, à l'aide de cerceaux, ou en dessinant à la craie sur le sol de la cour. Grâce à des instructions simples, il s'agit de faire sortir le robot du labyrinthe. Prix : gratuit. C1-C3.
My robotic Friends	Il s'agit de donner des instructions afin de construire une pyramide avec des gobelets, à l'aide d'un code fléché à écrire sur une feuille de papier. Prix : gratuit. C2-C3.

Les robots	
Bee-bot blue-bot	Abeille motorisée, utilisation simple par programmation directe sur le robot à l'aide de boutons. La version blue a un module bluetooth permettant de la piloter à distance. Prix : 85/125 €. C1-C2.
Thymio	Petit robot permettant de découvrir l'univers de la robotique. Programmation par bloc visuels, scratch, texte. Différents capteurs intégrés : proximité, accéléromètre, température, microphone. Prix : 150/195 €. C2-C3.

Les jeux	
Gcompris : labyrinthe	Logiciel éducatif proposant des activités variées ludiques et pédagogiques aux enfants de 2 à 10 ans. Labyrinthe : utilisation de touches fléchées pour sortir d'un labyrinthe, deux modes de fonctionnement (absolu ou relatif). Prix : gratuit. C1-C3.
Lightbot	Application de pré-apprentissage du code. Les enfants doivent planifier les déplacements et les actions d'un robot grâce à des éléments de mouvements à glisser-déposer. Prix : version gratuite, sur tablette (IOS et Android). C2-C3.

La programmation par blocs	
Scratch junior	Avec ScratchJr, les jeunes enfants peuvent programmer leurs propres histoires et des jeux interactifs. Ils apprennent à résoudre des problèmes, à construire des projets et expriment leur créativité. Fonctionne grâce à des blocs visuels. Prix : gratuit (IOS et Android). C1-C3.
Scratch	Scratch est un langage de programmation et une communauté en ligne où les élèves peuvent programmer et partager des histoires, des jeux et des animations. Programmation textuelle par blocs. Prix : gratuit. C2-C3.

Les sites Internet dédiés	
Studio code	Des cours de code progressifs pour débuter en informatique (une vingtaine d'étapes par cours). À partir de 4 ans. Possibilité de s'inscrire (en tant qu'enseignant ou élève) afin d'enregistrer la progression. Vidéos en anglais, activités en français. Prix : gratuit. C1-C3.
Hour of code	Heure de Code est une introduction d'une heure à l'informatique de manière ludique inclus dans studio code. Possibilité d'organiser son heure de code avec diverses licences : la reine des neiges, Minecraft, StarWars... Prix : gratuit. C2-C3.

2. Les solides de l'espace

A. Définir l'espace et son vocabulaire

D'après *Guy Brousseau*, enseigner l'espace (comment y agir, l'utiliser, le décrire,. . .) et enseigner la géométrie sont, pour l'école élémentaire (et secondaire), deux projets didactiques complémentaires. Leurs caractéristiques font apparaître trois modèles de relations d'un individu avec l'espace : le micro espace, le méso espace, et le macro espace dont on peut en résumer les principaux éléments dans le tableau suivant :

	Micro-espace	**Méso-espace**	**Macro-espace**
Vision	Espace proche	Espace accessible à une vision globale	Espace non totalement visible
Position de l'enfant	Il est à l'extérieur	Il est à l'intérieur	Il est à l'intérieur
Les objets	On peut les voir, les toucher, les déplacer	Ils sont fixes ou semi-fixes	Ils sont fixes et pas tous visibles
Exemple	La table	La classe, la cour	Le quartier

Afin de faire émerger et d'enrichir les concepts géométriques, en particulier dans l'espace, le programme propose différents types de tâches aux élèves, en particulier :

Précisions de vocabulaire

- **Reconnaître** un solide, c'est l'identifier, de manière perceptive ou en utilisant des définitions et des propriétés.
- **Nommer** un solide consiste tout simplement à lui donner un nom.
- **Décrire** un solide signifie élaborer un message en utilisant le vocabulaire géométrique approprié et en s'appuyant sur les caractéristiques de la figure pour en permettre sa représentation ou son identification.
- **Construire** un solide se dit de la réalisation de l'objet dont on connait le nom, la représentation en perspective cavalière, la description. . . On pourra utiliser du matériel comme les polydrons, des pailles, des patrons et développements.

B. Repères de progressivité

– **Au Cycle 1** : les enfants regroupent les objets, soit en fonction de leur aspect, soit en fonction de leur utilisation familière. à la maternelle, ils sont incités à « mettre ensemble ce qui va ensemble » pour comprendre que tout objet peut appartenir à plusieurs catégories et que certains objets ne peuvent pas appartenir à celles-ci.
Par des observations, des comparaisons, des tris, les enfants sont amenés à mieux distinguer différentes formes. Ils apprennent progressivement à reconnaître, distinguer des solides puis des formes planes. Il faut être attentif au fait que l'appréhension des formes planes est plus abstraite que celle des solides et que certains termes prêtent à confusion (carré/cube).
On prendra garde à utiliser un vocabulaire précis (cube, boule, pyramide, cylindre que les enfants sont entraînés ainsi à comprendre d'abord puis à utiliser à bon escient, mais la manipulation du vocabulaire mathématique n'est pas un objectif de l'école maternelle.

Repères didactiques

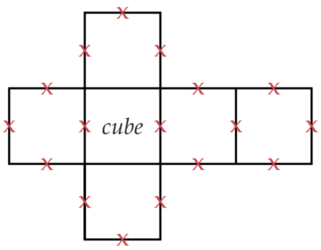
– **Au CP**, les élèves fréquentent régulièrement les solides, en passant d'une approche perceptive à une approche analytique. Ils reconnaissent des solides variés (cube, pavé droit, boule, cône, cylindre, pyramide), dans un ensemble de solides fournis par le professeur ou dans leur environnement proche. Ceci peut se faire à travers le jeu du portrait ou de jeux de Kim. Ils décrivent le cube et le pavé droit en utilisant les termes face et sommet et en décrivant leurs faces (carré, rectangle).

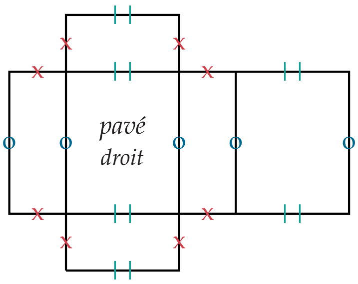
–**Au CE1**, les élèves apprennent à nommer ces solides et à les décrire en utilisant le vocabulaire adapté. Ils construisent un cube avec des carrés ou avec des tiges que l'on peut assembler.

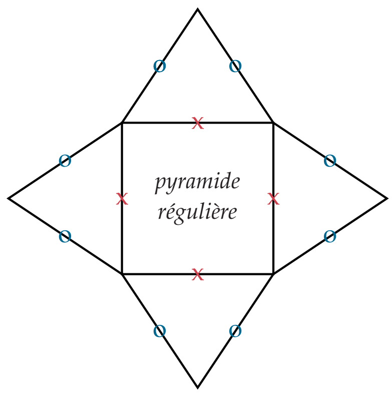
– **Au CE2**, les élèves nomment et décrivent les solides découverts aux CP et CE1 et ils approchent la notion de patron du cube (par exemple, en dépliant une boite cubique cartonnée).

– **Au CM1**, les élèves apprennent à reconnaître et à nommer une boule, un cylindre, un cône, un cube, un pavé droit, un prisme droit, une pyramide. Ils apprennent à construire un patron d'un cube de dimension donnée.

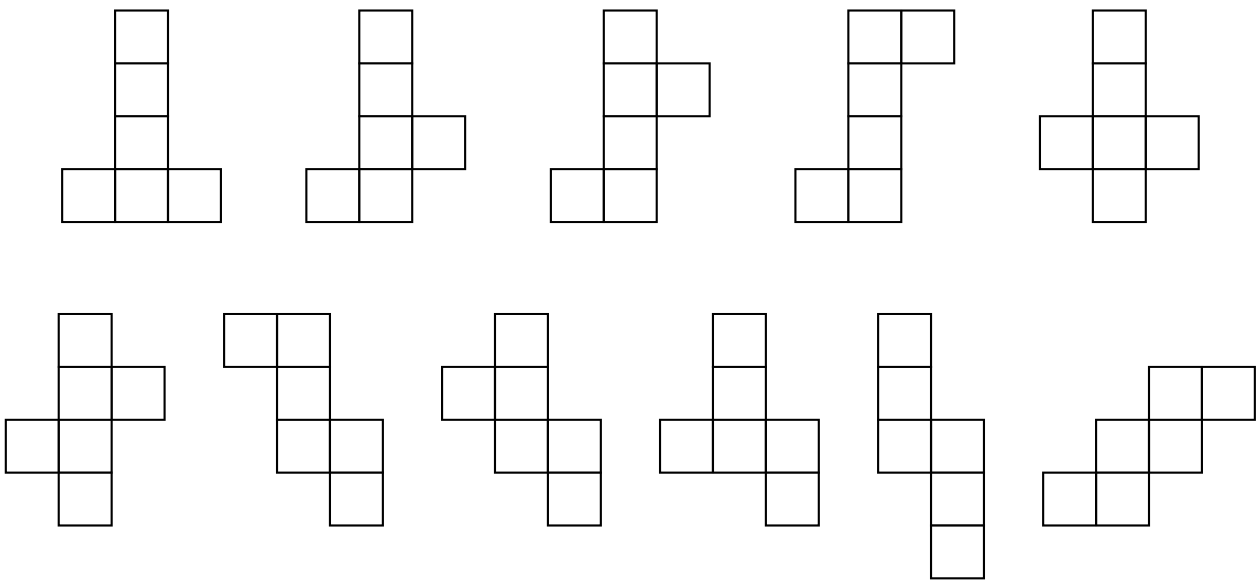
– **Au CM2**, ils apprennent à construire, pour un cube de dimension donnée, des patrons différents. Ils apprennent à reconnaître, parmi un ensemble de patrons et de faux patrons donnés, ceux qui correspondent à un solide donné : cube, pavé droit, pyramide.







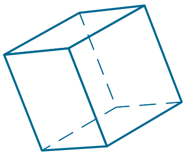
Les onze patrons du cube



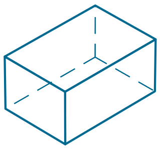
Repères didactiques

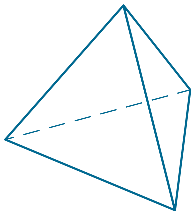
C. les solides de l'école

Les polyèdres

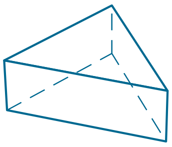


Cube : cas particulier du pavé droit lorsque toutes les faces sont carrées.





Parallélépipède ou pavé : du grec *parallelos*, parallèle et *epıdon*, surface. Cas particulier du prisme droit lorsque la base est un rectangle.



Pyramide : une base polygonale, un sommet, des faces latérales triangulaires, qui sont isocèles et superposables si la pyramide est régulière.

Prisme : du grec *prismatos*, scié. Deux bases polygonales, des faces latérales qui sont des parallélogrammes, rectangles si le prisme est droit.

prismes

pyramides

cylindres

cônes

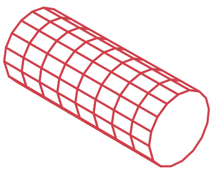
boules

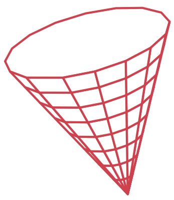
Les solides non polyédriques

Cylindre : du grec *kulindros*, rouleau. Deux bases en forme de disques, une surface latérale.

Cône : du grec *kônos*, pomme de pain. Une base en forme de disque, une surface latérale, un sommet.

La **sphère** : du grec *sphaîra*, corps rond, est la surface extérieure de la **boule**.



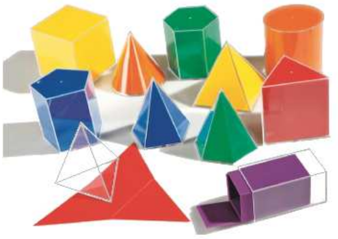


D. Matériel pédagogique pour travailler avec les solides

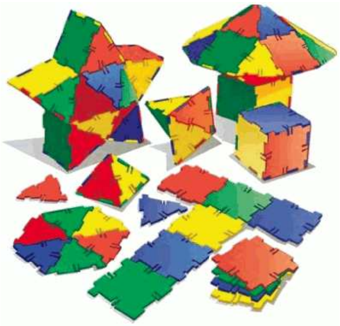
Il existe un matériel pédagogique bien adapté à la géométrie dans l'espace. On peut cependant tout à fait faire de la géométrie dans l'espace avec des objets usuels de la vie courante (boites de conserve, emballages, jouets. . .).

Kubix : jeu de construction en bois pour développer l'imagination et travailler sur les solides. Assortiment de cubes, de prismes, de cylindres, de demi-cylindres, de pavés, de cônes tout en couleur.

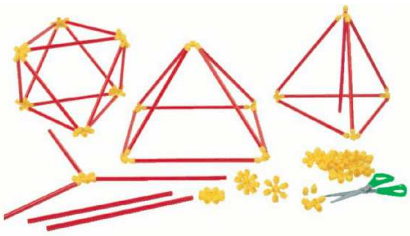
Solides prêts à l'emploi : en bois ou en plastique, c'est un assortiment de différentes formes, qui permettent de décrire ces solides en les manipulant. Il en existe également en plastique transparent pouvant contenir un patron.



Polydrons : polygones en plastique, variés, qui peuvent être assemblés par leur arête pour construire des polyèdres. Il en existe également des sphériques afin de construire sphères, cylindres et cônes.



Tiges et connecteurs : en plastique, ou avec des pailles, des allumettes et de la pâte à modeler. Les tiges sont à imbriquer grâce à des connecteurs pour fabriquer des solides à partir de leurs arêtes.



Repères didactiques

Cubes à emboiter : petits cubes de plastique qui peuvent être assemblés par face, à l'aide de clips, pour construire des polyèdres et travailler sur les représentations de face, de côté et du dessus par exemple.

E. Quelques erreurs et difficultés des élèves

Au niveau de la reconnaissance et de la description

Il s'agit pour l'élève de reconnaître des propriétés d'un solide : nombre de faces, d'arêtes, de sommets, nature des faces, et en fonction de ces caractéristiques de lui donner un nom. Plusieurs cas peuvent se produire :

Difficultés

- l'élève a le solide à sa disposition : il suffit de lire directement ses propriétés. Le risque est de compter deux fois des objets identiques ;
- l'élève voit le solide mais ne peut le manipuler ni tourner autour : il doit imaginer ce qu'il ne voit pas, ce qui suppose qu'il a déjà eu l'occasion de manipuler ce solide ;
- l'élève ne dispose que du tracé en perspective de ce solide : il faut qu'il connaisse et se soit approprié les conventions de la perspective cavalière.

Au niveau des patrons

Deux types de tâches peuvent être proposées à l'élève :

– reconnaître si un dessin donné est le patron ou non d'un solide ;

– construire le patron du solide.

Difficultés

- toutes les faces du solide doivent être représentées ;
- les côtés des différents polygones qui représentent les faces et qui se correspondent après pliage doivent être de même dimension ; item deux faces ne doivent pas se superposer ;
- si l'élève n'a pas le droit de manipuler l'objet, il devra construire le patron en étalant mentalement les différentes faces de l'objet ;
- beaucoup d'élèves s'imaginent qu'un solide ne possède qu'un seul patron.

Sujet proposé aux M2 par la FDE de Montpellier, 2022

Consigne : Vous êtes enseignant(e) en Grande Section de maternelle. Vous souhaitez mettre en œuvre une séquence permettant de faire acquérir la compétence « Reconnaitre et nommer quelques formes planes (carré, triangle, cercle ou disque, rectangle) et ce dans toutes leurs orientations et configurations ».
À partir de la ressource placée en annexe 1 et qui représente la première séance, présentez la deuxième séance de cette séquence, sous forme d'atelier dirigé, dont l'objectif est de passer d'une perception globale à une perception plus analytique du rectangle.

Compétence(s) et connaissance(s) visée(s) : Reconnaitre et nommer quelques formes planes (carré, triangle, cercle ou disque, rectangle) et ce dans toutes leurs orientations et configurations.

Contexte de la séance d'enseignement :
- cycle d'enseignement : cycle 1 ;
- niveau de la classe : GS ;
- domaine : Explorer des formes, des grandeurs, des suites organisées ;
- période : période 1.

Documents fournis au candidat :

Document 1 : Extrait du programme consolidé de cycle 1 publié au BO n°25 du 24/06/2021.

4.2. Explorer des formes, des grandeurs, des suites organisées

Très tôt, les jeunes enfants discernent intuitivement des formes (carré, triangle, etc.) et des grandeurs (longueur, contenance, masse, aire, etc.). À l'école maternelle, ils construisent des connaissances et des repères sur quelques formes et grandeurs. L'approche des formes planes, des objets de l'espace, des grandeurs, se fait par la perception visuelle, la manipulation et la coordination d'actions sur des objets. Cette approche est soutenue par le langage : il permet de décrire ces objets et ces actions et favorise l'identification de premières caractéristiques descriptives. Ces connaissances qui resteront limitées constituent une première approche de la géométrie et de la mesure qui seront enseignées aux cycles 2 et 3.

4.2.1. Objectifs visés et éléments de progressivité

Très tôt, les enfants regroupent les objets, soit en fonction de leur aspect, soit en fonction de leur utilisation familière ou de leurs effets. À l'école, ils sont incités à « mettre ensemble ce qui va ensemble » pour comprendre que tout objet peut appartenir à plusieurs catégories et que certains objets ne peuvent pas appartenir à celles-ci.
Par des observations, des comparaisons, des tris, les enfants sont amenés à mieux distinguer différents types de critères : forme, longueur, masse, contenance essentiellement. Ils apprennent **progressivement** à reconnaître, distinguer, décrire des solides puis des formes planes. Ils commencent à appréhender la notion d'alignement qu'ils peuvent aussi expérimenter dans les séances d'activités physiques. L'enseignant est attentif au fait que l'appréhension des formes planes est plus abstraite que celle des solides et que certains termes prêtent à confusion (carré/cube). L'enseignant utilise un vocabulaire précis (cube, boule, pyramide, cylindre, carré, rectangle, triangle, cercle ou disque - à préférer à « rond ») que les enfants sont entraînés ainsi à comprendre d'abord puis amenés progressivement à utiliser.
Par ailleurs, **dès la petite section**, les enfants sont invités à organiser des suites d'objets en fonction de critères de formes et de couleurs ; les premiers algorithmes qui leur sont proposés sont constitués d'alternances simples. **Dans les années suivantes, progressivement**, ils sont amenés à reconnaître un rythme dans une suite organisée et à continuer cette suite, à inventer des « rythmes » de plus en plus compliqués, à compléter des manques dans une suite organisée.

4.2.2. Ce qui est attendu des enfants en fin d'école maternelle

– Classer des objets en fonction de caractéristiques liées à leur forme.

– Reconnaître quelques solides (cube, pyramide, boule, cylindre).

– Savoir nommer quelques formes planes (carré, triangle, cercle ou disque, rectangle) et ce dans toutes leurs orientations et configurations.

– Classer ou ranger des objets selon un critère de longueur ou de masse ou de contenance.

– Reproduire un assemblage à partir d'un modèle (puzzle, pavage, assemblage de solides).

– Reproduire, dessiner des formes planes.

– Identifier une organisation régulière et poursuivre son application.

Document 2 : Extrait de *Cap Maths GS*. Guide de l'enseignant, Hatier, 2015. pp. 54, 56 et 57.

UNITÉ 2 **SITUATION DE RÉFÉRENCE** — Formes et grandeurs

Les belles boites

OBJECTIF : Passer d'une perception globale d'un objet à une perception plus analytique

ORGANISATION : groupe de 6 en atelier dirigé

DURÉE : 3 séances de 15 min environ chacune

PROBLÈME POSÉ

▶ **Identifier l'ensemble des figures planes qui forment l'enveloppe d'un polyèdre**

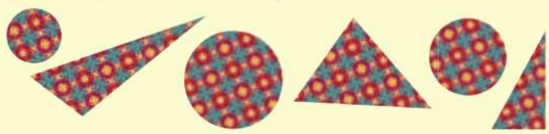
Les élèves vont chacun recevoir une boite parmi trois types de boites parallélépipédiques aux dimensions bien différentes. Ils doivent retrouver parmi les rectangles proposés découpés dans de « jolis » papiers ceux qui recouvrent exactement les faces de la boite.

Matériel pour un atelier de 6 élèves

– **9 boites parallélépipédiques de 3 types différents** : par exemple, 3 boites de céréales identiques, 3 boites de thé identiques, 3 boites de mouchoirs identiques (on a intérêt à consolider les boites avec du ruban adhésif)

– **9 types de rectangles en 6 exemplaires**, découpés dans un ou plusieurs « jolis papiers » du genre papier cadeau, correspondant aux faces rectangulaires des 9 boites :

– **3 disques** de diamètres différents et **3 triangles** de dimensions et de formes différentes dont un triangle rectangle, découpés dans le même « joli papier » :



– 9 barquettes pour contenir les différents types de rectangles

– De la pâte à fixer ou aimants autocollants

– Un plateau par élève

– Une fiche d'observation → *fiche 19*

SÉANCE 1 Les papiers sont proches des boites

1 Appropriation du matériel et de la consigne

Matériel
– **Une boite** choisie parmi les 9 boites et tous les « jolis papiers » mis en vrac sur la table
– De la pâte à fixer

- Présenter le projet aux élèves :
  → Voici une boite que j'ai choisie parmi toutes les boites. Nous allons la décorer. Mo a préparé pour vous des jolis papiers : certains vont bien sur les faces de cette boite, d'autres ne vont pas bien.
- Prendre la boite et montrer comment certains « jolis papiers » recouvrent exactement une face de la boite et d'autres pas : « *Une boite est **exactement recouverte** quand on peut coller sur ses faces des jolis papiers sans débordement ni chevauchement.* » Montrer un exemple de débordement et un exemple de chevauchement.
- Montrer comment placer la pâte à fixer aux quatre coins d'un rectangle pour l'ajuster sur la face à décorer, puis préciser la tâche à venir :
  → Vous allez devoir trouver quels « jolis papiers » vont permettre de recouvrir exactement la boite que je vais vous donner, mais vous ne pourrez **pas les plier**.

2 Recouvrir une boite exactement

La séance se déroule avec le passage d'un élève à la fois, les autres élèves regardent.

Matériel pour un atelier de 6 élèves
– Les **9 boites** et les « jolis papiers » (rectangles, disques et triangles) mis en vrac sur la table
– Un plateau et de la pâte à fixer

- Donner une boite à chaque élève et préciser la consigne :
  → À vous de recouvrir exactement toute la boite qui est devant vous. Vous choisirez **les bons papiers, juste ce qu'il faut,** et les placerez sur votre plateau. Quand vous pensez avoir choisi les bons papiers et juste ce qu'il faut, vous pourrez les coller sur la boite en mettant de la pâte à fixer.

Vu au CRPE en 2022

2

- Observer les démarches des élèves, les engager à faire des essais. Quand les élèves ont placé les papiers sur leur plateau, leur demander de bien vérifier que le recouvrement va être exact et qu'il y a juste ce qu'il faut de rectangles.
- Verbaliser ou engager les enfants à verbaliser leur choix : *« Ce rectangle est trop petit, trop grand, trop long, trop large… »*, *« Il manque un papier, j'en ai pris un de trop… »*, *« Cela dépasse, cela ne recouvre pas, la forme n'est pas pareille… »*. Solliciter les remarques des autres élèves sur les choix de celui qui parle. Engager les élèves à corriger ce qu'ils pensent être faux en changeant de papier.
- Engager chacun à recouvrir sa boite en fixant les rectangles mis sur plateau. Faire verbaliser les constats : *« C'est réussi, ce papier est trop grand, il en manque… »*.
- Engager les élèves à corriger les erreurs : prendre un autre papier, en échanger certains…
- Lors de la **discussion collective**, questionner les élèves sur l'utilisation des « jolis papiers » qui ont la forme de ronds ou de triangles. Conclure avec eux que ces papiers ne vont pas avec les boites que l'on a.

En début de Grande Section, les élèves connaissent en général les noms des formes planes usuelles (rond, carré, triangle, rectangle). Ce vocabulaire est repris en situation dans cette activité. Les figures planes et leurs propriétés seront étudiées en unité 6.

LES BELLES BOITES

1 Trions les emballages

Des élèves de CE1 ont apporté en classe différents emballages présents dans le commerce :

A. différentes boites parallélépipédiques et cubiques ;
B. des prismes droits à bases triangulaires (Toblerone) ou octogonales ;
C. une pyramide à base carrée tronquée (boîte de fromage de chèvre) ;
D. des cylindres (boîtes de conserve diverses, boîte de camembert, rouleau de papier d'aluminium) ;
E. des cônes ;
F. des boules (balles, ballons) ;
G. d'autres emballages (formes ovales, anneaux, boîtes en forme de cœur)

L'enseignant propose un déroulement de la séance suivant deux phases :

- Phase 1 : chaque groupe d'élèves a reçu les mêmes types de solides. La tâche est de constituer des groupes de solides, de mettre ensemble ceux qui se ressemblent et d'écrire pourquoi on les a mis ensemble.
- Phase 2 : Mise en commun collective et discussion sur les classements effectués. Synthèse des résultats.

1) Proposer un classement didactiquement pertinent (selon deux critères) des solides apportés en classe (différent des sept catégories déjà citées : A, B, C. . .). Classer alors les sept catégories suivant ces deux critères.
2) Quels sont les solides présents dans les programmes du cycle 2 ? L'enseignant propose des solides non présents dans ce programme. Justifier son choix.
3) En observant les élèves, l'enseignant leur précise très rapidement qu'il faut s'intéresser **uniquement aux formes** des boites d'emballages. Pourquoi ?
4) Lors de la phase 2, les catégories répertoriées sont : objets ronds, objets carrés, objets « rectangles », objets « triangle » etc. Faire des hypothèses sur l'origine de ces types de réponses.
5) Le rouleau de papier d'aluminium a provoqué des litiges au niveau des élèves. Pourquoi ?
6) Analyser les productions des groupes 1 et 2 :

Groupe 1	Groupe 2
Ces groupes proposent de mettre ensemble :	
A, B et C	A, B et D
F	C et E
G	F et G

7) À la suite de cette première catégorisation, l'enseignant demande aux élèves de faire bouger les solides sur la table et de trier ceux qui roulent, et ceux qui ne roulent pas.
   a) Émettre une hypothèse sur l'intention de l'enseignant.
   b) Ce critère est-il toujours pertinent ?

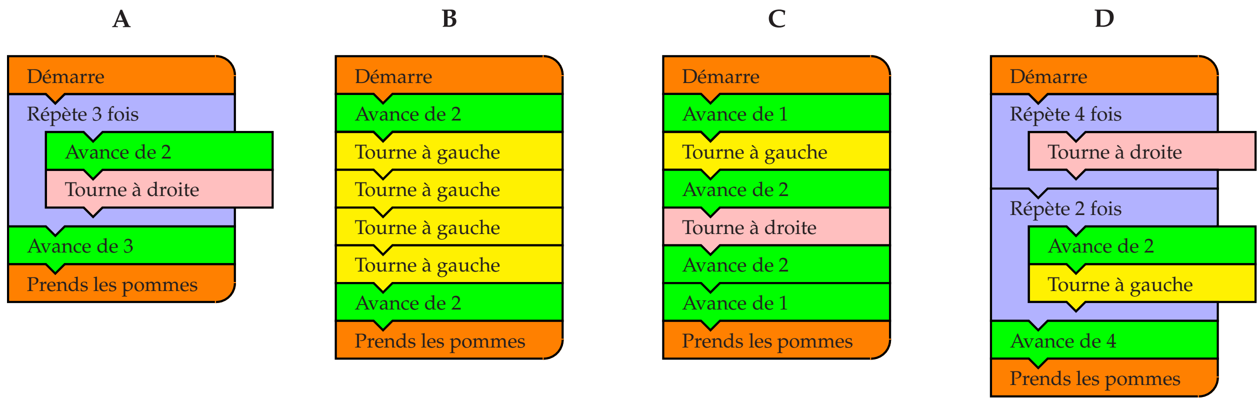
Analyse de documents

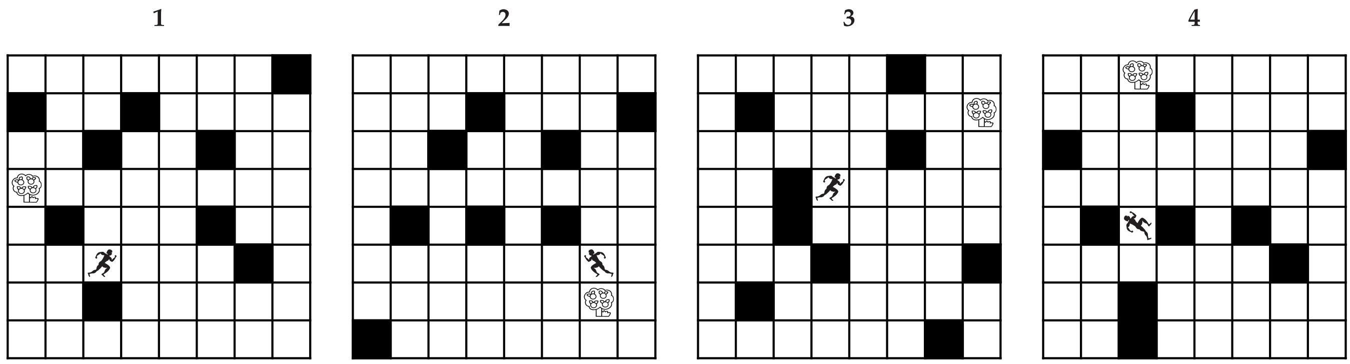
2 Programmation

D'après une activité testée dans une école de Saint-Denis 3, Réunion.

Après avoir travaillé en littérature sur le douze travaux d'Hercule, et notamment le travail n°11 dans lequel Hercule doit dérober les pommes d'or du jardin d'Hespérides, on propose dans une classe de CM2 une activité de mathématiques s'y rapportant.

Les élèves sont regroupés par quatre et ont a leur disposition les huit cartes suivantes :





Les quatre cartes A, B, C et D proposent un programme de déplacement, les quatre cartes 1, 2, 3 et 4 sont constituées d'un quadrillage dans lequel trois sortes de cases sont représentées :

- des cases noires, par lesquelles on ne peut pas passer (ce sont des murs) ;
- une case avec un personnage : il s'agit d'Hercule ;
- une case avec le pommier aux pommes d'or.

Les élèves doivent associer un programme à son quadrillage : l'association est réussie si, lorsqu'on déroule l'algorithme du programme, le personnage d'Hercule arrive effectivement au pommier.

1) Dans quel domaine mathématique se situe-t-on ?
2) Résoudre l'activité proposée aux élèves en expliquant la procédure utilisée.
3) Citer deux compétences requises pour faire cette activité en CM2 ?
4) Citer deux difficultés prévisibles.
5) Quelle aide matérielle peut-on proposer à des élèves qui n'arriveraient pas à résoudre l'activité ?
6) Dans un second temps, on propose aux groupes d'élèves de créer, pour chaque programme, un programme équivalent comportant un minimum d'instructions (sans nécessairement passer par le même chemin, mais ayant même départ et même arrivée). Quelles seraient ces programmes ?

3 CRPE 2005 Créteil

1) Quelles sont les intentions d'un enseignant qui utiliserait l'ensemble des documents suivants :
   - Document 1 : Extrait de Diagonale, livre du maître 2002, CE2.
   - Document 2 : Exercice 1 (extrait de Diagonale, livre de l'élève 2002, CE2), et exercices 2, 3 et 4 (extraits de Euro-Maths CE2, 2003).
2) Dans le document extrait du livre du maître (Document 1), il est demandé de donner une signification du mot « patron ». Que donneriez-vous comme signification aux élèves ?
3) Expliquer sans avoir à découper réellement pourquoi les assemblages b, c, d (exercice 1, document 2) ne sont pas des patrons de cubes (on aura intérêt à mettre en place un codage pour expliquer).
4) Comparer les exercices 1 et 2 (document 2) aux niveaux : de la présentation, de la consigne, de la vérification.
5) Comment justifier l'exercice 3 après avoir travaillé sur l'exercice 2 ?
6) Comment justifier l'exercice 4 après avoir proposé de travailler sur l'exercice 2 ?

Document 1

MATERIEL :
- le livre de l'élève page 131 ;
- une vingtaine de carrés (de quatre carreaux sur quatre) par groupe de deux élèves ;
- des morceaux d'adhésif repositionnables ;
- une paire de ciseaux ;
- une feuille de papier quadrillé.

Remarques :
- Utiliser des feuilles rigides (fiches de bristol) pour faciliter les manipulations. On peut faire découper les carrés par les élèves.

1ère phase : fabriquer des assemblages de carrés.

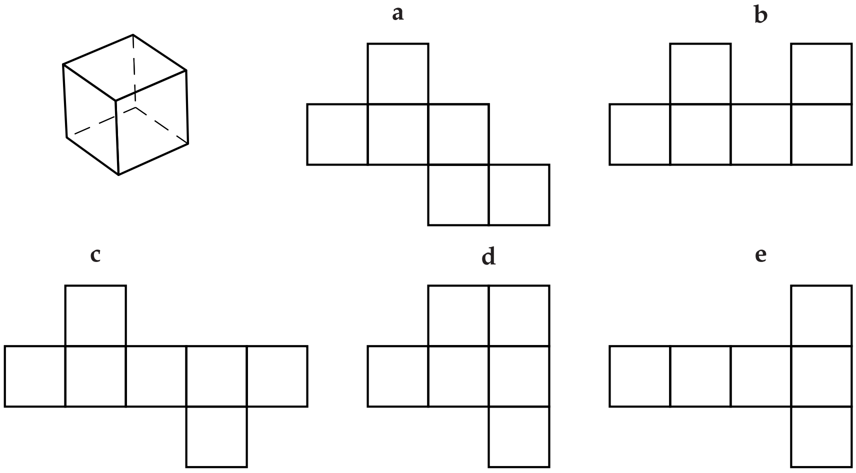
• Regrouper les élèves par deux et leur demander d'assembler des carrés pour obtenir un patron d'un cube. Leur préciser les étapes du travail :
– recherche et réalisation d'un assemblage ;
– reproduction de l'assemblage sur la feuille quadrillée (un carreau représentant une face) ;
– validation par construction d'un cube ;
– en cas de réussite, inscription de OUI à côté de la reproduction de l'assemblage fait sur la feuille, dans le cas contraire, inscription de NON. Faire rechercher ainsi divers assemblages et vérifier s'il s'agit de patrons d'un cube ou non.
• Partager le tableau en deux parties : une colonne pour les bons patrons, une autre pour les mauvais patrons. Collectivement, demander aux élèves de venir, équipe après équipe, faire une nouvelle proposition d'assemblage et de la dessiner dans la bonne colonne (bon ou mauvais patron).
• Quand cinq ou six assemblages figurent au tableau, inviter les élèves à les observer et à formuler des remarques, en particulier par rapport aux raisons qui font que les assemblages de la colonne mauvais patrons ne conviennent pas.

• Rappeler la signification du mot « patron ».
• Pour fixer les faces entre elles, inviter les élèves à utiliser de petites bandes d'adhésif repositionnable.
• Dans ce travail, les élèves seront amenés à faire certains constats dans la construction du cube.
• Il ne s'agit pas d'obtenir de façon exhaustive tous les patrons d'un cube, mais de permettre aux élèves de relever des informations permettant d'éliminer certains assemblages, de reconnaitre les caractéristiques de bons patrons.

Document 2

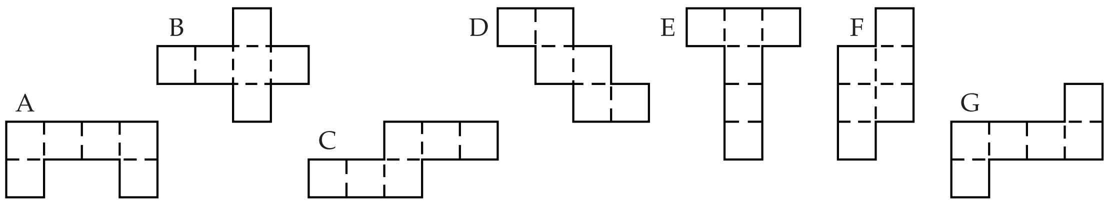
Exercice 1

Trouve les deux assemblages de carrés qui permettent de construire un cube. Reproduis-les.



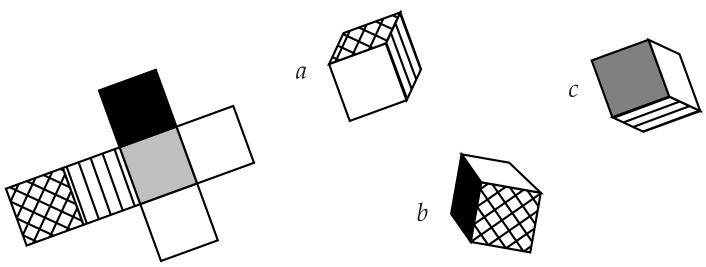
Exercice 2

Quelles figures te permettent de reconstituer un cube ? Vérifie en essayant de construire le cube, après avoir reproduit les figures. Utilise du papier quadrillé.

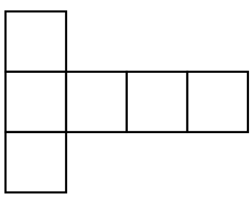


Exercice 3

À quel cube correspond ce patron ? Vérifie en construisant le cube après avoir reproduit le patron sur du papier quadrillé.



Exercice 4



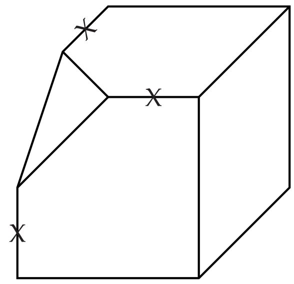
Sur un dé à jouer, la somme des points inscrits sur deux faces opposées est 7. Inscrits les points sur le patron. Puis, vérifie tes prévisions en construisant le dé.

4 CRPE 2010 G2

Dans une séquence sur les patrons de solides avec ses élèves de CM1, un enseignant met en œuvre deux activités proposées dans l'ouvrage « Apprentissages géométriques et résolution de problèmes » (ERMEL, Hatier 2006).

Première activité.

Description rapide de la séance : « *Les élèves doivent construire, dans un premier temps, des schémas correspondant au patron d'un solide non usuel : le cube tronqué (ci-contre). Les schémas font l'objet d'une mise en commun, les élèves doivent ensuite construire ce patron à l'aide de gabarits.* »



Objectifs de la séance : « *Amener les élèves à anticiper pour reconnaître si un assemblage de figures planes constitue ou non un patron. Ils doivent également reconnaître si deux patrons différents correspondent ou non à un même solide.* »

En début de séance, l'enseignant montre aux élèves le cube tronqué qu'il laissera visible par tous jusqu'à la fin du travail. La séance se déroule en deux phases.

Première phase : les élèves doivent dessiner à main levée des schémas correspondant à des patrons du cube tronqué présenté. Cette phase est suivie d'une mise en commun qui permet de mettre en évidence des caractéristiques que tout patron valide doit posséder.

1) Citer trois caractéristiques parmi celles qui pourront ainsi être dégagées.

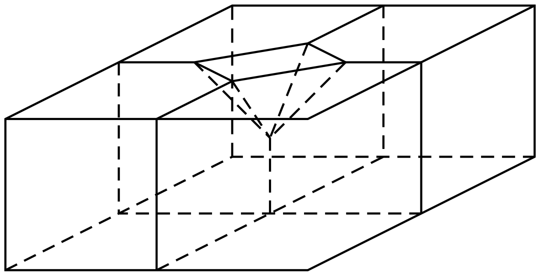
Deuxième phase : les élèves doivent construire effectivement un patron du cube tronqué.

2) a) Lors de cette phase, l'enseignant fournit aux élèves des gabarits de différentes formes planes dont celles des faces du cube tronqué (chaque gabarit est en un seul exemplaire par élève). Donner deux arguments pouvant justifier ce choix.

b) Certains élèves peuvent rencontrer des difficultés à réaliser le patron de ce solide. Citer deux aides matérielles que l'enseignant peut leur fournir.

Deuxième activité.

L'enseignant demande à ses élèves d'assembler par quatre les cubes tronqués construits précédemment (voir ci-dessous) et de réaliser le patron du solide qui permettra de « boucher le trou ».



3) Quelle est la difficulté particulière de cette activité pour les élèves ?

4) À l'issue de ces deux activités, l'enseignant fait une synthèse sur la notion de patron. Donner une formulation de la trace écrite qui pourrait être proposée aux élèves.

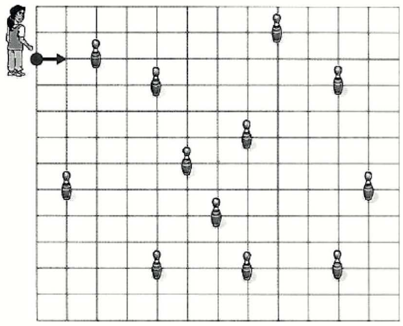
5 **CRPE 2017 G3**

Un enseignant propose l'exercice ci-dessous à des élèves de CM1.

En séance d'E.P.S., les élèves doivent se déplacer sur les lignes de ce quadrillage tracé au sol.
On estime que pour se déplacer sur le côté d'un carreau il faut 1 seconde.
Programme un parcours pour récolter le plus de quilles possible en sachant que l'épreuve sera arrêtée au bout de 20 secondes.
Combien de quilles as-tu ramassées ?

Doc. **Instructions de programmation**

- **av 1** (avancer pendant une seconde)
- **tg 90** (tourner à gauche d'un angle droit)
- **rq** (ramasser une quille)
- **av 2** (avancer pendant 2 secondes)
- **td 90** (tourner à droite d'un angle droit)



Exercice tiré de Graine de maths CM1, Nathan, 2016

1) Citer deux connaissances ou savoir-faire mathématiques nécessaires à la réussite de cet exercice.

2) Utiliser les deux productions d'élèves reproduites ci-après pour répondre aux questions ci-dessous.

a) Analyser chaque production en termes de réussites et d'erreurs

b) Proposer deux dispositifs de remédiation que l'enseignant pourrait mettre en œuvre à l'attention d'Oriane.

av 2 ~~av~~ rq av 2 tg 90 av 1 rq av 2
tg 90 av 2 av 1 rq td 90 av 1 tg 90
av 2 rq td 90 av 2 tg 90 av 1 rq av 1
td 90 av 2 rq

Oriane

J'ai ramassée 6 quilles.

av 2 rq ~~td 90~~ tg 90 av 1 td 90 av 2 av 2 av 2 rq
av 2 rq ~~td 90~~ tg 90 ~~av 1~~ ~~td 90~~ av 1 td 90 av 2 av 2 av 2 rq
av 2 2 tg 90 av 2 tg 90 av 4 rq
j'ai ramassé 5 quilles

Samuel

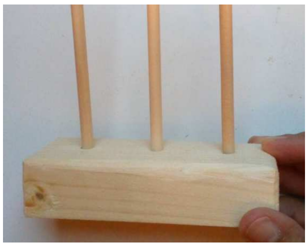
1 C1 - Les abaques

Objectifs et compétences

- Comprendre la notion de modèle à reproduire.
- Respecter un ordre vertical (les pièces à disposer étant soumis à la pesanteur) avec un modèle horizontal.
- Reconnaître des couleurs.
- Développer des compétences langagière par un vocabulaire précis : au dessus, en dessous.
- Ranger des objets selon leur couleur.
- Résoudre un problème simple.

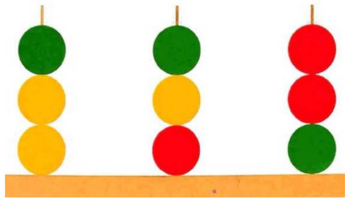
Le matériel

Des abaques à 3 ou 4 tiges



Des pièces percées à insérer

Des cartes modèles



Déroulement de l'activité

Les élèves sont en atelier dirigé par groupe de deux : il y a un acteur et un observateur.
L'enseignant donne une carte modèle, un abaque et neuf pièces à chaque joueur et explique le but à atteindre. Les cartes modèles sont présentées avec le trait horizontal en bas de façon à ressembler à l'abaque.
Quand un joueur pense avoir réalisé une copie conforme au modèle, il demande l'avis de son observateur. Si lies deux enfants sont d'accord, l'enseignant valide ou non avec eux puis les rôles sont inversés et les enfants prennent une autre carte modèle.
Lorsque les enfants ont bien compris en quoi consiste ta tâche, l'atelier devient autonome : les enfants viennent chercher eux-mêmes de nouvelles cartes modèles.

Variables

– Varier les couleurs.
– Varier le nombre de tiges.
– Varier le nombre d'objets à insérer.
– Faire le travail inverse : proposer un abaque plein et demander aux élèves de colorier une carte vierge.

Source. Découvrir les maths MS : Abaques p. 34-46.

Activités à faire en classe

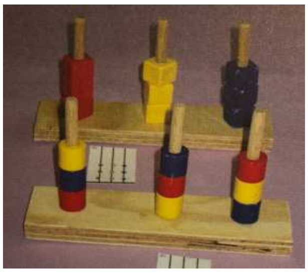
2 **C1** - **Les abaques taquins**

Objectifs et compétences

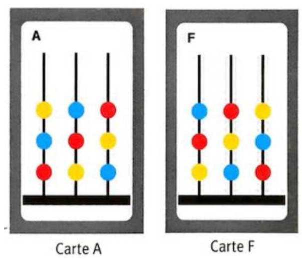
- Développer des compétences langagière par un vocabulaire précis : au dessus, en dessous, entre, boule supérieure/inférieure, déplacement.
- Organiser des actions pour atteindre un but.
- Observer et analyser des organisations spatiales dans le micro-espace.
- Résoudre une situation-problème complexe.

Le matériel

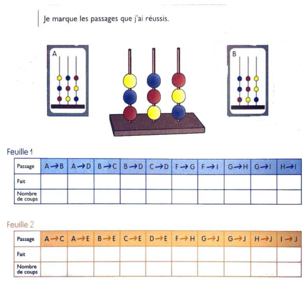
Des abaques à 3 tiges



Des cartes modèles



Une feuille de route



Déroulement de l'activité

Les élèves sont en atelier dirigé.

L'enseignant explique aux enfants le principe du jeu des abaques : « Vous devez prendre la carte A (carte de départ) et placer les boules sur l'abaque comme sur cette carte ».

À partir de la position des boules de la carte A, il faudra mettre les boules comme sur la carte F (carte d'arrivée) en respectant certaines règles :

- Seule la boule supérieure d'une tige peut être retirée et placée sur une autre tige, mais il ne faut pas dépasser 5 boules sur une même tige.
- Aucune boule ne peut rester hors des tiges (dans la main d'un joueur, par exemple).
- Une même boule peut être déplacée plusieurs fois.

La recherche est individuelle. Dans un second temps, un observateur peut être désigné pour compter le nombre de déplacements qui ont été nécessaires pour passer d'une carte à l'autre.

Les « problèmes » à chercher sont définis par l'enseignant.e. Le choix des cartes mises en relation est important car le passage de l'une à l'autre ne représente pas la même difficulté (voit tableau ci-dessous).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A		11	5	11	8	18	24	21	24	19
B	11		10	11	6	18	18	19	21	22
C	5	10		11	6	19	24	24	22	19
D	11	11	11		8	17	18	18	17	18
E	8	6	6	8		18	22	16	23	19
F	18	18	19	17	18		11	5	11	8
G	24	18	24	18	22	11		10	11	6
H	21	19	24	18	16	5	10		11	6
I	24	21	22	17	23	11	11	11		8
J	19	22	19	18	19	6	6	6	8	

Les élèves ont une feuille de route où ils peuvent cocher les problèmes résolus.

- Niveau 1 : de 5 à 8 déplacements.
- Niveau 2 : de 10 à 15 déplacements.
- Niveau 3 : de 16 à 20 déplacements.
- Niveau 20 : plus de 20 déplacements.

Source. Découvrir les maths GS : Abaques taquins p. 68-70

3 C1 - Les 5 tours alignées

Cette situation aborde les trois aspects numérique (cardinal et ordinal), géométrique et logique.

Objectifs et compétences

- Prendre conscience qu'un objet plus grand qu'un autre peut cacher ce dernier.
- Utiliser des informations numériques dans un cadre spatial.
- Prendre en compte deux contraintes.
- Développer des compétences langagière par un vocabulaire précis : devant, derrière, dessus, en face, caché, extrémité, au bout, à gauche, à droite.
- Résoudre un problème simple.

PARTIE A : construire 5 tours dans le méso-espace et s'approprier l'idée de « point de vue »

Le matériel :

5 tours de 1 à 5 étages

Un banc pour y déposer les tours

Une bande de papier de 7 cases de même mesure que la base des tours.

Étape 1 : présenter les 5 tours.

Les enfants et les tours ont des tailles de même ordre.

Le matériel est montré aux enfants : « J'ai fabriqué des tours avec les cubes/pavés/boites. Comment sont-elles ? ». Les enfants décrivent ces tours avec leurs mots et l'enseignant.e énonce finalement : « il y a une tour bleue de 5 étages, une tour rouge de 3 étages. . . ».

Étape 2 : s'approprier l'idée de point de vue.

L'enseignant.e aligne ensuite les 5 tours sur la grande bande de papier. Par exemple, la disposition des tours peut-être la suivante (figure de droite) :

	3	5	4	2	1	

Les enfants sont invités, un à un, à se déplacer autour du matériel et à dire ce qu'ils voient. Cette étape doit leur permettre de découvrir d'abord qu'un ensemble d'objets n'est pas vu de la même façon suivant l'endroit d'où on l'observe. Dans un deuxième temps, il s'agit de comprendre et de dire à quelles conditions un objet peut en cacher un autre.

Étape 3 : combien voit-on de tours à chaque extrémité ?

L'enseignant.e demande à chaque enfant de déterminer combien il voit de tours à chaque extrémité. Les enfants se déplacent, tournent autour de l'assemblage et on précise le vocabulaire retenu : « les tours, les étages ». Par exemple, dans le problème précédent, les tours qui seront vues à chaque extrémité sont : au nombre de 2 d'un côté, la tour 5 cachant les 3 autres tours ; au nombre de 4 de l'autre côté. Ces nombres sont donnés oralement. On peut résumer en plaçant des étiquettes aux extrémités de la bande :

2	3	5	4	2	1	4

Plusieurs dispositions différentes des tours sont ainsi proposées aux enfants.

Activités à faire en classe

PARTIE B : résoudre des problèmes dans le méso-, puis dans le micro-espace

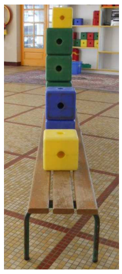
Le matériel

- Le même matériel que dans la partie A.
- Des étiquettes rouges et noires numérotées de 1 à 5.
- Des bandes de 7 cases vierges de petit format (14 cm par 2 cm par exemple).

Étape 1 : en vraie grandeur, avec les gros cubes/pavés.

Les enfants sont devant la grande bande de papier de 7 cases et l'enseignant.e explique ce qu'il attend : deux élèves se placent chacun à l'une des extrémités. Un autre élève doit placer les tours sur la table en respectant deux contraintes : par exemple, on doit voir à l'une des extrémités 1 tour, et à l'autre 4 tours. La solution est ajustée si nécessaire, par essais successifs.





Plusieurs problèmes sont ainsi proposés aux enfants, puis on passe à la verbalisation : les élèves expliquent ce qu'ils ont pu constater. Par exemple, le 1 oblige à mettre la tour 5, c'est-à-dire la plus grande, au premier plan puisqu'elle doit cacher toutes les autres tours. Le 5 implique que les tours doivent être placées par ordre croissant depuis la position de l'observateur. Il est tout à fait possible d'utiliser les étiquettes nombres rouges correspondant au nombre de tours à chaque extrémité si besoin.

Le solution n'est pas nécessairement unique, et certaines configurations n'ont pas de solution : il s'agit de (1,1) ; (2,5) ; (3,4) ; (3,5) ; (4,5) ; (5,5).

Étape 2 : schématisation du problème dans l'espace à deux dimensions.

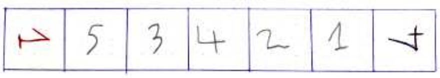
Les élèves schématisent la solution trouvée et toujours visible sur les grandes bandes en plaçant les étiquettes numérotées : l'objectif est de comprendre la schématisation des vraies tours par des étiquettes nombres, dans un espace de même dimension.

L'enseignant.e positionne sur la bande support, les étiquettes nombres rouges et précise ce qui est attendu, par exemple : « Les nombres rouges 1 et 4 que j'ai placés, c'est pour rappeler qu'ici on devait voir une seule tour et que là on devait en voir quatre ».

Les enfants ont à leur disposition 5 étiquettes nombres noires qui représentent les tours à partir de leur nombre d'étages et ils les positionnent sur la bande, comme ils ont placé les tours en vraie grandeur. Il ne s'agit pas, ici, de résoudre le problème dans l'espace à 2 dimensions, mais seulement de conserver la trace de la résolution qui vient d'être faite en vraie grandeur.

1	5	3	4	2	1	4

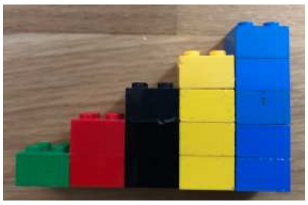
La grande bande précédente est alors cachée et l'enseignant.e distribue à chaque enfant une bande problème identique, mais en plus petit (les cases ne font que 2 cm de côté). Chaque enfant écrit les nombre correspondants aux noms de chaque tour à la bonne place sur la bande problème : c'est la trace écrite individuelle du positionnement des tours.



Partie C : résolution individuelle dans le micro-espace

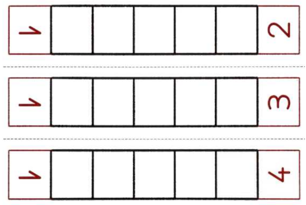
Le matériel

Des tours de 1 à 5 étages

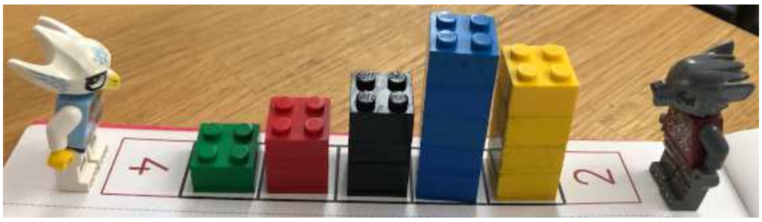


Une ou deux figurines

Des bandes problèmes

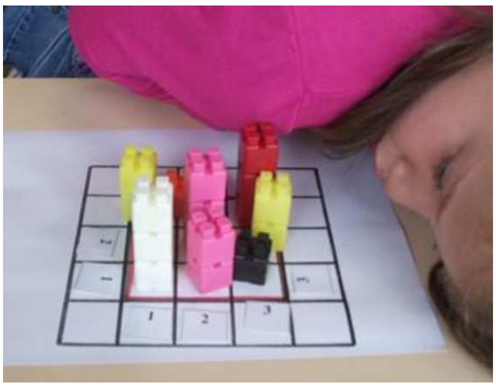


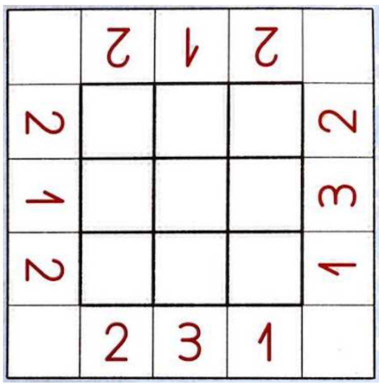
C'est un approfondissement de la phase précédente. Les problèmes sont maintenant posés dans l'espace de la feuille de papier.
L'enseignant.e explique que l'on va faire « la même chose, mais en plus petit ». Il précise, en particulier, le rôle des personnages fictifs : « Maintenant, c'est le petit personnage qui regarde les tours et vous, vous allez poser les petites tours pour que le personnage voie juste le nombre de tours indiqué sur les étiquettes rouges ».
Puis il présente les petites tours : « Elles sont comme les grandes avec lesquelles vous avez joué sur les tables : celle-ci a deux étages, c'est la tour 2. Qui peut montrer la tour 5 ?, etc. ».
Enfin, il montre une bande problème : « Par exemple, ici, le petit personnage doit voir 4 tours de ce côté et 2 tours de l'autre côté »



Lorsque l'élève aura posé les tours sur la bande et bien vérifié que le petit personnage voit bien le nombre de tours qui est marqué à chaque extrémité, il enleve chaque tour une par une et écrit à la place le nombre qui convient.
La validation se fait par échange des productions entre les enfants, en présence de l'enseignant : en cas d'erreur, l'enfant est invité à positionner à nouveau les tours.

Cette activité peut être poursuivie en GS par l'activité des 9 tours sur quadrillage (découvrir les maths GS p. 144-150), voire des 16 tours.





Source. Découvrir les maths : 5 tours alignées p. 151-157 (MS) et p. 74-79 (GS)

Activités à faire en classe

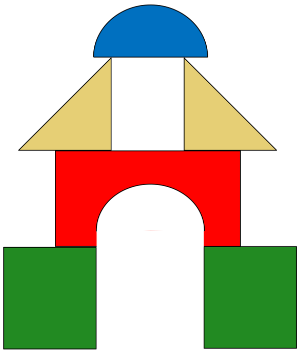
4 C1 - **Exemples d'activités avec les Kubix**

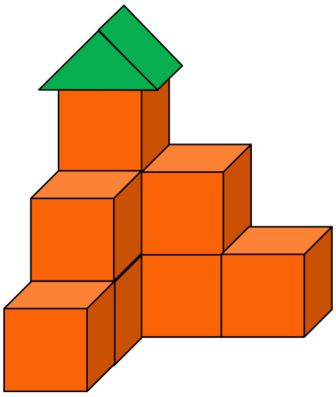
Le château. Activités à partir de construction de châteaux.

- **Réalisation de figures libres.** Première catégorisations à partir des réalisations des élèves.

- **Construire un château plus haut** que celui de la maîtresse, un objet de la classe... Verbalisation à partir des réalisations : pièces les plus ou les moins utilisées, pièce en haut de la construction, pièces non utilisées...
- **Construction d'un château collectif** en utilisant tout le matériel proposé. Les sphères agiront comme intrus et seront mises de côté. Permet de dégager les propriétés des solides : sont-ils stable ou non, la notion d'arrête, de face.

- **Associer points de vue et solides :** retrouver les photographies prises de différents points de vue correspondantes à un assemblage de solides donné.
  Variables : complexité de la figure de départ, présence d'un intrus, nombre de solides photographiés, comparaison possible ou non avec la construction.
- **Reproduire un château** : avec un modèle proche, réel ou en photo, avec un modèle éloigné, en limitant le nombre de déplacements, sous la dictée d'un camarade, par un système de commandes, grâce à la représentation faite par un camarade.





Activités à faire en classe

Le jeu de Kim. Les jeux de KIM sont des jeux traditionnels créés à partir d'un livre de Rudyard Kipling : Kim (Kimball O'Hara) est un orphelin, fils d'un ancien soldat, qui survit comme il peut. Sa seule certitude est qu'un jour « un grand taureau rouge sur un champ vert, avec le colonel sur son grand cheval et neuf cents diables » viendront le chercher. Il part donc à l'aventure et sera successivement messager puis agent secret des services britanniques. Il s'entraînera à observer les moindres détails de son environnement pour en informer ses supérieurs…

- **Kim touché** : on dispose d'un sac géant contenant tous les solides, qui ne sont pas visibles. Sortir le même que celui qui est montré (PS), que celui qui est demandé (MS), que celui dont on présente la carte d'identité.
- **Kim vue caché** : déposer 5 des solides sur la table, les enfants observent les objets pendant environ 2 min. Le meneur de jeu recouvre ensuite les objets avec un tissu et les joueurs doivent dire tous les objets, sans en oublier.
- **Kim vue ajouté/retiré** : 5 objets sont déjà posés sur la table. Après observation les élèves ferment les yeux et le meneur ajoute/retire un objet. Quel est cet objet ?
- **Kim vue déplacé** : 5 objets sont déjà posés sur la table. Après observation les élèves ferment les yeux et le meneur déplace un objet. Quel est cet objet ?

Le Tri sélectif. Proposer un grand nombre de solides à trier et faire émerger les critères de classement et de tri : nombre de faces, roule ou non, tient sur une face…

Les empreintes. À faire par exemple avec de la pâte à modeler, le contour des figures…

- Chercher des objets, des formes, qui correspondent à une empreinte donnée sur une feuille. Variable : placer les formes loin des empreintes.
- Construire des empreintes à partir d'une forme (peinture, pâte à modeler, contour…). Puis demander le maximum d'empreintes différentes, autant d'empreintes que de faces.

- Créer une fiche d'identité du solide, jouer au jeu du portrait.
- Retrouver des solides à partir des empreintes.

Sources : Géométrie – Les solides, académie de Paris et Les formes géométriques à l'école maternelle

5 **C2/C3** - **Une séquence sur les déplacements**

Exemple de séquence (voir document edumoov pour les détails) de cinq séances « testées » dans une classe de CM2 de Saint-Denis 3 (ile de la Réunion). Pour chaque séance sont proposées des pistes de variantes à utiliser pour le cycle 1.

Codage et programmation

Utiliser différents codes permettant de programmer le déplacer d'un personnage sur un quadrillage et sur un écran : activité débranchée avec le jeu du robot idiot et sur tablette avec ScratchJr et lightbot

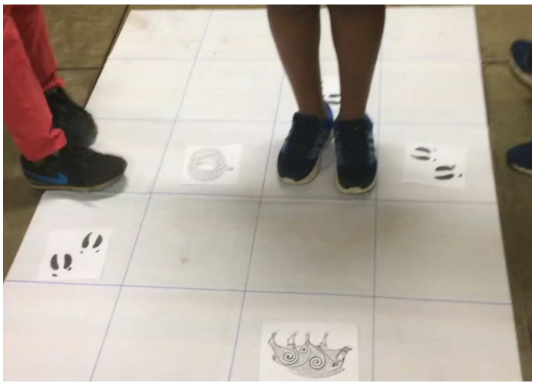
Informations générales

Objectif	**- (Se) repérer et (se) déplacer dans l'espace en utilisant ou en élaborant des représentations.** **- Se repérer, décrire ou exécuter des déplacements, sur un plan ou sur une carte.** **- Accomplir, décrire, coder des déplacements dans des espaces familiers.** **- Programmer les déplacements d'un robot ou ceux d'un personnage sur un écran.** **- Connaître et utiliser le vocabulaire permettant de définir des positions et des déplacements.** **- Connaître et utiliser divers modes de représentation de l'espace.**
Auteur	N. DAVAL et O. GRAVINI
Licence	Créative Commons - liberté de reproduire, distribuer et communiquer cette création au public sous conditions : citation de la paternité, pas d'utilisation commerciale, pas de modification.

Déroulement des séances

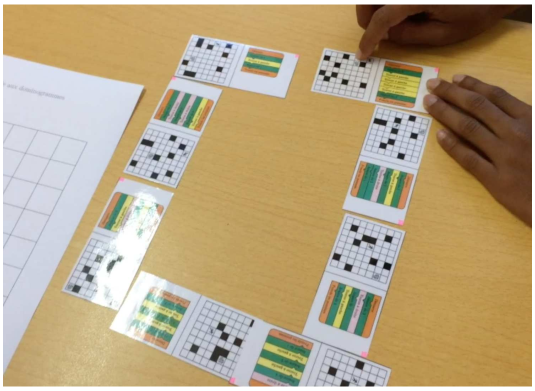
- **Séance 1** : Le robot idiot (60 min)
- **Séance 2** : Tout est relatif ! (45 min)
- **Séance 3** : Découverte de Scratch Jr (45 min)
- **Séance 4** : Projets sur Scracth Jr (45 min)
- **Séance 5** : Jouons à LightBot (60 min)

Séance 1 : Le robot idiot.



- Matériel : des nappes, des décors en fonction d'un album étudié.
- Documents élèves : une feuille pour noter les codes, des cartes de rôle, un parchemin par groupe.
- Institutionnalisation : carte mentale.
- Vidéo pour les élèves : Les sépas et les algorithmes.
- Vidéo pour le prof : Jouer à « Robot-idiot » pour découvrir les algorithmes.
- Variante C1-2 : repérage absolu, chouchous pour droite et gauche, positionnement des enfants.
- Autres activités du même type : algorithmes corporels.

Séance 2 : Tout est relatif !

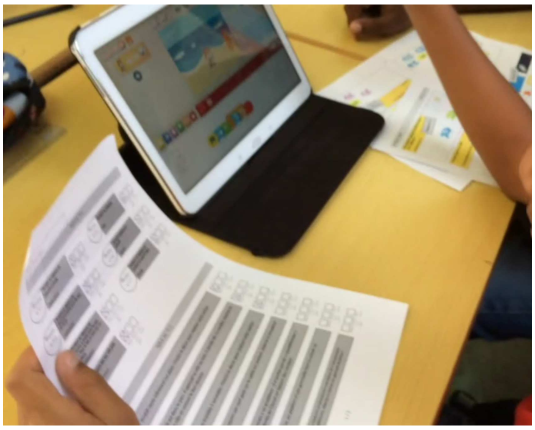


- Matériel : des jeux de dominos.
- Documents élèves : un jeu par groupe, éventuellement un quadrillage d'aide avec des personnages.
- Institutionnalisation : blocs de programmation.
- Variante C1-2 : dominos plus simples, cartacoder.
- Variante simplifiée : utilisation des cartes coupées en deux, les élèves devant retrouver les paires.

Séance 3 : Découverte de scracthJr.

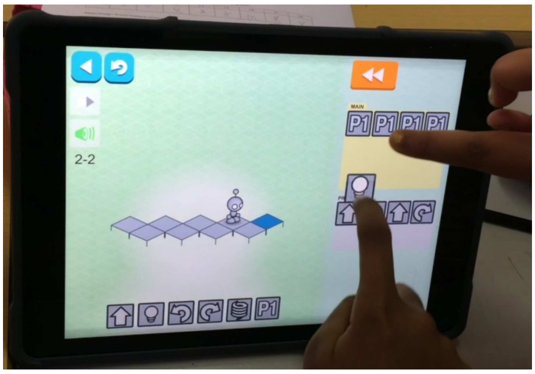
- Matériel : des tablettes avec l'application ScracthJr.
- Institutionnalisation : blocs de ScracthJr.
- Lien : Lien officiel de ScracthJr.

Séance 4 : Projets sur ScratchJr.



- Matériel : des tablettes avec ScracthJr.
- Documents élèves : feuilles de mission avec aide éventuelle.
- Lien : Cartes mission de canopé.
- Vidéo C1 : Programmer avec ScratchJr en grande section de mate

Séance 5 : Jouons à LightBot.



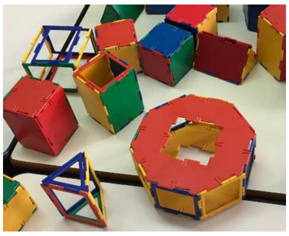
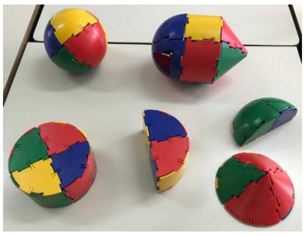
- Matériel : des tablettes avec lightbot ou des ordinateurs avec Internet.
- Documents élèves : une feuille de route par binôme.
- Lien : Lightbot
- Variante C1 : utilisation de la suite de logiciels « Gcompris », jeu du labyrinthe.
  Site en ligne Code studio, à partir de 4 ans.

Activités à faire en classe

6 C2/C3 - Exemples d'activités avec des solides déjà construits ou à construire

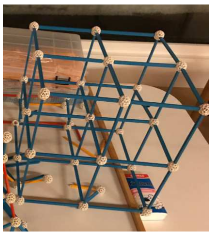
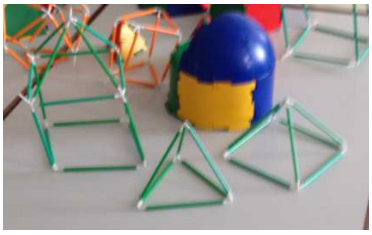
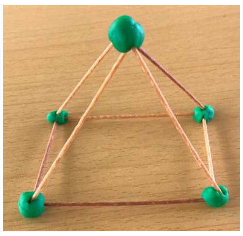
Polydrons :

- Construction libre, construction de solides fermés.
- Classer selon un classement libre ou imposé : couleur, polyèdres, nombre de faces, d'arêtes…
- Construire avec une contrainte : nombre d'arêtes, de faces…
- Reproduire un modèle : modèle sous les yeux, à distance, décrit par un pair…
- Trouver, puis dessiner différents patrons.

Pailles et connecteurs :

- Faire le squelette d'un solide avec des pailles et différentes rotules (à 3, 4 ou 5 branches) sommet-paille.
- Faire le plus de squelettes différents possibles.
- Trier les squelettes.
- Travailler le vocabulaire : arrêtes/sommets.
- À l'aide d'un bon de commande, commander les pailles (arrêtes) et rotules (sommets) nécessaires à la construction d'un solide donné, placé à distance, visible ou non.

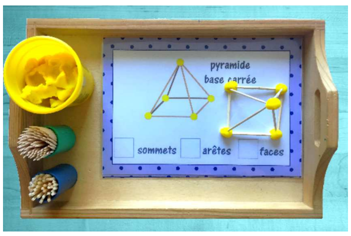




Kubix :

- Construction libre.
- Classer les Kubix selon un classement libre ou imposé.
- Reproduire un modèle (modèle sous les yeux, à distance, décrit par un pair).
- Faire les empreintes d'un solide, toutes les empruntes, retrouver un solide grâce à ses empruntes.

Jeu du portrait, cartes d'identité. Avec n'importe quel solide, Polydron, Kubix…

- Retrouver un solide en posant des questions fermées.
- Donner 3 critères pour retrouver un solide donné (nombre et nature de face ; nombre de sommets, d'arêtes). Variables : nombre de questions, de solides, solides visibles ou non, choix des solides.
- Créer des cartes d'identités des solides.



GRANDEURS ET MESURES

7

Grandeurs et mesures

Les attendus des enfants en fin d'école maternelle

Explorer des grandeurs

- Classer ou ranger des objets selon un critère de longueur ou de masse ou de contenance.

Dans les programmes - cycle 2

Comparer, estimer, mesurer des longueurs, des masses, des contenances, des durées. Utiliser le lexique, les unités, les instruments de mesures spécifiques à ces grandeurs

- Comparer des objets selon plusieurs grandeurs et identifier quand il s'agit d'une longueur, d'une masse, d'une contenance ou d'une durée.
- Comparer des longueurs, des masses et des contenances, directement, en introduisant la comparaison à un objet intermédiaire ou par mesurage.
- Estimer à vue des rapports très simples de longueur.
- Estimer les ordres de grandeurs de quelques longueurs, masses et contenances en relation avec les unités métriques. Vérifier avec un instrument dans les cas simples.
- Dans des cas simples, mesurer des longueurs, des masses et des contenances en reportant une unité et en utilisant un instrument adapté
- Encadrer une grandeur par deux nombres entiers d'unités.
- Lire l'heure sur une horloge ou une montre à aiguilles.
- Comparer, estimer, mesurer des durées.
- Dans des cas simples, représenter une grandeur par une longueur, notamment sur une demi-droite graduée.
- Lire les graduations représentant des grandeurs : cadran d'une balance, thermomètre, frise chronologique, axes d'un graphique gradués en unités.

Dans les programmes - cycle 3

Comparer, estimer, mesurer des grandeurs géométriques avec des nombres entiers et des nombres décimaux : longueur, aire, volume, angle. Utiliser le lexique, les unités, les instruments de mesures spécifiques de ces grandeurs

- Longueur et périmètre : comparer des périmètres avec ou sans recours à la mesure ; calculer le périmètre d'un polygone, d'un carré et d'un rectangle, la longueur d'un cercle, en utilisant ou non une formule.
- Aires : comparer des surfaces selon leurs aires sans avoir recours à la mesure ; différencier périmètre et aire d'une figure ; estimer la mesure d'une aire et l'exprimer dans une unité adaptée ; déterminer la mesure de l'aire d'une surface à partir d'un pavage simple ou en utilisant une formule.
- Volumes et contenances : relier les unités de volume et de contenance ; estimer la mesure d'un volume ou d'une contenance par différentes procédures et l'exprimer dans une unité adaptée ; déterminer le volume d'un pavé droit en se rapportant à un dénombrement d'unités.
- Angles : identifier des angles dans une figure géométrique ; comparer des angles sans avoir recours à leur mesure ; reproduire un angle donné en utilisant un gabarit ; estimer qu'un angle est droit, aigu ou obtus ; utiliser l'équerre pour vérifier qu'un angle est droit, aigu ou obtus, ou pour construire un angle droit.

Repères didactiques

1. Progressivité des apprentissages

La question « qu'est-ce qui est le plus lourd : un kilo de plumes ou un kilo de plomb ? » posée en classe pourra permettre de débattre sur le vocabulaire et les conceptions des élèves. En effet, certains diront que c'est pareil puisque les deux pèsent 1 kg, mais certains élèves pourraient dire que les plumes pèsent plus parce qu'elles occupent plus de place, ou encore que c'est le plomb qui pèse le plus car le plomb est lourd alors que la plume est légère.
Il est donc très important de commencer à travailler sur le concept de grandeur avant d'aborder la mesure. En effet, les confusions sont nombreuses chez les élèves, par exemple entre aire et périmètre ou masse et volume. Il est indispensable de manipuler les grandeurs sans mesures : les comparer directement, à l'aide d'un objet intermédiaire ou par transformations. C'est seulement ensuite qu'ils apprennent à effectuer des mesures au moyen d'instruments adéquats en s'appropriant peu à peu les unités usuelles.

Démarche générale pour conceptualiser les grandeurs

- **Comparer et ordonner des grandeurs sans mesurer par comparaison directe** : la comparaison des grandeurs peut s'effectuer dans un premier temps à partir de manipulations d'objets, par comparaison directe (perception, juxtaposition, superposition, soupesage…). Cette étape est essentielle car elle permet de donner du sens à la grandeur.
- **Comparer et ordonner des grandeurs sans mesurer par comparaison indirecte** : la comparaison se fait grâce à un objet intermédiaire (balance, ficelle, bande de papier, transvasage, découpage…) pour des objets qui ne permettent pas la comparaison directe, c'est-à-dire non déplaçables ni superposables, pas présents en même temps.
- **Comparer et ordonner des grandeurs en les mesurant grâce à un étalon** : cette étape nait d'un besoin de communication, pouvoir écrire le résultat de notre mesure nécessite une unité commune appelée étalon.
- **Découvrir des unités et mesurer des grandeurs** : les unités que l'on étudie à l'école appartiennent au SI, elles sont le résultat d'un choix arbitraire qui permet de mesurer grâce à des unités connues de tous. Cette étape permet d'introduire les multiples/sous-multiples.
- **Effectuer des calculs et des changements d'unités** : le mesurage n'est plus nécéssaire, les données sont fournies et il s'agit de les utiliser de manière directe. On effectue des conversions entretenant ainsi l'articulation entre la numération, le système métrique et les situations de la vie courante ainsi que celle entre les grandeurs/mesures et la géométrie.

Il sera très important, au moment de l'introduction de la mesure, d'insister sur la rédaction et sur la nécessité de bien indiquer les unités, y compris dans les calculs en ligne. Cela permet également de renforcer le sens des opérations lors de la résolution de problème, en différenciant des opérations mathématiques qui paraitraient identiques sans les unités.

Exemple

1) J'ai un baton de longueur 45 cm, et j'ai besoin de bâtonnets de 5 cm. Combien vais-je pouvoir en faire ?
2) J'ai un baton de longueur 45 cm, et j'ai besoin de 5 bâtonnets de même longueur. Quelle sera la longueur d'un bâtonnet ?

Correction

1) Le problème se modélise par une division quotition :
$45\,\text{cm} : 5\,\text{cm} = 9$.
Je vais pouvoir faire 9 bâtonnets de 5 cm.
2) Le problème se modélise par une division partition :
$45\,\text{cm} \div 5 = 9\,\text{cm}$.
Un bâtonnet mesurera 9 cm.

Ces deux écritures sont bien plus parlantes que l'écriture sans unité $45 \div 5 = 9$, où ce dont on parle n'est pas indiqué.

On peut résumer par un tableau synoptique la progression des apprentissages dans ce domaine en fonction des niveaux de classe comme précisé dans les repères de progression des programmes.
Les éléments en gras concernent la mesure et les unités à introduire. Les opérations sur les grandeurs sont menées en lien avec l'avancée des opérations sur les nombres, de la connaissance des unités et des relations entre elles.

Grandeur	C1	CP	CE1	CE2	CM1	CM2
Longueur	comparer, trier, classer, ranger	comparer, estimer, mesurer **cm, m**	comparer, estimer, mesurer **cm, dm, m, km**	comparer, estimer, mesurer **mm, cm, dm, m, km**	comparer, mesurer des périmètres **polygone**	**formule du carré, rectangle ; périmètre du polygone,**
Masse	comparer, trier, classer, ranger	comparer	comparer, mesurer **g, kg**	mesurer **g, kg, tonne**		
Contenance	comparer, trier, classer, ranger		comparer **L**	comparer, mesurer **cL, dL, L**	comparer, mesurer **1L = (10 cm)^3**	comparer, mesurer **L, dL, cL, mL**
Durée		lire, repérer la date jour, semaine, mois lire l'heure entière (analogique)	lire l'heure, la demi-heure (analogique) **j, h, min**	lire h, demi-h, (analogique) lire, donner h et min (numérique) **s, min, an, siècle, millénaire**	lire l'heure ; siècle/années, semaine/jours, h/min, min/s **calcul de durées et d'instants**	**relations entre unités, conversions**
Prix		manipuler **pièces de 1€, 2€, billets de 5€, 10€, 20€, 50€, 100€**	**euro et centimes d'euro**			
Aire					comparer, estimer, mesurer **aire avec étalon**	**cm^2, dm^2, m^2 formule du carré, rectangle, triangle rectangle**
Angles					repérer, comparer, estimer (gabarit) angle droit, aigu, obtus	

Repères didactiques

A. Les longueurs

– Au C1, les enfants distinguent les longueurs par des observations, des comparaisons (souvent directes), des tris.
– Au CP, les élèves comparent des objets, des segments (de manière directe et indirecte à l'aide ficelle ou de bandes de papier) selon leur longueur, d'abord en les estimant. Ils donnent du sens aux expressions « plus long que », « plus court que », « aussi long que », « moins long que », et aussi « double » et « moitié ».
Ils mesurent des segments en utilisant des unités de référence puis en utilisant la règle graduée pour des mesures en centimètres entiers. Ils appréhendent le mètre (100 cm) à travers par exemple la règle du professeur.
– Au CE1, les élèves consolident les comparaisons, les estimations et les mesures de longueur en cm. Puis le travail se poursuit en utilisant les unités m, dm et km. Ces unités sont mises en relation.
– Au CE2, les élèves consolident les comparaisons, les estimations et les mesures de longueur en cm, m, dm et km. Le travail se poursuit en utilisant le mm et ils mettent les unités m, dm, cm et mm.
– Au CM1, les élèves comparent des périmètres d'abord sans mesure, puis par report d'unités, de fractions d'unités ou des longueurs des côtés sur un segment de droite avec le compas. Ils calculent le périmètre d'un polygone en ajoutant les longueurs de ses côtés (avec des entiers et fractions puis avec des décimaux à deux décimales).
– Au CM2, les élèves établissent les formules du périmètre du carré et du rectangle.

Les **mots** du domaine des longueurs sont nombreux : hauteur, altitude, profondeur, taille, distance, largeur d'un rectangle, périmètre, circonférence... Il est important que tous ces mots, utilisés dans des contextes différents, se réfèrent au même concept, appelé en mathématiques « longueur ».

Les **instruments** qui peuvent être utilisés sont la règle graduée (d'écolier ou du tableau), des bandes de papier plus ou moins longues, de la ficelle, le pied à coulisse... La règle, utilisée jusque là comme instrument de géométrie pour tracer des ligne droites devient un instrument de mesure de longueurs par l'adjonction d'une graduation.

Compétences	Difficultés
Comparer, ordonner des longueurs : par superposition ; en utilisant un objet intermédiaire ou une unité de longueur	– Élèves « non conservants » : incapacité de repérer des transformations (déplacement, déformation...) – Difficultés de manipulation
Mesurer des longueurs	– Erreurs liées au positionnement de l'instrument (« 0 » d'un règle graduée, lecture des millimètres)
Estimer la longueur d'un objet	– Par manque d'expériences sociales ou scolaires, l'élève n'a aucune idée des mesures de certaines longueurs
Effectuer des conversions d'unités	– Erreurs liées à l'écriture décimale des nombres ou à la méconnaissance des relations entre les différentes unités.
Calculer le périmètre d'une figure	– L'élève a une représentation du périmètre comme étant le résultat obtenu par un calcul à partir d'une formule – L'élève pense que pour calculer un périmètre il faut ajouter toutes les dimensions qui lui sont données

Afin d'accroître la difficulté ou, au contraire, de faciliter la compréhension des situation caractérisant des longueurs, on peut utiliser les **variables didactiques** suivantes :
– nature des objets dont il faut comparer les longueurs ou le périmètre : objets ou figures plus ou moins simples ;
– taille de ces objets ou de la figure ;
– objets déplaçables ou non, transformables ou non ;
– matériel dont dispose l'élève : règle graduée ou non, bande, compas, ficelle...
– support de la figure : quadrillage ou non, mesures données ou non.

B. Les masses

– **Au C1**, les enfants sont amenés à distinguer les masses par des observations, des comparaisons, des tris. Les premières expériences sensitives permettent de travailler sur le vocabulaire « lourd/léger », à différencier de « gros/petit ».
– **Au CP**, les élèves comparent des objets selon leur masse, en les soupesant puis en utilisant la balance à plateaux, type Roberval, sans que des unités de mesure soient nécessairement introduites. Ils donnent du sens aux expressions : « Plus lourd que », « plus léger »...
– **Au CE1**, les élèves consolident les comparaisons d'objets selon leur masse. Ils mesurent des masses exprimées en g et kg et mettent en relations ces unités. Le trombone est un bon étalon « non usuel », pour les objets légers (1 g) et le paquet de farine pour des objets plus lourds, de l'ordre du kg, correspondant également à 1 000 trombones.
– **Au CE2**, les élèves consolident les mesures de masses d'objets (g et kg). Ils utilisent l'unité tonne (t) et mettent en relations les unités g, kg et kg, t.

Traditionnellement, à l'école, comme dans le langage courant, on confond masse d'un objet et poids de cet objet. La compréhension du **sens propre et du sens figuré** est une compétence à développer chez les élèves pour leur permettre d'accéder à une compréhension fine des textes. En effet, dans le langage commun, de multiples expressions font appel à ce concept : se fondre dans la masse, s'écrouler comme une masse, faire pencher la balance de son côté, avoir le cœur léger ou la main lourde...

Les **outils** de comparaison et de mesure ne sont pas des instruments d'écolier classiques. On pourra utiliser une balance de Roberval[1] ou à plateaux dans un premier temps, puis une balance numérique. L'avantage des balances mécaniques, c'est qu'elles permettent de comparer et de mesurer selon l'usage que l'on en fait.



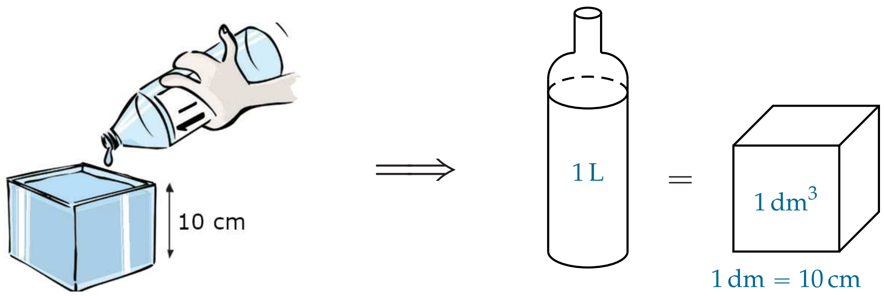
Outre les difficultés de conversion, les élèves ont du mal à estimer le poids de certains objets, par exemple parce qu'ils n'ont pas idée de ce que représentent le gramme ou le kilogramme, d'où la nécessité de faire manipuler des objets, mais aussi parce que ces objets ne leur sont pas familiers, ou très lourds et donc non « portables ».

1. Gilles Personne de Roberval (1602-1675) est un mathématicien et physicien français, inventeur de la balance à fléaux qui porte son nom.

C. Les contenances

– **Au C1**, les enfants sont amenés à distinguer les contenances par des observations, des comparaisons, des tris. Ils travailent sur le vocabulaire « gros/petit », à différencier de « lourd, léger », en lien avec les masses.
– **Au CE1**, les élèves continuent à comparer des objets selon leur contenance, en les observant (comparer « visuellement » différents récipients remplis d'eau) et en les manipulant. Il peuvent comparer les contenances de plusieurs bouteilles à l'aide d'un verre-étalon, puis les mesurer en « verre-étalon », par transvasement, et enfin ils découvrent que le litre (L) est une unité de contenance usuelle.
– **Au CE2**, les élèves comparent des objets selon leur contenance en utilisant le L. Ils utilisent le cL, dL et le L et connaissent leurs relations (par exemple à l'aide des gobelets de contenance 10 cL et d'une bouteille d'1 L).
– **Au CM1**, Les élèves comparent des contenances sans les mesurer, puis en les mesurant. Ils découvrent et apprennent qu'un litre est la contenance d'un cube de 10 cm d'arête. Ils font des analogies avec les autres unités de mesure à l'appui des préfixes.
– **Au CM2**, les élèves poursuivent ce travail en utilisant de nouvelles unités de contenance : dL, cL et mL.

Usuellement, les volumes sont mesurés en « **unité cube** » qui vont de mille en mille. Cette mesure n'est pas adaptée pour les liquides utilisés dans la vie quotidienne (comme l'huile, l'eau, le lait par exemple). Les contenances, ou capacités – dans la pratique, on parle en général de capacité pour les bouteilles et de contenance pour les autres récipients – sont plutôt exprimées en **litre**. Ce dernier a son équivalent en volume puisqu'une contenance d'un litre représente un volume d'un décimètre cube. On parle ainsi du volume d'un vase ($1\,dm^2$ par exemple) mais on évoque la contenance de celui-ci en litre (1 L par exemple).
En cycle 3, et en continuité avec le cycle 2, la notion de volume sera vue d'abord comme une contenance : les élèves découvrent et apprennent qu'un litre est la contenance d'un cube de 10 cm d'arête, mais la formalisation et le calcul de volumes ne se fera qu'à partir de la 6e.



Tout comme les masses, il est important de faire découvrir quelques exemples de capacités usuelles. Les recettes de cuisine sont aussi un outil très pertinent pour travailler les contenances, ainsi que les masses et ainsi de faire différencier ces deux concepts. On fera remarquer que les préfixes utilisés pour les longueurs sont les mêmes et ont la même signification pour les masses et les contenances.

bouteille de lait : 1 L


seau : 10 L


baignoire : 200 L


Gobelet : 20 cL


canette : 33 cL

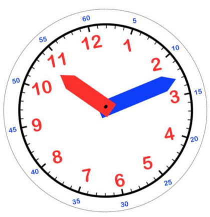
D. Les durées

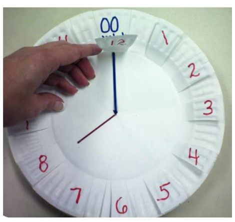
– **Au CP**, les élèves apprennent à lire une date sur un calendrier et à se repérer dans celui-ci. Ils repèrent les jours et les semaines puis les mois ; ils mettent en relation jour et semaine. En lien avec le domaine « questionner le monde », ils apprennent à lire l'heure sur une horloge à aiguilles en heures entières.
– **Au CE1**, les élèves lisent les heures entières et les demi-heures sur une horloge à aiguilles. Ils mettent en relation les unités de durée h et min, ainsi que j et h.
– **Au CE2**, les élèves consolident la lecture de l'heure sur une horloge à aiguilles (heure entière et demi-heure). Ils lisent et donnent l'heure (exemple : « quatre heures moins vingt » ou 15 h 40 ; « sept heures et quart » ou 7 h 15).
Ils utilisent les unités année, siècle, millénaire et min, s et connaissent leurs relations.
– **Au CM1**, les élèves consolident la lecture de l'heure et l'utilisation des unités de mesure des durées et de leurs relations ; des conversions peuvent être nécessaires (siècle/années ; semaine/jours ; heure/minutes ; minute/secondes). Ils les réinvestissent dans la résolution de problèmes de deux types : calcul d'une durée connaissant deux instants et calcul d'un instant connaissant un instant et une durée.
– **Au CM2**, les élèves poursuivent le travail d'appropriation des relations entre les unités de mesure des durées. Des conversions nécessitant l'interprétation d'un reste peuvent être demandées (transformer des heures en jours, avec un reste en heures ou des secondes en minutes, avec un reste en secondes).

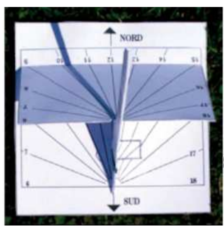
La langue française est riche de nombreuses **expressions** en rapport avec le temps qui passe. Un lien transversal avec le champ disciplinaire du français peut être établi en étudiant des expressions telles que : par les temps qui courent, il n'y a pas de temps mort, tuer le temps, chaque chose en son temps, travailler à temps plein. . .

Contrairement aux autres grandeurs, la durée n'est pas une grandeur régulière, ou plutôt, elle est multiple : on peut travailler la date à partir d'un **calendrier**, en lien avec les jours, semaines, années et mois et les relations qui les lient, voire les siècles et millénaires en lien avec des faits historiques. Utiliser des **emplois du temps** ou des **frises chronologiques** pour se repérer dans le temps.
La difficulté majeure réside dans l'emploi de bases différentes qui existent entre ces durées : sexagésimale (base 60) pour les heures, minutes et secondes ; duodécomale (base 12) pour les mois et les heures (si on considère les heures du matin et de l'après-midi), décimales pour les millénaires, siècles, décennies ; base 7 pour les jours des semaines ; 28, 29, 30 ou 31 pour les jours des mois et enfin 365 et 366 pour les jours des années.
On insistera sur le fait que, de part des bases différentes, un quart d'heure = $\frac{1}{4}$ h = 0,25 h = 15 min et donc que 25 centièmes d'heure n'est pas égal à 25 minutes.

Outre les **instruments** classiques comme les **montres** (numériques et analogiques) ou les horloges, que l'on utilisera beaucoup au cycle 2, on pourra également confectionner avec les élèves un cadran solaire par observations successives des heures.

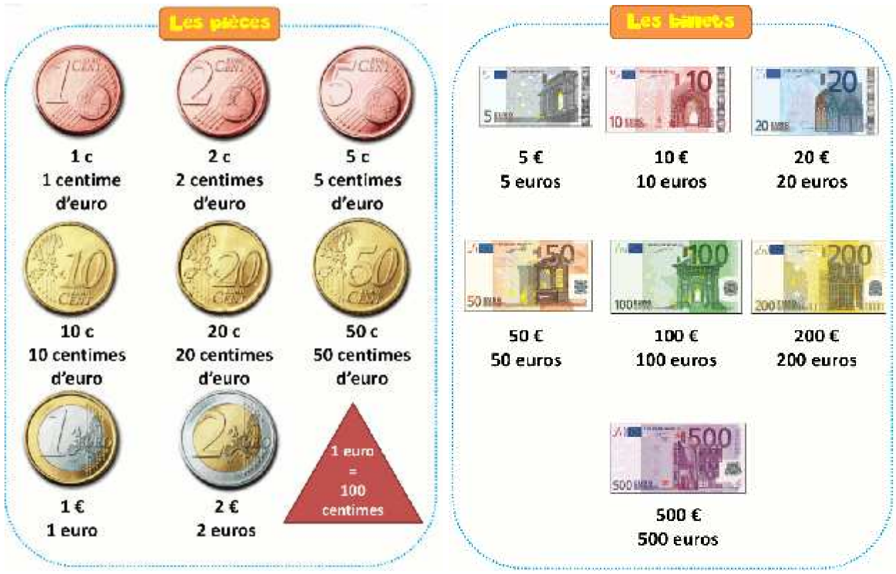







E. Le prix

– **Au CP**, après un travail préalable sur la construction de la grandeur prix et la notion de valeur, les élèves utilisent l'euro, en manipulant du matériel pièces/billets (pièces de 1 et 2 euros, puis billets de 5 et 10, 20, 50 et 100 euros. . .).
– **Au CE1 et CE2**, les élèves utilisent l'euro et les centimes d'euros dans des situations qui se complexifient progressivement (exemple : rendre la monnaie sur 2 euros pour l'achat d'un produit qui coûte 1 € 50 c puis 75 c) ; ils résolvent des problèmes impliquant ces données.
Il est important de proposer des activités concrètes et connectées avec la réalité des élèves. Ces activités seront centrales, mais pour aller plus loin, on pourra utiliser des tickets de caisse, donner des ordres de grandeur de prix du quotidien, ou encore dessiner les pièces et les billets et analyser les écritures et dessins qui les composent. On pourra également donner aux élèves des repères historiques sur la monnaie européenne.



Tout comme les autres grandeurs, tout ce qui tourne autour de l'argent à ses propres **expressions** qu'il conviendrait d'expliciter : l'argent ne fait pas le bonheur, avoir le beurre et l'argent du beurre, jeter l'argent par les fenêtres, un sou est un sou. . .

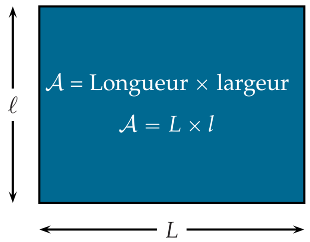
Une **difficulté** liée à l'euro est qu'il n'existe pas de vocabulaire pour tous les ordres : on trouve en effet l'euro et le centime d'euro (centième d'un euro), mais rien « entre » qui pourrait correspondre au dixième d'euro. Ainsi, « deux euros cinq » correspondent à 2,05 €, alors que la plupart du temps, « deux kilos cinq » caractérisent 2,5 kg, ou encore 2 kg et 500 g. Le tableau suivant montre les unités qui suivent scrupuleusement le système décimal, et les euros qui dérogent à la règle. Remarquons que le kilo euro (1000 €) n'est pas présent au sein du programme de l'école, mais est souvent utilisé dans des domaines économiques.

Préfixe	kilo	hecto	déca		déci	centi	milli
Unités de longueur	km	hm	dam	m	dm	cm	mm
Unités de masse	kg	hg	dag	g	dg	cg	mg
Unités de contenance	kL	hL	daL	L	dL	cL	mL
Unités de prix	k€			€		centime d'€	

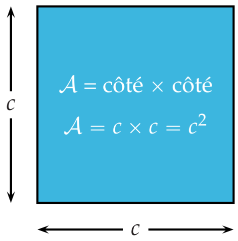
F. Les aires

– **Au CM1**, les élèves comparent des surfaces selon leur aire par estimation visuelle, par superposition ou découpage et recollement. Ils estiment des aires, ou les déterminent, en faisant appel à une aire de référence. Le lien est fait chaque fois que possible avec le travail sur les fractions.
– **Au CM2**, l'utilisation d'une unité de référence est systématique. Cette unité peut être une maille d'un réseau quadrillé adapté, le cm^2 , le dm^2 ou le m^2.
Les élèves apprennent à utiliser les formules d'aire du carré, du rectangle et du triangle rectangle.

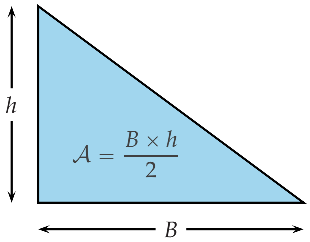
La mesure des surfaces (aire) est vue au cycle 3. Tout au long du cycle, il convient de choisir la procédure adaptée pour comparer les aires de deux surfaces, pour déterminer la mesure d'une aire avec ou sans recours aux formules.



on commencera par des rectangles de dimensions entières, puis de dimensions décimales dont l'une est entière ; enfin, on introduira la formule.



on commencera par la formule de l'aire du rectangle, puis on présentera celle de l'aire du carré comme un cas particulier de celle du rectangle.



le triangle rectangle est vu comme un rectangle coupé en deux suivant sa diagonale, la formule peut alors être déduite de celle du rectangle.

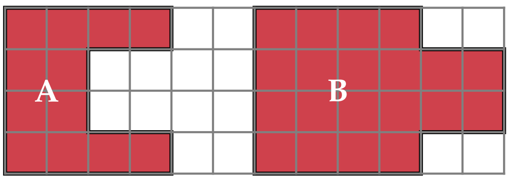
Les écritures avec les unités permettent également de renforcer le sens des unités produits. Pour le calcul de l'aire d'un rectangle du type $3\,\text{cm} \times 4\,\text{cm}$, les élèves proposent souvent le résultat 12 cm.
On peut justifier l'unité produit par exemple de la façon suivante :

$$\begin{aligned} 3\,\text{cm} \times 4\,\text{cm} &= (3 \times 1\,\text{cm}) \times (4 \times 1\,\text{cm}) \\ &= (3 \times 4) \times (1\,\text{cm} \times 1\,\text{cm}) \\ &= 12 \times 1\,\text{cm}^2 \\ &= 12\,\text{cm}^2 \end{aligned}$$

Une telle décomposition n'est pas attendue des élèves, mais peut être proposée par l'enseignant, en amont pour renforcer le sens des unités d'aire ou chaque fois que des erreurs d'unité seront constatées chez les élèves.

Le périmètre et l'aire varient toujours dans le même sens quand on agrandit ou réduit une figure. Ceci n'est plus nécessairement le cas lorsque les figures n'ont plus la même forme :

la figure A ci-contre est perçue comme un grand carré amputé d'un petit carré, alors que la figure B est perçue comme un grand carré augmenté d'un petit. Ce qui est exact en terme de décomposition et recomposition.



Ce qui est erroné, c'est le mouvement de pensée qui traduit cette perception en opération (soustraction ou addition) sur les deux grandeurs périmètre et aire. S'il est vrai qu'à l'addition perceptive des deux formes correspond l'addition des aires, il n'en est pas de même au niveau des périmètres : les deux figures ont en effet le même périmètre.
Il est donc nécessaire, après les avoir introduites, de confronter les notions de périmètre et d'aire, afin de permettre aux élèves de bien les différencier, de voir à quoi elles correspondent pour une même figure et de comprendre à travers les exemples rencontrés qu'elles ne sont pas liées. On pourra à cette occasion se nourrir de l'article très complet d'*Yves Martin* à propos de Curvica [mar15].

Les **difficultés** suivantes concernant les aires sont assez semblables à celles pour les longueurs, (la surface étant une grandeur produit de deux longueurs) et sont aussi très liées :

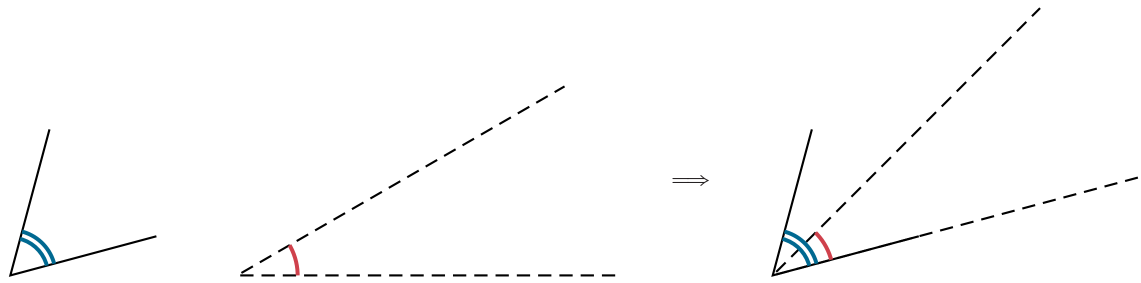
Compétences	Difficultés ou erreurs
Comparer des aires : - par superposition - par découpage et recollement - en utilisant une unité de mesure	– L'élève n'est pas conservant des surfaces – L'élève pense que seul le carré peut être une unité acceptable et rencontre des difficultés de manipulation pour paver une figure avec une grandeur unité donnée – L'élève pense que des figures qui ne sont pas directement superposables ne peuvent pas avoir la même aire – L'élève assimile l'aire à l'encombrement
Estimer la mesure de l'aire d'une surface	Par manque d'expériences, l'élève n'a aucune idée des mesures de certaines surfaces
Effectuer des conversions d'unité	L'élève utilise les techniques de conversion qu'il connaît pour les unités de longueur

On pourra agir sur les **variables didactiques** suivantes concernant la comparaison d'aires :
– nature des objets dont on demande de comparer les aires : objets physiques ou objets représentés ;
– taille de ces objets ou de la figure ;
– possibilité de superposition directe ou non ;
– présence de quadrillage ou non ;
– possibilité ou non de décomposer un objet pour tenter de reconstituer un objet superposable à un autre.

G. Les angles

– Au CE1 et CE2, les élèves utilisent l'équerre pour tracer ou reconnaître des angles droits.
– Au CM1 et CM2, les élèves apprennent à repérer les angles d'une figure plane, puis à comparer ces angles par superposition (utilisation du papier calque) ou en utilisant un gabarit. Ils estiment, puis vérifient en utilisant l'équerre, qu'un angle est droit, aigu ou obtus.
– Au collège, ce travail sera poursuivi et l'on introduira une unité de mesure des angles (le degré) et l'utilisation d'un outil de mesure (le rapporteur).

La mesure n'étant pas du ressort de l'école primaire, on aura uniquement recours à des comparaisons d'angles par superposition, avec un calque ou un gabarit. Seul l'angle droit pourra être déduit grâce à l'équerre ou le gabarit d'angle droit.
L'angle droit est introduit au cycle 2, et au cycle 3, la notion d'angle peut être abordée comme « l'ouverture » définie par deux demi-droites de même origine. Les élèves doivent comprendre que l'angle ne change pas lorsque l'on prolonge ces demi-droites.



L'angle bleu est plus grand que l'angle rouge

Vu au CRPE en 2022

Sujet proposé aux M2 par la FDE de Montpellier, 2022

Consigne : Vous êtes enseignant(e) en classe de MS. Vous avez déjà mené avec vos élèves l'activité décrite dans le document 1.
Vous construirez une séance qui fait suite à cette activité et permet de travailler la compétence visée. Vous pourrez notamment vous inspirer des images proposées en annexes 2 et 3.

Compétence visée : Classer ou ranger des objets selon un critère de longueur ou de masse ou de contenance.

Contexte de la séance d'enseignement :

– cycle d'enseignement : cycle 1 ;
– niveau de la classe : MS ;
– domaine : Explorer des formes, des grandeurs, des suites organisées ;

Documents fournis au candidat :

Document 1 : Extrait du programme consolidé de cycle 1 publié au BO n°25 du 24/06/2021.

4.2. Explorer des formes, des grandeurs, des suites organisées

Très tôt, les jeunes enfants discernent intuitivement des formes (carré, triangle, etc.) et des grandeurs (longueur, contenance, masse, aire, etc.). À l'école maternelle, ils construisent des connaissances et des repères sur quelques formes et grandeurs. L'approche des formes planes, des objets de l'espace, des grandeurs, se fait par la perception visuelle, la manipulation et la coordination d'actions sur des objets. Cette approche est soutenue par le langage : il permet de décrire ces objets et ces actions et favorise l'identification de premières caractéristiques descriptives. Ces connaissances qui resteront limitées constituent une première approche de la géométrie et de la mesure qui seront enseignées aux cycles 2 et 3.

4.2.1. Objectifs visés et éléments de progressivité

Très tôt, les enfants regroupent les objets, soit en fonction de leur aspect, soit en fonction de leur utilisation familière ou de leurs effets. À l'école, ils sont incités à « mettre ensemble ce qui va ensemble » pour comprendre que tout objet peut appartenir à plusieurs catégories et que certains objets ne peuvent pas appartenir à celles-ci.
Par des observations, des comparaisons, des tris, les enfants sont amenés à mieux distinguer différents types de critères : forme, longueur, masse, contenance essentiellement. Ils apprennent progressivement à reconnaître, distinguer, décrire des solides puis des formes planes. Ils commencent à appréhender la notion d'alignement qu'ils peuvent aussi expérimenter dans les séances d'activités physiques. L'enseignant est attentif au fait que l'appréhension des formes planes est plus abstraite que celle des solides et que certains termes prêtent à confusion (carré/cube). L'enseignant utilise un vocabulaire précis (cube, boule, pyramide, cylindre, carré, rectangle, triangle, cercle ou disque - à préférer à « rond ») que les enfants sont entraînés ainsi à comprendre d'abord puis amenés progressivement à utiliser.
Par ailleurs, dès la petite section, les enfants sont invités à organiser des suites d'objets en fonction de critères de formes et de couleurs ; les premiers algorithmes qui leur sont proposés sont constitués d'alternances simples. Dans les années suivantes, progressivement, ils sont amenés à reconnaître un rythme dans une suite organisée et à continuer cette suite, à inventer des « rythmes » de plus en plus compliqués, à compléter des manques dans une suite organisée.

Document 2 : Extrait de *Découvrir les maths*, MS. Dominique Valentin, 2015. pp. 61 et 62.

Activité 2 Ranger les enfants de la classe en fonction de leur taille

ORGANISATION

L'activité se déroule en grand groupe, à l'extérieur de la classe, puis dans la classe, sur plusieurs jours.

Étape 1 Mettre les enfants à la bonne place

- Dans cette étape, les enfants, qui se veulent tous « grands » au sens qu'ils ont effectivement assez « grandi » pour être maintenant en MS, vont devoir accepter la **relativité de cette notion**. L'aspect psychologique de la situation doit être pris en compte par l'enseignant de manière à ne blesser aucun enfant. Nous savons que les questions de taille peuvent être délicates, en particulier pour des enfants qui sont ou se trouvent « trop petits » ou « trop grands ». Ces activités demandent donc beaucoup de délicatesse.

- **Trois enfants sont placés** par l'enseignant le long d'un mur, **du plus petit au plus grand**. L'enseignant les positionne de manière à ce qu'il reste de la place entre eux, ainsi qu'avant le plus petit et après le plus grand, mais il n'indique pas aux enfants la façon dont il a choisi de les placer. Les autres enfants sont en face et observent.

- L'enseignant appelle alors un enfant, Yasmine par exemple, et lui demande de mettre Léa « **à la bonne place** » en précisant que tous ceux qui seront, par exemple « plus près de la porte de la classe » – cela dépend des repères présents autour – devront être plus petits que Léa et que tous ceux qui seront, par exemple, du côté de « la porte de la classe » devront être plus grands que Léa. Les observateurs corrigent si besoin est. C'est ensuite au tour d'un autre enfant de placer Yasmine et ainsi de suite.

- **Si deux enfants ont la même taille** (ce qui est fréquent), l'enseignant leur demande de se mettre l'un derrière l'autre, à leur choix. Si les deux enfants ne parviennent pas à se mettre d'accord, l'enseignant prend la décision de les placer, en dédramatisant l'ordre choisi.

- L'activité est rapidement menée et **tous les enfants se trouvent ainsi rangés du plus petit au plus grand**. L'enseignant demande à chaque enfant de se souvenir de celui qui le précède et de celui qui le suit « pour pouvoir se remettre vite à la même place la prochaine fois ».

- De retour dans la classe, **l'enseignant reproduit la file à l'aide des étiquettes prénoms**, chaque enfant étant invité à poser son étiquette sur le bord du tableau ou le long du mur, en commençant par celle du plus petit ou celle du plus grand. L'enseignant indique à la classe qu'il va recopier cette file sur une longue feuille « pour ne pas oublier ».

À la fin de cette activité, la classe dispose donc d'une **représentation symbolique**, plus ou moins parlante pour les enfants : la liste des prénoms et/ou une photo.

La question de **l'unicité de la solution** obtenue (chacun n'a qu'une place possible dans la file) peut être posée si l'attention des enfants le permet encore et si l'enseignant le juge possible : « Est-ce que Nicolas aurait pu se mettre à une autre place ? Par exemple entre Kevin et Lucas ? »

Étape 2 Faire le train

Le lendemain, ou quelques jours plus tard, toujours à l'extérieur de la classe, l'enseignant demande aux enfants de se placer « comme hier » (ou comme lundi...). L'enseignant valide également ce rangement à l'aide de la liste établie la veille qu'il lit ostensiblement, ce qui permet aux enfants de prendre conscience, dans un nouveau cadre, de l'importance de l'écrit et, en particulier, des listes.

L'enseignant demande alors aux enfants de **faire un « train » du plus petit au plus grand**.

Des commentaires sont provoqués : « **Qui est plus grand que Noémie ?** Qui est plus petit que Lucas ? » Ici l'enseignant insiste sur le fait que plusieurs enfants sont « plus grands que Noémie » et qu'il n'y a pas que celui ou celle qui est juste derrière elle.

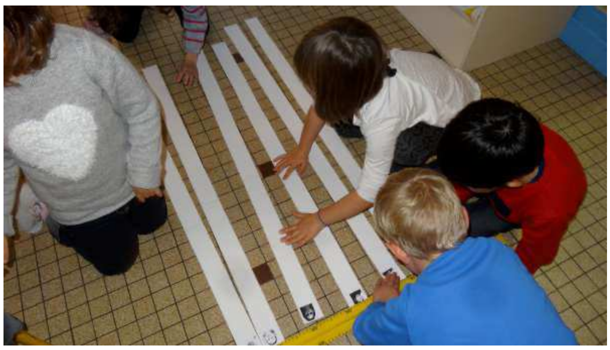
Un enfant est alors invité à sortir du groupe pour se placer face au train (face à l'enfant le plus petit) et à nommer les enfants qu'il voit (presque tous, et non pas tous, du fait des enfants de même taille).

Puis l'enseignant demande aux enfants de se retourner « vers la porte de la classe », suivant le repère, de manière à ce que le plus grand soit le premier. L'enfant chargé d'observer vient se placer face au train inversé (face au plus grand) et doit dire qui il voit (un seul enfant !). L'enfant observateur regagne sa place et l'activité est reprise successivement (le jour même ou le lendemain) avec d'autres enfants invités à faire les mêmes constats.

L'enseignant met en évidence avec les enfants que, d'un côté, on voit presque tous les enfants parce qu'un petit ne cache pas complètement un plus grand, mais que, de l'autre côté, on ne voit qu'un enfant parce que **le plus grand cache tous les autres**.

Document 2 : Image issue de *vers les maths*, GS. Accès 2011. p. 59.

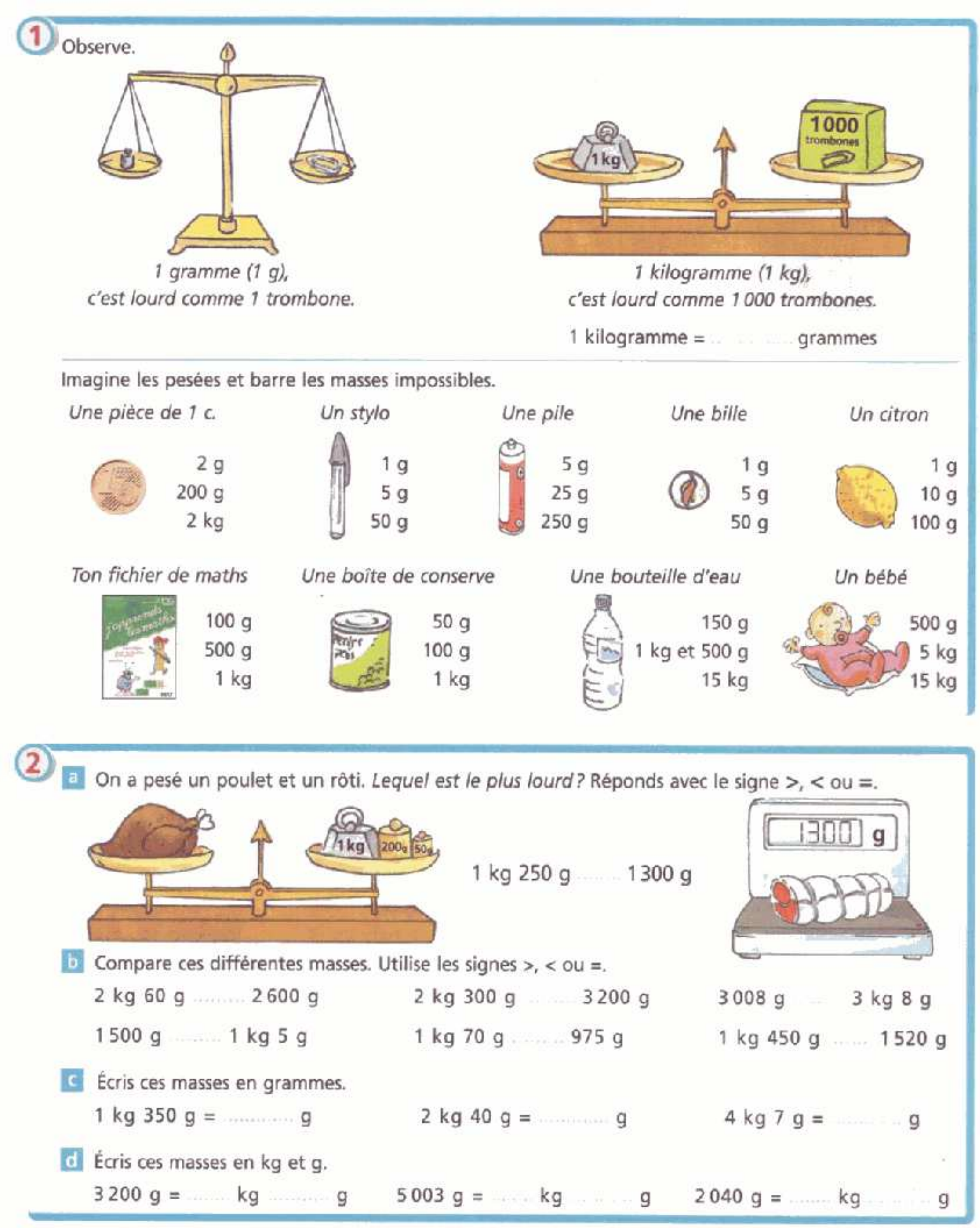
Document 3 : Image issue du site de l'Académie de Nancy-Metz.



Analyse de documents

1 **CRPE 2009 G4**

Le document ci-dessous est tiré de « J'apprends les maths - CE2 », Editions Retz, Séquence 103, page 150.



1 Observe.

1 gramme (1 g), c'est lourd comme 1 trombone.

1 kilogramme (1 kg), c'est lourd comme 1 000 trombones.

1 kilogramme = ... grammes

Imagine les pesées et barre les masses impossibles.

Une pièce de 1 c.	*Un stylo*	*Une pile*	*Une bille*	*Un citron*
2 g	1 g	5 g	1 g	1 g
200 g	5 g	25 g	5 g	10 g
2 kg	50 g	250 g	50 g	100 g

Ton fichier de maths	*Une boîte de conserve*	*Une bouteille d'eau*	*Un bébé*
100 g	50 g	150 g	500 g
500 g	100 g	1 kg et 500 g	5 kg
1 kg	1 kg	15 kg	15 kg

2

a On a pesé un poulet et un rôti. *Lequel est le plus lourd ?* Réponds avec le signe >, < ou =.

1 kg 250 g ...... 1 300 g

b Compare ces différentes masses. Utilise les signes >, < ou =.

2 kg 60 g .... 2 600 g — 2 kg 300 g .... 3 200 g — 3 008 g .... 3 kg 8 g

1 500 g .... 1 kg 5 g — 1 kg 70 g .... 975 g — 1 kg 450 g .... 1 520 g

c Écris ces masses en grammes.

1 kg 350 g = ... g — 2 kg 40 g = ... g — 4 kg 7 g = ... g

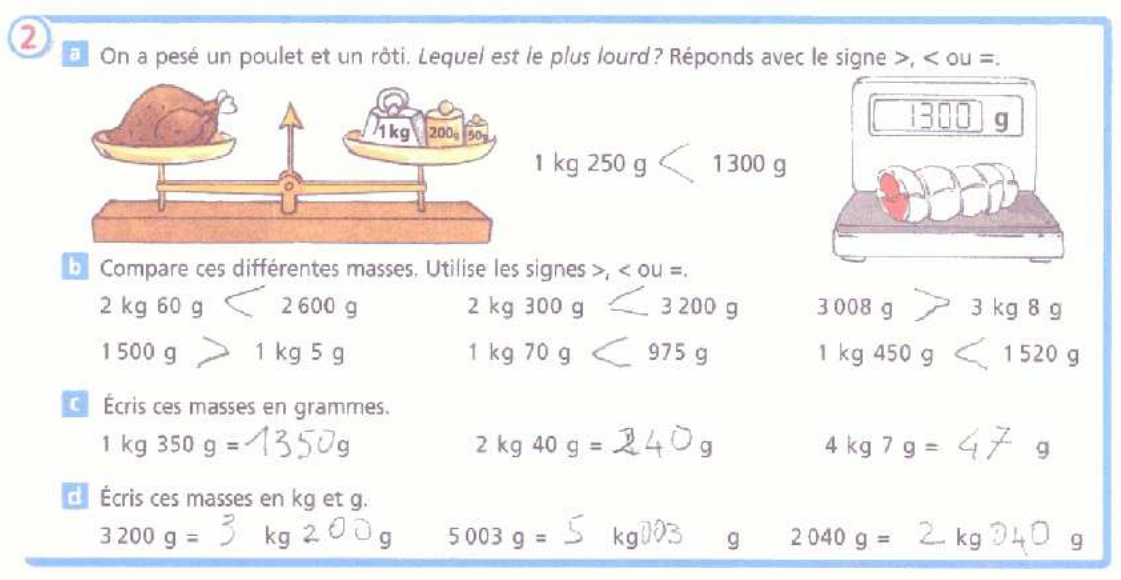
d Écris ces masses en kg et g.

3 200 g = ... kg ...... g — 5 003 g = ... kg ...... g — 2 040 g = ... kg ...... g

1) a) Citer deux difficultés que peuvent rencontrer les élèves pour barrer les masses impossibles de l'exercice 1.

b) Citer deux difficultés que peuvent rencontrer les élèves pour répondre correctement à l'exercice 2-a.

2) Pour cette question, on se reporte à la production d'élève suivante :



- **a)** Dans cette question on s'intéresse aux exercices 2-a, 2-b et 2-c. Quelle est la règle implicite utilisée par cet élève ?
- **b)** Dans cette question on s'intéresse à l'exercice 2-d. Lorsqu'il s'agit de transformer une écriture en gramme en une écriture complexe kilogramme-gramme, on peut supposer que l'élève utilise la règle implicite suivante : le premier chiffre correspond au nombre de kilogrammes, le reste des chiffres correspond au nombre de grammes. Proposer un exercice (dans le même contexte) qui permettrait de vérifier si l'élève utilise cette règle qui donne en général un résultat faux.

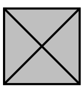
3) Pour cette question, on se reporte de nouveau à la production d'élève.

- **a)** Comment utiliser des masses marquées et une balance à affichage digital pour faire prendre conscience à l'élève de son erreur lors de l'écriture de l'égalité : 2 kg 40 g = 240 g ?
- **b)** Donner une aide possible que l'enseignant peut apporter à cet élève.

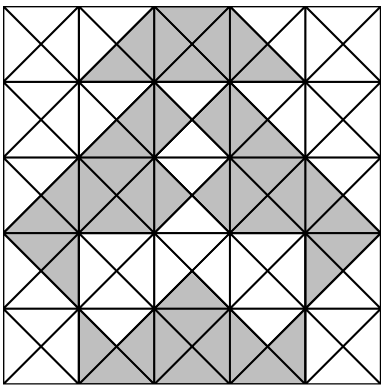
2 CRPE 2016 G2

Dans une classe de CM2, un professeur propose le travail suivant aux élèves.

Quelle est l'aire, en cm^2, de la figure grisée ?



4 triangles = 1 cm^2



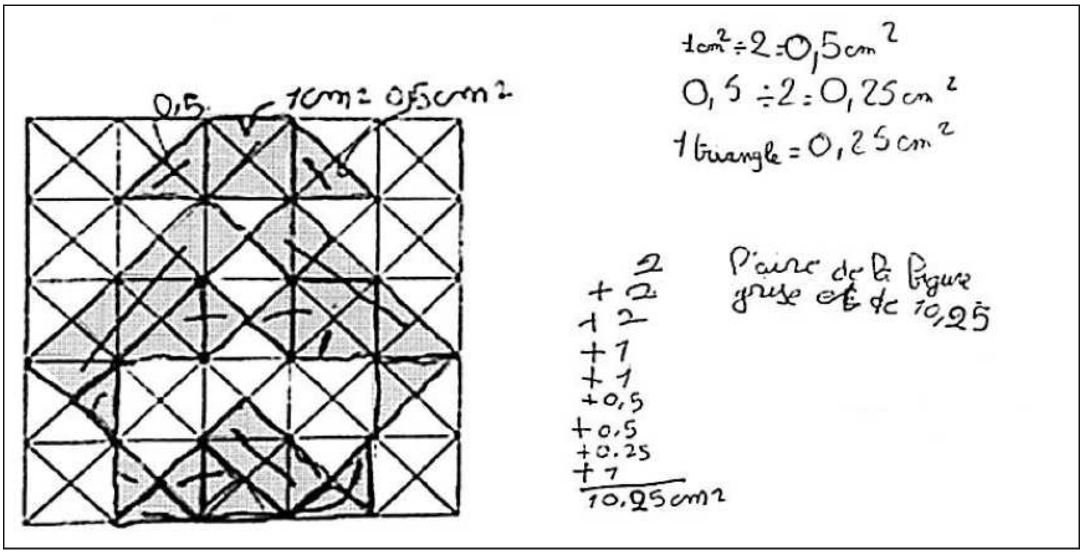
Les productions de quatre élèves sont présentées page suivante.

Analyse de documents

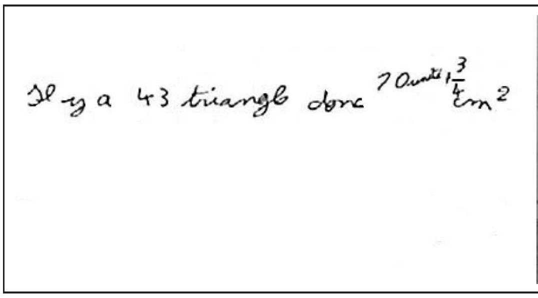
1) Pour les productions de Raphaëlle et Terry, citer trois compétences qui semblent acquises et analyser les éventuelles erreurs.

2) Pour les productions de Clément et Cloé, analyser les procédures en pointant les éléments qui les rapprochent et ceux qui les séparent.

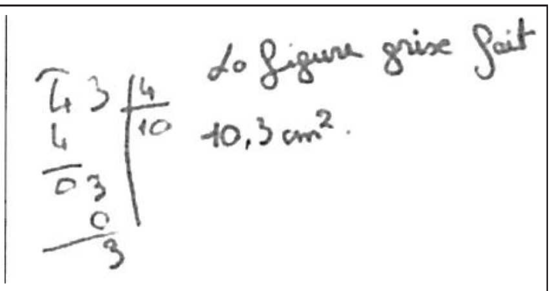
Production de Raphaëlle



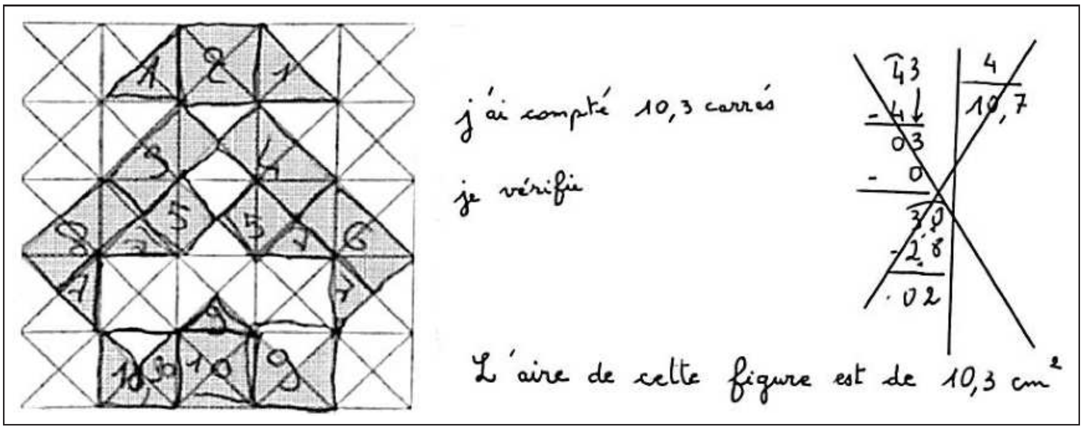
Production de Terry



Production de Clément



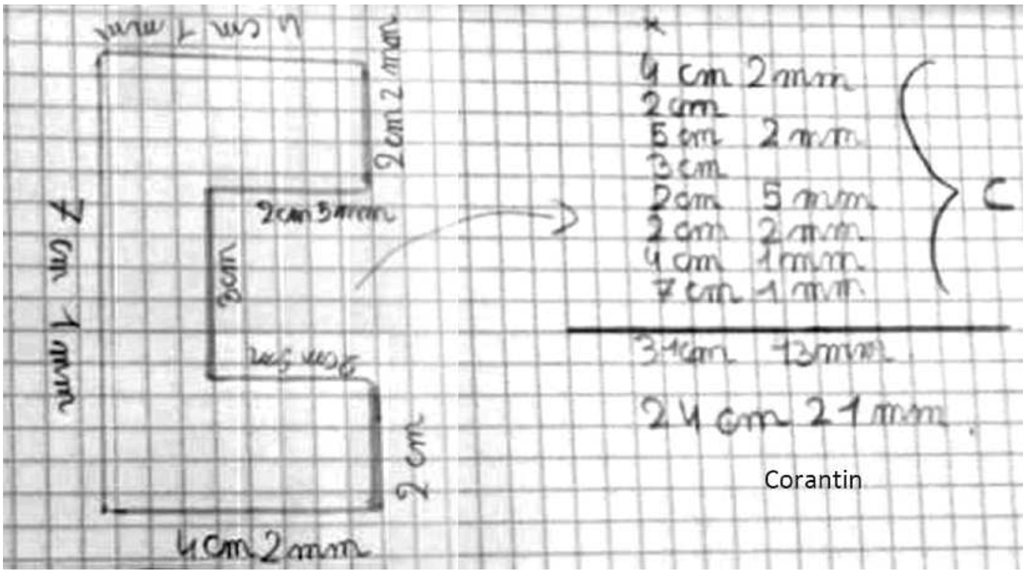
Production de Chloé

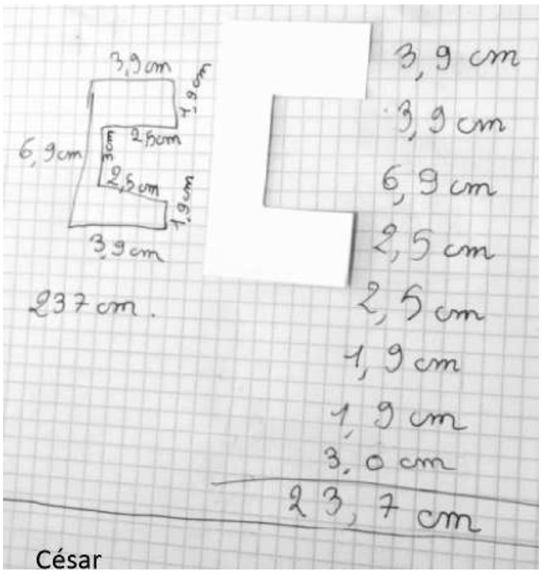


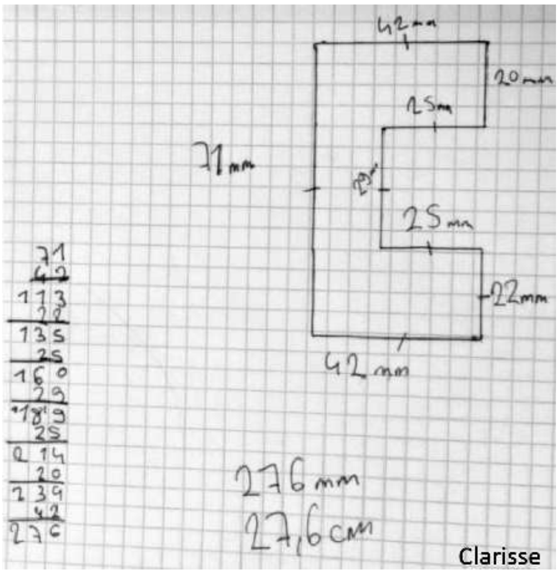
3 CRPE 2016 G3

Un maître a distribué à ses élèves de CM1 des gabarits de lettres et leur a demandé de trouver la longueur de leur contour. Un groupe de trois élèves est chargé de travailler sur le gabarit de la lettre C.

1) Donner quatre compétences nécessaires pour déterminer la longueur du contour.
2) Donner deux difficultés que les élèves pourraient rencontrer pour cette tâche.
3) Voici ci-dessous les productions de trois élèves (Corantin, César et Clarisse). Pour chacun de ces travaux :
   a) Analyser la trace écrite (procédures suivies, compétences mises en oeuvre, erreurs éventuelles).
   b) Proposer une remédiation que le professeur pourrait mettre en place pour César et Corantin.



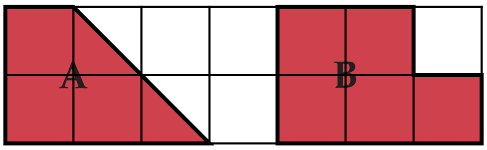




Analyse de documents

4 **CRPE 2016 G3**

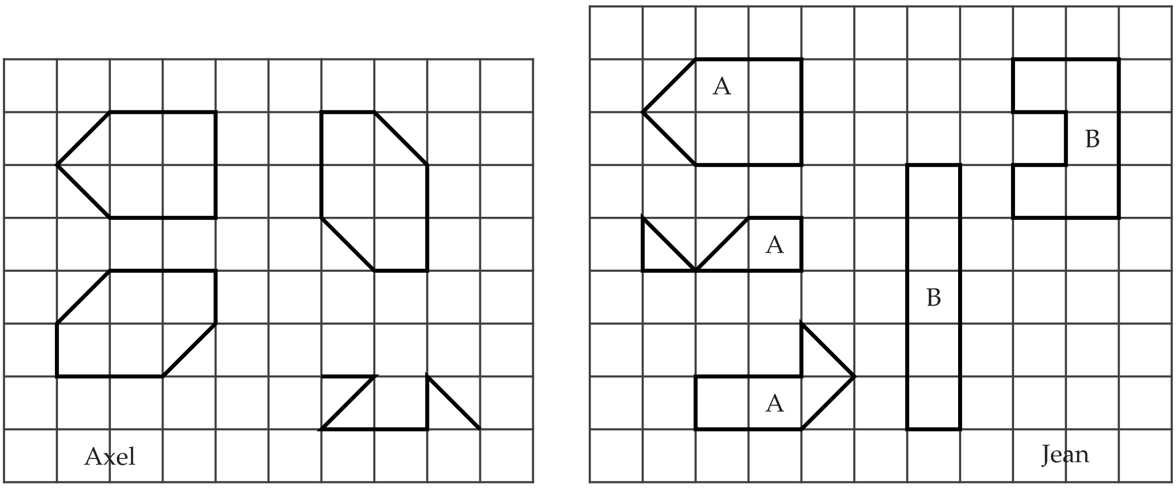
Voici l'énoncé d'un problème proposé dans le cadre du rallye mathématique CM2-6ème de l'IREM Paris-Nord.

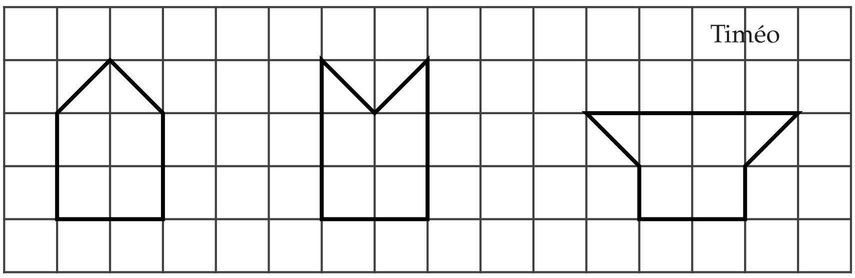
> « Construire trois figures différentes dont les sommets sont des noeuds du quadrillage et qui à la fois ont même périmètre que la figure A et même aire que la figure B. »
>
> 
>

1) Citer trois compétences dans le domaine « grandeurs et mesures » qui permettent de construire les figures demandées.

2) L'enseignant a choisi d'utiliser du papier à quadrillage carré. Citer une difficulté qu'apporterait l'utilisation de papier pointé (à réseau carré).

3) Voici la production de trois élèves : Axel, Jean et Timeo.





a) Axel : pour quelle raison le professeur a-t-il demandé à Axel de trouver une autre figure, après les trois premières dessinées ? Proposer une explication possible au fait qu'Axel n'a pas terminé le quatrième tracé.

b) Jean : analyser les réponses de Jean, en lien avec les objectifs de l'exercice.

c) Timéo : analyser les réponses de Timéo, en lien avec les objectifs de l'exercice.

d) Proposer une aide possible que le maître pourrait apporter à Jean et à Timéo.

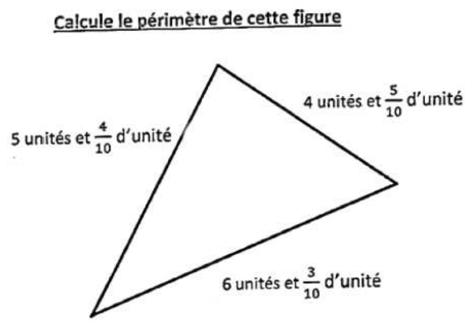
5 **CRPE 2018 G1**

1) À partir des productions suivantes, expliquer pour chaque élève :

- la démarche utilisée ;
- les compétences qui semblent acquises ;
- les éventuelles erreurs.

Productions d'élèves de CM2 :

Nicolas

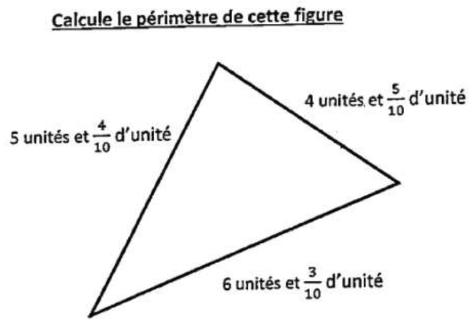


6+5+4 = 16 unités

$\frac{4}{10} + \frac{5}{10} + \frac{3}{10} = \frac{11}{10}$

17,01

Thomas

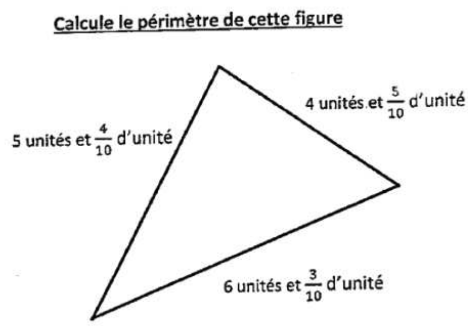


5+4+6 = 15 unités

$\frac{5}{10} + \frac{4}{10} + \frac{3}{10} = \frac{12}{10}$

15 unités et $\frac{12}{10}$

Amina



6+4 = 10 unités + 5 = 15 unités

$\frac{5}{10} + \frac{4}{10} = \frac{9}{10} + \frac{3}{10} = \frac{12}{10}$

= 16 unités $\frac{2}{10}$

ou

16,2

2) Que peut proposer l'enseignant pour amener Thomas à rédiger sa réponse sous forme d'écriture à virgule ?

1 C1 - Comparer et ranger des objets selon leur masse

Séquence inspirée de *Vers les maths MS, Accès*, activité des déménageurs et de la balance. Sauf mention contraire, les séances se font en atelier dirigé. On pourra utiliser l'album *Un tout petit coup de main*.

S	D	Objectif	Déroulement
1	30 min	Différencier lourd/léger gros/petit	**Le jeu des déménageurs** (*En classe entière*) Matériel : des objets de masses et de volumes variés (cartons vides ou pleins, chaises, bancs, ballon, plume, kg de sucre, stylo, bouteille, pack de 6 bouteilles. . .) Déroulement : transporter les objets d'une zone à l'autre pour imiter des déménageurs. À la fin du jeu, on demande aux élèves de verbaliser ce qu'ils ont fait pour faire émerger le vocabulaire lourd, léger, gros, grand, petit.
2	30 min	Différencier lourd/léger	Matériel : les mêmes objets que dans le jeu du déménageur. Déroulement : classer les objets suivant les deux catégories lourd et léger et valider en énonçant des critères comme « je peux le porter à une main, à 2 mains, je peux courir avec, j'ai besoin d'un copain pour le porter. . . »
3	10 min	Réinvestissement du vocabulaire lourd/léger	**Jeu des devinettes** Matériel : deux petites bouteilles d'eau, une vide et une pleine et deux grandes bouteilles, une vide et une pleine. Déroulement : l'enseignant.e choisit une bouteille parmi les quatre et les élèves doivent deviner de laquelle il s'agit en posant des questions. Ensuite les élèves peuvent jouer deux par deux.
4	20 min	Différencier volume/masse	Matériel : des paires d'objet, un grand carton vide fermé, un petit carton fermé rempli d'objets lourds ; une grande bouteille vide et une petite bouteille pleine ; un grand morceau de polystyrène et un petit sac lourd. Chaque objet est marqué d'un signe différent rond ou carré. Déroulement : sans toucher les objets les élèves doivent dire lequel est le plus lourd sans manipuler ni regarder à l'intérieur des objets en notant le symbole de cet objet. Ensuite ils soupèsent les objets et comparent avec leurs hypothèses. Mise en évidence du fait que les plus gros ne sont pas forcément les plus lourds.
5	30 min	Découverte et manipulation de la balance	Matériel : deux objets de masses voisines . Déroulement : en soupesant les objets les élèves doivent dire lequel des deux est le plus lourd. Les élèves se dessinent en train de soupeser les objets et dictent à l'adulte leur conclusion. Confrontation des résultats et constat des différences. Chercher l'objet de la classe qui pourrait nous aider : la balance. La balance permet de dire quel objet est le plus lourd ou le plus léger.
6	Acc.	Manipulation de la balance	Laisser en libre accès la balance au coin jeu pour voir si les enfants l'utilisent pour peser ou plus simplement pour faire faire basculer.
7	30 min	Réinvestir la balance	**Jeu des pirates** Matériel : quatre coffres (boites) de masses et de couleurs différentes. Déroulement : distribuer à quatre pirates quatre coffres de masses différentes. Le coffre le plus lourd au capitaine, le coffre un peu moins lourd au matelot, le coffre encore moins lourd au timonier et le coffre le plus léger au mousse. Les coffres sont fermés de même taille mais de couleurs différentes. Les élèves doivent distribuer les coffres aux différents personnages en les pesant à l'aide de la balance.

2 C2 - **Les masses**

Cette ressource, disponible entièrement ici : Grandeurs et mesures au cycle 2 : masses est destinée aux élèves de CE1 ou de CE2.

Objectifs : utiliser les propriétés additives et multiplicatives des masses pour construire des référents au kilogramme : savoir qu'un kilogramme c'est à peu près la masse d'une bouteille d'un litre d'eau, d'une brique de lait, de cinq pommes, de deux cents feuilles de papier et donc qu'une ramette de 500 feuilles pèse 2 kilogrammes et demi, etc. Cela permet aussi aux élèves de comprendre qu'à des volumes différents peuvent correspondre des masses identiques et de renforcer la distinction entre masse et contenance/volume.
Il convient enfin de faire en sorte que les élèves ne restent pas dans la seule manipulation et entrent dans les références mathématiques (unités de masse, calculs. . .) sans que ce soit l'enseignant qui pose les savoirs (importance de la trace des recherches et de sa formalisation).

Matériel : différents éléments de l'ordre du kilogramme, de tailles, de formes et de compositions variées, issus du quotidien de l'élève ou de la vie courante et mis dans des emballages neutres ; Balance de Roberval et ses masses marquées (sauf 1 kg).

Prérequis : les élèves doivent avoir travaillé en amont sur la grandeur masse et avoir compris de quoi il s'agit. Ils doivent avoir classé des objets selon leur masse, en particulier des objets de masses volumiques différentes afin de bien différencier masse et volume. Une séance préalable d'appropriation et de manipulation des balances de Roberval peut se révéler utile. Il s'agit de faire comprendre aux élèves le principe de l'équilibre.

Organisation de la séance :

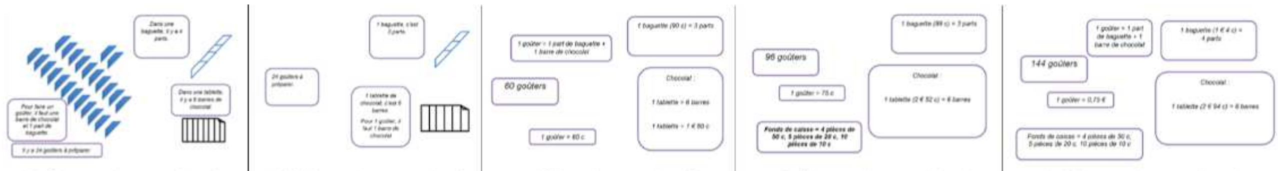
Situation 1 : ordonner des objets selon leur masse en les soupesant (15 min)
• Présentation et désignation des objets : présenter le contexte de la séance, des objets à peser, les nommer et les lister au tableau. Distribuer les éléments à soupeser. • Temps de réflexion permettant de préciser le vocabulaire et de recueillir des informations quant aux représentation des élèves. L'enseignant(e) propose la consigne suivante *Max dit : « Toutes ces choses pèsent pareil ! ». Lola n'est pas d'accord. Qui a raison ?* • Recherche en soupesant les objets : les élèves soupèsent les éléments (trois par groupe) et les ordonnent en fonction de leur masse. À l'issue de la séance, ils gardent une trace écrite (photographie, courte phrase, ordre de vignettes. . .).

Situation 2 : ordonner des objets selon leur masse par comparaison et pesée (15 min)
• Recherche par comparaison deux à deux. L'enseignant(e) propose la consigne suivante : *Pour vérifier la classification que vous avez établie, vous allez utiliser les balances pour comparer les objets deux à deux*. Les élèves comparent les masses des objets en les déposant sur les plateaux de la balance Roberval. Ils sont invités à rédiger une phrase de conclusion. • Recherche par pesée. L'enseignant(e) propose la consigne suivante : *Déterminer la masse de chacun des objets à l'aide de la balance et des masses marquées*. Distribuer des masses marquées (la somme de ces masses doit faire au moins un kilogramme). Faire réaliser une mesure pour chacun des objets.

Situation 3 : construction de référents de l'ordre du kilogramme (15 min)
• Un tableau récapitulatif permet de faire la synthèse des différentes pesées effectuées en notant les résultats. Si plusieurs groupes ont pesé les mêmes objets, on peut faire apparaitre les différentes mesures obtenues. Ces différentes mesures ne seront sans doute pas égales, il faut alors différencier les résultats incohérents dus à des erreurs de lecture des masses ou de calcul des différences, des résultats simplement différents à cause de l'incertitude de la mesure (comment les objets sont placés sur le plateau, type d'arrondi, etc.). • Élaboration de la trace écrite : faire émerger la notion de référent au kilogramme.

3 C2/C3 - Le goûter

Cette ressource issue d'*éduSCOL* propose une activité qui s'appuie sur un projet de goûter pour une association sportive. Elle permet de travailler en mathématiques, dans le domaine « Grandeurs et mesures », les principes d'utilisation de la monnaie et le lexique associé ainsi que la résolution de problèmes.
Le scénario pédagogique décline cette activité selon cinq niveaux de progressivité aux cycles 2 et 3. La situation proposée se complexifie progressivement, en jouant sur les variables didactiques. L'activité consiste en la résolution d'un problème dont l'énoncé est volontairement épuré et schématisé. À partir de cette situation initiale, les évolutions proposées permettent à l'enseignant de prendre en compte l'hétérogénéité de la classe.



Début de cycle 2 | Milieu de cycle 2 | Fin de cycle 2 | Début de cycle 3 | Milieu de cycle 3

Présentation de la situation aux élèves :
« Dans une association sportive, des enfants proposent un goûter payant à l'ensemble des adhérents. Ce goûter est constitué d'une part de baguette de pain et d'une barre de chocolat. Afin de prévoir les goûters, l'un des enfants organisateurs a représenté la situation par un schéma. »

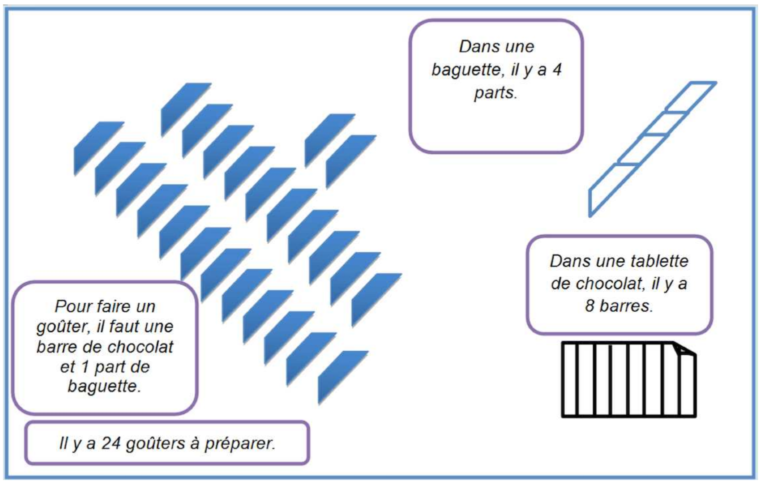
Organisation :

- prévoir un temps de recherche préalable autour du document en collectif, par binôme ou en petit groupe à partir d'une série non exclusive de questions : « Qu'est-ce que l'enfant a écrit et dessiné sur son schéma ? », « A quoi cela peut-il bien lui servir ? », « En quoi cela est-il utile ? », « Que va-t-il bien pouvoir en faire ? »...
- mise en commun avec validation des hypothèses.
- l'enseignant.e introduit ensuite des données financières de la situation de référence : le goûter est vendu..., la baguette coûte..., la tablette de chocolat coûte... puis il pose la question suivante :
  « Que pouvez-vous calculer à partir de ces données ? Effectuer les calculs qui permettent de connaître les recettes et les dépenses. Les recettes couvrent-elles les dépenses ? »
- les élèves rendent un écrit.

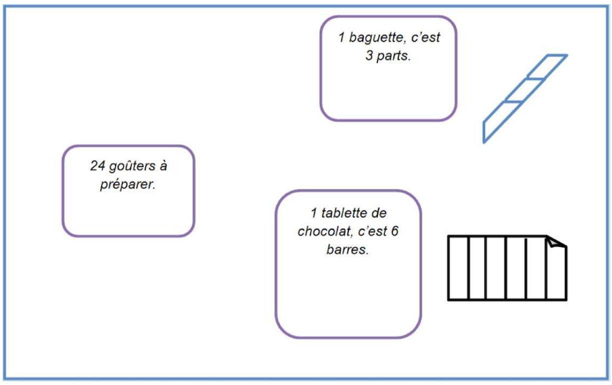
Niveau 1 : début de cycle 2

Prérequis : savoir que 50 c + 50 c = 1 €

Données financières :
le goûter est vendu 50 c,
la baguette coûte 1 €,
la tablette de chocolat coûte 2 €.



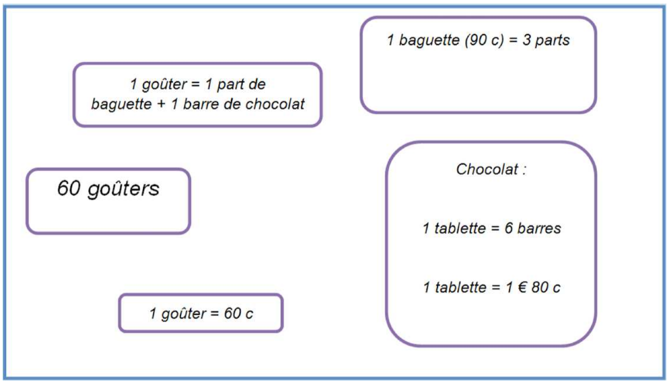
Niveau 2 : milieu de cycle 2



Prérequis : manipuler les centimes d'euro par tranches de 25 c

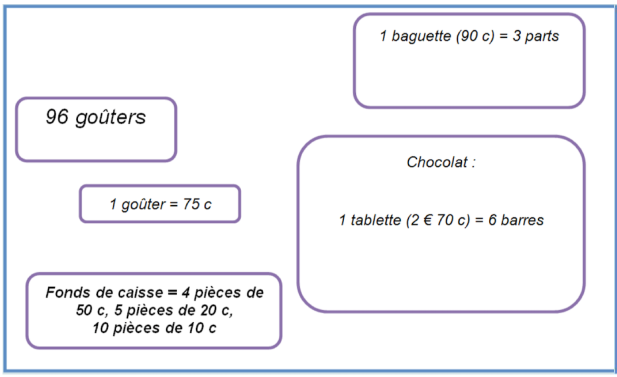
Données financières :
le goûter est vendu 75 c,
la baguette coûte 1,25 €,
la tablette de chocolat coûte 2 €.

Niveau 3 : fin de cycle 2



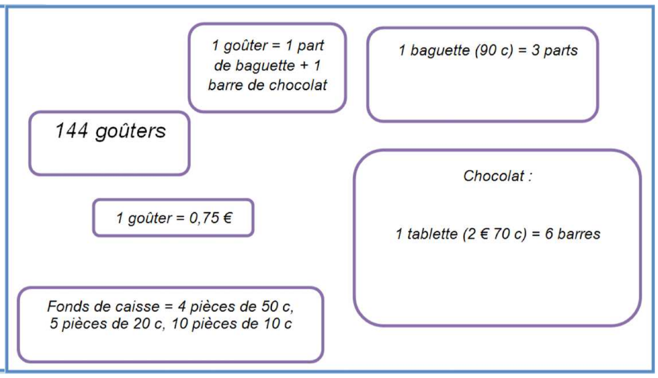
Données financières :
données sur le schéma.

Niveau 4 : début de cycle 3



Contenu de la caisse après la vente :
39 pièces de 1 €,
52 pièces de 50 c
25 pièces de 20 c
49 pièces de 10 c
22 pièces de 5 c

Niveau 5 : fin de cycle 3



Contenu de la caisse après la vente :
5 billets de 5 €
16 pièces de 2 €
35 pièces de 1 €
31 pièces de 50 c
10 pièces de 20 c
11 pièces de 10 c
18 pièces de 5 c
21 pièces de 2 c
8 pièces de 1 c

TRANSVERSAL

8

Proportionnalité

Dans les programmes - cycle 3

Résoudre des problèmes en utilisant des fractions simples, les nombres décimaux et le calcul.

- Reconnaître et résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité en utilisant une procédure adaptée : propriétés de linéarité (additive et multiplicative), passage à l'unité, coefficient de proportionnalité.
  Appliquer un pourcentage.

Résoudre des problèmes impliquant des grandeurs (géométriques, physiques, économiques) en utilisant des nombres entiers et des nombres décimaux.

- Identifier une situation de proportionnalité entre deux grandeurs à partir du sens de la situation. Résoudre un problème de proportionnalité impliquant des grandeurs.

Reconnaitre et utiliser quelques relations géométriques

- Reproduire une figure en respectant une échelle donnée.
  Agrandissement ou réduction d'une figure.

Repères didactiques

1. Repères de progressivité et stratégies d'enseignement

Dans les programmes de 2008, la proportionnalité apparaît à part entière dans le thème « Organisation et gestion de données ». Ce thème ayant disparu des nouveaux programmes de 2015 en tant que tel, la proportionnalité se traite en fil rouge dans les trois domaines que sont « Nombres et calculs », « Espace et géométrie », et « Grandeurs et mesures » [edu3].

La résolution de problèmes de proportionnalité est un terrain particulièrement fécond pour les interactions entre la langue française et le langage mathématique puisque la verbalisation en langage naturel des procédures utilisées (prendre le double, le triple, le tiers, le quadruple, d'une grandeur) contribue à la fois à l'élargissement du répertoire lexical et à et la compréhension d'une notion mathématique.
Sa maîtrise est essentielle tant pour un usage dans la vie courante que dans un cadre professionnel. Son apprentissage s'inscrit dans la durée.

Les premiers problèmes de proportionnalité rencontrés sont des problèmes de multiplication et des problèmes de division (« un ballon de foot pèse 450 g, combien pèsent 3 ballons de foot identiques ? »). Proposés dès le CE1, ils sont résolus à l'aide de procédures personnelles et préparent les élèves à la reconnaissance de situations de proportionnalité. C'est à partir du CM1 que le langage spécifique de proportionnalité apparait :
– **Au CM1**, dès la P1, des situations de proportionnalité peuvent être proposées (recettes. . .). Le recours aux propriétés de linéarité (multiplicative et additive) est privilégié. Ces propriétés doivent être explicitées ; elles peuvent être institutionnalisées de façon non formelle à l'aide d'exemples verbalisés (« si j'ai deux fois, trois fois. . . plus d'invités, il me faudra deux fois, trois fois. . . plus d'ingrédients » ; « si 6 stylos coutent 10 euros et 3 stylos coutent 5 euros, alors 9 stylos coutent 15 euros »).
L'institutionnalisation des propriétés se fait progressivement à partir de la P2.
– **Au CM2**, dès la P1, le passage par l'unité vient enrichir la palette des procédures utilisées lorsque cela s'avère pertinent. à partir de la P3, le symbole % est introduit dans des cas simples, en lien avec les fractions d'une quantité (50% pour la moitié ; 25% pour le quart ; 75% pour les trois quarts ; 10% pour le dixième).
Des situations très simples impliquant des échelles et des vitesses constantes peuvent également être rencontrées : les élèves agrandissent ou réduisent une figure dans un rapport simple donné (par exemple $\times\frac{1}{2}$, $\times 2$ ou $\times 3$). Si le coefficient de proportionnalité est rencontré au cours moyen, notamment lors de travaux sur les échelles, son institutionnalisation dans un cadre général peut être reportée en toute fin de cycle 3.

Stratégies d'enseignement

Pour que la proportionnalité prenne tout son sens, l'élève doit être confronté à des situations ne relevant pas de la proportionnalité (« Si je mesure 1 mètre à 10 ans, je peux mesurer 2 mètres à 20 ans mais pas 4 mètres à 40 ans »).
Les propriétés de linéarité pour l'addition et pour la multiplication par un nombre doivent être le plus souvent possible explicitées. L'enseignant propose dans un premier temps des situations mettant en jeu des nombres entiers entretenant entre eux des rapports simples (double, triple, quintuple, etc.) pour aller progressivement vers des situations plus compliquées (nombres décimaux, fractions, rapports plus complexes).

Les **tableaux de proportionnalité** ne doivent pas être conçus comme des objets d'enseignement ; s'ils peuvent permettre de résumer clairement une situation proposée dans un problème, les opérations à réaliser pour résoudre un problème de proportionnalité au cycle 3 ne doivent pas se faire par un raisonnement sur des lignes ou des colonnes d'un tableau mais uniquement sur des cardinaux ou des grandeurs, en explicitant ce qui est fait, tant à l'oral qu'à l'écrit. En variant les nombres et les relations numériques, l'enseignant habitue l'élève à changer de procédure pour choisir de manière pertinente la plus efficace pour lui.

2. Les procédures de résolution à l'école

Au niveau de l'école primaire, on utilise essentiellement les propriétés de linéarité (additive, multiplicative ou mixte), ainsi que le passage à l'unité et le coefficient de proportionnalité dans des cas simples. L'objectif n'est pas, à ce stade, de mettre en avant telle ou telle procédure particulière, mais de permettre à l'élève de disposer d'un répertoire de procédures, s'appuyant toujours sur le sens, parmi lesquelles il pourra choisir en fonction des nombres en jeu dans le problème à résoudre. Chaque méthode devra être réinvestie dans les trois registres numérique - grandeurs - géométrique.

Procédure utilisant la propriété de linéarité additive.

Nombres et calculs	Grandeurs et mesures
On souhaite calculer 7×12. • $7 \times 10 = 70$; • $7 \times 2 = 14$; $12 = 10 + 2$ donc, par linéarité additive : $7 \times 12 = 70 + 14 = 84$.	3 kg de letchis coûtent 3,60 € ; 5 kg de letchis coûtent 6 € ; 8 kg de letchis coûtent 3,60 € + 6 € = 9,60 €.

Procédure utilisant la propriété de linéarité multiplicative.

Grandeurs et mesures	Espace et géométrie
Une douzaine d'oeufs identiques pèsent 600 g donc, par linéarité multiplicative : • 6 oeufs pèsent deux fois moins, soit 300 g ; • 36 oeufs pèsent trois fois plus, soit 1 800 g.	Mon triangle a pour mesures 3 cm, 4 cm et 5 cm. J'effectue un agrandissement pour que le côté le plus grand mesure 20 cm. Il s'agit d'un agrandissement de facteur 4, donc, les deux autres côtés mesurent respectivement 12 cm et 16 cm.

Autres procédures.
Une fois ces deux procédures fondamentales parfaitement assimilées, on peut entrer dans des problèmes de proportionnalité un peu plus complexes. Imaginons par exemple le problème suivant donné à des élèves de cycle 3 :
« *Axel a acheté 6 stylos tous identiques et au même prix. Il a payé 9 €. Combien aurait-il payé si il en avait acheté 15 ?* ».

Linéarité mixte	Passage par l'unité	Coefficient de proportionnalité
15 stylos = 12 stylos + 3 stylos ; 6 stylos coûtent 9 € ; • 12 stylos coûtent 18 € ; (deux fois plus) ; • 3 stylos coûtent 4,5 € (la moitié) ; 15 stylos coûtent 22,5 € (18 € + 4,5 € = 22,5 €).	6 stylos coûtent 9 € ; • 1 stylo coûte 1,5 € ; ($9 € \div 6$) 15 stylos coûtent 22,5 € ($15 \times 1,5$ € = 22,5 €).	6 stylos coûtent 9 € ; le coefficient de proportionnalité permettant de passer de 6 à 9 est de 1,5 ($6 \times 1,5 = 9$) ; 15 stylos coûtent 22,5 € ($15 \times 1,5 = 22,5$).
+ Méthode de calcul mental. + Facile à comprendre. – Peut être long.	+ Méthode ayant du sens. – Arrondis parfois source d'erreur.	+ Méthode rapide. – Coefficient difficile à trouver. – Moins intuitif.

3. Typologie des problèmes posés

On peut classer les problèmes de proportionnalité en plusieurs catégories.

Problèmes de recherche d'un 4ème proportionnelle : trois données sont connues, et on recherche la quatrième, ce sont les problèmes les plus classiques pouvant porter sur des grandeurs de même nature ou de nature différente.

Grandeurs de même nature	Grandeurs de nature différente
Sur une carte de la Réunion, 5 cm représentent 10 km dans la réalité. Pour aller de Saint-Denis à Saint-Pierre, on trouve 35 cm sur la carte. Quelle est la distance Saint-Denis – Saint-Pierre ?	J'ai payé 15 € pour 2 kg de fruits de la passion. Combien aurais-je payé si j'en avais acheté 5 kg ?

Problèmes de reconnaissance ou non de la proportionnalité : très importants afin que les élèves acquièrent un esprit critique et évitent d'utiliser systématiquement des procédures de proportionnalité.

Proportionnalité or not ?	Proportionnalité or not ?... bis
à 2 ans, je mesurais 80 cm. Quelle taille ferais-je lorsque j'aurai 20 ans ?	10 cahiers coûtent 8 €, 20 cahiers coûtent 16 € et 25 cahiers coûtent 20 €, est-on dans une situation de proportionnalité ?

Problèmes de comparaison : deux grandeurs sont en présence mais impliquées dans deux situations différentes. La question porte sur la comparaison des deux situations.

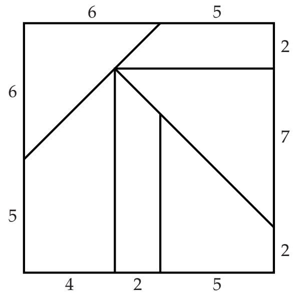
Comparaison de promotions	Comparaison de mélanges
Une boulangerie propose la promotion suivante : les 10 croissants à 2,90 € ou le lot de 4 au prix de 3 €. Dans lequel de ces deux lots le prix d'un croissant est-il le plus intéressant ?	Un mélange A est composé de 9 g de sucre dans 4 L d'eau. Un mélange B est composé de 11 g de sucre dans 6 L d'eau. Quel est le mélange le plus sucré ?

Problèmes de pourcentages, d'échelle, d'agrandissement et de réduction : ce sont tous des problèmes qui relèvent de la proportionnalité mais à travers des notions plus inhabituelles pour les élèves.

Pourcentages	Agrandissement
Dans une école de 200 élèves, 75 % des élèves mangent à la cantine. Yoan dit qu'il y a 50 élèves qui ne mangent pas à la cantine. A-t-il raison ?	Les élèves sont mis par groupe et chaque élève doit faire un agrandissement d'une pièce d'un puzzle. à la fin, on regroupe les pièces pour reconstituer le puzzle. La consigne est : le côté du puzzle qui mesure 4 cm doit mesurer 6 cm sur le puzzle que vous devez construire.

Puzzle de Guy Brousseau [bro87-2]

Recherche en didactique, n°2.1



4. Difficultés et variables didactiques

• **Difficultés à reconnaître si la situation relève du modèle proportionnel ou non.**
La plupart des problèmes ne précisent pas explicitement si la situation est une situation de proportionnalité. C'est à l'élève de faire appel à ses références personnelles ou à deviner l'intention du maître (contrat didactique). Il appartient donc à l'école de doter les élèves de situations de référence suffisamment nombreuses (domaine économique, physique, géographique, mathématique...).
Il est donc important que les situations étudiées ne relèvent pas toutes du modèle proportionnel afin d'exercer la vigilance des élèves sur le choix des modèles et des procédures.

• **Difficulté du choix de la procédure de résolution adéquate.**
Nous avons vu qu'il n'existait pas une procédure unique menant à la résolution d'un problème de proportionnalité. L'élèves devra donc faire un choix.
Les domaines numériques dans lesquels sont choisis les nombres de l'énoncé et les relations entre ces nombres jouent un rôle déterminant dans le choix d'une procédure : ce sont des variables didactiques décisives.

• **Mise en oeuvre de la procédure choisie.**
Une fois la procédure choisie, il faut la mettre en œuvre de manière efficace et juste et ce travail demande une bonne connaissance des nombres, le type des nombres est un variable didactique très importante sur laquelle on peut jouer (entiers, décimaux). L'exécution des calculs peut être aussi source de difficultés.

• **Comprendre que le fait qu'il y ait des augmentations ou des diminutions n'est pas forcément lié à des notions d'additions ou de soustraction.**
C'est souvent une « théorème en acte » des élèves : les expériences antérieures ont installé des idées fortes du genre « augmentation signifie addition et diminution signifie soustraction ».
Au moment de l'apprentissage de la proportionnalité, une rupture nécessaire avec ces concepts s'impose. Il appartient à l'enseignant de favoriser des situations problème pour que cette rupture puisse se faire.

Focus sur la règle de trois.

Dans les programme de 2008, la réapparition de la « règle de trois » après des années de suppression (1995) fait couler beaucoup d'encre. L'objectif est de donner des outils de base, des techniques d'automatisation aux élèves.
La règle de trois est basée sur une des propriétés fondamentales des proportions, démontrée par *Euclide* dans ses éléments, qui, selon la traduction de *Denis Henrion* en 1632 s'écrit :

> THEOR. 17. PROP. XIX.
> Si quatre nombres ſont proportionnaux, le produict du premier multiplié par le quart, ſera egal au produict du ſecond par le tiers : Et ſi le produict du premier multiplié par le quart, eſt egal au produict du ſecond par le tiers ; iceux quatre nombres ſont proportionnaux.

Cette propriété, plus communément appelée « produit en croix », figure uniquement au programme du cycle 4.
Dans les programmes de 2015, cette technique (re)disparait des programmes, probablement à cause de son aspect « recette de cuisine » que les élèves appliquent sans en comprendre le sens. Retour donc aux fondamentaux.

Vu au CRPE en 2022

Sujet n°1 de l'épreuve de leçon, concours CRPE 2022, académie de Montpellier.

Consigne candidat : à partir du sujet et du dossier proposés par le jury, vous concevrez la mise en œuvre d'une séance d'enseignement à l'école primaire dans chacune des deux disciplines français et mathématiques. Vous présenterez successivement les composantes pédagogiques et didactiques de chaque séance et son déroulement.

Sujet : Proportionnalité . procédures de résolution d'une situation problème.

Contexte de la séance d'enseignement :

- cycle d'enseignement : cycle 3;
- niveau de la classe : CM2;
- positionnement de la séance de mathématiques :
  - période : période 4 ou 5;
  - séquence dans laquelle elle s'insère : La proportionnalité.

Documents fournis au candidat :

Document 1 : Ministère de l'éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports, extrait des Programmes d'enseignement du cycle de consolidation (cycle 3), 2020, pages 93 et 95.

Nombres et calculs

Attendus de fin de cycle

– Résoudre des problèmes en utilisant des fractions simples, les nombres décimaux et le calcul.

Résoudre des problèmes en utilisant des fractions simples, les nombres décimaux et le calcul.
Proportionnalité Reconnaître et résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité en utilisant une procédure adaptée : propriétés de linéarité (additive et multiplicative), passage à l'unité, coefficient de proportionnalité. Appliquer un pourcentage.

Document 2 : éduscol Ressources, *Résoudre des problèmes de proportionnalité au cycle 3*, mars 2016.
Disponible sur https://eduscol.education.fr/251/mathematiques-cycle-3

Progressivité des apprentissages

La notion de proportionnalité est introduite en première année du cycle 3. Le travail mené s'appuie tout particulièrement sur les problèmes multiplicatifs traités au cycle 2.

Les procédures rencontrées au cycle 3 pour résoudre des problèmes de proportionnalité continueront d'être utilisées au cycle 4 où seront introduites, en fin de cycle, les fonctions linéaires. C'est donc tout au long des trois cycles de la scolarité obligatoire que se construisent progressivement les connaissances relatives à la notion de proportionnalité :

• **Au cycle 2**, les élèves rencontrent des situations de proportionnalité dans des problèmes multiplicatifs.

Exemple : Un manuel de mathématiques pèse 340 g. Combien pèsent 5 manuels identiques ?

Ces problèmes préparent les élèves à la reconnaissance de situation de proportionnalité et à leur résolution par une procédure utilisant la propriété de linéarité pour la multiplication par un nombre.

• **Au cycle 3**, les premiers travaux sur la proportionnalité sont proposés dès la première année du cycle ; les élèves ont recours à des procédures utilisant les propriétés de la linéarité (procédure utilisant la propriété de linéarité pour l'addition, procédure utilisant la propriété de linéarité pour la multiplication par un nombre). Ensuite, les élèves rencontrent progressive- ment des situations qui nécessitent de combiner des procédures utilisant les propriétés de la linéarité (procédure mixte utilisant les propriétés de linéarité pour l'addition et pour la multiplication par un nombre, passage par l'unité). Pendant la seconde moitié du cycle, s'ajoutent des problèmes impliquant des échelles ou des vitesses constantes. Si le coefficient de proportionnalité est rencontré au cours moyen, notamment lors de travaux sur les échelles, son institutionnalisation dans un cadre général peut être reportée en toute fin de cycle 3.
• **Au cycle 4**, toutes les procédures introduites au cycle 3 pour résoudre des problèmes de proportionnalité continuent à être utilisées en fonction des nombres en jeu dans les problèmes proposés et des connaissances de faits numériques des élèves. Des tableaux de proportionnalité sont régulièrement utilisés pour résoudre des problèmes ; ils facilitent l'utilisation du coefficient de proportionnalité, particulièrement efficace quand un nombre important de données doivent être calculées. Le produit en croix est introduit après l'étude de l'égalité des fractions ; il permet de calculer rapidement une quatrième proportionnelle, quand les nombres en jeu ne permettent pas d'utiliser facilement des procédures basées sur les propriétés de linéarité. En fin de cycle, les élèves font le lien entre les fonctions linéaires et la proportionnalité.

<u>**Document 3**</u> : Photos-problèmes extraites du site « Maths-en-vie ».
Disponible sur https://www.mathsenvie.fr/ (consulté en novembre 2021)

Problème 1

• Quel est le prix au litre si j'achète du jus d'orange par 25 cL ou 50 cL ?
• Est-ce une situation de proportionnalité ?

Problème 2

• Combien vais-je payer si j'achète 3 œufs ? 9 œufs ? 12 œufs ? 24 œufs ?
• Si j'achète 6 œufs, combien est-ce que j'économise par rapport au prix à l'unité ?
• Combien d'œufs au maximum je peux acheter avec 20 € ?

Analyse de documents

1 CRPE 2014 G2

Un enseignant traite la proportionnalité avec des élèves de cycle 3.

A. L'enseignant s'interroge sur l'énoncé d'un exercice, pour lequel une phrase (notée [. . .]) reste à préciser :

> *Pour une visite au Château de Versailles, la coopérative scolaire doit payer 105 € pour une classe de 15 élèves de CE1. Mais un groupe de 20 élèves de CE2 se joint finalement à cette classe. [. . .]*
> *Combien la coopérative devra-t-elle payer en tout ?*

1) Proposer une phrase complétant l'énoncé pour que cette situation soit sans ambiguïté une situation de proportionnalité.
2) Proposer une phrase complétant l'énoncé pour que cette situation ne soit pas une situation de proportionnalité.

B. L'enseignant propose l'institutionnalisation de la proportionnalité ci-dessous à partir de celle proposée dans le manuel « Outils pour les maths » - CM1 - Magnard - édition 2011 :

> **On reconnaît une situation de proportionnalité lorsque le rapport entre les nombres ne change pas.**
> • *Exemple 1 :* **1 kg de pêches coûte 3 €.**

Nombre de kg de pêches	*1*	*2*	*5*
Prix en €	*3*	*6*	*15*

> *Le prix est proportionnel à la masse.*
> *Pour trouver le prix, il faut multiplier par le même nombre (par 3).*
> • *Exemple 2 :* **4 gâteaux coûtent 6 €.**
> *Pour trouver le prix de 8 gâteaux, je calcule le double* → $6 \times 2 = 12$ €.
> *Pour trouver le prix de 2 gâteaux, je calcule la moitié* → $6 \div 2 = 3$ €.
> • *Exemple 3 :* **1 stylo coûte 2 €, 3 stylos coûtent 5 €, 6 stylos coûtent 6 €.**
> *Dans cette situation, 3 stylos ne coûtent pas* **3 fois plus cher** *qu'un stylo, 6 stylos ne coûtent pas 6 fois plus cher.*
> **Cette situation n'est pas proportionnelle.**

1) Quelle propriété caractéristique de la proportionnalité le traitement de l'exemple 1 illustre-t-il ?
2) Quelle propriété caractéristique de la proportionnalité le traitement de l'exemple 2 illustre-t-il ?
3) Dans cet extrait de manuel, l'expression « rapport entre les nombres » désigne dans le traitement des exemples 1 et 2, des coefficients jouant des rôles différents. Expliciter ces différents rôles.
4) Quelle propriété caractéristique de la proportionnalité est utilisée dans le traitement de l'exemple 3 ? Donner une autre façon de mettre en évidence que la situation n'est pas une situation de proportionnalité, faisant appel à une autre propriété caractéristique.

C. L'enseignant propose un autre exercice :

> *Lorsque je fais une mousse au chocolat pour 8 personnes, j'utilise 6 œufs.*
> *Quand je fais une mousse au chocolat pour 12 personnes, j'utilise 9 œufs.*
> *Combien faudra-t-il dœufs si je fais une mousse au chocolat pour 20 personnes ?*

Analyser les quatre productions des élèves page suivante, en précisant les propriétés mathématiques implicitement mobilisées.

Auriane	Emeric
Je cherche pour une personne 6 : 8 = 6 | 8 60 | 0,75 40 0 Je cherche pour 20 personnes 20×0,75 = 0,75 × 20 15,00 Il faut 15 oeufs	$8+12=20$ $6+9=15$ Il faut 15 oeufs
Nicolas	**Kévin**
$8+12=20$ $6+12=18$ Il faut 18 oeufs	Pour 8 personnes, il faut 6 oeufs. Donc, pour 1 personne il en faut 8 fois moins pour 20 personnes, 20 fois plus. 6 × 20 : 8 = 6 × 20 120 120 | 8 40 | 15 0 Il faut 15 oeufs.

D. L'enseignant propose un dernier exercice :

> *Dans une ville, il y a deux médiathèques.*
> *Le service culturel de cette municipalité effectue un recensement des fonds d'ouvrages de chaque établissement. à cette fin, les documentalistes ont relevé les éléments suivants :*
> - *à la médiathèque Jean Jaurès, on peut trouver 5 000 ouvrages dont 40 % de romans ;*
> - *à la médiathèque George Sand, on peut trouver 4 000 ouvrages dont 60 % de romans.*
>
> *Calculer le pourcentage de romans au sein du service culturel de la ville.*

1) Pourquoi cet exercice s'inscrit-il dans une séquence d'apprentissage traitant de la proportionnalité ? à quel niveau du cycle 3 va-t-on de préférence proposer cet exercice ?

2) Après une phase de recherche individuelle, l'enseignant organise une phase de mise en commun.
Paul dit : « J'ai trouvé 50 % parce que c'est exactement entre 40 % et 60 % ».

a) Quelle erreur de raisonnement Paul commet-il ?

b) Par quel nombre faudrait-il remplacer 5000 pour que 50 % soit la bonne réponse ? Justifier.

2 CRPE 2016 G2

Un enseignant propose le problème suivant à ses élèves de cycle 3 :

> Nicolas a acheté 2 kg de pommes. Il a payé 4 €.
> Léo a acheté la même variété de pommes dans le même magasin. Il a payé 5 €.
> Quelle masse de pommes a-t-il achetée ?

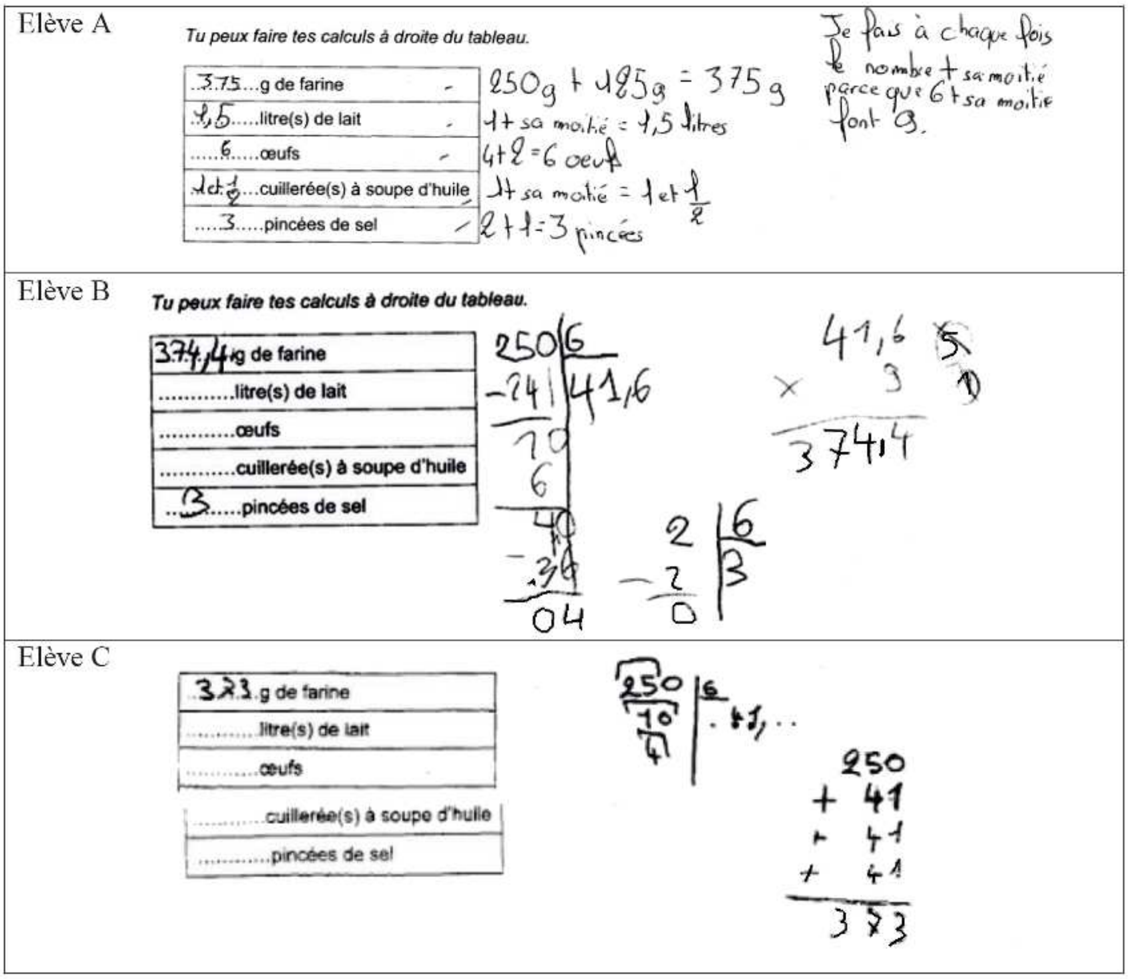
Proposer trois procédures, attendues d' élèves de cycle 3, pour résoudre ce problème, l'une au moins ne nécessitant pas le recours aux nombres décimaux.

3 **CRPE 2017 G1**

L'exercice ci-dessous est extrait des évaluations nationales CM2 de 2008.

> *Pour faire des crêpes pour 6 personnes, il faut :*
> - *250 g de farine ;*
> - *1 litre de lait ;*
> - *4 oeufs ;*
> - *1 cuillerée à soupe d'huile ;*
> - *2 pincées de sel.*
>
> *Calcule la quantité de chacun des ingrédients nécessaire pour faire des crêpes pour 9 personnes.*

Voici les productions de trois élèves :



1) Quelle est la principale notion du programme sur laquelle cet exercice permet de revenir ?

2) Expliciter les procédures utilisées pour le calcul de la masse de farine nécessaire par chacun des élèves A, B et C.

3) En quoi le choix de 300 g de farine nécessaires au lieu de 250 g aurait-il pu modifier les procédures proposées par les élèves ?

4 CRPE 2018 G3

Une enseignante de CM2 propose l'exercice suivant en classe de CM2.

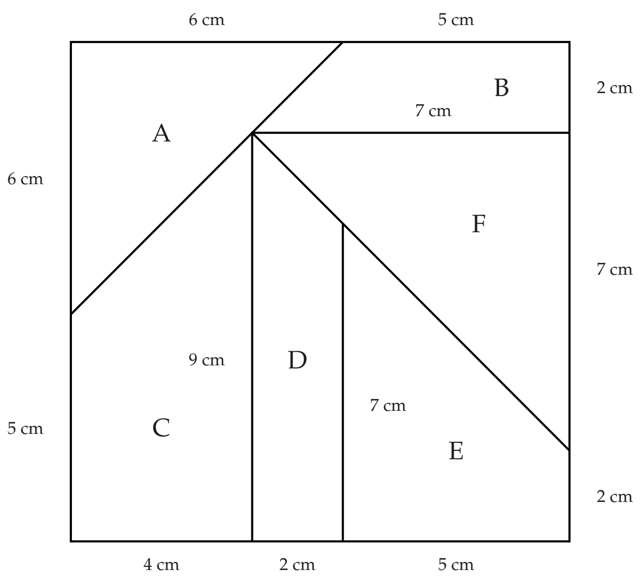
> Une boîte contient des dragées toutes identiques.
> 120 dragées pèsent 360 g.
> Combien pèsent 30 dragées ?

1) Proposer trois procédures pouvant être utilisées par les élèves pour résoudre cet exercice, en explicitant à chaque fois chacun des calculs effectués pour trouver le résultat attendu.
2) L'enseignante veut vérifier la maitrise de la procédure dite de retour à l'unité par les élèves. Elle souhaite garder la même forme d'exercice en modifiant les nombres en jeu dans l'énoncé pour contraindre, ou au moins encourager vivement, les élèves à utiliser cette procédure. Proposer un énoncé modifié qu'elle pourrait soumettre à ses élèves.

5 CRPE 2018 G2

Un enseignant propose la situation suivante en cycle 3 :

> Consignes données oralement :
>
> « Voici un puzzle carré.
> Vous allez devoir refaire le même puzzle mais en plus grand. Il faudra le reconstituer exactement avec les pièces agrandies.
> Le segment de 4 cm devra mesurer 6 cm sur votre puzzle agrandi.
> Le compte-rendu de vos recherches sera présenté sous la forme d'une affiche ».



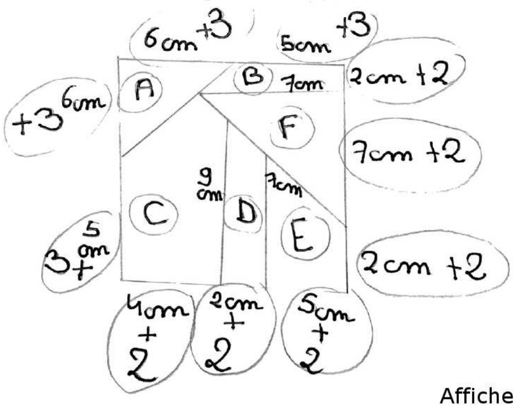
Modalités de mise en œuvre : le professeur demande aux élèves de travailler par groupes de quatre, de s'accorder sur la procédure à adopter pour agrandir les éléments du puzzle, de se répartir la construction des pièces en faisant leurs calculs individuellement puis d'assembler les morceaux pour reconstituer le puzzle agrandi.

1) Quel champ mathématique cette situation permet-elle de travailler ?
2) Analyser les différentes stratégies mises en oeuvre en pointant les réussites et les erreurs des groupes ayant produit les affiches 1, 2 et 3.
3) Dans la mesure du possible, indiquer les procédures utilisées pour déterminer chacune des valeurs trouvées par le groupe ayant produit l'affiche 4.

Analyse de documents

Nous avons fait :

– un tableau 8



Affiche 1

Pour trouver la solution de ce puzzle, il faut ajouter le 1/4 de chaque nombre et le multiplier par ×2

$4\text{ cm} \xrightarrow{+2} 6\text{ cm}$

$6\text{ cm} \xrightarrow{+3} 9\text{ cm}$

$7\text{ cm} \xrightarrow{+3,5} 10,5\text{ cm}$

$2\text{ cm} \xrightarrow{+1} 3\text{ cm}$

$5\text{ cm} \xrightarrow{+2,5} 7,5\text{ cm}$

$9\text{ cm} \xrightarrow{+4,5} 13,5\text{ cm}$

Affiche 2

Pour faire le puzzle on a d'abord divisé 4 par 2 :

4 ÷ 2 = 2

Et on a fait la multiplication de 2 (résultat de 4 ÷ 2) par 3 :

2 × 3 = 6

On a donc divisé par 2 puis multiplié par 3, en procédant de cette façon

4 ⟶ 6 (dans l'exemple)

2 ⟶ 3	2 ÷ 2 = 1, 1 × 3 = 3
6 ⟶ 9	6 ÷ 2 = 3, 3 × 3 = 9
7 ⟶ 10,5	7 ÷ 2 = 3,5, 3,5 × 3 = 10,5
5 ⟶ 7,5	5 ÷ 2 = 2,5, 2,5 × 3 = 7,5
9 ⟶ 13,5	9 ÷ 2 = 4,5, 4,5 × 3 = 13,5

Affiche 3

4	6	7	2	5	9
6	9	10,5	3	7,5	13,5

4 –> 6 car on le sait.

6 –> 9 car 6 + 3 est égale à 9.

7 –> 10,5 car

2 –> 3 car la moitier de 6 est 3.

5 –> 7,5 car 4 + (2 ÷ 2) est égale à 7,5.

9 –> 13,5 car 4 + 4 + (2 ÷ 2) est égale à 13,5.

Affiche 4

1 Découverte de la proportionnalité

Cette activité d'introduction à la proportionnalité est issue du manuel « maths au CM1 », édition Accès, pages 138-142. Il s'agit de la séance 1 et dure 45 minutes environ. La compétence travaillée est : reconnaître et résoudre un problème de proportionnalité en utilisant une procédure de linéarité.

– étape 1 : Recherche

Les élèves prennent connaissance du problème :

« Madline assemble des cubes identiques pour construire une muraille devant son château-fort.
Elle construit une muraille où tous les cubes sont alignés comme dans le schéma ci-dessous. »

12 *cm*

Avec 4 cubes assemblés, sa muraille mesure 12 cm.
Combien mesurera la muraille si elle associe 8 cubes ? 12 cubes ? 20 cubes ?

Consigne : Répondez aux trois questions sans utiliser de règle graduée, ni de matériel.

– étape 2 : Mise en commun

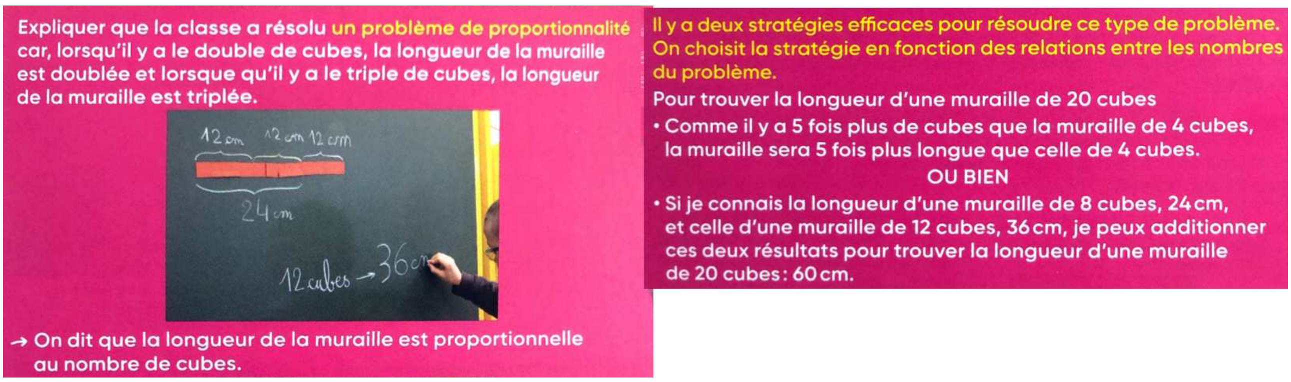
Inciter les élèves à comparer les différentes procédures et faire prendre conscience qu'en fonction des nombres en jeu, certaines sont plus efficaces que d'autres.

Ici, les procédures de linéarité additive et multiplicative sont possibles. On notera que la procédure de passage à l'unité relève du CM2, et celle du coefficient de proportionnalité de la 6^{e}.

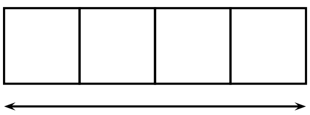
– étape 3 : Validation par manipulation

Certains élèves sont confrontés à un obstacle cognitif car ils n'envisagent que des relations additives entre nombres. Ce qui les conduit à répondre 18 cm pour 8 cubes, puisqu'on est passé de 4 cubes à 12 cm en « ajoutant » 8. On leur fait alors valider en utilisant du matériel comme des cubes de 3 cm de côté, ou de carrés de côté 3 cm. Cela permet à certains élèves de confronter leurs résultats, éventuellement erronés, à la réalité par validation expérimentale.

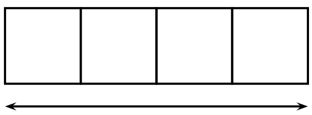
– étape 4 : Institutionnalisation



La séance suivante propose de travailler la même situation en faisant v varier les données numériques : 4 cubes dont la mesure totale vaut 10 cm, puis 5 cm.



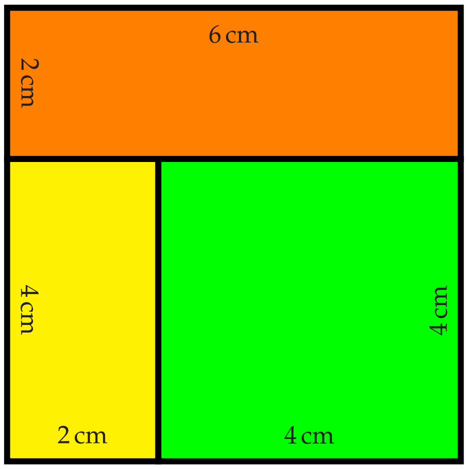
10 cm



5 cm

2 Le puzzle de Brousseau… adapté !

Cette activité est issue du document éduscol [edu3] et propose une adaptation du puzzle de Brousseau : « Résoudre des problèmes de proportionnalité au cycle 3. Activité : Puzzle ».



énoncé

Présenter l'activité en parlant d'agrandir la figure. Ne pas parler de proportionnalité à ce stade.

Agrandis les 3 pièces de la figure de façon à ce que les segments mesurant 2 cm mesurent finalement 6 cm.

Les dimensions de la figures peuvent être données, ou être mesurées directement sur la figure.

Modalités de travail

Par groupe de trois élèves. Chaque élève a une pièce du puzzle à construire. La recherche est tout d'abord individuelle, puis le groupe échange au sujet des procédures. Ces différentes procédures seront reproduites sur une affiche de groupe puis affichées.

Critères de réussite

Condition nécéssaire : l'assemblage des 3 nouvelles pièces constitue à nouveau un carré.

Le carré a pour côté 18 cm.

Difficultés prévisibles

Les élèves risquent d'utiliser des procédures éronées (ajout ou retrait d'un même nombre aux longueurs initiales).

– En ajoutant 4 cm a toutes les mesures, la figure obtenue n'est pas un carré.

– Avec cette même procédure, ils peuvent aussi « s'arranger » pour qua la dernière pièce produise un carré.

Variables didactiques

– Proposer différents coefficients d'agrandissement/réduction : 0,5 ; 1,5 ; 2…

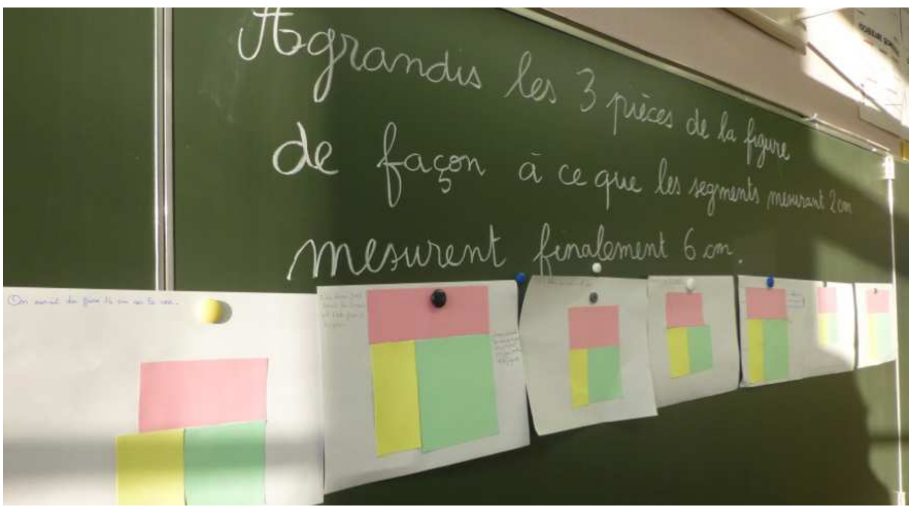
– Varier le nombre de pièces, la forme des pièces.

Institutionnalisation

Diverses phrases peuvent être notées dans les cahiers, par exemple :

« Une figure agrandie conserve la même forme que la figure initiale. »

« Pour agrandir une figure, il faut multiplier toutes les longueurs par un même nombre. »



RESSOURCES...

Ressources institutionnelles

édu1 J'enseigne au cycle 1. Programme, recommandations pédagogiques, ressources d'accompagnement, évaluation et infothèque.

édu2 J'enseigne au cycle 2. Programme, à consulter, évaluation, ressources d'accompagnement et infothèque.

édu3 J'enseigne au cycle 3. Programme, à consulter, évaluation, ressources d'accompagnement et infothèque.

con22 Sujets de concours.

crp22 Le concours CRPE : s'informer, s'inscrire.

Bibliographie et articles

abi13 Abiteboul (2013). *Proposition d'orientations générales pour un programme d'informatique à l'école primaire*. EPI

asp15 Aspinall B. (2015). *Page de Brian Aspinall*.

bou12 Boule F. (2012). *Le calcul mental au quotidien*. Cycles 2 et 3 (nouvelle édition mise à jour). Canopé, CRDP.

bri98 Brissiaud R. (1998). *Les fractions et les décimaux au CM1*. Actes du XXV[e] colloque des formateurs de mathématiques, IREM Brest.

bri03 Brissiaud R. (2003). *Comment les enfants apprennent à calculer* (nouvelle édition). Retz.

bri07 Brissiaud R. (2007). *Premiers pas vers les maths*. Les chemins de la réussite à l'école maternelle. Retz.

bri13 Brissiaud R. (2013). *Apprendre à calculer à l'école* – Les pièges à éviter en contexte francophone. Retz.

bro87-1 Brousseau G. et N. (1987). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*. IREM Bordeaux.

bro87-2 Brousseau G. (1987). *Le puzzle de Brousseau*, Recherche en didactique, n°2.1.

bro00 Brousseau G. (2000). *Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire*. Séminaire de Didactique des Mathématiques, Rethymon.

cer10 Cerclé V. (2010). *Un puzzle de Lewis Caroll*. Plot n°29, APMEP.

cha13-1 Charnay R, Mante M. (2013). *Mathématiques tome 1*. Professeur des écoles, admissibilité. Hatier concours.

cha13-2 Charnay R, Mante M. (2013). *Mathématiques tome 2*. Professeur des écoles, admissibilité. Hatier concours.

cuc09 Cuchin D. (2009). *Construire des rituels à la maternelle*. Collection Découvertes Gallimard.

dav14 Daval N. (2014). *Les abaques, outils de numération et de calcul* - IREM Réunion.

dav16 Daval N. (2016). *Codage et mathématiques : du langage aux algorithmes, des ressources pour débuter à l'école.* IREM Réunion.

dav18 Daval N, Tournès D. (2018). *De l'abaque à jetons au calcul posé*. Passerelles : Enseigner les mathématiques par leur histoire au cycle 3, Moyon et Tournès. IREM.

dow Dowek G. *Sciences, langages et langues*.

gue96 Guedj D. (1996). *L'empire des nombres*. Retz.

hou17 Houdement C. (2017), *Résolution de problèmes arithmétiques à l'école*, Grand N, n°100, IREM de Grenoble.

mar15 Margolinas, C. (2015), *Des mathématiques à l'école maternelle*, actes du colloque « Des mathématiques à l'école maternelle », ENSC Ho Chi Minh.

mar16 Martin Y. (2016). *Curvica*, activités mathématiques ludiques. IREM Réunion.

mot10-1 Motteau D, Chernak S. (2010). *Mathématiques épreuve écrite*. Concours professeur des écoles. Nathan.

mot10-2 Motteau D, Chernak S. (2010). *Mathématiques épreuve orale*. Concours professeur des écoles. Nathan.

sav19 Savary A. (2019). *L'appel, un rituel pour construire le nombre*. Centre Alain-Savary, Ifé.

ver86 Vergnaud G. (1986). *Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques : un exemple, les structures additives*. Grand N n°38.

ver88 Vergnaud G., Brousseau G., Hulin M. (1988). *Didactique et Acquisition des Connaissances Scientifiques*. Actes du Colloque de Sèvres, Mai 1987, Grenoble, La Pensée Sauvage.

ver08 Verschaffel L., De Corte E. (2008). *Enseignement et apprentissage des mathématiques. Que disent les recherches psychopédagogiques*. De Boeck Supérieur.

vil18 Vilani C., Torossian, C. (2018). *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques*. Ministère de l'éducation nationale.

Sitographie et logiciels

ARPEME Annales corrigées des concours depuis 1997 - COPIRELEM.

Code studio Cours progressifs pour débuter en programmation.

GeoGebra Logiciel de géométrie dynamique.

La main à la pâte Fondation La main à la pâte : 1, 2, 3... codez !

Les fondamentaux Des films agités pour bien cogiter - Canopé.

Mathenpoche Site de l'association Sésamath qui propose des ressources pour le collège.

Mathématiques et CRPE Site de Dominique Pernoux, ex-formateur à l'IUFM d'Alsace.

Nath et matiques Site de Nathalie Daval, formatrice à la FDE de Montpellier.

Parimaths Site de Catherine Marchetti-Jacques, retraitée passionnée de l'Éducation Nationale.

Primaths Site d'Yves Thomas, formateur à l'ESPE des Pays de la Loire.

Scratch Logiciel de programmation, cycles 3 et 4.

ScratchJr Application de programmation pour tablette, cycles 1, 2 et 3.

TFM Téléformation en mathématiques - Université Paris Descartes.

SOLUTIONS

Chapitre T0

Quelques pistes pour préparer la leçon au concours

Chapitre N1

Construction du nombre, numération

1 **1)** L'exercice 1 est réussi à 65 % et le deuxième à 42 %. Il est plus difficile de placer les chiffres 0 dans l'écriture du second nombre que dans celui du premier : à l'oral, on entend distinctement les nombres qui constituent les tranches de trois chiffres pour le premier nombre, mais pas pour le second où il faut juxtaposer des 0 en début de tranche afin que cette tranche contienne trois chiffres.

2) a) Les élèves ont probablement inversé mentalement les termes [cent] et [cinq]. Ceux-ci apparaissant en fin de nombre, ils étaient peut-être moins concentrés et en surcharge cognitive.

b) Le système de numération ne semble pas complètement acquis. En effet, il écrit les nombres « comme il les entend » : deux millions (qu'il écrit 20000 en omettant deux chiffres 0), trois cent (qu'il écrit correctement 300), quarante (qu'il écrit correctement 40), mille cent cinq (qu'il n'écrit pas correctement du tout, mais qu'il écrit tout de même avec les chiffres 0, 1 et 5 entendus ou pressentis dans la désignation orale).

1) Pour 17 200 058, l'écriture respecte la convention usuelle d'écriture par tranches de trois chiffres. Mais, par contre, il est à noter une erreur de position des chiffres dans la seconde tranche (200 au lieu de 002), ce qui ne respecte pas la convention usuelle d'écriture d'un nombre. La convention du maître n'est pas respectée car sinon, on aurait lu « deux-cent-mille » et non « deux-mille » comme dans l'énoncé.

Pour 17 2 58, l'élève ne respecte pas la convention usuelle d'écriture par tranches de trois chiffres. Par contre, la convention du maître est respectée scrupuleusement : les mots [millions] et [mille] sont remplacés par des espaces.

2) Pour rejeter la réponse 17 200 058, une simple re-lecture du nombre devrait permettre de se rendre compte que l'oralisation du « deux-cent » ne devrait pas paraître. Cet argument ne devrait pas permettre de rejeter la réponse 17 2 58, pour des élèves qui vont donner au premier espace le sens de million et pour le second le sens de mille.

3) Tout nombre se lisant sans le mot-nombre [mille] : par exemple « douze-millions-quatorze », l'élève pourra écrire 12 14 et s'apercevoir qu'il manque au moins la tranche des mille.

2 **1)** Compétences mises en jeu : être capable d'écrire, ranger les nombres entiers naturels inférieurs à 100 et avoir compris l'organisation, l'aspect algorithmique de notre numération positionnelle de base 10.

2) Procédures utilisables par l'élève, par exemple :

- l'élève peut placer dans les cases tous les nombres manquants, et ensuite relier chaque nombre à la case représentant le même nombre ;
- il peut également réciter « mentalement » la comptine numérique en indiquant à chaque fois le case correspondante, et placer au fur et à mesure les nombres qu'ils récite ;
- il peut utiliser les compléments à 5 ou à 10 et avancer ou reculer par rapport à une case déjà remplie (par exemple 59, c'est $60 - 1$, donc une case avant la case 60...).

3) Erreurs prévisibles, par exemple :

- le nombre 48 peut ne pas avoir été placé, car l'élève compte à partir de 50 ;
- les nombres peuvent être associés à une case située « entre » deux nombres déjà placés (par exemple 64 entre 60 et 65), sans lien avec le nombre de cases ;
- l'élève peut avoir placé par exemple 59 juste après 55, c'est à dire dans l'ordre (de plus petit au plus grand), sans se soucier la suite des nombres de 1 en 1 ;
- il a pu associer à chaque nombre la case marquée « la plus proche » (par exemple, relier 54 à 55).

3 **1) a)** Les méthodes (M1 et M2) et les erreurs (E1 et E2) sont récapitulées dans le tableau ci-dessous :

<table>
<tr><th></th><th>Configuration 1</th><th>Configuration 2</th></tr>
<tr><td rowspan="2">M1</td><td colspan="2">Procédure par subitisation (reconnaissance perceptive immédiate d’une quantité)</td></tr>
<tr><td>Procédure possible pour des petites quantités (nombres inférieurs à 5). Ici, l’élève « voit » un certain nombre d’éléphants.</td><td>Pour la carte C, cette procédure devrait être immédiate car les nombres sont représentés sous forme de configurations géométriques particulières : celles des constellations du dé, qui sont une des représentations des nombres vues dès la PS.</td></tr>
<tr><td>M2</td><td colspan="2">Procédure par comptage un à un.
Utilisation de la comptine numérique : suite de mots-nombre mis en correspondance un à un avec les éléments de la collection considérée, le dernier mot-nombre utilisé indiquant la quantité (principe cardinal).</td></tr>
<tr><td>E1</td><td>Procédure par subitisation : l’élève peut se tromper dans la reconnaissance des quantités, surtout si celles-ci dépassent 3.</td><td>Erreur liée au matériel : le fait de ne pas avoir de boite ne favorise pas le rangement des jetons, l’élève va disposer ses jetons sous sa carte, mais certains jetons peuvent se mélanger avec la représentation du nombre précédent.</td></tr>
<tr><td>E2</td><td colspan="2">Erreurs de comptage.
• L’élève dénombre deux fois le même objet ou il en oublie un (principe d’adéquation unique).
• L’élève se trompe dans l’ordre de la comptine numérique (principe d’ordre stable).</td></tr>
</table>

b) Louise et Kévin ont compris l’objectif du maître, à savoir de réaliser des collections de cardinaux identiques à ceux de la carte. Cependant, leurs procédures semblent différentes :

- Louise dispose ses jetons les uns en dessous des autres. On peut imaginer qu’elle a tout d’abord dénombré les jetons de la carte (par subitisation ou comptage), puis qu’elle a réalisé une collection de jetons de même cardinal en les plaçant un à un.
- Kévin semble procéder par correspondance terme à terme en posant un jeton sur chaque point du dé. Cette procédure n’utilise pas le dénombrement mais est tout à fait efficiente, même si, avec des jetons beaucoup plus gros que les points de la carte, l’organisation matérielle pourra poser problème pour les deux dernières constellations (3 et 5).

1)

- Une facilité : les jetons représentant les animaux sont bien rangés en regard de la collection de la carte témoin, ne dépassent pas et donc ne se mélangeront pas.
- Une difficulté : il sera difficile pour l’élève de vérifier son résultat pour des quantités supérieures à deux puisqu’alors les jetons vont se recouvrir ou se chevaucher.

4 **1)** C'est l'aspect cardinal du nombre qui est ici mobilisé (construire le nombre pour exprimer les quantités) : en effet, l'élève doit comprendre qu'un objet est une unité, en dehors de toute considération de forme, d'utilité, puis construire le principe cardinal, c'est à dire concevoir que le dernier mot-nombre de la liste ayant servi à énumérer désigne, à lui seul, le nombre total d'éléments de la collection.
À ce titre, l'objectif pour l'élève est de ramener autant de biscuits qu'il y a de poupées ou d'assiettes.

2) On remarque tout d'abord que tous les élèves ont rempli le contrat et sont arrivés au résultat escompté, mais avec des procédures différentes.

- L'**élève A** va chercher les biscuits un à un, jusqu'à ce qu'il ait rempli toutes les assiettes. On ne peut pas affirmer qu'il ait dénombré les assiettes ou les biscuits, mais plutôt qu'il a fait une « correspondance terme à terme » entre les assiettes et les biscuits.
- L'**élève B** a dénombré les assiettes, ce qu'il modélise par des doigts levés : il est probable qu'il ait effectué une correspondance terme à terme entre les assiettes et les doigts, ou qu'il ait compté en même temps qu'il levait ses doigts un à un. Il effectue probablement la même procédure pour déterminer le nombre de biscuits à rapporter.
- L'**élève C** est probablement l'élève ayant le mieux compris le principe cardinal : il a entendu ou/et vu qu'il y avait 3 assiettes (par subitisation ou dénombrement), il ramène donc 3 biscuits, il n'a pas besoin à ce stade d'aide particulière (doigts, correspondance...).
- L'**élève D** ramène tous les biscuits de la cuisine, il distribue les biscuits en en mettant un par assiette, puis il ramène les biscuits « en trop ».

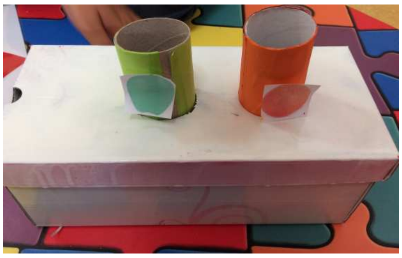
3) Pour les élèves A et D, on peut observer qu'ils utilisent une méthode de « remplissage » des assiettes sans utiliser les caractéristiques des nombres. Il effectuent tous les deux plusieurs voyages pour arriver au bon résultat.
Pour qu'ils engagent une procédure inhérente à la construction du nombre, on pourrait préciser dans l'énoncé que seul un voyage est autorisé. Ils devront alors réfléchir à la manière de ramener 3 biscuits « du premier coup ».

5 **1)** Un élève peut utiliser les procédures suivantes :

- correspondance terme à terme avec une autre collection constituée de trois objets ;
- perception visuelle globale de trois objets (ou subitisation) ;
- comptage-dénombrement de la quantité : un et un (deux) et encore un ça fait trois.

2) On peut, par exemple, proposer les activités suivantes :

- La salade de fruits (*atelier dirigé proposé par Marine V., PES, ESPE Réunion 2017-2018*).



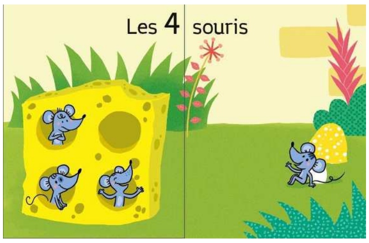
L'élève possède une boite opaque avec 2 ouvertures par lesquelles il doit mettre 4 fruits à choisir parmi des pommes ou des oranges ;

il ouvre la boite, puis les dénombre : par exemple « il y a une pomme et trois oranges, 1 et encore 3 ça fait 4 » ;

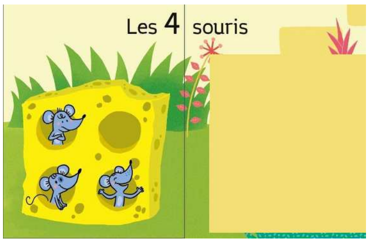
il dispose ses fruits dans la « maison du 4 ». Puis, il répète l'opération avec d'autres fruits.

- Les albums à calculer de *Rémi Brissaud, collection « J'apprends les maths », éditions Retz*.

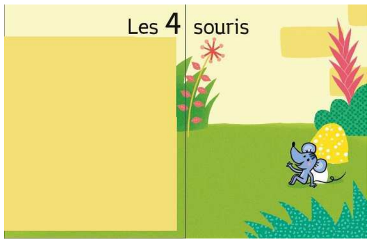
Ils s'utilisent progressivement et comporte trois types d'activité.



Dans l'image, il y a 4 souris : 3 sont dans des trous de gruyère disposés comme les points du dé. Une est dans l'herbe sur l'autre page. 3 et encore 1, ça fait 4.



Il y a 4 souris mais on ne les voit pas toutes. Combien y a-t-il de souris dans l'herbe sous le rabat ?



Il y a 4 souris mais on ne les voit pas toutes. Combien y a-t-il de souris dans le gruyère sous le rabat ?

3) On peut citer plusieurs intérêts :

- travailler d'autres constellation moins classiques ;
- travailler le lien entre les différentes représentations des nombres : pour passer d'un nombre à son successeur, on ajoute 1 point à la droite de la configuration précédente sans en changer la disposition (sur un dé classique, le passage de 3 à 4 demande de modifier la disposition des points intégralement. Ici, il suffit de compléter le 3 par un point sur le coin vide) ;
- travailler les décompositions de manière visuelle : par exemple, 5 c'est 3 et encore 2 (si on lit verticalement) ou c'est 2 et encore 2 et encore 1 (si on lit horizontalement), ou encore c'est 4 et encore 1.

Chapitre N2

Calcul mental et réso. de problèmes

1 **1)** Réponses aux petits problèmes :

- Exercice 1 : il reste **8** ou **72** dans le premier tableau, **57** dans le second et **24** dans le dernier.
- Exercice 2 : $1 \times 7 \times 5 - 25 = \mathbf{10}$.

$25 \div 5 - 1 + 7 = \mathbf{11}$.

$7 \times 5 \times 1 + 25 = \mathbf{60}$ ou $(7 \times 5) + (25 \times 1) = \mathbf{60}$.

$(25 - 5 - 7) \times 1 = \mathbf{13}$ ou $25 \div 5 + 7 + 1 = \mathbf{13}$ ou $(25 + 1) \div (7 - 5) = \mathbf{13}$ ou $(25 - 7) \times 1 - 5 = \mathbf{13}$.

- Exercice 3 :

$(9 \times 9 - 9) \div 9 = \mathbf{8.}$

$(9 \times 9 + 9) \div 9 = \mathbf{10.}$

$(9 + 9) \div 9 + 9 = \mathbf{11.}$

$9 + 9 - (9 \div 9) = \mathbf{17.}$

$9 + 9 + (9 \div 9) = \mathbf{19.}$

$(9 - (9 \div 9)) \times 9 = \mathbf{72.}$

$(9 + (9 \div 9)) \times 9 = \mathbf{90.}$

$9 \times 9 \times 9 - 9 = \mathbf{720.}$

- Exercice 4 : on trouve respectivement : **136 ; 67,5 ; 7,65 ; 1,88 et 0,066**.
- Exercice 5 : on trouve respectivement : **6 200 ; 1,5 ; 0,1 ; 100 ; 20 et 500**.

2) Procédures possibles.

- Exercice 1 : résoudre des multiplications à trous par 3 : on utilise les plus petits nombres que l'on multiplie par 3 pour voir si la réponse est dans le carré ou division des plus grands nombres par 3, mais la procédure est plus difficile.
- Exercices 2 et 3 : procéder par essais-erreurs pour trouver l'un des résultats, à faire éventuellement en groupes pour plus de facilité.
- Exercice 4 : commencer par calculer le dernier chiffre du nombre pour trouver la réponse, ou éliminer des solutions, puis faire un calcul approximatif pour trancher entre plusieurs possibilités.
- Exercice 5 : effectuer un calcul en approchant chacun des deux nombres. Pour certains nombres décimaux, commencer par effectuer le calcul avec des valeurs entières puis appliquer les règles de division ou de multiplication par 10 ou 100.

3) Pour pouvoir résoudre ces problèmes dans un temps raisonnable, il faut faire l'essentiel des calculs mentalement. L'écrit sert à communiquer l'énoncé, à donner la réponse, mais parfois aussi, comme dans le problème 2 à trouver les différentes étapes d'un calcul en soulageant la mémoire.

4) Niveau.

- Exercice 1 : à partir du cycle 2.
- Exercices 2 et 3 : à partir du cycle 3, à cause des parenthèses et de la complexité des calculs.
- Exercices 4 et 5 : à partir du cycle 3, à cause des nombres décimaux et des calculs approchés.

5) Connaissances et compétences travaillées.

- Exercice 1 : connaître les tables de multiplication de 2 à 9; savoir effectuer une multiplication à deux chiffres.
- Exercices 2 et 3 : connaître les tables d'addition et de multiplication de 2 à 9; effectuer un calcul mental en utilisant les signes arithmétiques.
- Exercices 4 et 5 : estimer l'ordre de grandeur d'un résultat, effectuer un calcul approché ou exact.

6) Deux réponses sont tout à fait légitimes dans cette activité sur le calcul approché : 70 et 100. En effet $0,7 \times 124$ est proche de $0,7 \times 100$, mais $0,7 \times 124$ est plus grand que 70, donc 100 paraît aussi un bon candidat. Le calcul exact donne 86,8 qui est presque la moyenne exacte de 70 et de 100, les deux réponses peuvent être considérées comme exactes car l'objectif de cette activité est de faire faire un calcul approché aux élèves.

2 1) Analyse des productions d'élèves :

• **Robin.** Il sait que multiplier par 5 revient à multiplier par 10, puis à diviser par 2.
Il commence par calculer 10×68 car il sait effectuer une multiplication par 10 mentalement, il obtient 680. Puis il divise par 2 et trouve 340.
Son résultat et sa procédure sont justes, il y a cependant une erreur d'écriture puisqu'il écrit en ligne ses calculs à la suite, le statut du signe « = » n'est alors pas respecté puisqu'on peut lire « $10 \times 68 = 340$ ». Il aurait dû écrie $10 \times 68 = 680$, puis $680 \div 2 = 340$.

• **Eléonore.** Elle passe par la décomposition de 68 comme $70 - 2$ puis elle utilise la distributivité de la multiplication par rapport à la soustraction.
Elle effectue $70 \times 5 = 350$ certainement en calculant mentalement que $7 \times 5 = 35$ puis en « ajoutant un zéro » afin d'effectuer la multiplication par 10. Ensuite, elle effectue le calcul $2 \times 5 = 10$ et enfin, elle soustrait ses deux résultats pour obtenir 340.
Sa procédure et son résultat sont justes.

• **Lucie.** Elle utilise la décomposition additive de 68 qui est $60 + 8$ puis elle utilise la distributivité de la multiplication sur l'addition.
Elle effectue $5 \times 60 = 300$ certainement en calculant mentalement que $5 \times 6 = 30$ puis en « ajoutant un zéro » afin d'effectuer la multiplication par 10. Ensuite, elle effectue le calcul $5 \times 8 = 40$ et enfin, elle additionne ses deux résultats pour obtenir 340.
Sa procédure et son résultat sont justes.

• **Mathys.** Il utilise l'écriture de 68 en multipliant successivement 5 par 6 ce qui donne 30 et 5 par 8 ce qui donne 40 puis il additionne ces deux résultats.
Sa procédure aurait pu être correcte s'il avait pensé que 5×6 correspondait au nombre de dizaines mais il ne semble pas avoir conscience de la signification de l'écriture positionnelle de notre système de numération puisqu'il considère le 6 des dizaines et le 8 des unités de la même manière. Son résultat est faux.

2) Voici quelques démarches possibles par un élève de cycle 3 :

Calculs.	Démarche.	Connaissances.
$100 \times 28 = 2\,800$ $2\,800 \div 2 = 1\,400$ $1\,400 \div 2 = 700$.	25 c'est 100 divisé par 4 ; diviser par 4, c'est diviser par 2 puis encore diviser par 2.	Multiplication par 100, division par 2 (prendre la moitié).
$100 \times 28 = 2\,800$ $2\,800 \div 4 = 700$.	Multiplier par 25, c'est multiplier par 100 puis diviser par 4.	Multiplication par 100, division par 4 (table des 4).
$28 = 30 - 2$ $25 \times 30 = 750$ $25 \times 2 = 50$ $750 - 50 = 700$	Décomposition de 28 à partir de la dizaine la plus proche 30, multiplication par 25 de 30 et 2, soustraction des résultats.	Décomposition d'un nombre, multiplication par 25 de nombre simples, distribution de la multiplication sur la soustraction.
$25 \times 28 = (20 + 5) \times (20 + 8)$ $20 \times 20 = 400$ $20 \times 8 = 160$ $5 \times 20 = 100$ $5 \times 8 = 40$ $400 + 160 + 100 + 40 = 700$	Décomposition additive des deux facteurs, calculs de tous les termes issus des multiplications, addition des résultas obtenus.	Décomposition additive, distributivité de la multiplication sur l'addition, multiplications par 2, 5 et 10.

3 **1)** La principale compétence mathématique évaluée dans cet exercice est : « Résoudre un problème relevant de la soustraction. ». Selon la typologie de *G. Vergnaud*, il s'agit d'un problème du champ additif de type « transformation d'un état », dans lequel l'état initial et l'état final sont connus ; on recherche la transformation. La compétence secondaire est : « Effectuer une soustraction ». À la fin du CE1, les élèves doivent connaître et utiliser les techniques opératoires de l'addition et de la soustraction (sur des nombres inférieurs à 1 000).

2) Si x désigne le nombre de coureurs ayant abandonné, on peut écrire :

- $108 - x = 85$;
- $85 + x = 108$;
- $108 - 85 = x$.

3) **a)** On peut distinguer :

- les procédures **non apparentes** de Melvin et de Nabila (le premier ne donne pas de réponse, la deuxième donne la réponse exacte sans aucune justification) ;
- les procédures traduisant une **mauvaise compréhension de la situation** : Camille qui fait une modélisation erronée de la situation ;
- les procédures utilisant la **schématisation** : celles de Driss et de Siham, dont la représentation est plus aboutie ;
- les procédure utilisant le **décomptage** : celle d'Hilda ;
- les procédures de **recherche du complément** : par sauts successifs pour Amandine et Gabrielle, par une addition à trous pour Cédric (qui fait une erreur de calcul) ;
- les procédures **soustractives** d'Houssan et Benyamine qui se trompent dans leur calcul.

b) **Erreur d'Houssan :** on peut envisager deux hypothèses principales :

- dans chaque colonne, il calcule l'écart entre le plus grand et le plus petit chiffre : $8 - 5 = 3$, $8 - 0 = 8$ et $1 - 0 = 1$;
- au lieu de soustraire, il additionne 108 et 85 et oublie la retenue.

Erreur de Benyamine : pas de problème apparent pour les unités. Pour la suite du calcul, il est difficile de recréer la chronologie. Ne pouvant ôter 8 de 0, il ôte 8 de 10 et place le 1 en bas (conservation des écarts). La présence du 7 indique très vraisemblablement qu'il a retranché 1 de 8 pour obtenir le 7. Mais ce 1 n'est pas le 1 entouré du bas, puisqu'il trouve 33 et non 133. Il semble donc que le 1 ajouté en haut soit traité doublement : pour la conservation des écarts d'abord, mais aussi par retrait au terme du bas.

4) Les codes attendus.

- On mettra le code 1 à Amandine, Siham et Nabila qui ont donné la réponse attendue : 23.
- Cédric devrait recevoir le code 8 ou 9 selon si l'on considère que faire une addition à trou rentre dans la « mise en œuvre de l'addition ».
- Camille devrait recevoir le code 8 si on se réfère à la procédure utilisée, mais au regard de sa réponse (193 coureurs), on pourrait penser au code 9.
- Les consignes de codage sont ambiguës : elles ne permettent pas de distinguer l'utilisation erronée de l'addition et l'utilisation pertinente de l'addition à trous. Le codage proposé ne permet pas de distinguer les erreurs relatives à la procédure de résolution du problème de celles relatives à la procédure de calcul.

4 **1)** Le calcul en ligne se pratique en amont du calcul posé (implicitement le calcul en colonnes), puis les deux pratiques sont menées en étroite relation. Elles sont complémentaires l'une de l'autre pour diverses raisons que l'on peut résumer dans un tableau :

Calcul en ligne.	Calcul posé.
Procédure basée sur la **réflexion**. Les élèves travaillent les propriétés de notre numération ainsi que le sens des opérations et utilisent une procédure en fonction des nombres en jeu.	Procédure « **clé en main** ». Mise en place d'un algorithme : succession d'étapes utilisées dans un certain ordre et de la même manière indépendamment des nombres en jeu.
Procédure de **construction**. Il développe des habiletés calculatoires des élèves ainsi que la construction et la connaissance de faits numériques et de propriétés élémentaires.	Procédure d'**utilisation**. Utilisation de ces faits numériques (par exemple les tables de multiplications) pour mener à bien des calculs posés.
Procédure **rapide**. Le calcul en ligne se travaille également en relation avec le calcul mental et permet d'effecteur des calculs assez rapidement tant qu'ils sont simples.	Procédure **sûre**. N'importe quelle opération classique peut être effectuée mais on ne peut pas agir sur le nombre d'étapes de l'algorithme afin de le réduire.

2)

- Décomposition additive « dizaine-unité » puis commutativité de l'addition :

$28 + 17 = 20 + 8 + 10 + 7 = 20 + 10 + 8 + 7 = 30 + 15 = 45$.

- Complément à la dizaine la plus proche puis commutativité :

$28 + 17 = 30 - 2 + 20 - 3 = 30 + 20 - 2 - 3 = 50 - 5 = 45$.

- Calcul de proche en proche en utilisant la décomposition additive :

$28 + 17 = 28 + 10 + 7 = 38 + 7 = 45$ ou $28 + 17 = 28 + 2 + 15 = 30 + 15 = 45$.

3) En cycle 2, une partie du calcul mental s'effectue sur les nombres 1, 2, 5, 10. . ., on a donc par exemple les trois procédures suivantes :

Connaissances.	Propriétés.
$14 \times 5 = 14 \times 10 \div 2 = 140 \div 2 = 70$	
Multiplication par 10. Moitié (de 10 et de 140).	Associativité de la multiplication.
$14 \times 5 = 2 \times 7 \times 5 = 2 \times 35 = 70$	
Table du 5. Double.	Associativité et commutativité de la multiplication.
$14 \times 5 = 10 \times 5 + 4 \times 5 = 50 + 20 = 70$	
Décomposition additive « dizaine-unité ». Table du 5.	Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

5 **1)** On peut citer les objectifs d'apprentissage suivants :
- un objectif général : résolution d'un problème (en groupe) ;
- un objectif disciplinaire : travailler le champ additif (addition à cinq nombres) et une approche de la division partition.

2) Analyse des productions des groupes 1 et 2.

a) Au niveau des stratégies :
- pour le **groupe 1**, les élèves ont additionné toutes les dizaines des nombres en présence, il y en a quatre ce qui fait 40, puis ils ont ajouté à ce nombre les unités restantes : 2 pour Lisa, 1 pour Camille, 9 pour Ilyes et 3 pour Nora. Ils ont trouvé 55 (cependant, l'écriture mathématique est incorrecte puisque les calculs sont faits les uns derrière les autres et le signe « = » n'a pas son sens mathématique usuel) ;
- pour le **groupe 2**, ils additionnent les nombres en présence par deux : tout d'abord Lisa et Luc, puis Camille et Ilyes. Ensuite, ils additionnent les deux résultats trouvés, et enfin ils additionnent le dernier nombre, celui de Nora.

b) Point commun et différences :
- **point commun** : les deux groupes ont additionné les bonbons puis les ont puis « partagés » grâce à un schéma ;
- **différences** : au niveau de l'addition, le groupe 1 a séparé les dizaines et les unités alors que le groupe 2 a additionné les nombres un par un.

Au niveau du partage, le groupe 1 a écrit la division 55 : 5 et on a l'impression qu'il a trouvé la solution mentalement puis l'a vérifiée par un schéma (les lignes verticales formées par les points modélisant les bonbons semblent faites en une seule fois) alors que dans le groupe 2, il est possible qu'ils aient distribué un par un les bonbons aux cinq élèves jusqu'à 55 sans se poser la question de l'opération en jeu. La vérification se fait alors à la fin par un calcul en ligne.

3) Difficultés rencontrées par le groupe 3 :
- la première difficulté a été d'effectuer l'addition en ligne des cinq nombres : les élèves sont capables de faire des additions en ligne à deux chiffres (Lisa-Luc et Camille-Ilyes), mais ensuite ont du mal à trouver la somme totale qui est fausse. Ils ont fini par modéliser la situation par un schéma et compter un à un les bonbons ;
- la seconde difficulté provient de la résolution du problème : ils n'ont pas répondu à la question (parce qu'ils ne savaient pas le faire, ou parce qu'ils n'ont pas compris la consigne ?) et se sont arrêté au résultat 55 qu'ils ont encadré.

Chapitre N3

Champ additif et multiplicatif

1 **1)** Exemple de classement :

	Élève	Description de l'erreur	Hypothèses sur son origine
Production correcte.	C		
Algorithme correct, erreur de calcul	E	$2 + 3 + 5 + 7 = 18$ au lieu de 17.	Répertoire additif mal maîtrisé ou erreur de comptage.
	G	$2 + 3 + 5 + 7 = 16$ au lieu de 17.	
Erreurs de retenues (technique opératoire mal comprise).	A	Retenue de 1 au lieu de 2 sur le chiffre des dizaines.	Non compréhension de la retenue et habitude de rencontrer uniquement des retenues de 1.
	B	Inversion entre le chiffre à poser et la retenue.	Non compréhension de la retenue, numération mal maîtrisée.
	D	Pose systématique de la retenue au dessus du chiffre le plus à gauche.	Aucun sens donné à la retenue.
	F	La retenue n'est pas utilisée.	Rôle non compris de la retenue.
	H	Pose des sommes par colonne.	Méconnaissance du principe de la retenue.

2) L'élève doit avoir acquis les connaissances et compétences suivantes : connaître et utiliser la technique opératoire de l'addition ; connaître les tables d'addition ; connaître la structure des nombres entiers et de son lien avec la retenue.

2 **1)** Pour **Adama**, il s'agit de la division euclidienne usuelle sans pose des soustractions intermédiaires.
Un avantage est un gain de temps si l'élève est expert en calcul mental ainsi qu'un gain de place.
Un inconvénient est sa complexité : il faut effectuer divers calculs mentalement, elle est donc source d'erreurs et de surcharge cognitive.
Pour **Anaïs**, il s'agit d'une procédure avec écriture de la table de multiplication du diviseur et de résultats intermédiaires reprenant à chaque étape la totalité du dividende.
Quelques avantages : elle donne du sens à l'opération et elle évite la surcharge cognitive en ayant écrit les multiples de 37. De plus, un quotient non optimal lors d'une étape peut être rattrapé lors des étapes suivantes.
Un inconvénient est la lourdeur de l'écriture.
2) **Marie** se trompe au niveau du quotient : elle oublie de mettre un « zéro » entre le 1 et le 4. Cette erreur vient probablement du fait que dans 17, elle ne peut pas mettre 37, elle abaisse alors le chiffre suivant, sans penser à caractériser cette impossibilité par un 0 qui correspond au nombre de centaines du quotient.
Kévin pose son opération en effectuant les soustractions intermédiaires. Il ne calcule pas à l'avance les multiplications et lorsqu'il se trompe, il barre sa réponse et reprend ensuite jusqu'à trouver une solution convenable. Lors de sa dernière étape, le calcul de 9×37 donne un résultat trop grand pour être soustrait, il tente donc la multiplication par 7 ce qui fonctionne. Cependant, il ne s'est pas aperçu que le reste obtenu est supérieur au diviseur. La longueur de l'opération est peut-être en cause, et le calcul du répertoire multiplicatif de 37 aurait pu l'aider à calculer cette division de manière moins aléatoire.

3 1) **Élève 1 :** il effectue une addition itérée de 6 (œufs), treize fois, qu'il pose en colonne. Le résultat est 78, on ne sait pas si l'élève s'est trompé dans son opération ou s'il s'est trompé en notant le résultat (échange de la dizaine et de l'unité).
L'élève 1 sait résoudre un problème dans le champ additif, et il sait modéliser correctement la situation par une opération mathématique correcte : l'addition itérée.
Élève 2 : il modélise la situation par un schéma dans lequel il dessine des paquets de 6 œufs en prenant soin d'indiquer le nombre d'œufs à côté de chaque paquet. Puis il compte les œufs un à un, ou six par six jusqu'à obtenir 78, qui est un résultat juste.
L'élève 2 sait résoudre un problème dans le champ additif, il sait modéliser correctement la situation par un schéma et utiliser ce schéma pour dénombrer.
Élève 3 : il effectue la multiplication de 13 (boites) par 6 (œufs) et obtient un résultat juste. Il s'agit ici de la procédure experte.
L'élève 3 sait résoudre un problème dans le champ multiplicatif, il sait modéliser correctement la situation et maitrise la technique opératoire de la multiplication posée en colonne.
2) **Élève 4 :** il effectue la multiplication de 13 (boites) par 6 (œufs), il sait donc résoudre un problème dans le champ multiplicatif en posant la bonne opération experte.
Le résultat de 3×6 est juste : 18, il pose bien ses deux chiffres dans l'opération mais ensuite semble effectuer la somme de 1 et de 1, ceci est probablement dû au fait que les deux nombres n'ont pas le même nombre de chiffres, et après avoir utilisé une fois le « 6 », il additionne la retenue à la dizaine comme il le ferait dans une addition.
Élève 5 : il sait effectuer une addition posée en colonnes.
Par contre, il ne sait pas modéliser la situation par la bonne opération.
Élève 6 : il sait schématiser la situation et poser le calcul adéquat.
Il regroupe les « 6 » par paquets de 4 pour obtenir 24, qu'il indique à côté de chaque paquet, ce qui est juste.
Enfin, il effectue l'opération $24 + 24 + 6$ en colonnes, mais son « 6 » n'est pas bien placé et il le calcule comme étant un chiffre de la colonne des dizaines, son résultat final est donc faux.
3) Pour l'élève 5, on peut lui proposer de schématiser la situation, et de commencer à dénombrer les œufs, il se rendrait vite compte que 19 est trop petit. Ensuite, on pourrait lui proposer d'écrie le calcul de plusieurs façons différentes (somme, produit) afin de lui faire découvrir quelle procédure est la plus rapide.
4) Pour les élèves 1 et 6, il suffirait de donner un nombre de boites bien plus élevé (par exemple, 67), pour que la procédure par schématisation soit longue et fastidieuse et que les élèves soient contraints à réfléchir à une autre méthode, plus rapide.

4 1) La notion abordée est la soustraction, l'élève doit effectuer une soustraction par la méthode de son choix (développer l'algorithme) : par un calcul en ligne ou par un calcul en colonnes (soustraction classique, par emprunts ou comme addition à trous), et doit avoir des connaissances en calcul mental (répertoire additif).
2) a) **Antoine** utilise une procédure de calcul en ligne par soustractions successives. Il part du nombre le plus grand et décompose le nombre à retirer : il commence par enlever le plus grand multiple de 100 s'il existe, puis le plus grand multiple de 10 et enfin les unités, sauf pour le dernier calcul. Ensuite, il écrit le calcul en ligne, les résultats sont justes mais mal écrits d'un point de vu mathématique (statut du signe « = »).
Barbara effectue des soustractions posées en colonnes grâce à la méthode par emprunts.
Clara effectue des calculs en ligne, elle soustrait pour chaque rang le plus petit nombre au plus grand, en commençant par le chiffre le plus à gauche (on le devine grâce à la dernière opération).

b) **Barbara** utilise la méthode par emprunts : si besoin, elle emprunte une unité au rang supérieur, qu'elle donne au rang actuel en cassant cette unité en dix.
Dominique effectue des soustractions par la méthode classique basée sur le principe des différences constantes : lorsque la valeur du chiffre du haut est inférieure à celle du chiffre du bas, il ajoute 10 unités du rang en haut et une unité du rang supérieur en bas.
c) **Barbara** effectue correctement les opérations a., b. et d. Par contre, elle se trompe dans l'opération c., erreur classique de la méthode lorsque le nombre le plus grand comporte un ou plusieurs « 0 ». Elle a besoin d'emprunter une dizaine, mais 800 ne comporte pas de chiffre des dizaines, il faut donc emprunter une centaine, il en reste bien 7 et on a 10 dizaines. Elle semble ensuite reporter un « 1 » au lieu d'ôter la dizaine du départ. Elle effectue donc 11 – 5 au lieu de 9 – 5.
Clara n'a aucun résultat de juste car sa procédure n'a aucun sens.
d) Pour Clara, il faut revoir la soustraction posée au niveau de son sens. Pour cela, on peut revenir aux bases et conceptualiser la soustraction grâce à un matériel pédagogique (pièces et billets par exemple).

5 **1)** Une **division décimale** permet de répondre à la question, et plus particulièrement la division de deux nombres entiers avec quotient décimal : $\begin{array}{r|l} 9 & 5 \\ \cline{2-2} 4\,0 & 1{,}8 \\ 0 & \end{array}$. La réponse attendue est donc 1,8 L.
2) **Julia** schématise la situation par 9 bâtons pour les 9 litres d'huile et 5 bâtons pour les 5 bidons. Ensuite, elle associe 5 litres à 5 bidons en barrant 5 bâtons. Il lui reste 4 litres qu'elle transforme en 8 demi-litres. Parmi ces 8 demi-litres, elle en attribue 5 aux 5 bidons ce qui lui donne un litre plus un demi-litre, soit 1,5 litre par bidon. Il lui reste 3 demi-litres qu'elle laisse ainsi.
Son raisonnement n'est pas faux, son résultat est cohérent mais il ne correspond pas tout à fait à la question.
Karima commence par procéder par essais-erreurs : elle fait une addition itérée de 2,5 (5 fois), elle calcule la somme des dixièmes et il semble qu'elle calcule également la somme des unités mais qu'elle ne l'écrive pas car la valeur n'est pas celle qu'elle doit trouver. Elle se rend compte néanmoins que le résultat est trop grand, et c'est la raison pour laquelle elle teste la même procédure avec 2,2.
Après deux tentatives, elle cherche une autre procédure plus efficace, elle pense à une division en commençant par une division par 9, qu'elle barre rapidement pour effectuer la division de 9 par 5, ce qui est une procédure experte. Cependant, elle fait une division euclidienne qui ne donne pas un résultat, mais deux (quotient et reste) qui ne lui permettent théoriquement pas de conclure. Elle répond en donnant un résultat composé du quotient comme chiffre des unités, et du reste comme chiffre des dixième, ce qui démontre une mauvaise compréhension des termes obtenus dans une division euclidienne et de la maîtrise des nombres décimaux. Enfin, elle tente une vérification avec le nombre 1,4 trouvé, mais elle n'effectue pas le calcul.
Son résultat est erroné. **Louis** procède par essais-erreurs également mais avec une procédure plus rapide : il cherche la valeur en effectuant la multiplication. Il commence par multiplier par 5 par 1,5, son résultat est trop petit. Il tente donc 1,75, c'est toujours trop petit. Puis il essaie avec 2, le résultat est trop grand, enfin il tente avec 1,8 ce qui lui donne le bon résultat.
Sa réponse est correcte.
3) Si l'objectif est d'utiliser la technique experte (la division décimale), le quotient ne peut être qu'un nombre entier, donc le nombre de bidons est un nombre entier.
En revanche, on peut **modifier le nombre de litres** de manière à rendre la procédure par essais-erreurs plus longue, par exemple en choisissant 9,1 litres.

Chapitre N4

Fractions et décimaux

1 **A. 1)** Cet élève semble maîtriser l'addition de deux nombres entiers, mais il n'a pas compris le sens de l'écriture à virgule d'un nombre décimal qu'il traite comme deux d'entiers séparés par une virgule : il additionne séparément les parties entières et décimales des deux nombres.
2) a) Il s'agit de la même erreur que dans la question précédente. Comme les entiers écrits à gauche de la virgule sont identiques, il compare ceux de droite : $3 < 6 < 100$, donc $5,03 < 5,6 < 5,100$.
b) Il pourrait dire les nombres décimaux en insistant sur la fonction des différents chiffres : « cinq et trois centièmes », « cinq et six dixièmes », « cinq et cent millièmes ».

B. 1) Un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction décimale, c'est à dire un nombre dont le dénominateur est 10, 100, 1 000...
2) L'enseignant peut, par exemple, faire remarquer qu'en ajoutant $\frac{5}{10}$ à $\frac{5}{10}$ (déjà placé sur la droite graduée), on trouve $\frac{10}{10}$ qui peut aussi s'écrire 1. Donc deux nombres décimaux non entiers peuvent avoir une somme qui est un entier.
3) C'est vrai car la somme de deux fractions décimales est une fraction décimale. Si les dénominateurs sont les mêmes, c'est immédiat ; sinon, on utilise les représentations équivalentes : $\frac{3}{10} = \frac{30}{100} = \ldots$ pour s'y ramener.
4) Le principal intérêt touche à la propriété fondamentale de l'ensemble des nombres décimaux : on peut toujours intercaler un nombre décimal entre deux nombres décimaux.
Un deuxième intérêt pourrait être de montrer l'effet récursif de la construction des nombres décimaux, ce que l'on peut appeler « l'effet zoom » de la droite numérique puisqu'on peut diviser en 10 chaque unité de la droite : l'unité, $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}\ldots$

2 **SITUATION 1 :**
1) *Voir tableau de comparaison page suivante.*
On peut évoquer plusieurs raisons à la non réussite de l'élèves à la question ❸ :
- dans la question ❷, les fractions peuvent être classées facilement dans l'ordre croissant puisqu'elles ont le même dénominateur. Il suffit ensuite de les mettre dans le même ordre sur l'axe gradué étant donné qu'il y a autant de fractions que de lettres. Dans la question ❸, la question est beaucoup plus ouverte ;
- la reproduction de la droite elle-même sur du papier millimétré dans la question ❸ peut poser problème, d'autant plus que l'origine n'est pas représentée. Dans la question ❷, la droite graduée est déjà tracée ;
- dans la question ❸, l'élève doit constamment « jongler » entre les différentes écritures, alors que la question ❷ ne comprend qu'une sorte d'écriture ;
- les deux représentations de 3 et 4 dans l'exercice ❸ possèdent des dénominateurs différents, ce qui peut perturber l'élève ;
- dans l'exercice ❸, les graduations des centièmes ne sont pas clairement marquées, il faut se servir du papier millimétré comportant de multiples graduations alors que dans la question ❷, les graduations sont claires.

2) Un nombre décimal est un nombre pouvant s'écrire sous la forme d'une fraction décimale, c'est à dire une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10 : 1, 10, 100, 1000...

Question ❷	Question ❸
Comparaison de la présentation	
Un droite graduée est tracée, les graduations jusqu'au centième bien représentées. La droite comporte l'origine et l'unité. Des lettres indiquent des fractions à placer, il y a autant de lettres que de fractions. Les nombres à placer sont tous écrits sous la forme d'un fraction décimale de dénominateur 100.	La droite doit être reproduite sur papier millimétré. L'origine n'est pas présente, le premier entier visible est 3. 3 est associé à $\frac{30}{10}$ et 4 à $\frac{400}{100}$. Les nombres à placer sont des nombres décimaux écrits de différentes façons.
Comparaison de la tâche demandée	
Il s'agit d'associer une fraction à une lettre de la droite graduée. L'élève doit ensuite donner l'écriture décimale de chacune des fractions.	Il faut placer des fractions après avoir reproduit la droite. Il n'y a rien à faire après avoir placé les nombres.

SITUATION 2 :

1) **Lara** n'obtient pas le bon dénominateur : elle écrit 1 000 au lieu de 100. Cela provient peut-être du fait du codage usuel de $a + \frac{b}{10} + \frac{c}{100} = \overline{a,bc}$ qu'elle a vu en classe, le 1 000 provenant de la suite 1; 10; 100; 1 000 ou de la multiplication de 10 par 100 ? Ensuite elle se trompe en enlevant la virgule. Il s'agit peut-être d'une manière implicite de comparer les parties décimales « comme si un nombre décimal était composé de deux nombres entiers séparés par une virgule ». Sa conclusion ne justifie pas pourquoi Max à tort.

2) **Clément** semble avoir acquis la compétence « passer du développement en factions décimales d'un nombre à son écriture décimale ».

3) Elle utilise la règle suivante : pour comparer deux nombres décimaux, on compare tout d'abord les parties entières. Si l'une est plus grande que l'autre, il en est de même pour le nombre décimal. Si les parties entières sont égales, on compare le chiffre des dixièmes : le nombre le plus grand est celui qui a le plus grand chiffre des dixièmes. On continue ainsi de suite pour chacun des rangs successifs.

3 **1)** Il s'agit d'une situation de partage équitable pour laquelle on recherche « la valeur de chaque part », il s'agit donc d'une division-partition.

2) Il faudrait pour cela que le dividende soit un nombre entier. Étant donné qu'il est exprimé en cm, il suffit de l'exprimer en mm. On aurait alors un ruban de 1 376 mm à partager en 8 morceaux de même longueur, soit 1 736 ÷ 8, exprimée en mm :

$$\begin{array}{r|l} 1\,3\,7\,6 & 8 \\ \cline{2-2} 5\,7 & 1\,7\,2 \\ 1\,6 & \\ 0 & \end{array}$$

. Chaque morceau mesure 172 mm, soit 17,2 cm.

3) Au CM2, la procédure experte de la division d'un nombre décimal par un nombre entier est au programme :

$$\begin{array}{r|l} 1\,3\,7{,}6 & 8 \\ \cline{2-2} 5\,7 & 1\,7{,}2 \\ 1\,6 & \\ 0 & \end{array}$$

.

4) Un nombre décimal (positif) peut s'écrire sous la forme $\frac{p}{10^q}$ où p et q sont des nombres entiers positifs.

Or, $\frac{p}{10^q} \div 8 = \frac{p}{10^q \times 2^3} = \frac{p \times 5^3}{10^q \times 10^3} = \frac{125p}{10^{q+3}}$ qui est un nombre décimal.

Le quotient d'un décimal par 8 est donc toujours un décimal.

4 **1)** La compétence générale est « Résoudre un problème de proportionnalité dans le champ multiplicatif », à partir à chaque fois d'une valeur unitaire.
Une compétence mathématiques est la maitrise des nombres décimaux et en particulier savoir diviser et multiplier un nombre par 10 et par 100.
2) a) **Théo** utilise une règle valable avec les nombres entiers : « pour multiplier un nombre par 100, on ajoute deux zéros à la fin du nombre ».
Cependant, cette règle ne s'applique pas aux nombres décimaux, puisqu'ajouter des « zéros » à la partie décimale ne change rien à la valeur du nombre.
b) **Eugénie** a compris que multiplier par 100 revenait à multiplier chaque rang du nombre par 100, c'est-à-dire décaler chaque chiffre de deux rangs vers la gauche dans le tableau de numération.
Cette procédure est meilleure mathématiquement et didactiquement beaucoup plus pertinente que la précédente !

5 **1)** Il y a trois démarches principales :
- celle de Benjamin et d'Océane qui calculent séparément la partie entière et la partie décimale soit par des calculs en ligne pour Benjamin, soit par un calcul posé en colonnes pour Océane. Ensuite, ils associent leurs résultats en plaçant une virgule entre les deux.
- celle d'Isabelle qui passe par les fractions décimales : elle transforme ses nombres décimaux en fractions décimales de dénominateur 100 afin d'harmoniser les écritures pour pouvoir ensuite en faire une somme unique.
- celle de Pierre, une solution hybride qui consiste à décoder ses nombres décimaux en une somme d'un entier (unité) et d'une fraction décimale, puis il effectue des calculs séparés sur les fractions, puis sur les entiers, et enfin il ajoute ses résultats pour pouvoir obtenir un nombre en écriture décimale.

2) Pour Benjamin et Olivier, ils pensent les nombres entiers décimaux comme deux nombres séparés par une virgule, sans lien entre les deux.
3) On peut utiliser un instrument de calcul comme des abaques (bouliers ou abaques à jetons) afin d'avoir une représentation plus visuelle du nombre, ce qui a également l'avantage de travailler sur la manipulation et sur l'aspect historique du calcul posé ; on peut également utiliser un tableau de numération et placer les nombres dans le tableau ; enfin, l'enseignant peur revenir à la manière dont ont été introduits les nombres décimaux par les fractions décimales et oraliser les nombres du type « 3 et 12 centièmes » au lieu de « 3 virgule 12 ».

Chapitre G5
Géométrie plane

1 • **Erreur 1 :** l'élève semble avoir compris que deux droites sont perpendiculaires si l'une des deux droites est verticale.

L'horizontale et la verticale sont deux directions naturellement privilégiées dans la vie courante. D'autre part, pour beaucoup d'enfants, la perpendicularité est associée à la notion d'angle droit, droit étant lui même associé à vertical (« tiens toi droit ! »).

• **Erreur 2 :** on peut repérer la même erreur que précédemment, l'enfant a aussi pu mal utiliser son équerre. Dans ce dernier cas, il n'a peut-être pas compris l'utilisation de cet instrument : quel « bord » je mets en correspondance avec mon dessin ? Quel « bord » me permet de tracer la droite demandée ?

• **Erreur 3 :** l'élève a sûrement bien placé son équerre et l'a probablement déplacée jusqu'au « bout » de la droite. N'atteignant pas le point, il a estimé qu'il était impossible de tracer la droite.

Cette démarche est directement liée à la conception que l'élève a de la représentation graphique d'une droite, il ne la perçoit pas comme étant « infinie ».

• **Erreur 4 :** la lettre représentant le point M semble à peu près correctement placée. En revanche, l'élève assimile le point à la lettre qui le nomme et n'indique pas le code qui le représente.

Il peut aussi y avoir confusion du terme « milieu » qui, dans le langage courant, signifie être entre les limites d'un objet.

• **Erreur 5 :** l'élève a tracé *un* rectangle ABCD, puis *un* segment [AC], sans penser qu'il pourrait y avoir une relation entre les deux.

Il a effectué les instructions une par une au lieu de les prendre dans leur globalité.

• **Erreur 6 :** l'élève semble avoir construit un carré, puis, en tâtonnant (traces de la pointe du compas), a essayé de placer au mieux le cercle passant par les sommets du carré.

La non-reconnaissance du lien entre les figures de base est peut-être due au fait que ce lien est à construire (les diagonales du carré).

• **Erreur 7 :**

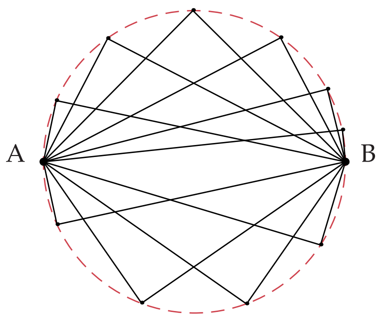
Patrice a identifié le cercle et un quadrilatère, commence par faire tracer le cercle puis le carré mais ses instructions ne sont pas très claires : pour le cercle, il parle simplement de compas et de la moitié de 8 cm sans préciser qu'il faut le tracer. Le carré est tracé côté par côté en donnant sa longueur et son orientation. Cet élève utilise beaucoup le langage spatial et un vocabulaire d'action en faisant référence aux instruments. Quand il utilise un vocabulaire mathématique, il y a des imprécisions et des faux sens (largeur et hauteur du cercle).

Géraldine a également identifié le carré et le cercle qu'elle caractérise convenablement, mais ne met pas en évidence les relations entre ces deux figures. L'absence de référence de relations entre le carré et le cercle a plusieurs significations : les relations ne sont pas visibles ; elle ne pense pas cela utile de le préciser, ou encore elle pense que le plus important est de décrire les figures qu'elle voit.

Guillaume a identifié le carré (par la longueur de son côté) et le cercle (par son centre), ainsi que la relation entre eux. Par conte, il ne donne pas le rayon du cercle et confond « angle » et « sommet de l'angle ». L'oubli du rayon est peut-être dû à une difficulté de se décentrer, et l'imprécision du vocabulaire fait penser à une trop grande influence du langage courant (angle d'une table).

2 1) On effectue plusieurs tracés pour obtenir la figure suivantes :

a)



b) Soient A et B deux points du plan et M un troisième point du plan tel que l'angle $\widehat{AMB}$ soit un angle droit, alors M appartient au cercle de diamètre [AB].

2) Les constructions incorrectes sont les constructions (1), (5) et (6).

• **Construction (1) :** tous les points placés au-dessus de (AB) sont bien placés mais les points placés en dessous de (AB) sont placés sur un demi-cercle ayant un diamètre dont A est une extrémité mais dont l'autre extrémité est le point M situé « juste au-dessus » de B. Il est probable qu'ayant retourné son équerre afin de placer des points dans le demi-plan inférieur, l'élève a commis l'erreur de prendre un second point fixe autre que B, assez proche cependant de celui-ci.

• **Construction (5) :** l'élève a placé ses dix points sur deux droites parallèles aux bords verticaux de la feuille, mais également perpendiculaires au segment [AB] tracé. On peut émettre plusieurs hypothèses correspondant chacune à une compréhension incorrecte de l'énoncé :

• l'élève a confondu les termes et les concepts de « perpendiculaire » et de « verticale », et considéré que la consigne de l'énoncé « la droite (AM) et la droite (BM) sont perpendiculaires » signifiait que ces droites devaient être verticales ;

• il a interprété la consigne « la droite (AM) et la droite (BM) sont perpendiculaires » en la complétant de sorte que pour lui elle devienne : « la droite (AM) et la droite (BM) sont perpendiculaires à (AB) » ;

• il a mal utilisé son équerre et l'a placée de manière à avoir l'angle droit « en A » et « en B ».

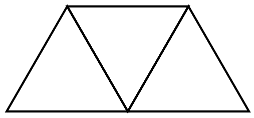
De plus, ce que dit cet élève est en partie inexact : les dix points ne sont pas tous sur une même droite, mais chaque groupe de cinq points se trouve sur une même droite.

• **Construction (6) :** les dix points sont alignés sur une droite, apparemment horizontale. Ces points ne respectent pas la consigne. Il est possible que cet élève ait essayé de faire comme sur l'image en plaçant de la même façon son équerre et en la gardant bien fixement posée sur sa feuille, il a alors pu placer dix points le long du bord inférieur de son équerre. C'est donc peut-être une interprétation erronée de la consigne « faire comme Louis », ainsi que du modèle que donne l'image, qui est à l'origine de cette erreur.

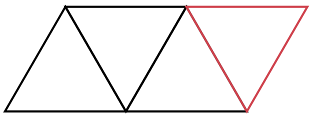
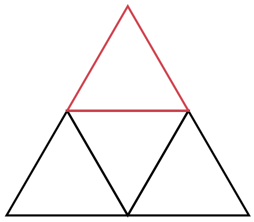
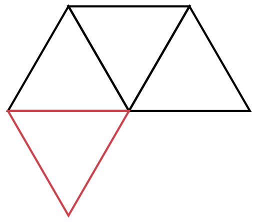
3) • **Construction (3) :** l'élève a commencé par placer 9 points au dessus de (AB), comme le suggère l'image, puis a situé le dixième et dernier point en dessous, à égale distance de A et de B. Est-ce le sentiment de manquer de place pour placer un point de plus qui l'a amené à passer de l'autre côté de (AB) ? Le fait qu'il ait bien perçu que les points étaient sur « un rond », il l'a écrit, peut faire penser qu'il lui a fallu choisir un endroit pour placer un dernier point, le dixième…

• **Construction (6) :** l'image du manuel montre une façon de placer son équerre. L'énoncé n'indique pas que l'équerre peut, et doit changer de position et, manifestement, cet élève l'a gardée dans cette position fixe sur sa feuille.

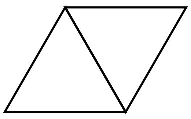
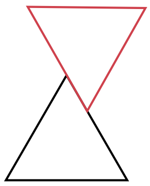
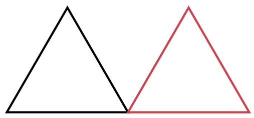
3 Situation de recherche dirigée au cycle 2 : LES POLYMINOS

1) Avec trois triangle, on obtient une seule solution : 

Avec quatre triangles, on obtient trois solutions, que l'on construit à partir de la solution précédente à laquelle on ajoute un triangle équilatéral :

2) L'enseignant devra préciser ce qu'il appelle « assembler les triangles exactement par un côté » en disant que deux sommets doivent également coïncider, et en présentant un exemple et des contre exemples avec des dessins. Il peut également préciser ce qu'il appelle « des formes géométriques différentes ».

 correct ;  et  incorrects

3) Les élèves peuvent rencontrer des difficultés à identifier les ressemblances et les différences des assemblages qu'ils réalisent. Il serait bon de laisser du papier calque à disposition. Mais cette difficulté, naturelle en cycle 2, n'a pas à être levée individuellement ou collectivement dans la phase de recherche, elle sera prise en compte au moment de la mise en commun des différentes propositions des élèves.
Les élèves peuvent également avoir une certaine difficulté à organiser leur recherche, ici le maître peut apporter une aide individualisée en proposant à certains élèves de partir de l'assemblage qu'ils ont réalisé avec 3 triangles et de positionner le 4ème triangle aux différents endroits possibles.
4) L'enseignant a choisi de mener cette recherche en groupe restreint et non en classe entière sans doute pour pouvoir apporter une aide individualisée à ses élèves et peut-être pour favoriser les échanges entre les élèves.
5) Les élèves peuvent élaborer un document présentant les assemblages obtenus, soit en les dessinant à main levée ou sur une feuille pointée en réseau triangulaire, soit par collage. Sur ce document, il serait intéressant que les élèves écrivent une phrase liée aux objectifs que l'enseignant a défini pour cette séance.

Situation de recherche dirigée au cycle 3 : LES POLYGONES

1) • Question I : identifier une figure parmi d'autres figures.
• Questions a), c) et d) de la question II : reconnaître et nommer les figures usuelles.
2) L'enseignant veut s'assurer que ses élèves identifient bien les propriétés spécifiques des triangles rectangles isocèles (angle droit, égalité des longueurs de 2 côtés), indépendamment de leur taille.
3) L'élève a raison car un carré est un losange particulier, qui est aussi un parallélogramme particulier.
4) La figure a est un rectangle, la figure d est un triangle rectangle isocèle, et la figure i est un parallélogramme. Cette question permet de mettre en évidence la capacité des élèves à envisager un assemblage de figures comme une figure unique. On pourrait également accepter que les figures b et f sont des trapèzes, même si ce n'est pas au programme.

4 **1)** L'objectif de cette activité est : tracer, sur papier quadrillé, la figure symétrique d'une figure donnée par rapport à une droite donnée.

2) Globalement, les procédure possibles pour un élève de cycle 3 sont :

- le pliage ;
- l'utilisation d'un papier calque ;
- l'utilisation de la règle et du compas ;
- l'utilisation du quadrillage : construire le symétrique de chacun des points de la figure initiale puis tracer les segments les rejoignant ;
- l'utilisation du quadrillage : construire le symétrique d'un point et à partir de celui-ci reconstruire la figure initiale de proche en proche.

3)

- **Élève A** :

1) l'élève a, semble-t-il, commencé par reporter les points symétriques (présence des points), cette étape est correcte. Puis il les a reliés et c'est à ce moment qu'il a commis une erreur dans la manière de les relier entre eux (ordre erroné) ;

2) un seul point est bien placé et l'axe oblique est pris en compte mais la figure n'est pas correcte : il semble avoir compté le nombre de côtés de carreaux qu'il a reportés suivant des segments obliques. Il n'a pas terminé sa figure.

- **Élève B** :

1) trois points sont bien placés mais la figure n'est pas conforme (non conservation des aires).
Pour placer le quatrième point, l'élève semble utiliser le bord de la feuille et non la distance à l'axe ;

2) la figure est superposable mais il a tracé la figure « en face » d'un point fictif, il s'agit d'une symétrie centrale (étudiée en 5$^{\text{ème}}$).

- **Élève C** :

1) la figure est correctement construite, apparement l'élève a commencé par construire chacun des points du polygone (présence des marques), puis les a reliés ;

2) la figure est bien superposable mais l'élève semble avoir construit le symétrique à partir d'un axe vertical.
On peut également penser, qu'il a placé dans un premier temps les points (présence de marques), par translation, puis il a inversé la figure.

- **Élève D** :

1) la figure ressemble, mais n'est pas isométrique et aucun élément n'est juste par rapport à l'exercice demandé. Il semble que cet élève utilise une translation un peu approximative (les sommets ne sont pas tous sur des nœuds du quadrillage) ;

2) la figure est superposable mais il a utilisé une translation et non une symétrie : il a déterminé la distance horizontale jusqu'à l'axe de symétrie en fonction des carreaux, distance qu'il a reportée pour déterminer le point de départ de la figure symétrique.

4) Ici, seule la règle est disponible pour l'élève, l'objectif implicite du maître est donc certainement qu'il utilise l'une des deux dernières procédures avec utilisation du quadrillage et de la règle comme instrument de tracé.

5 **1)** Cette séquence peut être proposée en deuxième année du cycle 3 (CM2) où on retrouve les compétences suivantes :

- utiliser les instruments pour tracer des droites parallèles et perpendiculaires ;
- vérifier la nature d'une figure en ayant recours aux instruments ;
- reproduire une figure complexe (sur papier uni, quadrillé ou pointé), à partir d'un dessin ;
- rédiger un programme de construction.

2) Tableau comportant deux compétences pour chaque activité.

	Compétence générale	compétence « instrumentale »
1	Reconnaître, reproduire un carré	Vérifier qu'un angle est droit en utilisant l'équerre ou un gabarit
2	Reproduire une figure sur papier pointé, à partir d'un dessin	Utiliser la règle et l'équerre pour construire des figures planes usuelles
3	Rédiger un programme de construction	Utiliser les instruments (règle, équerre) pour reproduire une figure sur papier uni à partir d'un modèle

3) Plusieurs logiques peuvent être mises en évidence :

- utilisation progressive d'instruments dans le cadre d'une difficulté croissante. D'abord règle sur un support pointé (activité 2), puis règle et équerre sur du papier uni (activité 3), et enfin règle, équerre et compas sur du papier uni (activité 4) ;
- volonté de faire acquérir aux élèves des compétences spatiales dans une activité de reproduction de dessins. Reconstitution de figures à partir de pièces (activité 1), reproduction d'une figure avec l'aide d'un papier pointé (activité 2), et enfin, reproduction d'une figure sur papier uni à l'aide d'instruments de géométrie et formulation de l'action (activités 3 et 4).

4) a) La règle permet de vérifier des alignements d'objets, de tracer des segments en joignant 2 points, et de réaliser des alignements. L'équerre permet de vérifier si un angle est droit, de tracer une perpendiculaire à un segment en un point donné. On remarque qu'aucun instrument n'est dévolu à la comparaison de longueurs : est-ce pour faire réfléchir l'élève à une procédure de comparaison non numérique ? (par exemple : étalon).

b) Il y a plusieurs « familles » de difficultés :

- prendre l'information nécessaire pour la reproduction du dessin qui n'est pas codée explicitement : égalité de longueurs de segments, angles droits, alignements ;
- déterminer l'ordre des constructions à réaliser ;
- utiliser des instruments, en particulier l'équerre.

c)

- Difficulté à trouver l'ordre des différentes étapes de la construction.
- Difficulté à décrire une construction, en particulier dans l'élaboration de phrases souvent très complexes pour des enfants de cet âge.
- Difficulté à utiliser du vocabulaire géométrique efficace (perpendiculaire à un segment en un point. . .) des désignations géométriques (nommer un point, désigner un segment, une droite).

d)

- Reprendre collectivement la construction de la figure complexe en pointant la nécessité de bien l'analyser (ce que permet l'activité 2) et faire réaliser avec soin les différents tracés de perpendiculaires.
- Reprendre collectivement la rédaction du programme en introduisant le vocabulaire géométrique approprié utilisable dans de futures activités identiques.

Chapitre G6

Espace et géométrie

1 **1)** On peut classer les solides suivant leur caractère polyédrique ou non :

- les polyèdres : A, B, C ;
- les non polyèdres : D, E, F, G.

2) Dans les programme du cycle 2, les solides présents sont la boule, le cylindre, le cône, le cube, le pavé droit et la pyramide. Il s'agit de les reconnaître, les trier et les nommer.
Cependant, il est important de présenter également d'autres types de solides afin de montrer qu'il en existe justement d'autres, et de pouvoir identifier les solides les uns par rapport aux autres ainsi que leurs caractéristiques principales.

3) Les élèves pourraient proposer un classement du type « sucré, salé », ou « ça se mange - ça ne se mange pas » ou encore proposer un classement par couleur, par taille. . ..
Si on ne précise pas qu'il faut s'intéresser uniquement aux formes des emballages, on peut donc obtenir une multitude de classements n'ayant aucun rapport avec ce que l'enseignant souhaite obtenir !

4) Tout d'abord, le passage du plan à l'espace n'est pas forcément clair pour les élèves : ils sont beaucoup plus habitués à travailler dans le plan.
Ensuite, ils ont eu l'habitude, notamment en maternelle, de reconnaître, classer et nommer des formes simples comme le carré, le triangle, le disque.

5) Le rouleau de papier d'aluminium est un objet non fermé. Contrairement aux autres qui, même si on peut les ouvrir (comme les différentes boites), peuvent tous être complètement fermés.

6) Pour le **groupe 1**, il semble que les élèves ont « repéré » les polyèdres. Les boules forment une catégorie, les autres emballages une troisième catégorie.
On remarque que les cylindres et les cônes n'apparaissent pas dans le classement, sûrement en raison de leur forme mélangeant des faces planes comme pour les polyèdres A, B, C et des surfaces non planes comme pour la sphère.
Pour le **groupe 2**, les élèves ont classé ensemble les prismes et les cylindres, c'est à dire les solides ayant des faces opposées parallèles ; puis les solides « pointus » (pyramides et cônes) et enfin les boules et autres emballages, peut-être comme la catégorie des formes « arrondies », les cylindres et les cônes ayant déjà été classés.

7) a) Le but de l'enseignant est de les faire classer les objets selon si ce sont des polyèdres (ceux qui ne roulent pas) ou non (ceux qui roulent), et à cette occasion d'introduire le terme de polyèdre.
b) Ce critère n'est cependant pas pertinent didactiquement : par exemple un cube ayant une face bombée vers l'intérieur ne roule pas. Pourtant, ce n'est pas un polyèdre.
Inversement, un polyèdre régulier avec de multiples faces donne l'impression qu'il roule lorsqu'on le lance.

2 **1)** Le thème étudié ici est le codage et la programmation, et plus particulièrement « coder le déplacement d'un personnage sur un quadrillage », dans le domaine « espace et géométrie ».

2) On peut par exemple choisir l'une des cartes « programme ». Pour cette carte, on teste le programme sur le quadrillage 1, puis 2. . . jusqu'à trouver la bonne association. On poursuit de la même façon avec les autres cartes programme. On obtient : A - 2 ; B - 4 ; C - 3 D - 1.

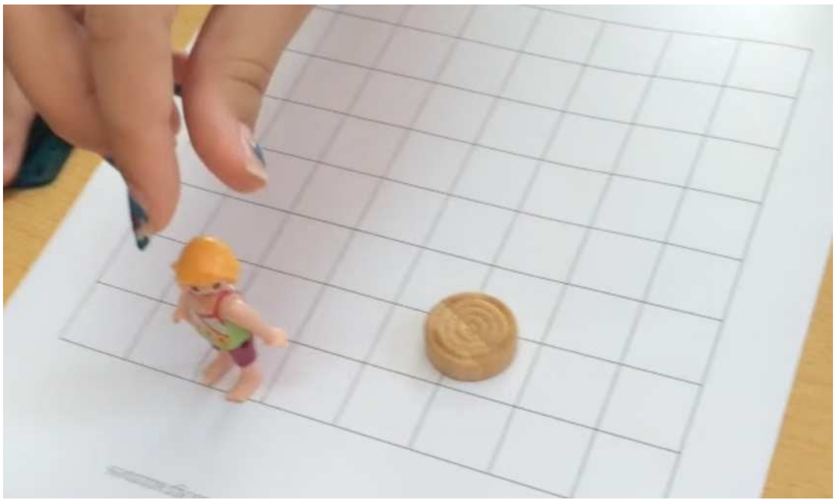
3) Compétences requises :

- se repérer, décrire ou exécuter des déplacements, sur un plan ou sur une carte ;
- connaître et utiliser le vocabulaire permettant de définir des positions et des déplacements.

4) Exemples de difficultés :

- mauvaise compréhension de la consigne ;
- difficultés d'orientations (repérage relatif, dans un plan) ;
- choix de la procédure à utiliser pour arriver à ses fins.

5) On peut proposer à des élèves un quadrillage plus grand sur une feuille A4 avec un personnage de type Playmobil (donc orienté et pouvant se tenir debout) représentant Hercule ainsi qu'un jeton pour le pommier. L'élève devra tout d'abord placer le personnage et le jeton, puis tester les déplacements. L'avantage de ce matériel est un retour à une représentation en 3D, plus proche de la réalité et donc plus facilement transposable à la réalité.



On peut également faire le même type d'action sur une nappe quadrillée sur laquelle les élèves peuvent se déplacer.

6) On obtient les programmes minimum suivants :

A

- Démarre
- Tourne à gauche
- Avance de 1
- Prends les pommes

B

- Démarre
- Avance de 4
- Prends les pommes

C

- Démarre
- Avance de 4
- Tourne à gauche
- Avance de 2
- Prends les pommes

D

- Démarre
- Répète 2 fois
  - Tourne à gauche
  - Avance de 2
- Prends les pommes

3 **1)** Les intentions du maître sont de :
- faire émerger les caractéristiques d'un patron de cube ;
- faire reconnaître un patron de cube parmi différentes représentations ;
- faire travailler le passage du plan (le patron) à l'espace.

2) Un « patron » d'un solide est une surface plane d'un seul tenant qui, par pliage, permet de reconstituer le solide, sans recouvrement de ses faces.

3)
- L'assemblage **c** n'est pas un patron du cube parce qu'il comporte sept carrés au lieu de six.
- Pour l'assemblages **b**, les deux carrés « du dessus » vont se chevaucher lorsqu'on va reconstituer le solide.
- Pour l'assemblage **d**, les quatre carrés en haut à droite forment un carré ce qui est impossible puisque la somme des angles issus du sommet commun vaut $4 \times 90^\circ = 360^\circ$, les quatre faces sont dans le même plan.

4) **Concernant la présentation :**
- dans l'exercice 1, on a en plus la présence d'un cube représenté en perspective ;
- l'exercice 1 comporte cinq assemblages alors qu'il y en a sept dans l'exercice 2 ;
- dans l'exercice 2, les « traits de pliage » sont représentés par des pointillés alors que ce sont des traits pleins dans l'exercice 1 ;
- les figures sont plus grandes dans l'exercice 1 que dans l'exercice 2 ;
- dans l'exercice 1, l'un des assemblages est formé de sept carrés alors que tous ceux de l'exercice 2 n'en possèdent que six.

Concernant la consigne :
- le statut des objets : dans l'exercice 1, on parle d'assemblages de carrés, alors que dans l'exercice 2 on parle de figures ;
- la formulation : dans l'exercice 1, la question est fermée, il s'agit de trouver les deux seuls patrons de cube. Dans l'exercice 2, le nombre de solutions n'est pas indiqué ;
- la réponse attendue : dans l'exercice 1, les élèves doivent reproduire deux assemblages, alors que dans l'exercice 2, ils doivent reproduire sur papier quadrillé les figures permettant de construire le cube et vérifier en essayant de le construire effectivement.

Concernant la vérification :
- dans l'exercice 1 aucune vérification n'est évoquée ;
- à contrario, dans l'exercice 2, l'élève doit vérifier ses propositions par reconstruction du cube à partir des patrons. La reproduction de ces patrons est facilitée par l'utilisation du papier quadrillé.

5) Dans l'exercice 2, il est demandé à l'élève d'anticiper le résultat d'une construction à partir du patron du solide en repérant les éventuelles superpositions de faces. Dans l'exercice 3, il s'agit de situer des faces voisines du cube les unes par rapport aux autres sur le patron et dans une représentation en perspective. La résolution de l'exercice 3 nécessite le passage d'une représentation du cube en dimension 2 à une représentation du cube en dimension 3. Cet exercice peut donc être considéré comme un prolongement de l'exercice 2, à condition que les élèves aient au préalable travaillé la lecture de représentations en perspective.

6) À l'issue de l'exercice 2, l'élève possède un patron de cube à partir de la figure E, patron qu'il peut manipuler pour reconstruire le dé. Dans l'exercice 4, il s'agit de repérer les faces opposées et la vérification se fait par construction. Ainsi, proposer l'exercice 4 à la suite de l'exercice 2, permet une continuité de l'apprentissage : reconnaître des patrons du cube, puis travailler plus précisément sur les positions relatives des différentes faces d'un de ces patrons.

4 **1)** • Le patron doit avoir autant de faces que l'objet réel ;
• les formes des faces du patron doivent être les mêmes que celles de l'objet réel ;
• le patron doit être d'un seul tenant ;
• les faces ne doivent pas se recouvrir.
2) **a)** • des gabarits de faces sont donnés, mais en nombre supplémentaire. Cela oblige l'élève à analyser le solide afin de ne choisir que les faces convenables ;
• les gabarits des faces du cube tronqué sont donnés. Cela libère les élèves de la complexité du tracé de certaines faces. Une fois ces gabarits trouvés, l'élève pourra mieux se concentrer sur l'analyse du solide, le nombre et la nature de ses faces et la disposition à adopter pour obtenir un patron ;
• chaque gabarit est en un seul exemplaire. Si le maître fournissait les sept gabarits correspondant aux sept faces, la tâche des élèves serait réduite à les disposer correctement.
b) • si la difficulté porte sur le choix des faces, le maître peut proposer aux élèves de manipuler le cube tronqué, de le comparer aux gabarits qu'il possède ;
• si la difficulté porte sur l'assemblage des gabarits, il peut proposer de donner plusieurs gabarits de même forme afin qu'il puisse avoir autant de faces que de gabarits ;
• il peut aussi proposer d'encrer les faces du cube tronqué afin de créer un patron sur une feuille et de s'inspirer de ce patron pour tracer le sien.
1) La difficulté particulière de cette activité vient du fait que le solide à construire n'est pas un objet matériel, on doit imaginer qu'il bouche le trou. Cela entraîne entre autre l'impossibilité de le tourner dans tous les sens pour l'observer (et par exemple de placer la pyramide dans sa position la plus usuelle, sommet en haut).
2) On pourrait proposer la trace écrite suivante : « Le patron d'un solide est une surface plane d'un seul tenant qui, par pliage, permet de reconstituer le solide sans recouvrement de ses faces. »

5 **1)** • programmer le déplacement d'un personnage sur un plan ;
• se repérer dans l'espace ;
• résoudre un problème utilisant un repérage de l'espace.
2) **a)** **Oriane** : elle a trouvé 6 quilles ce qui est le maximum de quilles possibles de récupérer en 20 secondes. Son chemin semble correct dans sa tête, cohérent au niveau des instructions « av », « rq » et le temps de 20 secondes est respecté mais les instructions d'orientation (droite et gauche) sont souvent fausses.
Samuel : il donne un premier programme juste permettant de récupérer 2 quilles (ligne 1). Il maîtrise sur cet exemple les diverses instructions de déplacement et d'orientation. Il semble ensuite qu'il recommence du point de départ et construit son déplacement sans anticipation, ce qui lui donne in fine le même parcours que précédemment. Enfin, il tente un troisième parcours pour lequel on ne sait pas vraiment d'où il part ni ce qu'il fait. Il a utilisé plus de 20 déplacements et une nouvelle instruction : « av4 ».
b) **Oriane** a des difficultés d'orientation : elle mélange les repérages absolus et relatifs, c'est donc vers cette remédiation qu'il faut se tourner, on peut lui proposer par exemple :
• une activité déconnectée réelle en lui faisant faire les déplacements de manière effective sur sur un grand quadrillage dans la cours de l'école (jeu du robot idiot) ;
• une activité sur ordinateur ou tablette afin de percevoir l'effet d'une erreur d'instruction en direct (ScratchJr, Scratch, Lightbot, Gcompris labyrinthe. . .).
Samuel semble avoir des difficultés d'anticipation, on peut lui proposer de tracer le déplacement qu'il souhaite obtenir sur le quadrillage, puis de coder ce déplacement tout en dénombrant le temps écoulé et le nombre de quilles récupérées.

Chapitre M7
Grandeurs et mesures

1 **1) a)** Difficultés de l'exercice 1 :

- les élèves peuvent ne pas bien estimer la masse des objets parce qu'ils ne les ont jamais soupesés ;
- l'élève peut avoir du mal à imaginer les masses autre que 1 g ou 1 kg indiquées au début de l'exercice ;
- certains objets proposent des masses avec des unités différentes (grammes et kilogrammes).

b) Difficultés de l'exercice 2-a :

- difficulté dans la conversion des unités (1 kg 250 g correspondent à 1 250 g ou inversement) ;
- méconnaissance des signes > et < ;
- représentations des masses à l'aide de deux objets différents (balance électronique et balance de Roberval).

2) a) L'élève n'apporte aucune importance à l'unité et au fait que 1 kg représente 1 000 g : il associe entre eux les différents nombres représentant les masses. Par exemple, 2 kg 300 g = 2 300 g.

b) Si on a un nombre non composé de 4 chiffres, ce procédé ne fonctionne pas.
Par exemple, 23 456 g donnerait 2 kg et 3 456 g et 123 g ferait 1 kg et 23 g.

3) a) On peut utiliser deux masses marquées de 1 kg et quatre masses de 10 g et les poser sur la balance digitale, pour que l'élève s'aperçoive qu'en fait, la masse totale est de 2 040 grammes et non pas 240 grammes.

b) L'enseignant peut par exemple reprendre avec l'élève les masses marquées et lui faire tenir dans une main une masse de 1 g, et dans l'autre celle de 1 kg afin qu'il s'aperçoive de la grande différence de poids, puis effectuer avec lui des conversions toujours en utilisant la manipulation de masses marquées.

2 **1)** **Compétences** acquises par Raphaëlle et de Terry :

- ajouter des grandeurs, en particulier des aires : ils savent déterminer une aire complexe par ajout d'aires de figures plus simples ;
- mesurer des grandeurs, en particulier des aires : ils savent déterminer l'aire d'un triangle rectangle, à partir de l'aire d'un carré ;
- manipuler des nombres décimaux (pour Raphaëlle) : en particulier, calcul de la moitié et du quart d'un entier, addition de nombres décimaux ; et des fractions (pour Terry) : transformation de 43 triangles valant un quart de cm^2 en $10\,cm^2$ plus trois quarts de cm^2.

Erreurs commises par Raphaëlle et Terry :

- le raisonnement de Raphaëlle est correct, mais elle fait une erreur de dénombrement des petits triangles (il lui manque un demi carré). De plus, certaines unités sont manquantes, en particulier dans la réponse ;
- la réponse de Terry est juste mais manque d'éléments de rédaction.

2) • Les deux élèves comptent correctement des petits triangles et ont conscience qu'il faut diviser ce nombre par 4 pour obtenir l'aire de la figure, ils semblent avoir acquis la compétence « mesurer une aire » ;

- les deux élèves entreprennent une division mais ne vont pas suffisamment loin dans sa résolution : Clément effectue une division euclidienne mais fait une erreur d'interprétations du résultat obtenu : le quotient est 10, le reste 3, ce qu'il écrit 10,3. Il manque a Cloé une dernière étape afin de trouver le résultat exact de 10,75, certainement parce que son résultat intermédiaire (10,7) ne correspond pas à la valeur trouvée de 10,3 ;
- Clément utilise la division comme outil pour trouver la réponse alors que Cloé utilise la division comme élément de vérification, elle a dénombré 10 carrés entiers et 3 petits triangles qu'elle interprète comme $10 + 0,3$;
- le résultat trouvé est le même pour Clément et Cloé (mais il est faux).

3 **1)** • mesurer une longueur en utilisant une unité adéquat ;
• mesurer une longueur en utilisant une unité adéquat ;
• utiliser un instrument de mesure : ici à priori la règle graduée ;
• calculer le périmètre d'une figure ;
• additionner des longueurs en utilisant l'unité choisie (conversions ou addition de nombres décimaux).
2) • difficultés dans l'organisation de la tâche : choix des outils, ordre des mesures, présentation des calculs... ;
• difficultés de mesure : utilisation de la règle graduée, choix de l'unité, objet à étudier « qui bouge » ;
• difficulté de calcul : somme de nombres décimaux ou de mesures avec des unités différentes (cm, mm).
3) **a)** **Corantin** reproduit la lettre sur une feuille à taille réelle, puis mesure chacun des segments qui la compose à l'aide (à priori) d'une règle graduée. Ses mesures sont exprimées en cm et mm et semblent cohérentes. Ensuite, il effectue une addition en colonnes de toutes les mesures en additionnant d'une part les mesures en mm, et d'autre part celles en cm. L'une des mesures a été inversée (5 cm 2 mm au lieu de 2 cm 5 mm), probablement parce que sa mesure sur la figure est « à l'envers ». Il obtient 31 cm 13 mm au lieu de 29 cm 13 mm. Il ne fait pas la conversion 13 mm = 1 cm 3 mm. Enfin, il transforme son résultat en 24 cm et 21 mm : peut-être a-t-il vu son erreur d'inversion et a-t-il voulu soustraire 7 cm comme résultat de 5 cm + 2 mm ce qui donne 24 cm, puis ajouter 7 mm comme résultat de 2 cm + 5 mm, avec une erreur de calcul supplémentaire puisqu'il obtient 21 mm au lieu de 20 mm.
Il sait mesurer une longueur en utilisant une unité adéquat, utiliser une règle graduée, calculer le périmètre d'une figure mais n'a pas acquis la compétence d'addition de mesures et ne maîtrise pas bien les unités.
César schématise à main levée sa lettre sur sa feuille en la cotant avec des mesures prises sur le gabarit. Ses mesures sont exprimée en cm en utilisant des nombres décimaux et semblent précises et cohérentes. Puis il effectue une addition en colonne de nombre décimaux, il obtient 23,7 cm au lieu de 26,5 cm mais la raison de l'erreur est difficile à déterminer ? Enfin, il écrit son résultat sous la figure en cm, en se trompant : ça peut être un oubli, ou une erreur de conversion.
Il sait mesurer une longueur en utilisant une unité adéquat, utiliser une règle graduée, calculer le périmètre d'une figure mais n'a pas acquis complètement la compétence d'addition de nombres décimaux.
Clarisse reproduit la lettre sur une feuille à taille réelle, puis mesure chacun des segments qui la compose à l'aide (à priori) d'une règle graduée. Ses mesures sont exprimées en mm et semblent cohérentes. Ensuite, elle effectue une addition en colonne terme par terme, son résultat est juste mais l'écriture mathématique n'est pas correcte : elle aurait dû poser à chaque fois l'addition des deux termes au lieu d'additionner chaque terme bout à bout. Enfin, elle convertit son résultat en cm.
Elle sait mesurer une longueur en utilisant une unité adéquat, utiliser une règle graduée, calculer le périmètre d'une figure, additionner des mesures, effectuer es conversions de longueur, mais n'a pas bien acquis le sens du signe opératoire « = ».
b) César et Corantin ont tous les deux fait des erreurs dans la technique experte de l'addition : erreur sur les nombres entiers pour Corantin, sur les nombres décimaux pour César. On pourra donc proposer une remédiation du côté de la technique experte pour tous les deux, en utilisant les variables didactiques suivantes : nombre de nombres dans l'opération, types de nombres (entiers, décimaux). Pour Corantin, on pourra également travailler les conversions, et notamment la relation « 1 cm = 1 mm ».

4 **1)** • mesurer le périmètre d'une figure (ici à l'aide d'une quadrillage) ;
• mesurer l'aire d'une surface (ici à partir d'un pavage simple) ;
• différencier aire et périmètre d'une figure.

2) Sur papier pointé, les unités de longueur et d'aire ne sont pas clairement matérialisées et les élèves devront construire mentalement le nombre de ces unités pour chaque figure. De plus, à la vérification, les « points » du réseau pointé situés sur les segment des figures ne se verront pas forcément après tracé.

3) **a)** • Deux figures d'Axel sont superposables, Axel a donc trouvé uniquement deux figures différentes. D'ailleurs, il faudra probablement repréciser aux élèves ce que sont deux figures *différentes*.

• **Axel** a commencé par tracer une succession de segments de même longueur que la figure A, mais après 4 segments correspondant à un côté du quadrillage et deux segments diagonale, il ne lui reste que deux segments de type côté de quadrillage à placer, ce qui est impossible pour pouvoir fermer la figure.

b) **Jean** n'a pas bien compris la consigne : il a tracé trois figures ayant même périmètre que la figure A, puis deux figures ayant même aire que la figure B. Il semble donc avoir acquis les notions de périmètre et d'aire, mais n'a pas compris le mot « à la fois » et ne considère donc pas les deux critères simultanément.

c) Les trois figures proposées par **Timéo** ont la même aire que la figure B. Il semble les avoir construites à partir d'une base carrée de côté 2 carreaux, à laquelle il a ajouté deux demi-carrés. Cependant, seule la première figure possède le bon périmètre. L'objectif sur les aires et donc atteint, celui sur les périmètres non. Tout comme Jean, il n'a pas pris en compte les deux critères à la fois.

d) Le maître peut proposer aux élèves de calculer le périmètre et l'aire de chacune de leurs figures afin de vérifier si les élèves ont acquis les compétences sur les aires et les périmètres. Ensuite, il pourra leur demander de relire à voie haute la consigne et vérifier que celle-ci est bien comprise.

5 **1)** **Production de Nicolas.**

• Démarche utilisée : somme des parties entières, somme des parties décimales sous forme de fractions décimales puis transformation en écriture décimale.

• Compétence acquise : calcul du périmètre d'un triangle (domaine des grandeurs et mesures).

• Erreurs : erreur dans le calcul de la somme des nombres entiers (16 unités au lieu de 15 unités), erreur dans le calcul de la somme des fractions décimales (11 dixièmes au lieu de 12 dixièmes). Erreur de codage : pour 11 dixièmes, il a ajouté une unité et un centième.

Production de Thomas.

• Démarche utilisée : somme des parties entières, somme des parties décimales sous forme de fractions décimales puis écriture sous la forme unités et dixièmes.

• Compétences acquises : calcul du périmètre d'un triangle (domaine des grandeurs et mesures), somme de nombres entiers et somme de fractions décimales (domaine du calcul).

• Erreur : l'écriture n'est pas optimisée, Thomas n'a pas transformé son résultat en une écriture décimale, il n'a pas « vu » que 12 dixièmes est égal à une unité et 2 dixièmes.

Production d'Amina.

• Démarche utilisée : somme des parties entières de proche en proche, somme des parties décimales sous forme de fractions décimales de proche en proche puis écriture sous la forme unités et dixièmes et enfin codage sous forme décimale.

• Compétences acquises : calcul du périmètre d'un triangle (domaine des grandeurs et mesures), somme de nombres entiers et somme de fractions décimales (domaine du calcul), codage d'un nombre décimal (domaine des nombres).

• Erreur : erreur d'écriture mathématique dans ses sommes (statut du signe égal à revoir).

2) L'enseignant peut demander à Thomas s'il peut décomposer 12 dixièmes pour l'associer à ses 15 unités, ou lui demander de placer sur une droite graduée son nombre obtenu.

Chapitre T8
Proportionnalité

1 **A.** 1) On pourrait compléter, par exemple, par « La coopérative avait acheté 25 tickets d'entrée, tous aux même prix, elle en achète 20 autres au même tarif ».
2) « Sachant qu'il y a une réduction de 2 € par ticket à partir du vingtième élève. »
B. 1) L'exemple 1 illustre l'utilisation du **coefficient de proportionnalité** (toutes les valeurs d'une même grandeur sont obtenues en multipliant les valeurs de l'autre grandeur par le même nombre).
2) L'exemple 2 illustre l'utilisation de la **linéarité multiplicative**, ou homogénéité (quand l'une des grandeurs est multipliée ou divisée par un nombre, l'autre grandeur est multipliée ou divisée par le même nombre).
3) Dans l'exemple 1, le rapport est le coefficient de proportionnalité. Il est le même pour toutes les données. Dans l'exemple 2, il s'agit d'un coefficient de linéarité, ou coefficient scalaire entre deux grandeurs identiques.
4) Il s'agit ici de la propriété multiplicative de la linéarité, qui n'est pas vérifiée.
On aurait également pu remarquer que 6 stylos, c'est 3 stylos + 3 stylos. Or le prix n'est pas égal à 5 € + 5 €, la situation n'est donc pas proportionnelle en vertu de la propriété additive de la linéarité qui n'est pas vérifiée.
C. Auriane effectue un **passage par l'unité** : elle calcule le nombre d'œufs nécessaires pour une personne, puis pour 20 personnes. Son raisonnement, sa rédaction et son résultat sont corrects.
émeric utilise utilise la propriété **additive** de la linéarité : pour 20 personnes (8+12), il faut 15 œufs (6+9). Son raisonnement et son résultat sont corrects.
Nicolas se trompe dans son raisonnement : il ajoute une même grandeur (12 personnes) à la fois aux 8 personnes (ce qui est cohérent), mais aussi au nombre d'œufs ! Son résultat est donc faux. Il est possible qu'il ait souhaité utilisé la propriété additive de la linéarité, qu'il ne maîtrise pas.
Kévin effectue le **passage par l'unité**. Son raisonnement, sa rédaction et son résultat son corrects. En revanche, il n'effectue pas les opérations dans l'ordre de son raisonnement écrit : il commence par multiplier par 20 (le nombre de personnes) au lieu de diviser par 6 (le nombre d'œufs). Cependant, étant donné la commutativité de la multiplication et de la division, le résultat demeure juste.
D. 1) La notion de pourcentage relève de la proportionnalité : il s'agit du nombre qui aurait été proportionnellement obtenu si l'effectif avait été de 100. Il sera donné plutôt en 6^{e} puisque, seuls les pourcentages simples (25 %, 50 %...) en lien avec les fractions doivent être acquis à l'école.
2) a) Paul effectue la moyenne des deux pourcentages. Ce qui est faux dans la plupart des cas. C'est juste uniquement lorsque l'effectif de départ est strictement le même dans les deux situations.
b) Pour que 50 % soit la bonne réponse, il faudrait que les deux médiathèques disposent du même nombre de livres, soit 4 000 livres à la bibliothèque jean Jaurès.

2 • **Linéarité mixte, multiplicative puis additive :**

Avec utilisation des décimaux	Sans utilisation des décimaux
Pour 4 €, on a 2 kg de pommes, donc pour 1 €, on a 0,5 kg de pommes et pour 5 € = 4 €+ 1 €, on a 2 kg + 0,5 kg = 2,5 kg de pommes.	Pour 4 €, on a 2 000 g de pommes, donc pour 1 €, on a 500 g de pommes et pour 5 € = 4 €+ 1 €, on a 2 000 g + 500 g = 2 500 g de pommes.

• **Passage par l'unité :**

Avec utilisation des décimaux	Sans utilisation des décimaux
2 kg de pommes coûtent 4 €, donc pour 1 €, on a 0,5 kg (2 kg÷4) et pour 5 €, on a 2,5 kg ($5 \times 0,5$ kg $= 2,5$ kg).	2 000 g de pommes coûtent 4 €, donc, pour 1 €, on a 500 g (2 000 g÷4) et pour 5 €, on a 2 500 g (5×500 g $= 2\,500$ g).

• **Coefficient de proportionnalité :**
pour passer de 2 à 4, on multiplie par 2, il s'agit du coefficient de proportionnalité. Donc, pour obtenir un prix de 5 €, il faut 2,5 kg de pommes ($2,5 \times 2 = 5$).

3 **1)** La principale notion travaillée ici est la **proportionnalité** dans le cadre de la résolution d'un problème.
2) Procédures des élèves A, B et C.
• L'**élève A** utilise une procédure mixte de linéarité : il utilise la propriété additive de la linéarité pour dire que 9 personnes, c'est 6 personnes plus 3 personnes, et la propriété multiplicative de la linéarité pour dire que 3 personnes, c'est la moitié de 6 personnes. Pour chacune de ces quantités, il associe la quantité d'ingrédients correspondant. Sa procédure est juste, son résultat également. On pourrait éventuellement lui demander de préciser les unités dans ses calculs.
• L'**élève B** utilise le passage par l'unité : il calcule la masse de farine pour une personne puis, il multiplie par 9 qui est le nombre de personnes. La procédure est correcte, mais il trouve une valeur approchée, donc son résultat est erroné (le problème ici est que la valeur obtenue par la division de 250 par 6 est une valeur approchée puisque $\frac{250}{6}$ est un nombre rationnel non décimal). Pour les pincées de sel, il commence par poser sa division mais ne va pas au bout : son résultat est juste, mais l'opération est fausse, peut-être parce qu'il l'a en fait trouvé par une autre méthode. Il n'a pas le temps de calculer toutes les quantités.
• L'**élève C** semble vouloir utiliser le passage par l'unité en posant la division euclidienne de 250 par 6 sans résultats intermédiaires. Pourtant, il pose la virgule et met des pointillés pour exprimer le fait que « ça continue » et il obtient 41 qui correspond à la masse de farine en gramme pour une personne. Ensuite, on veut la masse pour 9 personnes alors qu'on a à l'origine la masse pour 6 personnes, soit 3 personnes de plus, donc il additionne la masse de farine à trois fois le quotient entier (41) trouvé grâce à son opération ce qui est un raisonnement juste mais approximatif. Il trouve 373 qui est une valeur assez proche du résultat, mais fausse.
3) 300 est un multiple de 6, ce qui est avantageux au niveau du calcul : pour une procédure par passage à l'unité, le résultat de la division est un entier, donc l'élève B par exemple arriverait à un résultat juste. Mais ces nombres permettent aussi une autre procédure, celle de la recherche du coefficient de proportionnalité permettant de passer de 6 personnes à une masse de 300 g qui est un coefficient relativement simple (50). Ce coefficient pouvait être trouvé par un calcul mental, par un procédure type essais-erreurs ou par une division.

4 **1)** On peut utiliser les procédures suivantes :
• On a 30 dragées, soit 4 fois moins de dragées puisque 120 dragées ÷ 4 = 30 dragées donc, la masse de 30 dragées est 4 fois plus petite et vaut 360 g ÷ 4 = 90 g.
Utilisation d'un coefficient scalaire (coefficient de linéarité multiplicative) égal à 1/4.
• $120 \times 3 = 360$ donc, $30 \times 3 = 90$. La masse de 30 dragées est de 90 g.
Utilisation du coefficient de proportionnalité qui vaut 30.
• 120 dragées pèsent 360 g donc, une dragée pèse $\frac{360 \text{ g}}{120} = 3$ g.
D'où 30 dragées pèsent 30 × 3 g = 90 g. Utilisation du passage par l'unité.
2) Pour « espérer » une procédure par retour à l'unité, il faut que les autres procédures soient moins évidentes. Or, les nombres en jeu sont propices à l'utilisation d'un coefficient scalaire (un quart) ou de proportionnalité (30) qui sont simples à obtenir mentalement. On pourrait donc, par exemple, modifier l'énoncé de la façon suivante :

Une boîte contient des dragées toutes identiques. 120 dragées pèsent 270 g. Combien pèsent 32 dragées ?

Le coefficient scalaire devient 3,75 et le coefficient de proportionnalité 2,25 qui ne sont pas « simples ».

5 1) Cette situation permet de travailler le champ multiplicatif puisqu'il s'agit d'une activité d'agrandissement. Plus particulièrement, la situation se situe dans le thème transversal de la proportionnalité dans le domaine des grandeurs et mesures.

2) Analyse des trois premières affiches :

• **Affiche 1.** Les élèves ont « vu » que 6 cm, c'est 4 cm + 2 cm. Ils ont donc ajouté 2 cm à toutes les mesures du côté droit et du bas du carré. Pour le haut et le côté gauche, ils ont ajouté 3 cm, peut-être parce que les valeurs d'origine à augmenter (5 cm et 6 cm) sont plus grandes, donc il faut ajouter un peu plus que 2 cm. On remarque toutefois que l'agrandissement est le même pour toutes les mesures d'un même côté, y compris pour 7 cm qui est plus grand que 6 cm.

Réussites : ils ont su modéliser la situation par un schéma, ils ont repéré qu'il ne fallait pas toujours ajouter le même nombre.

Erreurs : ils ont commis l'erreur classique consistant à penser qu'augmenter une mesure, c'est ajouter un même nombre, c'est à dire effectuer une addition alors que l'on se situe dans le champ multiplicatif. Les valeurs à l'intérieur du carré n'ont pas été agrandies (oubli ?).

• **Affiche 2.** Les élèves ont remarqué qu'ajouter 2 cm à 4 cm, c'est ajouter deux fois 1 cm qui est le quart de 4 cm, c'est à dire, en langage mathématique : 6 cm = 4 cm + $\frac{1}{4} \times$ 4 cm. Ils utilisent les propriétés de linéarité mixte (additive et multiplicative).

Réussites : ils ont su modéliser la situation en donnant toutes les mesures nécessaires pour l'agrandissement du puzzle, ils ont trouvé les bons résultats par un raisonnement tout à fait pertinent.

Erreur : la phrase d'explication est un peu litigieuse car elle laisse penser qu'il faut ajouter le quart de la valeur d'origine (par exemple 4 cm + 1 cm = 5 cm) puis multiplier ce nombre par 2 (2×5 cm = 10 cm). Il aurait été préférable d'écrire par exemple « il faut prendre le quart de chaque nombre, le multiplier par 2, puis ajouter le nombre obtenu au nombre de départ ».

• **Affiche 3.** Ils ont utilisé les propriétés de linéarité multiplicative appliquées aux valeurs données dans l'énoncé (4 cm devient 6 cm) en prenant les deux coefficients scalaires $\frac{1}{2}$ et 3 : 6, c'est 3 fois 2 et 2, c'est 4 divisé par 2. Ensuite, ils ont appliqué ces coefficients à chacune des mesures du dessin.

Réussites : explication claire de la procédure, calculs corrects sans erreur d'écriture y compris pour les nombres décimaux.

Pas d'erreur.

3) Procédures utilisées pour l'affiche 4 :

• **4 → 6** : reprise de l'énoncé.

• **6 → 9** : on peut penser que les élèves ont ajouté la moitié de 6 à 9 qui est 3 en vertu de ce qu'ils ont fait par la suite.

• **7 → 10, 5** : pas d'explication.

• **2 → 3** : par analogie avec la correspondance 4 → 6, 2 étant la moitié de 4, il faut calculer la moitié de 6 qui est 3. Ils ont utilisé implicitement la propriété de linéarité multiplicative de la proportionnalité.

• **5 → 7, 5** : 5 c'est 4 + 1 soit 4 + 2÷2 donc, les élèves utilisent une procédure mixte utilisant la linéarité additive et multiplicative. Ils appliquent alors cette procédure pour passer de 5 à 7,5 : pour 4 cm, l'agrandissement vaut 6 cm et pour 2 cm, il est de 3 cm, donc pour 1 cm il est de 1,5 cm et pour 5 cm on a donc 6 cm + 1,5 cm = 7,5 cm.

• **9 → 13, 5** : même procédure que précédemment en utilisant la décomposition $9 = 4 + 4 + 1$ soit $4 + 4 + 2 \div 2$. Pour 4 cm on a 6 cm et pour 2 cm on a 3 cm, donc pour 9 cm, on a 6 cm + 6 cm + 3 cm ÷ 2 = 13,5 cm.